

# *Avants - Propos :*

Conformément au nouveau programme de mathématiques, ce présent manuel est le résultat d'un travail réalisé par un comité d'enseignants du secondaire qui répond au souci du Ministère de l'Éducation Nationale pour la mise en œuvre de **l'approche par compétence (A.P.C)** dans les classes de **TSE** (Terminale Sciences Exactes) au Mali et ayant pour **objectif** d'uniformiser le niveau des élèves venant des classes antérieures afin de leur offrir les mêmes chances dans la poursuite de leurs études universitaires. Il permet en outre d'harmoniser la pédagogie des mathématiques et de mettre à la disposition des élèves l'acquisition d'une formation solide.

Chacun des chapitres recouvrant l'ensemble du programme, est composé de **04** parties :

## ■ *Situation - Problème :*

Une **activité ouverte** permettant d'aborder en grande partie les connaissances nouvelles.

## ■ *Activités préparatoires :*

Les **activités préparatoires**, approches simples des nouvelles notions à partir des connaissances acquises dans les classes antérieures.

## ■ *Le cours :*

Rien que **l'essentiel dans un langage clair et simple** avec des **démonstrations**. Chaque définition ou théorème est suivi d'un exemple simple, court, en situation, pouvant servir de référence et d'aide à la démonstration.

## ■ *Exercices et problèmes :*

- **Les exercices** : Inédits et ordonnés suivant **la progression du cours**, ils contribuent à l'acquisition et à l'assimilation du cours.
- **Les problèmes** : Variés, ce sont des **problèmes de synthèse** ou des problèmes ouverts pour aller plus loin dans l'acquisition de vos connaissances sans aller au-delà du programme en vigueur.

Nous souhaitons donc que l'utilisation de ce livre ne se substitue pas au travail des professeurs en classe, mais qu'il constitue un support efficace, utile aux élèves pour mieux comprendre les mathématiques dans toute sa diversité. A cet effet, nous tenons à remercier **les éditions SAMASSA** et tous ceux qui voudront bien nous faire part de leurs remarques, critiques, suggestions ou autres solutions plus élégantes que les nôtres, que nous publierons dans une future édition.

**Les auteurs**

# SOMMAIRE

## 1 Nombres complexes.....1

- 1- Situation problème.
- 2- Activité préparatoire
- 3- Lien entre les chapitres du manuel.
- 4- Rappels et compléments des propriétés dans  $\mathbb{R}$ .
- 5- Evaluation diagnostique.
- 6- Définition et propriétés.
- 7- Opérations dans  $\mathbb{C}$ .
- 8- Conjugué d'un complexe.
- 9- Module et argument d'un complexe.
- 10- Forme trigonométrique d'un complexe.
- 11- Forme polaire d'un complexe.
- 12- Forme exponentielle.
- 13- Formules de Moivre – Formules d'Euler.
- 14- Equations dans  $\mathbb{C}$ .
- 15- Complexe et configurations géométriques du plan.
- 16- Complexe et lieux géométriques.
- 17- Complexe et transformations géométriques du plan.

## 2 Arithmétiques.....23

- 1- Situation problème.
- 2- Activité préparatoire
- 3- Introduction et définition.
- 4- Ensemble d'application.
- 5- Raisonnement par récurrence.
- 6- Division Euclidienne dans  $\mathbb{N}$ .
- 7- Divisibilité dans  $\mathbb{Z}$ .
- 8- Système de numération.
- 9- Congruence modulo  $n$ .
- 10- Congruence et structure d'anneau.
- 11- Nombre entier naturel premier.
- 12- PPCM et PGCD de deux entiers naturels  $a$  et  $b$ .
- 13- Algorithme d'Euclide.
- 14- Nombres premiers entre eux.
- 15- Résolution dans  $\mathbb{Z}^2$  de l'équation  $ax + by + c = 0$

## 3 Fonctions numériques .....63

- 1- Situation problème.
- 2- Activité préparatoire
- 3- Généralité sur les fonctions numériques.
- 4- Limites.
- 5- Continuités.
- 6- Dérivations.
- 7- Etude de fonctions.

## 4 Suites numériques

- 1- Situation problème.
- 2- Activité préparatoire
- 3- Généralité sur les suites numériques.
- 4- Convergence d'une suite
- 5- Suites majorée ; minorées et bornées.
- 6- Relation entre les limites.
- 7- Suites adjacentes.
- 8- Suites arithmétiques.
- 9- Suite géométrique.
- 10- Suites économiées.

## 5 Primitives – Intégrales – Calculs d'aires.....100

- 1- Situation problème.
- 2- Activité préparatoire
- 3- Primitive.
- 4- Intégrales.
- 5- Calculs d'aires.

## 6 Fonctions logarithmes...100

- 1- Situation problème.
- 2- Activité préparatoire
- 3- Définition.
- 4- Conséquences.
- 5- Ensemble de définition
- 6- Propriétés.
- 7- Limites remarquables.
- 8- Dérivées remarquables.
- 9- Primitives remarquables.
- 10- Etude de la fonction  $x \rightarrow \ln x$ .
- 11- Etude de la fonction  $x \rightarrow \log_a x$ .

## 7 Fonctions exponentielle.....147

- 1- Situation problème.
- 2- Activité préparatoire
- 3- Définition.
- 4- Conséquences.
- 5- Ensemble de définition
- 6- Propriétés.
- 7- Limites remarquables.
- 8- Dérivées remarquables.
- 9- Primitives remarquables.
- 10- Etude de la fonction  $x \rightarrow e^x$ .
- 11- Etude de la fonction puissance  $x \rightarrow a^x$ .

**8****Equations différentielles**

- 1- **S**ituation problème.
- 2- **A**ctivité préparatoire
- 3- **D**éfinition
- 4- **E**tude des différents cas d'équations différentielles.

**9****Dénombrement – Probabilité – Variable aléatoire – Loi binomiale – Epreuve de Bernoulli.**

- 1- **S**ituation problème.
- 2- **A**ctivité préparatoire
- 3- **D**énombrement.
- 4- **P**robabilité.
- 5- **V**ariable aléatoire.
- 6- **L**oi binomiale.
- 7- **E**preuve de Bernoulli.

**10****Barycentres...156**

- 1- **S**ituation problème.
- 2- **A**ctivité préparatoire
- 3- **I**ntroduction.
- 4- **R**appels définition et propriétés.
- 5- **F**onction vectorielle de Leibniz.
- 6- **F**onction scalaire de Leibniz.
- 7- **P**roduit scalaire et médiane d'un triangle.

**Applications affines...156**

- 1- **S**ituation problème.
- 2- **A**ctivité préparatoire
- 3- **D**éfinition et propriétés.
- 4- **E**tude des cas de transformation du plan.
- 5- **I**sométrie et similitude du plan.
- 6- **M**atrices.

**12****Statistiques...156**

- 1- **S**ituation problème.
- 2- **A**ctivité préparatoire
- 3- **D**éfinition et présentation des données.
- 4- **E**léments caractéristiques d'une série statistique.
- 5- **S**érie statistique à double caractères  $x$  et  $y$ .

**13****Coniques...156**

- 1- **S**ituation problème.
- 2- **A**ctivité préparatoire
- 3- **G**énéralité.
- 4- **I**ntroduction et présentation d'une conique.
- 5- **C**lassification d'une conique.
- 6- **E**quations cartésiennes et réduite des coniques.
- 7- **A**pplication des coniques.
- 8- **E**tude et représentation des coniques.

**Sujets types Bac**

## LIEN ENTRE LES CHAPITRES DU MANUEL



# Nombres Complexes

Dans les classes de 10<sup>ième</sup> et 11<sup>ième</sup> vous avez sans doute étudié les équations du second degré. Mais cette notion s'étend bien au-delà.

**Exemple** : Jérôme Cardant (mathématicien Italien) donna naissance à un nouvel ensemble au XVI<sup>ième</sup> siècle afin de trouver des solutions pour des équations du second degré à discriminant négatif. Cet ensemble s'appellera : **Ensemble des nombres complexes** noté  $\mathbb{C}$ .



Jérôme Cardan (1501 – 1576)  
Mathématicien, astronome, médecin et philosophe Italien.

## Sommaire

18- Introduction.....	2	11-Complexe et configurations géométriques du plan.....	45
19- Définition et propriétés.....	3	12-Complexe et lieux géométriques.....	51
20- Opérations dans $\mathbb{C}$ .....	5	13-Complexe et transformations géométriques du plan.....	55
21- Conjugué d'un complexe.....	7		
22- Module et argument d'un complexe.....	10		
23- Forme trigonométrique d'un complexe.....	16		
24- Forme polaire d'un complexe.....	18		
25- Forme exponentielle.....	20		
26- Formules de Moivre – Formules d'Euler....	24		
27- Equations dans $\mathbb{C}$ .....	28		

# Objectifs

Ce thème vise à :

- Définir l'ensemble des nombres complexes et en dégager les règles de calcul ;
- Utiliser les caractérisations complexes pour interpréter des configurations élémentaires du plan ;
- Utiliser les nombres complexes pour résoudre des problèmes.

## Savoirs et savoir-faire

### 1) ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"><li>• Forme algébrique d'un nombre complexe.</li><li>• Partie réelle (Re), partie imaginaire (Im).</li><li>• Conjugué d'un nombre complexe, propriétés.</li><li>• Somme, produit, quotient de deux nombres complexes.</li><li>• Formule du binôme</li><li>• Egalité de deux nombres complexes.</li><li>• Module et argument d'un nombre complexe.</li><li>• Module et argument du produit, de l'inverse, du quotient et de la puissance entière d'un nombre complexe</li><li>• Forme trigonométrique.</li><li>• Affiche d'un point, d'un vecteur</li><li>• Point image et vecteur image d'un nombre complexe.</li><li>• Forme exponentielle (<math>z = re^{i\theta}</math>).</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire d'un nombre complexe.</li><li>• Calculer la somme, le produit et le quotient de deux nombres complexes donnés sous forme algébrique.</li><li>• Développer <math>(a + b)^n</math></li><li>• Déterminer le conjugué d'un nombre complexe</li><li>• déterminer le module et un argument d'un nombre complexe non nul donnés sous forme algébrique.</li><li>• Représenter graphiquement un nombre complexe donné sous forme algébrique.</li><li>• Calculer le produit et le quotient de deux nombres complexes écrits sous formes trigonométrique.</li><li>• Passer à la forme trigonométrique à la forme algébrique et inversement.</li></ul>

## 2) NOMBRES COMPLEXES ET TRIGONOMETRIE

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Formule de Moivre, formule d'Euler</li> </ul>	Utiliser les formules de Moivre et d'Euler pour <ul style="list-style-type: none"> <li>• retrouver des formules trigonométriques ;</li> <li>• Linéariser des puissances de <math>\cos x</math> et <math>\sin x</math> à l'aide des nombres complexes</li> </ul>

## 3) EQUATIONS DANS $\mathbb{C}$

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Racines carrées d'un nombre complexe non nul.</li> <li>• Equation du second degré dans <math>\mathbb{C}</math></li> <li>• Racine <math>n^{\text{ième}}</math> d'un nombre complexe non nul.</li> <li>• Racine <math>n^{\text{ième}}</math> de l'unité ; interprétation graphique</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique.</li> <li>• Résoudre une équation du second degré dans <math>\mathbb{C}</math> ou une équation s'y ramenant.</li> <li>• Déterminer sous forme trigonométrique les racines <math>n^{\text{ième}}</math> d'un nombre complexe et les représenter graphiquement</li> </ul>

## 4) NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right)</math> est une mesure de <math>(\widehat{DC}, \widehat{BA})</math></li> <li>• Caractérisations complexes :               <ul style="list-style-type: none"> <li>- D'un cercle ;</li> <li>- D'une droite.</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Déterminer que des points sont cocycliques.</li> <li>• Démontrer que des points sont alignés.</li> </ul> Utiliser les caractérisations complexes pour : <ul style="list-style-type: none"> <li>- Justifier une priorité géométrique ;</li> <li>- Déterminer des lieux géométriques</li> </ul>

## Rappels et compléments des propriétés dans $\mathbb{R}$

### 1) Ensemble des entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels est noté :  $\mathbb{N}$  tel que :  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \dots \dots + \infty\}$

**NB** :

L'ensemble des entiers naturels privé de zéro est noté  $\mathbb{N}^*$  tel que :  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4 \dots + \infty\}$

### 2) L'ensemble des entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs est noté :  $\mathbb{Z}$  tel que :  $\mathbb{Z} = \{-\infty \dots -2 ; 0, 1, 2, 3, 4, \dots + \infty\}$ .

**NB** :

L'ensemble des entiers relatifs positifs est noté :  $\mathbb{Z}^+$  tel que  $\mathbb{Z}^+ = \{0 ; +1 ; \dots + \infty\}$

L'ensemble des entiers relatifs négatifs est noté :  $\mathbb{Z}^-$  tel que  $\mathbb{Z}^- = \{-\infty \dots -2 ; -1 \dots 0\}$

L'ensemble des entiers relatifs privés de zéro est noté :  $\mathbb{Z}^*$  tel que :

$$\mathbb{Z}^* = \{-\infty \dots -2 ; -1 \dots +1 ; +2 ; \dots + \infty\}$$

L'ensemble des entiers relatifs positifs et privés de zéro est noté :  $\mathbb{Z}_+^*$  tel que :

$$\mathbb{Z}_+^* = \{+1 ; +2 ; \dots + \infty\}$$

L'ensemble des entiers relatifs négatifs et privés de zéro est noté :  $\mathbb{Z}_-^*$  tel que :

$$\mathbb{Z}_-^* = \{-\infty \dots -2 ; -1\}$$

### 3) L'ensemble des nombres rationnels

L'ensemble des nombres rationnels est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs.

L'ensemble des nombres rationnels est noté  $\mathbb{Q}$  tel que :  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{P}{Q} \text{ avec } P \in \mathbb{Z} ; q \in \mathbb{Z}^* \right\}$

### 4) L'ensemble des nombres réels

Certains nombre comme :  $\sqrt{2}$  ;  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\pi$  ne peuvent pas s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs. Ce sont des nombres irrationnels et l'ensemble des nombres irrationnels et rationnels forment l'ensemble des nombres réels.

L'ensemble des entiers relatifs est noté :  $\mathbb{R}$  tel que :

$$\mathbb{R} = \{-\infty ; -\sqrt{2} ; \frac{-3}{2} ; -2 ; 0 ; 1 ; 2 ; \sqrt{2} ; \frac{3}{2}, \dots + \infty\}.$$

**NB** :  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

## Evaluation diagnostique

### ACTIVITÉS :

#### Activité 1:

Résous dans  $\mathbb{N}$  puis dans  $\mathbb{Z}$  l'équation :  $x + 7 = 6$ . Conclure.

#### Activité 2:

Résous dans  $\mathbb{Z}$  puis dans  $\mathbb{Q}$  l'équation :  $3x = 1$ . Conclure.

#### Activité 3:

Résous dans  $\mathbb{Q}$  puis dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $x^2 - 2 = 0$ . Conclure.

#### Activité 4:

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $x^2 + 1 = 0$ . Conclure.

**Remarque** : quand une équation n'a pas de solutions, une démarche naturelle (et historique) consiste à en chercher dans un ensemble plus grand. Au stade de nos connaissances actuelles, l'ensemble numérique le plus grand que l'on a rencontré est  $\mathbb{R}$ . Ainsi un nouvel ensemble pris naissance au XVI<sup>ème</sup> siècle par **JEROME CARDAN (Mathématicien Italien)** afin de trouver des solutions pour l'équation :  $x^2 + 1 = 0$  ou des équations du second degré à discriminant négatif. Cet ensemble s'appellera :

**Ensemble des nombres complexes ou ensemble des corps complexes et sera noté  $\mathbb{C}$ .**

Le principal élément de  $\mathbb{C}$  sera noté  **$i$**  ( **$i$**  comme imaginaire).

Le nombre  **$i$**  est tel que  **$i^2 = -1$** . L'équation ci-dessus possède alors deux solutions :  $x^2 + 1 = 0$  équivaut à  $x^2 - i^2 = 0$  soit  $(x - i)(x + i) = 0$  donc  $x = i$  ou  $x = -i$ .

## I) Définition ; vocabulaire et interprétation graphique

### 1) Définition :

On appelle nombre complexe, tout couple ordonné de deux nombres réels  $a$  et  $b$  tel que  $Z = a + ib$  où  $i$  est un imaginaire tel que  $i^2 = -1$ .

### 2) Notation et vocabulaire : Soit $Z$ un nombre complexe tel que $Z = a + ib$ .

- l'écriture  $Z = a + ib$  est appelée forme algébrique de  $Z$ .
- le nombre réel  $a$  est appelé partie réelle de  $Z$  et est noté  $\text{Re}(Z)$
- le nombre réel  $b$  est appelé partie imaginaire de  $Z$  et est noté  $\text{Im}(Z)$

### NB :

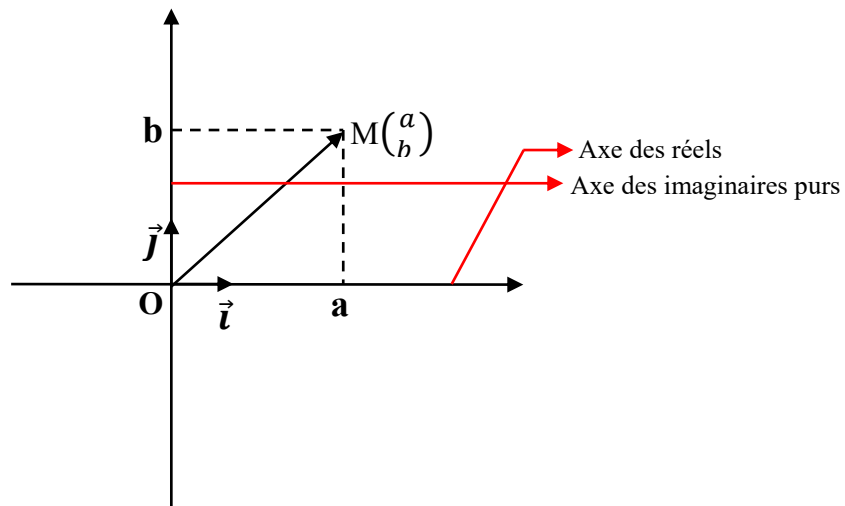
- Si  $b = 0$  ; alors  $Z = a$  ( $Z$  est un nombre à la fois réel et complexe) car  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- Si  $a = 0$  ; alors  $Z = ib$  ( $Z$  est un imaginaire pur).

### 3) Interprétation graphique :

A tout point  $M\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$  du plan  $P$ , on peut associer un nombre complexe  $Z = a + ib$ .

- $M$  est le point image et  $Z$  l'affixe du point  $M$ .
- $\overrightarrow{OM}$  est le vecteur image du nombre complexe  $Z = a + ib$  l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{OM}$ .

Ainsi on a la représentation graphique du  $M$  comme suit :



(Figure 1)

### Exemple

Dans chacun des nombres complexes suivants donner la partie réelle et la partie imaginaire.

a)  $Z = -2 - 3i$  ; b)  $Z = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{2}$  ; c)  $Z = -\sqrt{3}$  ; d)  $Z = i$  ; e)  $Z = 0$  ; f)  $Z = 2 + \frac{i}{\sqrt{2}}$

### Solution

a)  $Z = -2 - 3i \Rightarrow \operatorname{Re}(Z) = -2$  et  $\operatorname{Im}(Z) = -3$

b)  $Z = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{2} \Rightarrow Z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{Re}(Z) = -\frac{1}{2}$  et  $\operatorname{Im}(Z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c)  $Z = -\sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{Re}(Z) = -\sqrt{3}$  et  $\operatorname{Im}(Z) = 0$

d)  $Z = i \Rightarrow \operatorname{Re}(Z) = 0$  et  $\operatorname{Im}(Z) = 1$

e)  $Z = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(Z) = 0$  et  $\operatorname{Im}(Z) = 0$

f)  $Z = 2 + \frac{i}{\sqrt{2}} \Rightarrow \operatorname{Re}(Z) = 2$  et  $\operatorname{Im}(Z) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

## II) Operations dans $\mathbb{C}$ :

Soient  $Z$  et  $Z'$  deux nombres complexes tels que :  $Z = a + ib$  et  $Z' = a' + ib'$ .

### 1) Egalité :

Deux nombres complexes  $Z$  et  $Z'$  sont égaux si et seulement si  $Z = Z' \Leftrightarrow a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a'$  et  $b = b'$ .



### 2) Somme:

La somme des deux complexes  $Z$  et  $Z'$  est tel que :  $Z + Z' = (a + a') + i(b + b')$ .

### 3) Produit :

Le Produit des deux complexes  $Z$  et  $Z'$  est tel que :

$$Z \times Z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b) \text{ (avec } i^2 = -1).$$

### 4) Quotient :

Le quotient de deux complexes  $Z$  et  $Z'$  est tel que :

$$\frac{Z}{Z'} = \frac{aa' + bb'}{(a')^2 + (b')^2} + i \frac{a'b - ab'}{(a')^2 + (b')^2}$$

**N.B :** Le nombre  $\frac{1}{Z}$  est appelé inverse du complexe  $Z$  tel que :  $\frac{1}{Z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$



### Exemple

Ecrivez les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

a) $Z = (2 - 5i)(3 + i)$	c) $Z = \frac{(3 + 2i)(1 + i)}{1 - i}$	e) $Z = \frac{4 + 3i}{4 - 3i}$
b) $Z = (4 + i)(1 + 2i)$	d) $Z = \frac{1}{4 + 3i}$	f) $Z = \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + i\sqrt{2}}$

### Solution

a)  $Z = (2 - 5i)(3 + i) \Rightarrow Z = 11 - 13i$

b)  $Z = (4 + i)(1 + 2i) \Rightarrow Z = 2 + 9i$

$$\text{c) } Z = \frac{(3+2i)(1+i)}{1-i} \Rightarrow Z = \frac{(3+2i)(1+i)^2}{(1)^2 + (-1)^2} = \frac{(3+2i)(1+2i-1)}{2} = \frac{(3+2i)(2i)}{2}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{4i^2 + 6i}{2} = \frac{-4 + 6i}{2} = -2 + 3i$$

$$\text{d) } Z = \frac{1}{4+3i} \Rightarrow Z = \frac{(4-3i)}{(4)^2 + (3)^2} = \frac{(4-3i)}{25} = \frac{4}{25} - \frac{3i}{25}$$

$$\text{e) } Z = \frac{4+3i}{4-3i} \Rightarrow Z = \frac{(4+3i)(4+3i)}{(4)^2 + (-3)^2} = \frac{16+24i-9}{25} = \frac{16+24i-9}{25} = \frac{7+24i}{25} = \frac{7}{25} + i \frac{24}{25}$$

$$\text{f) } Z = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+i\sqrt{2}} \Rightarrow Z = \frac{1-i\sqrt{2}-i\sqrt{3}+i^2\sqrt{6}}{(1)^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{(1-\sqrt{6})-i(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{3}$$

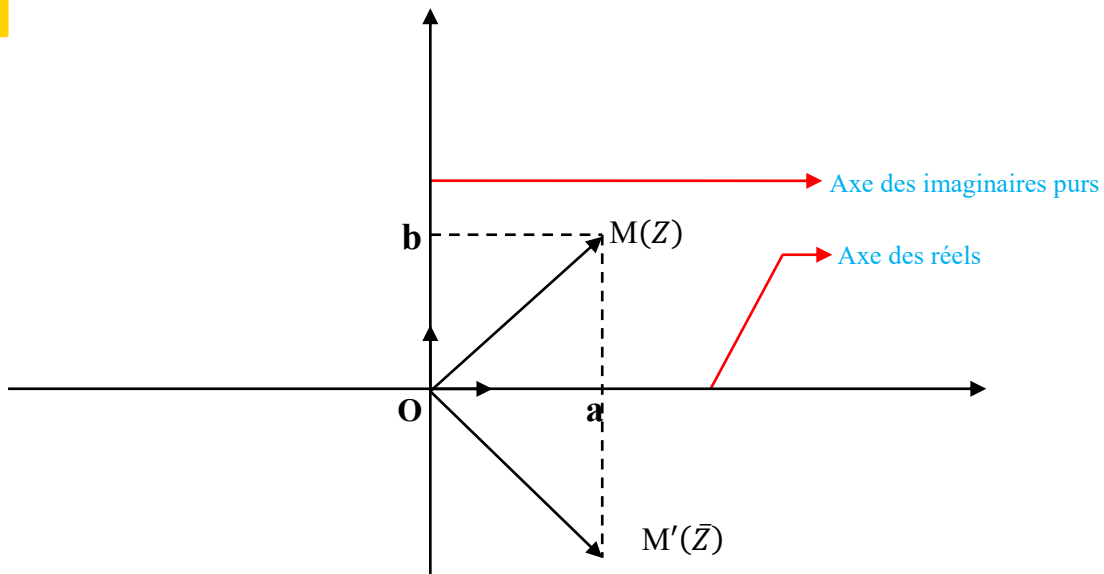
$$\Rightarrow Z = \frac{(1-\sqrt{6})}{3} - i \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{3}$$

### III) Conjugué d'un nombre complexe :

#### 1) Définition :

Soit  $Z = a + ib$  l'expression algébrique d'un nombre complexe. On appelle conjugué de  $Z$ , le nombre complexe noté  $\bar{Z}$  tel que  $\bar{Z} = a - ib$ .

**NB :** les images des deux nombres complexes  $Z$  et  $\bar{Z}$  sont symétriques par rapport à l'axe des réels.



#### Exemple

Donner le conjugué des nombres complexes suivants :

a)  $Z = 1 - i$  ;   b)  $Z = i + \sqrt{3}$  ;   c)  $Z = i$ .   d)  $Z = 3$

#### Solution

a)  $Z = 1 - i \Rightarrow \bar{Z} = 1 + i$  ;   b)  $Z = i + \sqrt{3} \Rightarrow \bar{Z} = -i + \sqrt{3}$

c)  $Z = i \Rightarrow \bar{Z} = -i$  ;   d)  $Z = 3 \Rightarrow \bar{Z} = 3$

## 2) Propriétés :

Soient  $Z$  et  $Z'$  deux complexes :

$$P_1 : Z = \bar{Z} \Leftrightarrow Z \text{ est un réel}$$

$$P_2 : Z = -\bar{Z} \Leftrightarrow Z \text{ est un imaginaire pur}$$

$$P_3 : \overline{Z + Z'} = \bar{Z} + \bar{Z}'$$

$$P_4 : \overline{Z \times Z'} = \bar{Z} \times \bar{Z}'$$

$$P_5 : \overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)} = \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}'} \text{ (avec } Z' \neq 0)$$

$$P_6 : \overline{\left(\frac{a}{Z}\right)} = \frac{a}{\bar{Z}} \text{ (avec } Z' \neq 0 \text{ et } a \in \mathbb{R})$$

$$P_7 : \overline{Z^n} = (\bar{Z})^n$$

$$P_8 : \operatorname{Re}(Z) = \frac{Z + \bar{Z}}{2} \text{ et } \operatorname{Im}(Z) = \frac{Z - \bar{Z}}{2i}$$

$$P_9 : Z \times \bar{Z} \text{ est un réel positif}$$

### Exemple

Soit  $A$  un nombre complexe tel que  $A = \frac{2 + \bar{Z}}{1 - \bar{Z}}$  (avec  $\bar{Z} \neq 1$ )

- 1) Ecrire  $A$  sous forme algébrique
- 2) Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan complexe tel que :
  - a)  $A$  soit un réel
  - b)  $A$  soit un imaginaire pur.

### Solution

#### 1) Forme algébrique de $A$

Posons  $Z = x + iy \Rightarrow \bar{Z} = x - iy$

$$\begin{aligned} \text{On a : } Z &= \frac{2 + (x - iy)}{1 - (x - iy)} = \frac{(2 + x) + i(-y)}{(1 - x) + i(y)} = \frac{[(2 + x) + i(-y)][(1 - x) - i(y)]}{(1 - x)^2 + (y)^2} \\ &= \frac{(2 + x)(1 - x) - i(2 + x)(y) + i(-y)(1 - x) - y^2}{(1 - x)^2 + (y)^2} \\ &= \frac{(-x^2 - y^2 - x + 2) + i(-3y)}{(1 - x)^2 + (y)^2} = \frac{(-x^2 - y^2 - x + 2)}{(1 - x)^2 + (y)^2} + i \frac{(-3y)}{(1 - x)^2 + (y)^2} \end{aligned}$$

2) Déterminons l'ensemble des points **M** du plan tel que :

a) **A soit un réel**

**Z** est un réel si sa partie imaginaire est nulle c'est-à-dire  $\text{Im}(\mathbf{Z}) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(-3y)}{(1-x)^2 + (y)^2} = 0 \Leftrightarrow -3y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Alors l'ensemble des points **M** cherchés est la droite d'équation  $y = 0$  ou encore l'axe des abscisses.

b) **A soit un imaginaire pur.**

**A** est un imaginaire pur si sa partie réelle est nulle c'est-à-dire  $\text{Re}(\mathbf{A}) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(-x^2 - y^2 - x + 2)}{(1-x)^2 + (y)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 - y^2 - x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \frac{9}{4}$$

Alors l'ensemble des points **M** cherchés est le cercle de centre  $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$  et de rayon  $r = \frac{3}{2}$

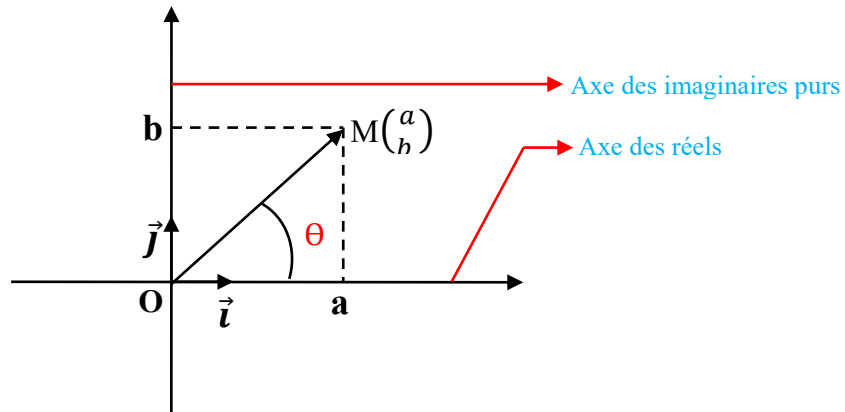
**NB** :  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$

## IV) Module et argument d'un nombre complexe :

### 1) Module :

Dans le plan rapporté à un repère  $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ ; plaçons le point M de Z dont l'affixe est

$$Z = a + ib \Rightarrow M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



$$\text{Ici : } \|\overrightarrow{OM}\| = d(OM) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

#### a- Définition :

Soit  $Z = a + ib$  un nombre complexe. On appelle module de Z, le nombre réel positif ou nul noté :  $|Z|$  tel que  $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Si M est le point image de Z alors  $|Z| = d(O ; M) = \sqrt{a^2 + b^2}$

### Exemple

Déterminer le module des nombres complexes suivants :

$$\text{a) } Z = -i ; \text{ b) } Z = \sqrt{3} ; \text{ c) } Z = \frac{1-i}{2} ; \text{ d) } Z = 1 - i\sqrt{3} ; \text{ e) } Z = 1 + i$$

### Solution

$$\text{a) } Z = -i \Rightarrow |Z| = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{b) } Z = \sqrt{3} \Rightarrow |Z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (0)^2} = \sqrt{3+0} = \sqrt{3}$$

$$\text{c) } Z = \frac{1-i}{2} \Rightarrow |Z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{d) } Z = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |Z| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{e) } Z = 1 + i \Rightarrow |Z| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

#### b- Propriétés :

$$\mathbf{P}_1 : |Z| \text{ est toujours positif} \quad ; \quad \mathbf{P}_2 : |Z| = |\bar{Z}| \quad ; \quad \mathbf{P}_3 : |Z| = 0 \Leftrightarrow Z = 0$$

$$\mathbf{P}_4 : |Z \times Z'| = |Z| \times |Z'| \quad ; \quad \mathbf{P}_5 : |Z + Z'| \leq |Z| + |Z'| \text{ (Inégalité triangulaire)}$$

$$\mathbf{P}_6 : \left| \frac{Z}{Z'} \right| = \frac{|Z|}{|Z'|} \text{ (avec } Z' \neq 0) \quad ; \quad \mathbf{P}_7 : \left| \frac{a}{Z} \right| = \frac{a}{|Z|} \text{ (avec } Z \neq 0 \text{ et } a \in \mathbb{R}) \quad ;$$

$$\mathbf{P}_8 : |Z^n| = |Z|^n \text{ (avec } n \in \mathbb{N}^*)$$

### Exemple

Détermine le module des nombres complexes suivants

$$Z_1 = 1 - i\sqrt{3} \quad ; \quad Z_2 = 2 + 2i \quad ; \quad Z_3 = -1 - i\sqrt{3} \quad ; \quad Z_4 = \frac{Z_1}{Z_2} \quad ; \quad Z_5 = (Z_2)^2 \times Z_3 \quad ; \quad Z_6 = \left( \frac{Z_3}{Z_1} \right)^3$$

### Solution

$$Z_1 = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |Z_1| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$Z_2 = 2 + 2i \Rightarrow |Z_2| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$Z_3 = -1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |Z_3| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$|Z_4| = \left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Z_5 = (Z_2)^2 \times Z_3 \Rightarrow |Z_5| = |(Z_2)^2 \cdot Z_3| = |(Z_2)^2| \times |Z_3| = |Z_2|^2 \times |Z_3|$$

$$\Rightarrow |Z_5| = (2\sqrt{2})^2 \times (2)$$

$$\Rightarrow |Z_5| = 4 \times 2 \times 2 = 16$$

$$|Z_6| = \left| \left( \frac{Z_3}{Z_1} \right)^2 \right| = \frac{|(Z_3)^2|}{|(Z_1)^2|} = \frac{|Z_3|^2}{|Z_1|^2} = \frac{(2)^2}{(2)^2} = 1$$

## 2) Argument :

### a- Définition :

En observant la **figure 1** ci-dessus représentant un triangle rectangle d'angle  $\theta$ , on a :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

Soit  $Z$  est un nombre complexe de module  $|Z|$  (avec  $|Z| \neq 0$ ). On appelle argument de  $Z$ , le nombre réel noté  $\theta$  ou **arg** ( $Z$ ) tel que :

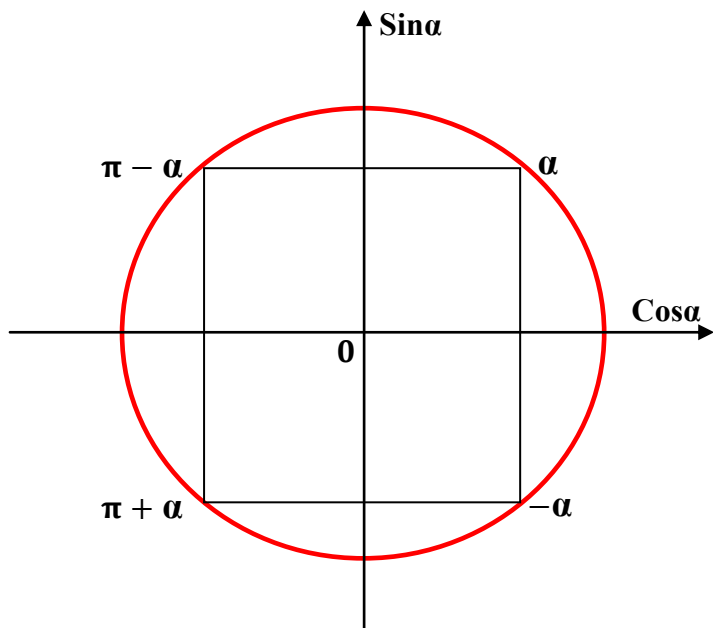
$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{|Z|} \\ \sin\theta = \frac{b}{|Z|} \end{cases}$$

### N.B :

**Le cercle de référence trigonométrique et le tableau des angles trigonométriques sont nécessaires à connaître pour le calcul des arguments :**



## Cercle trigonométrique et le Tableau des angles remarquables trigonométriques



Degrés	Radians	Sinus	Cosinus
0°	0	0	1
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0
180°	$\pi$	0	-1
360°	$2\pi$	0	1

### Exemple

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants

$$Z_1 = -1 - i\sqrt{3} \quad ; \quad Z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad Z_3 = 1 + i \quad ; \quad Z_4 = 1 - i\sqrt{3}$$

### Solution

$$Z_1 = -1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |Z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg(Z_1) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}$$

$$Z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |Z_2| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

$$\arg(Z_2) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$Z_3 = 1 + i \Rightarrow |Z_3| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\arg(Z_3) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$Z_4 = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |Z_4| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg(Z_4) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$$

### **b- Propriétés :**

Soient  $Z$  et  $Z'$  deux nombres complexes d'arguments respectifs  $\arg(Z)$  et  $\arg(Z')$

$$P_1 : \arg(Z \times Z') = \arg(Z) + \arg(Z') \quad ; \quad P_2 : \arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z) - \arg(Z')$$

$$P_3 : \arg(Z^n) = n\arg(Z) \text{ (avec } n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad P_4 : \arg\left(\frac{a}{Z}\right) = -\arg(Z) \text{ (avec } Z \neq 0)$$

$$P_5 : \arg(\bar{Z}) = -\arg(Z)$$

### **Exemple**

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = 1 - i\sqrt{3} \quad ; \quad Z_2 = 2 + 2i \quad ; \quad Z_3 = -1 - i\sqrt{3} \quad ; \quad Z_4 = \frac{Z_1}{Z_2} \quad ; \quad Z_5 = (Z_2)^2 \times Z_3 \quad ; \quad Z_6 = \left(\frac{Z_3}{Z_1}\right)^3$$

### **Solution**

$$Z_1 = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |Z_1| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg(Z_1) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{3}$$

$$Z_2 = 2 + 2i \Rightarrow |Z_2| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\arg(Z_2) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$Z_3 = -1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |Z_3| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg(Z_3) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}$$

$$|Z_4| = \left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Et

$$\arg(Z_4) = \arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg(Z_1) - \arg(Z_2) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{-7\pi}{12}$$

$$Z_5 = (Z_2)^2 \times Z_3 \Rightarrow |Z_5| = |(Z_2)^2 \cdot Z_3| = |(Z_2)^2| \times |Z_3| = |Z_2|^2 \times |Z_3| = (2\sqrt{2})^2 \times 2$$

$$\Rightarrow |Z_5| = 4 \times 2 \times 2 = 16$$

Et

$$\arg(Z_5) = \arg[(Z_2)^2 \cdot Z_3] = \arg(Z_2)^2 + \arg(Z_3) = 2\arg(Z_2) + \arg(Z_3) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \arg(Z_5) = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$$

$$|Z_6| = \left| \left(\frac{Z_3}{Z_1}\right)^2 \right| = \frac{|(Z_3)^2|}{|(Z_1)^2|} = \frac{|Z_3|^2}{|Z_1|^2} = \frac{(2)^2}{(2)^2} = 1$$

$$\arg\left[\left(\frac{Z_3}{Z_1}\right)^2\right] = 2\arg\left(\frac{Z_3}{Z_1}\right) = 2[\arg(Z_3) - \arg(Z_1)] = 2\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{10\pi}{3}$$

## V) Forme trigonométrique d'un nombre complexe :

### 1) Définition :

Soit  $Z = a + ib$  un nombre complexe de module  $r$  et d'argument  $\theta$ . On appelle forme trigonométrique de  $Z$  toute écriture de la forme  $Z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$  avec  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  et

$$\theta \in [-\pi ; \pi[ \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

### 2) Propriétés :

Soient  $Z$  et  $Z'$  deux complexes tels que  $Z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$  et  $Z' = r' (\cos \theta' + i \sin \theta')$

$$P_1 : Z \times Z' = r \times r' [\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')]$$

$$P_2 : \frac{Z}{Z'} = \frac{r}{r'} [\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')]$$

$$P_3 : Z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

**NB :** si  $r = 1$  on a :  $Z^n = [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$  (formule de Moivre)

### Exemple

Ecrivez sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$Z_1 = 1 - i\sqrt{3} ; Z_2 = 2 + 2i ; Z_3 = -1 - i\sqrt{3} ; Z_4 = \frac{Z_1}{Z_2} ; Z_5 = (Z_2)^2 \times Z_3 ; Z_6 = \left(\frac{Z_3}{Z_1}\right)^3$$

### Solution

$$Z_1 = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |Z_1| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg(Z_1) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{3}$$

$$\text{Alors } Z_1 = 2 \left[ \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) \right]$$

$$\mathbf{Z}_2 = \mathbf{2} + \mathbf{2i} \Rightarrow |\mathbf{Z}_2| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\arg(\mathbf{Z}_2) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Alors } \mathbf{Z}_2 = 2\sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$\mathbf{Z}_3 = -1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |\mathbf{Z}_3| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg(\mathbf{Z}_3) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{Alors } \mathbf{Z}_3 = 2 \left[ \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

$$|\mathbf{Z}_4| = \left| \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} \right| = \frac{|\mathbf{Z}_1|}{|\mathbf{Z}_2|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Et

$$\arg(\mathbf{Z}_4) = \arg\left(\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2}\right) = \arg(\mathbf{Z}_1) - \arg(\mathbf{Z}_2) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{Alors } \mathbf{Z}_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right]$$

$$\mathbf{Z}_5 = (\mathbf{Z}_2)^2 \times \mathbf{Z}_3 \Rightarrow |\mathbf{Z}_5| = |(\mathbf{Z}_2)^2 \cdot \mathbf{Z}_3| = |(\mathbf{Z}_2)^2| \times |\mathbf{Z}_3| = |\mathbf{Z}_2|^2 \times |\mathbf{Z}_3| = (2\sqrt{2})^2 \times (2)$$

$$\Rightarrow |\mathbf{Z}_5| = 4 \times 2 \times 2 = 16 \text{ et}$$

$$\arg(\mathbf{Z}_5) = \arg[(\mathbf{Z}_2)^2 \cdot \mathbf{Z}_3] = \arg(\mathbf{Z}_2)^2 + \arg(\mathbf{Z}_3) = 2\arg(\mathbf{Z}_2) + \arg(\mathbf{Z}_3) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \arg(\mathbf{Z}_5) = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$$

$$\text{Alors } \mathbf{Z}_5 = 16 \left[ \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) \right]$$

$$|\mathbf{Z}_6| = \left| \left(\frac{\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1}\right)^2 \right| = \frac{|(\mathbf{Z}_3)^2|}{|(\mathbf{Z}_1)^2|} = \frac{|\mathbf{Z}_3|^2}{|\mathbf{Z}_1|^2} = \frac{(2)^2}{(2)^2} = 1$$

$$\arg\left[\left(\frac{\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1}\right)^2\right] = 2\arg\left(\frac{\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1}\right) = 2[\arg(\mathbf{Z}_3) - \arg(\mathbf{Z}_1)] = 2\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{Alors } \mathbf{Z}_6 = \left[ \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

## VI) Forme polaire d'un nombre complexe

### 1) Définition :

Soit  $Z$  un nombre complexe de module  $r$  et d'argument  $\theta$ . On appelle forme polaire de  $Z$  toute écriture de  $Z$  de la forme  $Z = [r ; \theta]$

### 2) Propriétés :

Soient  $Z$  et  $Z'$  deux complexes tels que  $Z = [r ; \theta]$  et  $Z' = [r' ; \theta']$

$$P_1 : Z \cdot Z' = [r \cdot r' ; \theta + \theta']$$

$$P_2 : \frac{Z}{Z'} = \left[ \frac{r}{r'} ; \theta - \theta' \right]$$

$$P_3 : Z^n = [r^n ; n\theta]$$

### Exemple

Donner la forme polaire des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = -1 - i ; Z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} ; Z_3 = 1 - i\sqrt{3} ; Z_1 \times Z_2 ; \frac{Z_3}{Z_2} ; Z_3^4$$

### Solution

$$Z_1 = -1 - i \Rightarrow |Z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\arg(Z_1) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{Alors } Z_1 = \left[ \sqrt{2} ; \frac{5\pi}{4} \right]$$

$$Z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \Rightarrow |Z_2| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\arg(Z_2) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos\theta = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ \sin\theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Alors } Z_2 = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{3\pi}{4} \right]$$

$$Z_3 = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |Z_3| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg(Z_3) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$\text{Alors } Z_3 = \left[ 2 ; -\frac{\pi}{3} \right]$$

$$Z_1 \times Z_2 = \left[ \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \right] = [1 ; 2\pi]$$

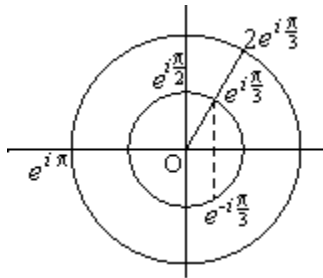
$$\frac{Z_3}{Z_2} = \left[ \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} ; -\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4} \right] = \left[ 2\sqrt{2} ; -\frac{13\pi}{12} \right]$$

$$Z_3^4 = \left[ 2^4 ; -\frac{4\pi}{3} \right]$$

## VII) Forme exponentielle d'un nombre complexe :

### 1) Définition :

Soit  $Z$  un nombre complexe de module  $r$  et d'argument  $\theta$ . On appelle forme exponentielle d'un nombre complexe  $Z$ , toute écriture de  $Z$  se ramenant sous la forme  $Z = r e^{i\theta}$  où son conjugué est  $\bar{Z} = r e^{-i\theta}$



### 2) Propriétés :

Soient  $Z$  et  $Z'$  deux nombres complexes de formes exponentielles respectives :

$$Z = r e^{i\theta} \text{ et } Z' = r' e^{i\theta'}$$

$$P_1 : Z \cdot Z' = r \cdot r' e^{i(\theta + \theta')}$$

$$P_2 : \frac{Z}{Z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta - \theta')}$$

$$P_3 : Z \cdot \bar{Z} = r^2 e^{i(\theta - \theta)} = r^2 e^{i(0)} = r^2 e^0 = r^2 \cdot 1 = r^2 \text{ ( Avec } e^0 = 1 \text{ )}$$

$$P_4 : Z^n = r^n e^{in\theta}$$

**P<sub>5</sub> : Formule d'Euler**

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + \bar{e}^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - \bar{e}^{-i\theta}}{2i} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} e^{in\theta} + \bar{e}^{-in\theta} = 2 \cos n\theta \\ e^{in\theta} - \bar{e}^{-in\theta} = 2i \sin n\theta \end{array} \right.$$

## Exemple 1

Compléter le tableau suivant

Formes algébriques de Z	$-5(1 + i\sqrt{3})$		
Formes trigonométriques de Z			$2 \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$
Formes exponentielles de Z		$4e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$	

## Exemple 2

Soient les nombres complexes :

$$Z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} ; Z_2 = 1 - i ; Z_3 = \frac{Z_1}{Z_2}$$

- 1) Ecrire  $Z_1$ ,  $Z_2$  et  $Z_3$  sous forme trigonométrique.
- 2) Ecrire  $Z_3$  sous forme algébrique.
- 3) Déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ .
- 4) Calculez  $(Z_3)^{24}$ .

## Solution1

Formes algébriques de Z	$-5(1 + i\sqrt{3})$	$2(-1 + i\sqrt{3})$	$\sqrt{2}(1 - i)$
Formes trigonométriques de Z	$10 \left[ \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right]$	$4 \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right]$	$2 \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$
Formes exponentielles de Z	$10e^{\frac{i4\pi}{3}}$	$4e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$	$2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

## Solution 2

Soient les nombres complexes :  $Z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$  ;  $Z_2 = 1 - i$  ;  $Z_3 = \frac{Z_1}{Z_2}$

1) Ecrire  $Z_1$ ,  $Z_2$  et  $Z_3$  sous forme trigonométrique.

$$Z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |Z_1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\arg(Z_1) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos\theta = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{6}$$

**Alors**  $Z_1 = \sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) \right]$

$$Z_2 = 1 - i \Rightarrow |Z_2| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\arg(Z_2) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{4}$$

**Alors**  $Z_2 = \sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) \right]$

$$Z_3 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \left[ \cos\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \right] = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

**Alors**  $Z_3 = \left[ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right]$

2) Ecrire  $Z_3$  sous forme algébrique.

$$Z_3 = \frac{Z_1}{Z_2} \Rightarrow Z_3 = \frac{\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}}{1 - i} = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2(1 - i)} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(2 + 2i)}{(2)^2 + (-2)^2} = \frac{2(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + 2i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{8}$$

$$\Rightarrow Z_3 = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4} + i \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} \quad \text{Alors } Z_3 = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4} + i \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}$$

3) En déduisons les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

Par identification des formes trigonométrique et algébrique, on a :

$$\left[ \cos \left( \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{12} \right) \right] = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4} + i \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left( \frac{\pi}{12} \right) = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4} \\ \sin \left( \frac{\pi}{12} \right) = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} \end{cases}$$

4) Calculons  $(Z_3)^{24}$ .

En utilisant la formule de Moivre ( $Z^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ ) ; on a :

$$(Z_3)^{24} = \cos \left( \frac{24\pi}{12} \right) + i \sin \left( \frac{24\pi}{12} \right) = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi)$$

$$\text{Alors } (Z_3)^{24} = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi)$$

## VIII) Formules de Moivre et formules d'Euler:

### 1) Définition :

Soit  $Z$  un nombre complexe **de module 1 et d'argument  $\theta$** . On appelle formule de **Moivre** toute écriture de  $Z$  se ramenant sous la forme  $Z^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$  avec ( $n \in \mathbb{N}^*$ )

### 2) Triangle de Pascal :

Le triangle de Pascal est une méthode très pratique utilisée pour le développement des identités :

$(a + b)^n$  et  $(a - b)^n$ . Elle se présente comme suit :

1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
·	·	·	·	·	·	·	·	·
·								
·								

### 3) Application de la formule de Moivre :

$$\begin{cases} Z = \cos\theta + i\sin\theta \\ \bar{Z} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{Z + \bar{Z}}{2} \\ \sin\theta = \frac{Z - \bar{Z}}{2i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \\ \bar{Z}^n = \cos n\theta - i\sin n\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos n\theta = \frac{Z^n + \bar{Z}^n}{2} \\ \sin n\theta = \frac{Z^n - \bar{Z}^n}{2i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z = \cos\theta + i\sin\theta \\ \bar{Z} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z \times \bar{Z} = 1 \\ Z^n \times \bar{Z}^n = 1 \end{cases}$$

### 4) Linéarisation : de Cos<sup>n</sup>Θ et Sin<sup>n</sup>Θ

Pour **Linéariser Cos<sup>n</sup>Θ et Sin<sup>n</sup>Θ** ( $n \in \mathbb{N}$ ) ; on peut utiliser le procédé suivant, mettant en jeu les formules (**d'Euler ou de Moivre**) et du (**binôme de Newton ou du triangle de Pascal**).

#### Méthode :

- Développer et réduire :  $\cos^n\theta = \frac{(z + \bar{z})^n}{2^n}$  ou  $\sin^n\theta = \frac{(z - \bar{z})^n}{(2i)^n}$  (**Moivre**)

Ou encore  $\cos^n\theta = \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n}{2^n}$  ou  $\sin^n\theta = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^n}{(2i)^n}$  (**Euler**)

- Regrouper deux à deux les termes d'exposants opposés et exprimer chacun deux en fonction des termes de la forme **Coskx et Sinkx**.

### Exemple

En utilisant les formules de Moivre et d'Euler, linéariser les expressions suivantes :

$$A(x) = \cos^3 x \quad ; \quad B(x) = \sin^3 x \quad ; \quad C(x) = \cos^5 \frac{x}{2} \quad ; \quad D(x) = \cos^3 x \cdot \sin^3 x$$

### Solution

#### • **Utilisation des formules de Moivre**

$$A(x) = \cos^3 x$$

$$\text{Posons } \theta = x \Rightarrow A(x) = \cos^3\theta = (\cos\theta)^3 = \left(\frac{Z + \bar{Z}}{2}\right)^3 = \frac{(Z + \bar{Z})^3}{(2)^3} = \frac{Z^3 + 3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2 + \bar{Z}^3}{8}$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{(Z^3 + \bar{Z}^3) + (3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2)}{8} = \frac{(Z^3 + \bar{Z}^3) + (3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2)}{8} = \frac{(Z^3 + \bar{Z}^3) + 3Z\bar{Z}(Z + \bar{Z})}{8}$$

$$\text{Or } Z^n + \bar{Z}^n = 2\cos(n\theta) \Rightarrow Z^3 + \bar{Z}^3 = 2\cos(3\theta) \quad \text{et } Z + \bar{Z} = 2\cos\theta$$

$$\text{De même } Z^n \bar{Z}^n = 1 \Rightarrow Z\bar{Z} = 1$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{2\cos(3\theta) + 3(2\cos(\theta))}{8} = \frac{2\cos 3\theta + 6\cos\theta}{8} = \frac{2}{8}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta) \quad \text{or } \theta = x$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

$$\mathbf{B(x) = \sin^3 x}$$

$$\text{Posons } \theta = x \Rightarrow B(x) = \sin^3\theta = (\sin\theta)^3 = \left(\frac{Z - \bar{Z}}{2i}\right)^3 = \frac{(Z - \bar{Z})^3}{(2i)^3} = \frac{Z^3 - 3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2 - \bar{Z}^3}{-8i}$$

$$\Rightarrow B(x) = \frac{(Z^3 - \bar{Z}^3) + (-3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2)}{-8i} = \frac{(Z^3 - \bar{Z}^3) - 3Z\bar{Z}(Z - \bar{Z})}{-8i}$$

$$\text{Or } Z^n - \bar{Z}^n = 2i\sin(n\theta) \Rightarrow Z^3 - \bar{Z}^3 = 2i\sin(3\theta) \quad \text{et } Z - \bar{Z} = 2i\sin\theta$$

$$\text{De même } Z^n \bar{Z}^n = 1 \Rightarrow Z\bar{Z} = 1$$

$$\Rightarrow B(x) = \frac{2i\sin(3\theta) + 3(2i\sin(\theta))}{-8i} = \frac{2i\sin 3\theta + 6i\sin\theta}{-8i} = \frac{2i}{-8i}(\sin 3\theta + 3\sin\theta)$$

$$\Rightarrow B(x) = -\frac{1}{4}(\sin 3\theta + 3\sin\theta) \quad \text{or } \theta = x$$

$$\Rightarrow B(x) = -\frac{1}{4}(\sin 3x + 3\sin x)$$

$$\mathbf{C(x) = \cos^5 \frac{x}{2}}$$

$$\text{Posons } \theta = \frac{x}{2} \Rightarrow C(x) = \cos^5\theta = (\cos\theta)^5 = \left(\frac{Z + \bar{Z}}{2}\right)^5 = \frac{(Z + \bar{Z})^5}{(2)^5}$$

$$C(x) = \frac{Z^5 + 5Z^4\bar{Z} + 10Z^3\bar{Z}^2 + 10Z^2\bar{Z}^3 + 5Z\bar{Z}^4 + \bar{Z}^5}{32}$$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{(Z^5 + \bar{Z}^5) + (5Z^4\bar{Z} + 5Z\bar{Z}^4) + (10Z^3\bar{Z}^2 + 10Z^2\bar{Z}^3)}{32}$$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{(Z^5 + \bar{Z}^5) + 5Z\bar{Z}(Z^3 + \bar{Z}^3) + 10Z^2\bar{Z}^2(Z + \bar{Z})}{32}$$

$$\text{Or } Z^n + \bar{Z}^n = 2\cos(n\theta) \Rightarrow Z^5 + \bar{Z}^5 = 2\cos(5\theta) \quad ; \quad Z^3 + \bar{Z}^3 = 2\cos(3\theta) \quad \text{et} \\ Z + \bar{Z} = 2\cos\theta$$

$$\text{De même } Z^n \bar{Z}^n = 1 \Rightarrow Z\bar{Z} = 1 \quad \text{et } Z^2\bar{Z}^2 = 1$$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{2\cos(5\frac{x}{2}) + 5(2\cos(3\frac{x}{2})) + 10(2\cos\frac{x}{2})}{32} = \frac{2}{32}(\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta)$$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{1}{16}(\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta) \text{ or } \theta = \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{1}{16}\left(\cos\frac{5x}{2} + 5\cos\frac{3x}{2} + 10\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$\mathbf{D(x) = \cos^3 x \cdot \sin^3 x}$$

$$\text{Posons } \theta = x \Rightarrow D(x) = \cos^3\theta \cdot \sin^3\theta = (\cos\theta)^3(\sin\theta)^3 = \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^3 \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^3$$

$$\Rightarrow D(x) = \frac{(z+\bar{z})^3}{(2)^3} \times \frac{(z-\bar{z})^3}{(2i)^3} = \frac{(z+\bar{z})^3(z-\bar{z})^3}{-64i}$$

$$\Rightarrow D(x) = \frac{(z^3 + 3z^2\bar{z} + 3z\bar{z}^2 + \bar{z}^3)(z^3 - 3z^2\bar{z} + 3z\bar{z}^2 - \bar{z}^3)}{-64i}$$

**Après development, on a :**

$$D(x) = \frac{(z^6 - \bar{z}^6) + (-3z^4\bar{z}^2 + 3z^2\bar{z}^4)}{-64i} = \frac{(z^6 - \bar{z}^6) - 3z^2\bar{z}^2(z^2 - \bar{z}^2)}{-64i}$$

$$\text{Or } z^n - \bar{z}^n = 2i\sin(n\theta) \Rightarrow z^6 - \bar{z}^6 = 2i\sin(6\theta) \text{ et } z^2 - \bar{z}^2 = 2i\sin(2\theta)$$

$$\text{De même } z^n\bar{z}^n = 1 \Rightarrow z^2\bar{z}^2 = 1$$

$$\Rightarrow D(x) = \frac{2i\sin(6\theta) - 3(2i\sin(2\theta))}{-64i} = \frac{2i}{-64i}(\sin 6\theta - 3\sin 2\theta) = \frac{1}{32}(\sin 6\theta - 3\sin 2\theta)$$

$$\text{Or } \theta = x \Rightarrow \mathbf{D(x) = \frac{1}{32}(\sin 6x - 3\sin 2x)}$$

- Utilisation des formules d'Euler

$$A(x) = \cos^3 x$$

$$\text{Posons } \theta = x \Rightarrow A(x) = \cos^3 \theta = (\cos \theta)^3 = \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 = \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3}{(2)^3}$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}}{8}$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta}}{8} = \frac{(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{8}$$

$$\text{Or } e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta) \Rightarrow e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} = 2\cos(3\theta)$$

$$\text{Et } e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$

$$\text{De même } e^{in\theta} \cdot e^{-in\theta} = 1 \Rightarrow e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} = 1$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{2\cos(3\theta) + 3(2\cos(\theta))}{8} = \frac{2\cos 3\theta + 6\cos\theta}{8} = \frac{2}{8}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta) \quad \text{or } \theta = x$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

**Faites-en de même avec les autres cas.**

## IX) Equations dans $\mathbb{C}$

### 1) Equation du premier degré :

#### a) Définition :

On appelle équation du premier degré dans  $\mathbb{C}$ ; toute équation de la forme  $\mathbf{aZ} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ .  
Avec ( $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  et  $\mathbf{a} \in \mathbb{C}$ )

#### b) Résolution :

L'ensemble solution de l'équation  $\mathbf{aZ} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$  est  $\mathbf{S} = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}$

### Exemple

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $(1 + 2i)Z - (i - 1) = iZ - 3$ .

### Solution

$$(1 + 2i)Z - (i - 1) = iZ - 3$$

$$\Rightarrow (1 + 2i)Z - iZ = (i - 1) - 3$$

$$\Rightarrow Z(1 + i) = -4 + i$$

$$\Rightarrow Z = \frac{-4 + i}{1 + i}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{(-4 + i)(1 - i)}{(1)^2 + (1)^2}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{-3 + 5i}{2}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{-3}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$\Rightarrow \mathbf{S} = \left\{ \frac{-3}{2} + \frac{5}{2}i \right\}$$

## 2) Racines carrées d'un nombre complexe :

### a) Définition :

On appelle racines carrées de  $Z$ , tout nombre complexe  $z$  tel que  $Z = z^2$ .

Exemple : Si  $Z = 9i^2 \Rightarrow z_1 = -3i$  ou  $z_2 = 3i$ .

### b) Résolution du cas général :

Si  $Z = a + ib$  et  $z = x + iy$ . On dit que  $z$  est une racine carrée de  $Z$  si et seulement si

$$\begin{cases} Z = z^2 \\ |Z| = |z|^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + iy)^2 = a + ib \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

### Exemple

Trouver les racines carrées de :  $Z_1 = 5 - 12i$  ;  $Z_2 = 45 + 28i$  ;  $Z_3 = 3 - 4i$

### Solution

$$Z_1 = 5 - 12i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = -12 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(5)^2 + (-12)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 & (1) \\ xy = -6 & (2) \\ x^2 + y^2 = 13 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

$$\text{On a : } 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = -3 \text{ ou } x = 3$$

$$(2) : xy = -6 \Rightarrow y = \frac{-6}{x}$$

- Si  $x = -3 \Rightarrow y = \frac{-6}{-3} = 2$  et  $\delta_1 = x + iy \Rightarrow \delta_1 = -3 + 2i$
- Si  $x' = 3 \Rightarrow y' = \frac{-6}{3} = -2$  et  $\delta_2 = x' + iy' \Rightarrow \delta_2 = 3 - 2i$

Alors les racines carrées de  $Z_1$  sont  $\delta_1 = -3 + 2i$  et  $\delta_2 = 3 - 2i$

$$\mathbf{Z_2 = 45 + 28i}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 45 \\ 2xy = 28 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(45)^2 + (28)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 45 & (1) \\ xy = 14 & (2) \\ x^2 + y^2 = 53 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : ( 1 ) + ( 3 )

$$\text{On a : } 2x^2 = 98 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = -7 \text{ ou } x = 7$$

$$(2) : xy = 14 \Rightarrow y = \frac{14}{x}$$

- Si  $x = -7 \Rightarrow y = \frac{14}{-7} = -2$  et  $\delta_1 = x + iy \Rightarrow \delta_1 = -7 - 2i$
- Si  $x' = 7 \Rightarrow y' = \frac{14}{7} = 2$  et  $\delta_2 = x' + iy' \Rightarrow \delta_2 = 7 + 2i$

**Alors les racines carrées de  $Z_2$  sont  $\delta_1 = -7 - 2i$  et  $\delta_2 = 7 + 2i$**

$$\mathbf{Z_3 = 3 - 4i}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ xy = -2 & (2) \\ x^2 + y^2 = 5 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : ( 1 ) + ( 3 )

$$\text{On a : } 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2$$

$$(2) : xy = -2 \Rightarrow y = \frac{-2}{x}$$

- Si  $x = -2 \Rightarrow y = \frac{-2}{-2} = 1$  et  $\delta_1 = x + iy \Rightarrow \delta_1 = -2 + i$
- Si  $x' = 2 \Rightarrow y' = \frac{-2}{2} = -1$  et  $\delta_2 = x' + iy' \Rightarrow \delta_2 = 2 - i$

**Alors les racines carrées de  $Z_1$  sont  $\delta_1 = -2 + i$  et  $\delta_2 = 2 - i$**

### Autre méthode pratique

Soit  $Z = a + ib$ , l'écriture algébrique d'un nombre complexe.

Si  $\frac{b}{2}$  est un entier relatif tel que  $\frac{b}{2} = b_1 \times b_2$  avec  $(b_1^2 - b_2^2 = a)$

Alors les racines carrées de  $Z$  sont :  $\delta_1 = b_1 + ib_2$  et  $\delta_2 = -b_1 - ib_2$

### Exemple

Déterminer les racines carrées de  $Z = 5 - 12i$

Ici :  $a = 5$  et  $b = -12$

$$\begin{array}{rcc} \frac{b}{2} = \frac{-12}{2} = -6 = & -3 & \times & 2 \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & (-3)^2 & & (2)^2 \\ & \parallel & & \parallel \\ & 9 & - & 4 = 5 = a \end{array}$$

Alors :  $b_1 = -3$  et  $b_2 = 2$

D'où  $\delta_1 = -3 + 2i$  et  $\delta_2 = -(-3 + 2i) = 3 - 2i$

En observant la solution obtenue à la page 26, on remarque que les résultats sont identiques.

## Contre exemple :

Déterminer les racines carrées de  $Z = 20 - 16i$

Ici :  $a = 20$  et  $b = -16$

$$\begin{array}{ccc} \frac{b}{2} = \frac{-16}{2} = -8 = & -4 & \times & 2 \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & (-4)^2 & & (2)^2 \\ & || & & || \\ & 16 & - & 4 = 12 \neq a \end{array}$$

Alors cette méthode est à rejeter.

Faites-en de même avec les complexes  $Z_2$  et  $Z_3$ .

### 3) Equation du second degré :

#### a) Définition:

On appelle équation du second degré dans  $\mathbb{C}$ , toute équation de la forme :

$$aZ^2 + bZ + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

#### b) Résolution :

La résolution de telles équations nécessite d'abord le calcul du discriminant associé  $\Delta$  tel que  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- Si  $\Delta > 0$ , on a :  $Z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si  $\Delta = 0$ , on a :  $Z_1 = Z_2 = \frac{-b}{2a}$
- Si  $\Delta < 0$ , on a :  $Z_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $Z_2 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si  $\Delta = a' + ib'$  (sous forme algébrique), on a :  $Z_1 = \frac{-b + \delta_1}{2a}$  et  $Z_2 = \frac{-b + \delta_2}{2a}$

Où :  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont les racines carrées de  $\Delta$ .

### Exemple

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

**a)**  $Z^2 - 2Z + 2 = 0$  ;   **b)**  $-2Z^2 + Z + 1 = 0$  ;   **c)**  $Z^2 - 4Z + 4 = 0$  ;  
**d)**  $4Z^2 - 4(1 + i)Z - (45 + 26i) = 0$

### Solution

**a)**  $Z^2 - 2Z + 2 = 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(2) = -4 = 4i^2 = (2i)^2$$

$$Z_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{(2i)^2}}{2(1)} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - 2i$$

$$\Rightarrow S = \{ 1 - 2i ; 1 + 2i \}$$

$$Z_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{(2i)^2}}{2(1)} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + 2i$$

**b)**  $-2Z^2 + Z + 1 = 0$

$$\Delta = (1)^2 - 4(-2)(1) = 9 = (3)^2$$

$$Z_1 = \frac{-(1) - \sqrt{(3)^2}}{2(-2)} = \frac{-1 - 3}{2} = -2$$

$$\Rightarrow S = \{ -2 ; 1 \}$$

$$Z_2 = \frac{-(1) + \sqrt{(3)^2}}{2(-2)} = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

**c)**  $Z^2 - 4Z + 4 = 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0$$

$$Z_1 = Z_2 = \frac{-(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2 \quad \Rightarrow S = \{ 2 \}$$

**d)**  $4Z^2 - 4(1 + i)Z - (45 + 26i) = 0$

$$\Delta = [-4(1 + i)]^2 - 4(4)[- (45 + 26i)] = 16(1 + 2i - 1) - 16(-45 - 26i)$$

$$= 720 + 448i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 720 \\ 2xy = 448 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(720)^2 + (448)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 720 & (1) \\ xy = 224 & (2) \\ x^2 + y^2 = 848 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

On a :  $2x^2 = 1568 \Rightarrow x^2 = 784 \Rightarrow x = -28$  ou  $x = 28$

$$(2) : xy = 224 \Rightarrow y = \frac{224}{x}$$

• Si  $x = -28 \Rightarrow y = \frac{224}{-28} = -8$  et  $\delta_1 = x + iy \Rightarrow \delta_1 = -28 - 8i$

• Si  $x' = 28 \Rightarrow y' = \frac{224}{28} = 8$  et  $\delta_2 = x' + iy' \Rightarrow \delta_2 = 28 + 8i$

Alors les racines carrées de  $Z_2$  sont  $\delta_1 = -28 - 8i$  et  $\delta_2 = 28 + 8i$

$$Z_1 = \frac{-[-4(1+i)] + (-28 - 8i)}{2(4)} = \frac{-24 - 4i}{8} = -3 - \frac{1}{2}i$$

$$\Rightarrow S = \left\{ -3 - \frac{1}{2}i ; 4 + \frac{3}{2}i \right\}$$

$$Z_2 = \frac{-[-4(1+i)] + (28 + 8i)}{2(4)} = \frac{-24 - 4i}{8} = 4 + \frac{3}{2}i$$

#### 4) Equations se ramenant au second degré :

##### a) Définition :

Ceux sont des équations dont le degré est supérieur à 2

Exemple :  $aZ^3 + bZ^2 + cZ + d = 0$  ;  $aZ^4 + bZ^3 + cZ^2 + dZ + e = 0$  ; etc..

##### b) Résolution :

La résolution de telles équations nécessite obligatoirement la reconnaissance d'une racine évidente : **réelle** ( $Z_0 = a$ ) ou **imaginaire** ( $Z_0 = ib$ ) ou encore  $Z_0 = a + ib$

(avec  $a$  et  $b \neq 0$ ) afin de factoriser puis de résoudre l'équation en utilisant l'une des techniques de factorisation qui suivent : **(Division**

**Euclidienne ; tableau d'Hörner ou par identification des coefficients)**).

##### NB :

Pour les équations bicarrées : ( $aZ^4 + bZ^2 + c = 0$ ), il suffit de ramener l'équation bicarrée au second degré en posant :  $Z^2 = z$ .  $\Rightarrow aZ^2 + bZ + c = 0$  Avec  $a \neq 0$

### Exemples

#### Exemple 1

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $Z^3 - 4iZ^2 - (6 + i)Z + 3i - 1 = 0$ , sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure.

## Exemple 2

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i = 0$ , sachant qu'elle admet une solution réelle.

### Solution 1

Réolvons dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $Z^3 - 4iZ^2 - (6 + i)Z + 3i - 1 = 0$ , sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure.

Soit  $Z_0 = ib$  cette solution réelle telle que :

$$Z_0^3 - 4iZ_0^2 - (6 + i)Z_0 + 3i - 1 = 0,$$

$$\Leftrightarrow (ib)^3 - 4i(ib)^2 - (6 + i)(ib) + 3i - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -ib^3 + 4ib^2 - 6ib + b + 3i - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (b - 1) + i(-b^3 + 4b^2 - 6b + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b - 1) = 0 & (1) \\ (-b^3 + 4b^2 - 6b + 3) = 0 & (2) \end{cases}$$

**NB: On résout toujours l'équation qui semble la plus facile.**

Ainsi résolvons l'équation ( 1 ) qui est la plus facile à résoudre :  $b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$

Et par vérification dans ( 2 ) , on obtient :

$$- (1)^3 + 4(1)^2 - 6(1) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -1 + 4 - 6 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \text{ Vraie}$$

D'où  $Z_0 = ib = i$  est la solution réelle

Factorisons :  $Z^3 - 4iZ^2 - (6 + i)Z + 3i - 1$  ( En utilisant la méthode d'Hörner )

		<b>1</b>	<b>- 4i</b>	<b>- 6 - i</b>	<b>3i - 1</b>
<b>i</b>		<b>i</b>	<b>3</b>	<b>- 3i + 1</b>	
	<b>1</b>	<b>- 3i</b>	<b>- 3 - i</b>	<b>0</b>	
↓	↓	↓	↓		
<b>Z<sub>0</sub></b>	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>		

$$\Rightarrow Z^3 - 4iZ^2 - (6 + i)Z + 3i - 1 = (Z - Z_0)(aZ^2 + bZ + c)$$

$$\Leftrightarrow Z^3 - 4iZ^2 - (6 + i)Z + 3i - 1 = (Z - i)(Z^2 - 3iZ - 3 - i)$$

$$\text{D'où } Z^3 - 4iZ^2 - (6 + i)Z + 3i - 1 = 0 \Leftrightarrow (Z - i)(Z^2 - 3iZ - 3 - i) = 0$$

$$\Leftrightarrow Z - i = 0 \quad \text{ou} \quad Z^2 - 3iZ - 3 - i = 0$$

$$\Leftrightarrow Z = i$$

$$\text{Ou } Z^2 - 3iZ - 3 - i = 0 \Rightarrow \Delta = (-3i)^2 - 4(1)(-3 - i) = 3 + 4i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ xy = 2 & (2) \\ x^2 + y^2 = 5 & (3) \end{cases}$$

**Effectuons : (1) + (3)**

$$\text{On a : } 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2$$

$$(2) : xy = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x}$$

- Si  $x = -2 \Rightarrow y = \frac{2}{-2} = -1$  et  $\delta_1 = x + iy \Rightarrow \delta_1 = -2 - i$
- Si  $x' = 2 \Rightarrow y' = \frac{2}{2} = 1$  et  $\delta_2 = x' + iy' \Rightarrow \delta_2 = 2 + i$

Alors les racines carrées de  $Z$  sont :  $\delta_1 = -2 - i$  et  $\delta_2 = 2 + i$

$$Z_1 = \frac{-(-3i) + (-2 - i)}{2(1)} = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$$

$$Z_2 = \frac{-(-3i) + (2 + i)}{2(1)} = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i$$

$$\Rightarrow \mathbf{S} = \{ i ; -1 + i ; 1 + 2i \}$$

### Solution 2

Résolvons dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i = 0$ , sachant quelle admet une solution réelle.

**Soit  $Z_0 = a$**  cette solution réelle telle que :

$$Z_0^3 - (3 + 5i)Z_0^2 + (-4 + 9i)Z_0 + 6 - 4i = 0,$$

$$\Leftrightarrow (a)^3 - (3 + 5i)(a)^2 + (-4 + 9i)(a) + 6 - 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 3a^2 - 5ia^2 - 4a + 9ai + 6 - 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^3 - 3a^2 - 4a + 6) + i(-5a^2 + 9a - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a^3 - 3a^2 - 4a + 6) = 0 & (1) \\ (-5a^2 + 9a - 4) = 0 & (2) \end{cases}$$

**NB : On résous toujours l'équation qui semble la plus facile.**

Ainsi résolvons l'équation ( 2 ) :  $-5a^2 + 9a - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (9)^2 - 4(-5)(-4) = 1$

$$\Rightarrow a_1 = 1 \text{ et } a_2 = \frac{4}{5}$$

Et par vérification dans ( 1 ) , on remarque que :

$a_1 = 1$  est la seule solution qui vérifie l'équation ( 1 )

D'où  $Z_0 = a = 1$  est la solution réelle

Factorisons :  $Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i$  ( En utilisant la méthode d'Horner )

	<b>1</b>	<b><math>-3 - 5i</math></b>	<b><math>-4 + 9i</math></b>	<b><math>6 - 4i</math></b>
<b>1</b>		<b>1</b>	<b><math>-2 - 5i</math></b>	<b><math>-6 + 4i</math></b>
	<b>1</b>	<b><math>-2 - 5i</math></b>	<b><math>-6 + 4i</math></b>	<b>0</b>

↓  
 $Z_0$

↓  
 $a$

↓  
 $b$

↓  
 $c$

$$\Rightarrow Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i = (Z - Z_0)(aZ^2 + bZ + c)$$

$$\Leftrightarrow Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i = (Z - 1)[Z^2 + (-2 - 5i)Z - 6 + 4i]$$

$$\text{D'où } Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i = 0 \Leftrightarrow$$

$$(Z - 1)[Z^2 + (-2 - 5i)Z - 6 + 4i] = 0$$

$$\Leftrightarrow Z - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad (Z - 1)[Z^2 + (-2 - 5i)Z - 6 + 4i] = 0$$

$$\Rightarrow Z = 1$$

$$\text{Ou } [Z^2 + (-2 - 5i)Z - 6 + 4i] = 0 \Rightarrow \Delta = [-(2 + 5i)]^2 - 4(1)(-6 + 4i)$$

$$\Rightarrow \Delta = 3 + 4i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ xy = 2 & (2) \\ x^2 + y^2 = 5 & (3) \end{cases}$$

**Effectuons : (1) + (3)**

$$\text{On a : } 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2$$

$$(2) : xy = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x}$$

- Si  $x = -2 \Rightarrow y = \frac{2}{-2} = -1$  et  $\delta_1 = x + iy \Rightarrow \delta_1 = -2 - i$
- Si  $x' = 2 \Rightarrow y' = \frac{2}{2} = 1$  et  $\delta_2 = x' + iy' \Rightarrow \delta_2 = 2 + i$

Alors les racines carrées de  $Z$  sont :  $\delta_1 = -2 - i$  et  $\delta_2 = 2 + i$

$$Z_1 = \frac{-(-3i) + (-2 - i)}{2(1)} = \frac{4i}{2} = 2i$$

$$Z_2 = \frac{-(-3i) + (2 + i)}{2(1)} = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i$$

$$\Rightarrow \mathbf{S} = \{ \mathbf{1} ; \mathbf{2i} ; \mathbf{2 + 3i} \}$$

5) **Racines nièmes d'un nombre complexe :**

a) **Définition :**

On appelle **racine n<sup>ième</sup> de Z** tout nombre complexe  $\zeta$  tel que :  $\zeta^n = Z$ .

b) **Résolution :**

Soit  $Z = a + ib$  un complexe de forme polaire :  $[r ; \theta]$

$\zeta = a' + ib'$  un complexe de forme polaire :  $[r' ; \theta']$

$$\zeta^n = Z \Leftrightarrow [r' ; \theta']^n = [r ; \theta] \Leftrightarrow [(r')^n ; n\theta'] = [r ; \theta]$$

**Par identification, on a :**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (r')^n = r \\ n\theta' = \theta \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} r' = \sqrt[n]{r} \\ \theta' = \frac{\theta}{n} \left[ \frac{2k\pi}{n} \right] = \frac{\theta}{n} + \frac{2K\pi}{n} \end{cases} \text{ avec } k \in [0 ; n-1]$$

**Ainsi les racines n<sup>ières</sup> de Z sont données par la formule :**

$$\mathbf{Z}_K = \sqrt[n]{|Z|} \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2K\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2K\pi}{n}\right) \right] \text{ ou } \mathbf{Z}_K = \left[ \sqrt[n]{|Z|} ; \frac{\theta + 2K\pi}{n} \right]$$

**Avec  $K \in [0 ; n-1]$**

## 6) Racines n<sup>ièmes</sup> de l'unité :

Soit  $Z$  un nombre complexe tel que  $Z = 1$ .

Les racines de  $Z$  sont obtenues en utilisant la formule qui suit :  $Z_k = \left[ 1 ; \frac{2K\Pi}{n} \right]$

### Exemple

Déterminer :

- Les racines carrées de  $-i$
- Les racines cubiques de  $4\sqrt{3} - 4i$
- Les racines quatrièmes de 1
- Les racines cinquièmes de  $i$
- Les racines sixièmes de  $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

### Solution

- a) **Déterminons les racines carrées de  $-i$**

Posons  $Z = -i$

$$\Rightarrow |Z| = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{Et } \arg(Z) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos\Theta = 0 \\ \sin\Theta = -1 \end{cases} \Rightarrow \Theta = -\frac{\pi}{2}$$

**Ainsi les racines carrées de  $Z$  sont données par :**

$$Z_k = \sqrt[2]{1} \left[ \cos\left(\frac{-\pi}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right) \right] = \cos\left(\frac{-\pi+4k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi+4k\pi}{4}\right)$$

Avec  $k \in [0 ; 1]$

- Si  $k = 0$  ; on a :  $Z_0 = \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)$
- Si  $k = 1$  ; on a :  $Z_1 = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow Z_1 = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

**D'où les racines carrées de  $Z$  sont :**

$$\left\{ \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) ; -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

**b) Déterminons les racines cubiques de :  $4\sqrt{3} - 4i$**

Posons  $Z = 4\sqrt{3} - 4i$

$$\Rightarrow |Z| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (-4)^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$\text{Et } \arg(Z) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

**Ainsi les racines cubiques de  $Z$  sont données par :**

$$Z_k = \sqrt[3]{8} \left[ \cos\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right] = \cos\left(\frac{-\pi+12k\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi+12k\pi}{18}\right)$$

Avec  $k \in [0; 2]$

- Si  $k = 0$  ; on a :  $Z_0 = \cos\left(\frac{-\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{18}\right)$
- Si  $k = 1$  ; on a :  $Z_1 = \cos\left(\frac{11\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{18}\right)$
- Si  $k = 2$  ; on a :  $Z_2 = \cos\left(\frac{23\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{23\pi}{18}\right)$

**D'où les racines cubiques de  $Z$  sont :**

$$\left\{ \cos\left(\frac{-\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{18}\right) ; \cos\left(\frac{11\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{18}\right) ; \cos\left(\frac{23\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{23\pi}{18}\right) \right\}$$

**c) Déterminons les racines quatrièmes de 1**

Posons  $Z = 1$

Cela revient à déterminer **les racines quatrième de l'unité** c'est-à-dire **1**.

Or elles sont données par la formule :

$$Z_k = \left[ 1 ; \frac{2k\pi}{n} \right] \Rightarrow Z_k = \left[ 1 ; \frac{2k\pi}{4} \right] = \left[ 1 ; \frac{k\pi}{2} \right] \text{ Avec } k \in [0; 3]$$

- Si  $k = 0$  ; on a :  $Z_0 = [1; 0]$
- Si  $k = 1$  ; on a :  $Z_1 = \left[ 1 ; \frac{\pi}{2} \right]$
- Si  $k = 2$  ; on a :  $Z_2 = [1; 2\pi]$
- Si  $k = 3$  ; on a :  $Z_3 = \left[ 1 ; \frac{3\pi}{2} \right]$

**D'où les racines quatrièmes de  $Z$  sont :**

$$\left\{ [1; 0] ; \left[ 1 ; \frac{\pi}{2} \right] ; [1; 2\pi] ; \left[ 1 ; \frac{3\pi}{2} \right] \right\}$$

**d) Déterminons les racines cinquièmes de  $i$**

Posons  $Z = i$

$$\Rightarrow |Z| = \sqrt{(0)^2 + (1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{Et } \arg(Z) \text{ est tel que : } \begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = 1 \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

**Ainsi les racines cinquièmes de  $Z$  sont données par :**

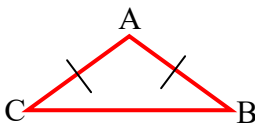
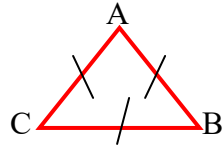
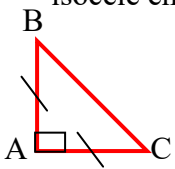
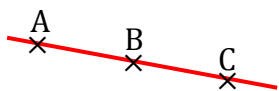
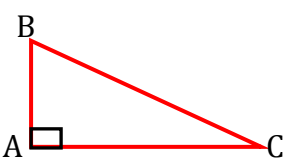
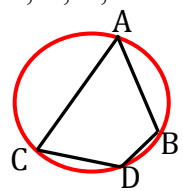
$$Z_k = \sqrt[5]{1} \left[ \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right) \right] = \cos\left(\frac{\pi + 4k\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 4k\pi}{10}\right)$$

Avec  $k \in [0; 4]$

- Si  $k = 0$  ; on a :  $Z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$
- Si  $k = 1$  ; on a :  $Z_1 = \cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
- Si  $k = 2$  ; on a :  $Z_2 = \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{9\pi}{10}\right)$
- Si  $k = 3$  ; on a :  $Z_3 = \cos\left(\frac{13\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{13\pi}{10}\right)$
- Si  $k = 4$  ; on a :  $Z_4 = \cos\left(\frac{17\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{17\pi}{10}\right)$

## X) Complexe et configurations géométriques du plan :

Dans le tableau ci-dessous sont caractérisées certaines configurations géométriques à l'aide des complexes :

Configurations géométriques	Caractérisations géométriques	Caractérisations complexes
<p>Triangle ABC isocèle en A</p> 	$AB = AC$ $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \alpha$ $(\alpha \in [0; \pi])$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{-i\alpha}$
<p>Triangle ABC équilatéral</p> 	$AB = AC = BC$ Et $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{3}$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
<p>Triangle ABC rectangle et isocèle en A</p> 	$AB = AC$ Et $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = i$ ou $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = -i$
<p>Points A, B, C alignés</p> 	$\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = 0 + K\pi$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = a \quad (a \in \mathbb{R}^*)$
<p>Triangle ABC rectangle en A</p> 	$\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = ib$ ou $-ib$ avec $b \in \mathbb{R}^*$
<p>Points A, B, C, D cocycliques</p> 	$\text{mes } \hat{C} \equiv (\text{mes } D) [\pi]$ Ou $\text{mes } \hat{C} \neq 0 [\pi]$	$\left. \begin{array}{l} \frac{Z_C - Z_B}{Z_C - Z_A} \\ \frac{Z_D - Z_B}{Z_D - Z_A} \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^*$

## Exemples

### Exemple 1

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs :  $-1 - i$  ;  $2 + 3i$  ;  $-10 - 13i$ .  
Démontrer que ces trois points sont alignés.

### Exemple 2

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs  $3 + i$  ;  $2i$  ;  $2 - 2i$ .

- 1) Démontrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. (on fera une figure).
- 2) Déterminer l'affixe de D tel que ABCD soit un parallélogramme. (on placera le point D).

### Exemple 3

Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectifs :  $-1 + i$  ;  $-1 - i$  ;  $2i$  ;  $2 - 2i$ .

- 1) Etudier la nature des triangles ABC et BCD.
- 2) Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

## SOLUTIONS :

### Exemple 1

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs  $-1 - i$  ;  $2 + 3i$  ;  $-10 - 13i$ .

$$Z_A = -1 - i \Rightarrow A(-1 ; -1)$$

$$Z_B = 2 + 3i \Rightarrow B(2 ; 3)$$

$$Z_C = -10 - 13i \Rightarrow C(-10 ; -13)$$

Démontrons que : A ; B ; C sont alignés :

$$A ; B ; C \text{ sont alignés si } \det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & -9 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} = (3)(-12) - (4)(-9) = -36 + 36 = 0$$

Puis que  $\det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = 0$  ; alors les points A ; B ; C sont alignés.

## Exemple 2

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs  $3 + i$  ;  $2i$  ;  $2 - 2i$ .

$$Z_A = 3 + i \Rightarrow A(3 ; 1)$$

$$Z_B = 2i \Rightarrow B(0 ; 2)$$

$$Z_C = 2 - 2i \Rightarrow C(2 ; -2)$$

1) Démontrons que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. (on fera une figure).

$$A ; B ; C \text{ est un triangle rectangle et isocèle en A si : } \begin{cases} \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{-\pi}{2} \text{ ou } \frac{\pi}{2} \\ \text{et} \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\text{Or } \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{(2 - 2i) - (3 + i)}{(2i) - (3 + i)} = \frac{-1 - 3i}{-3 + i} = \frac{(-1 - 3i)(-3 - i)}{(-3)^2 + (1)^2} = \frac{10i}{10} = i$$

$$\text{Et } \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0 - 3)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{10}$$

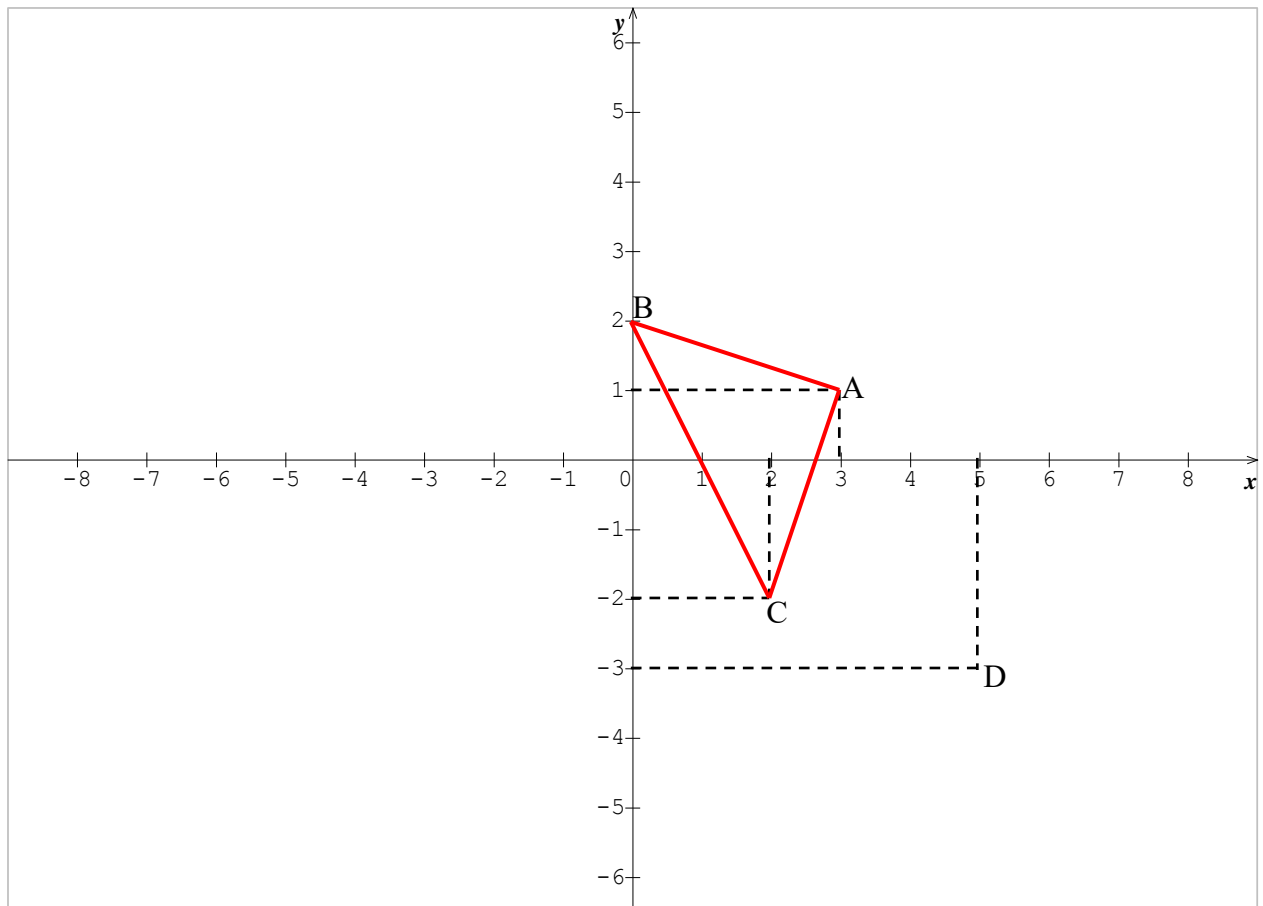
$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(2 - 3)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{10}$$

### Conclusion :

$$\text{Puisque : } \begin{cases} \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \\ \text{et} \\ AB = AC = \sqrt{10} \end{cases}$$

Alors ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

( Figure représentant cette situation )



2) Déterminons l'affixe de D tel que ABCD soit un parallélogramme. (on placera le point D).

ABCD soit un parallélogramme si  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  Avec  $D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\text{Or } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 3 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - x \\ -2 - y \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 - x \\ -2 - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = -3 \\ -2 - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$$

D'où  $D \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

### **Exemple 3**

Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectifs :  $-1 + i$  ;  $-1 - i$  ;  $2i$  ;  $2 - 2i$ .

$$Z_A = -1 + i \Rightarrow A(-1 ; 1)$$

$$Z_B = -1 - i \Rightarrow B(-1 ; -1)$$

$$Z_C = 2i \Rightarrow C(0 ; 2)$$

$$Z_D = -2 - 2i \Rightarrow D(2 ; -2)$$

1) Etudions la nature des triangles ABC et BCD.

**Pour le triangle ABC**

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{(2i) - (-1 + i)}{(-1 - i) - (-1 + i)} = \frac{1 + i}{-2i} = \frac{(1 + i)(2i)}{(0)^2 + (-2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{-2 + 2i}{4} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\text{Et } \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \arg\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1 + 3)^2 + (-1 - 1)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(0 + 1)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0 + 1)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{10}$$

Alors le triangle ABC est quelconque.

**Pour le triangle BCD**

$$\frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_B} = \frac{(2 - 2i) - (-1 - i)}{(2i) - (-1 - i)} = \frac{3 - i}{1 + 3i} = \frac{(3 - i)(1 - 3i)}{(1)^2 + (3)^2} = \frac{-10i}{10} = -i$$

$$\text{Et } \arg\left(\frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_B}\right) = \arg(-i) = \frac{-\pi}{2}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0 + 1)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{10}$$

$$CD = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{20} = 5\sqrt{2}$$

$$BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(2 + 1)^2 + (-2 + 1)^2} = \sqrt{10}$$

Alors le triangle BCD est rectangle et isocèle en B.

2) Démontrons que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Soit  $\Omega(x; y)$  les coordonnées du centre de ce cercle.

les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle si :

$$d(A; \Omega) = d(B; \Omega) = d(C; \Omega) = d(D; \Omega) = r$$

$$d(A; \Omega) = d(B; \Omega) \Leftrightarrow \sqrt{(x_\Omega - x_A)^2 + (y_\Omega - y_A)^2} = \sqrt{(x_\Omega - x_B)^2 + (y_\Omega - y_B)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2 = (y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow -2y = 2y \Rightarrow y = 0$$

$$d(C; \Omega) = d(D; \Omega) \Leftrightarrow \sqrt{(x_\Omega - x_C)^2 + (y_\Omega - y_C)^2} = \sqrt{(x_\Omega - x_D)^2 + (y_\Omega - y_D)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2$$

En remplaçant  $y = 0$  par sa valeur dans l'équation ci-dessus, on a :

$$-4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$$

D'où  $\Omega \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Or le rayon  $r$  est tel que  $r = d(A; \Omega) = d(B; \Omega) = d(C; \Omega) = d(D; \Omega)$

$$\Rightarrow r = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(1+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5}$$

**D'où les points A, B, C, D appartiennent à un même cercle de centre  $\Omega \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et de rayon  $r = \sqrt{5}$**

## **XI) Complexe et lieux géométriques :**

### **1) Distance entre deux points A et B :**

Soient A et B, deux points d'affixes respectives  $Z_A$  et  $Z_B$ .

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = |Z_B - Z_A|$$

### **2) Cercle de centre A et de rayon r :**

Soit  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  d'affixe  $Z_M$ . A d'affixe  $Z_A$ .

$$d(A, M) = r \Leftrightarrow |Z_M - Z_A| = r$$

### **Exemple**

Trouver l'ensemble ( $\Gamma$ ) des points (M) du plan d'affixe Z tel que :  $|Z - 1 + 4i| = 3$

#### **Solution**

Posons:  $Z - 1 + 4i = 0 \Rightarrow Z = 1 - 4i \Rightarrow A(1 ; -4)$

**Ici l'ensemble cherché est le cercle de centre A (1 ; -4) et de rayon r = 3.**

### **3) Médiatrice d'un segment :**

Soit  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  d'affixe  $Z_M$ ; A d'affixe  $Z_A$  et B d'affixe  $Z_B$ .

M appartient à la médiatrice du segment [A, B] si  $d(A, M) = d(B, M) \Leftrightarrow$

$$|Z_M - Z_A| = |Z_M - Z_B|$$

### **Exemple**

Déterminer l'ensemble ( $\Gamma$ ) des points M du plan tel que :  $|Z - 2| = |Z + 2 + i|$

#### **Solution**

Posons :  $Z - 2 = 0$  et  $Z + 2 + i = 0$

$\Rightarrow Z = 2$  et  $Z = -2 - i$

$\Rightarrow A(2 ; 0)$  et  $B(-2 ; -1)$

**Ici l'ensemble cherché est la médiatrice du segment [AB] avec A (2, 0) et B (-2 ; -1).**

4) Droite passant par un point A et faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale

Soit  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  d'affixe  $Z_M$ ; A un point d'affixe  $Z_A$  et (D) une droite du plan.

(D) passe par A et fait un angle  $\alpha$  avec l'horizontale si  $\text{Arg}(Z_M - Z_A) = \alpha + k\pi$

**Exemple**

Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan tel que :

a)  $\text{Arg}(Z - 2 + 3i) = \frac{\pi}{3} + k\pi$

b)  $\text{Arg}(2\bar{Z} - 2 + i) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

**Solution**

Déterminons puis construisons l'ensemble des points M du plan tel que :

a)  $\text{arg}(Z - 2 + 3i) = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

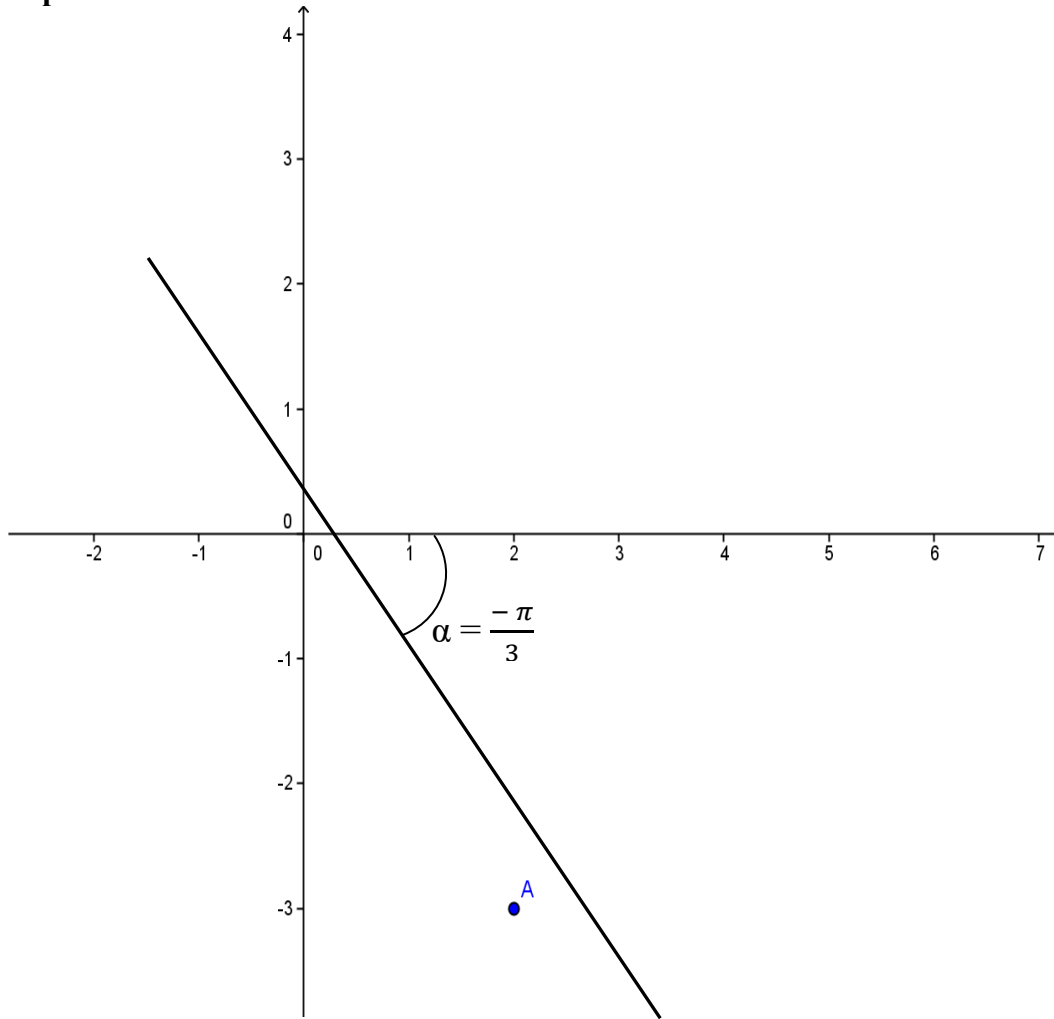
$$\text{arg}(Z - 2 + 3i) = -\frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow \text{Arg}[Z - (2 - 3i)] = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \text{Arg}(Z_M - Z_A) = -\frac{\pi}{3} + k\pi \text{ Avec } Z_A = 2 - 3i \Rightarrow A \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Alors l'ensemble des points M cherchés est la droite (D) passant par le point  $A \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  et faisant

un angle  $\alpha = -\frac{\pi}{3}$  avec l'horizontale.

## Représentation



$$\text{b) } \text{Arg}(2\bar{Z} - 2 + i) = \frac{-\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{Arg}(2\bar{Z} - 2 + i) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\Rightarrow -\text{Arg}(2Z + 2 - i) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\Rightarrow \text{Arg}(2Z + 2 - i) = \frac{\pi}{4} - k\pi$$

$$\Rightarrow \text{Arg}\left[2\left(Z + 1 - \frac{1}{2}i\right)\right] = \frac{\pi}{4} - k\pi \Leftrightarrow \text{Arg}(2) + \text{Arg}\left(Z + 1 - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{4} - k\pi$$

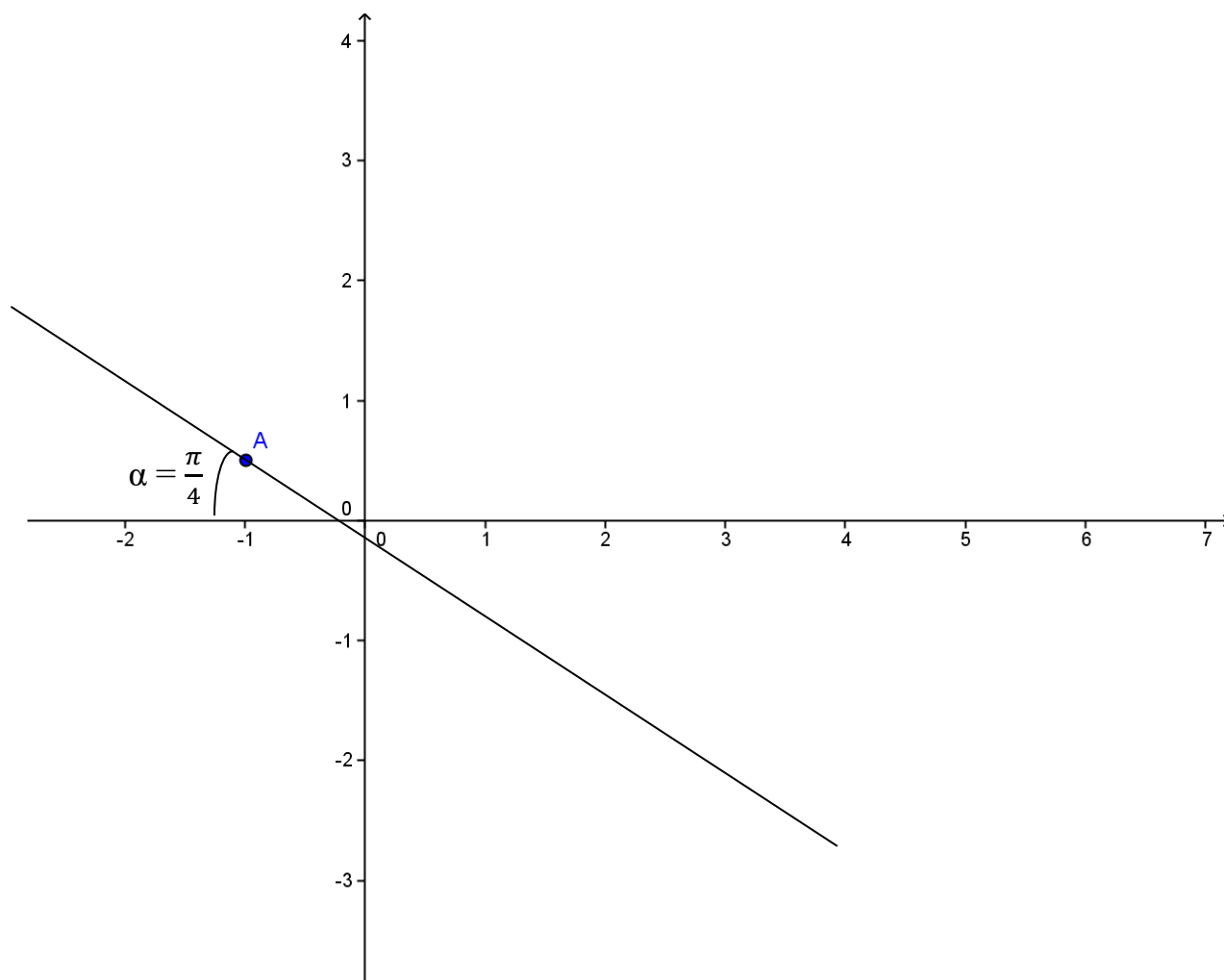
$$\Rightarrow \text{Arg}\left(Z + 1 - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{4} - k\pi \Rightarrow \text{Arg}\left[Z - \left(-1 + \frac{1}{2}i\right)\right] = \frac{\pi}{4} - k\pi$$

$$\Leftrightarrow \text{Arg}(Z_M - Z_A) = \frac{\pi}{4} - k\pi \text{ Avec } Z_A = -1 + \frac{1}{2}i \Rightarrow A\left(\frac{-1}{\frac{1}{2}}\right)$$

Alors l'ensemble des points M recherchés est la droite ( D ) passant par le point  $A\left(-1, \frac{1}{2}\right)$  et faisant

un angle  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  avec l'horizontale.

### Représentation



## XII) Complexe et transformations géométriques du plan

### 1) Translation :

La traduction complexe d'une translation est :

$$f(Z) = Z + q \text{ (avec } q \in \mathbb{C}\text{)}$$

Ainsi la translation qui transforme un point A d'affixe  $a + ib$  en un point B d'affixe  $a' + ib'$  est :

$$f(A) = B \Leftrightarrow (a + ib) + q = (a' + ib') \Rightarrow q = (a' + ib') - (a + ib)$$

Ainsi on remplace  $q$  par sa valeur dans  $f(Z) = Z + q$  pour trouver la traduction complexe.

### 2) Homothétie :

La traduction complexe d'une homothétie de rapport  $k$  et de centre  $\omega$  est :

$$f(Z) = kZ + q \text{ (avec } q \in \mathbb{C}\text{) ou } \overrightarrow{\Omega M'} = K \overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow Z' - \omega = k(Z - \omega) \text{ avec :}$$

- $Z'$  : image de  $Z$
- $K$  : le rapport
- $\omega$  : le centre d'affixe  $\Omega$

Ainsi l'homothétie de rapport  $k$  qui transforme un point A d'affixe  $a + ib$  en un point B d'affixe

$$a' + ib' \text{ est : } f(A) = B \Leftrightarrow k(a + ib) + q = (a' + ib') \Leftrightarrow q = (a' + ib') - k(a + ib).$$

Ainsi on remplace  $q$  par sa valeur dans  $f(Z) = kZ + q$  pour trouver la traduction complexe.

### 3) Rotation :

La traduction complexe d'une rotation d'angle  $\theta$  et de centre  $\omega$  est :

$$f(Z) = Ze^{i\theta} + q \text{ (avec } q \in \mathbb{C}\text{) ou } \overrightarrow{\Omega M'} = e^{i\theta} \overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow Z' - \omega = e^{i\theta}(Z - \omega) \text{ avec :}$$

- $Z'$  : image de  $Z$
- $\theta$  : l'angle
- $\omega$  : le centre d'affixe  $\Omega$

Ainsi la rotation d'angle  $\theta$  qui transforme un point A d'affixe  $a + ib$  en un point B d'affixe  $a' + ib'$  est :  $f(A) = B \Leftrightarrow (a + ib)e^{i\theta} + q = (a' + ib') \Leftrightarrow q = (a' + ib') - (a + ib)e^{i\theta} \Leftrightarrow q = -(a + ib)(\cos \theta + i \sin \theta)$ .

Ainsi on remplace  $q$  par sa valeur dans  $f(Z) = Ze^{i\theta} + q$  pour trouver la traduction complexe.

#### 4) Similitude du plan :

##### Expression complexe :

Soit S une similitude directe du plan qui a tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que :

- **Cas d'une similitude directe :**

$Z' = aZ + b$  (où a et b sont des complexes). Ces éléments caractéristiques sont :

- son rapport  $k = |a|$
- son angle  $\theta = \arg(a)$
- son centre  $\Omega$  d'affixe  $w = \frac{b}{1-a}$  avec  $a \neq 1$

- **Cas d'une similitude indirecte ou inverse :**

$Z' = a\bar{Z} + b$  (où a et b sont des complexes) Ces éléments caractéristiques sont :

- son rapport  $k = |a|$
- son axe (D) :  $y = px + q$ .
- son centre  $\Omega$  d'affixe  $w = \frac{b + a\bar{b}}{1 - a\bar{a}}$

## Retenons

### Soit $f$ la transformation : $z' = az + b$

- si  $a = 1$ , alors  $f$  est une translation de vecteur  $\vec{u}$  et d'affixe  $b$ .
- si  $a = -1$ , alors  $f$  est la symétrie centrale de centre  $\Omega$  d'affixe  $w = \frac{1}{2}b$ .
- si  $a \in \mathbb{R}^* - \{-1; 1\}$ , alors  $f$  est une homothétie de rapport  $k = |a|$  et de centre  $\Omega$  d'affixe  $w = \frac{b}{1-a}$ .
- si  $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$  et  $|a| = 1$  alors  $f$  est une rotation d'angle  $\alpha$ , d'argument  $\Theta = \arg(a)$  et de centre  $\Omega$  d'affixe  $w = \frac{b}{1-a}$ .
- si  $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$  et  $|a| \neq 1$  alors  $f$  est une similitude directe de rapport  $k = |a|$ , d'angle  $\alpha$ , d'argument  $\Theta = \arg(a)$  et de centre  $\Omega$  d'affixe  $w = \frac{b}{1-a}$ .

### Soit $f$ la transformation : $z' = a\bar{z} + b$

- Si  $|a| = 1$ , alors  $f$  est une symétrie orthogonale d'axe l'ensemble des solutions de  $z' = z$ .
- Si  $|a| \neq 1$  alors  $f$  est une similitude indirecte de rapport  $k = |a|$ , d'angle  $\alpha$ , d'argument  $\Theta = \arg(a)$ , d'axe  $(\Delta) : y = px + q$  et de centre  $\Omega$  d'affixe  $w = \frac{b + a\bar{b}}{1 - a\bar{a}}$

## Exemples

### Exemple 1

Déterminer la traduction complexe de la transformation  $f$  dans chacun des cas suivants :

- 1)  $f$  est la translation qui transforme A d'affixe  $-1 + i$  en B d'affixe  $-2 + 3i$
- 2)  $f$  est l'homothétie de rapport  $\frac{1}{2}$  qui transforme A d'affixe  $-1 + i$  en B d'affixe  $-2 + 3i$ .
- 3)  $f$  est la rotation d'angle  $\frac{3\pi}{4}$  qui transforme A d'affixe  $-1 + i$  en B d'affixe  $-2 + i$ .

### Exemple 2

Soit la similitude directe plane  $S$  de centre A  $(1; 1)$ ; de rapport  $\sqrt{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$  par la similitude  $S$ ; le point M d'affixe  $Z$  a pour transformé le point M' d'affixe  $Z'$ .  
Exprimer  $Z'$  en fonction de  $Z$ .

### Exemple 3

Soient A, B, C et D les points d'affixes :

$Z_A = -1 - i$  ;  $Z_B = i$  ;  $Z_C = 1 + 3i$  ;  $Z_D = 5 + i$ . Soit S la similitude directe transformant A en C et B en D.

- 1) Déterminer le rapport K et l'angle  $\theta$  de S
- 2) Déterminer l'écriture complexe f associée à S.
- 3) Déterminer l'affixe de  $\Omega$  le centre de S

### Exemple 4

1- Soit f la transformation définie par  $Z' = aZ + 3i$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f si : a = 2 puis si a = -i

2- Soient A(1) ; B(2 + i) ; A'(2i) ; B'(1 + i)

Vérifier que  $AB = A'B'$

Démontrer qu'il existe une unique rotation r telle que  $r(A) = A'$  et  $r(B) = B'$

## SOLUTION S

### Exemple 1

1) La traduction complexe d'une translation est :  $f(Z) = Z + q$ .

$$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1 + i) = -2 + 3i \Leftrightarrow -1 + i + q = -2 + 3i \Rightarrow q = -1 + 2i$$

$$\text{d'où } f(Z) = Z - 1 + 2i$$

2) La traduction complexe d'une homothétie est  $f(Z) = kZ + q$ .

$$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1 + i) = -2 + 3i \Leftrightarrow \frac{-1}{2}(-1 + i) + q = -2 + 3i \Rightarrow q = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$\text{d'où } f(Z) = \frac{1}{2}Z - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$$

La traduction complexe d'une rotation est  $f(Z) = e^{i\theta}Z + q$ .

$$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1 + i) = -2 + i \Leftrightarrow e^{i\frac{3\pi}{4}}(-1 + i) + q = -2 + i \Rightarrow q = -2 + i(1 + \sqrt{2})$$

$$\text{d'où } f(Z) = Ze^{i\frac{3\pi}{4}} - 2 + i(1 + \sqrt{2})$$

## Exemple 2

On a :

- centre A  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- rapport  $k = \sqrt{2}$
- angle  $\theta = \frac{\pi}{4}$

D'autre part :

$$Z' = aZ + b$$

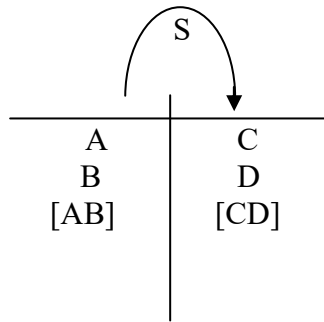
$$\text{et } a = |a| (\cos \theta + i \sin \theta) \Rightarrow a = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 1 + i \Rightarrow \mathbf{a = 1 + i}$$

De même cherchons b.

$$\text{On sait que le centre } \omega \text{ pour affixe } \frac{b}{1-a} = \omega \Leftrightarrow \frac{b}{1-(1+i)} = 1+i \Leftrightarrow \mathbf{b = 1 - i}$$

$$\text{D'où } Z' = aZ + b \Leftrightarrow \mathbf{Z' = (1 + i) Z + 1 - i}$$

## Exemple 3



1) Déterminons le rapport K et l'angle  $\theta$  de S

$$\bullet \quad K = \frac{CD}{AB} = \left| \frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A} \right| = \left| \frac{(5+i) - (1+3i)}{i - (-1-i)} \right| = \frac{|4-2i|}{|1+2i|} = \frac{\sqrt{16+4}}{\sqrt{1+4}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{4}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\bullet \quad \theta = \text{mes} (\widehat{AB, CD}) = \arg \left( \frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A} \right) = \arg \left( \frac{4-2i}{i+2i} \right) = \arg (-2i) = -\frac{\pi}{2}$$

**2) Déterminons l'écriture complexe f associée à S.**

$$f(Z) = aZ + b.$$

$$S(A) = C \quad \text{et} \quad S(B) = D$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} aZ_A + b = Z_C & (1) \\ aZ_B + b = Z_D & (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow a(Z_A - Z_B) = Z_C - Z_D \Rightarrow a = \frac{Z_C - Z_D}{Z_A - Z_B} = \frac{-4+2i}{-1-2i} = -2i$$

$$\text{Dans (2) on a: } aZ_B + b = Z_D \Rightarrow b = Z_D - aZ_B \Rightarrow b = (5+i) - (-2i)(i)$$

$$\Leftrightarrow b = 5 + i + 2i^2 = 5 + i - 2 = 3 + i \Rightarrow b = 3 + i$$

$$\text{D'où l'écriture complexe f est } f(Z) = -2iZ + 3 + i$$

Soit  $\omega$  l'affixe de  $\Omega$  tel que :

$$\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{3+i}{1-(-2i)} = \frac{(3+i)(1-2i)}{(1)^2+(2)^2} = 1 - i.$$

**Exemple 4**

**1) Soit f la transformation définie par  $Z' = aZ + 3i$**

**Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de f si :  $a = 2$  puis si  $a = -i$**

**Si  $a = 2$**

$$Z' = aZ + 3i \Leftrightarrow f(Z) = 2Z + 3i$$

- Montrons que f admet un point invariant :  
f admet un point invariant si :  $f(\omega) = \omega \Leftrightarrow 2\omega + 3i = \omega \Leftrightarrow \omega = -3i \Rightarrow \Omega(0 ; -3)$
- Ainsi déterminons la nature de f  
Pour cela, on exprime  $Z' - \omega$  en fonction de  $Z - \omega \Leftrightarrow$

$$Z' = 2Z + 3i \quad (1)$$

$$\omega = 2\omega + 3i \quad (2)$$

En effectuant (1) - (2) ; on a :  $Z' - \omega = 2(Z - \omega)$  ; sous la forme :

$$Z' - \omega = k(Z - \omega) \text{ qui est l'écriture complexe d'une Homothétie}$$

- Ces éléments caractéristiques sont :
  - Centre :  $\Omega(0 ; -3)$
  - Rapport :  $k = 2$

**Si  $a = -i$**

$$Z' = aZ + 3i \Leftrightarrow f(Z) = -iZ + 3i$$

- Montrons que  $f$  admet un point invariant :

$$f \text{ admet un point invariant si : } f(\omega) = \omega \Leftrightarrow -i\omega + 3i = \omega \Leftrightarrow \omega = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$\Rightarrow \Omega\left(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right)$$

- Ainsi déterminons la nature de  $f$

Pour cela, on exprime  $Z' - \omega$  en fonction de  $Z - \omega \Leftrightarrow$

$$Z' = -iZ + 3i \quad (1)$$

$$\omega = -i\omega + 3i \quad (2)$$

En effectuant (1) - (2) ; on a :  $Z' - \omega = -i(Z - \omega)$  ; sous la forme

$Z' - \omega = e^{i\alpha}(Z - \omega)$  qui est l'écriture complexe d'une Rotation

- Ces éléments caractéristiques sont :
  - Centre :  $\Omega\left(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right)$
  - Angle =  $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$

**2) Soient  $A(1) ; B(2+i) ; A'(2i) ; B'(1+i)$**

**Vérifions que  $AB = A'B'$**

**Puis démontrer qu'il existe une unique rotation  $r$  telle que  $r(A) = A'$  et  $r(B) = B'$**

$$AB = A'B' = \sqrt{2}$$

$$r(A) = A' \Rightarrow A' - \omega = e^{i\alpha}(A - \omega) \Rightarrow 2i - \omega = e^{i\alpha}(1 - \omega) \quad (1)$$

$$r(B) = B' \Rightarrow B' - \omega = e^{i\alpha}(B - \omega) \Rightarrow 1 + i - \omega = e^{i\alpha}(2 + i - \omega) \quad (2)$$

$$(1) - (2) \text{ donne : } e^{i\alpha} = -i \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{On en déduit que } 2i - \omega = -i(1 - \omega) \Rightarrow \omega = \frac{3+i}{2} \text{ et d'angle } -\frac{\pi}{2}$$

# EXERCICES

## Forme algébrique

**1** Déterminer les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

a)  $Z = 7 - 3i$  ; b)  $Z = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{2}$  ; c)  $Z = (-1 - i)^3$  ; d)  $Z = i^5$  ; e)  $Z = 0$  ; f)  $Z = 2 + \frac{i}{\sqrt{2}}$

**2** Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a)  $Z_1 = \frac{i}{(1+2i)(3-i)}$  ; b)  $Z_2 = (\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - 2i)$  ; c)  $Z_3 = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$

**3** Ecrire sous forme algébrique le conjugué des nombres complexes suivants :

a)  $Z = -i$  ; b)  $Z = \frac{\sqrt{3} + i}{i}$  ; c)  $Z = (1 + 2i)^3$  ; d)  $Z = 3$  ; e)  $Z = (1 + i)(-1 + 3i)^2$ .

**4** On donne les nombres complexes suivants :  $Z_1 = 1 - 2i$  et  $Z_2 = 3 + i$ .

Ecrire sous forme algébrique :  $Z_1 + Z_2$  ;  $Z_1 - Z_2$  ;  $Z_1 \times Z_2$  ;  $Z_1^2$  ;  $\frac{1}{Z_2}$  ;  $\frac{Z_2}{Z_1}$

## Forme trigonométrique - Forme exponentielle

**5** Déterminer les formes trigonométriques et exponentielles des nombres complexes suivants :

a)  $Z = -i$  ; b)  $Z = \sqrt{3}$  ; c)  $Z = \frac{1-i}{2}$  ; d)  $Z = 1 - i\sqrt{3}$  ; e)  $Z = 1 + i$

f)  $Z = -1 - i$  ; g)  $Z = -i$  ; h)  $Z = 1 + i\sqrt{3}$  ; i)  $Z = \frac{-1+i}{2}$  ; j)  $Z = (-\sqrt{3} - i)^3$

k)  $Z = \frac{-\sqrt{3} - i}{1+i}$  ; l)  $Z = (1+i)(-2-2i)$  ; m)  $Z = 1 - i$  ; n)  $Z = -i^3$

**6** Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

a)  $Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  ; b)  $Z_2 = \frac{1}{1+i}$  ; c)  $Z_3 = (1 - i\sqrt{3})^4$  ; d)  $Z_4 = \frac{(1-i)^4}{(-\sqrt{3}-i)^3}$

e)  $Z_5 = -2e^{i\frac{\pi}{4}}$  ; f)  $Z_6 = (1+i)e^{i\frac{11}{6}}$  ; g)  $Z_7 = (1-i\sqrt{3})e^{i\frac{2\pi}{3}}$  ; h)  $Z_8 = \frac{3e^{-i\frac{11}{4}}}{(1-i\sqrt{3})e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

i)  $Z_9 = (-1 - i\sqrt{3})^3 e^{i\frac{3\pi}{4}}$  ; j)  $Z_{10} = 5 \left( \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) e^{i\frac{-5\pi}{6}}$

k)  $Z_{11} = \frac{(1+i\sqrt{3})(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{2(1-i)(\cos \alpha - i \sin \alpha)}$

**7** Compléter le tableau suivant

Formes algébriques de Z	$-5(1 - i\sqrt{3})$		
Formes trigonométriques de Z			$2\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$
Formes exponentielles de Z		$e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$	

**8** On pose :  $A = 5\sqrt{2}(1+i)$  ;  $B = -5(1+i\sqrt{3})$

1) Déterminer le module et un argument de :

$$A ; B ; \bar{A} ; \frac{1}{A} ; \frac{B}{A} ; B \times A ; \frac{A}{B^2}$$

2) Soit Z un nombre complexe tel que :  $AZ = B$

a) Ecrire Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

b) En déduire les valeurs exactes de  $\cos\frac{13\pi}{12}$  et  $\sin\frac{13\pi}{12}$

c) Calculer  $(Z)^{2008}$

**9** On pose :  $Z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$

1) Calculer  $Z^2$  puis déterminer son module et son argument

2) En déduire de ce qui précède le module et un argument Z.

**10** On pose :

$$Z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} ; Z' = 1 - i$$

1) Ecrire  $\frac{Z}{Z'}$  sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

2) En déduire les valeurs exactes de  $\cos\frac{\pi}{12}$  et  $\sin\frac{\pi}{12}$

## Détermination de l'ensemble de points

**11** Déterminer puis construire :

- a) l'ensemble ( $\Gamma$ ) des points M d'affixes Z tels que :  $|Z - i| = 2$
- b) l'ensemble ( $\lambda$ ) des points M d'affixes Z tels que :  $|Z + 1 - 2i| = |Z - 1 - i|$
- c) l'ensemble ( $\varphi$ ) des points M d'affixes Z tels que :  $\arg(Z - 1 + 2i) = \frac{\pi}{6} + k\pi$
- d) l'ensemble ( $\omega$ ) des points M d'affixes Z tels que :  $\arg(3\bar{Z} - 1 + i) = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

**12** I) Le plan est muni d'un repère orthonormal ( $o; \vec{i}; \vec{j}$ )

On désigne par M le point de affixe z et M' le point d'affixe Z tel que :  $Z = \frac{z+1}{z-1}$

- a) Trouver l'ensemble (D) des points M tels que Z soit un réel
- b) Trouver l'ensemble (C) des points M tel que Z soit un imaginaire.
- c) Trouver l'ensemble (M) des points M tels que M et M' soient alignés.

Soit  $z = x + iy$  un nombre complexe distinct de  $-1$  et soit  $Z = \frac{2iz - i}{z + 1}$

II) Déterminer puis construire l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les conditions indiquées :

- a)  $|Z| = 1$
- b) Z est un imaginaire.
- c) Z est un réel.

III) A tout nombre complexe  $z \neq -1 + 2i$ , on considère le nombre complexe Z tel que

$$Z = \frac{z - 2 + 4i}{z + 1 - 2i}$$

Déterminer puis construire l'ensemble des points M dont l'affixe vérifie les conditions indiquées :

- a)  $|Z| = 1$
- b)  $|Z| = 2$
- c) Z est un réel
- d) Z est un imaginaire.

IV) Déterminer puis construire l'ensemble (E) des points M du plan tel que :

- a)  $|z + 1 + 2i| = |z - 4|$
- b)  $|z - 3i| = 2$
- c)  $|\bar{z} - 2 + i| = 1$

## Linéarisation.

**13** Linéariser les expressions :  $A = \sin^3 x$  ;  $B = \cos^3 \frac{x}{2}$  ;  $C = \cos^5 x$  ;  $D = \sin^2 x \bullet \cos^3 x$

## Résolution d'équations et systèmes.

**14** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

a)  $Z^2 + Z + 1 = 0$  ; b)  $Z^2 - 2Z + 1 = 0$  ; c)  $Z + \frac{1}{Z} + 1 = 0$  ; d)  $Z = \sqrt{2} - \frac{1}{Z}$

e)  $Z^2 - 2\bar{Z} + 1 = 0$  ; f)  $2Z^2 + 3|Z|^2 - 1 = 0$  ; g)  $iZ^2 + 2\bar{Z} + 2 - i = 0$

h)  $-3Z^2 + 2Z + 1 = 0$  ; i)  $Z^2 + 2\sin\alpha Z + 1 = 0$  ; j)  $Z^2 - 2\cos\alpha Z + 1 = 0$

k)  $-iZ^2 + (2 + 2i)Z + (10 + 5i) = 0$  ; l)  $2Z^2 - 2(3 + 2i)Z + 1 + 8i = 0$

m)  $(-1 + 2i)Z^2 + (-5 + i)Z + 9i + 6 = 0$  ; n)  $4Z^2 - 4(1 + i)Z - (45 + 26i) = 0$

**15** 1) Développer le produit de facteurs suivant :  $(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$   
2) Résoudre l'équation  $Z^4 = 1$   
3) En déduire des questions 1) et 2) la résolution des équations suivantes :

$$Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0 \text{ puis } \left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^3 + \left(\frac{3Z+i}{Z-i}\right)^2 + \left(\frac{3Z+i}{Z-i}\right) + 1 = 0$$

**16** Déterminer les racines carrées dans  $\mathbb{C}$  de chacun des nombres complexes suivants :

$45 + 28i$  ;  $5 + 12i$  ;  $3 - 4i$  ;  $120 - 22i$

**17** Déterminer dans  $\mathbb{C}$  :

a) Les racines cubiques de  $4\sqrt{3} - 4i$

b) Les racines quatrièmes de 1

c) Les racines cinquièmes de  $i$

d) Les racines sixièmes de  $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

**18** On donne le nombre complexe  $Z$  tel que :  $Z = 2 + 3i$

a- Vérifier que  $Z^4 = -119 - 120i$

b- Déterminer les racines quatrièmes de l'unité.

c- En déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation :  $Z^4 = -119 - 120i$

**19** Résoudre dans  $\mathbb{C}^2$  les systèmes :

$$1) \begin{cases} Z_1 \times Z_2 = 7 \\ Z_1 + Z_2 = 1 \end{cases} ; 2) \begin{cases} Z_1 \times Z_2 = 9 \\ Z_1 + Z_2 = 3 \end{cases} ; 3) \begin{cases} (2+3i)Z - 5Z' = -1 \\ (1-i)Z + 2Z' = 2(1+i) \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 5iZ + (2-i)Z' = 1+12i \\ (2-3i)Z + (5-2i)Z' = 39-10i \end{cases} ; 5) \begin{cases} Z + iZ' = 2(1+i) \\ -iZ + Z' = 2(1-i) \end{cases}$$

**20** Résoudre dans  $\mathbb{C}^3$  le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + iz = 0 \\ x + y - z = 0 \\ (1+i)x - 2y = 2z - 2i \end{cases}$$

**21** Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère le polynôme  $P(Z)$  telque :  
 $P(Z) = Z^3 + 9iZ^2 + 2(6i - 11)Z - 3(4i + 12)$

**a-** Démontrer que l'équation  $P(Z) = 0$  admet une solution réelle que l'on notera  $Z_1$ , dont on déterminera la valeur.

**b-** Factoriser  $P(Z)$  puis résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(Z) = 0$

**22** Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère le polynôme  $P(Z)$  telque :

$$P(Z) = Z^3 - 4iZ^2 - (6+i)Z + 3i - 1.$$

**a-** Montrer que l'équation  $P(Z) = 0$  admet une solution imaginaire pure.

**b-** Factoriser  $P(Z)$  puis résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(Z) = 0$ .

**23** Soit  $f$  la fonction à variable complexe  $Z$  telle que :

$$f(Z) = Z^4 - 3Z^3 + \frac{9}{2}Z^2 - 3Z + 1$$

**a-** Prouver que si  $Z_0$  est une solution de l'équation  $f(Z) = 0$  alors les complexes :  $\overline{z_0}$  et  $\frac{1}{z_0}$  en sont aussi.

**b-** Déterminer  $f(1+i)$  et en exploitant ce qui précède, trouver toutes les solutions de l'équation  $f(Z) = 0$ .

**24** Soit le polynôme  $P(Z)$  définie par :

$$P(Z) = Z^4 - (1 + \sqrt{2})Z^3 + (2 + \sqrt{2})Z^2 - (1 + \sqrt{2})Z + 1$$

a- Vérifier que :  $P(Z) = Z^2 \left[ \left( Z + \frac{1}{Z} \right)^2 - \left( Z + \frac{1}{Z} \right) (1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} \right]$  avec ( $Z \neq 0$ )

b- En utilisant la question précédente, résoudre l'équation  $P(Z) = 0$ .

**25** Soit le polynôme  $P(Z)$  définie par :

$$P(Z) = Z^4 + 2Z^3 - 2Z + 1$$

a- Déterminer les nombres réels  $a$  et  $b$  tel que  $\forall Z \in \mathbb{C}^*$  on a :

$$P(Z) = Z^2 \left[ \left( Z - \frac{1}{Z} \right)^2 + a \left( Z - \frac{1}{Z} \right) + b \right]$$

b- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $Z^2 + aZ + b = 0$

c- En déduire la résolution de l'équation  $P(Z) = 0$

**26** Soit  $P(Z) = Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i$

a- Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation :  $Z^2 - (2 + 6i)Z - 16 + 12i = 0$

b- Montrer que l'équation  $P(Z) = 0$  admet une solution réelle notée  $z_0$  que l'on déterminera.

c- Déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois nombres complexes tels que  $P(Z) = (Z - z_0)(aZ^2 + bZ + c)$

d- Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $P(Z) = 0$

**27**

1) Calculer :  $e^{\frac{i\pi}{3}} \times e^{\frac{-i\pi}{3}}$  et  $e^{\frac{i\pi}{3}} + e^{\frac{-i\pi}{3}}$

2) En déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation :  $Z^2 - Z + 1 = 0$

**28** On considère dans  $\mathbb{C}$  le complexe  $u$  tel que :  $u = -1 - 2i\sqrt{2}$

a- Calculer les racines carrées de  $u$ .

b- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $2Z^2 + 2iZ + i\sqrt{2} = 0$ .  
(On notera  $Z_1$  et  $Z_2$  les solutions de cette équation).

c- Montrer que  $\left| \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right| = \sqrt{2}$ .

- 29** Soit l'équation ( E ) définie par :  $Z^3 - (11 + 2i)Z^2 + 2(17 + 7i)Z - 42 = 0$
- 1) Résoudre ( E ) sachant qu'elle admet une solution réelle
  - 2) Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de ( E )
  - 3) Montrer que si  $|Z| = |Z'| = 1$  alors le nombre  $u = \frac{Z + Z'}{1 + ZZ'}$  est un réel

**30** 1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $Z^6 + 1 = 0$

2) On pose  $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Soit A, B, C, D, E, F les points d'affixes respectives :  $2\alpha$  ;  $4\alpha^3$  ;  $4\alpha^5$  ;  $\frac{1}{\alpha}$  ;  $\frac{1}{\alpha^3}$  ;  $\frac{2}{\alpha^5}$

Représenter ces six points dans le plan complexe muni du repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$

**31** On pose  $P(Z) = Z^4 - 6Z^3 + 23Z^2 - 34Z + 26$ .

1)  $\alpha$  désigne un nombre complexe quelconque. Montrer  $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$ .

En déduire que si  $P(\alpha) = 0$  alors  $P(\bar{\alpha}) = 0$ .

2) Calculer  $P(1 + i)$  puis en déduire deux solutions complexes de l'équation  $P(Z) = 0$ .

3) On donne  $Q(Z) = [Z - (1 + i)][Z - (1 - i)]$

a- Vérifier que le polynôme  $P(Z)$  est divisible par  $Q(Z)$ .

b- Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $P(Z) = 0$ .

**32** On donne le système suivant : 
$$\begin{cases} (1 + i)\alpha = 1 + 3i \\ i\alpha^2 = -4 + 3i \end{cases}$$

1) Déterminer le nombre complexe  $\alpha$ .

2) Pour tout nombre complexe  $Z$ , on pose :  $f(Z) = Z^2 - (1 + 3i)Z + (-4 + 3i)$

a- Montrer que  $f(Z)$  s'écrit sous la forme :  $f(Z) = (Z - \alpha)(Z - i\alpha)$

b- En déduire les solutions sous forme algébrique de l'équation  $f(Z) = 0$ .

**33** Soient  $a$  et  $b \in \mathbb{Z}$ . On pose que  $a$  et  $b$  sont la somme de deux carrés.

Il existe  $x, y \in \mathbb{Z}$  tels que  $a = x^2 + y^2$  et il existe  $Z$ , tels que  $b = Z^2 + \bar{Z}^2$ .

Démontrer que le produit  $ab$  est encore la somme de deux carrés.

(Indication : Ecrire  $(x^2 + y^2) = |x + iy|^2$  etc....)

## Figures géométriques dans le plan.

**34** Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs :  $-1 - i$  ;  $2 + 3i$  ;  $-10 - 13i$ .  
Démontrer que ces trois points sont alignés. (on fera une figure).

**35** Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs :  $3 + i$  ;  $2i$  ;  $2 - 2i$ .

- a- Démontrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.  
b- Déterminer l'affixe de D tel que ABCD soit un parallélogramme. (on fera une figure).

**36** Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectifs :  $-1 + i$  ;  $-1 - i$  ;  $2i$  ;  $2 - 2i$ .

- a- Etudier la nature des triangles ABC et BCD.  
b- Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon. (on fera une figure).

**37** On considère un repère orthonormé directe  $(O ; \vec{U} ; \vec{V})$  du plan complexe. Soit les points A ; B ; C d'affixes respectives :

$$Z_A = -1 + i \quad ; \quad Z_B = \frac{2 \left[ \cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{15}\right) \right]}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)} \quad \text{et} \quad Z_C = 2 - 2i$$

- a- Ecrire les complexes  $Z_A$  ;  $Z_B$  et  $Z_C$  sous forme exponentielle.  
b- Déterminer l'affixe  $Z_D$  du point D tel que le triangle OBD soit équilatéral direct, c'est-à-dire la mesure de l'angle  $(\vec{OB} ; \vec{OD}) = \frac{\pi}{3}$  (on fera une figure).

**38** Le plan est rapporté au repère orthonormé directe  $(O ; \vec{U} ; \vec{V})$ .

On considère :

- Le point A d'affixe  $Z_A = 5 - i\sqrt{3}$ .
- Le point B d'affixe  $Z_B$  est tel que OAB soit un triangle équilatéral direct c'est-à-dire la mesure de l'angle  $(\vec{OA} ; \vec{OB}) = \frac{\pi}{3}$ .
- Le point Q d'affixe  $Z_Q$  est tel que le point Q soit milieu du segment  $[OB]$ .
- Le point K d'affixe  $Z_K$  est tel que ABQK soit un parallélogramme.

1) Déterminer les affixes  $Z_B$  ;  $Z_Q$  et  $Z_K$  respectivement des points B ; Q et K.

2) Démontrer que  $\frac{Z_K - Z_A}{Z_K}$  est un imaginaire pur. En déduire la nature du triangle OKA ?

Placer les points A ; B ; Q et K dans le plan.

3) Soit C la point d'affixe  $Z_C$  tel que  $Z_C = \frac{2Z_A}{3}$

- a- Calculer  $\frac{Z_K - Z_B}{Z_K - Z_C}$ . Que peut-on en déduire pour les points B ; C et K ?  
b- Placer le point C. (on fera une figure).

**39**

**A-** Dans le plan P muni de son repère orthonormé  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ , on considère l'équation à variable complexe notée et déterminée par :  $(E) Z^3 + (1 - i)Z^2 - 2(11 + i)Z - 48i = 0$

- 1-) Prouver que ( E) admet une solution imaginaire pure que l'on notera  $z_0$ .
- 2-) a-) Achever la résolution de l'équation ( E). On notera  $Z_1$  et  $Z_2$  les autres solutions trouvées telles que  $|Z_2| < |Z_1|$ .
- b-) Donner les écritures exponentielles de  $Z_1$  et de  $Z_2$ .
- 3-) On considère G et F, les points du plan d'affixes respectives  $Z_1$  et de  $Z_2$ . Donner

l'expression exponentielle du complexe  $\frac{Z_1}{Z_2}$ . Dédurre que le triangle OGF est rectangle en O.

**B-** Dans le plan P muni de son repère orthonormé  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ , on considère le polynôme complexe noté et déterminé par :

$$P(Z) = Z^3 - (4 - i)Z^2 + (5 - 4i)Z + 5i$$

- 1-) Prouver que l'affixe du point Q(0 ; -1) est une solution de l'équation  $P(Z) = 0$
- 2-) a-) Achever la résolution de l'équation  $P(Z) = 0$
- b-) En notant R et S les points du plan dont les affixes sont les autres solutions de a-), placer Q,R et S dans le repère et prouver que ces points forment un triangle isocèle.

**40**

On considère l'ensemble des complexes  $Z_n$  tels que :  $\forall n \in \mathbb{C}$  on a :

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \frac{1+i}{2} Z_n \end{cases}$$

a- On note  $M_n$  le point d'affixe  $Z_n$  dans le plan rapporté au repère  $(o, \vec{u}, \vec{v})$ .

- Calculer  $Z_1 ; Z_2 ; Z_3$  et  $Z_4$ .
- Placer les points  $M_0, M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$ .

b- Calculer le quotient :  $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}}$

c- Quelle est la nature du triangle  $OM_n M_{n+1}$  ?

## Transformations géométriques du plan.

41 Soit (S) l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe Z associe Z' d'affixe M' tel que  $Z' = (1 + i)Z + 1 - i$ . Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (S).

42 Soit la similitude directe plane S de centre A (1 ; 1) ; de rapport  $\sqrt{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$  par la similitude S ; le point M d'affixe Z a pour transformé le point M' d'affixe Z'. Exprimer Z' en fonction de Z.

43 Soient A, B, C et D les points d'affixes  $Z_A = -1 - i$  ;  $Z_B = i$  ;  $Z_C = 1 + 3i$  ;  $Z_D = 5 + i$ . Soit S la similitude directe transformant A en C et B en D.

- a- Déterminer le rapport K et l'angle  $\theta$  de S
- b- Déterminer l'écriture complexe f associée à S.
- c- Déterminer l'affixe de  $\Omega$  le centre de S

44 Déterminer la traduction complexe de la transformation ( $\Gamma$ ) dans chacun des cas suivants :

- a- ( $\Gamma$ ) est la translation qui transforme A d'affixe  $3 - 2i$  en B d'affixe  $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
- b- ( $\Gamma$ ) est l'homothétie de rapport  $\frac{-\sqrt{2}}{2}$  qui transforme A d'affixe  $1 + i\sqrt{3}$  en B d'affixe  $-1 + i$ .
- c- ( $\Gamma$ ) est la rotation d'angle  $\frac{3\pi}{2}$  qui transforme A d'affixe  $1 + i$  en B d'affixe  $-2 + i$ .

45 Soit f la transformation définie par  $Z' = aZ + 3i$

- a- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f si :  $a = 2$  puis si  $a = -i$ .
- b- Soient A(1) ; B(2 + i) ; A'(2i) ; B'(1 + i). Vérifier que  $AB = A'B'$
- c- Démontrer qu'il existe une unique rotation r telle que  $r(A) = A'$  et  $r(B) = B'$

46 Le plan est rapporté à un repère ortho normal directe (O ; I ; J). On considère l'application F qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' définie par :  $Z' = u^2Z + u - 1$  où u désigne un nombre complexe.

- 1) a. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une translation.  
b. Caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.
- 2) a. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une rotation d'angle de mesure  $\frac{\pi}{2}$   
b. Caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

## Perfectionnement.

**47** Soit  $f$  l'application de  $E = \mathbb{C} - \{-i\}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par  $f(Z) = \frac{iz}{z+i}$ . Dans le plan complexe rapporté au repère ortho normal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on note  $M$  le point d'affixe  $z$ .

- 1) Déterminer les coordonnées du point  $B$  dont l'affixe  $z_0$  et telle que  $f(z_0) = 1 + 2i$
- 2) Soit  $z$  un élément de  $E$ . on note  $r$  le module de  $z + i$  et  $\alpha$  une mesure de son argument. Exprimer la forme trigonométrique de  $f(z) - i$  en fonction de  $r$  et  $\alpha$ .
- 3) Soit  $A$  le point d'affixe  $-i$ 
  - a) Déterminer l'ensemble  $(\Gamma)$  des points  $M$  vérifiant  $|f(z) - i| = \sqrt{2}$
  - b) Montrer que  $B$  appartient à  $(\Gamma)$ .

**48** Dans le plan complexe  $\mathbb{C}$ , on considère les points  $A$  d'affixe  $Z_A = 1$ ;  $M$  d'affixe  $Z$  et  $N$  d'affixe  $Z_N = iZ - (1 + i)$ .

On note  $T_\lambda$  l'application qui à tout point d'affixe  $Z$ , associe le point  $M'$ , barycentre des points pondérés  $(M; \lambda)$ ;  $(N; -\lambda)$  et  $(A; 1)$  où  $\lambda$  est un nombre réel non nul.

- 1) Démontrer que pour tout  $M$  du plan, le point  $N$  est l'image de  $M$  par une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques.
  - 2) a- Démontrer que l'affixe  $Z'$  du point  $M'$  est telle que  $Z' = \lambda(1 - i)Z + \lambda(1+i)+1$ .
    - b- Démontrer que  $T_\lambda$  est une similitude directe dont on précisera l'affixe du centre  $\Omega$ ; le rapport et l'angle. Pour quelle valeur de  $\lambda$ ,  $T_\lambda$  est-elle une rotation? Donner dans chacun de ces cas l'angle et l'affixe de son centre.
    - c- Exprimer les coordonnées  $(x'; y')$  du point  $M'$  en fonction de celles  $(x; y)$  de  $M$ .

**49** 1) On note  $g$  l'application affine du plan dans lui-même qui, à tout point  $M$  d'affixe  $Z$ , associe le point

$$M' \text{ d'affixe } Z' \text{ tels que } Z' = [\lambda - (\lambda^2 - 1)i]Z - 2i \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- a) Quelle est la nature de  $g$  pour  $\lambda = 1$ ? Préciser alors son élément caractéristique.
  - b) Pour quelle valeur de  $\lambda$ ,  $g$  est-elle une homothétie? Donner ses éléments caractéristiques.
  - c) Existe-t-il de valeur de  $\lambda$  pour que  $g$  soit une rotation? Si oui préciser ses éléments caractéristiques.
- 2) a) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude indirecte  $S$  qui, à tout point  $M$  d'affixe  $Z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $Z'$  tels que :  $Z' = (1 - i)\bar{Z} + 1 + i$ .
- b) Soient les points  $A(2; -2)$ ;  $B(-1; 1)$  et  $C(0; -1)$ . Déterminer l'expression complexe de la similitude indirecte  $S$ .

telle que  $S(A) = C$  ;  $S(B) = A$ .

c) Soient les points  $P(1 ; -1)$  et  $Q(-2 ; 1)$ . Déterminer l'expression complexe de la similitude directe  $s$  de centre

$\Omega(-1; -1)$  telle que  $S(Q) = P$ .

d) Déterminer l'expression complexe de la similitude directe  $s$  de centre  $\Omega(-1; -1)$  et

d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  et de rapport  $\frac{1}{2}$ .

**50**

Dans le plan complexe  $P$  rapporté au repère ortho normal direct  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ , unité graphique 2cm, on considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $Z_A = -1$  et  $Z_B = 3i$ . Soit la fonction  $f$  de  $P$  privé du point  $A$  dans  $P$  qui, à tout point  $M$  d'affixe  $Z$ , associe le point

$M'$  d'affixe  $Z'$  tel que :  $Z' = i \left( \frac{Z - 3i}{Z + 1} \right)$  (1).

1) Soit  $C$  le point d'affixe  $Z_C = 2 - i$ . Montrer qu'il existe un seul point  $D$  tel que  $f(D) = C$ .

2) Déterminer la nature du triangle  $ABC$ .

3) A l'aide de l'égalité (1), montrer que, pour tout  $M$  distinct de  $A$  et  $B$  :

$$OM' = \frac{BM}{AM} \text{ et } (i, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \text{ (module } 2\pi \text{)}.$$

4) En déduire et construire les ensembles de points suivants :

a) l'ensemble (E) des points  $M$  tels que l'image  $M'$  soit situé sur le cercle  $(\Gamma)$  de centre  $O$  de rayon 1.

b) l'ensemble (F) des points  $M$  tels que l'affixe de  $M'$  soit réelle.

**51**

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$  d'unité 2cm.

Soit  $\alpha \in ]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ , et  $f_\alpha$  l'application du plan complexe dans lui-même qui, au point  $M$  d'affixe  $Z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $Z'$  telle que :  $Z' = (1 + i \tan \alpha)Z - i \tan \alpha$ .

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $f_\alpha$ .

2) Soit  $\Omega$  le point d'affixe 1 et  $M$  un point du plan distinct de  $\Omega$ . Montrer que si  $\alpha$  n'est pas nul, alors  $MM'\Omega$  est un triangle rectangle en  $M$ . Pour quelle valeur de  $\alpha$ , ce triangle est-il isocèle ?

3) On pose dans cette partie  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  et on note  $A, B, C$  et  $D$  les points d'affixes respectives :

$i ; 2i ; -1$  et  $-1 + i$ .

a) Placer les points  $A, B, C, D$  dans le plan.

b) Démontrer que  $ABDC$  est un parallélogramme dont on précisera l'aire en  $\text{cm}^2$

c) Donner l'expression analytique de  $f_{\frac{\pi}{4}}$ .

d) En déduire les coordonnées des points  $A' ; B' ; C'$  et  $D'$ , images respectives par  $f_{\frac{\pi}{4}}$  des

points  $A, B, C$  et  $D$ .

e) Placer ces images dans le plan et montrer que  $A'B'D'C'$  un parallélogramme dont on précisera l'aire en  $\text{cm}^2$ .

**Partie A :** Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ .

52

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $Z^2 - (2 + 6i)Z - 16 + 12i = 0$
- 2) Soit  $P(Z) = Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i$ 
  - a) Montrer que l'équation  $P(Z) = 0$  admet une solution réelle notée  $z_0$  que l'on déterminera.
  - b) Déterminer a, b et c trois nombres complexes tels que  $P(Z) = (Z - Z_0)(aZ^2 + bZ + c)$
  - c) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $P(Z) = 0$

**Partie B:**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(o, i, j)$

On donne les points  $A(2)$ ,  $B(4 + 2i)$  et  $C(-2 + 4i)$ .

- 1) a- Placer les points A, B et C dans le repère  $(o, i, j)$
- b- Calculer le rapport  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  et en déduire la nature du triangle ABC
- c- Montrer que le point F d'affixe  $2i$  est le milieu du segment  $[AC]$
- d- Déterminer  $(\Delta)$  l'ensemble des points du plan d'affixe  $z$  vérifiant  $|z - 4 - 2i| = |z + 2 - 4i|$
- 2) Soit S la similitude du plan telle que  $S(A)=A$  et  $S(B)=C$ .
  - a- Déterminer le centre, le rapport  $k$  et l'angle  $\theta$  de la similitude S
  - b- Déterminer l'expression de la bijection complexe associée à la similitude S .

53

Le plan est rapporté à un repère ortho normal direct  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ .

1. Déterminez l'ensemble des points  $M(Z)$  du plan P tels que :  $(1 - i)Z + 2i = 2$ .
2. Etudiez la transformation de P qui au point M d'affixe  $z$ , fait correspondre le point M' d'affixe :  $Z' = (1 - i)Z + 2i$ .
3. En utilisant la transformation précédente, retrouvez le résultat du 1.

54

Le plan est muni du repère orthonormal direct  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ , (unité graphique : 1cm. )

On donne les points A et B d'affixes respectives  $12$  et  $9i$ . On note  $f$  la similitude direct dont

l'écriture complexe est :  $Z' = \frac{3}{4}iZ + 9i$ .

1. Déterminer le centre  $\Omega$ , L'angle et le rapport de  $f$ .
2. Quelles sont les images par  $f$  des points A et O ? Montrez que  $\Omega$  est un point commun aux cercles  $C_1$  et  $C_2$  de diamètres respectif  $[OA]$  et  $[OB]$ . Etablissez que  $\Omega$  est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle AOB et montrez que  $\Omega A \times \Omega B = \Omega O^2$  .
3. Faites une figure comportant les points A, B,  $\Omega$  ainsi que les cercles  $C_1$  et  $C_2$ .

55

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  l'unité de longueur est le centimètre. Soit ABC un triangle direct dont le point O est le centre de son cercle circonscrit. On désigne par M le milieu de  $[BC]$ . N celui de  $[AB]$ . Les affixes respectives des points M, N et P sont notées  $m; n$  et  $p$ .

1. Dans cette question,  $m = -1 - 3i; n = 2$ .

Construisez les triangles MNP et ABC.

2. Soit  $f$  la transformation du plan qui à chaque point M d'affixe  $Z = x + iy$  associe le

point M' d'affixe  $Z' = x' + iy'$  telle que :  $z' = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(-z + m + n + p)$ .

Quelle est la nature de  $f$ ? Donnez ses éléments caractéristiques.

3. Soit  $a, b, c$  sont les affixes respectives des points  $A, B, C$ .

a. Montrez que  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$  puis Déduisez que  $a = n + p - m$

b. Exprimez  $b$  et  $c$  en fonction de  $m, n$  et  $p$ .

4. On pose :  $f(A) = A', f(B) = B'$  et  $f(C) = C'$ .

On désigne par  $a', b'$  et  $c'$  les affixes respectives des points  $A', B'$  et  $C'$ .

a. Démontrez que :  $a' = (1+i)m, b' = (1+i)n, c' = (1+i)p$ .

b. Déduisez-en que  $\overrightarrow{MA}$  et  $\overrightarrow{OM}$  sont orthogonaux et que A appartient à la droite (BC).

c. Montrez de même que B' appartient à la droite (AC) et que C' appartient à la droite (AB).

5. Complétez la figure réalisée au 1, par les points  $A', B', C'$

56

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On considère les points : A d'affixe  $-4$ ; B d'affixe  $4$ ; E d'affixe  $4i$ ; C et D tels que les quadrilatères AOEC et BOEC soient des carrés.

1. Placez les points précédents dans le repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  et donnez les affixes des points C et D.

2. Soit  $f$  la transformation du plan qui à tout point M d'affixe  $z$  fait correspondre le point M' d'affixe  $Z' = (1+i)Z + 4 + 4i$ .

a. Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de  $f$ .

b. Précisez les points  $f(A)$  et  $f(O)$ .

c. Déterminez l'image par  $f$  de la droite (CA), et celle de la médiatrice du segment  $[AO]$ .

d. Exprimez, pour tout point M d'affixe des vecteurs  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{MC}$  en fonction de  $Z$ . Déduisez-en que  $MM' = MC$  et, pour M distinct de C, montrez qu'une mesure de l'angle de vecteurs  $(\overrightarrow{MM'}; \overrightarrow{MC'})$  est  $\frac{\pi}{2}$

3. Soit  $J$  le milieu du segment  $[EB]$  et  $I$  le milieu de  $[AO]$ . Déterminez l'image de  $J$  par la rotation de centre  $I$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

**57** Le plan complexe  $P$  est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On note  $A$  le point d'affixe 2. Soit  $\varphi$  l'application de  $P$  vers  $P$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $Z$  associe le

point  $M' = \varphi(M)$  d'affixe  $Z'$  définie par :  $Z' = \frac{3 + \sqrt{3}i}{4}Z + \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

1. Déterminez :
  - a. L'affixe de l'image  $\varphi(A)$  du point  $A$ .
  - b. L'affixe du point  $P$  tel que  $\varphi(P) = O$ .
2. Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de  $\varphi$ .
3. Lorsque le point  $M$  est distinct du point  $A$  :
  - a. Démontrez que le triangle  $AMM'$ ,  $M' = \varphi(M)$ , est rectangle en  $M'$ .
  - b. Le point  $M$  et le milieu du segment  $[AM]$  étant donnés, déduisez-en une construction au compas du point  $M'$ .

**58** Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on donne les points

$A$  et  $B$  d'affixes respectives 1 et  $1 - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

Pour chaque point  $M$  du plan, d'affixe  $Z$ ,  $M_1$  d'affixe  $Z_1$  désigne l'image de  $M$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ , puis  $M'$  d'affixe  $Z'$  l'image de  $M_1$  par la translation de vecteur  $-\vec{u}$ . Enfin on note  $T$  la transformation qui à chaque point  $M$  associe le point  $M'$ .

1. a) Démontrer que  $Z' = e^{i\frac{\pi}{3}}Z - 1$
- b) Déterminer l'image du point  $B$  par  $T$ .
- c) Montrer que  $T$  admet un unique point invariant dont on précisera l'affixe.
2. On pose  $Z = x + iy$ , avec  $x$  et  $y$  des réels.
  - a) Pour  $Z$  non nul, calculer la partie réelle du quotient  $\frac{Z'}{Z}$  en fonction de  $x$  et de  $y$ .
  - b) Démontrer que l'ensemble  $(E)$  des points  $M$  du plan tels que le triangle  $OMM'$  soit rectangle en  $O$ , est un cercle  $(C)$ , dont on précisera le centre et le rayon, privé de deux points.
  - c) Tracer  $(E)$ .
3. Dans cette question on pose  $Z = 1 + i$ .
  - a) Vérifier que  $M$  appartient à  $(E)$ . Placer  $M$  et  $M'$  sur la figure.
  - b) Calculer le module de  $Z'$ .
  - c) Calculer l'aire, en  $\text{cm}^2$ , du triangle  $OMM'$ .

59

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

Soit I le point d'affixe 1. On note C le cercle de diamètre [OI] et on nomme son centre  $\Omega$ .

### Partie I

On pose :  $a_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  et on note  $A_0$  son image.

1. Montrer que le point  $A_0$  appartient au cercle C.
2. Soit B le point d'affixe b, avec  $b = -1 + 2i$ , et B' le point d'affixe b' telle que  $b' = a_0 b$ .
  - a. Calculer b'.
  - b. Démontrer que le triangle OBB' est rectangle en B'.

### Partie II

Soit a un complexe non nul et différent de 1, et A son image dans le plan complexe.

A tout point M d'affixe Z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que  $Z' = aZ$ .

1. On se propose de déterminer l'ensemble des points A tels que le triangle OMM' soit rectangle en M'.

a. Interpréter géométriquement  $\arg\left(\frac{a-1}{a}\right)$

b. Montrer que  $(\overrightarrow{M'O}; \overrightarrow{M'M}) = \arg\left(\frac{a-1}{a}\right) + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{R}$ ).

c. En déduire que le triangle OMM' est rectangle en M' si et seulement si A appartient au cercle C privé de O et de I.

2. Dans cette question, M est un point de l'axe des abscisses, différent de O. On note x son affixe.

3. On choisit a de manière à ce que A soit un point de C différent de I et de O.

a. Montrer que le point M' appartient à la droite (OA).

b. En déduire que M' est le projeté orthogonal de M sur cette droite.

60

1° On se propose de résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $Z^3 + (\sqrt{3} - i)Z^2 + (1 - i\sqrt{3})Z - i = 0$ .

a) Déterminer le réel y tel que iy soit solution de (E)

b) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe Z :

$$Z^3 + (\sqrt{3} - i)Z^2 + (1 - i\sqrt{3})Z - i = (Z - i)(Z^2 + aZ + b).$$

c) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E') :  $Z^2 + Z\sqrt{3} + 1 = 0$ .

d) En déduire les solutions de (E).

2° On considère le point A d'affixe  $Z_A = i$ , le point d'affixe  $Z_B = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}$  et le point C

symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses.

a) Placer ces points sur un graphique.

b) Déterminer le module et un argument du quotient :  $\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}$ .

c) En déduire une mesure en radians de l'angle  $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$  et la nature du triangle ABC.

# Arithmétiques

## Objectifs

**Ce chapitre vise à :**

- approfondir les notions d'arithmétique vues au premier cycle ;
- mettre en place la congruence dans  $\mathbb{Z}$  et l'utiliser pour résoudre des problèmes ;
- mettre en œuvre des techniques d'algorithme et de raisonnement pour résoudre des problèmes d'arithmétique.

## Savoirs et savoir-faire

### 1. DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"><li>• Multiples d'un entier relatif.</li><li>• Notation <math>n\mathbb{Z}</math>.</li><li>• Diviseurs d'un entier relatif.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Démontrer qu'un entier est divisible par un entier donné.</li><li>• Déterminer l'ensemble des diviseurs d'un entier naturel non nul.</li></ul>

### 2. DIVISION EUCLIDIENNE

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"><li>• Division euclidienne dans <math>\mathbb{N}</math>.</li><li>• Division euclidienne dans <math>\mathbb{Z}</math>.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier relatif par un entier naturel non nul.</li></ul>

### 3. CONGRUENCE MODULO $n$

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"><li>• Définition.</li><li>• Propriété de conformité avec les opérations.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Utiliser les propriétés des congruences pour résoudre des problèmes de divisibilités.</li></ul>

#### 4. NOMBRES PREMIERS

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"><li>• Définition.</li><li>• L'ensemble des nombres premiers est infini.</li><li>• Décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Démontrer qu'un nombre est premier.</li><li>• Déterminer l'ensemble des diviseurs d'un entier naturel non nul.</li><li>• Décomposer un entier en produit de facteurs premiers.</li></ul>

#### 5. PGCD, PPCM

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"><li>• Définition et propriétés.</li><li>• Algorithme d'Euclide.</li><li>• Nombres premiers entre eux.</li><li>• Théorème de Bézout.</li><li>• Théorème de Gauss</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Déterminer le PGCD de deux nombres :<ul style="list-style-type: none"><li>- à l'aide de l'algorithme d'Euclide ;</li><li>- à l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers.</li></ul></li><li>• Déterminer le PPCM de deux nombres :<ul style="list-style-type: none"><li>- à l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers ;</li><li>- à l'aide du PGCD.</li></ul></li><li>• Utiliser le théorème de Bézout pour démontrer que des entiers sont premiers entre eux.</li><li>• Utiliser le théorème de Gauss pour résoudre des problèmes d'arithmétique.</li></ul>

### I) Activité :

- a- En te référant sur les notions vues dans les classes antérieures, décompose les nombres 450 et 320 en produit de facteur premier puis en déduire le PGCD de 450 et 320.
- b- Un champ a pour dimensions 4,5m et 3,2m. On souhaite carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe. Quel est le plus grand côté possible ( en cm ) de la dalle carrée ?

#### Solution

- a- Décomposons les nombres 450 et 320 en produit de facteur premier puis en déduire le PGCD de 450 et 320.

$$\begin{array}{r|l} 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 320 & 2 \\ 160 & 2 \\ 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow 450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

$$\Rightarrow 320 = 2^6 \cdot 5 \cdot 3^0$$

$$\text{Alors PGCD}(450 ; 320) = 2 \times 5 \times 3^0 = 10$$

- b- Déterminons le plus grand côté possible ( en cm ) de la dalle carrée ?

$$\text{On a : } L = 4,5 \text{ m} = 450 \text{ cm} \quad \text{et} \quad l = 3,2 \text{ m} = 320 \text{ m.}$$

$$\text{Ainsi le côté en cm d'une dalle carrée est le PGCD}(450 ; 320) = 10.$$

D'où le plus grand côté possible d'une dalle est 10 cm.

## II) Introduction et Définition :

### 1) Introduction

On peut considérer que, dès l'époque préhistorique, les hommes ont utilisé leurs doigts pour compter ou effectuer des calculs sommaires. L'emploi de symboles pour désigner les nombres apparaît sans doute en Mésopotamie, vers 2000 av. J.-C, où l'on a retrouvé des tablettes babyloniennes couvertes de chiffres en base 60. Puis viennent les systèmes de numération égyptiens, grecs et romains. **C'est en Grèce qu'est fondée l'arithmétique théorique par les pythagoriciens au VI<sup>e</sup> siècle av. J.-C.** À cette époque, les mathématiciens grecs savent déjà manipuler des notions arithmétiques comme les proportions, les moyennes, ou encore les progressions. Tout ce savoir a été, par la suite, regroupé dans les *Éléments* d'Euclide.

### 2) Définition

L'Arithmétique est la branche des mathématiques qui étudie les propriétés des **Nombres Entiers Naturels**  $\mathbb{N}$ , des **Entiers Relatifs**  $\mathbb{Z}$  et des **Nombres Rationnels**  $\mathbb{Q}$ .

## III) Ensembles d'applications

En arithmétique, on utilise trois types de nombres : les **Nombres Entiers Naturels**  $\mathbb{N}$  ; les **Nombres Entiers Relatifs**  $\mathbb{Z}$  et les **Nombres Rationnels**  $\mathbb{Q}$ .

### 1) Ensemble des Nombres entiers naturels :

L'ensemble des entiers naturels, noté :  $\mathbb{N}$  est défini en extension comme suite :

$$\mathbb{N} = \{ 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots \dots \dots ; n ; (n + 1) ; \dots \dots \dots \}$$

On définit dans  $\mathbb{N}$  deux lois de compositions internes de la fonction suivante :

- **L'addition** :  $\forall a \in \mathbb{N}$  et  $\forall b \in \mathbb{N}$ ,  $a + b = S \in \mathbb{N}$ .
- **La multiplication** :  $\forall a \in \mathbb{N}$  et  $\forall b \in \mathbb{N}$ ,  $a \times b = p \in \mathbb{N}$ .

Exemple :  $2 + 1 = 3 \in \mathbb{N}$  et  $4 \times 3 = 12 \in \mathbb{N}$

On définit aussi dans  $\mathbb{N}$  une relation d'ordre, c'est-à-dire que pour tout a et b de  $\mathbb{N}$ , on a :

Soit  $a \leq b$ , soit :  $b \leq a$ .

## Propriétés

$P_1$  :  $\mathbb{N}$  a un plus petit élément noté 0.

$P_2$  :  $\mathbb{N}$  n'a pas de plus grand élément.

$P_3$ -Toute partie non vide de  $\mathbb{N}$  a un plus petit élément.

### 2) Ensemble des Nombres entiers relatifs :

L'ensemble des entiers relatifs, noté :  $\mathbb{Z}$  est défini en extension comme suite :

$$\mathbb{Z} = \{-2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; \dots ; n ; -n ; (n + 1) ; -(n + 1), \dots\}$$

Cet ensemble a la structure d'un **anneau commutatif unitaire** :

On définit dans  $\mathbb{Z}$  deux lois de composition interne : une addition et une multiplication.

### Propriétés :

$P_1$  : L'addition est commutative associative dans  $\mathbb{Z}$  et admet un élément neutre qui est 0.

$P_2$  : La multiplication est commutative associative dans  $\mathbb{Z}$  et admet un élément neutre qui est 1.

$P_3$  : La multiplication est distributive par rapport à l'addition :  $a \cdot (b + c) = ab + ac$ .

$P_4$  : L'existence d'un élément symétrique  $-a$ , c'est-à-dire que  $a + (-a) = 0$ .

### NB :

L'anneau est unitaire à cause de l'existence de l'élément neutre "1" de la multiplication.

$(\mathbb{Z} ; +)$  est un groupe commutatif.

$(\mathbb{Z} ; + ; \times)$  est un anneau commutatif unitaire.

On définit dans  $\mathbb{Z}$  une **relation d'ordre** ( $\leq$ ) vérifiant les propriétés suivantes :

1)  $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

2)  $a \leq b$  et  $c > 0 \Rightarrow ac \leq bc$

3)  $a \leq b$  et  $c < 0 \Rightarrow ac \geq bc$

D'autres propriétés de  $\mathbb{Z}$ , que nous admettrons sans preuve sont :

$P_1$ - Toute partie de  $\mathbb{Z}$  qui est non vide et qui est majorée, a un plus grand élément.

$P_2$ - Toute partie de  $\mathbb{Z}$  qui est non vide et qui est minorée a un plus petit élément.

$P_3$ - Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers relatifs, et  $b$  est non nul, il existe un entier relatif  $n$  où  $nb \geq a$ .

### 3) Ensemble des Nombres rationnels :

L'ensemble des nombres rationnels, noté :  $\mathbb{Q}$  est un ensemble qui est défini en extension comme suite :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} , p \in \mathbb{Z} ; q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

**NB:**  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

## IV) Raisonnement par récurrence :

### Activité :

Tu disposes d'une infinité de bâtonnets alignés verticalement. On suppose que le premier tombe et qu'en tombant, il fait tomber le second, et que ce dernier en tombant fait tomber le troisième bâtonnet ainsi de suite.

Combien de bâtonnet ne vont –ils pas tomber ?

### Principe :

Pour démontrer qu'une proposition  $P_n$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ , on procède de la façon suivante :

- **1<sup>ère</sup> Etape :** (Initialisation):

On vérifie que la proposition  $P_n$  est vraie pour le terme initial, c'est-à-dire : ( $P_0$  est vraie).

- **2<sup>ème</sup> Etape :** (Transmission) :

On suppose que la proposition  $P_n$  est vraie pour tout entier naturel et ensuite on démontre qu'elle est vraie à l'ordre  $n + 1$ . C'est-à-dire  $P_{n+1}$  est vraie.

- **3<sup>ème</sup> Etape :** (Conclusion) :

On conclut qu'alors :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$  est vraie.

## Exemple

Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

1)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } 2^n > n.$

2)  $\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

### Solution

1)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } 2^n > n.$

- **1<sup>ère</sup> Etape :** (Initialisation) :

Pour  $n = 1$  ; on a :  $2^1 = 2 > 1$  (vraie).

Pour  $n = 2$  ; on a :  $2^2 = 4 > 2$  (vraie).

- **2<sup>ème</sup> Etape :** (Transmission) :

Supposons  $2^k > k$  et montrons que  $2^{k+1} > k + 1$ .

On sait que :  $2^k > k$ .

En multipliant chaque membre de l'inégalité par 2, on a :

$$2 \times 2^k > 2k. \text{ Or } \forall k \in \mathbb{N}, 2k \geq k + 1 \text{ d'où : } 2^{k+1} > k + k \geq k + 1$$

$$2^{k+1} > k + 1$$

- **3<sup>ème</sup> Etape :** (Conclusion) :

D'où  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } 2^n > n.$

2)  $\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Posons :  $P_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$  et  $P'_n = \frac{n(n+1)}{2}$

- **1<sup>ère</sup> Etape :** (Initialisation) :

Pour  $n = 1$  ; on a :  $\begin{cases} P_1 = 1 \\ P'_1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow P_1 = P'_1$  (vraie)

Pour  $n = 2$  ; on a :  $\begin{cases} P_2 = 1 + 2 = 3 \\ P'_2 = \frac{2(2+1)}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow P_2 = P'_2 \text{ (vraie)}$

- **2<sup>ème</sup> Etape : (Transmission) :**

Supposons que la proposition est vraie au rang  $n = k$  et montrons qu'elle est vraie au rang  $n = k + 1$ .

Pour  $n = k + 1$ , on a :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

$$\text{Or : } 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k = \frac{k(k + 1)}{2}$$

$$\text{D'où } 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

- **3<sup>ème</sup> Etape : (Conclusion) :**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

$$3) \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

$$\text{Posons : } P_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \quad \text{et } P'_n = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

- **1<sup>ère</sup> Etape : (Initialisation) :**

$$\text{Pour } n = 1 ; \text{ on a : } \begin{cases} P_1 = 1^2 = 1 \\ P'_1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1 \end{cases} \Rightarrow P_1 = P'_1 \text{ (vraie)}$$

$$\text{Pour } n = 2 ; \text{ on a : } \begin{cases} P_2 = 1^2 + 2^2 = 5 \\ P'_2 = \frac{2(2+1)(4+1)}{6} = \frac{30}{6} = 5 \end{cases} \Rightarrow P_2 = P'_2 \text{ (vraie)}$$

- **2<sup>ème</sup> Etape : (Transmission) :**

Supposons que la proposition est vraie au rang  $n = k$  et montrons qu'elle est vraie au rang  $n = k + 1$ .

Pour  $n = k + 1$ , on a :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6}$$

$$\text{Or } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6}$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k + 1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
 &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
 \end{aligned}$$

- **3<sup>ème</sup> Etape :** (Conclusion) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

## **V) Division Euclidienne dans $\mathbb{N}$**

1) **Définition :**

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels ( $b \neq 0$ ).

On appelle division Euclidienne de l'entier naturel  $a$  par l'entier naturel  $b$ , toute opération visant à déterminer un couple unique  $(q; r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , tel que  $a = bq + r$ .

Avec :  $0 \leq r < b$ .

2) **Notation :**

- $q$  : est appelé le quotient de la division Euclidienne de l'entier  $a$  par l'entier  $b$ .
- $r$  : est appelé le reste de la division Euclidienne de l'entier  $a$  par l'entier  $b$ .

3) **Propriétés :**

$P_1$  : Si  $b$  divise  $a$ , alors le reste  $r$  est nul ( $r = 0$ ). Ainsi :  $a = bq$ .

$P_2$  : Si  $b$  divise  $a$ , alors pour tout entier naturel  $n$ ,  $b$  divise  $na$ .

## Exemples

### Exemple 1 :

Effectuer la division Euclidienne de  $a$  par  $b$  dans chacun des cas suivants puis en déduire le quotient, le reste et le diviseur dans la division de  $a$  par  $b$ :

$$\text{a) } a = 43 \text{ et } b = 5; \quad \text{b) } a = 54 \text{ et } b = 12$$

### Exemple 2 :

- 1) Soient deux entiers naturels  $a$  et  $b$  ( $a > b$ ). La division Euclidienne de  $a$  par  $b$  donne pour quotient  $q = 6$  et  $r = 47$  pour reste. Par ailleurs  $a + b + r = 591$ . Déterminer  $a$  et  $b$ .
- 2) Quelle peuvent être le diviseur et le reste d'une division Euclidienne dont le dividende est 542 et le quotient est 12 ?

### Exemple 3 :

Déterminer l'ensemble des entiers relatifs  $n$  tels que  $(5n^3 - n)$  divise  $(n + 2)$

## Solution

### Exemple 1

Effectuons le reste de la division Euclidienne de  $a$  par  $b$  dans chacun des cas suivants :

$$\text{a) } a = 43 \text{ et } b = 5 \quad \text{b) } a = 54 \text{ et } b = 12$$

$$\begin{array}{r} 43 \quad | \quad 5 \\ \quad \quad | \quad 8 \\ \hline 3 \quad | \end{array}$$

$$\Rightarrow q = 8 \text{ et } r = 3$$

$$\begin{array}{r} 54 \quad | \quad 12 \\ \quad \quad | \quad 4 \\ \hline 6 \quad | \end{array}$$

$$\Rightarrow q = 4 \text{ et } r = 6$$

### Exemple 2

- 1) Soient deux entiers naturels  $a$  et  $b$  ( $a > b$ ). La division Euclidienne de  $a$  par  $b$  donne pour

Quotient  $q = 6$  et  $r = 47$  pour reste. Par ailleurs  $a + b + r = 591$ .

Déterminons  $a$  et  $b$  sachant que  $q = 6$  ;  $r = 47$  et  $a + b + r = 591$  **(1)** et d'autre part

$a = qb + r \Leftrightarrow a = 6b + 47$  **(2)** . Dans la relation **(1)** remplaçons  $a$  par sa valeur ainsi que  $r$  :

$$(6b + 47) + b + 47 = 591 \Leftrightarrow 7b = 591 - 94 \Leftrightarrow 7b = 497 \Leftrightarrow b = \frac{497}{7} = 71 \Rightarrow b = 71$$

Dans (2)  $a = b \times 71 + 47 \Rightarrow a = 473$

2) Déterminons le diviseur et le reste d'une division euclidienne sachant que :

$$a = 542 \text{ et } q = 12.$$

$$a = qb + r \Leftrightarrow 542 = 12b + r \Leftrightarrow r = 542 - 12b \text{ (1) d'autre part on sait que } 0 \leq r < b$$

$$0 \leq r < b \Leftrightarrow 0 < 542 - 12b < b \Leftrightarrow 12b \leq 542 < 13b \Leftrightarrow 12 \leq \frac{542}{b} < 13 \text{ donc on aura :}$$

$$\frac{542}{b} = 12 \Rightarrow b = \frac{542}{12} = 45 \Rightarrow b = 45$$

$$\text{Dans (1) } r = 542 - 12 \times 45 = 542 - 540 = 2 \Rightarrow r = 2$$

### **Exemple 3**

Déterminons l'ensemble des entiers relatifs  $n$  tels que  $(5n^3 - n)$  divise  $(n + 2)$

La division Euclidienne de  $(5n^3 - n)$  par  $(n + 2)$ , donne pour quotient :

$$Q = 5n^2 - 10n + 19 \text{ et pour reste } r = -38$$

$$\frac{(5n^3 - n)}{(n+2)} \text{ peut se ramener sous la forme : ( quotient ) + } \frac{\text{reste}}{\text{diviseur}}$$

$$\text{Alors } \frac{(5n^3 - n)}{(n+2)} = (5n^2 - 10n + 19) + \frac{-38}{(n+2)}$$

Ainsi pour que  $\frac{(5n^3 - n)}{(n+2)}$  soit un entier relatif, il faut que  $(n + 2)$  soit égale à l'ensemble des diviseurs de 38.

Or l'ensemble des diviseurs de 38 sont :  $\{-38; -19; -2; -1; 1; 2; 19; 38\}$

$$\Rightarrow n + 2 \in \{-38; -19; -2; -1; 1; 2; 19; 38\}$$

$$\text{Et } n \in \{-40; -21; -4; -3; -1; 0; 17; 36\}$$

## VI) Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

### Multiples et diviseurs d'un entier relatif :

#### Activité :

- a- Détermine tous les multiples de  $-8$  et  $12$ .
- b- Détermine tous les multiples de  $-8$  et  $12$  comprise entre  $-24$  et  $36$ .

#### a- Définitions :

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs.

- On dit que  $a$  est un multiple de  $b$ , s'il existe un entier relatif  $k$  tel que :  $a = kb$ .
- On dit que  $b$  est un diviseur de  $a$ , si  $a = qb$  (où  $q$  est le quotient de la division).

#### NB :

- **0 est un multiple de tout entier relatif.**
- **Tout entier relatif non nul divise 0, mais il ne divise aucun entier relatif.**
- **Si  $b \neq 0$ , on dit que  $b$  est un diviseur de  $a$  ou que  $b$  divise  $a$ . On note :  $b \mid a$ .**

#### b- Propriété :

Soient  $a$  ;  $b$  ;  $c$  trois entiers tel que  $a \neq 0$ .

Si  $a$  divise  $b$  et  $a$  divise  $c$ , alors pour tout entier  $u$  et  $v$ ,  $a$  divise la combinaison linéaire  $bu + cv$ .

## VII) Système de numération

### 1) Définition :

Soit  $b$  un entier naturel tel que  $b \geq 2$ . Tout entier naturel  $x$  peut s'écrire de façon unique

telque :  $x = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \dots + a_pb^p = \sum_{k=0}^p a_kb^k$  avec  $a_k \in \mathbb{N}$ .

Ainsi si  $0 \leq a_k < b$  et  $a_p \neq 0$ , on peut écrire :  $x = \overline{a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0}^b$ .  
Cette écriture de  $x$  est appelée  $x$  dans la base  $b$ .

### 2) Propriétés :

**P<sub>1</sub>** : Par convention, dans le système décimal ( appelé aussi à base 10 ), les nombres sont écrits à l'aide des dix chiffres décimaux, à savoir : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.  
C'est-à-dire tout nombre sans barre, est écrit en base 10.

#### Exemple :

$$3201 = \overline{3201}^{10} = 1 \times 10^0 + 0 \times 10^1 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^3 = 1 + 0 + 200 + 3000 = 3201$$

Donc, les chiffres 1 ; 0 ; 2 ; 3 sont les coefficients respectifs des puissances croissantes de la base 10.

**P<sub>2</sub>** : Au Delas des 10 chiffres décimaux, on peut adopter les lettres : A ; B ; C ; D ; E...etc.  
pour : 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 .....etc.

### 3) Changement de base :

#### a- Système binaire ou système en base 2 :

Dans le système binaire les symboles utilisés sont : 0 et 1

#### b- Système octal ou système en base 8 :

Dans le système octal les symboles utilisés sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

#### c- Système hexadécimal ou système en base 16 :

Dans le système hexadécimal les symboles utilisés sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; A ; B ; ... ; F

### Exemple

- 1) Ecrire dans le système décimal le nombre :  $\overline{432}^5$
- 2) Ecrire dans le système binaire le nombre :  $\overline{127}^{10}$
- 3) Ecrire dans le système décimal le nombre :  $\overline{FOA3}^{16}$
- 4) Sachant que  $14 = 13 + 1$ , écrire  $14^8$  dans le système de base 13.
- 5) Un nombre s'écrit BABA (Avec :  $A = 10$  et  $B = 11$ ) dans le système hexadécimal.  
Ecrire ce nombre dans le système octal.

### Solution

- 1) Ecrivons dans le système décimal le nombre :  $\overline{432}^5$

$$\overline{432}^5 = 4 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 2 = 117 \quad \text{ou} \quad \overline{432}^5 = \overline{117}^{10}$$

- 2) Ecrire dans le système binaire le nombre :  $\overline{127}^{10}$

$$\overline{127}^{10} = 127$$

$$\begin{array}{r}
 127 \mid 2 \\
 1 \mid 63 \mid 2 \\
 \quad 1 \mid 31 \mid 2 \\
 \quad \quad 1 \mid 15 \mid 2 \\
 \quad \quad \quad 1 \mid 7 \mid 2 \\
 \quad \quad \quad \quad 1 \mid 3 \mid 2 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 1 \mid 1 \mid 2 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1 \mid 0
 \end{array}$$

$$\Rightarrow 127 = \overline{1111111}^2$$

- 3) Ecrire dans le système décimal le nombre :  $\overline{FOA3}^{16}$

$$\overline{FOA3}^{16} = F \times 16^3 + 0 \times 16^2 + A \times 16^1 + 3 = F \times 16^3 + A \times 16 + 3$$

$$\text{Or } A = 10 \quad \text{et} \quad F = 15$$

$$\Rightarrow \overline{FOA3}^{16} = 15 \times 16^3 + 10 \times 16 + 3 = 61440 + 160 + 3 = 61603$$

$$\Rightarrow \overline{FOA3}^{16} = 61603 \quad \text{ou} \quad \overline{FOA3}^{16} = \overline{61603}^{10}$$

- 4) Sachant que  $14 = 13 + 1$ , écrivons  $14^8$  dans le système de base 13.

$$14 = 13 + 1 \Rightarrow 14^8 = (13 + 1)^8$$

Ainsi d'après le triangle de Pascal, le développement de  $(13 + 1)^8$  donne :

$$(13 + 1)^8 = 13^8 + 8 \cdot 13^7 + 28 \cdot 13^6 + 56 \cdot 13^5 + 70 \cdot 13^4 + 56 \cdot 13^3 + 28 \cdot 13^2 + 8 \cdot 13^1 + 1$$

$$\text{Or : } 28 = 13 \times 2 + 2 \quad ; \quad 56 = 13 \times 4 + 4 \quad ; \quad 70 = 13 \times 5 + 5. \text{ Alors, on a :}$$

- $28 \cdot 13^6 = 13^6(13 \times 2 + 2) = 2 \times 13^7 + 2 \times 13^6$
- $56 \cdot 13^5 = 13^5(13 \times 4 + 4) = 4 \times 13^6 + 4 \times 13^5$
- $70 \cdot 13^4 = 13^4(13 \times 5 + 5) = 5 \times 13^5 + 5 \times 13^4$
- $56 \cdot 13^3 = 13^3(13 \times 4 + 4) = 4 \times 13^4 + 4 \times 13^3$
- $28 \cdot 13^2 = 13^2(13 \times 2 + 2) = 2 \times 13^3 + 2 \times 13^2$

La somme des termes de même puissance donne :

$$(13 + 1)^8 = 1 \cdot 13^8 + 10 \cdot 13^7 + 6 \cdot 13^6 + 9 \cdot 13^5 + 9 \cdot 13^4 + 6 \cdot 13^3 + 2 \cdot 13^2 + 8 \cdot 13^1 + 1$$

$$\Rightarrow (13 + 1)^8 = 14^8 = \overline{1A6996281}^{13} \text{ (avec } A = 10)$$

5) Un nombre s'écrit BABA (Avec : A = 10 et B = 11) dans le système hexadécimal.  
Ecrivons ce nombre dans le système octal.

$$\overline{BABA}^{16} = B \times 16^3 + A \times 16^2 + B \times 16^1 + A \quad \text{Or : } A = 10 \quad \text{et } B = 11$$

$$\Rightarrow \overline{BABA}^{16} = 11 \times 16^3 + 10 \times 16^2 + 11 \times 16^1 + 10$$

Dans le système octal les symboles utilisés sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

Or :  $11 = 8 + 3$  ;  $10 = 8 + 2$  Alors, on a :

$$\Rightarrow \overline{BABA}^{16} = (8 + 3) \times 16^3 + (8 + 2) \times 16^2 + (8 + 3) \times 16^1 + (8 + 2)$$

Or :  $16^3 = (8 \cdot 2)^3$  ;  $16^2 = (8 \cdot 2)^2$  ;  $16^1 = (8 \cdot 2)^1$  ;  $10 = 8 + 2$  Alors, on a :

$$\begin{aligned} \overline{BABA}^{16} &= (8 + 3) \times (8 \cdot 2)^3 + (8 + 2) \times (8 \cdot 2)^2 + (8 + 3) \times 16^1 + (8 + 2) \\ &= (8 + 3) \times 8^3 \times 2^3 + (8 + 2) \times 8^2 \times 2^2 + (8 + 3) \times 8 \times 2 \end{aligned}$$

Le développement et la somme des termes de même puissance donnent :

$$\overline{BABA}^{16} = 8^5 + 3 \cdot 8^4 + 5 \cdot 8^3 + 2 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 2$$

$$\Rightarrow \overline{BABA}^{16} = \overline{135272}^8$$

## VIII) Congruence Modulo n

Considérons les nombres entiers relatifs ci-dessous, où  $n$  est un entier naturel supérieur à 1,

$$a = -2n + 1$$

$$b = 15n + 1$$

Des relations ci-dessus, on note que :

- $a$  et  $b$  ont un même reste (à savoir 1) lorsqu'ils sont divisés par  $n$
- $a - b = -2n - (15n) = -17n$ , c'est-à-dire que  $a - b$  est un multiple de  $n$ .

De ces observations, nous donnons la définition de la congruence modulo  $n$  comme suite :

### 1) Définitions :

**Définition 1:** On dit que l'entier relatif  $a$  est congru à l'entier relatif  $b$ , modulo  $n$ , si la division de  $a$  par  $n$ , et celle de  $b$  par  $n$ , ont le même reste. Ceci est symbolisé par :  $a \equiv b(n)$ .

**Définition 1 :** On dit que l'entier relatif  $a$  est congru à l'entier relatif  $b$ , modulo  $n$ , si la différence  $a - b$  est un multiple de  $n$ . Autrement dit  $a \equiv b(n) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; a - b = kn$ .

**Remarque :**  $a \equiv b(n) \Leftrightarrow a = kn + b$  c'est-à-dire le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $n$  est  $b$ .

### 2) Propriétés :

La relation de congruence modulo  $n$  est une **relation d'équivalence**, car elle met en évidence les propriétés suivantes :

**P<sub>1</sub> :** la relation de congruence modulo  $n$  est **Réflexive**, c'est-à-dire :

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \text{ on a : } a \equiv a[n].$$

**P<sub>2</sub> :** la relation de congruence modulo  $n$  est **Symétrique**, c'est-à-dire :

$$\forall (a ; b) \in \mathbb{Z}^2, \text{ Si } a \equiv b[n] \text{ Alors } b \equiv a[n]$$

**P<sub>3</sub> :** la relation de congruence modulo  $n$  est **Transitive**, c'est-à-dire :

$$\forall (a ; b ; c) \in \mathbb{Z}^3, \text{ Si } a \equiv b[n] \text{ et } b \equiv c[n] \text{ alors } a \equiv c[n].$$

3) **Autres propriétés caractéristiques :**

$$P_1 : a \equiv b[n] \Rightarrow n \text{ divise } a - b$$

$$P_2 : a \equiv b[n] \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, ka \equiv kb[n]$$

$$P_3 : a \equiv b[n] \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}, a^p \equiv b^p[n]$$

4) **Congruences particulières (Caractères de divisibilité) :**

a- **Divisibilité par 2**

Un entier  $x$  est divisible par 2 si et seulement si son chiffre des unités simples est pair, c'est-à-dire si l'entier  $x$  est terminé par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.

b- **Divisibilité par 3 et par 9**

Un entier  $x$  est divisible par 3 (respectivement par 9) si et seulement si la somme de ces chiffres est divisible par 3 (respectivement par 9).

c- **Divisibilité par 5**

Un entier  $x$  est divisible par 5 si et seulement si cet entier est terminé par 0 ou 5.

d- **Divisibilité par 11**

Un entier  $N$  est divisible par 11 si et seulement si la différence de la somme des chiffres de rang pair et de la somme des chiffres de rang impair est divisible par 11.

e- **Divisibilité par 4 et par 25**

Un entier  $x$  est divisible par 4 (respectivement par 25) si et seulement si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4 (respectivement par 25).

**Exemple**

1) Déterminer le reste de la division par 5 de :  $2^0$  ; 2 ;  $2^2$  ;  $2^3$  et  $2^n$

En déduire le reste de la division de  $2^{20}$  par 5.

2) Déterminer le reste de la division de  $7^n$  par 9 puis en déduire le reste de la division Euclidienne de  $7^{2008}$  par 9.

3) Le nombre 2798793 est-il divisible par : 2 ; 3 ; 11 ?

### Solution

1) Pour chacun des nombres ci-dessous, déterminons le reste de la division par 5 de :  $2^0$  ; 2 ;  $2^2$  ;  $2^3$  ;  $2^4$  et  $2^n$  Puis en déduisons le reste de la division de  $2^{20}$  par 5.

$$2^0 = 1 \equiv 1[5]$$

$$2 = 2 \equiv 2[5]$$

$$2^2 = 4 \equiv 4[5]$$

$$2^3 = 8 \equiv 3[5]$$

$$2^4 = 16 \equiv 1[5]$$

Ainsi, on remarque qu'à partir de  $n = 4$ , le reste 1 c'est répété.

Alors on dit que 4 est la période c'est-à-dire :

$$2^{4k} \equiv 1[5]$$

$$2^{4k+1} \equiv 2[5]$$

$$2^{4k+2} \equiv 4[5]$$

$$2^{4k+3} \equiv 3[5]$$

Si  $n = 4k$ , le reste de la division euclidienne de  $2^n$  par 5 est 1.

Si  $n = 4k + 1$ , le reste de la division euclidienne de  $2^n$  par 5 est 2.

Si  $n = 4k + 2$ , le reste de la division euclidienne de  $2^n$  par 5 est 4.

Si  $n = 4k + 3$ , le reste de la division euclidienne de  $2^n$  par 5 est 3.

Déduisons le reste de la division de  $2^{20}$  par 5.

Pour cela, il suffit d'écrire 20 sous la forme  $20 = 4k + r$

$$\text{Or } 20 = 4 \times 5 + 0 = 4 \times 5 \Rightarrow 2^{20} = 2^{4 \times 5 + 0}$$

$$2^{20} \equiv 2^0 \equiv 1[5]$$

2) Déterminons le reste de la division de  $7^n$  par 9 puis en déduisons le reste de la division Euclidienne de  $7^{2008}$  par 9.

$$\text{Pour } n = 0 ; \text{ on a : } 7^0 = 1 \equiv 1[9]$$

$$\text{Pour } n = 1 ; \text{ on a : } 7^1 = 7 \equiv 7[9]$$

$$\text{Pour } n = 2 ; \text{ on a : } 7^2 = 49 \equiv 4[9]$$

$$\text{Pour } n = 3 ; \text{ on a : } 7^3 = 343 \equiv 7 \times 49 = 28 \equiv 1[9]$$

Ainsi, on remarque qu'à partir de  $n = 3$ , le reste 1 c'est répété.

Alors la période  $P = 3 \Rightarrow n = Pq + r \Rightarrow n = 3q + r$

- Si  $r = 0$  ; alors on a :  $7^n = 7^{3q} = (7^3)^q \equiv (1)^q [9] = 1 \equiv 1 [9]$
- Si  $r = 1$  ; alors on a :  $7^n = 7^{3q+1} = 7^{3q} \times 7^1 \equiv 7 [9]$
- Si  $r = 2$  ; alors on a :  $7^n = 7^{3q+2} = 7^{3q} \times 7^2 \equiv 4 [9]$

**D'où les restes possibles de la division de  $7^n$  par 9 sont : 1 ; 7 ; 4**

En déduisons le reste de la division de  $7^{2008}$  par 9.

La division de 2008 par la période  $P = 3$  , donne pour quotient  $q = 669$  et pour reste  $r = 1$

$$\Rightarrow 2008 = 3 \times 669 + 1$$

$$\text{Alors } 7^{2008} = 7^{3 \times 669 + 1} \text{ (sous la forme } 7^{3q+1} \equiv 7 [9] \text{)}$$

$$\text{D'où } 7^{2008} \equiv 7 [9]$$

**Conclusion** : Le reste de la division de  $7^{2008}$  par 9 est  $r = 7$

3) Vérifions si le nombre 2798793 est –il divisible par : 2 ; 3 ; 11

- **Divisibilité par 2 :**

Le nombre 2798793 n'est pas divisible par 2, car : 2798793 ne se termine pas par : 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8

- **Divisibilité par 3 :**

le nombre 2798793 est divisible par 3, car :  $2 + 7 + 9 + 8 + 7 + 9 + 3 = 45$  qui est divisible par 3.

- **Divisibilité par 11 :**

le nombre 2798793 n'est pas divisible par 11, car :

$$(7 + 8 + 9) - (2 + 9 + 7 + 3) = 24 - 21 = 3 \text{ qui n'est pas divisible par 11.}$$

## IX) Congruence et Structure d'anneau (Ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ) :

### 1) Classe d'équivalence modulo n

#### a- Définition :

Lorsqu'un nombre quelconque  $x$  de  $\mathbb{Z}$  est divisé par un entier naturel  $n$ , les restes possibles sont :  $0, 1, 2, \dots, n-1$ .

On dit qu'un élément  $x$  de  $\mathbb{Z}$  appartient à la **classe modulo  $n$**  si :  $x \equiv p$  avec  $n - 1 \geq 0$ .

D'une manière générale, si  $x$  est un élément de  $\mathbb{Z}$ , alors la classe de  $x$  modulo  $n$  est l'ensemble de tous les éléments de  $\mathbb{Z}$  qui ont le même reste que  $x$  dans la division par  $n$ ; on le note  $cl(x) = \dot{x}$  tel que :  $cl(x) = \dot{x} = \{y \in \mathbb{Z} / x - y \equiv 0[n]\}$

#### b- Ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ :

L'ensemble des classes modulo  $n$  est noté par  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et s'appelle groupe quotient de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  tel que :  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\dot{0}; \dot{1}; \dot{2}; \dot{3}; \dots; \overbrace{\dot{n-1}}\}$ .

### 2) Propriétés dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

#### a- Propriétés (Addition) :

- 1) L'associativité,  $\dot{x} + (\dot{y} + \dot{z}) = (\dot{x} + \dot{y}) + \dot{z}$
- 2) La commutativité,  $\dot{x} + \dot{y} = \dot{y} + \dot{x}$
- 3) L'élément neutre,  $\dot{0}$  (car,  $\dot{x} + \dot{0} = \overbrace{\dot{x} + \dot{0}} = \dot{x}$ )
- 4) L'élément  $\overbrace{-x}^{-x}$ , symétrique de  $x$  (car  $\overbrace{x + 0} = \overbrace{x - x} = \dot{0}$ )

#### b- Propriétés (Multiplication) :

- 1) L'associativité :  $\dot{x} \times (\dot{y} \times \dot{z}) = (\dot{x} \times \dot{y}) \times \dot{z}$
- 2) La commutativité :  $\dot{x} \times \dot{y} = \dot{y} \times \dot{x}$
- 3) L'élément neutre :  $\dot{1}$  (car  $\dot{1} \times \dot{x} = \overbrace{\dot{1} \times \dot{x}} = \dot{x}$ )
- 4) La distributivité par rapport à l'addition, soit :  $\dot{x} \times (\dot{y} + \dot{z}) = (\dot{x} \times \dot{y}) + (\dot{x} \times \dot{z})$

#### NB :

On dit qu'un anneau commutatif unitaire  $A$  est **intègre** si pour tout  $x, y$  de  $A$ , on a :  $x \times y = 0 \Rightarrow x = 0$  ou  $y = 0$

Lorsque l'anneau n'est pas intègre, il existe  $x$  et  $y$ , tous non nuls, dont le produit est zéro. On dit alors que  $x$  et  $y$  sont des **diviseurs de zéro**.

### Exemple

Utiliser la définition ci-dessus pour établir la table d'addition et de multiplication de  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ .

### Solution

Ici les restes possibles sont 0, 1, 2, 3. D'où les deux tables suivantes

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Pour établir les tables ci-dessus, nous avons effectué les opérations de la manière typique suivante :

**Pour la multiplication** :  $\overset{\cdot}{3} \times \overset{\cdot}{2} = \overbrace{\overset{\cdot}{3} \cdot \overset{\cdot}{2}}^{\cdot} = \overset{\cdot}{6}$     ou    **Pour l'addition**  $\overset{\cdot}{3} + \overset{\cdot}{2} = \overbrace{\overset{\cdot}{3} + \overset{\cdot}{2}}^{\cdot} = \overset{\cdot}{5}$

## **X) Nombre Entier Naturel Premier :**

### **1) Définition :**

On dit qu'un nombre entier naturel  $p$  est premier s'il a exactement deux diviseurs, 1 et  $p$ .

### **D'une manière générale :**

Pour montrer qu'un nombre entier naturel  $p$  est premier, il suffit de le diviser par les entiers naturels premiers successifs qui lui sont inférieurs afin d'obtenir un entier premier  $d$  qui ne le divise pas avec ( $d^2 < a$ )

### **Exemple**

Montrer que 239 est un nombre entier premier.

$$\text{On a : } a = 239 \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{239} = 15,45$$

Ainsi les nombres entiers premiers inférieurs à 15,45 sont :  $\{1, 3, 5, 7, 13\}$  et on remarque que 239 n'est pas divisible par aucun de ces nombres premiers c'est-à-dire :  $\{1, 3, 5, 7, 13\}$ .

**Conclusion :** 239 est un nombre premier.

### **2) Théorèmes :**

**Théorème 1 :** Tout entier naturel  $n$  supérieur à 1, admet au moins un diviseur premier.

**Théorème 2 :** L'ensemble des nombres premiers est infini.

**Théorème 3 :** Tout entier naturel  $n$  supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier  $d$  tel que :  $1 < d^2 \leq n$

### **NB :**

L'ensemble des nombres premiers compris entre 1 et 100 peut s'obtenir par **l'algorithme d'Eratosthène** que nous décrivons comme suit :

- 1) On construit une table des nombres allant de 1 à 100.
- 2) On élimine le nombre 1 qui n'est pas premier
- 3) On garde le nombre 2 et on élimine de la table tous ses multiples
- 4) Le nombre suivant non éliminé est 3, que l'on garde. On élimine de la table tous les multiples de 3;
- 5) On procède ainsi jusqu'au nombre 100 .
- 6) Les nombres non éliminés de la table sont tous premiers.

On obtient alors la table suivante :

<del>1</del>	2	3	<del>4</del>	5	<del>6</del>	7	<del>8</del>	9	<del>10</del>
11	<del>12</del>	13	<del>14</del>	15	<del>16</del>	17	<del>18</del>	19	<del>20</del>
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	<del>33</del>	34	35	<del>36</del>	37	<del>38</del>	39	40
41	42	43	<del>44</del>	45	<del>46</del>	47	<del>48</del>	49	50
<del>51</del>	52	53	54	55	<del>56</del>	57	<del>58</del>	59	<del>60</del>
61	62	63	64	65	<del>66</del>	67	<del>68</del>	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
<del>81</del>	82	83	84	85	<del>86</del>	87	<del>88</del>	89	90
91	92	93	94	95	<del>96</del>	97	<del>98</del>	99	100

**Théorème 4 : (Décomposition d'un nombre entier en produit de facteur premier).**

Tout entier naturel supérieur à 1 se décompose de façon unique comme un produit de facteurs premiers. La décomposition prend la forme générale :  $n = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} P_3^{\alpha_3} \dots P_k^{\alpha_k}$

où  $\alpha_i$  est le nombre de termes de valeur  $p_i$  contenus dans  $n$ .

**Exemple**

- 1) Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre 21200.
- 2) On pose  $N = 21200n$ . Déterminer la valeur de  $n$  pour que  $N$  soit un carré parfait.

**Solution**

- 1) Décomposons en produit de facteurs premiers le nombre 21200.

Nous remarquons la présence de deux zéros à la fin du nombre.

D'où :  $n = 212 \times 10^2 = 212 \times 2^2 \times 5^2$

Maintenant nous utilisons la table des nombres premiers pour décomposer le terme 212 comme suite :

$$\begin{array}{r|l}
 212 & 2 \\
 106 & 2 \\
 53 & 53 \\
 1 & 
 \end{array}$$

En regroupant les termes, on a :  $2^2 \times 53 \times 2^2 \times 5^2 = 2^4 \times 5^2 \times 53^1$

- 2) On pose  $N = 21200n$ . Déterminons la valeur de  $n$  pour que  $N$  soit un carré parfait.

$N = 21200n = 2^4 \times 5^2 \times 53^1 \times n$ . Alors  $N$  est un carré parfait si  $n = 53^{2k+1}$  ( avec  $k \in \mathbb{N}$  )

Où  $2k + 1$  est l'écriture d'un nombre impair.

## XI) PPCM et PGCD de deux entiers naturels a et b :

### 1) Plus Petit Commun Multiple(PPCM)

#### a- Définition :

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs non nuls. On appelle plus petit commun multiple de  $a$  et  $b$ , le plus petit élément strictement positif de  $(a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z})$ .

#### Notation :

Le plus petit commun multiple de  $a$  et  $b$  peut être noté comme suit:

$$\text{PPCM}(a; b) = (a \vee b) = m.$$

#### b- Propriétés

$$P_1: \forall (a; b) \in \mathbb{Z}^2; \text{PPCM}(a; b) = \text{PPCM}(|a|; |b|)$$

C'est à dire chercher le PPCM de deux entiers relatifs, revient à chercher le PPCM de deux entiers naturels non nuls.

$$P_2: \forall (a; b) \in (\mathbb{N}^*)^2, \text{ on a : } ma(a; b) \leq \text{PPCM}(a; b) \leq a \cdot b$$

$$P_3: \forall (a; b) \in (\mathbb{N}^*)^2, \text{ on a : } \text{PPCM}(a; b) = a \iff a \in (b\mathbb{Z}).$$

$$\textbf{Exemple : } \text{PPCM}(12; 4) = 12 \iff 12 \in (4\mathbb{Z}).$$

$P_4$  : L'ensemble des multiples communs de deux entiers naturels non nuls  $a$  et  $b$  est l'ensemble des multiples de leurs PPCM, c'est-à-dire si  $\text{PPCM}(a; b) = m$ ; alors :  $(a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}) = m\mathbb{Z}$ .

$$\textbf{Exemple : } \text{PPCM}(12; 16) = 48 \text{ donc } (12\mathbb{Z} \cap 16\mathbb{Z}) = 48\mathbb{Z}.$$

$P_5$  : Soit  $a; b$  et  $k$  trois entiers naturels non nuls. On a :

$$\text{PPCM}(ka; kb) = k \text{PPCM}(a; b)$$

$$\textbf{Exemple : } \text{PPCM}(120; 168) = \text{PPCM}(24 \times 5; 24 \times 7) = 24 = 24 \cdot \text{PPCM}(5; 7) = 24 \times 35 \\ \implies \text{PPCM}(120; 168) = 840$$

## 2) Plus Grand Commun Diviseur (PGCD)

### a- Définition :

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs non nuls. On appelle Plus Grand Commun Diviseur de  $a$  et  $b$ , le plus grand élément commun strictement positif de  $(a \in \mathbb{Z} \cap b \in \mathbb{Z})$ .

### Notation :

Le Plus Grand Commun Diviseur de  $a$  et  $b$  peut avoir les notations suivantes :

$$\text{PGCD}(a; b) = (a \wedge b) = d = \Delta.$$

### b- Propriétés :

$$\mathbf{P}_1 : \forall (a; b) \in \mathbb{Z}^2 ; \text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(|a|; |b|)$$

C'est à dire chercher le PGCD de deux entiers relatifs, revient à chercher le PGCD de deux entiers naturels non nuls.

$\mathbf{P}_2$  : Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls. On a :

$$\text{PGCD}(a; b) = d \Rightarrow D(a; b) = D_d \text{ où } D_d \text{ désigne l'ensemble des diviseurs de } d.$$

### Exemple :

$$\text{PGCD}(24; 30) = 6 \Rightarrow D(24; 30) = D_6 = \{1; 2; 3; 6\}$$

$\mathbf{P}_3$  : Soient  $a; b$  et  $k$  trois entiers naturels non nuls. On a :

$$\text{PGCD}(ka; kb) = k \text{ PGCD}(a; b).$$

### Exemple :

$$\text{PGCD}(228; 95) = \text{PGCD}(19 \times 12; 19 \times 5) = 19 \text{ PGCD}(12; 5) = 19 \times 1 = 19$$

$$\mathbf{P}_4 : \text{Si } b > a \text{ alors } \text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(a; b - a) = \text{PGCD}[b - a; a - (b - a)]$$

### Exemple 1 :

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(143; 27) &= \text{PGCD}(27; 116) = \text{PGCD}(27; 89) = \text{PGCD}(77; 62) = \text{PGCD}(27; 35) \\ &= \text{PGCD}(27; 8) = \text{PGCD}(8; 19) = 1 \end{aligned}$$

**Exemple 2 :**

$$\text{PGCD}(2n + 3 ; 5n - 2) = \text{PGCD}(3n - 5 ; 2n + 3) = \text{PGCD}(n - 8 ; 2n + 3) \\ \Rightarrow \text{PGCD}(n + 11 ; n - 8) = \text{PGCD}(19 ; n - 8) = 19$$

**P<sub>4</sub>** : D'après l'algorithme d'Euclide, si  $a = bq + r$  ( $r \neq 0$ ) alors :

$\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; r)$  et puis que  $r = a - bq$  alors on a :

$$\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}[b ; (a - bq)]$$

**Exemple :**

Montrer que  $\text{PGCD}[(5n^3 - n) ; (n + 2)] = \text{PGCD}[(n + 2) ; 38]$

**Solution**

La division Euclidienne de  $(5n^3 - n)$  par  $(n + 2)$  donne pour quotient :

$$q = 5n^2 - 10n + 19 \text{ et pour reste } r = -38.$$

Puisque :  $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; r)$  alors on a :

$$\text{PGCD}[(5n^3 - n) ; (n + 2)] = \text{PGCD}[(n + 2) ; -38] = \text{PGCD}[(n + 2) ; 38]$$

**P<sub>5</sub>** : Soit  $(a ; b) \in (\mathbb{N}^*)^2$  et  $d$  leur PGCD. Un entier relatif  $m$  est un multiple de  $d$  si et seulement si, il existe deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tel que  $m = au + bv$

**Exemple :**

38 est un multiple de 19 ; donc il existe un couple  $(u ; v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que :

$$38 = 228u + 95v \Rightarrow 38 = 228(1) + (-2)(95) \Rightarrow u = 1 \text{ et } v = -2$$

**Exercices d'application**

1) Déterminer le PGCD et le PPCM des entiers  $a$  et  $b$  dans chacun des cas suivants :

$$\mathbf{a-} a = 1455 \text{ et } b = 335 ; \mathbf{b-} a = 24 \text{ et } b = 33 ; \mathbf{c-} a = 48 \text{ et } b = 46$$

**Solution**

$$\mathbf{a-} a = 1455 \text{ et } b = 335$$

La décomposition de  $a$  et  $b$  en produit de facteurs premiers donne :

$$\begin{cases} a = 1455 \\ b = 335 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \cdot 5 \cdot 97 \\ b = 5 \cdot 67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \cdot 5 \cdot 97 \cdot 67^0 \\ b = 5 \cdot 67 \cdot 97^0 \cdot 3^0 \end{cases}$$

$$\text{PGCD}(1455 ; 335) = 3^0 \cdot 97^0 \cdot 67^0 \cdot 5^1 = 5 \Rightarrow \text{PGCD}(1455 ; 335) = 5$$

=>

$$\text{PPCM}(1455 ; 335) = 3 \cdot 5 \cdot 97 \cdot 67 = 97485 \Rightarrow \text{PPCM}(1455 ; 335) = 97485$$

**b-**  $a = 24$  et  $b = 33$

La décomposition de  $a$  et  $b$  en produit de facteurs premiers donne :

$$\begin{cases} a = 24 \\ b = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^3 \cdot 3 \\ b = 3 \cdot 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^3 \cdot 3 \cdot 11^0 \\ b = 3 \cdot 11 \cdot 2^0 \end{cases}$$

$$\text{PGCD}(24 ; 33) = 2^0 \cdot 3 \cdot 11^0 = 3 \Rightarrow \text{PGCD}(24 ; 33) = 3$$

=>

$$\text{PPCM}(24 ; 33) = 2^3 \cdot 3 \cdot 11 = 264 \Rightarrow \text{PPCM}(24 ; 33) = 264$$

**c-**  $a = 48$  et  $b = 46$

La décomposition de  $a$  et  $b$  en produit de facteurs premiers donne :

$$\begin{cases} a = 48 \\ b = 46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^4 \times 3 \\ b = 2 \times 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^4 \times 3 \times 23^0 \\ b = 2 \times 23 \times 3^0 \end{cases}$$

$$\text{PGCD}(48 ; 46) = 2 \times 3^0 \times 23^0 = 2 \Rightarrow \text{PGCD}(48 ; 46) = 2 \text{ et}$$

$$\text{PPCM}(48 ; 46) = 2^4 \times 3 \times 23 = 1104 \Rightarrow \text{PPCM}(48 ; 46) = 1104$$

## XII) Algorithme d'Euclide :

### 1) Définition :

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers tels que :  $0 < b < a$  et  $r$  le reste de la division Euclidienne de  $a$  par  $b$ .

On appelle **Algorithme d'Euclide**, toute opération visant à déterminer le PGCD des deux entiers  $a$  et  $b$  en effectuant les divisions Euclidiennes successives suivantes :

- Division de  $a$  par  $b$  pour obtenir :  $a = bq_0 + r_0$  ; Avec  $0 \leq r_0 < b$ .
- Division de  $b$  par  $r_0$  pour obtenir :  $b = r_0q_1 + r_1$  ; Avec  $0 \leq r_1 < r_0$ .
- Division de  $r_0$  par  $r_1$  pour obtenir :  $r_0 = r_1q_2 + r_2$  ; Avec  $0 \leq r_2 < r_1$ .

Et ainsi de suite jusqu'à obtention du dernier reste non nul qui correspond au PGCD des deux entiers  $a$  et  $b$ .

**NB :** toutes ces opérations peuvent être résumées dans un tableau appelé : **tableau d'Algorithme**.

<b>Quotients</b>	$q_0$	$q_1$	$q_2$	....	.....	.....	.....
<b>Dividende</b>	<b>Diviseur</b>	$r_0$	$r_1$	....	.....	.....	.....
<b>Restes</b>	$r_0$	$r_1$	$r_2$	....	.....	.....	.....

### Exemple

En utilisant le tableau d'Algorithme, déterminer le PGCD des entiers  $a$  et  $b$  dans chacun des cas suivants :

a-  $a = 1455$  et  $b = 335$  ; c-  $a = 46$  et  $b = 43$

### Solution

a-  $a = 1455$  et  $b = 335$

<b>Quotients</b>	421	1	2		
<b>1455335</b>	115105	10	5		
<b>Restes</b>	115	105	10	5	0

Ici le dernier reste non nul est 5. D'où  $\text{PGCD}(1455 ; 335) = 5$

c-  $a = 46$  et  $b = 43$

<b>Quotients</b>	1143		
<b>46</b>	4331		
<b>Restes</b>	3	1	0

Ici le dernier reste non nul est 1. D'où  $\text{PGCD}(46 ; 43) = 1$

### XIII) Nombres Premiers entre eux ou Nombres étrangers :

#### 1) Définitions :

Activité : Détermine le PGCD (48 ; 43)

#### Synthèse

Le PGCD (48 ; 43) = 1. On dit alors que 48 et 43 sont premiers entre eux ou qu'ils sont étrangers.

#### Définition 1 :

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres entiers relatifs non nuls.

On dit que  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux (ou sont étrangers) si  $\text{PGCD}(a ; b) = 1$ .

#### Définition 2:

On dit également que  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux (ou sont étrangers) s'ils n'admettent pas de diviseur commun (en dehors de l'unité c'est-à-dire 1).

Exemple : 3 et 5 sont premiers entre eux alors  $\text{PGCD}(3 ; 5) = 1$

#### 2) Théorèmes :

##### ➤ Théorème 1 : (Théorème de Bézout).

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs non nuls.  $a$  et  $b$  sont étrangers s'il existe un couple  $(u ; v) \in \mathbb{N}$  tel que :  $au + bv = 1$ .

##### ➤ Théorème 2 : (Théorème de Gauss).

Soient  $a ; b ;$  et  $c$  trois entiers relatifs non nuls. Si  $a$  divise  $bc$  et que  $a$  et  $b$  sont premier entre eux ( $\text{PGCD}(a ; b) = 1$ ), alors  $a$  divise  $c$ .

##### ➤ Théorème 3 : (Théorème de Fermat).

Soit  $a$  un nombre entier non nul, et  $p$  un nombre premier. Si  $p$  ne divise pas  $a$ , alors il s'en suit la congruence suivante :  $a^{p-1} \equiv 1[p]$

➤ **Théorème 4 :**

Si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux (  $\text{PGCD}(a; b) = 1$  ) et si  $a$  et  $b$  divisent  $c$ , alors le produit  $ab$  divise  $c$ .

➤ **Théorème 5 :**

Si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux (  $\text{PGCD}(a; b) = 1$  ), alors  $\text{PPCM}(a; b) = ab$

**Exemple**

- 1) En utilisant le théorème de Bézout, déterminer le couple  $(u; v)$  tel que  $7u + 5v = 1$ .
- 2) En utilisant le théorème de Gauss, montrer que si  $n$  est un entier naturel, alors, le nombre  $N = n^3 - n$  est divisible par 6.
- 3) En utilisant le théorème de Fermat, déterminer le reste de la division de  $15^{401}$  par 17.

**Solution**

- 1) **En utilisant le théorème de Bézout, déterminons le couple  $(u; v)$  tel que  $7u + 5v = 1$ .**

Puisque  $\text{PGCD}(7; 5) = 1$ , alors utilisons la table d'Algorithme pour déterminer le couple  $(u; v)$

<b>Quotients</b>	1	2	1
<b>7</b>	<b>5</b>	2	1
<b>Restes</b>	2	1	0

$$\Rightarrow 1 = 5 - 2 \times 2 \quad \text{or} \quad 2 = 7 - 1 \times 5$$

$$\Rightarrow 1 = 5 - 2(7 - 1 \times 5)$$

$$\Rightarrow 1 = 5 - 2 \times 7 + 2 \times 5$$

$$\Leftrightarrow 5 - 2 \times 7 + 2 \times 5 = 1$$

$$\Rightarrow 7(-2) + 5(1 + 2) = 1$$

$$\Rightarrow 7(-2) + 5(3) = 1 \text{ (Sous la forme } 7u + 5v = 1 \text{). Avec } u = -2 \text{ et } v = 3$$

D'où le couple  $(u; v)$  est tel que  $(u; v) = (-2; 3)$ .

**2) En utilisant le théorème de Gauss, montrons que si  $n$  est un entier naturel, alors, le nombre  $N = n^3 - n$  est divisible par 6.**

On peut écrire,

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n + 1)(n - 1)$$

$$\Leftrightarrow n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$$

$$\Leftrightarrow N = (n - 1)n(n + 1)$$

On note que les termes  $(n - 1)$ ,  $n$  et  $(n + 1)$  de  $N$ , sont des entiers successifs. Donc au moins un de ces termes est pair, donc divisible par 2. D'autre part, la division de chacun de ces termes par 3 donne les restes possibles 0, 1, ou 2. Donc,

Si  $(n - 1) \div 3$  donne un reste de 0, alors  $(n - 1)$  est divisible par 3.

Si  $(n - 1) \div 3$  donne un reste de 1, alors  $(n + 1)$  est divisible par 3.

Si  $(n - 1) \div 3$  donne un reste de 2, alors  $n$  est divisible par 3.

En conclusion,  $n^3 - n$  est à la fois divisible par 2 et par 3. Or 2 et 3 sont premiers entre eux. Donc 6 divise  $n^3 - n$ .

**3) En utilisant le théorème de Fermat, déterminer le reste de la division de  $15^{401}$  par 17.**

On note que 17 est un nombre premier et que 17 ne divise pas 15. Alors, par le Petit Théorème de Fermat, on a :

$$15^{17-1} \equiv 1(17) \Rightarrow 15^{16} \equiv 1(17)$$

D'autre part, on a :

$$401 = 16 \times 25 + 1 \Rightarrow 15^{401} = (15^{16})^{25} \times 15^1$$

Les relations ci-dessus donnent,

$$15^{401} \equiv 1^{25} \times 15^1 (17)$$

$$\Rightarrow 15^{401} \equiv 15 (17)$$

D'où le reste de  $15^{401}$  par 17 est 15.

### 3) Relation Entre PGCD et PPCM :

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls. Si  $d$  et  $m$  désignent respectivement le

**PGCD** et le **PPCM** des entiers naturels :  $a$  et  $b$ , on a :

$$- a \cdot b = m \cdot d$$

Ainsi il existe deux entiers  $a'$  et  $b'$  premiers entre eux ( $\text{PGCD}(a'; b') = 1$ ) tel que :

$$a = a' \cdot d \quad \text{et} \quad b = b' \cdot d \quad \Rightarrow a \cdot b = d^2 \cdot a'b'$$

Puisque  $a'$  et  $b'$  sont premiers entre eux ( $\text{PGCD}(a'; b') = 1$ ), alors on a le théorème

Suivant :

$$- \text{PPCM}(a'; b') = a' \cdot b'$$

### Exemple

Déterminer les entiers naturels  $a$  et  $b$  dans chacun des cas suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} a + b = 168 \\ \text{PGCD}(a; b) = 21 \end{cases} \quad ; \quad \text{b) } \begin{cases} m + 3\Delta = 276 \\ 10 < \Delta < 30 \end{cases} \quad ; \quad \text{c) } \begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = a \cdot b \end{cases}$$

### Solution

$$\text{a) } \begin{cases} a + b = 168 \\ \text{PGCD}(a; b) = 21 \end{cases}$$

Soient  $a'$  et  $b'$  deux entiers non nul tel que :  $a = a'd$  et  $b = b'd$   
(avec  $\text{PGCD}(a'; b') = 1$ )

Posons :  $\text{PGCD}(a; b) = 21 = d$ . Ainsi le système devient :

$$\begin{cases} a'd + b'd = 168 \\ d = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d(a' + b') = 168 \\ d = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21(a' + b') = 168 \\ d = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a' + b' = 8 \\ d = 21 \end{cases}$$

Puisque  $\text{PGCD}(a'; b') = 1$  alors  $(a'; b') \in \{(3; 5); (5; 3); (7; 1); (1; 7)\}$

$$\text{Or : } a = 21a' \quad \text{et} \quad b = 21b'$$

$$\text{Pour : } \begin{cases} a' = 5 \\ \text{et} \\ b' = 3 \end{cases} \quad \text{on a : } \begin{cases} a = 105 \\ \text{et} \\ b = 63 \end{cases} \Rightarrow S_1 = \{(105; 63)\}$$

$$\text{Pour : } \begin{cases} a' = 3 \\ \text{et} \\ b' = 5 \end{cases} \quad \text{on a : } \begin{cases} a = 63 \\ \text{et} \\ b = 105 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \{(63; 105)\}$$

$$\text{Pour : } \begin{cases} a' = 7 \\ \text{et} \\ b' = 1 \end{cases} \quad \text{on a : } \begin{cases} a = 147 \\ \text{et} \\ b = 21 \end{cases} \Rightarrow S_3 = \{(147; 21)\}$$

$$\text{Pour : } \begin{cases} a' = 1 \\ \text{et} \\ b' = 7 \end{cases} \quad \text{on a : } \begin{cases} a = 21 \\ \text{et} \\ b = 147 \end{cases} \Rightarrow S_4 = \{(21; 147)\}$$

$$\Rightarrow S = \{(105; 63); (63; 105); (147; 21); (21; 147)\}$$

$$\text{b) } \begin{cases} m + 3\Delta = 276 \\ 10 < \Delta < 30 \end{cases}$$

Cherchons tous les diviseurs de 276

$$\begin{array}{l|l} 276 & 2 \\ 138 & 2 \\ 69 & 3 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array}$$

$$D_{276} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12; 23; 46; 69\}$$

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls. Si  $\Delta$  et  $m$  désignent respectivement le PGCD et le PPCM des entiers naturels :  $a$  et  $b$ , on a :

$$\triangleright a \cdot b = m \cdot \Delta$$

Ainsi il existe deux entiers  $a'$  et  $b'$  premiers entre eux ( $\text{PGCD}(a'; b') = 1$ ) tel que :

$$\triangleright a = a' \cdot \Delta \quad \text{et} \quad b = b' \cdot \Delta \quad \Rightarrow a \cdot b = \Delta^2 \cdot a' b'$$

$$\Rightarrow \Delta^2 \cdot a' b' = m \cdot \Delta \Leftrightarrow m = a' b' \cdot \Delta$$

Alors le système devient :

$$\begin{cases} a'b' \cdot \Delta + 3\Delta = 276 \\ 0 < \Delta < 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta(a'b' + 3) = 276 \\ 0 < \Delta < 30 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a'b' + 3 = \frac{276}{\Delta} \\ 0 < \Delta < 30 \end{cases}$$

Or  $0 < \Delta < 30 \Leftrightarrow \Delta \in \{12; 23\}$  car l'ensemble des diviseurs de 276 comprises entre 0 et 30 sont : 12 et 23

**1<sup>er</sup> cas : Si  $\Delta = 12$ , on a :**

$$a'b' + 3 = \frac{276}{12} \Leftrightarrow a'b' + 3 = 23 \Rightarrow a'b' = 20$$

Puisque  $\text{PGCD}(a'b') = 1$  alors  $(a'b') \in \{(4; 5); (5; 4); (20; 1); (1; 20)\}$

Or  $a = 12a'$  et  $b = 12b'$

$$\text{Pour : } \begin{cases} a' = 4 \\ \text{et} \\ b' = 5 \end{cases} \text{ on a : } \begin{cases} a = 48 \\ \text{et} \\ b = 60 \end{cases} \Rightarrow S_1 = \{(48; 60)\}$$

$$\text{Pour : } \begin{cases} a' = 5 \\ \text{et} \\ b' = 4 \end{cases} \text{ on a : } \begin{cases} a = 60 \\ \text{et} \\ b = 48 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \{(60; 48)\}$$

$$\text{Pour : } \begin{cases} a' = 20 \\ \text{et} \\ b' = 1 \end{cases} \text{ on a : } \begin{cases} a = 240 \\ \text{et} \\ b = 12 \end{cases} \Rightarrow S_3 = \{(240; 12)\}$$

$$\text{Pour : } \begin{cases} a' = 1 \\ \text{et} \\ b' = 20 \end{cases} \text{ on a : } \begin{cases} a = 12 \\ \text{et} \\ b = 240 \end{cases} \Rightarrow S_4 = \{(12; 240)\}$$

$$\Rightarrow S' = \{(48; 60); (60; 48); (240; 12); (12; 240)\}$$

**2<sup>er</sup> cas : Si  $\Delta = 23$ , on a :**

$$a'b' + 3 = \frac{276}{23} \Leftrightarrow (a'b') + 3 = 12 \Rightarrow a'b' = 9$$

Puisque PGCD ( $a'b'$ ) = 1 alors ( $a'b'$ )  $\in$  {(9;1) ; (1;9)}

Or  $a = 23a'$  et  $b = 23b'$

$$\text{Pour : } \begin{cases} a' = 9 \\ \text{et} \\ b' = 1 \end{cases} \text{ on a : } \begin{cases} a = 207 \\ \text{et} \\ b = 23 \end{cases} \Rightarrow S_1 = \{(207;23)\}$$

$$\text{Pour : } \begin{cases} a' = 1 \\ \text{et} \\ b' = 9 \end{cases} \text{ on a : } \begin{cases} a = 23 \\ \text{et} \\ b = 207 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \{(23;207)\}$$

$$\Rightarrow S'' = \{(207;23);(23;207)\}$$

$$\Rightarrow S = S' \cap S''$$

$$c) \begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = a \cdot b \end{cases}$$

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls. Si  $d$  et  $m$  désignent respectivement le

PGCD et le PPCM des entiers naturels :  $a$  et  $b$ , on a :

$$\triangleright a \cdot b = m \cdot d$$

Ainsi il existe deux entiers  $a'$  et  $b'$  premiers entre eux (PGCD( $a'$ ;  $b'$ ) = 1) tel que :

$$\triangleright a = a' \cdot d \quad \text{et} \quad b = b' \cdot d$$

Alors le système devient :

$$\begin{cases} (a' \cdot d)^2 - (b' \cdot d)^2 = 405 \\ 3m = m \cdot d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a'^2 \cdot d^2 - b'^2 \cdot d^2 = 405 \\ d = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d^2(a'^2 - b'^2) = 405 \\ d = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^2(a'^2 - b'^2) = 405 \\ d = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9(a'^2 - b'^2) = 405 \\ d = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a'^2 - b'^2 = 45 \\ d = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a' - b')(a' + b') = 45 \\ d = 3 \end{cases}$$

Résoudre ce système, revient à résoudre les cas de systèmes suivants :

$$\begin{cases} a' - b' = 1 \\ a' + b' = 45 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a' - b' = 5 \\ a' + b' = 9 \end{cases} \quad (\text{Car PGCD}(a'; b') = 1) \text{ Ainsi :}$$

$$\text{Pour } \begin{cases} a' - b' = 1 \\ a' + b' = 45 \end{cases}, \text{ on a : } \begin{cases} a' = 23 \\ b' = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 69 \\ b = 66 \end{cases} \Rightarrow S_1 = \{(69; 66)\}$$

$$\text{Pour } \begin{cases} a' - b' = 5 \\ a' + b' = 9 \end{cases}, \text{ on a : } \begin{cases} a' = 7 \\ b' = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow S_1 = \{(7; 6)\}$$

$$\Rightarrow S = \{(69; 66); (7; 6)\}$$

## XIV) Résolution dans $\mathbb{Z}^2$ des équations Diophantiennes Equations du type ( $ax + by = c$ )

### 1) Définition :

On appelle équation Diophantienne, toute équation de  $\mathbb{Z}^2$  dont l'ensemble solution se présente sous forme de couple  $(x ; y)$ .

**Résolution d'un cas particulier : Equation du type  $ax + by = c$ .**

$ax + by = c$  où :  $a ; b ; c$  sont tous des entiers (avec  $a$  et  $b$  non nul)

### Théorème

L'équation :  $ax + by = c$ , admet des solutions dans  $\mathbb{Z}^2$  si et seulement si  $c$  est un multiple du PGCD( $a ; b$ ).

### 2) Résolution

Pour résoudre de telles équations, nous pouvons utiliser deux méthodes :

- La méthode par Congruence  
Ou
- La méthode d'algorithme

### Exemple

- 1) Montrer que l'équation :  $(x ; y)$  de  $\mathbb{Z}^2$  :  $6y - 3x = m$ , admet des solutions si et seulement si  $m$  est un multiple de 3.
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$ , les équations suivantes :
  - a-  $6y - 3x = 5$
  - b-  $6y - 3x = 3$
- 3) En déduit de ce qui précède, les solutions dans  $\mathbb{Z}^2$  de l'équation :  
 $(6y - 3x - 4)(6y - 3x + 4) = 1$

### Solution

- 1) Montrons que l'équation :  $(x ; y)$  de  $\mathbb{Z}^2$  :  $6y - 3x = m$ , admet des solutions si et seulement si  $m$  est un multiple de 3.

$$6y - 3x = m \Leftrightarrow 3(2y - x) = m \Leftrightarrow 2y - x = \frac{m}{3}$$

Alors l'équation admet donc des solutions dans  $\mathbb{Z}$  si 3 divise  $m$  ou encore si  $m$  est un multiple de 3.

2) Résolvons dans  $\mathbb{Z}^2$ , les équations suivantes :

a-  $6y - 3x = 5$

Puisque 5 n'est pas un multiple de 3, alors l'équation :  $6y - 3x = 5$  n'admet pas de solution.  
Par conséquent  $S = \{\emptyset\}$

b-  $6y - 3x = 3$

Puisque 3 est un multiple de 3, alors l'équation :  $6y - 3x = 3$  admet des solutions .

**Résolution :**

$$6y - 3x = 3 \Leftrightarrow 2y - x = 1 \Leftrightarrow x = 2y - 1 \Leftrightarrow x \equiv -1 [2]$$

$$\Leftrightarrow x = 2k - 1$$

En remplaçant  $x$  par sa valeur dans l'équation :  $2y - x = 1$ , on a :  $y = k$

$$\Rightarrow S = \{(2k - 1 ; k)\}$$

3) En déduit de ce qui précède, les solutions dans  $\mathbb{Z}^2$  de l'équation :

$$(6y - 3x - 4)(6y - 3x + 4) = 1$$

Résoudre l'équation  $(6y - 3x - 4)(6y - 3x + 4) = 1$ , revient à résoudre les systèmes suivant :

$$\begin{cases} 6y - 3x - 4 = 1 \\ 6y - 3x + 4 = 1 \end{cases} (S_1) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 6y - 3x - 4 = -1 \\ 6y - 3x + 4 = -1 \end{cases} (S_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6y - 3x = 5 \\ 6y - 3x = -3 \end{cases} (S_1) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 6y - 3x = 3 \\ 6y - 3x = -5 \end{cases} (S_2)$$

D'après les questions précédents, 5 et - 5 ne sont pas des multiples de 3.

Par conséquent aucun des deux systèmes n'admet de solution dans  $\mathbb{Z}^2$ .

D'où l'équation :  $(6y - 3x - 4)(6y - 3x + 4) = 1$  n'admet pas de solution  
 $\Rightarrow S = \{\emptyset\}$ .

# EXERCICES

## Raisonnement par récurrence.

1 Démontrer par récurrence les propositions suivantes :

1)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } 2^n > 5(n + 1)$  .

2)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } 2^n > n$  .

3)  $\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

4)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } 2 \times 6 \times 10 \times \dots \times (4n - 2) = (n + 1)(n + 2) \dots \times 2n$

2 Soit la suite réelle  $u_n$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{5}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n - u_{n-1} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

## Divisions Euclidienne dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$ .

3 1) Déterminer dans chacun des cas suivants, le quotient et le reste la division Euclidienne de l'entier  $a$  par l'entier  $b$ .

a-  $a = 3453$  et  $b = 13$  ; b-  $a = -1454$  et  $b = 22$

c-  $a = 11111$  et  $b = 333$  ; d-  $a = -994567$  et  $b = 3432$

e-  $a = 15141$  et  $b = 143$  ; f-  $a = -396562$  et  $b = 4478$

4 a- La somme de 2 entiers naturels  $a$  et  $b$  avec ( $a > b$ ) est 444. La division Euclidienne de  $a$  par  $b$  donne  $q = 4$  pour quotient et  $r = 24$  pour reste. Déterminer les entiers  $a$  et  $b$ .

b- Soient 2 entiers naturels  $a$  et  $b$  ( $a > b$ ). La division Euclidienne de  $a$  par  $b$  donne pour quotient  $q = 6$  et  $r = 47$  pour reste. Par ailleurs  $a + b + r = 591$ . Déterminer  $a$  et  $b$ .

c- Quelle peuvent être le diviseur et le reste d'une division Euclidienne dont le dividende est 542 et le quotient est 12 ?

d- La division Euclidienne de l'entier naturel  $a$  par  $b$  donne pour quotient  $q$  et pour le reste  $r$ . D'autre par  $(a + 15)$  diviser par  $(b + 5)$  donne  $q$  pour quotient et  $r$  pour reste. Déterminer  $q$ .

e- La division Euclidienne de l'entier naturel  $a$  par  $b$  donne pour quotient  $q = 356$  et pour le reste  $r = 4623$ .

Déterminer  $n$  pour que  $(a + n)$  divisé par  $(b + n)$  donne pour quotient  $q = 356$ .

## Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ .

- 5** a) Démontrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on a :  $3^{n+3} - 4^{4n+2}$  est divisible par 11.  
b) Démontrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on a :  $3^{2n+1} + 2^{n+2}$  est divisible par 7.  
c) Démontrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on a :  $n^3 - n$  est un multiple de 3.  
d) Démontrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on a :  $n^7 - n$  est un multiple de 7.  
e) Le nombre 2798793 est-il divisible par : 2 ; 3 ; 11 ?

**6** Soit la fraction  $A(n) = \frac{n+16}{n-2}$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ .

- 1) Montrer que l'on peut écrire  $A(n)$  sous la forme :  $a + \frac{b}{n-2}$  où  $a, b$  sont deux entiers naturels à déterminer.  
2) Pour quelle valeur de  $n$ ,  $A(n)$  est-il un entier naturel.

## Nombres premiers entre eux - PGCD et PPCM.

**7** Dans chacun des cas suivants, vérifier si les nombres  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux :

a-  $a = 122$  et  $b = 32$  ; b-  $a = 85631$  et  $b = 111$

c-  $a = 712379$  et  $b = 1551$  ; d-  $a = 96777$  et  $b = 45777$

e-  $a = 101230$  et  $b = 1200$  ; f-  $a = 9975462199$  et  $b = 324411220$

**8** Dans chacun des cas suivants, déterminer le PGCD et le PPCM des réels  $a$  et  $b$ .

a-  $a = 24$  et  $b = 33$  ; b-  $a = 48$  et  $b = 46$  ; c-  $a = 1455$  et  $b = 335$

d-  $a = 114$  et  $b = 22$  ; e-  $a = 999$  et  $b = 18$  ; f-  $a = 14422$  et  $b = 332$

g-  $a = 6666$  et  $b = 111$  ; h-  $a = 42137$  et  $b = 41$  ; i-  $a = 1655$  et  $b = 77$

**9** Soit  $a$  et  $b$  deux entiers premiers entre eux.

1) Montrer que  $a + b$  et  $ab$  sont premiers entre eux : en déduire que les nombres  $a + b$  et  $a^2 - ab + b^2$  sont premiers entre eux ou divisibles par 3.

2) Démontrer l'égalité :  $\text{PGCD}(a + b ; a^2 - ab + b^2) = \text{PGCD}(a + b ; 3)$ .

**10** Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  les équations suivantes :

a-  $46x + 43y = 1$  ; b-  $6x - 3y = 5$  ; c-  $8x + 3y = 1$

b-  $3x - 5y = 6$  ; e-  $3x - 7y = 23$  ; f-  $x^2 - 57 = y^2$

g-  $45x - 28y = 1$  ; h-  $2x - 3y = 3$  ; i-  $x^2 - 49 = y^2$

j-  $-22x + 18y = 1$  ; -k  $22x - 18y = -2$  ; l-  $12x - 15y = 4$

**11**  $\Delta$  et  $m$  désignent respectivement le PGDC et le PPCM des entiers  $a$  et  $b$ .

Déterminer l'ensemble des couples  $(a ; b)$  d'entiers relatifs vérifiant les conditions données ci-dessous :

1)  $\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = ab \end{cases}$  ; 2)  $\begin{cases} a^2 + b^2 = 801 \\ m = 120 \end{cases}$  ; 3)  $\begin{cases} \Delta = 90 \\ m = 180 \end{cases}$  ; 4)  $\begin{cases} a + b = 168 \\ \Delta = 21 \end{cases}$

5)  $\begin{cases} \text{PGCD}(a ; b) = 354 \\ a + b = 5664 \end{cases}$  ; 6)  $\begin{cases} \text{PPCM}(a ; b) = 168 \\ a \times b = 1008 \end{cases}$  ; 7)  $\begin{cases} m + 3\Delta = 276 \\ 10 < \Delta < 30 \end{cases}$

8)  $\begin{cases} m + 3\Delta = 276 \\ 10 < \Delta < 30 \end{cases}$  ; 9)  $\begin{cases} m + \Delta = 126 \\ 5 < \Delta < 10 \end{cases}$

**12** Montrer que l'équation :  $(x ; y)$  de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  :  $6y - 3x = m$  admet des solutions si et seulement si  $m$  est un multiple de 3.

1) Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  les équations suivantes :

a-  $6y - 3x = 5$ .

b-  $6y - 3x = 3$ .

2) Déduire de ce qui précède les solutions dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  de l'équation :

$$(6y - 3x - 4)(6y - 3x + 4) = 1.$$

**13** Pour tout entier naturel  $n$ , on considère les nombres :

$$a_n = 4 \times 10^n - 1 ; b_n = 2 \times 10^n - 1 ; c_n = 2 \times 10^n + 1$$

a) Calculer :  $a_i ; b_i ; c_i$  pour  $i \in \{1 ; 2 ; 3\}$ .

b) Démontrer que  $a_n$  et  $c_n$  sont divisibles par 3

c) Démontrer que  $b_2$  est un nombre premier.

- d) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $b_n \times c_n = a_n$ . En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de  $a_4$
- e) Démontrez que :  $\text{PGCD}(b_n ; c_n) = \text{PGCD}(b_n ; 2)$ . En déduire que  $b_n$  et  $c_n$  sont premiers entre eux c'est-à-dire sont étrangers.

**14** Les suites  $(X_n)$  et  $(Y_n)$  sont définies par :

$$\begin{cases} X_0 = 3 \\ X_{n+1} = 2X_n - 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Y_0 = 3 \\ Y_{n+1} = 2Y_n + 3 \end{cases}$$

- 1) Démontrer par récurrence sur que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $X_n = 2^{n+1} + 1$ .
- 2) a- Calculer  $\text{PGCD}(X_8 ; X_9)$  puis  $\text{PGCD}(X_{2002} ; X_{2003})$ .  
Que peut-on conclure pour les entiers  $X_8$  et  $X_9$  d'une part et  $X_{2002}$  et  $X_{2003}$  d'autre part ?  
b-  $X_n$  et  $X_{n+1}$  sont-ils étrangers pour tout entier naturel  $n$  ? Justifier votre réponse.
- 3) a- Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $2X_n - Y_n = 5$   
b- Exprimer  $Y_n$  en fonction de  $n$ .  
c- En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel  $k$ , le reste de la division euclidienne de  $2^k$  par 5. En déduire le reste de la division euclidienne l'entier  $N = 2^{7531} + 2^{1357}$  par 5

**15**

- 1) On considère l'équation ( 1 ) d'inconnue  $(x ; y)$  de  $\mathbb{Z}^2 : 11x - 24y = 1$ .
- a- Justifier à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.
- b- En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de ( 1 ).
- 2) Recherche du PGCD de  $10^{11} - 1$  et  $10^{24} - 1$ .
- a- Justifier que 9 divise  $10^{11} - 1$  et  $10^{24} - 1$ .
- b-  $(x ; y)$  désignant un couple quelconque d'entiers naturels solution de ( 1 ), montrer que l'on peut écrire :  $(10^{11x} - 1) - 10(10^{24y} - 1) = 9$ .
- c- Montrer que  $10^{11} - 1$  divise  $10^{11x} - 1$ .  
(On rappelle que :  $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^0)$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .)
- d- Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers  $N$  et  $M$  tels que :  
$$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9.$$
- e- Montrer que  $10^{11} - 1$  et  $10^{24} - 1$  divise 9.
- f- Déduire des questions précédentes le PGCD de  $10^{11} - 1$  et  $10^{24} - 1$ .

**16**

- 1) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , les entiers  $14n + 3$  et  $5n + 1$  sont premiers entre eux.
- 2) On considère l'équation (E) :  $87x + 31y = 2$  où  $x$  et  $y$  sont deux entiers relatifs.
  - a- Vérifier en utilisant la question 1), que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple  $(u ; v)$  d'entiers relatifs tel que  $87u + 31v = 1$  puis une solution  $(x_0 ; y_0)$  de l'équation (E).
  - b- Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

**17**

1. On considère  $x$  et  $y$  des entiers relatifs et l'équation (E)  $91x + 10y = 1$ .
  - a) Énoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).
  - b) Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E') :  $91x + 10y = 412$ .
  - c) Résoudre (E').
2. Montrer que les nombres entiers  $A_n = 3^{2n} - 1$ , où  $n$  est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8. (Une des méthodes possibles est un raisonnement par récurrence).
3. On considère l'équation (E'')  $A_3x + A_2y = 3296$ .
  - a) Déterminer les couples d'entiers relatifs  $(x ; y)$  solutions de l'équation (E'')
  - b) Montrer que (E'') admet pour solution un couple unique d'entiers naturels. Le déterminer.
 Dans tout l'exercice,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

**18**

- 1) a) Pour  $1 \leq n \leq 6$ , calculer les restes de la division euclidienne de  $3^n$  par 7.
  - b) Démontrer que, pour tout  $n$ ,  $3^{n+6} - 3^n$  est divisible par 7. En déduire que  $3^n$  et  $3^{n+6}$  ont le même reste dans la division par 7.
- a) À l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de  $3^{1000}$  par 7.
  - b) De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de  $3^n$  par 7, pour  $n$  quelconque ?
  - c) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $3^n$  est premier avec 7.
- 2) Soit  $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i$ , où  $n$  est entier naturel supérieur ou égal à 2.
  - a) Montrer que si  $U_n$  est divisible par 7 alors  $3^n - 1$  est divisible par 7.
  - b) Réciproquement, montrer que si  $3^n - 1$  est divisible par 7 alors  $U_n$  est divisible par 7. En déduire les valeurs de  $n$  telles que  $U_n$  soit divisible par 7.

**19**

- 1) Déterminer PGCD ( 2 688 ; 3 024 ).
- 2) Dans cette question, x et y sont deux entiers relatifs.
  - a) Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes :  
 (1):  $2\,688x + 3\,024y = -3\,360$  et (2):  $8x + 9y = 10$ .
  - b) Vérifier que (1 ; -2) est une solution particulière de l'équation (2).
  - c) Dédire de ce qui précède les solutions de (2).
- 3) Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé de l'espace. On considère les plans P et L d'équation respectives :  $x + 2y - z = -2$  et  $3x - y + 5z = 0$ 
  - a) Montrer que P et L se coupent suivant une droite D.
  - b) Montrer que les coordonnées des points de D vérifient l'équation (2).
  - c) En déduire l'ensemble T des points de D dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

## Système de numération et congruence modulo n.

**20**

- a- Ecrire dans le système décimal le nombre :  $\overline{432}^5$
- b- Ecrire dans le système binaire le nombre :  $\overline{127}^{10}$
- c- Ecrire dans le système décimal le nombre :  $\overline{F0A3}^{16}$
- d- Sachant que  $14 = 13 + 1$ , écrire  $14^8$  dans le système de base 13.
- e- Un nombre s'écrit BABA (Avec : A = 10 et B = 11) dans le système hexadécimal. Ecrire ce nombre dans le système octal.

**21**

On donne  $A = \overline{114}^n$  ;  $B = \overline{111}^n$  et  $C = \overline{13054}^n$ ,  $A \times B = C$

Trouver n et l'écriture décimale de A, B, C.  
 Vérifier que le PGCD (A, B) = 1

**22**

On considère l'entier naturel N qui s'écrit  $\overline{53x4}^8$

Déterminer x tel que :

- a) N soit divisible par 7
- b) N soit divisible par 6.
- c) En déduire la valeur de x pour que N soit à la fois divisible par 6 et par 7.

**23**

Dans le système d'énumération de base 3, un nombre s'écrit  $\overline{2101}$ . Dans quel système d'énumération s'écrit  $\overline{224}$ . Existe-t-il un nombre de système d'énumération dans le quel ce nombre s'écrit  $\overline{174}$  ?

**24** I- Soit  $a$  un entier naturel supérieur à 2 on donne :  $N = 2(a - 1)$  et  $N' = (a - 1)^2$ .

- 1) Ecrire  $N$  et  $N'$  dans le système d'énumération de base 1.
- 2) Vérifier que  $N$  et  $N'$  s'écrivent avec le même chiffre mais à l'ordre inverse.

II- Déterminer dans la base 10 l'entier naturel  $N$  tel que  $N^2 = 244$  dans la base 6  
Déterminer en raisonnant par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a :  
 $A_n = N^{6n+2} + N^{3n+1} + 1$  est divisible par 111

III- Déterminer suivant les valeurs de  $n$  le reste de la division de  $4^n$  par 7.  
Déterminer suivants les valeurs de  $n$  le reste de la division de :  
 $A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$  par 7

**25** Un nombre de (6) chiffres s'écrit en base 7 et comporte comme chiffre de gauche le nombre (1). Un autre nombre de (6) chiffres s'écrit en base 7 et comporte comme chiffre de droite le nombre (1) D'autre par ce nombre est encore le triple du précédent. Déterminer les nombres initiaux.

**26** En utilisant la factorisation de  $(x^2 + 3x + 1)^2 - 1$ , montré que dans tout système d'énumération dont la base est supérieure à 3 on a :  $\overline{10} \times \overline{11} \times \overline{12} \times \overline{13} + 1 = (\overline{131})^2$

**27** Soit  $N = (x - 1)^3$  et  $N' = (x + 2)(x - 1)$ . Ecrire  $N$  et  $N'$  en base  $x$  et vérifier que les mêmes chiffres sont utilisés dans  $N$  et  $N'$ .  
Déterminer  $x$  et  $y$  pour que l'entier naturel qui s'écrit  $x43y$  dans le système décimal soit divisible par 2 ou par 9.

**28** I- Soit  $x$  un entier naturel à base 10 tel que  $x = \overline{abcabc}$   
Montrer que  $x$  est le produit du naturel  $\overline{abc}$  par un naturel  $k$ . En déduire que :  
 $x$  est divisible par 7, 11 et par 13  
 $x$  peut être un carré parfait

II- Soit  $x$  un entier naturel  $x \geq 5$  on considère les entiers  $n = \overline{100x}$  et  $n' = \overline{x001}$  dans le système de base  $(x + 1)$

- a- Ecrire  $n$  et  $n'$  dans le système de base  $x$ .
- b- Ecrire  $n + n'$  dans le système de base  $x$  et vérifier que  $n + n'$  est divisible par  $(x + 1)$  puis donner le quotient  $q$  de cette division en base  $x$ .
- c- Déterminer les entiers  $a$  et  $b$  tel que :  $q = \overline{ab}^x \cdot \overline{aaa}^x$ .

- 29** 1) a) Déterminer, suivant les valeurs de  $n$ , le reste de la division par 7 de l'entier  $3^n$ . En déduire le reste de la division par 7 de l'entier naturel  $(506390)^{128}$
- b) Donne le système de numération décimale, on considère l'entier naturel  $\overline{651x}$ . Déterminer  $x$  pour que  $(506390)^{128} + \overline{651x}$  soit divisible par 7.
- 2) a) Déterminer le plus grand diviseur commun des nombres 21590 et 9525
- b) Déterminer l'ensemble des entiers  $x$  tels que  $34x \equiv 2[1]$ .
- c) Résoudre l'équation :  $(x; y) \in \mathbb{Z}^2 ; 21590x + 9525y = 1$
- d) Quel est le chiffre des unités de l'entiers naturels  $7^{19}$  écrit dans le système décimal ?

- 30** 1) Déterminer dans la base dix, l'entier naturel  $N$  tel que  $N^2$  s'écrit  $\overline{244}$  dans la base six. Quel est le nombre des diviseurs de  $N^2$  dans  $\mathbb{N}$  ?
- 2) Démontrer en raisonnant par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on a :  $N^{6n+2} + N^{3n+1} + 1$  est divisible par 111.
- 3) a- Soit  $n$  un entier naturel. Déterminer suivant  $n$ , le reste de la division par 7 de  $3^n$  ; en déduire le reste de la division par 7 de  $9^{991}$ .
- b- Soit  $A$  un nombre qui s'écrit  $\overline{651x}$  en base 10. Déterminer  $x$  pour que  $\overline{651x} + 9^{991}$  soit divisible par 7.

## Congruence et structure d'anneau

- 31** Résoudre dans  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  les équations suivantes :

a-  $4x = 3$  ; b-  $1x^2 + 2x - 3 = 0$  ; c-  $-205x^2 + 32x + 678 = 0$

d-  $109x^2 - 13x + 533 = -6$  ; e-  $1x^4 + 2x^3 - 77 = 88$

- 32** Résoudre dans  $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$  le système : 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x + 5y = 6 \end{cases}$$

- 33** Résoudre dans  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$  le système : 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 1x + 2 = 4 \end{cases}$$

## Arithmétiques dans les cas pratiques.

- 34** 1) Décomposer les nombres 450 et 320 en produit de facteur premier puis en déduire le PGCD de 450 et 320.
- 2) Un champ a pour dimensions  $4,5m$  et  $3,2m$ . On souhaite carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe. Quel est le plus grand côté possible ( en  $cm$  ) de la dalle carrée ?

- 35** 1) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation l'équation (E) :  $5y + 8x = 1$ .
- 2) Soit  $N$  un entier naturel tel qu'il existe un couple  $(a ; b)$  de nombres entiers vérifiant  $N = 1 + 8a$  et  $N = 2 + 5b$ .
- a) Prouver que le couple  $(a ; -b)$  est solution de (E).
- b) Déterminer le reste de la division euclidienne de  $N$  par 40.
- 3) a) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation l'équation  $5y + 8x = 100$ .
- b) A l'occasion de la fête de tabaski, un marchand de bétail a vendu tous ses taurillons et tous ses béliers faisant ainsi une recette de 1 000 000 F au total. Sur le marché, un taurillon coûtait 80 000 F et un bélier faisait 50 000 F. Sachant que le marchand avait plus de béliers que de taurillons, on demande de trouver le nombre de taurillons et celui de béliers qu'avait ce marchand pour le marché.

- 36** A) Les jumeaux Allakan et Allakoun se rendent au champ pour un achat de mangues. Le premier dit à son frère "j'ai  $n$  F en poche" et ce dernier répond "quant à moi, j'en ai  $m$  F". Sachant que ces entiers sont exprimés respectivement dans les systèmes de numération de base huit et sept, ils sont  $n = \overline{X5Y70}$  et  $m = \overline{(Y+1)26X0}$ .
- 1) a) Déterminer les chiffres  $X$  et  $Y$  Sachant que l'unité de mangue coûte 15 F et que chacun des jumeaux peut avec la totalité de son argent se payer un nombre entier de mangues.
- b) Préciser alors les entiers naturels  $\lambda$  et  $\gamma$ , désignant respectivement le nombre de mangues achetées par Allakan et celui par Allakoun.
- 2) Trouver les décompositions en produit de facteurs premiers de  $(\lambda + 1)$  et  $(\gamma - 3)$ , dans le système de numération décimale. En déduire  $\delta = (\lambda + 1) \wedge (\gamma - 3)$ .
- B) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  les équations d'inconnues  $x$  et  $y$  suivantes :
- a)  $7x - 37y = 257$  ; b)  $631x + 7y = 37$ .

- 37** Un Champ a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesurent respectivement  $119m$  et  $91m$ ; les deux autres cotés mesurent  $56m$  et  $35m$ . Pour la clôture, le propriétaire Mr DEMBELE a besoin des poteaux de support à égale distance mesurée en nombre entier de mètre pour un nombre minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.
- 1) a) Quelle est la distance entre deux poteaux quelconques?
- b) Déterminer le nombre de poteaux nécessaires à la clôture.
- 2) Selon le type de clôture et la qualité de fil de fer choisi, Mr DEMBELE a dépensé  $\alpha 1630^{11}$  F CFA (où  $\alpha = 10$ ) pour un nombre entier  $x$  rangées de fil de fer et  $53008^9$  F CFA pour un nombre entier  $y$  de jours de mains d'œuvre. Après évaluation

Mr DEMBELE s'est rendu compte que le coût total des travaux était de  $\overline{656\alpha 5}^{13}$  F CFA et le nombre de rangées de clôture dépassait le nombre de jours de travail.

- a) Exprimer tous les montants dans le système décimal.
- b) Préciser le nombre de rangées de fil de fer et le nombre de jours de mains d'œuvre.

**38**

En un temps  $T_0$  un athlète  $A_1$ , étant à son  $2^{\text{ème}}$  tour pénètre dans le champ visuel de la caméra d'arrivée d'un marathon de tour du quartier. Six (6) minutes plus tard, avant que  $A_1$  n'échappe à la caméra un autre athlète  $A_2$  étant à son  $1^{\text{er}}$  tour y fait son entrée. Des investigations sportives ont affirmé que  $A_1$  fait le tour du quartier en 32 minutes tandis que  $A_2$  le fait en 58 minutes. On se propose de déterminer le nouveau temps  $T_1$  auquel  $A_1$  et  $A_2$  réapparaîtront ensemble dans le champ de la camera. Pour cela on note  $n_1$  le nombre de tours effectués par  $A_1$  et  $n_2$  celui effectués par  $A_2$  entre  $T_0$  et  $T_1$ .

- 1) Vérifier que  $(n_1 ; n_2)$  est solution de l'équation (E) :  $16x - 29y = 3$ .
- 2) a) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation (E).  
b) En déduire les valeurs de  $n_1$  et  $n_2$  permettant de déterminer  $T_1$ .
- 3) a) Déterminer le nombre de minutes s'écoulant entre  $T_0$  et  $T_1$ .  
b) Sachant que  $T_0$  était 8h00, déterminer le temps  $T_1$  en heures et minutes.
- 4) A cause d'une panne électrique, la camera manque le spectacle simultané de  $T_1$ . Combien de minutes doit on attendre pour un nouveau spectacle simultané en un autre temps  $T_2$ ? Evaluer ces minutes en heures.

**39**

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  le système d'inconnues  $p$  et  $q$  suivant : 
$$\begin{cases} 52p + 89q = 15103 \\ 15p + 22q = 3993 \end{cases}$$

2) En Novembre 2011, Mr DEMBELE a profité de la crise pour payer  $x$  kgs de bananes et  $y$  sacs de goyaves à, seulement  $\overline{284\alpha\beta}^{13}$  FCFA (avec  $\alpha = 10$  et  $\beta = 11$ ) dans le champ d'un cultivateur désespéré. A la même date en 2012, le cultivateur n'ayant pas connu de disette, Mr DEMBELE, pour avoir le même nombre de kg de bananes et le même nombre de sacs de goyaves fut contraint de dépenser  $\overline{69000}^{11}$  FCFA en raison de  $\overline{567}^8$  FCFA le kg de bananes et  $\overline{202101}^3$  FCFA le sac de goyaves. Les statistiques locales ont montré que la disette avait occasionné une baisse de  $\overline{223}^7$  FCFA sur le kg de bananes et une baisse de  $\overline{1221}^4$  FCFA sur le sac de goyaves. Déterminer :

- a) tous les montants donnés dans le système de numération décimale ;
- b) le nombre  $x$  de kgs de bananes et le nombre  $y$  de sacs de goyaves payés par Mr DEMBELE.

c)  $(x + y)$  et  $(3y - 2x)$  en base 12.

Effectuer dans cette base le produit  $(x + y)(3y - 2x)$ .

## Perfectionnement.

40

1. Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur L, à base carrée de côté l, où l et L sont des entiers naturels non nuls tels que  $l < L$ . On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête a est un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boîte B sans laisser d'espace vide).

a) Dans cette question,  $l = 882$  et  $L = 945$ . Quelle est la plus grande valeur possible pour a ? Quelles sont les valeurs possibles pour a ?

b) Dans cette question, le volume de la boîte B est  $v = 77\,760$ . On sait que pour remplir la boîte B la plus grande valeur possible de a est 12. Montrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles, dont on donnera les dimensions;

2. On veut remplir une caisse cubique C, dont l'arête c est un entier naturel non nul, avec des boîtes B toutes identiques telles que décrites dans la question 1. (Les boîtes B, empilées verticalement, doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide).

a) Dans cette question,  $l = 882$  et  $L = 945$ . Quelle est la plus petite arête c pour la caisse C ? Quel est l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour l'arête c ?

b) Dans cette question, le volume de la boîte B est 15 435. On sait que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105. Quelles sont les dimensions l et L de la boîte B ?

41

1. On cherche deux entiers relatifs x et y solutions de l'équation : (1)  $ax + by = 60$ . (a et b entiers naturels donnés tels que  $ab \neq 0$ ). On notera d le plus grand commun diviseur de a et b.

a) On suppose que l'équation (1) a au moins une solution  $(x_0, y_0)$ . Montrer que d divise 60.

b) On suppose d divise 60. Prouver qu'il existe alors au moins une solution  $(x_0, y_0)$  à l'équation (1).

2. On considère l'équation : (2)  $24x + 36y = 60$ . (x et y entier relatifs).

a) Donner le PGCD de 24 et 36 en justifiant brièvement. Simplifier l'équation (2).

b) Trouver une solution évidente pour l'équation (2) et résoudre cette équation. On appellera S l'ensemble des couples  $(x, y)$  solutions.

c) Enumérer tous les couples  $(x, y)$  solutions de (2) et tels que  $-10 \leq x \leq 10$ . Donner parmi eux, ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5.

d) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 1 cm), représenter

l'ensemble E des points M de coordonnées  $(x, y)$  telles que : 
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

e) Montrer que les points ayant pour coordonnées les solutions  $(x, y)$  de l'équation (2) appartiennent à E. Comment peut-on caractériser s ?

42

Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur L, à base carrée de côté l, où l et L sont des entiers naturels non nuls tels que  $l < L$ .

1. On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête a est un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boîte B sans laisser d'espace vide).

a) Dans cette question,  $l = 882$  et  $L = 945$ .

Quelle est la plus grande valeur possible pour a ?

Quelles sont les valeurs possibles pour  $a$  ?

b) Dans cette question, le volume de la boîte B est  $v = 77\,760$ . On sait que pour remplir la boîte B, la plus grande valeur possible de  $a$  est 12.

Montrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles, dont on donnera les dimensions.

2. On veut remplir une caisse cubique C, dont l'arête  $c$  est un entier naturel non nul, avec des boîtes B toutes identiques telles que décrites dans la question 1. Les boîtes B, empilées verticalement, doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide.

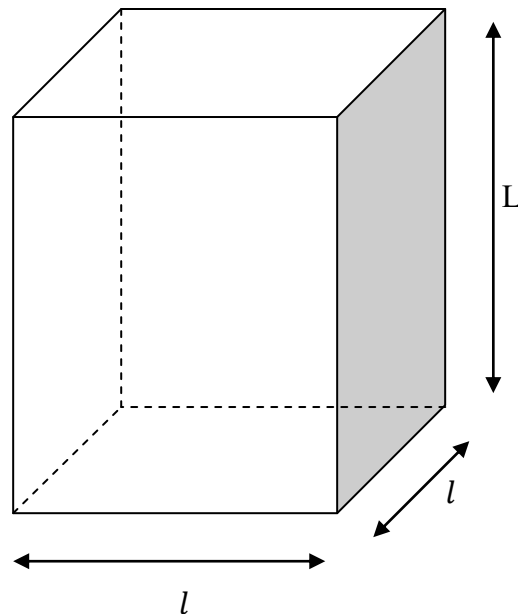
a. Dans cette question,  $l = 882$  et  $L = 945$ .

Quelle est la plus petite arête  $c$  pour la caisse C ?

Quelle est l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour l'arête  $c$  ?

b. Dans cette question, le volume de la boîte B est 15 435. On sait que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105.

Quelles sont les dimensions  $l$  et  $L$  de la boîte B ?



43

Une astronome a observé au jour  $J_0$  le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ( $J_0 + 6$ ), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle  $J_1$  le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome. Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour  $J_1$ .

1- Soient  $u$  et  $v$  le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre  $J_0$  et  $J_1$ .

Montrer que le couple  $(u ; v)$  est solution de l'équation  $(E_1) : 35x - 27y = 2$ .

2- a) Déterminer un couple d'entiers relatifs  $(x_0 ; y_0)$  solution particulière de l'équation  $(E_2) : 35x - 27y = 1$ .

b) En déduire une solution particulière  $(u_0 ; v_0)$  de  $(E_1)$ .

c) Déterminer toutes les solutions de l'équation  $(E_1)$ .

d) Déterminer la solution  $(u ; v)$  permettant de déterminer  $J_1$ .

- 3- a) Combien de jours s'écouleront entre  $J_0$  et  $J_1$  ?  
 b) le jour  $J_0$  était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour  $J_1$  ?  
 (l'année 2000 était bissextile).  
 c) Si l'astronome manque ce futur rendez – vous, combien de jours devra – t – il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

- 44** Dans le plan muni d'un repère  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  on donne le point A (12, 18). On désigne par B un point de l'axe  $(o, \vec{i})$  et par C un point de l'axe  $(o, \vec{j})$  tel que  $(\vec{AB}, \vec{AC}) = -\frac{\pi}{2}$ . On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.
- 1) Démontrer que le couple  $(x, y)$  est solution de l'équation (E)  $= 2x + 3y = 78$ .
  - 2) On se propose de trouver tous les couples (B, C) de points ayant pour coordonnées des entiers relatifs.
    - a) Montrer que l'on est ramené à l'équation (E) avec x et y appartenant à  $\mathbb{Z}$ .
    - b) A partir de la définition de B et de C, trouvez une solution particulièrement  $(x_0, y_0)$  de (E), avec  $x_0$  et  $y_0$  appartenant à  $\mathbb{Z}$ .
    - c) Démontrer qu'un couple  $(x, y)$  est solution de (E) et seulement s'il est de la forme  $(12+3k, 18-2k)$  où k appartient à  $\mathbb{Z}$ .
    - d) Combien y a-t-il de couples de points (B, C) ayant pour coordonnées des entiers relatifs tels que  $-6 \leq x \leq 21$  et  $-5 \leq y \leq 14$ ?

- 45** 1) On sait que  $10^3 - 1 = 9 * 111$  et  $10^3 + 1 = 7 * 11 * 13$ . Pour tout entier naturel, on considère le nombre  $A = 10^{9n} + 2 * 10^{6n} + 2 * 10^{3n} + 1$  (\* désigne la multiplication). Déterminer le reste de la division euclidienne de A par 11 .
- 2) On suppose que n est impaire ; démontrer que A est divisible par 7, par 11 et par 13.
  - 3) On suppose que n est paire ;
    - a) Démontrer que  $A - 6$  est divisible par 7, par 11 et par 13.
    - b) Quel es le reste de la division euclidienne de A par  $111 * 1001$  ?

- 46** On se propose ici de démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.
- 1) Justifier que tout nombre impair est congru à 1 ou à 3 modulo 4, puis citer deux nombres premiers congrus à 3 modulo 4.
  - 2) On suppose que tous les diviseurs premiers de l'entier n sont congrus à 1 modulo 4 ; démontrer qu'alors  $n \equiv 1 \pmod{4}$ . En déduire que, si  $k \equiv 3 \pmod{4}$ , alors k admet au moins un diviseur premier congru à 3 modulo 4.
  - 3) Si l'ensemble des nombres premiers congrus à 3 modulo 4 est fini, on appelle p son plus grand élément.  
 Soit alors  $k = 2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p + 1$  le produit de tous les nombres premiers jusqu'à p, augmenté de 1.  
 A l'aide des résultats de la Question 2°, montrer qu'on aboutit alors à une contradiction.

**47** A) Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $t$  un entier relatif différent de 1.

On pose  $S_n(t) = 1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1}$

1) a) Donner une autre expression de  $S_n(t)$ .

b) En déduire que  $t^n$  et  $(1 - t)$  sont premiers entre eux.

2)  $u$  et  $v$  étant deux entiers relatifs premiers entre eux, on désigne par  $(x_0, y_0)$  une solution dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  de l'équation (F) :  $ux + vy = 1$ . Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (F)

3) Le plan  $P$  est muni d'un repère orthonormé  $(o, \vec{u}, \vec{v})$ .

On désigne par  $D_n$  la droite de  $P$  d'équation  $3^n x - 2y = 1$

Déterminer l'ensemble  $F_n$  des points  $M(x; y)$  de la droite  $D_n$  dont les coordonnées sont entiers relatifs.

**B)**  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels premiers entre eux tels que  $a^2 + a = 7b^3$ .

1) Justifier que  $a$  et  $b^3$  sont premiers entre eux.

2) Démontrer que  $a$  divise 7. Trouver les valeurs de  $a$  et  $b$  vérifiant les hypothèses du texte.

1) Un diviseur strict d'un entier naturel  $n$  est un entier naturel diviseur de  $n$  et distinct de  $n$ . Déterminer les diviseurs stricts de 220.

2) On dit que deux entiers naturels sont amiables si chacun d'eux est égale à la somme des diviseurs stricts de l'autre. Vérifier que 220 et 284 sont amiables.

3) Un nombre parfait est un nombre égal à la somme de ses diviseurs stricts (il est ainsi amiable avec lui-même).

a) Le nombre 28 est-il parfait ?

b) Déterminer un nombre premier  $p$  tel que le nombre  $2^4 \times p$  soit parfait.

c) Plus généralement si  $n$  et  $p$  sont deux entiers naturels avec  $p$  premiers, préciser la seule expression possible de  $p$  en fonction de  $n$  pour laquelle  $2^n \times p$  peut être un nombre parfait.

Donner la liste des nombres parfaits de cette forme pour  $n < 10$ .

**48**

On considère la suite  $(U_n)$  d'entiers naturels définie par : 
$$\begin{cases} U_0 = 14 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 5U_n - 6 \end{cases}$$

1) Calculer  $U_1, U_2, U_3$  et  $U_4$ . Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de  $U_n$  ?

2) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+2} \equiv U_n [4]$ .

En déduire que  $\forall k \in \mathbb{N}, U_{2k} \equiv 2[4]$  et  $U_{2k+1} \equiv 0[4]$ .

3) a) Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, 2U_n = 5^{(n+2)} + 3$ .

b) En déduire que,  $\forall n \in \mathbb{N}, 2U_n \equiv 28[100]$

4) Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de  $U_n$  suivant les valeurs de  $n$ .

5) Montrer que, le PGDC de deux termes consécutifs de  $(U_n)$  est constant. Préciser sa valeur.

**49**

1. On considère l'équation (E) :  $109x - 226y = 1$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

a. Déterminer le PGCD de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?

b. Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme  $(141 + 226k ; 68 + 109k)$ , où  $k$  appartient à  $\mathbb{Z}$ .

En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul  $d$  inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul  $e$  tels que  $109d = 1 + 226e$ .

(On précisera les valeurs des entiers  $d$  et  $e$ ).

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note  $A$  l'ensemble des 227 entiers naturels  $a$  tels que  $a \leq 226$ .

On considère les deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $A$  dans  $A$  définies de la manière suivante :

A tout entier  $a$  de  $A$ ,  $f$  associe le reste de la division euclidienne de  $a^{109}$  par 227.

A tout entier  $a$  de  $A$ ,  $g$  associe le reste de la division euclidienne de  $a^{141}$  par 227.

Vérifier que  $g[f(0)] = 0$ .

**50**

1. Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

Soit  $A$  et  $B$  dans ce plan d'affixe respectives  $a = 1 + i$  et  $b = -4 - i$ . Soit  $f$  la transformation du plan (P) qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que  $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$ .

a. Exprimer  $z'$  en fonction de  $z$ .

b. Montrer que  $f$  admet un seul point invariant  $\Omega$  dont on donnera l'affixe. En déduire que  $f$  est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

2. On se place dans le cas où les coordonnées  $x$  et  $y$  de  $M$  sont des entiers naturels avec

$1 \leq x \leq 8$  et  $1 \leq y \leq 8$ .

Les coordonnées  $(x', y')$  de  $M'$  sont alors  $x' = 3x + 2$  et  $y' = 3y - 1$ .

a. On appelle  $G$  et  $H$  les ensembles des valeurs prises respectivement par  $x'$  et  $y'$ . Ecrire la liste des éléments de  $G$  et  $H$ .

b. Montrer que  $x'$  et  $y'$  est un multiple de 3.

c) Montrer que la somme et la différence de deux entiers quelconques ont même parité. On se propose de déterminer tous les couples  $(x', y')$  de  $G \times H$  tels que  $m = x'^2 - y'^2$  soit un multiple non nul de 60.

d. Montrer que dans ces conditions, le nombre  $x' - y'$  est un multiple de 6. Le nombre  $x' - y'$  peut-il être un multiple de 30 ?

e. En déduire que, si  $x'^2 - y'^2$  est un multiple non nul de 60,  $x' + y'$  est multiple de 10 et utiliser cette condition pour trouver tous les couples  $(x', y')$  qui conviennent.

En déduire les couples  $(x, y)$  correspondant aux couples  $(x', y')$  trouvés.

On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :

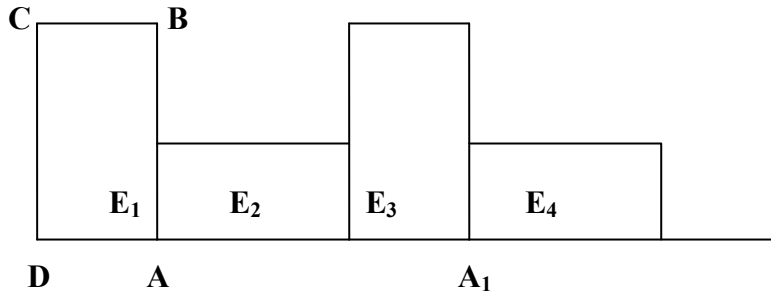
Si  $p$  est un nombre premier et  $a$  un entier non divisible par  $p$  alors  $a^{p-1} \equiv 1$  modulo  $p$ .

b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul  $a$  de  $A$  :  $a^{226} \equiv 1$  (modulo 227).

c. En utilisant 1.b), en déduire que, quel que soit l'entier non nul  $a$  de  $A$  :  $g[f(a)] = a$ .

Que peut-on dire de  $f[g(a)] = a$  ?

**51** On considère un rectangle direct ABCD vérifiant  $AB = 10$  cm.



1. Faire une figure : construire ABCD, puis les images respectives M, N et P de B, C et D par la rotation  $r$  de centre A et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

2. a. Construire le centre  $\Omega$  de la rotation  $r'$  qui vérifie  $r'(A) = N$  et  $r'(B) = P$ . Déterminer l'angle de  $r'$ .

b. Montrer que l'image de ABCD par  $r'$  est AMNP.

c. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $r^{-1} \circ r'$ .

3. On considère les images successives des rectangles ABCD et AMNP par la transformation de vecteur  $\overrightarrow{DM}$ .

Sur la demi-droite  $[DA)$ , on définit ainsi la suite de points  $(A_k)_{k \geq 1}$  vérifiant, en cm,

$$DE_n = 6,55n.$$

a. Déterminer l'entier  $k$  tel que  $E_{120}$  appartienne à  $[A_k, A_{k+1}]$ . Que vaut la longueur  $A_k E_{120}$  en cm ?

b) On cherche dans cette question pour quelle valeur minimale  $n_0$  le point  $E_{n_0}$  est confondu avec un point  $A_k$ .

Montrer que si un point  $E_n$  est confondu avec un point  $A_k$  alors :  $131n - 300k = 100$ .

Vérifier que les nombres  $n = 7100$  et  $k = 3100$  forment une solution de cette équation.

Déterminer la valeur minimale  $n_0$  recherchée.

**52** Soit  $N$  un entier naturel non nul dont la décomposition en produit de facteurs premiers est :

$$N = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}.$$

1) Démontrer qu'un entier naturel  $d$  est un diviseur de  $N$  si, et seulement si, sa décomposition en produit de facteurs premiers est de la forme  $p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_n^{\beta_n}$ , avec, pour tout

$$i \in \{1; 2; \dots; n\}, \quad 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i.$$

2) Quel est le nombre de diviseur de  $N$  tels que  $\beta_2 = \dots = \beta_n = 0$  ?

Et le nombre de diviseurs de  $N$  tels que  $\beta_3 = \dots = \beta_n = 0$  ?

En utilisant au besoin un arbre, démontrer que le nombre de diviseurs de  $N$  est égal à

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1).$$

**53** Soit  $f$  la fonction numérique à variable réelle définie par :  $f(x) = \frac{|x^2 + 2x|}{x - 2}$

- a) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 0 et en 2
  - b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
  - 2) On suppose que  $x$  est un entier naturel.
    - a) Déterminer  $x$  pour que  $f(x)$  soit un entier naturel
    - b) Déterminer  $x$  pour que  $f(x)$  soit une fraction irréductible (ie son numérateur et son dénominateur sont étrangers).
- Pour la suite, on notera par  $\delta$  le PGDC  $(x^2 + 2x; x - 2)$  et par  $\mu$  le PPCM  $(x^2 + 2x; x - 2)$
- c) Déterminer  $x$  pour que  $\delta = 4$ . Dans ce cas trouver  $\mu$
  - d) Soit  $N = x^2 + 2x$  un entier naturel. Ecrire  $N$  dans le système de numération de base pour  $x \geq 3$ .

**54** On considère les trois entiers naturels  $a$ ,  $b$  et  $c$  qui s'écrivent dans la base  $n$  respectivement  $\overline{111}$ ,  $\overline{114}$  et  $\overline{13054}$ .

- 1) Sachant que  $c = ab$ , déterminer  $n$  puis les écritures des nombres  $a$ ,  $b$  et  $c$  dans le système de numération décimal.
- 2) Vérifier en utilisant l'algorithme d'Euclide, que  $a$  et  $b$  sont étrangers. En déduire les solutions dans  $\mathbb{Z}^2$  de l'équation  $ax + by = 1$
- 3) Résoudre :
  - a) l'équation  $x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ,  $x^2 + x + 1 = 0$
  - b) le système  $(x; y) \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ ,  $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$

**55** 1) Le nombre  $2^{11} - 1$  est-il premier ?

2) Si  $p$  et  $q$  sont deux entiers naturels non nuls, comment la somme :

$$S = 1 + 2^p + 2^{2p} + 2^{3p} + \dots + 2^{p(q-1)}$$

peut-elle encore s'écrire ? En déduire que  $2^{pq} - 1 = (2^p - 1) \dots$

3) Démontrer que  $2^{pq} - 1$  est divisible par les deux nombres  $2^p - 1$  et  $2^q - 1$ .

4) En déduire que si le nombre  $2^n - 1$  est premier, alors  $n$  est lui-même premier. La réciproque est-elle vraie ? Les nombres premiers de la forme  $2^n - 1$  sont appelés nombres de MERSENNE.

**57** 1. Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels dont la somme et le produit ont pour PGCD le carré d'un nombre premier  $p$ .

a. Montrer que  $p^2$  divise  $a^2$ . (On pourra remarquer que  $a^2 = a(a + b) - ab$ ).

En déduire que  $p$  divise  $a$ . Montrer que  $p$  divise  $b$ .

b. Démontrer que le PGCD de  $a$  et  $b$  est soit  $p$ , soit  $p^2$ .

2. On cherche à déterminer les entiers naturels  $a$  et  $b$  tels que :

PGCD  $(a + b, ab) = 49$  et PPCM  $(a, b) = 231$ .

a. Soit  $a$  et  $b$  deux tels entiers. Montrer que leur PGCD est 7.

b. Quelles sont les solutions du problème posé ?

58

- 1) a) Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation d'inconnue  $(p ; q)$  suivante :  $11p - 7q = 1$ 
  - b) La division euclidienne d'un entier naturel  $n$  par 7 donne pour reste 4, le même entier divisé par 11 donne pour reste 3. Quel sera son reste dans la division par 77 ?
  - c) Déterminer les valeurs de l'entier naturel  $n$  inférieur à 200.
- 2) Soit  $(U_n)$  une suite arithmétique croissante d'entiers naturels.
  - a) Sachant que  $U_1 + U_2 + U_3 = 105$  ; calculer  $U_2$  .
  - b) On désigne par  $m$  et  $d$  respectivement le PPCM et le PGCD de  $U_1$  et  $U_3$  .
  - c) En déduire l'expression de  $U_n$  en fonction de  $n$ .
  - d) Calculez  $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$  en fonction de  $n$ .  
Déterminer  $n$  pour que  $S_n$  soit égale à 525.

# Fonctions numériques d'une variable réelle



Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646-1716)

Euler Leonhard (1707-1783) Physicien, ingénieur et philosophe.

Mathématicien suisse, philosophe et savant allemand

Depuis longtemps, l'homme a utilisé la notion de fonction à partir des objets anciens tels que la tablette de calcul babylonienne. Cependant une fonction fut une formule permettant d'obtenir un résultat. Il a fallu donc attendre le XVII<sup>ème</sup> siècle pour que le mot fonction et la notion  $y = f(x)$  soit introduit par Leibniz et approfondie par Euler.



Tablette babylonienne

## Sommaire

1- Limites.....	79
2- Continuité.....	91
3- Dérivation.....	95
4- Etudes de fonctions.....	103

# I- Généralité sur les fonctions

## 1) Définition d'une fonction :

On appelle fonction toute relation de **A** vers **B** qui à chaque élément de **A** on associe **au plus un élément de B**.

## 2) Ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction numérique $f$ :

On appelle ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction numérique  $f$ , **l'ensemble des éléments qui ont une image par  $f$** . On le note  **$D_f$** .

### Exemple

- Si  $f(x) = u(x)$  (fonction polynôme) ; alors  $D_f = \mathbb{R} = ] - \infty ; + \infty [$
- Si  $f(x) = \sqrt{u(x)}$  (fonction irrationnelle) ; alors  $D_f = \{ x/x \in \mathbb{R}; u(x) \geq 0 \}$
- Si  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  (fonction rationnelle), alors  $D_f = \{ x/x \in \mathbb{R}; v(x) \neq 0 \}$ .

### Evaluation

Déterminons l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} 1) f(x) &= \frac{-3x^2+5x+1}{x+3} & ; & \quad 2) f(x) = (x+2)\sqrt{x^2-3x+2} ; \\ 3) f(x) &= \frac{x+2}{x-\sqrt{x^2-2x+1}} & ; & \quad 4) f(x) = \frac{\sqrt{-x+3}}{-x^2-2x+4} \\ 5) f(x) &= \frac{\operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{Cos}(x)} & ; & \quad 6) f(x) = \frac{8}{x+\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

### Synthèse

$$1) f(x) = \frac{-3x^2+5x+1}{x+3}$$

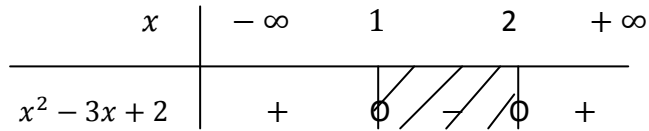
$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R}; x + 3 \neq 0\}$$

$$x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-3\} = ]-\infty ; -3[ \cup ]-3 ; +\infty [$$

$$2) f(x) = (x + 2) \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R}; x^2 - 3x + 2 \geq 0\}$$

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0. \text{ Posons } x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 2$$

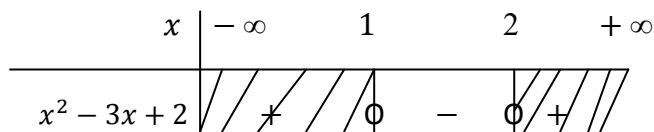


$$\Rightarrow D_f = ]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$$

$$3) f(x) = \frac{x + 2}{x - \sqrt{x^2 - 3x + 2}}$$

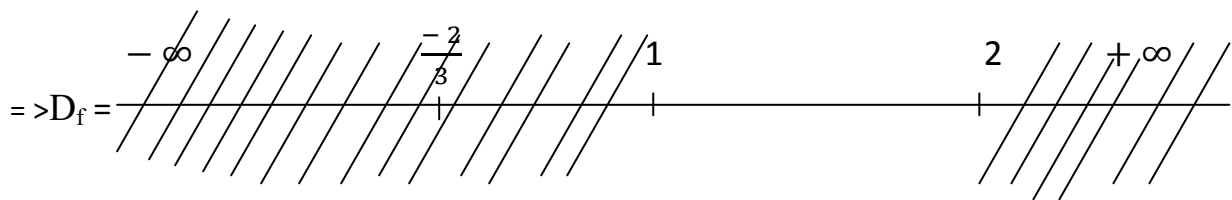
$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R}; x^2 - 3x + 2 \geq 0 \text{ et } x - \sqrt{x^2 - 3x + 2} \neq 0\}$$

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0. \text{ Posons } x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 2$$



$$x - \sqrt{x^2 - 3x + 2} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} \neq x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \neq x^2$$

$$\Rightarrow -3x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{-2}{3}$$



$$\Rightarrow D_f = [1; 2]$$

$$4) f(x) = \frac{\sqrt{-x + 3}}{-x^2 - 2x + 4}$$

$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R}; -x^2 - 3x + 4 \neq 0 \text{ et } -x + 3 \geq 0\}$$

$$(1): -x^2 - 3x + 4 \neq 0 \Rightarrow x_1 \neq 1 \text{ et } x_2 \neq -4$$

$$(2): -x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

$$\frac{-\infty \quad -4 \quad 1 \quad 3 \quad \dots \quad +\infty}{| \quad | \quad | \quad | \quad \dots \quad |}$$

$$\Rightarrow D_f = ]-\infty ; -4[ \cup ]-4 ; 1[ \cup ]1 ; 3[$$

$$5) f(x) = \frac{\operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{Cos}(x)}$$

$$D_f = \left\{ x/x \in \mathbb{R}; 2x \neq \frac{\pi}{2} \text{ et } \operatorname{Cos}(x) \neq 0 \right\}$$

$$(1): 2x \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4}$$

$$(2): \operatorname{Cos}(x) \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Cos}(x) \neq \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\Rightarrow D_f = ]-\infty ; -\frac{\pi}{2}[ \cup ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}[ \cup ]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[ \cup ]\frac{\pi}{2}; +\infty [$$

$$6) f(x) = \frac{8}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$D_f = \left\{ x/x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 \geq 0 \text{ et } x + \sqrt{x^2 + 1} \neq 0 \right\}$$

$$x^2 + 1 \geq 0 \quad (\text{Vraie})$$

$$x + \sqrt{x^2 + 1} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} \neq -x \Leftrightarrow x^2 + 1 \neq x^2 \Rightarrow 1 \neq 0 \quad (\text{Vraie})$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} = ]-\infty ; +\infty [$$

### 3) Opération sur les fonctions :

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies respectivement sur leur ensembles de définition  $Df$  et  $Dg$ .

a- Somme :

$$\forall x \in Df \text{ et } \forall x \in Dg ; (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

b- Produit :

$$\forall x \in Df \text{ et } \forall x \in Dg ; (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

c- Quotient :

$$\forall x \in Df \text{ et } \forall x \in Dg ; \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ avec } g(x) \neq 0$$

## II- Limites

### Objectifs

Ce chapitre vise à :

- Compléter l'étude de la limite d'une fonction engagée en classe de première par :
  - L'introduction de la limite d'une fonction composée ;
  - La limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert.
- Introduire la continuité d'une fonction sur un intervalle et utiliser quelques théorèmes usuels liés à la continuité de cette fonction.

### Savoirs et savoir-faire

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Limites               <ul style="list-style-type: none"> <li>- Limite d'une fonction composée.</li> <li>- Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert</li> </ul> </li> <li>• Branches paraboliques de direction (OI) et (OJ) dans un repère (O, I, J).</li> <li>• Continuité sur un intervalle :               <ul style="list-style-type: none"> <li>- Opérations, composée (propriétés admises).</li> <li>- Image d'un intervalle.</li> </ul> </li> <li>• Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle :  <b>Théorème 1</b> : si <math>f</math> est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle <math>I</math>, alors <math>f</math> est une bijection de <math>I</math> sur <math>f(I)</math>. sa bijection réciproque <math>f^{-1}</math> est continue et de même sens de variation que la fonction <math>f</math> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Déterminer la limite d'une fonction :               <ul style="list-style-type: none"> <li>- en utilisant les limites de référence ou une expression conjuguée ;</li> <li>- en ayant recours à la définition d'un nombre dérivé.</li> </ul> </li> <li>• Déterminer la limite d'une fonction composée.</li> <li>• interpréter graphiquement :  <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0</math>, <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty</math> (resp. <math>-\infty</math>)   <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0</math> et <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty</math> (resp. <math>-\infty</math>)               </li> <li>• Démontrer qu'une courbe admet une branche parabolique de direction (OI)(reps. (OJ) )</li> <li>• Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue :               <ul style="list-style-type: none"> <li>- en utilisant le tableau de variations ;</li> <li>- en utilisant une méthode algébrique.</li> </ul> </li> <li>• Démontrer qu'une fonction réalise une bijection d'un intervalle <math>I</math> sur un intervalle <math>J</math> dans le cas où <math>f</math> est donnée par une formule explicite, déterminer <math>f^{-1}(x)</math>.</li> </ul>
<b>Théorème 2</b> : si $f$ est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I$ , alors pour tout $m$ de $f(I)$ ,	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Prouver l'existence d'une unique solution de l'équation : <math>f(x) = m</math> sur un intervalle <math>I</math>.</li> </ul>

l'équation  $f(x) = m$  admet une unique solution dans  $I$ .

Corollaire : soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur  $[a, b]$ . Si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont des signes contraires, alors l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution dans l'intervalle ouvert  $]a, b[$ .

· Fonctions du type :

- $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ , ( $n \in \mathbb{R}^*$ )
- $x \mapsto x^r$  ( $r \in \mathbb{Q}$ ,  $x \in \mathbb{R}^{+*}$ ).

Définitions ; notons  $x^{p/q}$

Propriétés des puissances  
d'exposants rationnels

## Activité 1

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{1}{x^3}$

a- Complète le tableau suivant

$x$	- 3000000	- 2000000	- 1000000	0	1000000	2000000	3000000
$f(x)$							

b- Donne la valeur de  $x$  pour la quelle  $f$  n'est pas définie.

c- Que peux-tu conclure quand  $x$  tend vers  $-\infty$  ou  $+\infty$  ?

## Activité 2

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3$

a- Complète le tableau suivant

$x$	- 3000000	- 2000000	- 1000000	0	1000000	2000000	3000000
$f(x)$							

b- Que peux-tu conclure quand  $x$  tend vers  $-\infty$  ou  $+\infty$  ?

### 1) Propriétés sur les limites :

#### a) Propriété 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

#### b) Propriété 2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{K}{x^n} = 0 \quad (K \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{K}{x^n} = 0 \quad (k \in \mathbb{R})$$

**c) Propriété 3 :**

Si  $k$  est un réel non nul alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{x} = \infty \text{ ( le signe de } \infty \text{ dépend du signe du zéro et du signe de } k \text{ ).}$$

**2) Opération sur les limites**

**a) Somme :**

$f$	$l$	$l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$g$	$l'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f + g$	$l + l'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

**b) Produit :**

$f$	$l$	$l \neq 0$	$0$	$\infty$
$g$	$l'$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$f \cdot g$	$l \cdot l'$	$\infty$ règle des signes	Forme indéterminée	$\infty$ règle des signes

**c) Quotient:**

$f$	$l$	$l$	$0$	$l$	$\infty$	$\infty$
$g$	$l \neq 0$	$l' = 0$	$0$	$\infty$	$l$	$\infty$
$\frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	$+/- \infty$ à gauche / à droite	Forme indéterminée	$0$	$\infty$ règle des signes	Forme indéterminée

**NB :**

On remarque ainsi que l'on a quatre (4) formes indéterminées qui sont :

$$-\infty + \infty ; 0 \neq 0 ; \frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty}.$$

### 3) Limite des fonctions polynômes et rationnelles à l'infini.

#### a) Limite d'une fonction polynôme à l'infini

La limite d'une fonction polynôme en  $+\infty$  ou en  $-\infty$  est égale à la limite de son terme du plus haut degré.

$$\text{Exemple : } \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - 2x^2 + 3x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = -2(-\infty)^2 = -\infty.$$

#### b) Limite d'une fonction rationnelle à l'infini :

La limite d'une fonction du rationnelle en  $+\infty$  ou en  $-\infty$  est égale à la limite du quotient des termes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

$$\text{Exemple : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 4x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x = +\infty$$

**N.B :** La propriété sur les limites des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles ne peut être utilisée qu'en  $+\infty$  ou en  $-\infty$ .

En aucun cas, elle ne peut être utilisée lorsque  $x$  tend vers un nombre réel.

### 4) Limite de la composée de deux fonctions :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions et  $f \circ g$  leur composée définie sur un intervalle  $I$  contenant «  $a$  » où  $a$  est une borne.

$$\text{Si : } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l \quad \text{et} \quad \text{si } \lim_{x \rightarrow l} f(x) = l' \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = l'$$

### 5) Limite des fonctions circulaires :

Si  $a$  est un nombre réel non nul, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg} x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg} ax}{ax} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$$

## 6) Limite à gauche – Limite à droite de $x_0$

### a) Limite à gauche de $x_0$

On appelle limite à gauche d'un réel  $x_0$  d'une fonction  $f$ , la limite lors qu'elle existe quand  $x$  tend vers  $x_0$  par valeurs inférieures on note :  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ .

### b) Limite à droite de $x_0$

On appelle limite à droite d'un réel  $x_0$  en une fonction  $f$ , la limite lors qu'elle existe quand  $x$  tend vers  $x_0$  par valeurs supérieures on note :  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ .

**NB** :

Une fonction admet une limite en un point  $x_0$  si sa limite à gauche est égale à sa limite à droite.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

## **Exemple**

Calculer la limite des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x}; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x^2-3x^3+2} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2+x+2} \end{array}$$

## **Solution**

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ (Forme Indéterminée)}$$

Levons l'indétermination.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2-5}{x^2-x-2}$$

Puisque la limite est étudiée à droite de -1, alors cherchons le signe du dénominateur  $x^2-x-2$  à droite de -1

Posons :  $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$  ou  $x_2 = 2$

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	0	-	+

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 5}{x^2 - x - 2} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

**NB :** Le signe du zéro ( $0^-$ ) provient de l'étude du signe du dénominateur à droite de -1

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \frac{0}{0}$  (Forme Indéterminée)

Levons l'indétermination.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - 1^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1 - 1}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x} = \frac{0}{0}$  (forme indéterminée)

Levons l'indétermination.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{5} \cdot \frac{\sin 5x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{2} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{2}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x}{x^2-3x^3+2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + x + 2} = +\infty - \infty \text{ (forme indéterminée)}$$

Levons l'indétermination.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + x + 2})(x + \sqrt{x^2 + x + 2})}{(x + \sqrt{x^2 + x + 2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (\sqrt{x^2 + x + 2})^2}{x + \sqrt{x^2 + x + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 + x + 2)}{x + \sqrt{x^2 + x + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - x - 2}{x + \sqrt{x^2 + x + 2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-2}{x + \sqrt{x^2 + x + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-2}{x + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-2}{x + |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-2}{x + x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-2}{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

## 7) Théorème sur les limites

### a- Théorème des gendarmes :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

Si  $f(x)$  Répond à l'inégalité :  $A(x) \leq f(x) \leq B(x)$ .

$$\text{et si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = l \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} B(x) = l \end{cases} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$$

### Exemple

En utilisant le théorème des gendarmes, calculé  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sin x}{x + 1}$

### Solution

On sait que :  $-1 \leq \sin x \leq 1$

En ajoutons 2 à chaque membre de l'inégalité, on a :

$$1 \leq 2 + \sin x \leq 3$$

En divisant chaque membre de l'inégalité par  $x + 1$ , on a :

$$\frac{1}{x + 1} \leq \frac{2 + \sin x}{x + 1} \leq \frac{3}{x + 1}$$

En appliquant la limite à chaque membre de l'inégalité, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 1} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sin x}{x + 1} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x + 1}$$

$$\text{Or } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 1} = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x + 1} = 0 \end{cases}$$

Ainsi en appliquant le théorème des Gendarmes, on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sin x}{x + 1} = 0$

$$x \rightarrow +\infty$$

b- **Théorème de l'Hôpital** :

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues et dérivables en un point  $x_0$ .

Si  $f(x_0) = g(x_0) = 0$  et  $g'(x_0) \neq 0$ , alors :  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

**Exemple**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies par :  $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2 - 3x + 2}$  et  $g(x) = x^2 - 5x + 4$

a) Etudier la continuité de  $f$  et  $g$  en  $x_0 = 1$

b) Calculer  $g'(1)$  et  $f'(1)$  puis en déduire  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$

**Solution**

a) Etudions la continuité de  $f$  et  $g$  en  $x_0 = 1$

- Etude de la continuité de  $f$  en  $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0} = \text{F.I}$$

Levons l'indétermination :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-2} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

- Etude de la continuité de  $g$  en  $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 5x + 4 = 1 - 5 + 4 = 0$$

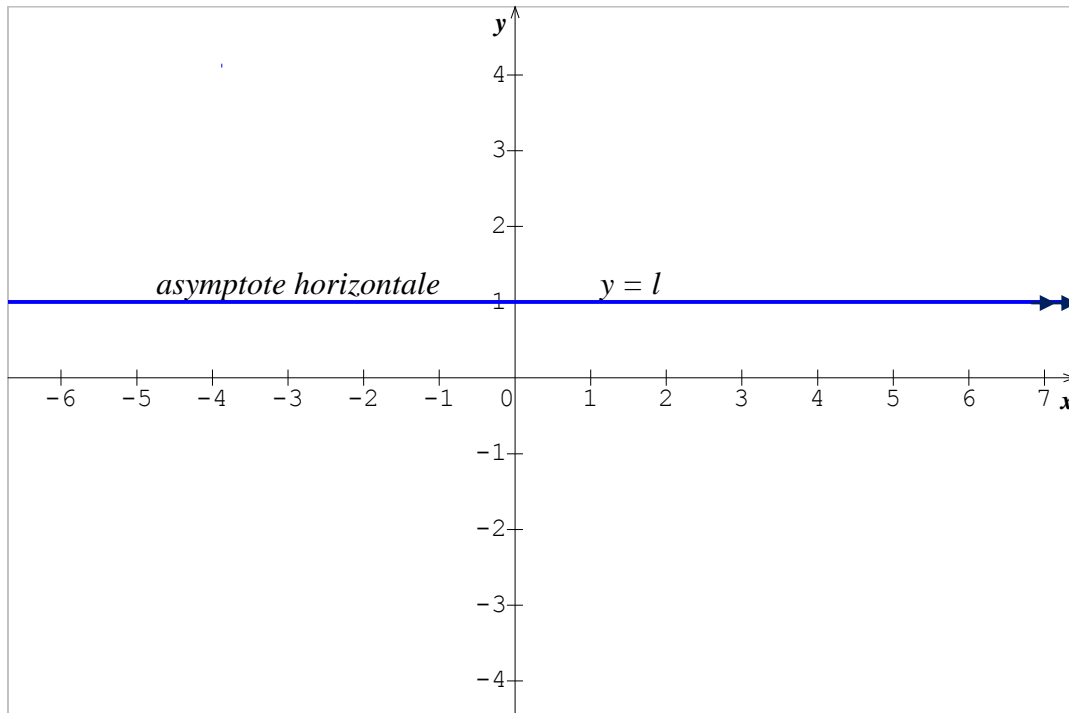
Alors  $f(1) = g(1) = 0$  d'autre part  $f'(1) = -1$  et  $g'(1) = -3 \neq 0$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

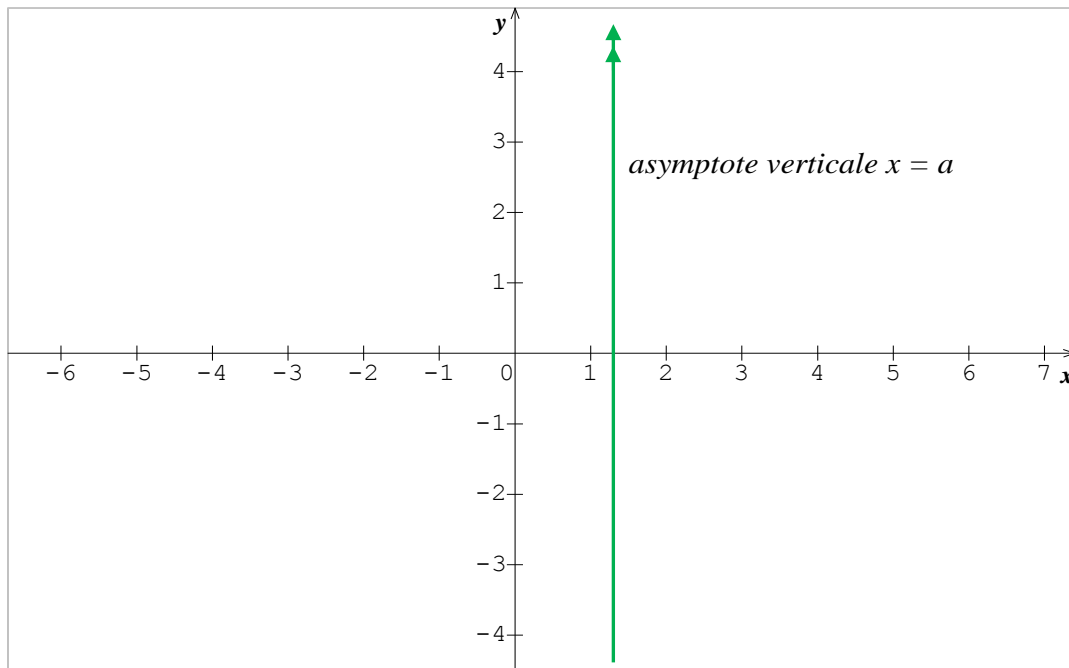
## 6) Interprétation graphique de la limite d'une fonction :

- Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  ou  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  (alors la droite d'équation  $y = l$ ) est asymptote

$x \rightarrow -\infty$                        $x \rightarrow +\infty$   
**Horizontale** à la combe représentative de  $f$ .

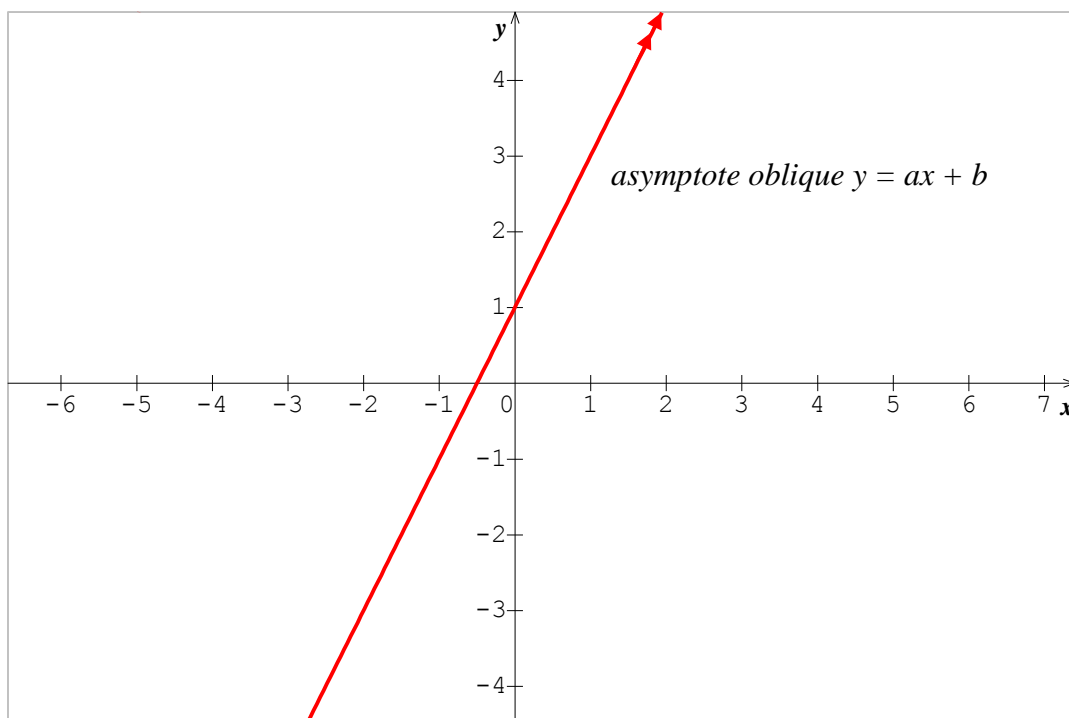


- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  (alors la droite d'équation  $x = a$ ) est asymptote **verticale** à la combe représentative de  $f$ .



- Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

(alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote **oblique** à la combe représentatives de  $f$ ).



### III- Continuité

#### 1) Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et soit  $x_0$  un réel appartenant à  $I$ .

On dit que  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si  $f$  est définie en  $x_0$  et si la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $x_0$  est égale à  $f(x_0)$

Une fonction  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si :

$$f(x_0) \text{ existe et } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = l \text{ (l fini).}$$

**Remarque :** les fonctions non continues en  $x_0$  sont les fonctions non définies en  $x_0$  et les fonctions n'admettant pas de limite en  $x_0$

#### 2) Continuité sur un intervalle :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I = [a ; b]$  ou  $I = ]a ; b[$ . On dit que  $f$  est continue sur  $I$  si et seulement si  $f$  est continue en tout point de  $I$ .

#### 3) Continuité à gauche – continuité à droite

##### a- Continuité à gauche :

Une fonction  $f$  est continue à gauche de  $x_0$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ .

##### b) Continuité à droite :

Une fonction  $f$  est continue à droite de  $x_0$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

$$x \rightarrow x_0^+$$

NB :

Une fonction est continue en un point de  $x_0$  si elle est **gauche** et à **droite** de  $x_0$

#### 4) Prolongement par continuité

Soit  $f$  une fonction numérique non définie en  $x_0$  ; mais admettant une limite  $l$  en ce point. La

fonction  $g$  définie par :  $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$

est appelée le prolongement de la fonction  $f$  par continuité au point  $x_0$

**NB :** Si  $f$  n'est pas définie en  $x_0$  mais admet une limite en ce point, alors on dit que  $f$  est prolongeable par continuité au point  $x_0$ .

### Exemple

1) Etudions la continuité de la fonction  $f$  au point  $x_0$  donné dans chacun des cas suivant:

$$\text{a) } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\ f(2) = 4 \end{cases} ; \quad x_0 = 2 \quad ; \quad \text{b) } \begin{cases} f(x) = \frac{|x - 1| + 2}{x + 3} \\ f(1) = 5 \end{cases} ; \quad x_0 = 1$$

2) Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction  $f$  puis dire si elle est prolongeable par continuité au point  $x_0$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} f(x) = \frac{\text{tg}x}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

### Solution

1) Etudions la continuité de la fonction  $f$  au point  $x_0$  donné dans chacun des cas suivant:

$$\text{a) } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ si } x_0 = 2 \\ f(2) = 4 \end{cases}$$

$$f \text{ est continue en } x_0 = 2, \text{ si } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = f(2) = \frac{0}{0} \text{ (Forme Indéterminée)}$$

**Levons l'indétermination.**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$\text{Puisque } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = f(2)$$

**Alors  $f$  est continue en  $x_0 = 2$**

$$\text{b)} \begin{cases} f(x) = \frac{|x-1|+2}{x+3} & x_0 = 1 \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ecrivons  $f$  sans le symbole de la valeur absolue :

Posons  $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$0$	$+$
$ x - 1 $	$-x + 1$		$x - 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{(-x+1)+2}{x+3} & \text{si } x \in ]-\infty ; 1] \\ f(x) = \frac{(x-1)+2}{x+3} & \text{si } x \in ]1 ; +\infty [ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{-x+3}{x+3} & \text{si } x \in ]-\infty ; 1] \\ f(x) = \frac{x+1}{x+3} & \text{si } x \in ]1 ; +\infty [ \end{cases}$$

Ainsi étudions la continuité de  $f$  à gauche et à droite de  $x_0 = 1$

$f$  est continue en  $x_0 = 1$  si  $f(1)$  existe et si  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$

**Continuité à gauche :**

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x+3}{x+3} = \frac{1}{2}$$

**Continuité à droite :**

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{2}$$

Puis que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$

Alors  $f$  est continue en  $x_0 = 1$ .

2) Dans chacun des cas suivants, précisons l'ensemble de définition de la fonction  $f$  et voyons si  $f$  est prolongeable par continuité au point  $x_0$

$$\text{a) } \begin{cases} f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

- $D_f = ]0 ; +\infty [$
- Etudions la continuité de  $f$  en  $x_0 = 0$

$f$  n'est pas définie en  $x_0 = 0$  donc elle n'est pas continue en  $x_0 = 0$

Voyons si  $f$  admet une limite finie  $x_0 = 0$

**Levons l'indétermination.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})}{x(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{(x + \sqrt{x})} = \infty$$

Alors  $f$  n'est pas continue en  $x_0 = 0$ .

**Par conséquent  $f$  n'est pas prolongeable par continuité en  $x_0 = 0$ .**

$$\text{b) } \begin{cases} f(x) = \frac{\text{tg}x}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

- $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Etudions la continuité de  $f$  en  $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}x}{x} = 1$$

**Par conséquent  $f$  est prolongeable par continuité en  $x_0 = 0$   
et son prolongement par continuité en  $x_0 = 0$  est la fonction  $h$  définie par :**

$$h(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{\text{tg}x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

## IV- Dérivation :

### Objectifs

Ce chapitre vise à :

- consolider les notions abordées en classe de première telles que la détermination du sens de variation d'une fonction et la recherche de tangentes à une courbe en des points donnés ;
- consolider la notion de dérivé et l'étendre à la composée de deux fonctions dérivables ;
- compléter les théorèmes concernant la dérivabilité par les notions de dérivabilité à gauche et de dérivabilité à droite ;
- utiliser des propriétés des fonctions dérivables pour démontrer des inégalités ou établir des encadrements.

### Savoirs et savoir-faire

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"><li>• Dérivées successives ; nouvelle notations. <math>\frac{df}{dx}</math> ; <math>\frac{d^2f}{dx^2}</math></li><li>• Si une fonction est dérivable sur un intervalle, alors elle continue sur cet intervalle.</li><li>• Dérivée d'une fonction composée (admise) ; application à la dérivation des fonctions de la forme : <math>u^n</math> (<math>n \in \mathbb{Z}^*</math>) ; <math>\sqrt{u}</math></li><li>• Existence de la dérivée d'une fonction réciproque (admise), formule de la dérivée de la fonction réciproque.</li><li>• Dérivée des fonctions puissances d'exposants rationnels.</li><li>• Inégalité des accroissements finis (2 formes)</li><li>• nombre dérivé à droite (à gauche) d'une fonction en un point.</li><li>• Demi-tangente</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Démontrer qu'une fonction composée est dérivable en un point et savoir calculer le nombre dérivé en ce point.</li><li>• Préciser l'ensemble des éléments où la fonction réciproque d'une fonction donnée est dérivable.</li><li>• Déterminer le nombre dérivé de la fonction réciproque en un point <math>x_0</math></li><li>• Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour :<ul style="list-style-type: none"><li>- démontrer une inégalité ;</li><li>- établir un encadrement.</li></ul></li><li>• Etudier la dérivabilité d'une fonction définie par intervalles en un point de raccordement.</li><li>• Interpréter graphiquement la dérivabilité à droite (resp. à gauche) d'une fonction en un point <math>x_0</math>.</li></ul>

### 1) Nombre dérivé en un point $x_0$ :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant  $x_0$ .

On dit que  $f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si la quantité  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  admet une limite finie quand  $x$  tend vers  $x_0$ . Cette limite est appelée **nombre dérivé en  $x_0$  et est noté  $f'(x_0)$** . C'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

**N.B** :  $f$  est dérivable en  $x_0$  est équivalente que la quantité  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  admet une limite finie quand  $h$  tend vers zéro ; il suffit de poser  $h = x - x_0$

$f$  est dérivable en  $x_0$  si elle admet un nombre dérivé  $f'(x_0)$

### 2) Lien entre la notion de limite et de continuité :

Toute fonction dérivable en un point  $x_0$  est continue en  $x_0$ .

**N.B** : La réciproque est inexacte.

### 3) Nombre dérivé à gauche – Nombre dérivée à droite

#### a) Nombre dérivé à gauche :

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existe et est finie, alors on dit que  $f$  est dérivable à gauche en  $x_0$ .

On la note  $f'_g(x_0)$

#### b) Nombre dérivé à droite :

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  Existe et est finie, alors on dit que  $f$  est dérivable à droite en  $x_0$ .

On la note  $f'_d(x_0)$

### Théorème :

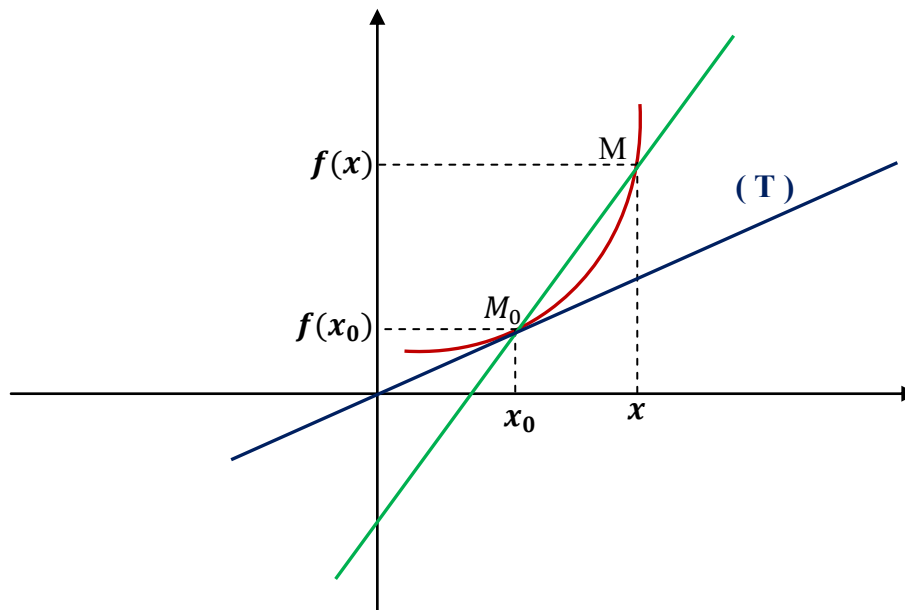
si  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $x_0$  et si les deux nombres dérivés sont égaux alors  $f$  est dérivable en  $x_0$  et on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

#### 4) Interprétation graphique d'un nombre dérivé

Soit  $f$  une fonction numérique d'une variable réelle et  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O ; I ; J)$

Soit  $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  un point fixé de  $(\mathcal{C})$ .  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  un point courant de  $(\mathcal{C})$  ; construisons la droite  $(M_0M)$ . Lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  la droite  $(M_0M)$  vient occuper une position limite  $(M_0T)$  appelée tangente à la courbe  $(\mathcal{C})$  au point  $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  ;  $f'(x_0)$  est appelé pente ou coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point  $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$



a) **Equation de la tangente au point d'abscisse  $x_0$**  :  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Si le nombre dérivé à gauche et le nombre dérivé à droite existent et sont différents, alors la courbe admet deux demi – tangentes en  $M_0$  de coefficients respectifs les nombres dérivés à gauche et à droite de  $x_0$  et fait un angle en ce point.

Si la courbe  $(\mathcal{C})$ , de la fonction  $f$  admet en un point  $x_0$ , une tangente parallèle à l'axe des abscisses alors  $f'(x_0) = 0$

**5) Utilisation des dérivées :**

Sens de variation d'une fonction.

Soit  $f$  une fonction définie par :  $x \mapsto f(x)$ . On appelle dérivée de  $f$ , la fonction  $f'$  définie par :  $f' : x \mapsto f'(x)$  nombre dérivé de la fonction  $f$  au point  $x$

**6) Formules sur les dérivées :**

a- **Dérivées usuelles :**

Fonctions	Dérivées	Domaines de dérivabilité
a (constante)	0	$\mathbb{R}$
$ax$	a	$\mathbb{R}$
$ax^n$	$nax^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{a}{x^n}$	$-\frac{nax^{n-1}}{x^{2n}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sqrt{ax + b}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax + b}}$	$\mathbb{R}_+$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\text{Tgx}$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}$
$\cos(ax + b)$	$-a \sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax + b)$	$a \cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$\text{tg}(ax + b)$	$\frac{a}{\cos^2(ax + b)} = 1 + \text{tg}^2(ax + b)$	$\mathbb{R} - \left\{ ax + b \mid \frac{k\pi}{2} \right\}$ $k \in \mathbb{Z}$

## **b- Opérations sur les dérivées :**

Fonctions	Dérivées
$u + v$	$U' + v'$
$au \ (a \in \mathbb{R})$	$au'$
$(u) \cdot (v)$	$u'v + v'u$
$\frac{a}{u} \ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{-au'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{(u')(v) - (v')(u)}{(v)^2}$
$(u)^n$	$n(u') (u)^{n-1}$
$\frac{a}{u^n} \ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{-nau'u^{n-1}}{u^{2n}}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\text{Cos} (u)$	$-u' \text{Sin} (u)$
$\text{Sin} (u)$	$u' \text{Cos}(u)$
$\text{tg} (u)$	$\frac{u'}{\text{Cos}^2 u}$
$u = (g \circ f) (x)$	$u' = f' (x) \cdot g' (f(x))$

### **7) Dérivée de la réciproque d'une fonction $f$ :**

Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ .

Alors  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $f(I)$  et admet une bijection  $f^{-1}$  de  $f(I)$  dans  $I$

Ayant même sens de variation que  $f$

Pour calculer  $(f^{-1})'(x_0)$ , on peut procéder comme suite :

- On détermine la solution de l'équation  $f(x) = x_0$
- On calcule  $f'(x)$  et on vérifie que  $f'(x) \neq 0$
- On conclue  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)}$

### **8) Sens de variation d'une fonction.**

#### **Théorème :**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ . On retient que les variations d'une fonction dépendent du signe de sa dérivée. Ainsi :

- Si  $f'(x) < 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $\forall x \in I$ ,  $f$  est strictement décroissante.
- Si  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $\forall x \in I$ ,  $f$  est strictement croissante.
- Si  $f'(x) = 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $\forall x \in I$ ,  $f$  est constante ou stationnaire

### N.B :

Les variations d'une fonction peuvent être résumées dans un tableau appelé tableau de variation de  $f$ . Ainsi un tableau de variation comporte les éléments suivants :

- Domaine de définition
- Valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule
- Des flèches croissantes et décroissantes montrant les variations de  $f$ .
- Une courbe ( $C_f$ ) admet en un point  $A(x_0 ; y_0)$  une tangente horizontale ou une tangente parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si :  $f'(x_0) = 0$ .
- Une courbe ( $C_f$ ) admet en un point  $A(x_0 ; y_0)$  une tangente de coefficient directeur  $a$  si et seulement si :  $f'(x_0) = a$ .

### 9) Extremum d'une fonction :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant  $x_0$ . Si  $f'(x)$  s'annule en changeant de signe en *passant par*  $x_0$ , alors  $f$  admet un extremum en  $x_0$ .

Si  $f'(x)$  passe du signe négatif au signe positif on dit que  $f$  présente un minimum  
Si  $f'(x)$  passe du signe positif au signe négatif on dit que  $f$  présente un maximum

Ainsi on dit que : **( $C_f$ ) admet une tangente horizontale en  $M_0(x_0 ; f(x_0))$**

### Exemple

1) Etudier la dérivabilité de la fonction  $f$  au point  $x_0$  donné :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 + x - 6} & ; \quad x_0 = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

2) Calculer la fonction dérivée  $f'(x)$  de la fonction  $f(x)$  :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 5}{x^3 - 2}$$

3) Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C) de  $f$  aux points  $x_0$  :

$$f(x) = \cos^2\left(\frac{x\pi}{6}\right); \text{ on donne } x_0 = 2$$

4) Dresser le tableau de variation de la fonction suivante :  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

### Solution

1) Etudions la dérivabilité de la fonction  $f$  au point  $x_0$  :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2+x-6} & ; \quad x_0 = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

$f$  est dérivable en  $x_0 = 2$  si  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = l$  avec ( $l \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{(x-2)^2}{x^2+x-6}}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x^2+x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-1} = 1 \in \mathbb{R}$$

Alors  $f$  est dérivable en  $x_0 = 2$  et son nombre dérivé est  $f'(2) = 1$

2) Calculer la fonction dérivée  $f'(x)$  de la fonction  $f(x) = \frac{-x^2+3x-5}{x^3-2}$ .

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{-x^2+3x-5}{x^3-2} & \left| \begin{array}{l} U(x) = -x^2 + 3x - 5 \Rightarrow U'(x) = -2x + 3 \\ V(x) = x^3 - 2 \Rightarrow V'(x) = 3x^2 \end{array} \right. \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{(U'(x))(V(x)) - (V'(x))(U(x))}{(V(x))^2} = \frac{(-2x+3)(x^3-2) - (3x^2)(-x^2+3x-5)}{(x^3-2)^2} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{x^4 - 6x^3 + 15x^2 + 4x - 6}{(x^3-2)^2} \end{aligned}$$

3) Ecrivons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) de  $f$  aux points  $x_0$  :

$$f(x) = \cos^2\left(\frac{x\pi}{6}\right); \text{ on donne } x_0 = 2$$

L'équation de la tangente (T) à la courbe (C) de  $f$  aux points  $x_0 = 2$  est :

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

$$\begin{array}{l} U(x) = \cos\left(\frac{x\pi}{6}\right) \Rightarrow \\ f(x) = \cos^2\left(\frac{x\pi}{6}\right) \\ n = 2 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U'(x) = -\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{x\pi}{6}\right) \\ U^{n-1}(x) = \cos\left(\frac{x\pi}{6}\right) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow f'(x) = n(U'(x))(U^{n-1}(x))$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2\left[\left(-\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{x\pi}{6}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{x\pi}{6}\right)\right)\right] \Rightarrow f'(2) = -\frac{\pi\sqrt{3}}{12} \text{ et } f(2) = \frac{1}{4}$$

$$\text{D'où : } y = -\frac{\pi\sqrt{3}}{12}(x - 2) + \frac{1}{4} \Rightarrow y = -\frac{\pi\sqrt{3}}{12}x + \frac{2\pi\sqrt{3} + 3}{12}$$

4) Dressons le tableau de variation de la fonction  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} = ]-\infty ; -1[ \cup ]-1 ; +\infty[$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$x + 1$	$-$	$\emptyset$	$+$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \quad \left| \begin{array}{l} U(x) = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow U'(x) = 2x + 2 \\ V(x) = x + 1 \quad \Rightarrow V'(x) = 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(U'(x))(V(x)) - (V'(x))(U(x))}{(V(x))^2} = \frac{(2x+2)(x+1) - (1)(x^2+2x+2)}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \quad \text{or } \forall x \in Df, (x+1)^2 > 0$$

Alors le signe de  $f'(x)$  dépend donc du signe du numérateur  $x^2 + 2x$ .

Posons  $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0$  ou  $x = -2$

D'où le tableau de variation de  $f$  est le suivant :

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$0$	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
$f'(x)$	$-\infty$	$-2$	$-\infty$	$+\infty$	$2$	$+\infty$

$$f(-2) = -2 \quad \text{et} \quad f(0) = 2$$

## V- Etude de fonctions :

### 1) Parité et périodicité d'une fonction :

#### a) Fonction paire :

Une fonction  $f$  est dite paire si et seulement si :

$$\forall x \in Df \text{ et } -x \in Df ; f(-x) = f(x)$$

#### b) Fonction impaire :

Une fonction  $f$  est dite impaire si et seulement si :

$$\forall x \in Df \text{ et } -x \in Df ; f(-x) = -f(x)$$

#### c) Fonction Périodique :

Une fonction  $f$  est dite périodique de période  $T$  s'il existe un nombre réel  $T$  tel que

$$\forall x \in Df \text{ et } x + T \in Df ; f(x + T) = f(x).$$

### Remarque :

- La fonction  $\cos x$  est paire car  $\cos(-x) = \cos x$
- La fonction  $\sin x$  est impaire car  $\sin(-x) = -\sin x$
- Les fonctions  $\cos(ax + b)$  et  $\sin(ax + b)$  sont périodique et de période  $T = \frac{2\pi}{|a|}$

### Exemple

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x}$  et (C) sa courbe.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .
- 2) Etudier la périodicité la parité de  $f$  puis en déduire que  $D_f$  peut se réduire à  $[0 ; \pi]$
- 3) Montrer que  $\forall x \in Df$  on a :  $f'(x) = \frac{3(1 - 2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$
- 4) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[0 ; \pi]$ .

### Solution

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x}$  et (C) sa courbe

- 1) Déterminons l'ensemble de définition  $Df$

$$Df = \{x / x \in \mathbb{R} ; \cos^3 x \neq 0\}$$

$$\cos^3 x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \cos \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow D_f = \left] -\infty ; -\frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2} ; +\infty \right[$$

2) Etude de la parité et de la périodicité de  $f$

$$\text{- Partie : } f(-x) = \frac{1 + \cos(-3x)}{\cos^3(-x)} = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x} = f(x)$$

Alors  $f$  est paire et admet donc l'axe  $y'oy$  comme axe de symétrie.

$$\text{- Périodicité : } T_1 = \frac{2\pi}{3} \text{ et } T_2 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \Rightarrow T = T_1 \cap T_2 = 2\pi$$

Alors l'étude peut donc se faire sur le domaine  $\left[-\frac{T}{2} ; \frac{T}{2}\right]$

$$\Leftrightarrow D_f = \left[-\frac{2\pi}{2} ; \frac{2\pi}{2}\right] \Rightarrow D_f = [-\pi ; \pi]$$

Et puisque la fonction  $f$  est paire alors nous pouvons résumer le domaine d'étude à  $[0 ; \pi]$ .

D'où  $D_f = [0 ; \pi]$

$$3) \text{ Montrons que } \forall x \in D_f, \text{ on a : } f'(x) = \frac{3(1 - 2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$$

$$f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x} \left\{ \begin{array}{l} u = 1 + \cos 3x \Rightarrow u' = -3\sin 3x \\ v = \cos^3 x \Rightarrow v' = -3\sin x \cos^2 x \end{array} \right.$$

$$f'(x) = \frac{-3\cos^3 x \cdot \sin 3x + 3\sin x \cos^2 x (1 + \cos 3x)}{\cos^6 x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3\cos^2 x (-\cos x \sin 3x + \sin x + \sin x \cos 3x)}{\cos^6 x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3(\sin x \cdot \cos 3x - \sin 3x \cos x + \sin x)}{\cos^4 x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3(\sin(x - 3x) + \sin x)}{\cos^4 x} = \frac{3(-2\cos x + 1)\sin x}{\cos^4 x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3(-2\cos x \sin x + \sin x)}{\cos^4 x} = \frac{3(-2\cos x + 1)\sin x}{\cos^4 x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3(1 - 2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$$

4) Etude du signe de  $(1 - 2\cos x)$  sur  $D_E$  puis de variations de  $f$ .

$$1 - 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

D'autre par  $\forall x [0 ; \pi]$  ;  $\sin x > 0$  et  $\cos^4 x > 0$

Donc le signe dépend de  $1 - 2\cos x$

D'où le tableau de variation de  $f$  est le suivant :

$x$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	2	0	$+\infty$	0

$$f(-2) = -2 \quad \text{et} \quad f(0) = 2$$

## 2) Courbes symétriques :

### a) Axe de symétrie :

La droite d'équation  $x = a$  est dite **axe de symétrie** pour la courbe (Cf) de  $f$  si :

- $f(2a - x) = f(x)$   
ou
- $f(a + x)$  est paire  
ou
- $f(a + x) = f(a - x)$

### b) Centre de symétrie :

Le point  $I\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$  est dit **centre de symétrie** pour la courbe (Cf) de  $f$  si

- $f(2a - x) + f(x) = 2b$   
ou
- $f(a + x) - b$  est paire  
ou
- $f(a + x) + f(a - x) = 2b$

### N.B :

- Toute fonction paire admet l'axe ( $y' o y$ ) comme axe de symétrie.
- Toute fonction impaire admet le point  $O\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$  (origine du repère) comme centre de symétrie.

### **c) Recherche de centre de symétrie et d'axe de symétrie :**

#### **Centre de symétrie :**

Soit  $f$  une fonction rationnelle définie par :  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{\gamma x + \beta}$  et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  où :  $a; b; c; \gamma; \beta$  sont tous des réels avec :  $a \neq 0$  et  $\gamma x + \beta \neq 0$ .

Si  $f$  peut se mettre sous la forme :  $f(x) = a'x + b' + \frac{c'}{\gamma x + \beta}$

Alors le centre de symétrie à la courbe (C) de  $f$  a pour coordonnées :

$$I \left( \begin{array}{l} x_0 = \frac{-\beta}{\gamma} \\ y_0 = a'x_0 + b' \end{array} \right)$$

#### **Axe de symétrie :**

Soit  $f$  une fonction polynôme du second degré définie par :  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec ( $a \neq 0$ )

Si  $f$  peut se mettre sous la forme :  $f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$

Alors l'axe de symétrie à la courbe (C) de  $f$  a pour équation  $x = -\frac{b}{2a}$ .

### **Exemple**

1) Pour chacune des fonctions données, vérifiez si la droite d'équation  $x = a$  est un axe de symétrie pour la courbe (C) de  $f$ .

a)  $f(x) = x^2 + 2x + 3$  et  $a = -1$

b)  $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$  et  $a = \frac{1}{2}$

2) Pour chacune des fonctions données, vérifiez si le point  $I \left( \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right)$  est un centre de symétrie pour la courbe (C) de  $f$ .

a)  $f(x) = \frac{3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12}$  et  $I \left( \begin{array}{l} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{array} \right)$

b)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$  et  $I \left( \begin{array}{l} -1 \\ 0 \end{array} \right)$

### Solution

1) Pour chacune des fonctions données, vérifions si la droite d'équation  $x = a$  est un axe de symétrie pour la courbe (C) de  $f$ .

$$\text{a) } f(x) = x^2 + 2x + 3 \quad \text{et} \quad a = -1$$

$a = -1$  est un axe de symétrie si  $f(2a - x) = f(x)$

$$\begin{aligned} f(2(-1) - x) &= f(-2 - x) = (-2 - x)^2 + 2(-2 - x) + 3 \\ &= (2 + x)^2 + 2(-2 - x) + 3 \\ &= 4 + 4x + x^2 - 4 - 2x + 3 \\ &= x^2 - 2x + 3 = f(x) \end{aligned}$$

Puisque  $f(-2 - x) = f(x)$  alors  $a = -1$  est un axe de symétrie pour la courbe (C) de  $f$ .

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 3 \quad \text{et} \quad a = \frac{1}{2}$$

$a = \frac{1}{2}$  est un axe de symétrie si  $f(2a - x) = f(x)$

$$\begin{aligned} f(2\left(\frac{1}{2}\right) - x) &= f(1 - x) = 3(1 - x)^2 - 2(1 - x) + 3 \\ &= 3 - 6x + 3x^2 - 2 + 2x + 3 \\ &= 3x^2 - 4x + 4 \neq f(x) \end{aligned}$$

Puisque  $f(1 - x) \neq f(x)$  alors  $a = \frac{1}{2}$  n'est pas un axe de symétrie pour la courbe (C) de  $f$ .

2) Pour chacune des fonctions données, vérifions si le point  $I\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$  est un centre de symétrie pour la courbe (C) de  $f$ .

$$\text{a) } f(x) = \frac{3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12} \quad \text{et} \quad I\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{smallmatrix}\right)$$

Le point  $I\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{smallmatrix}\right)$  est dit centre de symétrie si  $f(2\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{smallmatrix}\right) - x) + f(x) = 2\left(\begin{smallmatrix} -\frac{1}{3} \end{smallmatrix}\right)$

$$\Leftrightarrow f(-x) + f(x) = \left(\begin{smallmatrix} -\frac{2}{3} \end{smallmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{3(-x)^3 - (-x)^2 + 4}{3(-x)^2 - 12} = \frac{-3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12} \\ \Rightarrow f(-x) + f(x) &= \frac{-3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12} + \frac{3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12} = \frac{-2x^2 + 8}{3x^2 - 12} \neq -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Puisque  $f(-x) + f(x) \neq -\frac{2}{3}$  alors  $I\left(\frac{0}{3}\right)$  n'est pas un centre de symétrie pour la courbe (C) de  $f$ .

$$\text{b) } f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \quad \text{et} \quad I\left(\frac{-1}{0}\right)$$

Le point  $I\left(\frac{-1}{0}\right)$  est dit centre de symétrie si  $f(2(-1) - x) + f(x) = 2(0)$

$$\Leftrightarrow f(-2 - x) + f(x) = 0$$

$$f(-x - 2) = \frac{(-2-x)^2 + 2(-2-x) + 2}{(-2-x) + 1}$$

$$= \frac{4 + 4x + x^2 - 4 - 2x + 2}{-2 - x + 1} = \frac{x^2 + 2x}{-x - 1}$$

$$\Rightarrow f(-x - 2) + f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{-x - 1} + \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 1} = \frac{-x^2 - 2x - 2}{x + 1} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = 0$$

Puisque  $f(-x - 2) + f(x) = 0$  alors  $I\left(\frac{-1}{0}\right)$  est un centre de symétrie pour la courbe (C)

### 3) Maximum - Minimum - Extremum - Point d'inflexion

#### a) Minimum :

Soit  $f$  une fonction définie en un point  $x_0$ . S'il existe un intervalle  $I$  centré en  $x_0$  tel que  $\forall x \in I$  on a :  $f(x) \geq f(x_0)$  alors  $f$  présente un minimum  $m$  en  $x_0$ . Ce minimum est  $m = f(x_0)$ .

#### b) Maximum :

$f$  admet un maximum relatif au point  $x_0$ , s'il existe un intervalle  $I$  centré en  $x_0$  tel que  $\forall x \in I$  on a :  $f(x) \leq f(x_0)$ . Le maximum est  $M = f(x_0)$ .

#### Théorème :

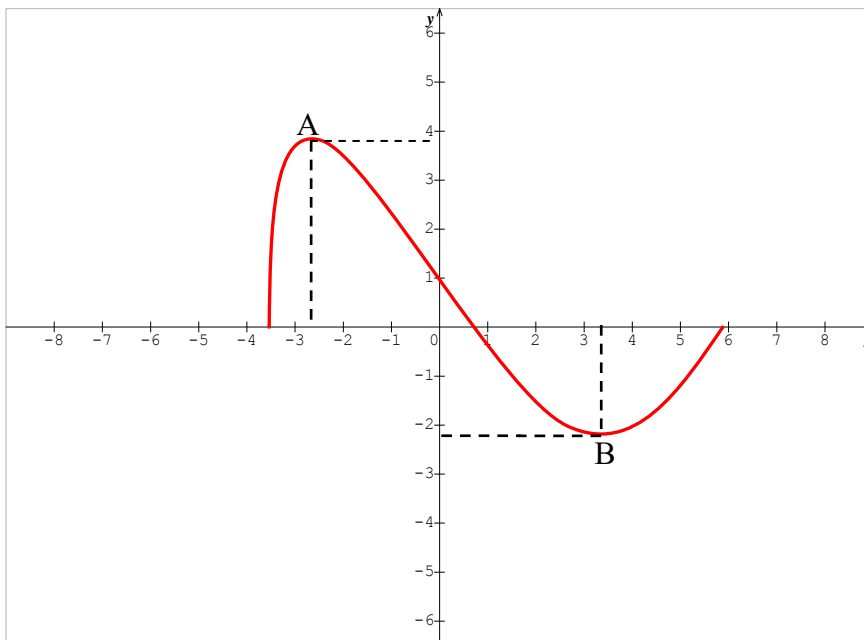
Si une fonction  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$  et si  $f'(x)$  s'annule en  $x_0$  et change de signe en passant par  $x_0$ , on dit alors que  $f$  présente un extremum en  $x_0$ . Cet extremum est égal à  $f(x_0)$ . Il est le minimum si  $f'$  passe du signe négatif au signe positif. Il est le maximum si  $f'$  passe du signe positif au signe négatif.

#### NB :

Si  $f$  est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $]a ; b[$ , tel que la dérivée s'annule en changeant de signe au point  $x_0$ , alors la fonction  $f$  admet un extremum relatif en  $x_0$ .

#### c) Extremum :

**Le système (Maximum-Minimum) est appelé Extremum.**



- A représente le maximum relatif,
- B représente le minimum relatif,

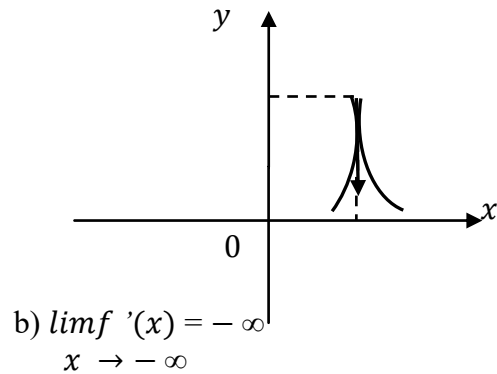
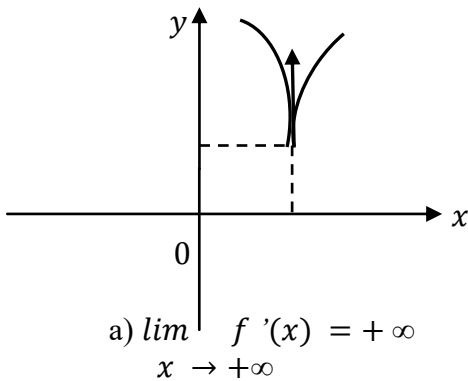
**d) Point d'inflexion :**

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $]a ; b[$ . On appelle **point d'inflexion**, tout point où la **dérivée seconde  $f''(x)$  s'annule en changeant de signe**.

**e) Point de reboursement :**

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \pm \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \pm \infty$$

Alors on dit que  $f$  admet un point de reboursement  $x_0$  à tangente parallèle à l'axe des abscisses ou des ordonnées :



**4) Fonction réciproque**

**Bijection :**

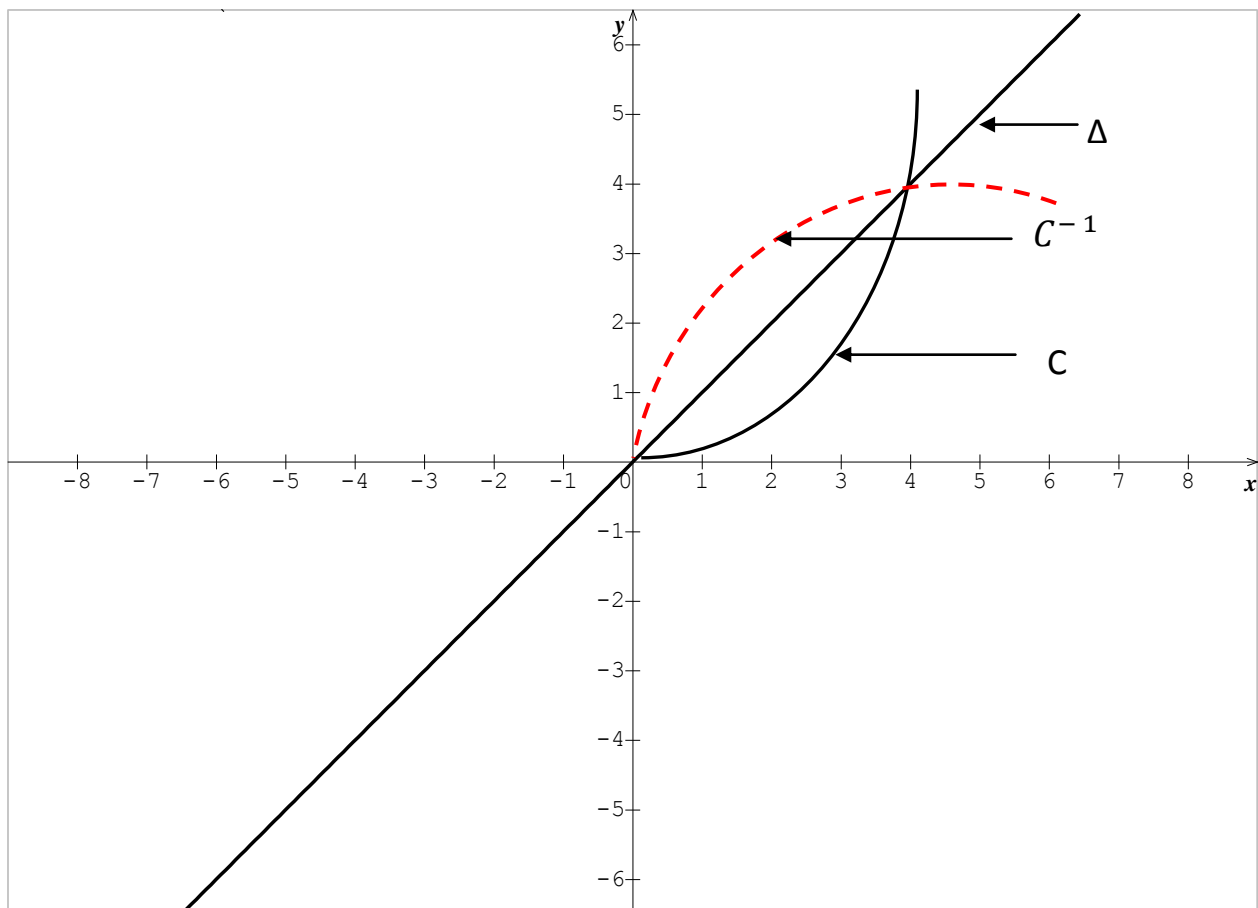
Une fonction  $f$  de  $E$  vers  $F$  est dite bijective si tout élément de l'ensemble d'arrivé  $F$  admet un et un seul antécédent dans l'ensemble de départ  $E$ .

- **En Pratique :**

Une application  $f$  est bijective si et seulement si  $\forall y \in F \exists ! x \in E$  on a :  $f(x) = y$

- **Graphiquement**

Les courbes représentatives d'une fonction et celle de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice ( $\Delta$ ) d'équation  $y = x$ .



**Théorème :**

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ , alors  $f$  est une bijection de  $I$  sur  $f(I)$ . et admet une bijection *reciproque*  $f^{-1}$  de  $f(I)$  sur  $I$  ayant même sens de variation que  $f$

**Les courbes  $C_f$  et  $C_{f^{-1}}$  sont symétriques par rapport à la première bissectrice  $\Delta : y = x$**

Si  $M(x; y) \in C_f$  alors  $N(y; x) \in C_{f^{-1}}$

Si  $x = a$  est asymptote à  $C_f$  alors  $y = a$  devient asymptote pour  $C_{f^{-1}}$

## 5) Théorème de valeurs intermédiaires :

### L'image d'un intervalle par une fonction continue :

#### Théorème 1 :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $D_f$  son ensemble de définition. Soit  $I = [a ; b]$  ou  $I = ]a ; b [$  un intervalle de  $D_f$ . Si  $f$  est continue sur  $I$  alors  $f(I)$  est aussi un intervalle

#### Théorème 2:

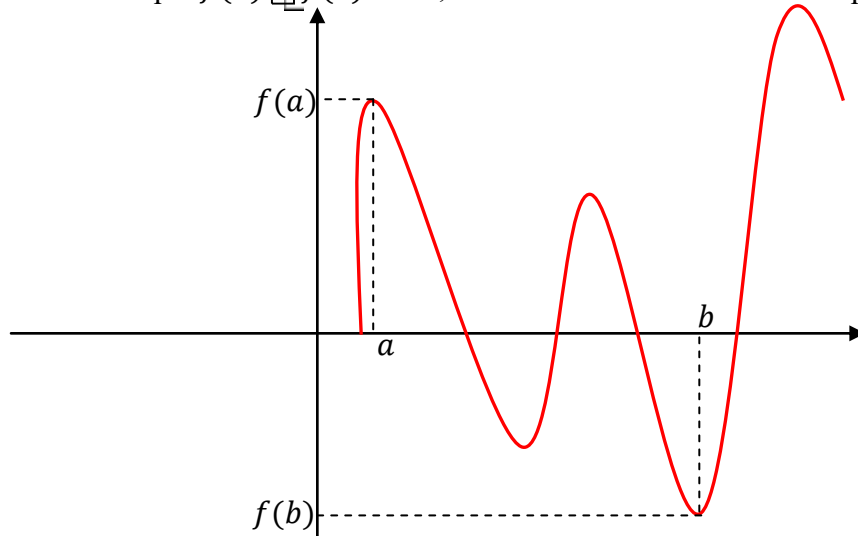
L'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé.

#### 1<sup>ère</sup> forme :

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $D_f$  son ensemble de définition. Soit  $I = [a ; b]$  ou  $I = ]a ; b [$  un intervalle de  $D_f$ . Si  $f$  est continue sur  $I$  alors  $f(I)$  est aussi un intervalle.

#### 2<sup>ème</sup> forme :

Si  $f$  est continue sur  $I$  et que  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , alors il existe un réel  $\alpha \in I$  tel que  $f(\alpha) = 0$



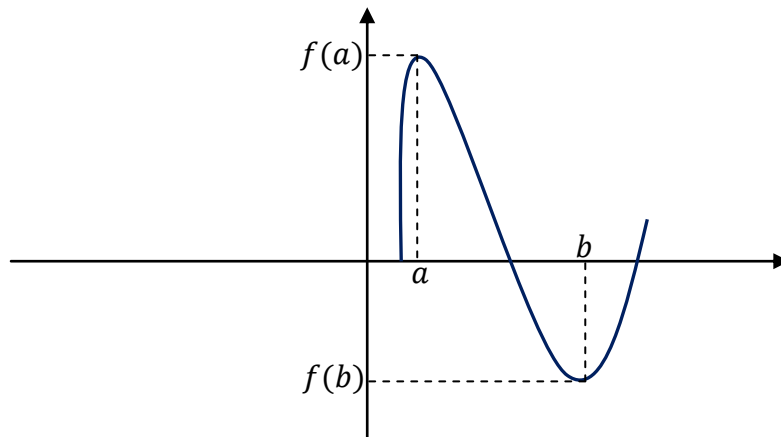
## 6) Théorème relatif aux fonctions continues et strictement monotones

### 1<sup>ère</sup> forme :

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $[ a ; b ]$  et si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes contraires alors il existe un unique point  $x_0$  élément de  $]a; b[$  tel que  $f(x_0) = 0$

### 2<sup>ème</sup> forme :

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $[ a ; b ]$  et si  $f(a) \times f(b) \leq 0$  alors l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in [ a ; b ]$

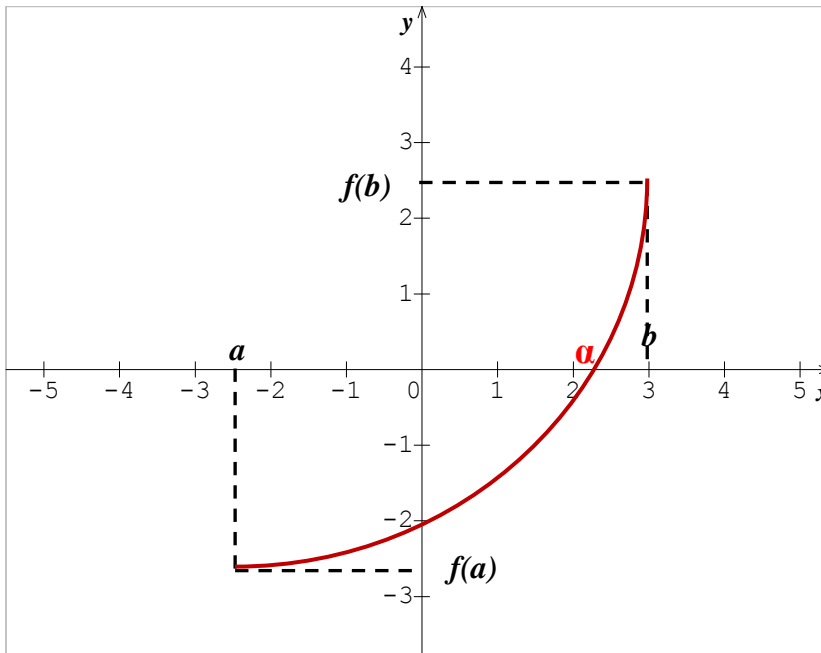


## 7) Approximation d'une solution $\alpha$ de l'équation $g(x) = 0$ :

### a- Méthode de dichotomie :

Soit  $g$  une fonction définie sur un intervalle  $[a ; b]$  tel que  $g(a) \cdot g(b) < 0$ .  
Posons  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$ .

- Si  $g$  est strictement croissante sur  $[a ; b]$

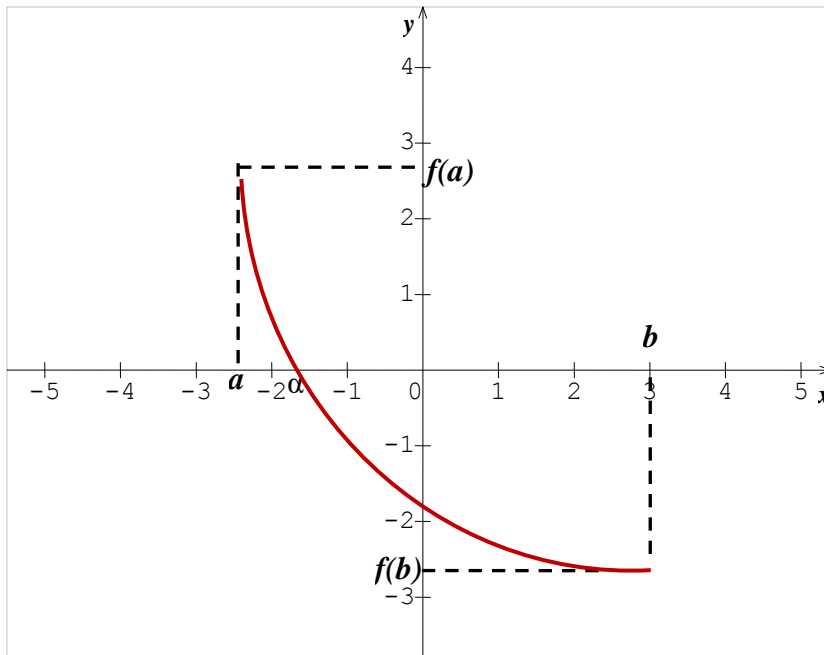


Ainsi on a deux suites numériques de termes généraux  $a_n$  et  $b_n$  tel que  $\alpha \in [a_n ; b_n]$ .

On calcule  $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$ .

- Si  $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$  alors  $\alpha \in \left[\frac{a_n + b_n}{2} ; b_n\right]$ .
- Si  $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$  alors  $\alpha \in \left[a_n ; \frac{a_n + b_n}{2}\right]$ .

- Si  $g$  est strictement décroissante sur  $[a ; b]$



Ainsi on a deux suites numériques de termes généraux  $a_n$  et  $b_n$  tel que  $\alpha \in [a_n ; b_n]$ .

On calcule  $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$ .

- Si  $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$  alors  $\alpha \in \left[a_n ; \frac{a_n + b_n}{2}\right]$ .

-

- Si  $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$  alors  $\alpha \in \left[\frac{a_n + b_n}{2} ; b_n\right]$ .

### b- Méthode des balayages :

C'est une méthode qui consiste à déterminer une approximation de  $\alpha$  à partir d'un tableau de valeurs où la valeur de  $\alpha$  est obtenue en encadrant la valeur de  $x$  à partir du changement de signe obtenue entre l'antécédent positif et négatif.

$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	.....	$x_n$
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$	$f(x_6)$	$f(x_7)$	.....	$f(x_n)$

Si par exemple  $f(x_5) \times f(x_6) < 0$  alors  $\alpha \in [x_5 ; x_6]$  et par conséquent  $\alpha = \frac{x_5 + x_6}{2}$

### Exemple

A) Soit  $f(x) = x^3 + 3x - 7$ .

1- Calculer  $f'(x)$ .

2- Etudier le sens de variation de  $f$ .

3- Dresser le tableau de variation de  $f$ .

4- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  telle que  $\alpha \in ]1 ; 2[$ .

5- Déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.

**B)** Soit  $f(x) = \sqrt{x+2}$ .

- 1- Déterminer l'ensemble de définition  $Df$  de  $f$ .
- 2- Montrer que  $f$  réalise une bijection de l'intervalle  $[-2; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera.

**C)** Soit  $f(x) = \cos x$  une fonction définie sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

- 2- Etudier les variations de  $f$  sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
- 3- Trouver une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de la solution  $\alpha$  de l'équation  $f(x) = x$

### Solution

**A)** Soit  $f(x) = x^3 + 3x - 7$ .

1- Calculons  $f'(x)$ .

$$Df = \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^3 + 3x - 7 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 3$$

2- Etudions le sens de variation de  $f$ .

$\forall x \in Df, f'(x) > 0$ . D'où  $\forall x \in Df, f$  est strictement croissante.

3- Dressons le tableau de variation de  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 3x - 7 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 3x - 7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = (+\infty)^3 = +\infty$$

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	$\emptyset$	$+\infty$

4- Montrons que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  telle que  $\alpha \in ]1 ; 2[$   
 D'après le tableau de variation,  $f$  est définie, continue et strictement croissante de  
 $] - \infty ; + \infty [$  vers  $] - \infty ; + \infty [$  alors l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  tel  
 que  $f(\alpha) = 0$ .

De plus :  $\begin{cases} f(1) = -4 \\ f(2) = 7 \end{cases} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0$

1- Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires  $\alpha \in ]1 ; 2[$

2- Déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.

Pour cela utilisons la méthode des balayages

$x$	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$f(x)$	-2,36	-1,67	-0,90	-0,05	0,87	?	?	?	?

Ainsi d'après le tableau, l'image par  $f$  des différentes valeurs de  $x$  commences à changé de  
 signe à partir des valeurs de  $x$  comprises entre 1,4 et 1,5.

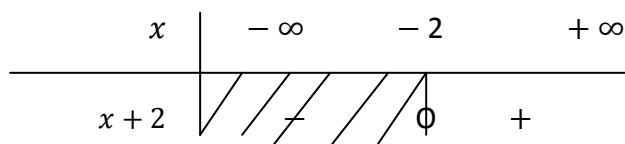
Alors :  $\alpha = \frac{1,4 + 1,5}{2} = 1,45$

**B) Soit  $f(x) = \sqrt{x + 2}$ .**

4- Déterminons l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; x + 2 \geq 0\}$

$x + 2 \geq 0$ . Posons  $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$



$\Rightarrow D_f = [-2 ; +\infty [$

5- Montrer que  $f$  réalise une bijection de l'intervalle  $[-2 ; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on  
 déterminera.

Pour cela, dressons le tableau de variation de  $f$  :

$f(-2) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$f(x) = \sqrt{x + 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \Rightarrow f'(x) > 0$

D'où le tableau de variation de  $f$  est le suivant :

$x$	$-2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$\rightarrow +\infty$

D'après le tableau de variation,  $f$  est définie, continue et strictement croissante de  $] -2 ; +\infty [$  vers  $] 0 ; +\infty [$  alors  $f$  réalise une bijection de  $] -2 ; +\infty [$  vers l'intervalle  $J = ] 0 ; +\infty [$

### 8) Théorème de l'inégalité des accroissements finis

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$ . Soit  $a$  et  $b$  deux réels appartenant à  $I$  tel que  $(a < b)$ .

-Si  $m$  et  $M$  sont deux réels tel que  $m \leq f'(x) \leq M$ , alors on a :

$$(b - a) m \leq f(b) - f(a) \leq (b - a) M.$$

-Si  $f$  est dérivable sur  $I$ , alors il existe un réel  $k$  appartenant à  $I$  tel que  $|f'(x)| \leq k$ .

Ainsi par conséquent  $\forall a \in I$  et  $b \in I$ , on a :  $|f(x) - f(a)| \leq k |x - a|$ .  
(qui est le théorème de l'inégalité des accroissements finis).

### Exemple

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3}$

1) Montrer que  $\forall x \in [4 ; 5]$ , on a  $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

2) En déduire que  $\forall x \in [4 ; 5]$ , on a :  $\left| f(x) - \frac{15}{2} \right| \leq \frac{3}{4} |x - 5|$

### Solution

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3}$

1) Montrons que  $\forall x \in [4 ; 5]$ , on a :  $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3} \quad \left| \quad \begin{array}{l} U(x) = x^2 - x - 5 \Rightarrow U'(x) = 2x - 1 \\ V(x) = x - 3 \quad \Rightarrow V'(x) = 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(U'(x))(V(x)) - (V'(x))(U(x))}{(V(x))^2} = \frac{(2x-1)(x-3) - (1)(x^2-x-5)}{(x-3)^2} =$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}$$

Or  $x \in [4 ; 5] \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 5$

**En appliquant la fonction dérivée  $f'$  à l'inégalité, on a :**

Or  $f'(4) = 0$  et  $f'(5) = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow 0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$$

**En appliquant la valeur absolue à l'inégalité, on a :**

$$\Rightarrow |0| \leq |f'(x)| \leq \left| \frac{3}{4} \right|$$

$$\Rightarrow 0 \leq |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$$

D'où  $\forall x \in [4 ; 5]$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

2) En déduisons que  $\forall x \in [4 ; 5]$ , on a :  $\left| f(x) - \frac{15}{2} \right| \leq \frac{3}{4} |x - 5|$

D'après la question 1), on a :

$$\forall x \in [4 ; 5], |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$$

Or si  $|f'(x)| \leq k$ , on a : d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis

$$|f(x) - f(a)| \leq k |x - a|$$

Ainsi puisque  $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$ , alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements

Finis on a :  $|f(x) - f(5)| \leq \frac{3}{4}|x - 5|$ . Avec  $k = \frac{3}{4}$  et  $a = 5$

Or  $f(5) = \frac{15}{2}$

$$\Rightarrow \left|f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x - 5|$$

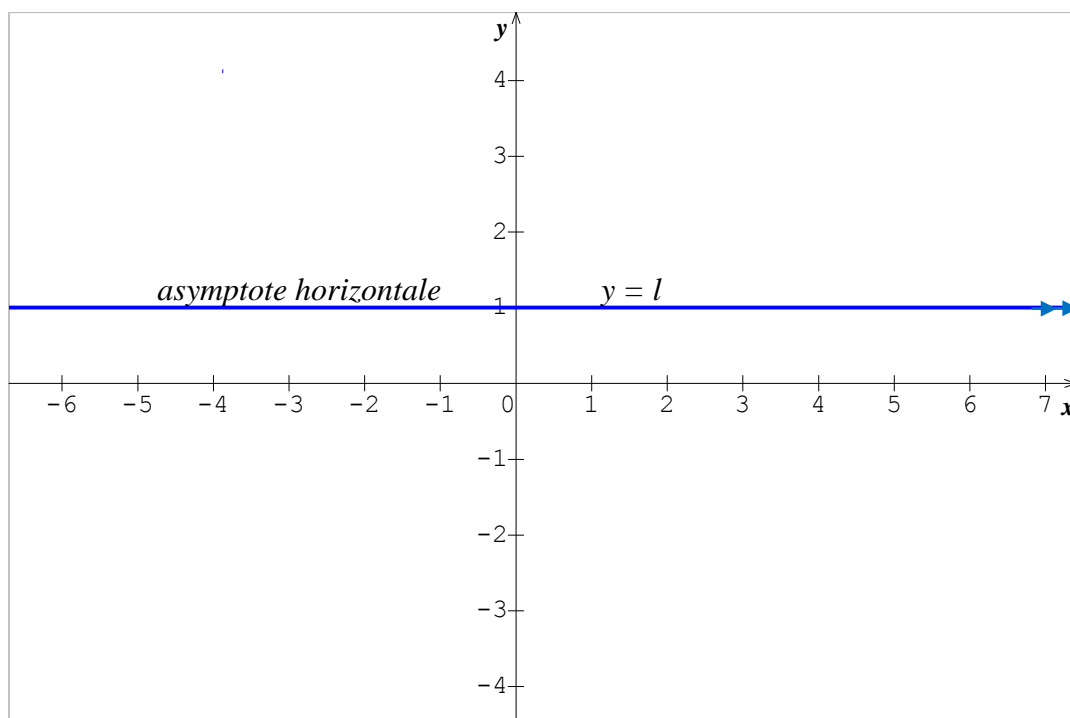
D'où  $\forall x \in [4 ; 5]$ , on a :  $\left|f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x - 5|$

### 9) Etude des branches infinies :

#### Notion d'asymptotes :

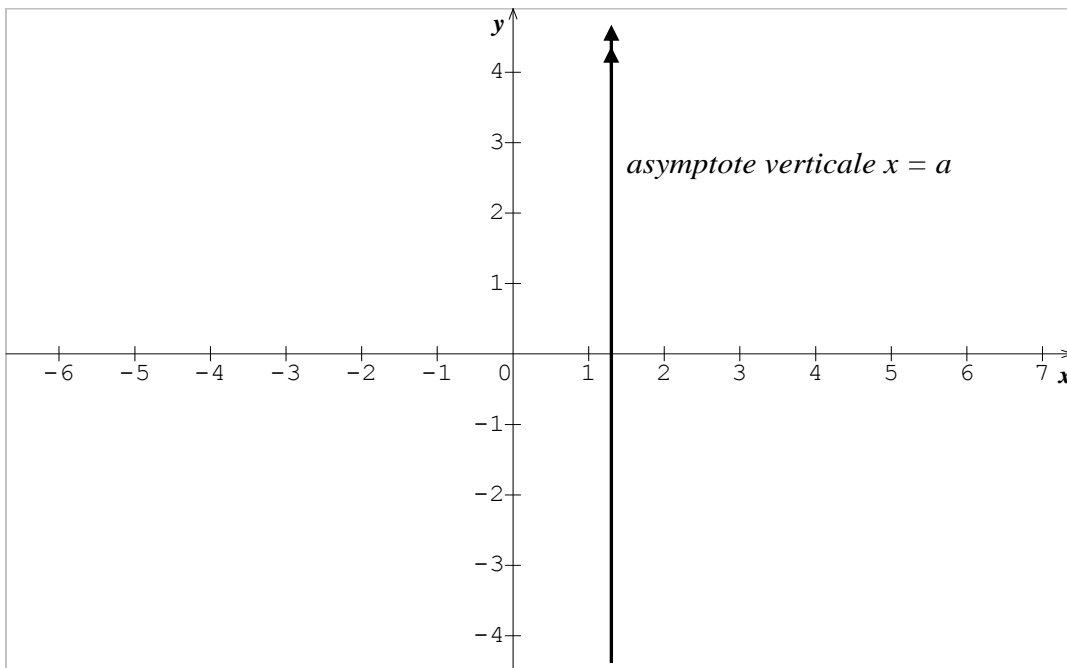
- Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  ou  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  (alors la droite d'équation  $y = l$ )

est asymptote **horizontale** à la combe représentative de  $f$ .



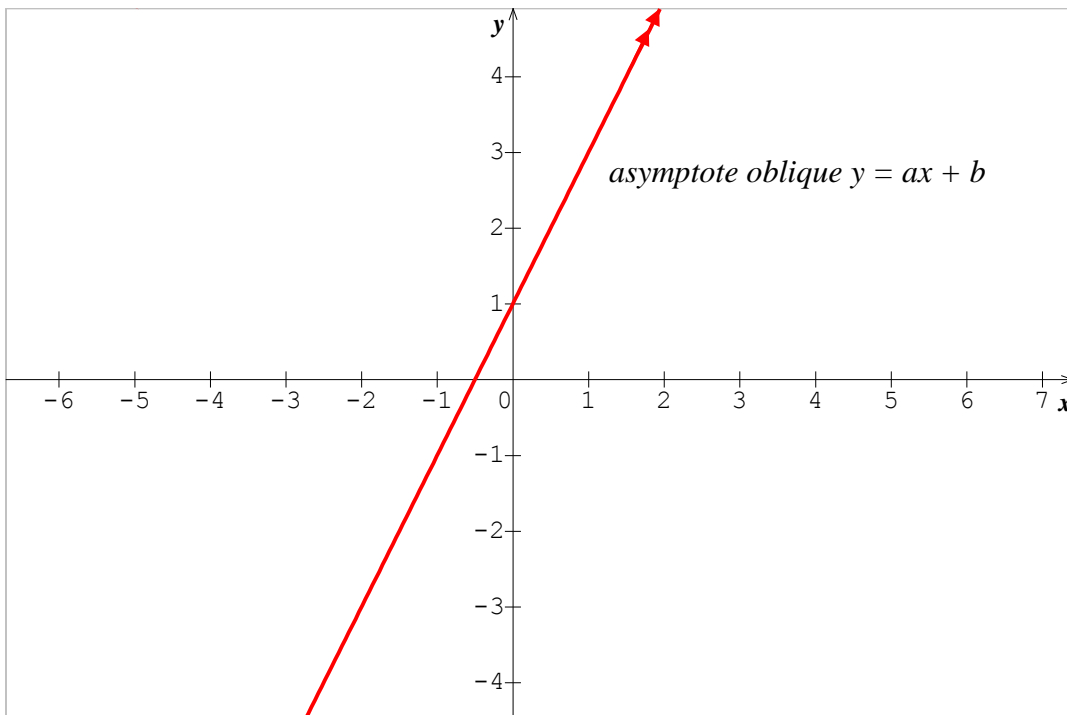
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  (alors la droite d'équation  $x = a$ )

est asymptote **verticale** à la combe représentative de  $f$ .



- Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

(Alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote **oblique** à la combe représentatives de  $f$ ).



### Recherche d'asymptote oblique :

Il est évident de dire que si  $\lim f(x) = \pm \infty$ , alors on a une possibilité d'asymptote oblique.

$$x \rightarrow \pm \infty$$

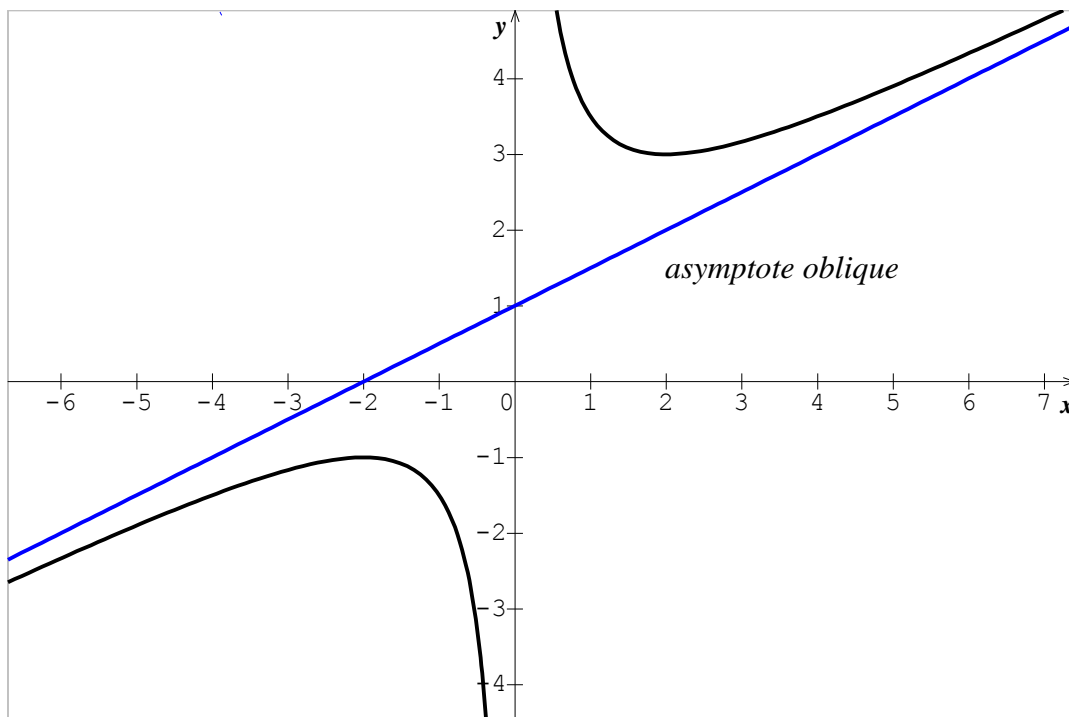
Ainsi pour chercher l'asymptote oblique, on procède comme suite :

- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = a$

et  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) - ax = b$

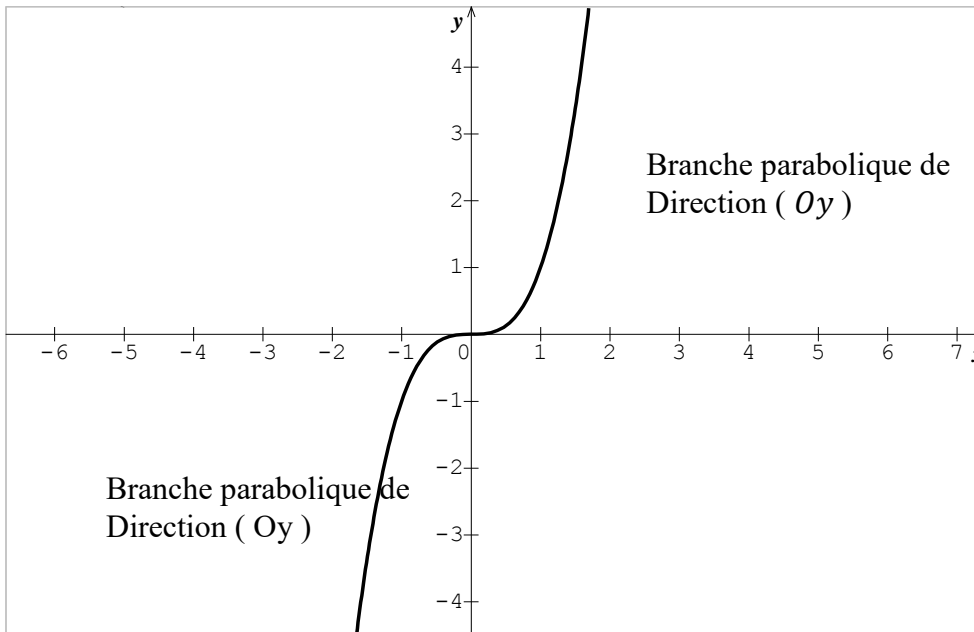
alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est

Asymptote oblique à la courbe (C) de  $f$ .



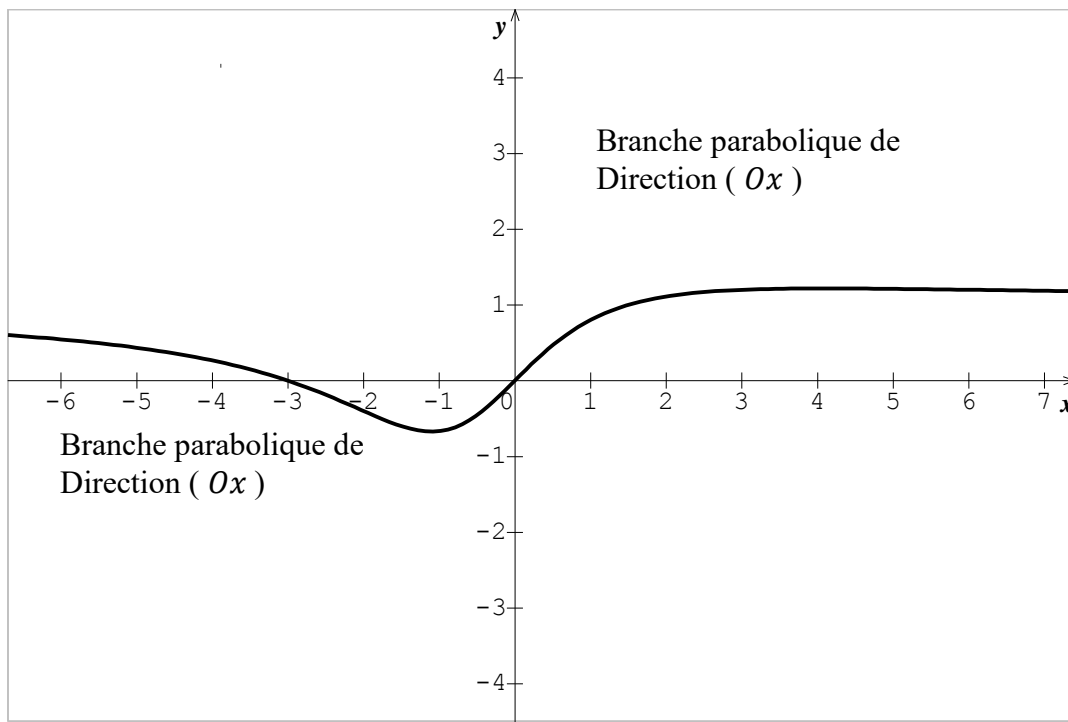
• Si  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm \infty$

alors la courbe (C) de f admet l'axe (y'oy) comme branche parabolique.



Si  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

alors la courbe (C) de f admet l'axe (x'ox) comme branche parabolique.



**N.B :**

Si  $f$  est une fonction rationnelle dont le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur d'une seule unité, alors on peut écrire  $f(x)$  sous la forme :

$$f(x) = Q(x) + \frac{R}{D(x)} \text{ ( en effectuant une division euclidienne ) .}$$

$Q(x) = y$  est le quotient et est aussi appelé Asymptote oblique.

$D(x)$  = est le diviseur

$R$  = est le reste.

### Cas Particulier d'asymptote

Toutes fonctions de la forme :

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} \text{ ou } f(x) = \sqrt{|ax^2 + bx + c|}; (\text{avec } a \neq 0 \text{ et } a > 0)$$

Admet deux asymptotes :

- L'une en  $-\infty$  d'équation :  $y = -\sqrt{a} \left( x + \frac{b}{a} \right)$

- L'une en  $+\infty$  d'équation :  $y = \sqrt{a} \left( x + \frac{b}{a} \right)$

#### 10) Position relative d'une courbe (Cf) et de son asymptote oblique.

Pour déterminer la position relative d'une courbe (Cf) et de son asymptote oblique ( $\Delta$ ), on étudie le signe de :  $f(x) - y$ . Ainsi :

- Si  $f(x) - y < 0$ , alors la courbe (Cf) est en dessous de la droite ( $\Delta$ ).
- Si  $f(x) - y > 0$ , alors la courbe (Cf) est au dessus de la droite ( $\Delta$ ).
- Si  $f(x) - y = 0$ , alors la courbe (Cf) et la droite ( $\Delta$ ) sont confondues.

### Exemple

1- On donne  $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$

a) Démontrer que la droite ( $\Delta$ ) :  $y = x + 2$  est asymptote oblique à la courbe (Cf) de  $f$  en  $+\infty$ .

b) Etudier la position de la courbe (Cf) et ( $\Delta$ ).

2- On donne  $f(x) = \frac{2x - 4}{x - 3}$

a) Déterminer l'ensemble de définition Df de  $f$ .

b) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de Df.

c) En déduire l'équation des asymptotes à la courbe (Cf).

### Solution

1- On donne  $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$

a) Démontrons que la droite  $(\Delta) : y = x + 2$  est asymptote oblique à la courbe  $(Cf)$  de  $f$  en  $+\infty$ .

la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x + 2$  est asymptote oblique à la courbe  $(Cf)$  de  $f$  en  $+\infty$  si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3}{x-2} - (x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2-3) - (x+2)(x-2)}{x-2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$

Alors la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x + 2$  est asymptote oblique à la courbe  $(Cf)$  de  $f$  en  $+\infty$

b) Etudions la position de la courbe  $(Cf)$  et de la droite  $(\Delta)$ .

Pour cela étudions le signe de  $f(x) - y$ .

$$\text{Posons } f(x) - y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

D'où le tableau de signe est le suivant :

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$x - 2$	$-$	$0$	$+$
$f(x) - y$	$(\Delta) / (C)$	$(C) / (\Delta)$	

Alors  $\forall x \in ]-\infty ; 2[ ; f(x) - y < 0 \Rightarrow$

$\forall x \in ]-\infty ; 2 [$  ; la courbe ( C ) est en dessous de la droite (  $\Delta$  ).

Et

$\forall x \in ]2 ; +\infty [$  ;  $f(x) - y > 0 \Rightarrow$

$\forall x \in ]2 ; +\infty [$  ; la courbe ( C ) est au dessus de la droite (  $\Delta$  ).

2- On donne  $f(x) = \frac{2x - 4}{x - 3}$

a) Déterminer l'ensemble de définition Df de f.

$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R}; x - 3 \neq 0\} \Rightarrow D_f = D_f = \mathbb{R} - \{3\} = ]-\infty ; 3[ \cup ]3 ; +\infty [$$

b) Calculons les limites aux bornes de Df

$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
$x - 3$		0	
		-	+

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 4}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 4}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x - 4}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x - 4}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{0^+} = +\infty$$

c) En déduisons les asymptotes à la courbe ( C ) de f.

Puisque  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \end{cases}$  Alors la droite d'équation  $x = 2$  est asymptote verticale à  $(Cf)$ .

Puisque  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{cases}$  Alors la droite d'équation  $y = 3$  est asymptote horizontale à  $(Cf)$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$  Alors la droite d'équation  $y = 3$  est asymptote oblique à  $(Cf)$ .

### 11) Intersection de la courbe avec les axes du repère :

#### a) Intersection de la courbe avec l'axe des abscisses (ox)

Pour trouver le ou les points d'intersection de la courbe  $(Cf)$  avec l'axe des abscisses, on résout l'équation  $f(x) = 0$ . Ainsi la courbe passe par les solutions de l'équation  $f(x) = 0$  sur l'axe  $(ox)$ .

#### b) Intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées (oy)

Pour trouver le ou les points d'intersection de la courbe  $(Cf)$  avec l'axe des ordonnées, on calcule l'ordonnée  $y = f(o)$ . Ainsi la courbe passe par  $y = f(o)$  sur l'axe des  $(oy)$ .

### 12) Plan d'étude d'une fonction :

Pour étudier une fonction  $f$  et représenter graphiquement sa courbe  $(Cf)$  dans le repère on adopte le plan suivant :

- On donne le domaine de définition ou ensemble de définition noté  $D_f$
- On calcule les limites aux bornes de  $D_f$
- On étudie la parité et la périodicité de  $f$
- On étudie la continuité de  $f$
- On étudie le sens de variation de  $f$  qui consiste à calculer la dérivée et à étudier son signe
- On dresse le tableau de variation qui est le résumé de toutes les études précédentes
- On peut chercher les points d'intersections éventuels avec les axes de coordonnées

#### Exemple

Etudier et représenter la courbe (C) de la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

1)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

2) Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x}$  et (C) sa courbe.

a) Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .

b) Etudier la parité et la périodicité de  $f$ . En déduire qu'il suffit d'étudier la fonction  $f$  sur un nouvel ensemble d'étude  $D_E$

c) Montrer que  $\forall x \in D_f$  on a :  $f'(x) = \frac{3(1 - 2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$

d) Etudier le signe de  $(1 - 2\cos x)$  sur  $D_E$  puis en déduire les variations de  $f$  sur  $D_E$ .

e) Tracer la courbe (C).

### Solution

1) Etudions et représentons la courbe (C) de la fonction  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} = ]-\infty ; -1[ \cup ]-1 ; +\infty [$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$x + 1$	$-$	$\emptyset$	$+$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

---


$$U(x) = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow U'(x) = 2x + 2$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}, \quad V(x) = x + 1 \quad \Rightarrow V'(x) = 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(U'(x))(V(x)) - (V'(x))(U(x))}{(V(x))^2} = \frac{(2x+2)(x+1) - (1)(x^2+2x+2)}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \quad \text{or } \forall x \in Df, (x+1)^2 > 0 \text{ alors le signe de } f'(x) \text{ dépend}$$

donc du signe du numérateur  $x^2 + 2x$ .

Posons  $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0$  ou  $x = -2$

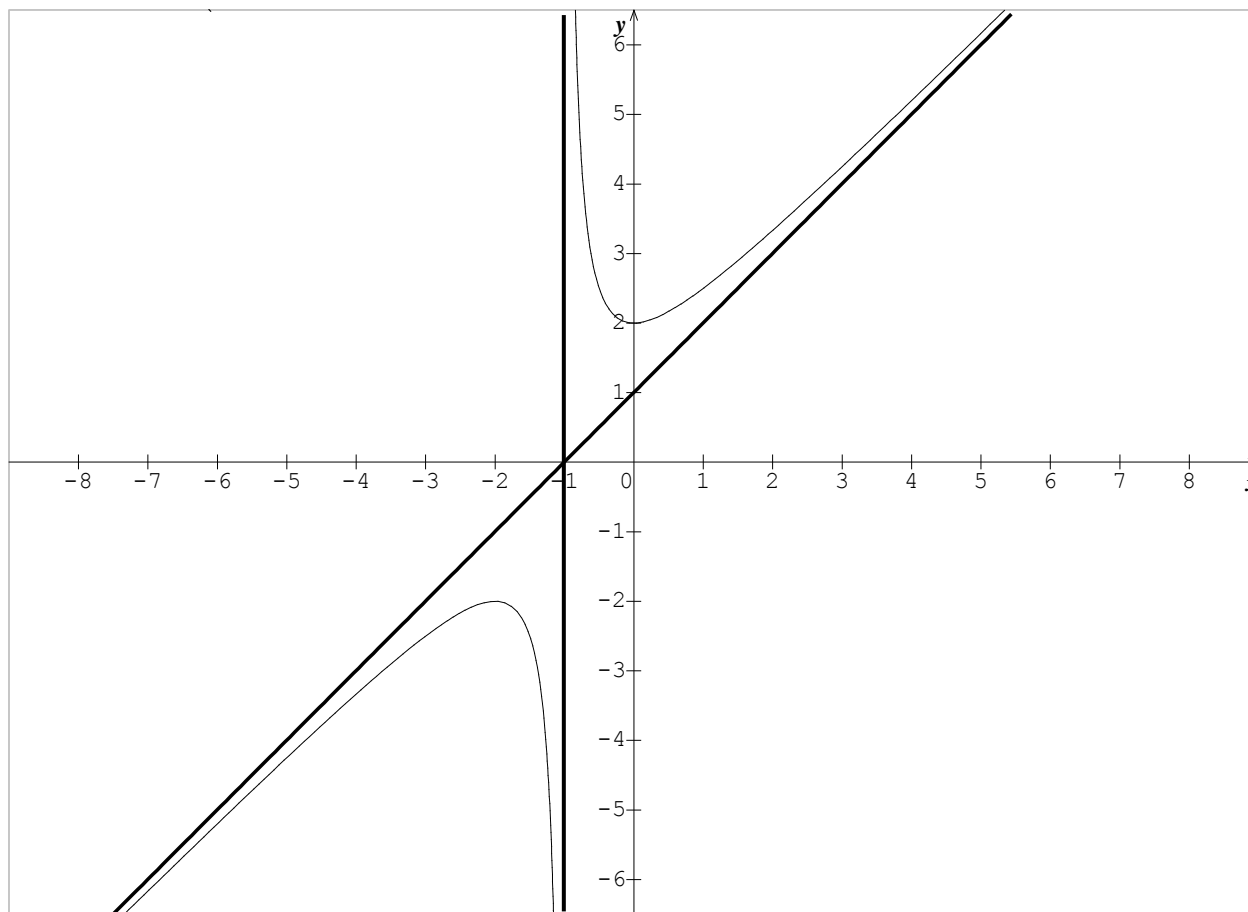
D'où le tableau de variation de  $f$  est le suivant :

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$0$	$+\infty$					
$f(x)$	+	0	-	-	0	+	+			
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-2$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$2$	$\nearrow$	$+\infty$

$x = -1$  est asymptote verticale à (C).

$y = x + 1$  est asymptote oblique à (C) car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$ .

Ainsi on a la représentation suivante :



Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x}$  et (C) sa courbe

a) Déterminons l'ensemble de définition  $D_f$

$$D_f = \{x/x \in \mathbb{R}; \cos^3 x \neq 0\}$$

$$\cos^3 x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \cos \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow D_f = \left] -\infty; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2} + 2k\pi; +\infty \right[$$

b) Etude de la parité et de la périodicité de  $f$

$$\text{- Partie : } f(-x) = \frac{1 + \cos(-3x)}{\cos^3(-x)} = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x} = f(x)$$

Alors  $f$  est paire et admet donc l'axe  $y'oy$  comme axe de symétrie.

- Périodicité :  $T_1 = \frac{2\pi}{3}$  et  $T_2 = \frac{2\pi}{1} \Rightarrow T = T_1 \cap T_2 = 2\pi$

Alors l'étude peut donc se faire sur le domaine  $\left[-\frac{T}{2} ; \frac{T}{2}\right]$

$\Leftrightarrow D_E = \left[-\frac{2\pi}{2} ; \frac{2\pi}{2}\right] \Rightarrow D_E = [-\pi ; \pi]$

Et puisque la fonction est paire alors nous pouvons résumer le domaine d'étude à  $[0 ; \pi]$   
D'où  $D_E = D \cap [0 ; \pi]$

c) Montrons que  $\forall x \in Df$ , on a :  $f'(x) = \frac{3(1-2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$

$$f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x} \left\{ \begin{array}{l} u = 1 + \cos 3x \Rightarrow u' = -3\sin 3x \\ v = \cos^3 x \Rightarrow v' = -3\sin x \cos^2 x \end{array} \right.$$

$$f'(x) = \frac{-3\cos^3 x \cdot \sin 3x + 3\sin x \cos^2 x (1 + \cos 3x)}{\cos^6 x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3\cos^2 x (-\cos x \sin 3x + \sin x + \sin x \cos 3x)}{\cos^6 x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3(\sin x \cdot \cos 3x - \sin 3x \cos x + \sin x)}{\cos^4 x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3(\sin(x-3x) + \sin x)}{\cos^4 x} = \frac{3(-2\cos x + 1)\sin x}{\cos^4 x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3(-2\cos x \sin x + \sin x)}{\cos^4 x} = \frac{3(-2\cos x + 1)\sin x}{\cos^4 x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3(1-2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$$

d) Etude du signe de  $(1 - 2\cos x)$  sur  $D_E$  puis de variations de  $f$ .

$1 - 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ou  $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

D'autre par  $\forall x \in [0 ; \pi]$  on a :  $\sin x > 0$  et  $\cos^4 x > 0$   
Donc le signe dépend de  $1 - 2\cos x$

D'où le tableau de variation de  $f$  est le suivant :

$x$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	2	0	$+\infty$	0

Détermination des coordonnées des points d'intersections de la courbe ( C ) avec l'axe des abscisses puis construction de la courbe ( C ) de  $f$ .

-  $(C) \cap (ox) \Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = -1$

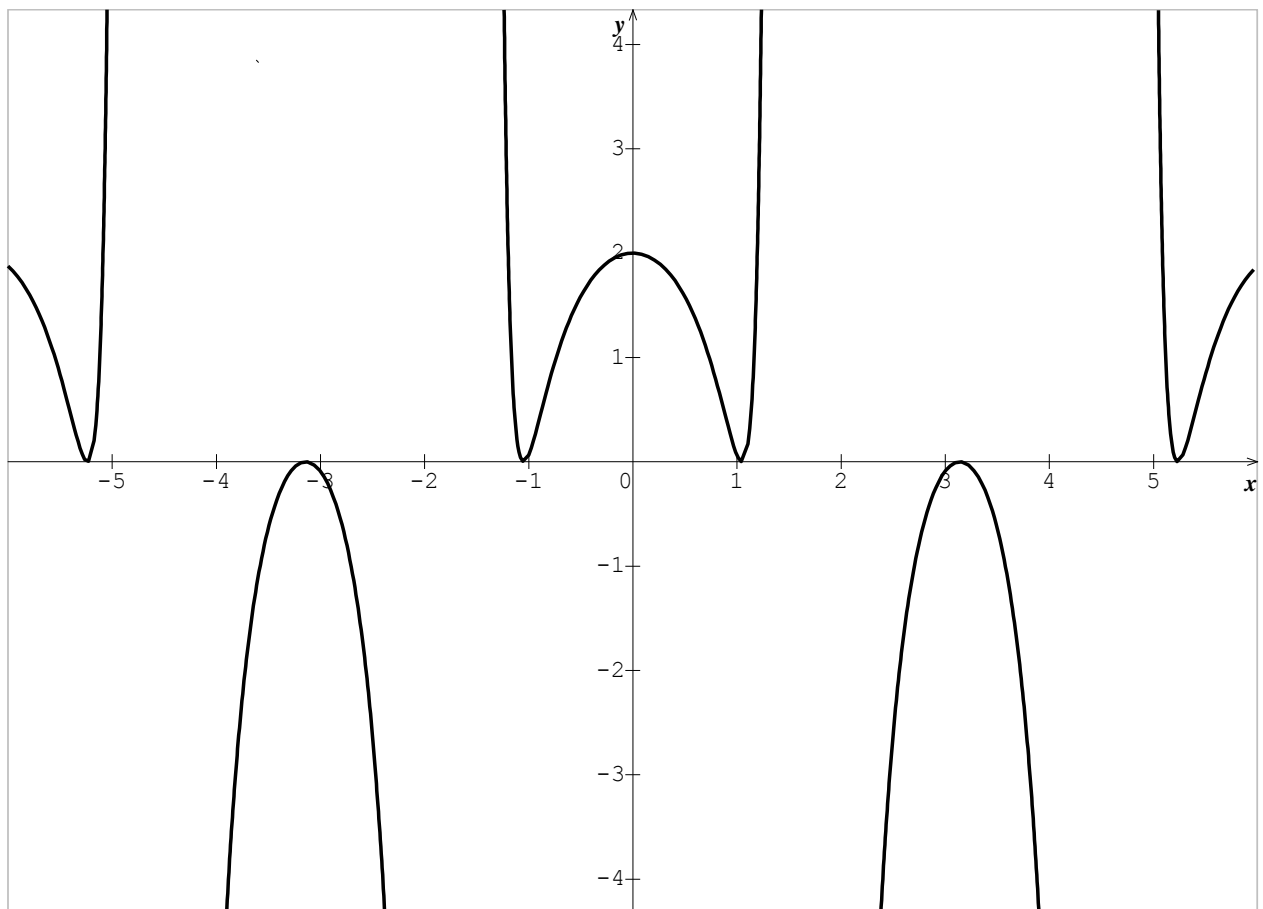
$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos \pi \Leftrightarrow 3x = \pi \text{ ou } 3x = -\pi \Rightarrow$

Donc (C) coupe l'axe (ox) en  $-\frac{\pi}{3}$  ou  $\frac{\pi}{3}$

-  $(C) \cap (oy) \Rightarrow y = 2$

Donc (C) coupe l'axe oy en 2

Ainsi on a la représentation suivante :



# EXERCICES

## Limites

### Limites en un point $x_0$

1 Calculer les limites suivantes aux points  $x_0$  donnés :

$$\begin{aligned} \text{a- } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 8}{-x + 2}; & \quad \text{b- } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}; & \quad \text{c- } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x + 5}{x^2 - x - 2}; & \quad \text{d- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \\ \text{e- } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}; & \quad \text{f- } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - x - 1}; & \quad \text{g- } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} + 1}{x + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

2 Calculer les limites suivantes aux points  $x_0$  donnés :

$$\begin{aligned} \text{a- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}; & \quad \text{b- } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1 - \sin x}; & \quad \text{c- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}; & \quad \text{d- } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{1 - 2\cos x} \\ \text{e- } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}; & \quad \text{f- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan x}; & \quad \text{g- } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{3x - \pi}; & \quad \text{h- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x - \sin 2x}{5x} \\ \text{i- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x^2)\sin x - x}{x^3}; & \quad \text{j- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} \end{aligned}$$

3 On se propose d'étudier la limite en  $\frac{\pi}{2}$  de la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}} \quad \text{pour } x \neq \frac{\pi}{2}.$$

1) Vérifier que l'on ait en présence d'une forme indéterminée.

En considérant l'accroissement moyenne de la fonction Cosinus en  $\frac{\pi}{2}$ , déterminer la limite ci-dessus.

2) Par une méthode analogue, étudier les limites des fonctions en  $x_0$  dans les cas suivants :

a-  $g(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$  en  $x_0 = 0$  ; b-  $h(x) = \frac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$  en  $x_0 = \frac{\pi}{4}$

## Limites à l'infinie

4 Calculer les limites suivantes à l'infinie :

a-  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8}{x+1-x^2}$  ; b-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}-1}{x+2}$  ; c-  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+2}{5x^2-x}$  ; d-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

e-  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+3}{\sqrt{4x^2+x-5}}$  ; f-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}$  ; g-  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-|x|}{2x-2}$

h-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1-x+\sqrt{x^2+x+1}$  ; i-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+\sin x}{x+1}$  (théorème des gendarmes)

## Limites et asymptotes

5 Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessous (on donnera ci-possible les éventuelles asymptotes ou possibilité d'asymptotes)

a-  $f(x) = \frac{x^2+5}{-x+2}$  ; b-  $f(x) = \frac{-x^2+5}{x^2+5x-6}$  ; c-  $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{-x}$  ; d-  $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$

e-  $f(x) = \sqrt{3x^2-2x-1}$  ; f-  $f(x) = \frac{\sqrt{-x+2}}{-x^2+2x-1}$  ; g-  $f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$

6 Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$ .

On note  $(C_f)$  sa courbe dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

a- Étudier les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . La courbe  $(C_f)$  admet-elle une asymptote horizontale ?

b- Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = -2x - \frac{1}{2}$  est asymptote à  $(C_f)$  en  $-\infty$ .

7 Soit la fonction  $f$  définie par :  $g(x) = ax + b - \sqrt{x^2+1}$ .

On note  $(C_g)$  sa courbe dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

a- Étudier la limite de  $g$  en  $-\infty$ . (On discutera suivant les valeurs de  $a$  et  $b$ ).

b- Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que la droite  $(D)$  d'équation  $y = 2x + 2$  soit asymptote à la courbe représentative de  $f$  en  $-\infty$ .

# Continuités

## Continuité en un point $x_0$

**8** Etudier la continuité des fonctions suivantes aux points  $x_0$  donnés :

$$\text{a- } \begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \\ f(2) = 0 \end{cases} \text{ et } x_0 = 2 \quad ; \quad \text{b- } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|} \\ f(1) = 2 \end{cases} \text{ et } x_0 = 1$$

$$\text{c- } \begin{cases} f(x) = x^2 - x + 1 \text{ si } x \in [0 ; 1] \\ f(x) = \frac{2x-1}{x} \text{ si } x \in ]1 ; 3] \end{cases} \text{ et } x_0 = 1 \quad \text{d- } \begin{cases} f(x) = \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ f(2) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{e- } \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2\cos x} - 1}{2\cos 2x + 1} \text{ si } x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right] - \left\{\frac{\pi}{3}\right\} \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} \text{ et } x_0 = 1 \end{cases}$$

$$\text{f- } \begin{cases} f(x) = -x^2 - 2x + 5 \text{ si } x \in ]-\infty ; 1] \\ f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} \text{ si } x \in [1 ; 3] \\ f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} \text{ si } x \in [3 ; +\infty[ \end{cases}$$

## Continuité et condition de faisabilité

**9** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \text{ si } x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ f(2) = a \end{cases}$$

Déterminer la valeur de  $a$  pour que  $f$  soit continue en  $x_0 = 2$

**10** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + ax \text{ si } x \in ]-\infty ; -1[ \\ f(x) = 2x - 1 \text{ si } x \in ]-1 ; 1[ \\ f(x) = b(x^2 - 1) \text{ si } x \in ]1 ; +\infty[ \end{cases}$$

- Déterminer  $a$  pour que  $f$  soit continue au point  $x_0 = -1$
- Pouvez-vous déterminer la valeur de  $b$  pour que  $f$  soit continue au point  $x_0 = 1$  ?

## Prolongement par continuité

- 11** Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction  $f$  et déterminer (s'il existe) le prolongement par continuité de cette fonction en  $x_0$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ x_0 = 0 \end{array} \right. ; \text{ b) } \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{\lg x}{x} \\ x_0 = 0 \end{array} \right. ;$$

- 12** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies respectivement par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$$

- a- Déterminer les ensembles de définitions  $Df$  et  $Dg$  respectivement des fonctions  $f$  et  $g$ .  
b- Vérifier que la fonction  $g$  est le prolongement par continuité de la fonction  $f$  en  $x_0 = 0$ .

- 13** On considère la fonction  $g$  de la variable réelle  $x$  définie par  $g(x) = \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$
- 1) Déterminer son ensemble de définition  $Dg$ .
  - 2) Montrer que  $g$  admet en 2 un prolongement par continuité que l'on notera par  $h$ .
  - 3) Montrer que  $h$  est dérivable en 2 puis donner l'équation de la tangente à la courbe (C) de  $h$  au point d'abscisse 2.

# Dérivabilité

## Dérivabilité en un point $x_0$

**14** Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes aux points  $x_0$  donnés :

$$\mathbf{a} - \begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2+x-6} & \text{et } x_0 = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases} ; \quad \mathbf{b} - \begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|} & \text{et } x_0 = 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

$$\mathbf{c} - \begin{cases} f(x) = x^2 - x + 1 & \text{si } x \in [0 ; 1] \\ f(x) = \frac{2x-1}{x} & \text{si } x \in ]1 ; 3] \end{cases} \text{ et } x_0 = 1 \quad \mathbf{d} - \begin{cases} f(x) = \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\mathbf{e} - \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2\cos x} - 1}{2\cos 2x + 1} & \text{si } x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right] - \left\{\frac{\pi}{3}\right\} \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} & \text{et } x_0 = 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{f} - \begin{cases} f(x) = -x^2 - 2x + 5 & \text{si } x \in ]-\infty ; 1] \\ f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} & x \in [1 ; 3] \\ f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} & x \in [3 ; +\infty[ \end{cases}$$

## Dérivabilité et condition de faisabilité

**15** Déterminer les réels  $a$ , et  $b$  pour que  $f$  soit continue et dérivable aux points  $x_0$  donnés :

$$\mathbf{a} - \begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2x+b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \mathbf{b} - \begin{cases} f(x) = 2ax^2 - x + b & \text{si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{3b}{x+3} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

$$\mathbf{c} - \begin{cases} f(x) = ax^2 - 3x + 4 & \text{si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{x+b}{x+3} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\mathbf{c} - \begin{cases} f(x) = \frac{x(x+1)}{(x+2)^2} & \text{si } x \geq -1 \\ f(x) = 2x + a & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Pour quelle valeur de  $a$  la fonction  $f$  est-elle continue au point  $-1$  ?  
Pour cette valeur, étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  au point  $-1$ .

## Application de la dérivée

**16** Déterminer une équation de la tangente en  $M_o(x_o ; f(x_o))$  à la courbe (C) de  $f$  dans les cas suivants :

a)  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3$  et  $x_o = -2$  ; b)  $f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$  et  $x_o = 0$

c)  $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$  et  $x_o = 3$  ; d)  $f(x) = \frac{\text{tang}x}{x}$  et  $x_o = 0$

**17** Déterminer la fonction dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

a)  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3$  ; b)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$  ; c)  $f(x) = (-x^2 + 2x)^3$

d)  $f(x) = \sqrt{2x^3 - 4x^2 + 1}$  ; e)  $f(x) = (1 - 3x^2)(-x^2 + 1)$  ; f)  $f(x) = \text{Cos}^3x$

g)  $f(x) = (x - 1)\sqrt{x^3 - x^2}$  ; h)  $f(x) = \text{Sin}(3x - 1)^4$  ; i)  $f(x) = \text{Sin}^4(3x - 1)$

**18** Soit la fonction numérique  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 - 2x + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

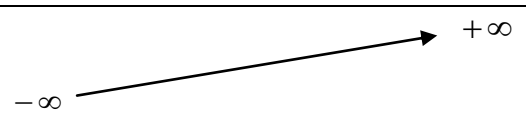
- 1) Prouver que  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$
- 2) a) Dresser le tableau de signe du trinôme  $x^2 - 2x - 3$  en y plaçant le réel 1  
b) En déduire pour tout  $x \geq 1$  une écriture de  $f(x)$  sous le symbole de la valeur absolue.
- 3) a) Etudier la dérivabilité de  $f$  au point  $x_o = 3$ . Que dira-t-on pour la dérivabilité de  $f$  au point 3 ?  
b) Donner une équation de la tangente à gauche et à droite de 1. Que peut-on conclure quant à la dérivabilité de  $f$  en 1 ?
- 4) a) Etudier le signe de  $f'$  sur chacun des intervalles sur lequel  $f$  est dérivable.  
b) Préciser les ordonnées de chaque extremum de  $f$ .
- 5) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .

# Etudes de fonctions

## Analyse et interprétation d'un tableau de variation.

- 19 Analyser puis interpréter chacun des tableaux de variations suivants afin de préciser :
- les domaines de définition.
  - les limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes et possibilités d'asymptotes.
  - Donner l'allure de la courbe ( $C_f$ ) dans chaque cas.

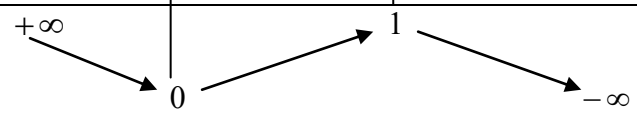
1)  $f$  est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

$x$	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	

**De plus :**

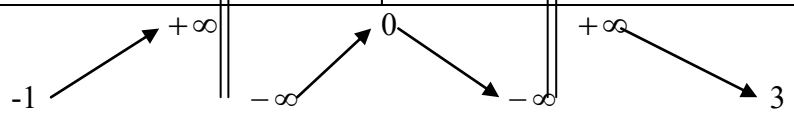
- La courbe ( $C_f$ ) admet l'origine du repère comme centre de symétrie.
- La courbe ( $C_f$ ) admet l'axe ( $y'Oy$ ) comme branche parabolique.

2)  $g$  est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

$x$	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$					

**De plus :** La courbe ( $C_g$ ) admet l'axe ( $y'Oy$ ) comme branche parabolique.

3)  $h$  est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

$x$	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
$h'(x)$	+		+	0	-		-
$h(x)$							

4)  $p$  est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$1$	$+\infty$						
$p'(x)$		$-$	$0$	$+$	$-$	$0$	$+$				
$p(x)$	$2$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$	$+\infty$	$\parallel$	$+\infty$	$\searrow$	$1$	$\nearrow$	$2$

20

Dresser le tableau de variation de la fonction numérique donnée partant de ses renseignements fournis dans les cas suivants :

1) Pour  $f$  :

- $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que l'équation  $f'(x) = 0$  admet les solutions  $x = -1$  et  $x = \frac{3}{2}$
- $f$  n'est croissante qu'entre les zéros de sa dérivée  $f'$  et les points  $E_1\left(\frac{3}{2}; 4\right)$  et  $E_2\left(-1; -\frac{5}{2}\right)$  sont ses extremums
- les droites  $y = -2$  et  $y = 3$  sont ses asymptotes respectives en  $-\infty$  et  $+\infty$

2) Pour  $g$  :

- $g$  est définie sur  $] -\infty ; 0 ] \cup \left[ \frac{5}{2} ; +\infty [$  et admet des demi tangentes verticales aux points d'abscisses  $0$  et  $\frac{5}{2}$
- $g$  est strictement décroissante sur son ensemble de dérivabilité.
- la droite  $y = -x$  est à la fois asymptote oblique en  $-\infty$  et  $+\infty$
- les points de coordonnées  $(0 ; -3)$  et  $\left(\frac{5}{2} ; 1\right)$  sont sur la courbe de  $g$ .

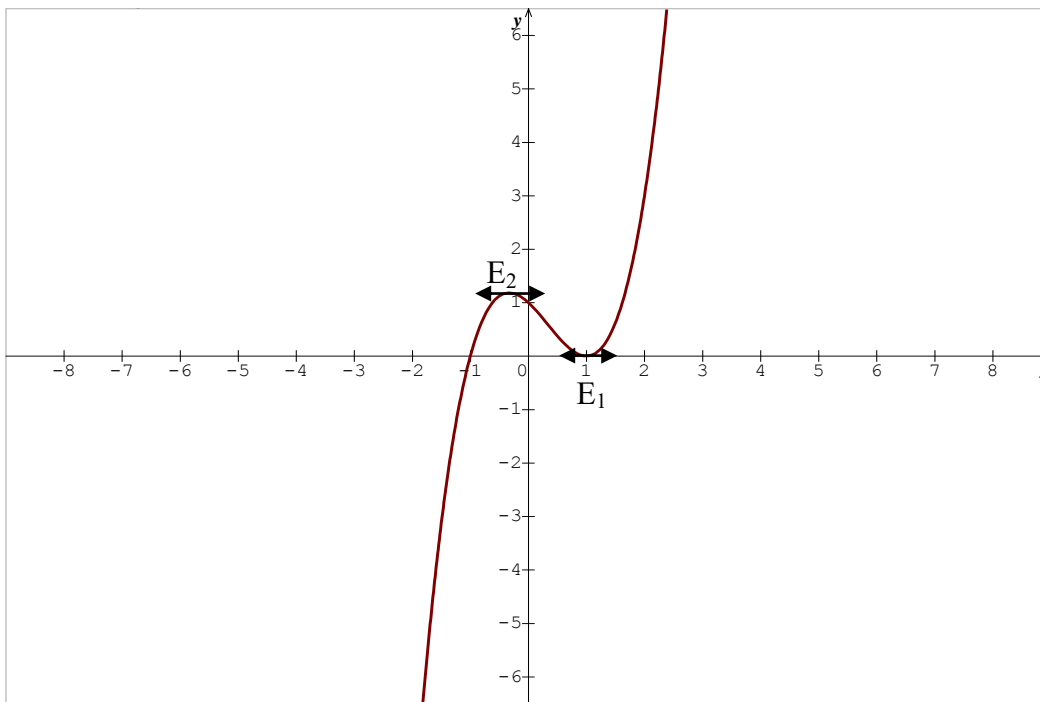
3) Pour  $h$  :

- $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R} - \{0 ; 2\}$  et continue sur  $\mathbb{R}$ .
- le point de coordonnées  $(0,3 ; 0,4)$  est l'extremum maximum absolue de la courbe  $(C_h)$  et  $h$  est croissante sur  $[0 ; 0,3] \cup [2 ; +\infty[$
- les droites d'équations  $y = -1$  et  $y = -2x + 1$  sont asymptotes de  $(C_h)$  respectivement en  $-\infty$  et  $+\infty$
- les points de coordonnées  $(0 ; 0)$  ;  $(1 ; 0)$  ; et  $(2 ; -2)$  ; appartiennent à  $(C_h)$

## Analyse et interprétation d'un graphique.

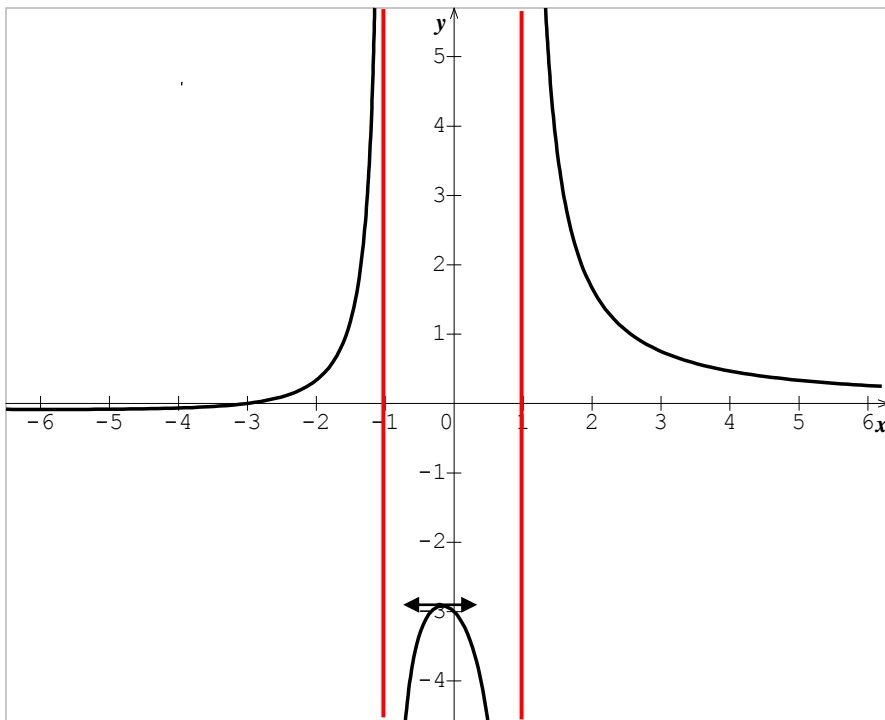
- 21** a- Analyser chacune des courbes représentatives données dans un repère orthonormé du plan afin d'établir son tableau de variation.  
b- Déterminer les réels  $a$  ;  $b$  ;  $c$ ..... en utilisant le graphique.

1)  $f$  est la fonction dont la courbe est donnée ci-dessous par :  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

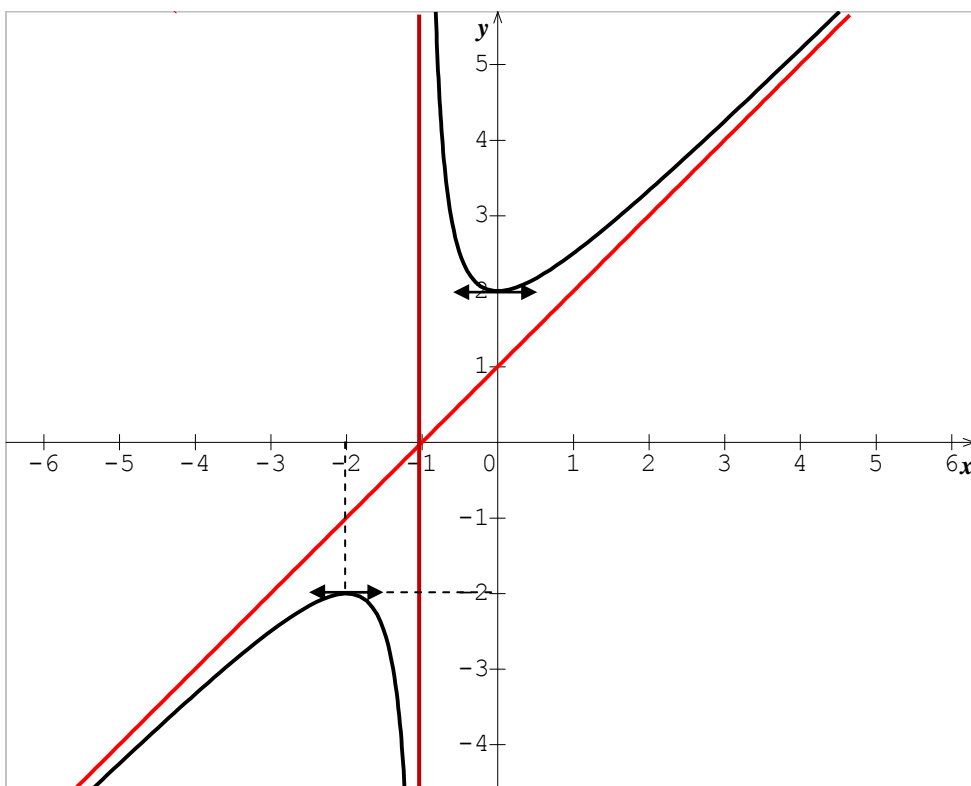


**De plus :**  $E_1(1 ; 0)$  et  $E_2\left(\frac{-1}{3} ; \frac{32}{27}\right)$  sont les sommets de la courbe (Cf)

2) La fonction donnée est  $g$  telle que :  $g(x) = \frac{ax + b}{cx^2 + d}$



3) La fonction donnée est  $h$  telle que :  $h(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$



## Fonctions d'initialisations.

**22** Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$ .
- 2) Calculer les limites aux bornes de  $D_f$ .
- 3) Déterminer les réels  $a$ ;  $b$  et  $c$  tel que  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$
- 4) a- Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = ax + b$  est asymptote à la courbe  $C_f$ .  
b- Déterminer la position de la courbe  $C_f$  et de la droite  $(D)$ .
- 5) Montrer que le point  $I\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$  est centre de symétrie pour la courbe  $C_f$ .
- 6) Déterminer une équation de la tangente à la courbe  $C_f$  au point d'abscisse  $-2$
- 7) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction  $f$  au point d'abscisse nul.
- 8) Calculer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  puis dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 9) Construire la courbe  $C_f$  et la droite  $(D)$  dans le même repère.

**23** Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer les réels  $a$ ;  $b$ ;  $c$  et  $d$  tel que :
  - a- La courbe  $C_f$  admet comme asymptote les droites  $x = 2$  et  $x = -1$ .
  - b- La courbe  $C_f$  passe par le point  $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$  et admet en ce point une tangente de coefficient directeur  $-5$ .
- 2) Etudier la fonction  $f$  puis représenter sa courbe  $C_f$  dans le repère.

**24** Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{cx^2 + dx - 2}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer les réels  $a$ ;  $b$ ;  $c$  et  $d$  tel que :
  - a- La courbe  $C_f$  admet comme asymptote les droites  $x = 2$ .
  - b- La courbe  $C_f$  n'admet pas d'asymptote parallèle à l'axe  $(Ox)$ .
  - c- La courbe  $C_f$  passe par le point  $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$  et admet en ce point une tangente de coefficient directeur  $2$ .
- 2) Etudier la fonction  $f$  puis représenter sa courbe  $C_f$  dans le repère.

**25**

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$

Soit  $Cf$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer les réels  $a; b; c; m; n$  et  $p$  tel que :
  - a- La courbe  $Cf$  admet comme asymptote les droites  $x = 2$  et  $x = -1$ .
  - b- La courbe  $Cf$  passe par le point  $A\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$  et admet en ce point une tangente de coefficient directeur  $-3$ .
- 2) Etudier la fonction  $f$  puis représenter sa courbe  $Cf$  dans le repère.

**26**

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{2(x^2 - 1)}$

Soit  $Cf$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Etudier les variations de  $f$ .
- 2) Préciser les asymptotes à la courbe  $Cf$ .
- 3) Soit  $\Delta$  l'asymptote non parallèle aux axes de coordonnées, déterminer la position de  $Cf$  par rapport à  $\Delta$  dans l'intervalle  $]-1; 1[$ .
- 4) Construire  $Cf$ .

**27**

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x}$

Soit  $Cf$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Etudier et construire la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .
- 2) Montrer que le point d'intersection des asymptotes est un centre de symétrie de  $(Cf)$
- 3) Discuter graphiquement suivant les valeurs de  $m$  l'existence et le signe des racines de l'équation :  $x^2 + 2(1 - m)x + 4 = 0$
- 4) Montrer que la restriction  $h$  de  $f$  à l'intervalle  $I = [2; +\infty[$  est une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera. Construire la courbe représentative de la fonction réciproque  $h^{-1}$  de  $h$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . puis calculer  $(h^{-1})'\left(\frac{7}{2}\right)$ .

## Fonctions dans les cas pratiques.

**28** Une entreprise fabrique et commercialise chaque mois  $x$  objets dont le coût total de production, exprimé en milliers de francs est donnée par  $C(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 200$  avec  $x \in [5 ; 60]$ .

On admet que toute la production est vendue chaque mois. On rappelle que le coût moyen unitaire de fabrication d'un objet est donné par  $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$ .

- 1) Calculer  $C'_m(x)$  puis en déduire le tableau de variation de  $C_m(x)$ .
- 2) Pour quel nombre d'objets le coût moyen unitaire est il minimum ?

**29** La production exprimée en tonne d'une entreprise sur les cinq dernières années est donnée par la fonction suivante  $t \rightarrow f(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t + 36$  où  $t$  s'exprime en années.

- 1) Calculer la dérivée  $f'(t)$  de la fonction  $f(t)$  puis en déduire les variations et le tableau de variation de  $f$ . Donner une interprétation commerciale en utilisant le tableau.
- 2) Tracer la courbe (Cf) de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .
- 3) La production totale sur les cinq années est donnée par  $\int_0^5 f(t)dt$ .  
Calculer la production totale.

**30** Une entreprise produit du décapant liquide. Une étude a permis de modéliser le coût moyen de production par  $f(x) = 0,5x + \frac{8}{x}$  où  $x > 0$ .

Le coût moyen  $f(x)$  est exprimé en milliers de francs CFA et la quantité produite  $x$  en hectolitres.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(o; \vec{i} ; \vec{j})$  d'unité graphique 1cm.

- 1) Etudier les variations de cette fonction dans l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
- 2) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D) d'équation  $y = 0,5x$ .
- 3) Pour combien d'hectolitres le coût de production est il minimum ?
- 4) Déterminer les coûts de production pour 4 hectolitres ; 8 hectolitres et 16 hectolitres.
- 5) Construire la courbe (C) et la droite (D) dans le même repère.

**31** Une entreprise fabrique des objets. On estime que le bénéfice, en centaine d'euros, réalisé par la production et la vente de  $x$  centaines d'objets est :  $B(x) = 3x^3 + 33x - 54$  où  $1 \leq x \leq 10$

- 1) a- Calculer  $B'(x)$ . En déduire le tableau de variations de  $B$  sur  $[1 ; 10]$ .  
b - Quel est le nombre d'objets à produire, et à vendre, pour réaliser un bénéfice maximum ? Préciser la valeur de ce bénéfice.
- 2) a- Résoudre l'équation  $B(x) = 0$ . En déduire les points morts de la production.  
b-Résoudre l'inéquation  $B(x) \geq 0$ . En déduire la marge de bénéfice de la production.

**32** On note  $f(x)$  la population ( en milliers ) d'une ville fondée en 1960, où  $x$  désigne la durée écoulée depuis le début de l'année 1960, exprimée en années.

On donne  $f(x) = \frac{60x + 40}{x + 10}$  où  $x \in [0 ; +\infty[$ .

- 1) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que  $f(x) = a + \frac{b}{x + 10}$  pour  $x \in [0 ; +\infty[$ .
- 2) a- Calculer la dérivée  $f'(x)$  de la fonction  $f(x)$ .  
b- Justifier que la population est croissante.
- 3) a- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $f(x) = 52$ .  
b- En déduire à partir de quelle année la population de cette ville sera supérieur à 52.000 habitants.
- 4) a- Quelle est la limite de  $f$  en  $+\infty$  ?  
b- En déduire une interprétation quant à la population de cette ville ;
- 5) Tracer la courbe ( Cf ) de  $f$  dans un repère orthonormé (  $O ; \vec{i} ; \vec{j}$  ).  
Echelle : 1 cm  $\rightarrow$  10 ans sur l'axe des abscisses  
1 cm  $\rightarrow$  10.000 habitants sur l'axe des ordonnées.

**33** Une entreprise produit d'un certain nombre  $x$  de crayons de couleur par jour où :  
( $x$  exprimé en millier).

Lorsque la quantité  $x$  est comprise entre 3 et 10, on admet que le coût de production journalier, exprimé en euro est donné par :  $C(x) = x^3 - 48x + 600$

L'entreprise vend chaque millier de crayons à 99 euros.

- 1) En supposant que toute la production du jour est vendue, déterminer la recette journalière en fonction de  $x$  que l'on notera  $R(x)$ .
- 2) Montrer que la bénéfice  $B(x)$ , exprimé en euro, est donnée par :  
 $B(x) = -x^3 + 147x - 600$  avec  $x \in [3 ; 10]$ . (On rappelle que  $R(x) - C(x) = B(x)$ ).
- 3) Calculer  $B'(x)$  où désigne la fonction dérivée de  $B$ .
- 4) Etudier le signe de  $B'(x)$  sur l'intervalle  $[3 ; 10]$ .  
Dresser le tableau de variation de la fonction  $B$ .
- 5) En déduire le nombre de milliers de crayons à produire quotidiennement pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est alors ce bénéfice maximal ?
- 6) a- Montrer qu'il existe  $\alpha \in ]3 ; 7[$  et  $\beta \in ]7 ; 10[$  tel que  $B(\alpha) = B(\beta) = 0$ .  
b- Calculer  $B(4)$  ;  $B(8)$  ;  $B(5)$  ;  $B(9)$  puis en déduire les valeurs entières minimale et maximale à l'extérieur des quelles  $(x) < 0$ .
- 7) Quelles sont les productions qui assurent à l'entreprise un bénéfice positif ?

**34** Dans le Périgord, un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne de 1 à 45kg de truffes par semaine durant la période de production de la truffe. Chaque kilo de truffes est vendu 950 FCFA.

On désigne par  $f(x)$  le coût moyen, en euro par kg, pour  $x$  kg de truffes traités en une semaine.

On estime que la fonction  $f$  est définie sur  $[1 ; 45]$  par :  $f(x) = x^2 - 60x + 1250$ .

- 1) Justifier que le coût de production total  $C(x)$  pour  $x$  kg de truffes est donné, en FCFA, par :  
 $C(x) = x^3 - 60x^2 + 1250x$ .
- 2) Exprimer le bénéfice  $B(x)$ , en euro, réalisé par ce producteur pour  $x$  kg de truffes conditionnés et vendus.

- 3) a) Calculer  $B'(x)$  et en déduire le tableau de variations de  $B$  sur  $[1 ; 45]$ .  
 b) Pour quelles quantités de truffes le bénéfice du producteur est-il maximal ? Arrondir le résultat à 100g près. Quel est alors ce bénéfice maximal, à 100 FCFA près ?

**35**

Une entreprise fabrique entre 1000 et 4000 chats en porcelaine par mois. Ils sont tous identiques. On estime que le coût total de fabrication de  $x$  milliers de bibelots, en millier d'euros, est, pour  $1 \leq x \leq 4$  ;  $C(x) = 2x - 14\sqrt{x}$

- 1) Montrer que, pour tout réel  $x$  de  $[1 ; 4]$ , on a :  $C'(x) = \frac{4\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$   
 2) a- Résoudre l'inéquation  $4\sqrt{x} - 1 \geq 0$   
 b- En déduire le sens de variation du coût total  $C$  sur l'intervalle  $[1 ; 4]$ .  
 Interpréter économiquement.

**36**

Le coût, en euro, de  $x$  repas préparés dans un restaurant peut s'écrire :

$$C(x) = 0,1x^2 - x + 640 \text{ avec } x \in [40 ; 160].$$

On note  $C_m(x)$  le coût moyen de  $x$  repas, en euro par repas.

- 1) Justifier que  $C$  est croissante sur  $[40 ; 160]$ .  
 2) a- Calculer le coût moyen de 40 repas, puis de 100 repas.  
 b- Exprimer le coût moyen  $C_m(x)$  par repas en fonction du nombre  $x$  de repas préparés.  
 3) a- Étudier le sens de variation du coût moyen  $C_m$   
 b- Quel est le nombre de repas à servir pour que le coût moyen par repas soit minimal ?

**37**

La société EDM désire mesurer la satisfaction de ces consommateurs par une « fonction de satisfaction »  $f$ , dont la valeur se situe dans l'intervalle  $[0 ; 100]$ . Si la satisfaction vaut 0, les consommateurs ne sont pas satisfaits et quand elle vaut 100 les consommateurs sont pleinement satisfaits : on parle alors de « satisfaction ».

On définit la fonction « envie »  $v$  comme étant la dérivée de la fonction  $f$  tel que  $v = f'$ .

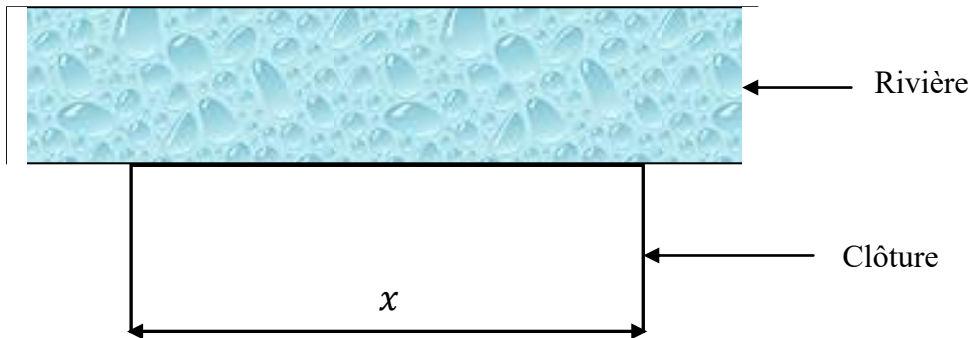
On dit qu'il y a « envie » lorsque  $v$  est positive. Sinon on dit qu'il y a « rejet ». Ainsi l'EDM propose différents types de formules pour la consommation de l'électricité et décide d'étudier la satisfaction de ses clients concernant la durée en jours d'une consommation.

La fonction de satisfaction  $f$  est définie sur l'intervalle  $[1 ; 21]$  par :

$$f(t) = 0,02t^3 - 1,4t^2 + 22t + 640 \text{ où } t \text{ est la durée en jour de la consommation.}$$

- 1) Calculer  $f'(t)$ , puis en étudier le signe sur  $[0 ; 21]$ .  
 2) Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[0 ; 21]$ .  
 3) Quelle doit être la durée, en jour, de la consommation pour qu'il y ait saturation ?  
 4) Sur quel(s) intervalle(s) y a-t-il envie ? rejet ?

- 38** On veut construire le long d'une rivière un enclos rectangulaire d'aire  $200 \text{ m}^2$ . Soit  $x$  la dimension exprimée en mètres du côté parallèle au cours d'eau. On désigne par  $f(x)$  la longueur totale, exprimée en mètres de clôture nécessaire à la réalisation de l'enclos.



- 1) Exprimer  $f(x)$  en fonction de  $x$ .
- 2) On suppose que  $f(x) = x + \frac{400}{x}$  où  $x > 0$ 
  - a- Etudier les variations de  $f$  sur l'intervalle  $[5 ; 50]$ .
  - b- Pour quelle valeur de  $x$  la longueur de la clôture est-elle minimale ?
  - c- En déduire ce minimal.
  - d- Tracer la courbe (Cf) de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  et sur l'intervalle  $[5 ; 50]$ .
- 3) On dispose de  $50 \text{ m}$  de clôture. Quelles sont les dimensions des enclos que l'on peut construire en utilisant toute la clôture ?

- 39** On considère, dans le plan  $(P)$  rapporté à un repère orthonormal  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ , le cercle  $(\Gamma)$  de centre  $O$  et de rayon  $1$ . Soit  $A$  le point de coordonnées  $(1 ; 0)$  et  $A'$  le point de coordonnées  $(-1 ; 0)$ .

- 1) Pour tout point  $H$  du segment  $[AA']$ , distinct de  $A$  et  $A'$ , on mène la perpendiculaire  $(\Delta)$  à la droite  $(AA')$ . La droite  $(\Delta)$  coupe le cercle  $(\Gamma)$  en  $M$  et  $M'$ . On pose  $\overline{OH} = x$ . Calculer en fonction de  $x$  l'aire du triangle  $AMM'$ .
- 2) Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1 ; 1 [$  par  $f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$ .
  - a- Etudier les variations de  $f$ .
  - b- Montrer que le triangle  $AMM'$  d'aire maximale est équilatéral.

## Fonctions circulaires.

40

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  par :  $f(x) = \frac{\sin 3x}{\cos^3 x}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer  $D_f$
- 2) Etudier la périodicité et la parité de  $f$  puis en déduire un intervalle d'étude  $D_E$ .
- 3) Etudier les limites aux bornes de  $D_E$ .
- 4) Montrer que  $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{3\cos 2x}{\cos^4 x}$  puis dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 5) Tracer  $(C_f)$ .

41

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$ .
- 2) Etudier la périodicité et la parité de  $f$  puis en déduire un intervalle d'étude  $D_E$ .
- 3) Montrer que  $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{3(1 - 2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$
- 4) Etudier le signe de  $(1 - 2\cos x)$  sur  $D_E$  puis en déduire les variations de  $f$  sur  $D_E$ .
- 5) Déterminer les coordonnées des points d'intersections de la courbe  $(C)$  avec l'axe des abscisses.
- 6) Tracer la courbe  $C_f$ .

42

On considère la fonction numérique  $g$  définie par :  $g(x) = \sin 2x \cos x$ .

Soit  $C_g$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) a- Prouver que la verticale  $x = \frac{\pi}{2}$  est un axe de symétrie pour la courbe  $C_g$  et étudier la parité de  $g$ .  
b- Justifier que l'on peut étudier  $g$  sur  $D_E = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  puis décrire les étapes à suivre pour avoir la courbe  $C_g$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) a- Déterminer  $g'(x)$  et justifier que son signe est celui de  $3\cos^4 x - 2$  pour tout  $x \in D_E$   
b- En admettant que  $\cos(0,45) = 0,9$  et que  $\cos(2,69) = -0,9$  et en exploitant les résultats obtenus en 1), établir le tableau de variation de  $g$  sur  $D_E$
- 3) a- Tracer  $(C_g)$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$   
b- En déduire le tracer de  $(C_g)$  sur  $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ .

43

**Partie A :** On considère la fonction numérique  $h$  de variable réelle  $u$  définie sur  $[-1 ; 1]$  par :  $h(u) = 2u^3 + 8u^2 - 4$ .

- 1) Déterminer l'arrondi d'ordre zéro de  $h(-0,79)$  et de  $h(0,66)$ .
- 2) Etablir le tableau de variation de  $h$  et donner les signes de  $h(u)$  pour  $u \in [-1 ; 1]$ .

**Partie B :** On donne la fonction numérique  $g$  telle que  $g(x) = \frac{\sin 2x}{\cos x + 2}$ .  
Soit  $Cg$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer l'ensemble de définition  $Dg$ .
- 2) En étudiant la périodicité et la parité de  $g$  puis montrer que l'on peut étudier  $g$  sur un nouvel ensemble d'étude  $DE = [0 ; \pi]$  d'amplitude  $2\pi$ .
- 3) Déterminer  $g'(x)$  et prouver  $g'(x)$  dépend en signe et en racine de :  $2\cos^3 x + 8\cos^2 x - 4$  pour tout  $x \in D_E$
- 4) En admettant que  $\cos(0,85) = 0,66$  et que  $\cos(2,49) = -0,79$ , établir le tableau de variation de  $g$  sur  $D_E$ .
- 5) a- Tracer  $Cg$  sur  $D_E$ .  
b- En déduire le tracer de  $Cg$  sur  $I$ .

44 **Partie A :**

- 1) Déterminer l'arrondi d'ordre quatre de  $\sin(-0,1396)$ .
- 2) A l'aide d'un changement de variable convenable, résoudre dans  $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$  l'inéquation  $-2\sin^2 x - 8\sin x - 1 \geq 0$ .

**Partie B :**

On considère la fonction numérique  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x + 2}$ .

Soit  $Cf$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

- 1) Quel est le domaine de définition  $Df$  de  $f$  ?
- 2) Prouver que les droites  $x = \frac{\pi}{2}$  et  $x = -\frac{\pi}{2}$  sont des axes de symétrie pour  $Cf$ .
- 3) Après avoir étudié la périodicité de  $f$ , justifier que l'on peut étudier  $f$  sur  $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$  puis donner le processus à suivre pour compléter l'étude de  $f$  sur  $[-\pi ; \pi]$ .
- 4) (On rappelle que  $\sin 2x = 2\cos x \sin x$  et que  $\cos 2x = 1 - \sin^2 x$ )  
a- Déterminer  $f'(x)$  pour tout  $x \in D_E$  puis établir que  $f'(x)$  dépend en signe et en racine de  $-2\sin^2 x - 8\sin x - 1$   
b- Comment sont les tangentes à  $Cf$  aux points d'abscisses  $x = \frac{\pi}{2}$  et  $x = -\frac{\pi}{2}$  ?
- 5) Déterminer l'arrondi d'ordre quatre de  $f(-0,1396)$  puis dresser le tableau de variation de  $f$  sur l'ensemble  $D_E$ .
- 6) Tracer  $Cf$  sur  $D_E$  en mettant en évidence les points d'intersection de  $Cf$  avec les axes de coordonnées.  
En déduire le tracé de  $Cf$  sur  $[-\pi ; \pi]$ .

## Fonctions paramétriques.

**45** Soit  $f_m$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_m(x) = (2m - 1)x^4 - (m + 4)x^2 - m + 5$ .  
Où  $x$  est la variable et  $m$  est un paramètre réel.  
Soit  $(C_m)$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

- 1) Montrer que toutes les courbes  $(C_m)$  passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.
- 2) Etudier les fonctions  $f_0$  et  $f_1$  puis représenter leur courbe respectives  $(C_0)$  et  $(C_1)$ .

**46** Soit  $f_m$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_m(x) = \frac{x^2 + 3x + 4m}{x^2 + (5m + 1)x + 3}$ .  
Où  $x$  est la variable et  $m$  est un paramètre réel.  
Soit  $(C_m)$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

- 1) Montrer que toutes les courbes  $(C_m)$  passent par trois points fixes dont on déterminera les coordonnées.
- 2) Déterminer  $m$  pour que le point d'intersection  $I$  de  $(C_m)$  et l'asymptote parallèle à  $(x'ox)$  ait pour abscisse  $\frac{3}{2}$ .
- 3) Etudier les fonctions  $f_0$  et  $f_1$  puis représenter leur courbe respectives courbe  $(C_0)$  et  $(C_1)$ .

**47** Soit  $f_m$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_m(x) = \frac{x^2 - mx}{x^2 - 1}$ .  
Où  $x$  est la variable et  $m$  est un paramètre réel.  
Soit  $(C_m)$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

- 1) Donner le tableau de variation de la fonction  $f_m$  suivant les valeurs de  $m$ .  
( On distinguera les cas où  $m \neq 1$  et  $m \geq 0$  ).
- 2) Comparer  $f_m(x)$  et  $f_{-m}(-x)$  puis donner la position relative des courbes  $(C_m)$  et  $(C_{-m})$ .
- 3) Quelle sont les coordonnées des points de  $(C_m)$  à tangentes parallèles à  $(ox)$  quand ceux-ci existent ?
- 4) Montrer que ces points sont sur une même courbe fixe.
- 5) Etudier les fonctions  $f_0$  et  $f_1$  puis représenter leur courbe respectives  $(C_0)$  et  $(C_1)$ .

## Fonctions auxiliaires.

48

**Partie A :** On considère le polynôme  $P$  définie :  $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

- 1) Donner le tableau de variation de  $P$ .
- 2) Démontrer que l'équation  $P(x) = 0$  a une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $]1,6 ; 1,7 [$ .
- 3) Donner le signe de  $P(x)$  dans l'intervalle  $] -1 ; +\infty [$ .

**Partie B :** On considère la fonction  $f : ] -1 ; +\infty [ \rightarrow \mathbb{R}$   
$$x \mapsto \frac{1-x}{1+x^3}$$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

- 1) a) Justifier la dérivabilité de  $f$  sur  $] -1 ; +\infty [$ .  
b) Calculer  $f'(x)$  puis établir que  $f'(x) = \frac{P(x)}{(1+x^3)^2}$
- 2) Donner le tableau de variation de  $f$ .
- 3) Déterminer les équations des asymptotes à la courbe  $C_f$  de  $f$ .
- 4) Placer  $\alpha$  puis tracer  $C_f$ .
- 5) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[ 2 ; +\infty [$ .  
Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $[ 2 ; +\infty [$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
- 6) On désignera  $g^{-1}$  sa bijection réciproque.
  - a) Donner le tableau de variation de  $g^{-1}$
  - b) Tracer la courbe  $C_{g^{-1}}$  de  $g^{-1}$

49

**Partie A :** On donne la fonction  $g$  définie par  $g(x) = x^3 - 3x - 4$

- 1) Etudier les variations de  $g$  et dresser son tableau de variation.
- 2) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que  $2,19 < \alpha < 2,20$
- 3) En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$

**Partie B :** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$  par  $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$   
Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

- 1) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition  $D_f$ .
- 2) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ , on a :  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$
- 3) Etudier le signe de  $f'(x)$  et en déduire les variations de  $f$  puis son tableau de variation de la fonction  $f$ .
- 4) Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x + 2$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$ . Etudier la position de  $C_f$  et  $(D)$ .
- 5) Tracer  $C_f$ .

**50**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$  par :  $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

**Partie A :**

Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^3 - 3x - 4$

- 1) Etudier la fonction  $g$  (limites et sens de variation)
- 2) Montrer qu'il existe un réel  $\alpha$  unique tel que  $g(\alpha) = 0$ , puis déterminer une valeur approchée à  $10^{-2}$  près du réel  $\alpha$ .
- 3) Etudier le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$

**Partie B :**

- 1) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition  $D_f$ .

Montrer que  $\forall x \in D_f$  on a :  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$  puis déduire le tableau de variation de  $f$ .

- 2) a) Montrer que  $\forall x \in D_f$  ;  $f(x) = x + 2 + \frac{x + 2}{x^2 - 1}$

b) En déduire que (C) admet une asymptote oblique (D) en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

- 3) Tracer la courbe (C) et la droite (D).

**Partie C :**

- 1) Déterminer l'abscisse des points de la courbe (C) où la tangente est parallèle à la droite d'équation  $y = x + 2$ .
- 2) Déterminer une équation de chacune de ces tangentes et les représenter.
- 3) En déduire graphiquement, suivant les valeurs de  $m$ , le nombre de solution de l'équation  $f(x) = m + x$ .

**51**

1) Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$

- Etudier les variations de la fonction  $g$ .
- Montrer que  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  que l'on déterminera.
- En déduire le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$

2) Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} - x$ .

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

On note  $(D)$  et  $(D')$  les droites d'équations respectives :  $y = -3x$  et  $y = x$ .

- Etudier les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
- Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- En déduire le tableau de variation de  $f$ .
- Déterminer la limite en  $-\infty$  de  $f(x) - (-3x)$ . Quelle conséquence graphique peut-on déduire de ce résultat ?
- Montrer la droite  $(D')$  est asymptote à la courbe  $(C)$  en  $+\infty$
- Etudier la position de  $(C)$  par rapport aux deux droites  $(D)$  et  $(D')$ .
- Tracer la courbe  $(C)$ , les droites  $(D)$  et  $(D')$ .

**52**

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{x}{1 - x^3}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

### **Partie A :**

Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2x^3 + 1$

- Etudier la fonction  $g$  (limites et sens de variation)
- Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $g(x) = 0$ , puis en déduire l'arrondi d'ordre 2 de l'abscisse  $x_0$  du point d'intersection  $I$  de la courbe de  $g$  avec l'axe des abscisses.
- En déduire le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

### **Partie B :**

1) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition  $D_f$  puis donner une interprétation géométrique des résultats obtenues.

2) a- Prouver que le signe de la fonction dérivée  $f'$  de  $f$  dépend en signe et en racine de la fonction  $g$  étudiée dans la **partie A**.

b- Déterminer  $g(x_0)$  où  $x_0$  est l'abscisse  $x_0$  du point d'intersection  $I$  de la courbe de  $g$  avec l'axe des abscisses obtenu dans la **partie A 2)**.

c- Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3) tracer la courbe  $(C_f)$  dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

4) Déterminer graphiquement le nombre et le signe des solutions de l'équation paramétrique :  $(E_m) : mx^3 + x - m = 0$  où  $m$  est un paramètre réel.

## Fonction irrationnelle – fonction avec valeur absolue.

**53** Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Donner l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .
- 2) Etudier les variations de  $f$ , puis tracer avec soins sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On donne :  $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,6$  et  $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -0,3$

**54** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 8}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) a) Démontrer que  $\forall x \in \mathbb{R}$ , on a :  $x - \sqrt{x^2 + 8} < 0$   
b) Etudier les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ . En déduire que la courbe (C) de  $f$  admet une asymptote horizontale dont on précisera une équation.  
c) Démontrer que la droite (D) d'équation  $y = -2x$  est asymptote à (C) en  $-\infty$
- 2) a) Calculer  $f'(x)$ . Puis en déduire de 1) a) le sens et le tableau de variation de  $f$ .  
b) Tracer (C) et (D) dans un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm)

**55** Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{|x^2 + x| + 1}{|x| + 1}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer le domaine de définition de  $f$  et écrire  $f(x)$  sans les symboles "valeur absolue"
- 2) Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $-1$  et en  $0$ , puis interpréter géométriquement les résultats
- 3) Etudier les variations de  $f$
- 4) Montrer que les droites d'équations  $y = -x - 2$  et  $y = x$  sont asymptotes à la courbe (C) et  $f$
- 5) Tracer (C)

**56** Soit la fonction numérique  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$
- 2) Ecrire  $f(x)$  sans valeur absolue
- 3) Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = -1$  et en  $x_0 = 3$  puis interpréter graphiquement vos résultats.
- 4) Montrer que la courbe (C) de  $f$  admet une asymptote oblique ( $\Delta$ ) au voisinage de  $-$  et une asymptote oblique (D) au voisinage de  $+$ .
- 5) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec ( $\Delta$ ) et (D)
- 6) Etudier le sens de variation de  $f$  puis dresser son tableau de variation
- 7) Tracer dans un repère orthonormé la courbe (C) de  $f$ .

**57**

Soit la fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = |x| \sqrt{\frac{x}{x-1}}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer l'ensemble de définition  $Df$  de  $f$
- 2) a) Etudier la dérivabilité de  $f$  au point  $x = 0$ , en déduire l'ensemble de dérivabilité de  $f$ .  
 b) Calculer  $f'(x)$  pour  $x$  élément des intervalles de dérivabilité.  
 c) Calculer les limites de  $f(x)$  aux bornes de  $Df$  et préciser les équations des asymptotes à la courbe  $(C)$  de  $f$ .  
 d) Dresser le tableau de variation de  $f$
- 3) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = ]-, 0]$ 
  - a) Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  à déterminer. On désigne par  $g^{-1}$  la bijection réciproque de  $g$  et  $(C_{g^{-1}})$  sa courbe.
  - b) Calculer  $f(0), f(-1), f(2), f(3)$
  - c) Construire dans le même repère orthonormé les courbes  $(C)$  et  $(C_{g^{-1}})$
  - d) Calculer  $(g^{-1})' \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$

**58**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Etudier suivant les valeurs de  $x$ , le signe du polynôme et l'expression de  $f(x)$  sans le symbole "valeur absolue".
- 2) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$ , en particulier en 1 et en 5. La courbe admet-elle des tangentes en ces points ?
- 3) Etudier les variations de  $f$ .
- 4) Démontrer que la droite d'équation  $x = 3$  est axe de symétrie pour la courbe  $(C)$ .
- 5) Démontrer que les droites d'équations  $y = x - 3$  et  $y = -x + 3$  sont asymptotes à la courbe  $(C)$ .
- 6) Déterminer les coordonnées des points A et B d'intersection de la courbe  $(C)$  avec ses deux asymptotes, A étant le point dont l'abscisse est supérieure à 3.
- 7) Soit I le point de coordonnées  $(3; 0)$ . Démontrer que  $\forall x \in [1; 5]$  le point M de coordonnées  $(x, f(x))$  est à une distance constante du point I. En déduire la nature géométrique de la courbe  $(C)$ , lorsque  $1 \leq x \leq 5$
- 8) Tracer  $(C)$  et ces asymptotes. Faire figurer les points A et B.

## Perfectionnement.

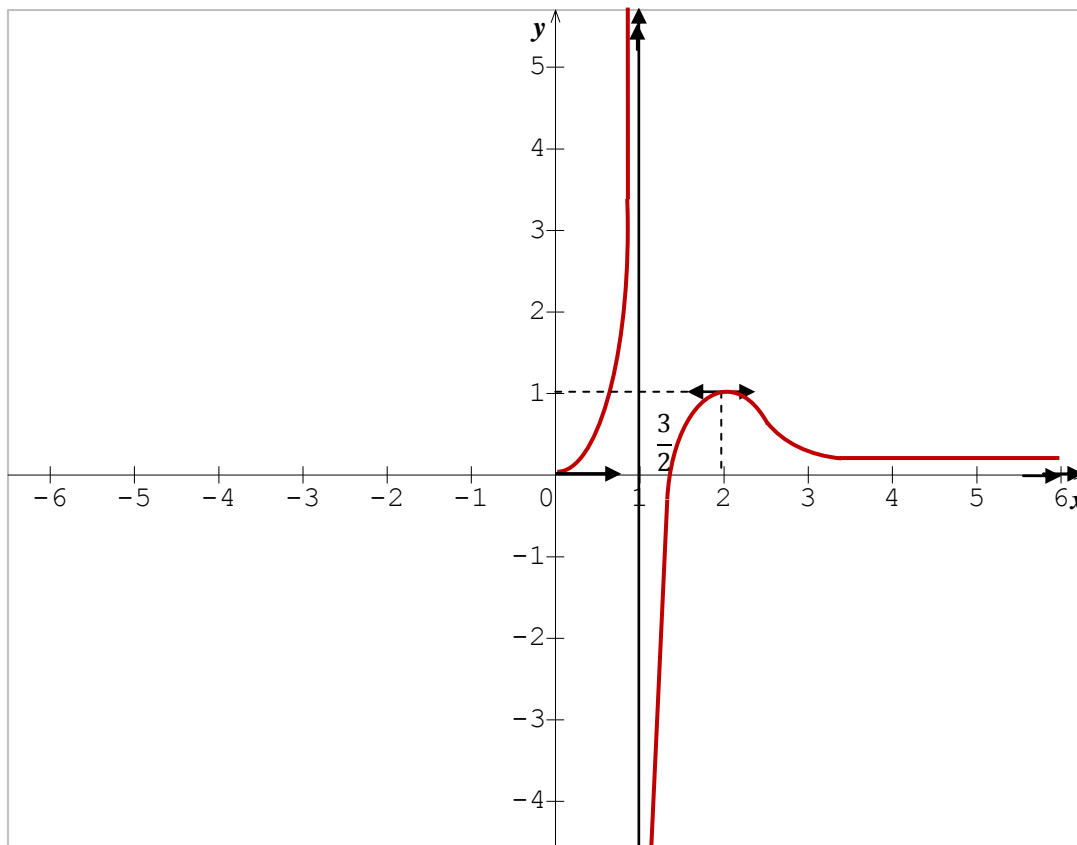
**59** La fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est donnée par une partie de son tableau de variation.

On sait de plus que la droite d'équation  $x = 2$  est axe de symétrie pour la courbe  $C$  de  $f$ .

$x$	$-\infty$	2	4	$+\infty$
$f'(x)$		0	-	-
$f(x)$		1		$+\infty$
			$-\infty$	3

- 1) Tracer la courbe  $C$  de  $f$
- 2) Compléter le tableau de variation de  $f$
- 3) On suppose que  $f(x)$  est de la forme  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + \beta x + \alpha}$ 
  - a- Déterminer les réels  $a$  ;  $b$  ;  $c$  ;  $\beta$  et  $\alpha$
  - b- Montrer que la restriction  $g$  de  $f$  à  $I = ]2 ; 4]$  réalise une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  à préciser.
  - c- Donner l'équation de la tangente à la courbe  $C'$  de  $g^{-1}$  au point d'abscisse 1
  - d- Tracer  $C'$
  - e- Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre  $m$ , du nombre et des signes des solutions de l'équation  $(3 - m)x^2 - (12 - 4m)x + 8 = 0$

**60** On donne la figure ci-dessous qui représente une partie de la courbe d'une fonction  $g$ .



- 1) Compléter la courbe de la fonction  $g$  sachant que  $g$  est impaire.
- 2) Donner les équations des asymptotes à  $(C_g)$
- 3) Quel est le domaine de définition de  $g$  sous forme de réunion d'intervalles  
Donner les limites de  $g$  aux bornes de  $D_g$ .
- 4) Dresser le tableau de variation de  $g$ .

**61**

Soit  $f$  la fonction numérique définie par  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$  où  $a, b, c, d$  sont des réels et

$(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Trouver les réels  $a$  ;  $b$  ;  $c$  et  $d$  sachant que la droite d'équation  $x = 3$  est asymptote et  $(C_f)$  passe par les points  $A(2 ; 3)$  ,  $B(4 ; 7)$  et admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale.
- 2) Dans la suite du problème on prendra  $a = 1$  ;  $b = -1$  ;  $c = -5$  et  $d = -3$

a- Etudier la fonction  $f$

b- Etudier la position de  $(C_f)$  par rapport à son asymptote oblique

c- Montrer que la restriction  $g$  de  $f$  à l'intervalle  $[4 ; +\infty[$  réalise une bijection de  $[4 ; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.

d- Calculer  $g(5)$  ;  $g(6)$  ;  $(g^{-1})'(\frac{15}{2})$

- 3) Montrer que  $(Cf)$  admet un centre de symétrie que l'on déterminera
- 4) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$
- 5) a- Montrer que  $\forall x \in [4,5]$  on a  $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$   
 b- En déduire que  $\left|f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x - 5|$
- 6) Tracer  $(Cf)$  dans le repère  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  ainsi que  $(Cg^{-1})$  la courbe de  $g^{-1}$

**62**

**Partie A :** Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $Df = ]1 ; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

- 1) Montrer que la dérivée de  $f$  garde un signe constant sur  $Df$ .
- 2) Etudier les variations de  $f$  (limite et sens de variation)
- 3) En déduire que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans l'intervalle  $]1 ; 2[$

**Partie B :** On se propose de résoudre l'équation  $f(x) = 0$  dans  $]1 ; 2[$ .

- 1) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$ , a même ensemble de solution que l'équation  $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$
- 2) On appelle  $g$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$  soit  $\alpha$  la solution de l'équation  $f(x) = 0$  (On a donc  $g(\alpha) = \alpha$  et  $1 \leq \alpha \leq 2$ )
  - a) Montrer que si  $x$  est élément de  $]1 ; 2[$  alors  $g(x)$  est aussi élément de  $]1 ; 2[$ .
  - b) Justifier la dérivabilité de  $g$  sur  $]0 ; +\infty[$  Calculer la dérivée de  $g$  puis montrer que pour tout  $x \in [1, 2]$  on a :  $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$
  - c) En déduire que pour tout  $x$  de  $[1, 2]$ , on a  $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

**63**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{1\}$  par  $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$  et soit  $(C)$  sa courbe représentative dans le repère  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Etudier la fonction  $f$  (limites, variations).
- 2) a- Déterminer les réels  $a ; b ; c$  et  $d$  tel que  $\forall x \neq 1$  on a :  $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x-1)^2}$   
 b- En déduire que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x - 2$  est asymptote à  $(C)$   
 c- Préciser la position de la courbe  $(C)$  et la droite  $(D)$  et les coordonnées du point commun  $I$  à la courbe  $(C)$  et  $(D)$ .
- 3) Tracer  $(C)$  et  $(D)$
- 4) a- Déterminer l'abscisse du point  $J$  de la courbe  $(C)$  où la tangente est parallèle  $(D)$  ; puis l'équation de cette tangente. Tracer cette tangente  $(T)$ .  
 b- En déduire graphiquement suivant les valeurs de  $m$ , le nombre de solution de l'équation  $f(x) = x + m$ .
- 5) On se propose de retrouver par calcul le résultat trouvé en 4)

- a) Montrer que les abscisses des points d'intersection de (C) et de la droite d'équation  $y = x + m$  sont les solutions de l'équation :
- (E) :  $(m + 2)x^2 + (-2m - 7)x + m + 4 = 0$
- b) Trouver suivant les valeurs de  $m$ , le nombre de solution de l'équation (E).
- c) Pour quelles valeurs de  $m$  la courbe (C) et la droite d'équation  $y = x + m$  ont – elles deux points communs M et N ?
- d) Dans ce cas, calculer en fonction de  $m$ , l'abscisse du milieu I de [M N].
- e) Montrer que lorsque  $m$  varie, le point I appartient à la courbe (C') d'équation :
- $$y = x + \frac{7 - 4x}{2x - 2}$$

**64**

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  et (C) sa courbe.

1) a- Démontrer que la courbe représentative de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  est au dessus de sa tangente en tout point.

b- En déduire que  $\forall \alpha \in [0; +\infty[$ , on a :  $\frac{1}{1+\alpha} \geq 1 - \alpha$  (1)

2) Soit la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$ , par  $g(x) = \sqrt{x+1}$  et soit  $a$  un réel strictement positif.

3) Déterminer la dérivée première et seconde de  $g$  sur  $[0; +\infty[$

4) Vérifier que  $\forall x \in [0; a[$  on a :  $\frac{1}{2\sqrt{1+a}} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$

5) En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis à la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0; a]$ , démontré que  $1 + \frac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a} \leq 1 + \frac{a}{2}$  (2)

6) a) Déduire des relations (1) et (2) que :

$$\forall \alpha \in [0; +\infty[ , \text{ on a : } 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} \leq \sqrt{1+a} \leq 1 + \frac{a}{2}$$

b) Etablir alors l'inégalité suivante :  $1,0475 \leq \sqrt{1,1} \leq 1,05$

c) En déduire une valeur approchée de  $\sqrt{1,1}$  tout en précisant la marge d'incertitude.

7) Etudier la fonction  $f$  puis tracer la courbe (C).

# Suites Numériques

## Objectifs

Ce thème vise à :

- étudier le comportement global d'une suite numérique (majoration, minoration, convergence, variations) ;
- mettre en œuvre le raisonnement par récurrence ;
- donner des outils pour traiter des problèmes d'approximation.

## Savoirs et savoir-faire

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Suites monotones</li> <li>• Suites majorées, minorées, bornées</li> <li>• Suites convergentes :               <ul style="list-style-type: none"> <li>- Notion de convergence.</li> <li>- Unicité de la limite (admise)</li> <li>- Toute suite croissante et majorée converge</li> <li>- Toute suite décroissante et minorée converge.</li> <li>- Si <math>f</math> est une fonction numérique telle que <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = l</math> alors la suite définie par <math>u_n = f(n)</math> converge vers <math>l</math>.</li> </ul> </li> <li>• si <math>(u_n)</math> est une suite convergeant vers <math>a</math> et <math>f</math> une fonction continue en <math>a</math> alors la suite <math>v_n = f(u_n)</math> converge vers <math>f(a)</math>.</li> <li>• Convergence des suites géométriques (suites du type <math>(a^n)</math>).</li> <li>• Suites divergentes</li> <li>• Convergence des suites géométriques et des suites du type <math>n^\alpha</math></li> <li>• Suites divergentes</li>   <li>• Théorèmes de comparaison : Soient les suites <math>(v_n)</math> et <math>(u_n)</math> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) Si à partir d'un certain rang, <math>v_n \leq u_n</math> et si <math>(v_n)</math> tend vers <math>+\infty</math>, alors <math>(u_n)</math> tend vers <math>+\infty</math>.</li> <li>2) Si à partir d'un certain rang, <math>v_n \leq u_n</math> et si <math>(u_n)</math> tend vers <math>-\infty</math>, alors <math>(v_n)</math></li> </ol> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Démontrer qu'une suite est monotone :               <ul style="list-style-type: none"> <li>- Par comparaison de deux termes généraux consécutifs ;</li> <li>- Par l'étude des variations d'une fonction ;</li> <li>- Par un raisonnement par récurrence.</li> </ul> </li> <li>• Démontrer qu'une suite est majorée et/ou minorée :               <ul style="list-style-type: none"> <li>- Par un calcul direct ;</li> <li>- Par l'étude des variations d'une fonction ;</li> <li>- Par un raisonnement par récurrence.</li> </ul> </li> <li>• Démontrer qu'une suite est convergente ou divergente par :               <ul style="list-style-type: none"> <li>- L'étude du comportement d'une fonction ;</li> <li>- L'utilisation des opérations sur les limites ;</li> <li>- L'utilisation des théorèmes de comparaison.</li> </ul> </li>   <li>• conjecturer à partir d'une représentation graphique et comportement d'une suite récurrente.</li> </ul>

tend vers  $-\infty$ .

- 3) Si à partir d'un certain rang,  
 $|v_n - l| \leq u_n$  et si  $(u_n)$  tend vers 0,  
alors  $(v_n)$  tend vers  $l$ .
- 4) Si à partir d'un certain rang,  
 $v_n \leq u_n \leq w_n$  et si  $(v_n)$  et  $(w_n)$  tend  
vers  $l$ , alors  $(u_n)$  tend vers  $l$ .
- 5) Si à partir d'un certain rang  $v_n \leq u_n$   
et  $(u_n)$  tend vers  $l$  et  $(v_n)$  tend vers  
 $l'$  alors  $l' \leq l$ .

•suites  $(a^n)$  et  $(n^\alpha)$ . Croissance comparée  
Limites et comportements asymptotiques  
comparés des suites  $(\ln n)$ ;  $(a^n)$ ,  $a > 0$  et  
 $(n^\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ .

Suites récurrentes définies par une relation du  
type :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Soit  $(u_n)$  une suite définie par  $u_{n+1} =$   
 $f(u_n)$ .

Si  $(u_n)$  converge vers  $l$  et si  $f$  est continue en  
 $l$  alors  $f(l) = l$ .

## I- Généralité :

### 1) Définition :

On appelle suite numérique toute fonction définie de  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . On note

$$U : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow U(n) = u_n$$

### Exemple :

Soit une suite  $u_n$  définie par :  $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$ . Calculer :  $u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4$

$$u_0 = \frac{1}{2} ; u_1 = 1 ; u_2 = \frac{5}{4} ; u_3 = \frac{7}{5} ; u_4 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

### 2) Mode de définition d'une suite :

- Une suite peut être définie par 1 formule explicite c'est-à-dire :  $u_n$  en fonction de  $n$   
 $u_n = f(n)$ .

Exemple :  $u_n = n + 3 ; v_n = \frac{2n - 4}{n + 1} ; w_n = 4n^2 - 3n + 1$

- Une suite peut être définie par son 1<sup>er</sup> terme et une formule de récurrence, c'est-à-dire  $u_{n+1}$  s'exprime en fonction de  $u_n$ .

Exemple : soit la suite :  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + 4 \end{cases}$ . Calculer :  $u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4$

### Solution :

$$\text{Pour } n = 0, u_1 = \frac{3}{2}u_0 + 4 = \frac{3}{2}(2) + 4 = 7$$

$$\text{Pour } n = 1, u_2 = \frac{3}{2}u_1 + 4 = \frac{29}{2}$$

$$\text{Pour } n = 2, u_3 = \frac{3}{2}u_2 + 4 = \frac{103}{4}$$

$$\text{Pour } n = 3, u_4 = \frac{3}{2}u_3 + 4 = \frac{341}{8}$$

$u_0$  est le 1<sup>er</sup> terme de la suite et  $u_n$  est le terme général.

### 3) Sens de variation d'une suite

- Si  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}$  alors  $u_n$  est croissante
- Si  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}$  alors  $u_n$  est décroissante
- Si  $u_{n+1} - u_n = 0$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}$  alors  $u_n$  est constante

#### Exemple :

Etudier le sens de variation de chacune des suites :

$$u_n = \frac{2n + 3}{n + 2} \quad ; \quad v_n = -\frac{3}{2}n + 4$$

#### Solution :

$$u_n = \frac{2n + 3}{n + 2} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{2(n + 1) + 3}{(n + 1) + 2} = \frac{2n + 5}{n + 3}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n + 5}{n + 3} - \frac{2n + 3}{n + 2} = \frac{1}{(n + 3)(n + 2)} > 0$$

D'où  $u_n$  est croissante

$$v_n = -\frac{3}{2}n + 4 \Rightarrow v_{n+1} = -\frac{3}{2}(n + 1) + 4 = -\frac{3}{2}n + \frac{5}{2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \left(-\frac{3}{2}n + \frac{5}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2}n + 4\right) = -\frac{3}{2} < 0$$

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{3}{2} < 0 \quad \text{D'où } v_n \text{ est décroissante}$$

#### 4) Représentation des termes d'une suite :

Pour représenter les termes d'une suite  $u_n$  sur l'axe de abscisses, on trace la 1<sup>ère</sup> bissectrice (D) d'équation  $y = x$ . Puis on trace la fonction associée à la suite  $u_n$  en posant  $u_n = x$  et  $u_{n+1} = f(x)$ . On détermine les termes de la suite sur l'axe des abscisses par projection.

#### Exemple

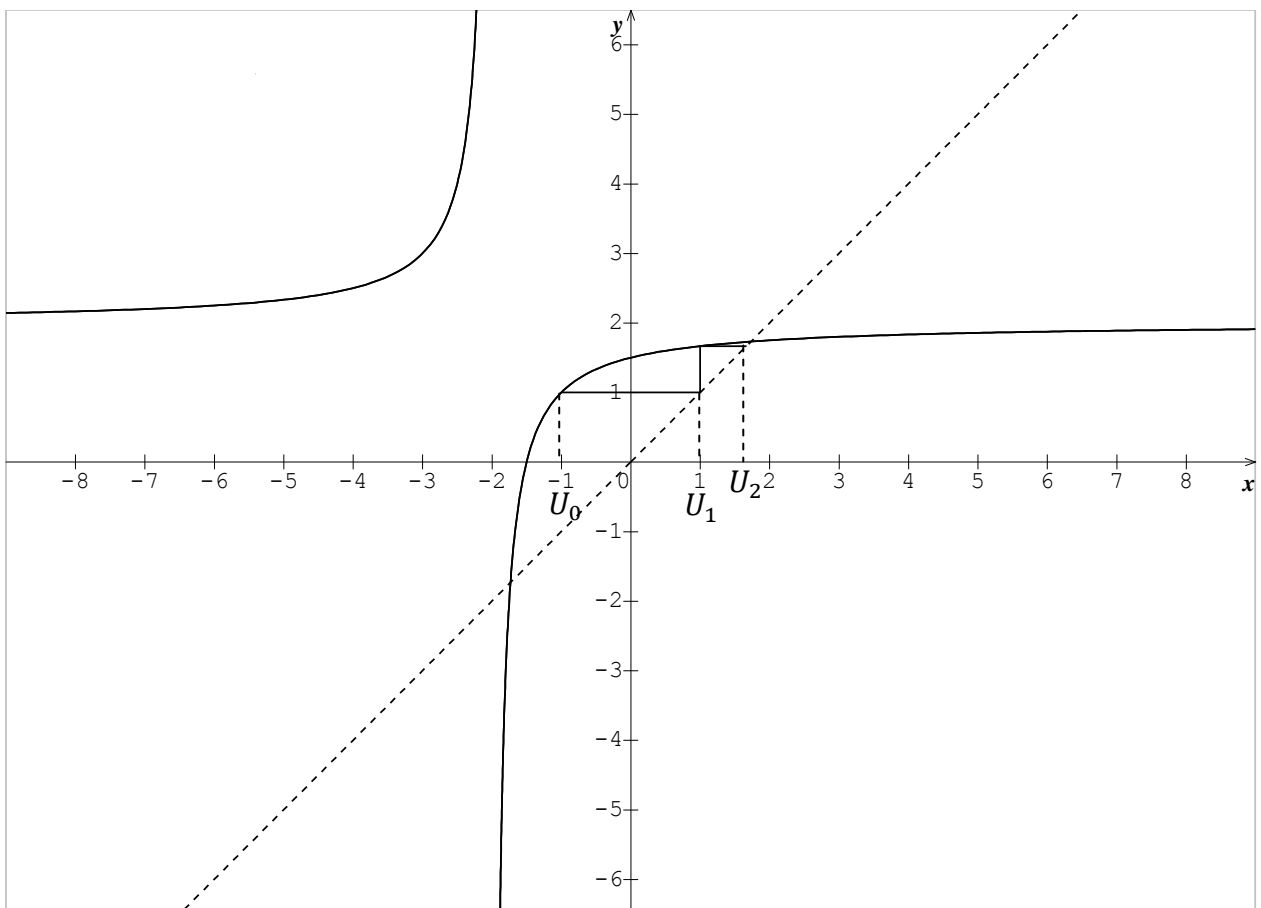
$$\text{Soit } (u_n) \text{ définie Par : } \begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{3 + 2U_n}{2 + U_n} \end{cases}$$

Représenter sur l'axe  $(ox)$  les 3 premiers termes de la suite  $u_n$ .

#### Solution

Désignons par  $f$  la fonction définie sur  $] -2 ; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{3 + 2x}{2 + x}$

En suivant les règles de constructions ci-dessous, on a la représentation suivante :



## II- Convergence d'une suite

### 1) Activités :

#### Activité 1 :

Soit la suite  $u_n = \frac{1}{n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$

- 1) Calculer  $u_1 ; u_2 ; u_{1000} ; u_{1000000000}$ .
- 2) En déduire le sens de variation de  $u_n$
- 3) Que peut-on conclure ?

#### Solution :

- 1) Calculons :  $u_1 ; u_2 ; u_{1000} ; u_{1000000000}$ .

Pour  $n = 1$  alors  $u_1 = 1$

Pour  $n = 2$  alors  $u_2 = \frac{1}{2}$

Pour  $n = 1000$  alors  $u_{1000} = \frac{1}{1000} = 0,001$

Pour  $n = 1000000000$  alors  $u_{1000000000} = \frac{1}{1000000000} = 0,000000001$

En déduisons le sens de variation de  $u_n$

Puis que :  $u_1 > u_2 > u_{1000} > u_{1000000000}$  alors  $u_n$  est une suite décroissante.

- 2) Conclusion : on remarque que lors que  $n$  tend vers  $+\infty$  alors  $u_n$  tend vers 0.

On note :  $\lim_{n \rightarrow +} u_n = \lim_{n \rightarrow +} \frac{1}{n} = 0$

On dit alors que la valeur limite de la suite  $u_n$  est 0, quand  $n$  tend vers  $+$ .

#### Activité 2 :

Soit  $v_n = n + 2$ . Calculer  $v_1 ; v_2 ; v_{1000} ; v_{1000000000}$ . Puis conclure.

#### Solution :

- 1) Calculons :  $v_1 ; v_2 ; v_{1000} ; v_{1000000000}$

Pour  $n = 1$  alors  $v_1 = 3$

Pour  $n = 2$  alors  $v_2 = 4$

Pour  $n = 1000$  alors  $v_{1000} = 1002$

Pour  $n = 1000000000$  alors  $v_{1000000000} = 1000000002$

## 2) Définition :

Une suite  $u_n$  est dite convergente si et seulement si son terme général  $u_n$  a une limite finie  $l$ .  
on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ avec } l \in \mathbb{R}$$

### Remarque :

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow -\infty} u_n = +\infty \text{ ou } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Alors  $u_n$  est dite divergente.

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  alors la suite  $u_n$  converge vers  $l$ .

### Evaluation :

Etudier la convergence de chacune des suites suivantes :

$$u_n = \frac{n+2}{n+3} ; v_n = \frac{2-3n}{n+4} ; w_n = 2^{-n}$$

### **III- Suite majorée – minorée – bornée :**

#### **1) Définitions :**

- Une suite  $u_n$  est majorée si et seulement  $\forall a \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq a$ .
- Une suite  $u_n$  est minorée si et seulement  $\forall a \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \geq a$ .
- Une suite  $u_n$  est bornée si et seulement  $\forall a \in \mathbb{R} ; b \in \mathbb{R}$  et que  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a :  
 $b \leq u_n \leq a$

#### **2) Théorèmes :**

##### **a) Théorème 1 :**

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

#### **Exemple :**

Soit la suite  $u_n$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}^* u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots \dots \dots \frac{1}{2n}$

Montrer que la suite  $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots \dots \dots \frac{1}{2n}$  est décroissante et minorée.

En déduire qu'elle est convergente.

#### **Solution :**

On remarque tous les termes de la suite  $u_n$  sont positifs.  
Donc cette suite est minorée par 0. Etudions maintenant sa décroissance.

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{(3n+2)}{n(2n+1)(2n+2)} < 0 . \text{ Donc la suite } U_n \text{ est décroissante.}$$

**Déduction :**  $u_n$  étant à la fois positive et décroissante, alors elle est convergente.

##### **b) Théorème 2 :**

Tout sous-ensemble non vide E de nombres réels a une borne supérieure A : c'est-à-dire  
 $\forall x \in E ; x \leq A$

### 3) Propriétés :

Soient  $u_n$  et  $v_n$  deux suites tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$$

On a les propriétés suivantes :

**P<sub>1</sub>** : Si  $u_n \leq v_n$  : alors  $l \leq l'$

**P<sub>2</sub>** :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = l + l'$

**P<sub>3</sub>**: Si  $(u_n)$  est bornée et si  $(v_n)$  est divergente, alors :

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = \infty$$

## IV- Relations entre les limites :

**Théorème** : (Théorème des gendarmes).

Considérons les trois suites  $u_n$  ;  $v_n$  et  $w_n$  ( $n > n_0$ )

Tel que :  $u_n \leq v_n \leq w_n$

$u_n$  et  $w_n$  Si converge vers la même limite  $l$  ; alors  $v_n$  converge vers  $l$ .

**Preuve** :

A partir de la relation donnée entre les suites on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$$

$$\Leftrightarrow l \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \leq l$$

Alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l$

## V- Suites Adjacentes :

### Définition :

Une suite  $(u_n)$  est adjacente à une autre suite  $(v_n)$  si l'une des deux suites est décroissante tandis que l'autre est croissante et si

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$$

### Théorème 1 :

Si les suites  $u_n$  et  $v_n$  sont adjacentes ( $u_n$  croissante et  $v_n$  décroissante) alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ on a : } u_n \leq v_n.$$

### Preuve :

Supposons que le contraire de la conclusion du théorème soit vrai pour  $n = k$ , c'est-à-dire :  $u_k \geq v_k$ .

Pour  $n > k$ , puisque  $u_n$  est décroissante et que  $v_n$  est décroissante, on a :

$$u_n \geq u_k \geq v_k \geq v_n$$

$$\Leftrightarrow (u_n - v_n) \geq (u_k - v_k)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) \neq 0$$

**Théorème 2 :** si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent à une même limite.

### Preuve :

Puis que les suites sont adjacentes et que  $u_n$  est croissante et  $v_n$  décroissante, le **théorème 1** implique :  $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$

On note alors que :

- $u_n$  est croissante et elle est majorée par  $v_0$ , donc elle converge vers  $l$ .
- $v_n$  est décroissante et elle est minorée par  $u_0$  donc elle converge vers  $l'$ .

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = l - l'$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$\Leftrightarrow 0 = l - l' \Leftrightarrow l = l'$$

Ce qu'il fallait prouver.

### Exemple :

Considérons les deux suites suivantes :  $U_{n+1} = \sqrt{U_n \cdot V_n}$  (moyenne géométrique)

Et  $(0 \leq U_0 \leq V_0)$

$$V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \text{ (moyenne arithmétique)}$$

- Calculer  $V_n^2 - U_n^2$  puis en déduire qu'il est non négatif, donc que  $V_{n+1} \geq U_{n+1}$

(Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ).

2) Utiliser les résultats de la question 1) pour montrer que  $U_{n+1} > U_n$  et  $V_{n+1} < V_n$ .

C'est-à-dire que  $u_n$  est croissante et que  $v_n$  est décroissante.

3) Montrer que les suites  $u_n$  et  $v_n$  sont adjacentes.

**Solution :**

$$\begin{aligned} 1) \quad V_{n+1}^2 - U_{n+1}^2 &= \frac{(U_n + V_n)^2}{4} - (\sqrt{U_n \cdot V_n})^2 \\ &= \frac{U_n^2 + 2U_n \cdot V_n + V_n^2}{4} - U_n \cdot V_n \\ &= \frac{U_n^2 + 2U_n \cdot V_n + V_n^2 - 4U_n \cdot V_n}{4} \end{aligned}$$

$$V_{n+1}^2 - U_{n+1}^2 = \frac{(U_n - V_n)^2}{4}$$

Puis que  $\frac{(U_n - V_n)^2}{4} > 0$  alors  $V_{n+1}^2 - U_{n+1}^2$  est non négatif.

$$u_{n+1} = \sqrt{U_n \cdot V_n} \geq \sqrt{U_n \cdot U_n} \text{ puis que } u_n \leq v_n \Rightarrow v_{n+1} \geq u_n$$

$$V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \leq \frac{U_n + V_n}{2} \text{ puis que } U_n \leq V_n \Rightarrow u_{n+1} \leq v_n.$$

**3) A partir de la définition des suites, nous avons :**

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{U_n + V_n}{2} - \sqrt{U_n \cdot V_n} \leq \frac{U_n + V_n}{2} - \sqrt{U_n \cdot V_n} \\ &\Leftrightarrow v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{U_n + V_n}{2} - U_n \\ &\Leftrightarrow v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n) \end{aligned}$$

Cette dernière relation étant valable pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on obtient par récurrence.

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0) \text{ ce qui donne à la limite}$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (v_{n+1} - u_{n+1}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) (v_0 - u_0) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (V_n - U_n) = 0$$

Donc les deux suites sont adjacentes.

## VI- Suites Arithmétiques

### 1) Activité :

Au 1<sup>er</sup> Janvier 2012, le prix d'un kilo de sucre est de 550 f CFA.

Sachant que le prix du kilo subit une augmentation de 50 f CFA au 1<sup>er</sup> Janvier de chaque année, quel serait le prix du kilo de sucre au 1<sup>er</sup> Janvier 2013 ? Au 1<sup>er</sup> Janvier 2014 ?

On désigne par  $p_n$  le prix du kilo du sucre au 1<sup>er</sup> Janvier +  $n$ .

Calculer  $P_1$  ;  $P_2$  ;  $P_3$  et  $p_n$ .

Calculer  $p_{n+1} - p_n$ .

### Solution

Soit  $P_0$  le prix d'un kilo de sucre au 1<sup>er</sup> Janvier 2012 tel que  $P_0 = 550$ .

Calculons le prix d'un kilo de sucre :

- **Au 1<sup>er</sup> Janvier 2013** , le prix d'un kilo de sucre serait  $P_1 = P_0 + 50 = 550 + 50 = 600$ .
- **Au 1<sup>er</sup> Janvier 2014** , le prix d'un kilo de sucre serait  $P_2 = P_1 + 50 = 600 + 50 = 650$ .

Soit  $P_n$  le prix d'un kilo de sucre au 1<sup>er</sup> Janvier +  $n$ .

Calculons :  $P_1$  ;  $P_2$  ;  $P_3$  et  $p_n$ .

- $P_0 = 550$ .
- $P_1 = P_0 + 50 = 550 + 50 = 600$ .
- $P_2 = P_1 + 50 = 600 + 50 = 650$ .
- $P_3 = P_2 + 50 = 650 + 50 = 700$ .
- $p_n = P_0 + 50n = 550 + 50n$ .

Calculons  $p_{n+1} - p_n$ .

$$p_n = 550 + 50n \Rightarrow p_{n+1} = 550 + 50(n + 1) = 550 + 50 + 50n = 600 + 50n$$

$$\Rightarrow p_{n+1} - p_n = (600 + 50n) - (550 + 50n) = 600 + 50n - 550 - 50n = 50$$

**Alors on a : une suite arithmétique de raison  $r = 50$ .**

## 2) Définition :

Une suite  $u_n$  est dite arithmétique si et seulement si :  $\forall n \in N ; u_{n+1} - u_n = r$ .  
 $r$  est appelé la raison de la suite  $u_n$ .

### Exemple :

Soit une suite  $u_n$  définie par :  $u_n = \frac{2}{3}n + 4$ .

Démontrer que  $u_n$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1<sup>er</sup> terme  $U_0$ .

### Solution :

$$u_n = \frac{2}{3}n + 4$$

$$U_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1) + 4 = \frac{2}{3}n + \frac{14}{3} \Rightarrow$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2}{3} \text{ d'où } U_n \text{ est une suite arithmétique de raison } r = \frac{2}{3} \text{ et de 1}^{\text{er}} \text{ terme } u_0 = 4$$

## 3) Expression du terme général :

Soit  $U_n$  une suite de 1<sup>er</sup> de terme  $U_0$  et de raison  $r$ .

$$U_1 - U_0 = r$$

$$U_2 - U_1 = r$$

$$U_3 - U_2 = r$$

⋮

$$\frac{U_n - U_{n-1} = r}{U_n - U_0 = nr}$$

$$\Rightarrow u_n = u_0 + nr$$

D'une façon générale si  $u_p$  est le 1<sup>er</sup> terme l'expression du terme général est :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

### Exemple :

Soit la suite réel définie par  $\begin{cases} U_0 = -1 \\ \forall n \in N; U_{n+1} = U_n - 3 \end{cases}$

- Démontrer que  $u_n$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1<sup>er</sup> terme.
- Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

### Solution :

a)  $u_{n+1} = u_n - 3 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = -3$

D'où  $U_n$  est une suite arithmétique de raison  $r = -3$  et de 1<sup>er</sup> terme  $u_0 = -1$ .

b)  $\boxed{U_n = U_0 + nr = -1 + n(-3) \Rightarrow u_n = -3n - 1}$

#### 4) Termes équidistants d'une suite :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique  $p$  un entier naturel tel que  $p \leq n$  les termes  $u_p$  et  $u_{n-p}$  sont des termes équidistants des termes extrêmes  $u_0$  et  $u_n$  car il ya  $p$  termes avant le terme  $u_p$  et  $p$  termes après le terme  $u_{n-p}$  on a :

#### 5) Somme des termes équidistants d'une suite arithmétique

Soit  $p$  un entier naturel tel que  $p \leq n$

Les termes  $u_p$  et  $u_{n-p}$  sont des termes équidistants des termes extrêmes

$$u_p + u_{n-p} = (u_0 + pr) + (u_0 + (n-p)r) = u_0 + (u_0 + nr) \text{ d'où}$$

$$u_p + u_{n-p} = u_0 + u_n \text{ d'où le théorème}$$

**Théorème :** la somme de deux termes équidistants d'une suite arithmétique est égale à la somme des termes extrêmes

#### 6) Propriétés :

En application du théorème on a :

**P<sub>1</sub> :** Trois nombres **a, b, c** forment une progression arithmétique si :

$$2b = a + c.$$

**Preuve :**

Soit  $a, b$  et  $c$  trois réels

$$b = a + r$$

$$c = b + r$$

$$a + c = a + b + r = 2a + 2r = 2(a + r). \text{ Alors : } a + c = 2b$$

**P<sub>2</sub> :** Trois nombres **a, b, c** forment une progression arithmétique de raison  $r$  si :

$$b = a + r \text{ et } c = a + 2r.$$

**P<sub>3</sub> :** Quatre nombres **a, b, c, d** forment une progression arithmétique de raison  $r$  si :

$$3b - d = 2d$$

**P<sub>4</sub> :** Soit  $u_n$  une suite arithmétique de 1<sup>er</sup> terme  $u_0$ . La somme de deux termes équidistants est toujours à la somme des extrêmes

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n$$

$u_1; u_{n-1}$  sont équidistants

$$u_0 + u_n = u_p + u_{n-p}$$

### Exemple

Trouver 3 nombres consécutifs  $a$  ;  $b$  et  $c$  d'une suite en progression arithmétique sachant que

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases}$$

### Solution :

Trouvons 3 nombres consécutifs  $a$  ;  $b$  et  $c$  d'une suite en progression arithmétique sachant

$$\text{que } \begin{cases} a + b + c = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases}$$

On sait que pour une progression arithmétique de 3 termes  $a$  ;  $b$  ;  $c$  , on a :  $a + c = 2b$

Ainsi l'équation dévient :

$$\begin{cases} 2b + b = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases}$$

D'autre part  $a + b + c = 3 \Rightarrow a + 1 + c = 3 \Rightarrow a + c = 2$

$$\begin{cases} a + c = 2 \\ 3a - 6 + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ 3a + c = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - c = -2 \\ 3a + c = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \text{ et } c = -3$$

D'où les nombres  $a$  ;  $b$  et  $c$  sont tels que  $a = 5$  ;  $b = 1$  et  $c = -3$

### 7) Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit  $u_n$  une suite arithmétique de raison  $r$ . On a :

$$u_{n+1} - u_n = r \text{ d'où :}$$

- Si  $r > 0$  alors  $u_n$  est croissante
- Si  $r < 0$  alors  $u_n$  est décroissante
- Si  $r = 0$  alors  $u_n$  est constante

### 8) Somme des termes d'une suite arithmétique :

Soit  $u_n$  une suite arithmétique de 1<sup>er</sup> terme  $u_0$  et de raison  $r$ .

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-2} + U_{n-1} + U_n$$

$$S_n = U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + \dots + U_2 + U_1 + U_0$$

$$2S_n = (U_0 + U_n) + (U_1 + U_{n-1}) + (U_2 + U_{n-2}) + \dots + (U_n + U_0)$$

$$2S_n = (U_0 + U_n) + (U_0 + U_n) + (U_0 + U_n) + \dots + (U_0 + U_n)$$

$$\Rightarrow 2S_n = (n + 1) (U_0 + U_n)$$

$$\boxed{S_n = \frac{n+1}{2} (U_0 + U_n)} \Leftrightarrow S_n = \frac{\text{nombre de termes}}{2} (\text{1<sup>er</sup> terme} + \text{dernier terme})$$

$$\text{ou } \boxed{S_n = \frac{(n-P+1)}{2} (U_p + U_n)}$$

**Remarque** : une suite arithmétique est toujours divergente

## VII- Suites géométriques

### Situation problème

Le premier Janvier 1999, la population d'une commune rurale était de 3000 habitants. On admet que cette population diminue de 4 % chaque année.

Calcule la population de cette commune :

- a) Au 1<sup>er</sup> Janvier 2005 ;
- b) Au 1<sup>er</sup> Janvier 2006
- c) Au 1<sup>er</sup> Janvier 2012

### Solution

Soit  $U_n$  la population de cette commune au 1<sup>er</sup> Janvier de l'année n.

Soit  $U_1 = 3000$  la population initiale de cette commune.

On a :

$$U_1 = 3000 .$$

$$U_2 = U_1 - 4 \% U_1 \Rightarrow U_2 = U_1 (1 - 4 \%) = U_1 \left(1 - \frac{4}{100}\right) = U_1 (0,96)$$

$$U_3 = U_2 (0,96)$$

⋮  
⋮  
⋮

$$U_{n+1} = U_n (0,96)$$

$$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = 0,96.$$

**Alors on a : une suite géométrique de raison  $q = 0,96$ .**

D'où son expression est :  $U_n = U_1 (q)^{n-1} = 3000 (0,96)^{n-1}$

Déterminons ainsi la population :

- **Au 1<sup>er</sup> Janvier 2005**

On sait que :  $U_n = 3000 (0,96)^{n-1}$  et  $n = 2005 - 1999 = 6$

D'où la population au 1<sup>er</sup> Janvier 2005 est :  $U_6 = 3000 (0,96)^{6-1} = 3000 (0,96)^5$

$$\Rightarrow U_6 = 2446,11 \approx 2446$$

Ainsi la population au 1<sup>er</sup> Janvier 2005 est : 2244 habitants.

- **Au 1<sup>er</sup> Janvier 2006**

On sait que :  $U_n = 3000(0,96)^{n-1}$  et  $n = 2006 - 1999 = 7$

D'où la population au 1<sup>er</sup> Janvier 2006 est :  $U_7 = 3000(0,96)^{7-1} = 3000(0,96)^6$

$$\Rightarrow U_7 = 2348,27 \approx 2348$$

Ainsi la population au 1<sup>er</sup> Janvier 2006 est : 2348 habitants.

- **Au 1<sup>er</sup> Janvier 2012**

On sait que :  $U_n = 3000(0,96)^{n-1}$  et  $n = 2012 - 1999 = 13$

D'où la population au 1<sup>er</sup> Janvier 2005 est :  $U_{13} = 3000(0,96)^{13-1} = 3000(0,96)^{12}$

$$\Rightarrow U_{13} = 1838,12 \approx 1838$$

Ainsi la population au 1<sup>er</sup> Janvier 20012 est : 1838 habitants.

**1) Définition :**

$U_n$  est une suite géométrique si et seulement si :  $\forall n \in \mathbb{N} \frac{U_{n+1}}{U_n} = q$  ou  $U_{n+1} = qU_n$ .

$q$  est un réel fixé appelé la raison de la suite géométrique.

**Exemple :**

1, 2, 4, 8, 16, 32.....  $2^n$  sont les termes d'une suite géométrique de raison  $q = 2$  et de 1<sup>er</sup> terme  $U_0 = 1$

L'expression de terme général est  $U_n = 2^n$

**2) Expression du 1<sup>er</sup> terme générale**

Soit  $u_n$  une suite géométrique de raison  $q$  et de 1<sup>er</sup> terme  $u_0$

$$\begin{aligned} U_1 &= qU_0 \\ U_2 &= qU_1 \\ U_3 &= qU_2 \\ U_4 &= qU_3 \\ &\vdots \\ U_n &= qU_{n-1} \end{aligned}$$

Multiplions membre à membre les termes de l'égalité.

$$U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4 \times \dots \times U_n = (qU_0) (qU_1) (qU_2) \dots (qU_{n-1})$$

$u_n = q^n \times U_0$  ou d'une manière générale  $U_n = U_p \cdot q^{n-p}$  (après simplification des facteurs semblables dans les deux membres)

Où  $U_p$  désigne le 1<sup>er</sup> terme.

### 3) Produit des termes équidistants des termes extrêmes d'une suite géométrique :

**Théorème :** Le produit de deux termes équidistants des termes extrêmes est égal au produit des termes extrêmes c'est-à-dire  $U_p \times U_{n-p} = U_0 \times U_n$

#### Propriétés :

**P<sub>1</sub> :** Trois nombres **a, b, c** forment une progression géométrique si :

$$b^2 = ac. \text{ (en application du théorème précédent)}$$

**P<sub>2</sub> :** Trois nombres **a, b, c** forment une progression géométrique de raison q si :

$$b = qa \text{ et } c = q^2a.$$

**P<sub>3</sub> :** Quatre nombres **a, b, c, d** forment une progression géométrique de raison q si :

$$b = qa ; c = q^2a \text{ et } d = q^3a$$

#### Exemple

Trouver 3 nombres consécutifs a ; b et c d'une suite en progression géométrique sachant que 
$$\begin{cases} a \cdot b \cdot c = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases}$$

On sait que pour une progression géométrique de 3 termes a ; b ; c , on a :  $a \times c = b^2$   
Ainsi l'équation dévient :

$$\begin{aligned} \begin{cases} (a \cdot c) \cdot b = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} (b^2) \cdot b = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^3 = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -4 \\ c - a = 1 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -4 \\ c = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où les nombres a ; b et c sont tels que  $a = -4 ; b = 3 \text{ et } c = -3$

#### 4) Sens de variation d'une suite géométrique :

Soit  $u_n$  suite géométrique de raison  $q$  et de 1<sup>er</sup> terme  $u_0$  :

- **1<sup>er</sup> cas**  $U_0 > 0$  : si

- $q > 1 \Rightarrow u_n$  est croissante
- $0 < q < 1 \Rightarrow u_n$  est décroissante
- $q = 1$  alors  $u_n$  constante

- **2<sup>e</sup> Cas**  $U_0 < 0$  : si

- $q > 1 \Rightarrow u_n$  est croissante
- $0 < q < 1 \Rightarrow u_n$  est décroissante
- $q = 1 \Rightarrow u_n$  est constante

#### 9) Convergence d'une suite géométrique :

La limite d'une suite étant la limite de son terme général une suite géométrique est convergente si  $-1 < q \leq 1$

La suite est divergente si  $q \in ]-\infty; -1] \cup ]1; +\infty[$

#### 5) Somme des termes d'une suite géométrique :

Soit  $U_n$  une suite géométrique de raison  $q$  et de 1<sup>er</sup> terme  $U_0$

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n \quad (1)$$

$$qS_n = qU_0 + qU_1 + qU_2 + qU_3 + \dots + qU_n \quad (2)$$

**En effectuant la différence des équations (1) et (2), on a :**

$$S_n - qS_n = U_0 - qU_n \text{ or } U_n = U_0 \times q^n$$

$$S_n(1 - q) = U_0 - q(q^n \times U_0)$$

$$S_n(1 - q) = U_0(1 - q^{n+1})$$

$$S_n = \frac{U_0(1 - q^{n+1})}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

$$S_n = \frac{\text{1er terme} (1 - \text{raison}^{\text{nombre de terme}})}{1 - \text{raison}}$$

D'une manière générale si  $U_p$  est le 1<sup>er</sup> terme alors l'expression de la somme est :

$$S_n = \frac{U_p(1-q^{n-p+1})}{1-q} \quad \text{Avec } (q \neq 1)$$

**6) Cas d'une suite géométrique :**

Soit  $u_n$  une suite géométrique de raison  $q$

- Si  $|q| < 1$  alors  $U_n$  converge vers 0
  
- Si  $|q| > 1$  alors  $U_n$  est divergente
  
- Si  $|q| = 1$  alors  $U_n$  converge vers  $U_0$

## VIII- Suites économiques :

### 1) Les intérêts :

L'intérêt est la rémunération d'un placement pendant une période donnée, ( c'est-à-dire entre un temps  $T_1$  et un temps  $T_2$  ).

Ainsi les intérêts sont classés en deux catégories: (**intérêts simples et intérêts composés** ).

#### NB :

- L'intérêt simple est utilisé pour des placements à court et moyen terme.
- L'intérêt composé est utilisé pour des placements à long terme.

#### a- Intérêts simples :

Un placement est fait à intérêt simple, lorsque, à des époques fixées d'avance celui qui prête ou place son argent en touche les intérêts de façon que le capital placé reste le même jusqu'à l'époque du remboursement.

Sa formule est :

$$I = \frac{C \cdot t \cdot n}{P} = \frac{(\text{Capital placé}) \cdot (\text{Taux d'intérêt}) \cdot (\text{Durée du placement})}{\text{Période}}$$

#### NB :

- Si :  $n$  est en jours, alors la période  $P = 36.000$ .
- Si :  $n$  est en mois, alors la période  $P = 1.200$ .
- Si :  $n$  est en année, alors la période  $P = 100$ .

#### b- Intérêts composés :

Un placement est fait à intérêt composé, lorsque, à la fin de chaque unité de temps, l'intérêt est ajouté au capital pour produire un intérêt à son tour, pendant l'unité de temps suivante.

Sa formule est :

$$I_n = C_0[(1 + i)^n - 1] = (\text{Capital initial})[(1 + \text{taux d'intérêt})^{\text{Durée}} - 1]$$

#### NB :

- 1 an = 2 semestres = 4 trimestres = 12 mois.
- 1 semestre = 2 trimestres = 6 mois =  $\frac{1}{2}$ an.
- 1 trimestre =  $\frac{1}{2}$ semestre = 3 mois =  $\frac{1}{4}$ an.

➤ 1 bi - an = 4 semestres = 8 trimestres = 24 mois = 2 ans.

c- Valeurs acquises :

$$C_n = C_0(1 + i)^n = (\text{Capital initial})(1 + \text{Taux d'intérêt})^{\text{Durée}}$$

NB :

Le taux d'intérêt s'exprime toujours en pourcentage ( % )

2) Taux de décroissance – Taux d'accroissement d'une population :

a-Notion de population et d'individu :

L'ensemble sur le quel porte une étude statistique est appelé **population** et un élément de cet ensemble est l'**individu**.

NB :

Dans une étude statistique, les mots : population et individu peuvent désignés des **êtres**, des **objets animés** ou **inanimés**.

b-Taux de décroissance d'une population :

Définition :

Soit (**t** en %) est le taux de décroissance d'une population et **U<sub>P</sub>** la population initiale à l'année n, alors le taux de décroissance de cette population représente une progression géométrique de premier terme **U<sub>P</sub>** et de raison **q = 1 - t**.

Ainsi le taux de décroissance d'une population à l'année n est donné par l'expression :

$$U_n = U_P(1 - t)^{n-P} \quad \text{ou} \quad U_n = U_P(q)^{n-P} \quad \text{avec } q = 1 - t.$$

NB :

Si la population initiale est **U<sub>P</sub>** à l'année **n<sub>1</sub>**, alors la population à l'année **n<sub>2</sub>** est :

$$U_{n_2-n_1} = U_P(1 - t)^{(n_2-n_1)-P} \quad \text{ou} \quad U_{n_2-n_1} = U_P(q)^{(n_2-n_1)-P} \quad \text{avec } q = 1 - t$$

### c-Taux de d'accroissement d'une population :

#### Définitions :

**Définition 1 :** Soit (  $t$  en %) est le taux d'accroissement d'une population et  $U_P$  la population initiale à l'année  $n$ , alors le taux d'accroissement de cette population représente une progression géométrique de premier terme  $U_P$  et de raison  $q = 1 + t$ .

Ainsi le taux d'accroissement d'une population à l'année  $n$  est donné par l'expression :

$$U_n = U_P(1 + t)^{n-P} \quad \text{ou} \quad U_n = U_P(q)^{n-P} \quad \text{avec } q = 1 + t.$$

#### NB :

Si la population initiale est  $U_P$  à l'année  $n_1$ , alors la population à l'année  $n_2$  est :

$$U_{n_2-n_1} = U_P(1 + t)^{(n_2-n_1)-p} \quad \text{ou} \quad U_{n_2-n_1} = U_P(q)^{(n_2-n_1)-p} \quad \text{avec } q = 1 + t$$

**Définition 2 :** Si  $r$  exprimé ( en FCFA) est la raison d'accroissement d'une population et  $u_p$  la population initiale à l'année  $n$ , alors la raison d'accroissement de cette population représente une progression arithmétique de premier terme  $u_p$  et de raison  $r$ .

Ainsi la raison d'accroissement d'une population à l'année  $n$  est donnée par l'expression :

$$u_{n+1} - u_n = r$$

#### Evaluation1

Ali a reçu de son père une somme de 100.000 FCFA.

Après réception, il dépose cette somme à la banque le 1<sup>er</sup> Janvier 2009 à intérêt composé au taux annuel de 5 % en vue d'acheter une moto à 300000 FCFA.

1. A partir de quelle année pourra-t-il acheter sa moto sachant qu'il ne dispose que de cette somme ?
2. Quelle serait la nouvelle valeur acquise par Ali s'il place un capital de 100.000 FCFA au bout de 30 semestres au taux de 2 % par semestre ?

#### Evaluation2

Le premier Janvier 2011, le nombre d'élève d'une école était de 6000 .

Le nombre d'élève de cette école diminue chaque année de 5 % faute de performance.

Quelle sera le nombre d'élève de cette école au 1<sup>er</sup> Janvier 2015 ?

### Evaluation3

Le premier Janvier 2012, le prix d'essence au Mali était de 690 FCFA.

**a-**Sachant que le prix du litre subit une augmentation de 5 FCFA au 1<sup>er</sup> Janvier de chaque année, calculer le prix du litre d'essence au premier Janvier 2013 ? Au premier Janvier 2014 ?

**b-**Soit  $p_n$  le prix du litre d'essence au premier Janvier +  $n$ , calculer :  $P_n$  et  $p_{n+1} - p_n$  puis en déduire la nature et la raison de la suite  $p_n$

### Synthèse 1 :

**a-**Déterminons le temps au bout du quel Ali pourra acheter sa moto.

Soient :

- $C_0 = 100.000$  FCFA : le capital initial.
- $C_n = 300.000$  FCFA : la valeur acquise.
- $i = 5\% = \frac{5}{100} = 0,05$  : le taux d'intérêt.

Calculons ainsi la durée  $n$  pour que Ali puisse acheter sa moto.

$$\begin{aligned} \text{On a : } C_n &= C_0(1+i)^n \Leftrightarrow (1+i)^n = \frac{C_n}{C_0} \Rightarrow (1+0,05)^n = \frac{300000}{100000} \\ &\Rightarrow (1,05)^n = 3 \text{ (or } a^n = e^{n \ln a} \text{)} \end{aligned}$$

$$(1,05)^n = 3 \Leftrightarrow e^{n \ln(1,05)} = 3 \text{ (or } e^a = b \Leftrightarrow a = \ln b \text{)}$$

$$\begin{aligned} e^{n \ln(1,05)} = 3 &\Leftrightarrow n \ln(1,05) = \ln 3 \Rightarrow n = \frac{\ln 3}{\ln(1,05)} \\ \Rightarrow n &= \frac{1,09}{0,04} \Rightarrow n = 27,25 \approx 27. \end{aligned}$$

**Donc Ali pourra acheter sa moto au bout de 27 ans.**

**b-**Déterminons la nouvelle valeur acquise par Ali au bout de 30 semestres au taux de 2 %.

$$\begin{aligned} C_n &= C_0(1+i)^n \Rightarrow C_{30} = 100.000(1+2\%)^{30} \Leftrightarrow C_{30} = 100.000(1+0,02)^{30} \\ \Rightarrow C_{30} &= 100.000(1,02)^{30} = 181.136 \text{ FCFA.} \end{aligned}$$

**Donc Ali aura une valeur acquise de 181.136 FCFA au bout de 30 semestres.**

## Synthèse 2

Soit  $U_n$  le nombre d'élève de cette école au 1<sup>er</sup> Janvier de l'année  $n$ .

Soit  $U_1 = 6000$  le nombre d'élève de cette école au 1<sup>er</sup> Janvier 2011.

On a :

$$U_1 = 6000 .$$

$$U_2 = U_1 - 5 \% U_1 \Rightarrow U_2 = U_1(1 - 5 \%) = U_1\left(1 - \frac{5}{100}\right) = U_1(0,95)$$

$$U_3 = U_2(0,95)$$

⋮  
⋮  
⋮

$$U_{n+1} = U_n(0,95)$$

$$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = 0,95.$$

**Alors on a : une suite géométrique de raison  $q = 0,95$ .**

D'où son expression est :  $U_n = U_1(q)^{n-1} = 6000(0,95)^{n-1}$

Déterminons ainsi le nombre d'élève de cette école au 1<sup>er</sup> Janvier 2015 :

- **Au 1<sup>er</sup> Janvier 2015**

On sait que :  $U_n = 6000(0,95)^{n-1}$  et  $n = 2015 - 2011 = 4$

D'où la population au 1<sup>er</sup> Janvier 2015 est :  $U_4 = 6000(0,95)^{4-1} = 6000(0,95)^3$

$$\Rightarrow U_4 = 5144,25 \approx 5144$$

Ainsi l'effectif de l'école serait de 5144 élèves au 1<sup>er</sup> Janvier 2015.

### Synthèse 3 :

**a-**Sachant que le prix du litre subit une augmentation de 5 FCFA au 1<sup>er</sup> Janvier de chaque année, calculons le prix du litre d'essence au premier Janvier 2013 ? Au premier Janvier 2014 ?

Soit  $P_0 = 690$  FCFA le prix initial de l'essence au 1<sup>er</sup> Janvier 2012.

**Au 1<sup>er</sup> Janvier 2013, on a :**  $P_1 = P_0 + 5 \Rightarrow P_1 = 690 + 5 = 695$  FCFA.

**Au 1<sup>er</sup> Janvier 2014, on a :**  $P_2 = P_1 + 5 \Rightarrow P_2 = 695 + 5 = 700$  FCFA.

**b-**Si  $p_n$  est le prix du litre d'essence au premier Janvier +  $n$ , calculons :  $p_n$  et  $p_{n+1} - p_n$  puis en déduisons la raison et la nature de la suite  $p_n$ .

On sait que :

$$P_0 = 690.$$

$$P_1 = P_0 + 5.$$

$$P_2 = P_1 + 5.$$

$$P_3 = P_2 + 5.$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$p_n = p_{n-1} + 5n$$

**Alors  $p_n = P_0 + 5n$**

Calculons  $p_{n+1} - p_n$

On sait que  $p_n = P_0 + 5n \Rightarrow p_{n+1} = P_0 + 5(n + 1) = P_0 + 5n + 5$ .

Alors  $p_{n+1} - p_n = (P_0 + 5n + 5) - (P_0 + 5n) = P_0 + 5n + 5 - P_0 - 5n = 5$

$\Rightarrow p_{n+1} - p_n = 5$ .

**Déduction :**

$p_n$  est une suite arithmétique de raison  $r = 5$  et de premier terme  $p_0 = 690$ .

# EXERCICES

## Exercice 1 :

Soit  $U_n$  une suite géométrique décroissante  $U$  tel que 
$$\begin{cases} U_0 \times U_3 = 32 \\ U_0 + U_3 = 18 \end{cases}$$

- 1) Calculer  $U_0$  et  $U_3$
- 2) Déterminer la raison de la suite  $U$ .
- 3) Donner l'expression de la suite  $U$  en fonction de  $n$ .
- 4) On pose  $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ . Calculer  $S_n$  en fonction de  $n$  puis en déduire la somme des 20 premiers termes de la suite  $U_n$

## Exercice 2 :

Soit la suite  $U_n$  définie par :

$$\begin{cases} U_1 = -2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{1 - U_n} \end{cases} \text{ et la suite } V_n \text{ définie}$$

$$\text{Par } V_n = \frac{U_n + 1}{U_n}$$

- 1) Calculer  $V_{n+1}$  en fonction de  $U_n$  puis en fonction de  $V_n$ .
  - 2) En déduire que  $V_n$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme  $V_1$ .
  - 3) Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .
  - 4) On pose  $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$
- a) Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$   
b) Calculer la somme de 30 premiers termes de la suite  $V_n$

## Exercice 3 :

Soit la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  à termes positifs tel que :

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ (U_{n+1})^2 = e U_n \end{cases}$$

- 1) Calculer  $U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4$   
(on donnera les résultats sous forme de  $e^v$ )
- 2) On pose  $V_n = \ln U_n - a$  ; où  $(a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*)$ 
  - a) Déterminer le réel  $a$  pour que  $V_n$  soit une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme  $V_1$ .
  - b) Calculer la limite de  $V_n$  puis celle de  $U_n$  en +
- 3) Soit  $a = 1$ , on désigne par  $S_n$  la somme des  $n$  premiers termes de la suites  $U_n$ .  
Déterminer  $S_n$  et  $P_n$  en fonction de  $n$ .

#### **Exercice 4 :**

On donne deux suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  telles que,  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} U_{n+1} = 3U_n + 2V_n \\ V_{n+1} = 2U_n + 3V_n \end{cases} \text{ et } \begin{cases} U_0 = 1 \\ V_0 = 2 \end{cases}$$

- 1) Calculer  $U_1 ; V_1 ; U_2 ; V_2 ; U_3$  et  $V_3$ .
- 2) On définit deux suites  $(X_n)$  et  $(Y_n)$  par :  $X_n = U_n + V_n$  et  $Y_n = U_n - V_n$ 
  - a) Montrer que  $(X_n)$  est une suite géométrique et  $(Y_n)$  une suite constante.
  - b) Exprimer  $U_n$  puis  $V_n$  en fonction de  $n$
- 3) Calculer la somme des  $n$  premiers termes de la suite  $X_n$ .

#### **Exercice 5 :**

Quatre (4) entiers strictement positifs  $a, b, c,$  et  $d$  forment dans cet ordre une suite géométrique dont la raison est un entier premier avec  $a$ .

Trouver ces nombres sachant qu'ils vérifient en outre la relation  $10a^2 = d - b$ .

#### **Exercice 6 :**

Soit  $(U_n)$  une suite dans laquelle les dix premiers termes de la suite sont en progression arithmétique de raison  $r$  et à partir de  $U_{10}$  les termes sont en progression géométrique de raison  $q$ .

On donne :  $U_1 = 0 ; U_{16} = \frac{-1}{27}$  et  $rq = 1$

- 1) Calculer  $q ; r ; U_{10}$  et  $U_{11}$
- 2) Calculer deux cas suivants : a)  $n \leq 10$   
b)  $n > 10$

#### **Exercice 7 :**

Soit la suite  $(U_n)$  définie par son premier terme  $U_0$  et par la relation de récurrence

$$U_{n+1} = \frac{4}{4 - U_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

- 1)
  - a) Déterminer  $U_0$  pour que  $U_n$  soit constante.
  - b) Démontrer que si  $U_n < 2$  alors  $U_n < U_{n+1} < 2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). En déduire que si  $U_0 < 2$  alors pour tout entier naturel on a :  $U_n < 2$  et que la suite est monotone.
- 2) On suppose maintenant que  $U_0 = -1$ 
  - a) Calculer  $U_1 ; U_2 ; U_3$ .
  - b) Soit la suite  $V_n$  définie par  $V_n = \frac{1}{U_n - 2}$ . Démontrer que  $V_n$  est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.
  - c) Calculer  $U_n$  en fonction de  $n$  puis étudier sa limite en  $+\infty$ .

### Exercice 8 :

- 1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel  $m$ , les restes de la division euclidienne par 16 des entiers  $5^m$  et  $6^m$ .
- 2) Soit  $(U_n)$  la suite arithmétique de raison 16 et de premier terme  $U_0 = 9$  et  $V_p$  la suite géométrique de raison  $S$  et de premier terme  $V_0 = 1$ . Démontrer que ces deux suites ont une infinité de termes égaux dont on calculera les deux premiers.
- 3) Soit  $(U'_n)$  la suite arithmétique de raison 16 et de premier terme  $U'_0 = 8$  et  $(V'_p)$  la suite géométrique de raison 6 et de premier terme  $V'_0 = 9$ . Démontrer que ces deux suites n'ont qu'un seul terme en commun que l'on déterminera. /.

### Exercice 9 :

On considère la suite numérique  $(U_n)$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n = e^{2n-1}$

- 1) a) Calculer  $U_0, U_1 ; U_2 ; U_3$  et  $U_{n+1}$   
b) Démontrer que la suite  $U_n$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.
- c) Exprimer en fonction de  $n$  la somme  
 $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$ .
- d) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$
- e) Trouver la valeur minimum de  $n$  telle que  $S_n \geq 10$

**NB :** On donne  $e \approx 2,7 ; e^3 \approx 19,7$

$e^2 \approx 7,3$  et  $\ln 171 \approx 5,14$

- 2) Soit la suite  $V_n$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = l_n(U_n)$ .

a) Exprimer la somme

$$S'_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$$

b) Exprimer le produit

$$P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$$

### Exercice10 :

Soit  $U_n$  la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \ln(1 + U_n) \end{cases}$$

- 1) Tracer la courbe représentation de la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$  puis en déduire une représentation graphique des 4 premiers termes de la suite  $U_n$ .
- 2) Démontrer que la suite  $(U_n)$  est convergente et démontrer qu'elle converge vers 0.

### Exercice11:

Un commerçant place en banque une somme de 200 000 F CFA le 02/01/2008. La banque lui propose un intérêt de 5% par mois.

- a) Calculer l'intérêt perçu le 31/01/2008
- b) Quel montant aura-t-il le 31/12/2008.

### Exercice12

Un capital A est placé à intérêts composés au taux de 3 % l'an. On appelle  $C_0$  le capital initial et  $C_n$  le capital après n années.

- 1) Expliquer la relation  $C_1 = 1.03C_0$  et écrire le capital  $C_n$  en fonction de  $C_0$  et de n en justifiant soigneusement cette relation.
- 2) Au bout de combien d'années le capital est-il doublé ?
- 3) Au bout de combien d'années le capital est-il triplé ?

### Exercice13 (non corrigé)

On considère deux suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  définies pour tout entier naturel n par  $U_0 = 1$  ;  $U_{n+1} = 2U_n + 1$  et  $V_n = U_{n+1} - U_n$ .

- a) Montrer que  $V_n$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- b) Exprimer, pour tout entier naturel n,  $V_n$  en fonction de n.
- c) Soit la somme  $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}$
- d) Montrer que pour tout entier naturel n,  $S_n = U_n - U_0$ .
- e) Calculer  $S_n$  en fonction de n, puis  $U_n$  en fonction de n.

### Exercice14

1) soient a et b deux réels tel que  $(a ; a + 4b ; 5a + 2b)$  et  $(b + 3 ; 3a + 1 ; 6a + b)$  soit des termes consécutifs de suite respectivement arithmétique et géométrique. Trouver a et b.

2) Quatre entiers strictement positifs a ; b ; c et d, forment dans cet ordre une suite géométrique dont la raison q est un entier premier avec a. Trouver ces nombres sachant qu'ils vérifient en outre la relation  $10a^2 = d - b$ .

3) soient  $Z_1 ; Z_2$  et  $Z_3$  trois nombres complexes dont le produit est  $3i\sqrt{3}$ , les arguments respectifs  $a_1 ; a_2$  et  $a_3$  forment une suite arithmétique de raison  $\frac{\pi}{3}$  et les modules  $r_1 ; r_2$  et  $r_3$  une suite géométrique de raison 2. Sachant que  $0 < a_1 < \frac{2\pi}{3}$ .  
Déterminer :  $Z_1 ; Z_2$  et  $Z_3$ .

# Primitives-Intégrales-Calculs d'aires

## Objectifs

Ce chapitre vise à :

- mettre en place la notion de primitive
- initier les élèves au calcul de primitives à partir des formules de dérivation.

## Savoirs et savoir-faire

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"><li>• Définition d'une primitive.</li><li>• Existence de primitives d'une fonction continue sur un intervalle (admis).</li><li>• Ensemble des primitives d'une fonction continue</li><li>• Unicité de la primitive d'une fonction prenant une valeur donnée en un point donné</li><li>• primitives des fonctions de référence.</li><li>• Primitive de <math>u + v</math>, <math>\lambda u</math> (<math>\lambda \in \mathbb{R}</math>), <math>v' \times (u'ov)</math>, <math>u' \times u^n</math> (<math>n \in \mathbb{Q} - \{-1\}</math>)</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Déterminer les primitives d'une fonction en utilisant les primitives des fonctions de référence.</li><li>• Déterminer la primitive d'une fonction qui prend une valeur donnée en un point donné.</li><li>• Déterminer les primitives d'une fonction du type :<ul style="list-style-type: none"><li>- <math>\alpha u + \beta v</math>, <math>(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2</math> ;</li><li>- <math>v' \times (u'ov)</math> ;</li><li>- <math>u' \times u^n</math> (<math>n \in \mathbb{Q} - \{-1\}</math>)</li></ul></li></ul>

## I) Primitives :

### Situation problème :

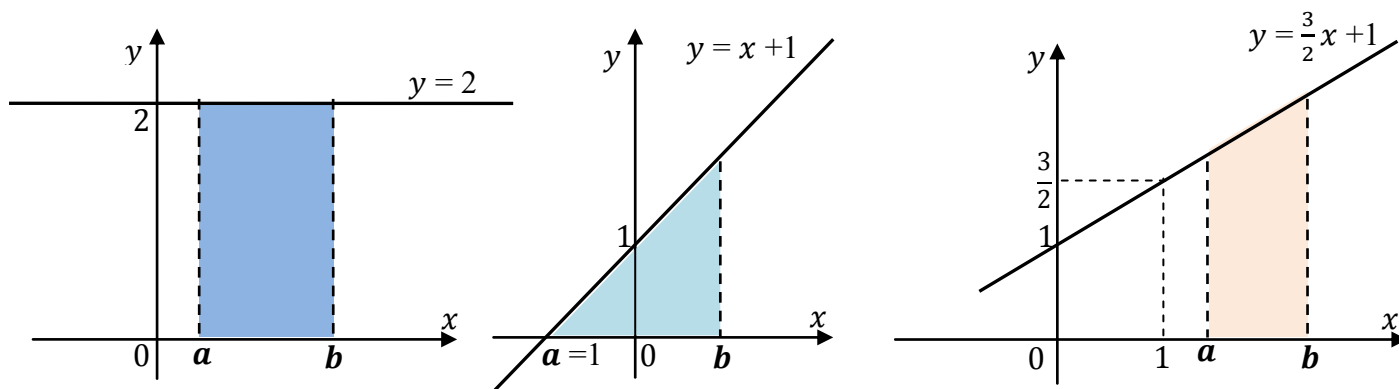
- 1) Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = 2x - 5$ 
  - a- Détermine une fonction telle que  $F'(x) = f(x)$
  - b- Même question pour  $f(x) = x^2 + 2$
  - c- Peux-tu en donner d'autres ?
  
- 2)  $f$  est le polynôme défini par  $f(x) = x + 1$ 
  - a- Trouver une fonction  $F$  dont la dérivée est  $f$
  - b- Montrer que pour tout réel  $c$  la fonction  $G$  définie par  $G(x) = F(x) + c$  est telle que  $G'(x) = f(x)$

### Activité 1 (Recherche de primitive)

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) : 3x^2 - 2x + 1$   
Détermine une fonction  $F$  du 3<sup>ième</sup> degré telle que ;  $F'(x) = f(x)$

### Activité 2 (Calculs d'aire et de primitive)

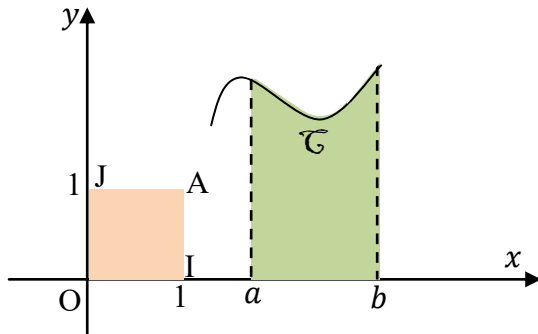
L'unité de longueur est le cm, l'unité d'aire est le  $\text{cm}^2$  et les repères utilisés sont orthonormaux.



Dans chacun des cas ci-dessus :

- a) Calculez l'aire du domaine colorié ;
- b) Trouvez une primitive  $F$  de la fonction  $f$  représentée, puis calculez :  $F(b) - F(a)$ .
- c) Que constatez-vous ?

**Conclusion** : de façon générale, nous admettrons que lorsque  $f$  est une fonction **continue** sur l'intervalle  $[a; b]$ , alors **l'aire du domaine** colorié ci-contre est égale à  $F$  est une **primitive de  $f$**  sur  $[a; b]$  ( l'unité d'aire étant l'aire du rectangle **OIAJ** ).



### 1) Définition :

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . On appelle primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$  toute fonction  $F$  dérivable sur  $I$  telle que  $\forall x \in I; F'(x) = f(x)$

1. a)  $f$  est le polynôme défini par  $f(x) = x + 1$ .

Trouvez une primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire une fonction  $F$  dont la dérivée soit  $f$ .

b) Montrez que pour tout réel  $c$ , la fonction  $G$  définie par  $G(x) = F(x) + c$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

c) Trouvez une primitive  $G$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $G(2) = -3$ .

Existe-t-il d'autres primitives de  $f$  qui prennent la valeur  $-3$  en  $2$  ?

2. Dans chaque cas, trouvez une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f$  définie par :

a)  $f(x) = 2x^2 + x + 1$ . b)  $f(x) = x^3 - 4x + \sqrt{2}$ . c)  $f(x) = 2 + \cos x$ .

### 2) Propriétés

**P<sub>1</sub>** : Toute fonction continue sur un intervalle  $I$  admet une infinité de primitives sur cet intervalle.

**P<sub>2</sub>** : L'ensemble des primitives d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $I$  est l'ensemble des fonctions définies sur cet intervalle par  $x \rightarrow F(x) + k$  où  $k$  est un nombre réel.

### 3) Recherche de la primitive d'une fonction :

La fonction  $x \rightarrow x^4$  a pour dérivée  $x \rightarrow 4x^3$

Donc la fonction  $x \rightarrow \frac{1}{4}x^4$  a pour dérivée  $x \rightarrow x^3$

Alors d'une manière générale,  $n$  étant un nombre entier naturel non nul, la fonction :

$x \rightarrow x^{n+1}$  a pour dérivée  $x \rightarrow (n+1)x^n$

donc  $x \rightarrow \frac{1}{n+1}x^{n+1}$  est une primitive de  $x^n$ .

Ainsi par lecture inverse des tableaux de dérivation, on établit le tableau des primitives :

#### a) Primitives des fonctions usuelles

Fonctions	Primitives	Intervalles
$a (a \in \mathbb{R})$	$ax + k$	$\mathbb{R} = ]-\infty ; +\infty[$
$x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R} = ]-\infty ; +\infty[$
$ax^n$	$\frac{ax^{n+1}}{n+1} + k$	$\begin{cases} \mathbb{R}^* \text{ si } n < 0 \\ \mathbb{R} \text{ si } n > 0 \end{cases}$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x} + k$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + k$	$\mathbb{R}^*$ avec $(n \neq 1)$
$\frac{a}{x^n}$	$\frac{-a}{(n-1)x^{n-1}} + k$	$\mathbb{R}^*$ avec $(n \neq 1)$
$\frac{1}{x}$	$\ln x  + k$	$\mathbb{R}_+$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	$\mathbb{R}_+$
$\frac{a}{\sqrt{x}}$	$2a\sqrt{x} + k$	$\mathbb{R}_+$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + k$	$\mathbb{R}_+$
$\sqrt{ax+b}$	$\frac{2}{3a}(ax+b)\sqrt{ax+b} + k$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + k$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + k$	$\mathbb{R}$

$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tang}^2 x$	$\operatorname{Tgx} + k$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{cotang}^2 x$	$-\operatorname{cotgx} + k$	$\mathbb{R} - \{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$
$\operatorname{Sin}(ax + b) (a \in \mathbb{R}^*)$	$-\frac{1}{a} \operatorname{Cos}(ax + b) + k$	$\mathbb{R}$ .
$\operatorname{Cos}(ax + b) (a \in \mathbb{R}^*)$	$\frac{1}{a} \operatorname{Sin}(ax + b) + k$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{tg}(ax + b) (a \in \mathbb{R}^*)$	$\frac{1}{a} \operatorname{Cos}(ax + b) + k$	$\mathbb{R}$

**b) Opérations sur les Primitives :**

Fonctions	Primitives
$u' + v'$	$u + v + K$
$u'v + v'u$	$u \cdot v + K$
$au' (a \in \mathbb{R})$	$au + K$
$u' \cdot u^n$	$\frac{(u)^{n+1}}{n+1} + k$
$\frac{u'}{(u)^n}$	$\frac{-1}{(n-1)(u)^{n-1}} + k$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u  + k$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$
$\operatorname{Sin}(u)$	$-\frac{1}{u'} \operatorname{Cos}(u) + k$
$\operatorname{Cos}(u)$	$\frac{1}{u'} \operatorname{Sin}(u) + k$
$\frac{u'}{\cos^2 u} = 1 + \operatorname{tang}^2 u$	$\operatorname{tg}(u) + k$
$\frac{u'}{\sin^2 u} = 1 + \operatorname{cotang}^2 u$	$\operatorname{Cotg}(u) + k$

**NB:**  $(u)^n \sqrt{u} = (u)^{\frac{2n+1}{2}}$

**Exemple**

Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes

a)  $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 2$  ; b)  $f(x) = 1 - \sqrt{3x-1}$

c)  $f(x) = \frac{1}{(2x+3)^5}$  ; d)  $f(x) = (x^3 + x)\sqrt{x^4 + 2x^2}$

e)  $f(x) = (x + 1)\sqrt{x+1}$ ; f)  $f(x) = \frac{18x-15}{\sqrt{3x^2 - 5x + 1}}$

**Solution :**

a)  $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + K$

b)  $f(x) = 1 - \sqrt{3x-1} \Rightarrow F(x) = x - \frac{2}{9}(3x-1)\sqrt{3x-1} + K$

c)  $f(x) = \frac{1}{(2x+3)^5} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{(2x+3)^5} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(2x+3)^5}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{(5-1)(2x+3)^{5-1}} + K \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{4(2x+3)^4} + K$

$\Rightarrow F(x) = \frac{-1}{8(2x+3)^4} + K$

d)  $f(x) = (x^3 + x)\sqrt{x^4 + 2x^2} \Leftrightarrow f(x) = (x^3 + x)(x^4 + 2x^2)^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{4}{4}(x^3 + x)(x^4 + 2x^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}(4x^3 + 4x)(x^4 + 2x^2)^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (x^4 + 2x^2)^{\frac{1}{2}+1} \right] + K \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (x^4 + 2x^2)^{\frac{1}{2}+1} \right] + K$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\frac{3}{2}} (x^4 + 2x^2)^{\frac{3}{2}} \right] + K \Rightarrow F(x) = \frac{1}{6} (x^4 + 2x^2)^{\frac{3}{2}} + K$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{6} (x^4 + 2x^2)^{\frac{3}{2}} + K \Rightarrow F(x) = \frac{1}{6} (x^4 + 2x^2)\sqrt{x^4 + 2x^2} + K$

e)  $f(x) = (x + 1)\sqrt{x+1} \Leftrightarrow f(x) = (x + 1)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow F(x) = \frac{5}{2} (x + 1)^{\frac{5}{2}} + K$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{5}{2}(x+1)^2\sqrt{x+1} + K$$

$$f) f(x) = \frac{18x-15}{\sqrt{3x^2-5x+1}} \Leftrightarrow f(x) = 3 \cdot \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2-5x+1}} \Rightarrow$$

$$F(x) = 3(2\sqrt{3x^2-5x+1}) + K \Rightarrow F(x) = 6\sqrt{3x^2-5x+1} + K$$

## II) Intégrale d'une fonction

### Objectifs

Ce thème vise à :

- Calculer des intégrales à l'aide de techniques particulières (utilisation des primitives, intégration par partie, changement de variable affine) ;
- Réinvestir dans les calculs aires les techniques du calcul intégral ;
- Elargir le champ des fonctions étudiées à des fonctions définies par une intégrale.

### Savoirs et savoir-faire

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Définition de l'intégrale d'une fonction continue <math>f</math> :  <math>\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)</math> où <math>F</math> est une primitive de <math>f</math>.</li> <li>• La fonction <math>x \mapsto \int_a^x f(t)dt</math> est l'unique primitive de <math>f</math> qui s'annule en <math>a</math>.</li> <li>• Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue positive.</li> <li>• Propriétés : <ul style="list-style-type: none"> <li>- Linéarité ;</li> <li>- Relation de Chasles ;</li> <li>- Positivité ;</li> <li>- Si <math>f \leq g</math> sur <math>[a, b]</math> alors  <math>\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt</math> ;</li> <li>- Inégalité de la moyenne :  <ul style="list-style-type: none"> <li>- Si <math>m \leq f \leq M</math> sur <math>[a, b]</math> alors  <math>m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)</math> ;</li> </ul> </li> </ul> </li> <li>Si <math> f  \leq M</math>, alors <math> \int_a^b f(t)dt  \leq M b-a </math>.</li> <li>• Valeur moyenne d'une fonction ;</li> <li>• Intégration par parties ;</li> <li>• Changement de variable affine.</li> <li>• application au calcul d'aire.</li> <li>• La fonction du type <math>F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Calculer une intégrale : <ul style="list-style-type: none"> <li>- En utilisant les primitives des fonctions usuelles ;</li> <li>- En utilisant une intégration par partie ;</li> <li>- En utilisant un changement de variable affine</li> </ul> </li> <li>• Utiliser la relation de Chasles pour effectuer un calcul intégral.</li> <li>• Connaissant un encadrement d'une fonction <math>f</math> sur <math>[a ; b]</math>, trouver un encadrement de <math>\int_a^b f(t)dt</math>.</li> <li>• Calculer l'aire d'une partie du plan limitée par : <ul style="list-style-type: none"> <li>- La courbe représentative d'une fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équation <math>x = a</math> et <math>x = b</math>.</li> <li>- Les courbes représentatives de deux fonctions et les droites d'équation <math>x = a</math> et <math>x = b</math>.</li> </ul> </li> <li>• Etant donné la fonction <math>F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt</math> : <ul style="list-style-type: none"> <li>- à partir d'une majoration et d'une minoration donnée, déduire l'existence ou non de la limite de <math>F</math> aux bornes de son ensemble de définition ;</li> <li>- étudier les variations de <math>F</math> ;</li> <li>- donner une allure de la présentation graphique de <math>F</math>.</li> </ul> </li> </ul>

## Situation problème :

Construis dans un repère orthonormé  $(O ; I ; J)$  du plan affine la droite  $\Delta : y = x + 2$  et la droite d'équation  $x = 3$  ; on désigne par  $A$  le point d'intersection de  $\Delta$  et l'axe des ordonnées

Par  $B$  et  $C$  les points d'intersections de  $\Delta$  et de  $x = 3$  et de l'axe des abscisses avec  $x = 3$

- Calcule l'aire du quadrilatère  $OABC$
- Calcule une primitive  $F$  de  $f$  tel que  $f(x) = x + 2$
- Calcule  $F(3) - F(0)$  puis compare-le à l'aire du trapèze  $OABC$

### 1) Définition :

Soit  $f$  une fonction définie, dérivable sur un intervalle  $I = [a, b]$  et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ . On appelle intégrale de la fonction  $f$  entre  $a$  et  $b$  le nombre réel  $A$  tel que :

$$A = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

### 2) Propriétés :

**Propriété 1 :** (linéarité)

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $I = [a ; b]$ , on a :

- $\int_a^b (f + g)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R} ; \int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \int_a^b \alpha f(x)dx + \int_a^b \beta g(x)dx$
- $\forall k \in \mathbb{R} ; \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$
- Si  $f \geq 0$  ; alors  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Si  $f \geq g$  ; alors  $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
- Si  $|f|$  est continue sur  $I$ , alors  $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f|dx$

**Propriété 2 :** (Relation de Chasles).

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ .  
Soient trois réels  $a, b, c$  éléments de l'intervalle  $I$

$$\text{D'après Chasles } \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

**Conséquences :**

- si  $a = b$  alors  $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

**Propriété 3 :** (Inégalité et valeur de la moyenne)

a) **Inégalité de la moyenne :**

Si  $a \leq b$  et  $m \leq f \leq M$ , alors on a :  $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$

b) **Valeur moyenne :**

On appelle valeur moyenne de  $f$ , le réel  $\bar{M}$  tel que :

$\bar{M} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ . et il existe un réel  $C \in [a, b]$  tel que :

$$f(C) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

**Exemple :**

Encadrer l'intégrale  $A = \int_0^{2\pi} (2 - \sin x)dx$

**Solution :**

$A = \int_0^{2\pi} (2 - \sin x)dx$  ; Posons  $f(x) = 2 - \sin x$ .

Puisque  $0 \leq x \leq 2\pi$  et  $-1 \leq \sin x \leq 1$

Alors le minimum et le maximum de  $f$  sont :

$$m = (2 - 1) = 1 ; M = (2 - (-1)) = 3$$

D'où l'encadrement :  $m(b-a) \leq \int_0^{2\pi} f(x)dx \leq M(b-a)$

est équivalent à :  $1(b-a) \leq \int_0^{2\pi} f(x)dx \leq 3(b-a)$

Or  $a = 0$  et  $b = 2\pi$

$$\Leftrightarrow 1(2\pi - 0) \leq \int_0^{2\pi} f(x)dx \leq 3(2\pi - 0)$$

$$\Rightarrow 2\pi \leq \int_0^{2\pi} f(x)dx \leq 6\pi$$

### III) Primitives et intégrales indéfinies :

#### Théorème 1 :

Si  $f$  est une fonction continue et  $F$  sa primitive, alors, on peut écrire  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

De même on a :  $\frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$

#### 1) Définition :

Si  $F'(x) = f(x)$ , on dit que  $F(x)$  est une primitive de  $f(x)$  et on peut symboliquement écrire

$$F(x) = D^{-1}[f(x)]$$

Où  $D^{-1}$  indique l'opération inverse de la dérivée.

#### Théorème 2 :

Si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux primitives de  $f(x)$ , il s'en suit que :  $F_1(x) = F_2(x) + C$ . Où  $C$  est une constante

#### Théorème 3 :

Si  $F_1(x)$  est une primitive quelconque de  $f(x)$ , alors  $F(x) = \int_a^x f(t)dt = F_1(x) - F_1(a)$

C'est-à-dire que la valeur de l'intégrale définie peut s'obtenir à partir d'une de ses primitives évaluées à la limite supérieure et à la limite inférieure.

## IV) Intégration par parties – Intégration par changement de variable affine

### 1) Intégration par Parties

#### Théorème :

Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions différentiables sur un intervalle  $I = [a, b]$ , alors on appelle intégration par parties, toutes opérations définie par :

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$

### 2) Intégration par substitution ou par changement de variable

Dans certaines intégrales, l'intégration est effectuée plus facilement lorsqu'on substitue à la place de la variable  $x$  une autre variable qui est fonction de  $x$ .

#### Méthode pratique :

Pour calculer l'intégrale  $\int_a^b f(\alpha t + \beta) dt$  ( $\alpha \neq 0$ ) ; on utilise la méthode suivante :

- faire le changement de variable en posant :  
 $u = \alpha t + \beta$  et on obtient  $du = \alpha dt$
- utiliser l'égalité :  $\int_a^b f(\alpha t + \beta) dt = \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} \frac{1}{\alpha} f(u) du$

#### Exemple

1) En utilisant une intégration par partie, calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\frac{11}{2}} x \cdot \cos 2x dx ; B = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx ; C = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x+1) dx$$

2) En utilisant la méthode de substitution, calculer l'intégrale

$$I = \int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{2x+3}} dx$$

$$\text{Posons } u = 2x + 3 \Leftrightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\text{De plus } \begin{array}{l} \text{si } x = 0 \Rightarrow u = 3 \\ \text{si } x = -1 \Rightarrow u = 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} u = 2x + 3 \\ x = \frac{u-3}{2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{Donc } I = \int_1^3 \frac{u-3}{\sqrt{u}} \times \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int_1^3 \left( \sqrt{u} - \frac{3}{\sqrt{u}} \right) du \quad I = \frac{1}{4} \left[ \frac{2}{3} u\sqrt{u} - 6\sqrt{u} \right]_1^3 = \frac{4}{3} - \sqrt{3}$$

D'où  $I = \frac{4}{3} - \sqrt{3}$

## V) Calculs de valeurs approchées d'une intégrale :

### Méthode de rectangles :

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $[a ; b]$  tel que  $|f'|$  admet un majorant  $M$  sur cet intervalle.

Lorsque l'on partage  $[a ; b]$  en  $n$  intervalles de même amplitude et d'extrémités

$$a = x_0 ; x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n = b ;$$

on a :

- Une suite  $(S_n)$   $n \in \mathbb{N}^*$  de termes général  $S_n$  tel que ;

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \text{ qui converge vers } A = \int_a^b f(t) dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; |A - S_n| \leq \frac{M}{2n} (b-a)^2$$

### Exemple

Déterminer une valeur approchée de l'intégrale  $A = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$  en partageant l'intervalle  $[0, 1]$  en 5 intervalles de même amplitude.

### Solution

Posons  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

$\forall x \in [0,1]$ ;  $f$  est décroissante donc on a :

$$D'où \begin{cases} s_5 = m = \frac{1}{5} \left[ f(0) + f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) \right] = 0,83 \\ S_5 = M = \frac{1}{5} \left[ f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) + f(1) \right] = 0,73 \end{cases}$$

On obtient ainsi  $s_5 = 0,83$  ; et  $S_5 = 0,73$ .

**De même déterminer une valeur approchée de**

$$A = \int_0^1 e^{\frac{x^2}{2}} dx, \text{ en par partageant l'intervalle } [0, 1] \text{ en 10 intervalles de même amplitude.}$$

## VI) Calcul d'aires :

### Situation problème

L'unité de longueur est le cm ; l'unité d'aire est le  $\text{cm}^2$  et les repères utilisés sont orthonormaux

fig<sub>1</sub>

fig<sub>1</sub>

fig<sub>1</sub>

Dans chacun des cas ci-dessus :

- Calcule l'aire du domaine colorié ;
- Trouve une primitive  $F$  de la fonction  $f$  représentée puis calcule  $F(b)-F(a)$
- Que constates-tu ?

### Synthèse :

De façon générale nous admettons que lorsque  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$  alors l'aire du domaine colorié ci-contre est égale à  $F(b)-F(a)$  ou  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[a; b]$  ( l'unité d'aire étant l'aire du rectangle OIAJ ).

Par la définition de l'intégrale définie, la surface entre une fonction  $f(x)$  et l'axe des abscisses ou encore entre deux fonctions  $f$  et  $g$  ( $f > g$ ) et l'axe des abscisses est donnée respectivement comme suit, lorsque  $x$  va de  $a$  vers  $b$  ( $a < b$ )

$$S = \int_a^b f(x)dx \text{ (unité d'aire)}$$

$$\text{Ou } S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx \text{ (unité d'aire)}$$

**NB :** Dans cette intégration, les portions de surface au dessus de l'axe des abscisses donnent une contribution positive, tandis que les portions en dessous de l'axe des abscisses donnent une contribution négative.

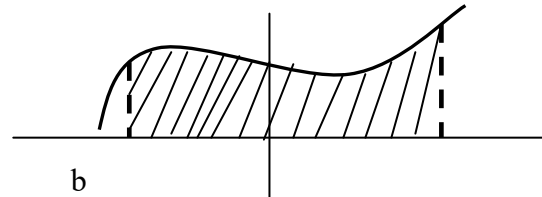
Ainsi quelques méthodes de calcul des surfaces sont illustrées dans les cas de figure qui suivent :

**1<sup>er</sup> Cas :**

$$M(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

Ainsi l'aire du domaine plan  $D_a$

est  $A(D) = \int_a^b f(x)dx$  (unité d'aire)

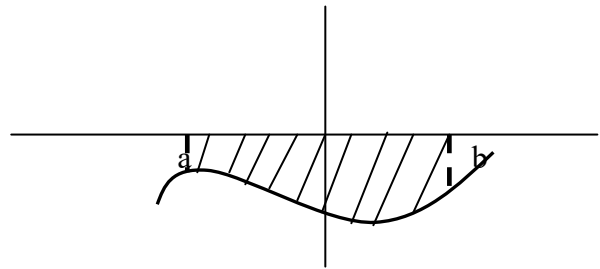


**2<sup>ème</sup> Cas :**

$$M(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$

Ainsi l'aire du domaine plan

$D$  est  $A(D) = -\int_a^b f(x)dx$  (unité d'aire)



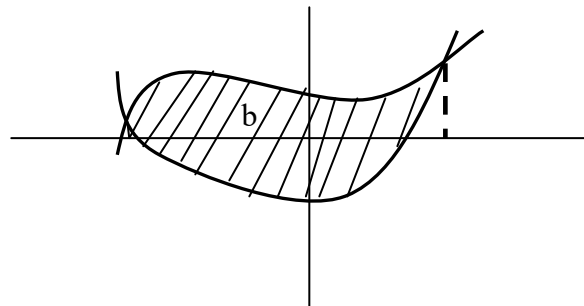
**3<sup>ème</sup> Cas :**

$$M(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases} \quad a$$

Ainsi l'aire du domaine plan limité par les deux courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$  est :

$$A(D) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

(car  $(C_f)$  est au dessus de  $(C_g)$ ).

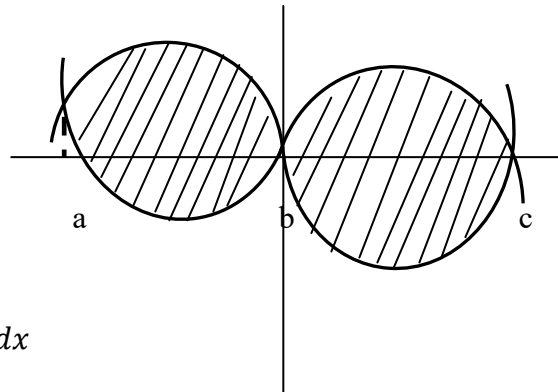


**4<sup>ème</sup> Cas :**

$$M(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \text{ et } b \leq x \leq c \\ g(x) \leq y \leq f(x) \text{ et} \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$$

Ainsi l'aire du domaine plan limité par les deux courbes est :

$$A(D) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx + \int_b^c (g(x) - f(x))dx$$



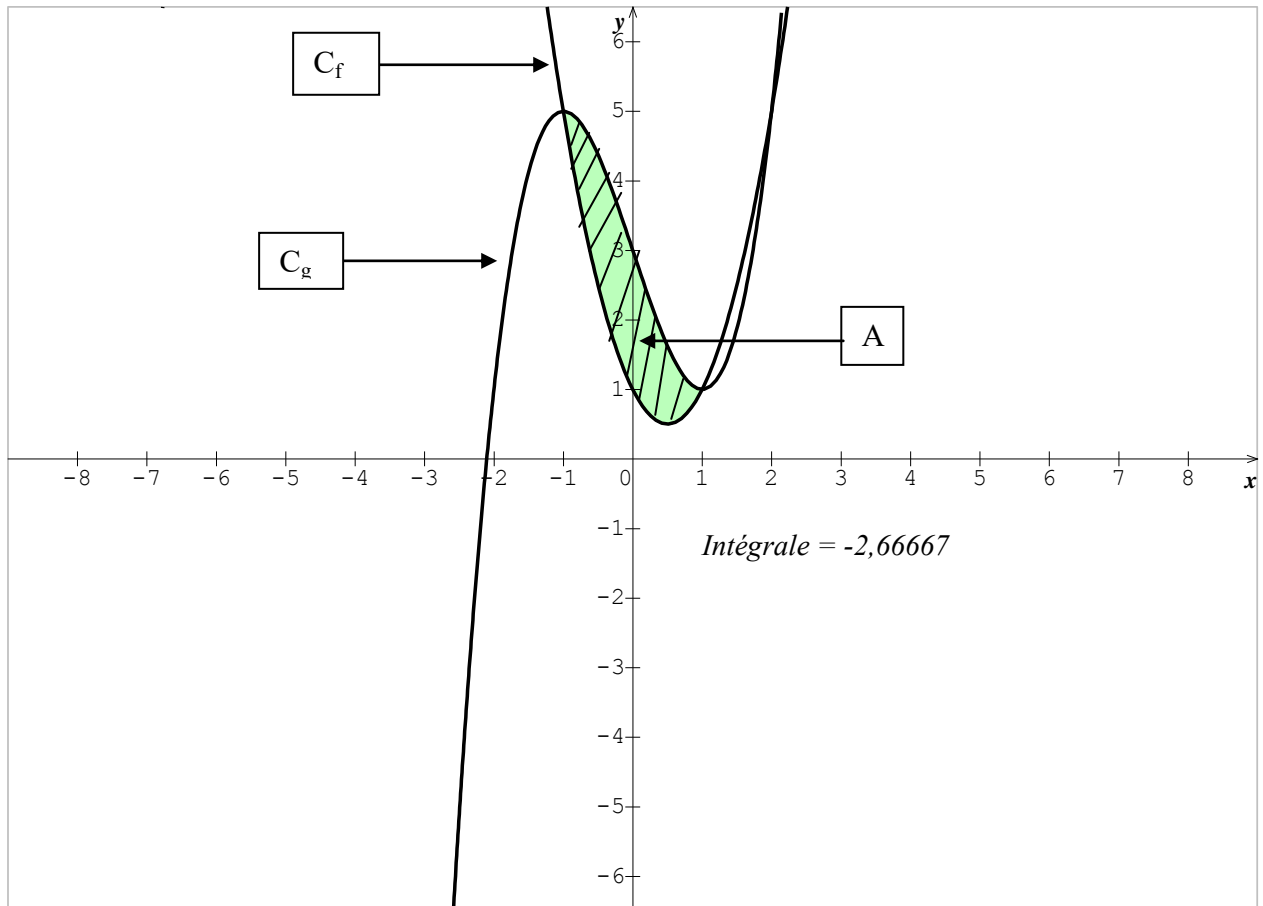
**Exemple**

- 2) Calculer puis représenter l'aire  $A$  de l'ensemble des points  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  du plan compris entre les courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$  de fonction respectives  $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$  et  $g(x) = x^3 - 3x + 3$  et les droites d'équations :  $x = -1$  et  $x = 1$ .
- 3) Calculer puis représenter l'aire de la portion du plan limitée par la courbe  $(C_f)$  de la fonction  $f(x) = 1 - x^2$  et les droites d'équations  $x = -2$  et  $x = 2$ .

### Solution

- 1) Calculons puis représentons l'aire  $A$  de l'ensemble des points  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  du plan compris entre les courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$  de fonction respectives  $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$  et  $g(x) = x^3 - 3x + 3$  et les droites d'équations :  $x = -1$  et  $x = 1$

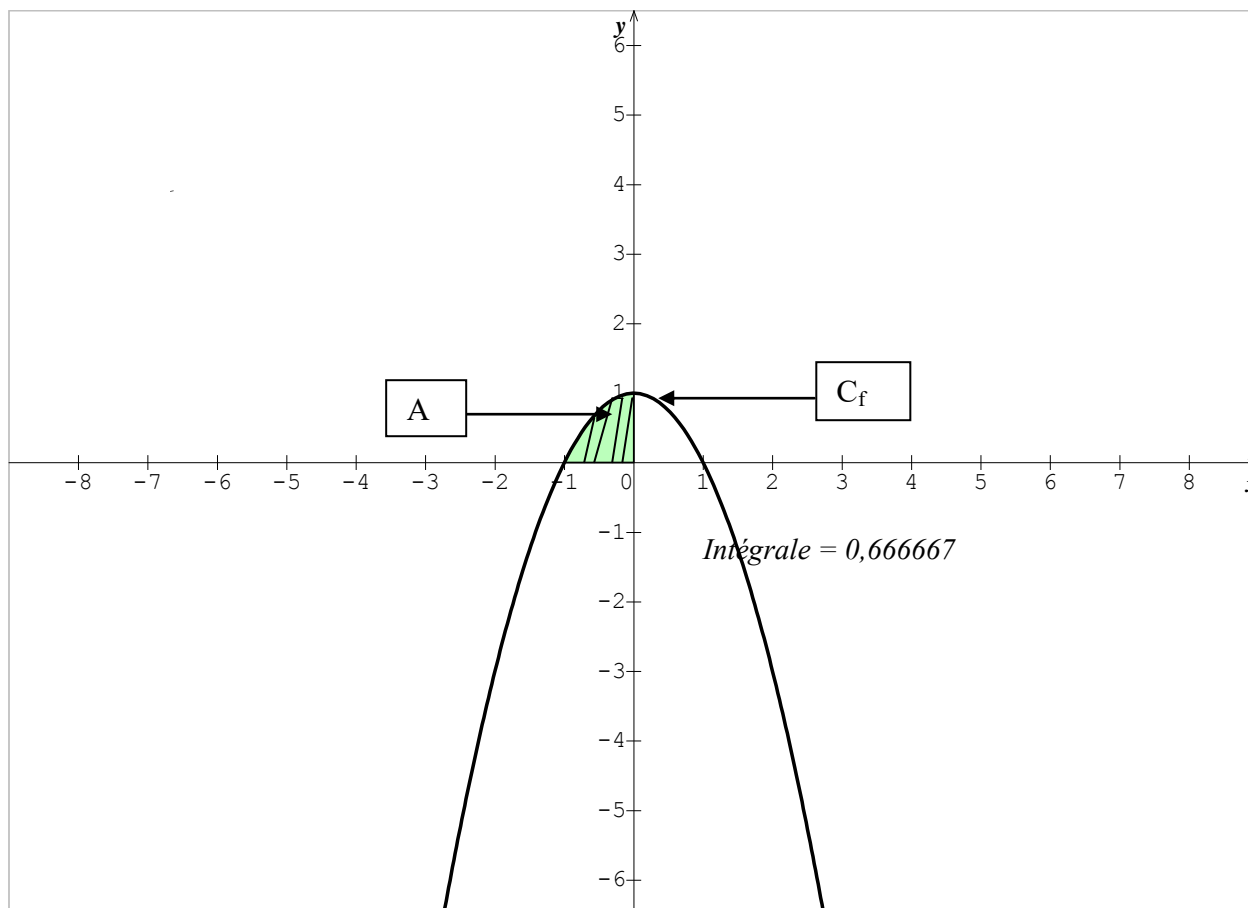
La représentation des courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$  dans le repère donne :



$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^1 ((2x^2 - 2x + 1) - (x^3 - 3x + 3)) dx \\ \Rightarrow A &= \int_{-1}^1 (-x^3 + 2x^2 + x - 2) dx = \left[ -\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_{-1}^1 \\ \Rightarrow A &= \left[ -\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right] - \left[ -\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 2 \right] = -\frac{8}{3} \text{ (u.A)} \end{aligned}$$

2) Calculons puis représentons l'aire de la portion du plan limitée par la courbe ( $C_f$ ) de la fonction  $f(x) = 1 - x^2$  et les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = 0$ .

La représentation de la fonction  $f$  dans le repère donne :



$$A = \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (1 - x^2) dx$$

$$\Rightarrow A = \left[ x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^0$$

$$\Rightarrow A = [0] - \left[ -1 + \frac{1}{3} \right] = -\frac{2}{3} \text{ (u.A.)}$$

# EXERCICES

## Primitives

### Primitives directes

1 En utilisant les formules de primitives directes, calculer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

$$1- f(x) = 4x^3 + x^2 - 4 \quad ; \quad 2- f(x) = (x^2 - 3)^3 \quad ; \quad 3- f(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{4}{3}x^2 - 1$$

$$4- f(x) = \sqrt{-3x + 2} \quad ; \quad 5- f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad ; \quad 6- f(x) = 3(-x - 2)(3x + 2)^2$$

$$7- f(x) = \cos(-6x + 5) \quad ; \quad 8- f(x) = 3\sin(1 - 4x) \quad ; \quad 9- f(x) = \frac{1}{3\cos^2 3x}$$

$$10- f(x) = \frac{3}{(3x + 1)^3} \quad ; \quad 11- f(x) = (4x - 4)(2x^2 - 4x + 1)^2 \quad ; \quad 12- f(x) = \frac{-6}{\sqrt{-6x + 5}}$$

$$13- f(x) = \frac{-5}{(7x + 3)^3} \quad ; \quad 14- f(x) = (x - 1)(-3x^2 + 6x + 7)^2 \quad ; \quad 15- f(x) = \frac{1}{\sqrt{-8x + 1}}$$

$$16- f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^3} \quad ; \quad 17- f(x) = 3\cos(2x + 1)\sin^3(2x + 1) - 1 - \tan^2 x$$

### Primitives et linéarisation

2 En utilisant les formules de primitives directes, linéariser puis calculer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \sin^3 x \quad ; \quad 2) f(x) = \cos^5 \frac{3}{2}x \quad ; \quad 3) f(x) = \sin^3 x \cdot \cos^3 x$$

$$4) f(x) = \sin^3(-x + 3) \quad ; \quad 5) f(x) = \cos^5\left(\frac{3}{2}x + 1\right) \quad ; \quad 6) f(x) = \cos^3 2x \cdot \sin 2x$$

### Primitives vérifiant une condition

3 Déterminer la primitive F de la fonction f vérifiant les conditions indiquées :

$$1- f(x) = x^3 - x^2 - 1 \quad \text{et} \quad F(0) = 7 \quad ; \quad 2- f(x) = (x - 3)^6 \quad \text{et} \quad F(3) = 0$$

$$3- f(x) = \frac{2}{(3 - x)^3} \quad \text{et} \quad F(0) = 0 \quad ; \quad 4- f(x) = (x - 3)^6 \quad \text{et} \quad F(3) = 0$$

$$5- f(x) = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} \quad \text{et} \quad F(0) = \sqrt{5} \quad ; \quad 6- f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad \text{et} \quad F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$7- f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\cos^3 x} \text{ et } F(\pi) = 1 \quad ; \quad 8- f(x) = \sin x \cos^4 x \text{ et } F(\pi) = 0$$

**4** Soit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{(x - 1)^2}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition

2) Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tel que :  $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x - 1)^2}$

3) En déduire la primitive de  $f$  qui s'annule en 0

## Primitives et dérivées

**5** 1) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $g(x) = x\sqrt{x}$

a- Calculer la dérivée de  $g$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

b- Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x}$ .

c- Déduire des questions précédentes une primitive de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

**6** Soit les fonctions  $f$  et  $F$  définies par :  $f(x) = x\sqrt{3 - 2x}$  et  $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3 - 2x}$

Déterminer les réels  $a ; b$  et  $c$  tel que  $\forall x \in ]-\infty ; \frac{3}{2}]$ ,  $F$  soit une primitive de  $f$  sur  $] -\infty ; \frac{3}{2} ]$

# Intégrales

## Intégrations à l'aide d'une primitive

**7** En utilisant les formules des primitives, calculer les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 2x - 5) dx \quad ; \quad 6) I = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$2) I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(-2x + \pi) dx \quad ; \quad 7) I = \int_1^2 \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx$$

$$3) I = \int_0^4 \sqrt{4x+9} dx \quad ; \quad 8) I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^2} dx$$

$$4) I = -4 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{5}{x^2} dx \quad ; \quad 9) I = \int_0^1 (x^2 - 1)(x^3 - 3x + 1)^3 dx$$

$$5) I = \int_{-1}^2 (x+2)\sqrt{x+2} dx \quad ; \quad 10) I = \int_0^1 (-2x+1)\sqrt{5x^2-5x+4} dx$$

## Intégrations par parties

**8** En utilisant la formule de l'intégration par partie, calculer les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 2x dx \quad ; \quad 4) I = \int_{-2}^1 (x - 5) \sqrt{2 - x} dx$$

$$2) I = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx \quad ; \quad 5) I = \int_{-1}^2 (x + 2) \sqrt{x + 1} dx$$

$$3) I = \int_0^4 x \sqrt{4x + 9} dx \quad ; \quad 6) I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x + 1) dx$$

**9** Soient les intégrales I et J définies par :  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 1) \cos^2 2x dx$  et  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 1) \sin^2 2x dx$

- 1) Calculer : I + J.
- 2) Calculer : I - J en utilisant la technique de l'intégration par parties.
- 3) Déduisez - en les valeurs de I et J.

## Intégrations par changement de variable

**10** En utilisant un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx \quad ; \quad 3) I = \int_{-2}^1 (x + 1) \sqrt{x^2 - 2} dx$$

$$2) I = I = \int_{-1}^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}} dx \quad ; \quad 4) I = \int_2^7 (x+2) \sqrt{x+2} dx$$

**11** Soit le polynôme p définie par :  $p(x) = x^3 - 12x - 16$ .

- 1) Montrer que -2 est un zéro double de P.
- 2) Calculer I en utilisant la méthode de l'intégration par partie et la méthode par changement de variable, l'intégrale :  $I = \int_4^5 p(x) dx$

## Intégrales et suites

**12** Soit l'intégrale  $I_n$  définie par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

- 1) En utilisant la technique d'intégration par parties, trouver une relation entre  $I_n$  et  $I_{n-1}$   
(On posera :  $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$ .)
- 2) Calculer  $I_0$  ;  $I_1$  ;  $I_2$  et  $I_4$

**13** Soit l'intégrale  $I_n$  définie par :  $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad (n \geq 0)$

- 1) Calculer  $I_0$
- 2) En intégrant par parties, montrer que  $\forall n \geq 1$  on a :  $(2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$ .
- 3) En déduire la valeur de  $I_1$  ;  $I_2$  et  $I_3$ .

**14** Soit l'intégrale  $I_n$  définie par :  $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$

- 1) Déterminer le seul réel  $a$  tel que :  $\forall x \left[ 0 ; \frac{\pi}{4} \right]$  on a :  $\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{a \cos x}{1 + \sin x}$ .
- 2) Calculer la valeur de  $I_0$ .

- 3) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a :

$$2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^{-n}}{\sqrt{2}} \quad \left( \text{On pourra poser : } \frac{1}{\cos^{2n+1} x} = \frac{1}{\cos^{2n-1} x} \times \frac{1}{\cos^2 x} \right)$$

**15** Soit l'intégrale  $I_n$  définie par :  $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$

- 1) Calculer  $I_1$ .
- 2) En intégrant par parties, montrer que  $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$  (on posera  $x^n = x \cdot x^{n-1}$ )

**16** Soit l'intégrale  $I_n$  définie par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{x^n + 1} dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

- 1) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$  ;  $I_n$  est croissante et majorée.
- 2) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on a :  $1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$  En déduire la limite de la suite  $I_n$ .

**17** Soit l'intégrale  $I_n$  définie par :

$$I_n^{(x)} = \int_1^x t^n (\ln t) dt \quad (x > 0) \text{ avec } (n \in \mathbb{N} \text{ et différent de } -1)$$

- 1) En intégrant par parties ; calculer  $I_n^{(x)} = \int_1^x t^n (\ln t) dt$ .
- 2) En déduire le calcul de  $J_n^{(x)} = \int_1^x t^n (\ln t)^2 dt$ .
- 3) a) Calculer  $I_n^{(e)} - J_n^{(e)}$ .
- c) Déterminer la limite de  $\frac{I_n(e) - J_n(e)}{e^{n+1}}$  quand  $n$  tend vers  $+$ .

**18** Soit l'intégrale  $I_n$  définie par :

$$I_n = \int_0^1 x^n l_n(1+x) dx. \quad (n \in \mathbb{N})$$

Déterminer le sens de variation de  $I_n$

Soit l'intégrale  $J_n$  définie par  $J_n = \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt$  ( $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$ )

1) Démontrer que  $J_n = 2 \int_0^1 (t^2 - 1)^n dt$

2) Démontrer que pour tout  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}^*$ , on a :

$$J_n = \frac{-2n}{1+2n} J_{n-1}$$

## Calculs d'aires

**7** Soient les intégrales I et J définies par :  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$  et  $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$

- 1) Calculer I
- 2) Soit la fonction définie sur  $[0, \frac{\pi}{4}]$  par :  $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ 
  - a) Montrer que  $\forall x [0, \frac{\pi}{4}]$  on a :  $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$
  - b) En déduire une relation entre I et J.
  - c) Calculer J.

Soient les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 x \cos^2 x dx$$

- 1) Calculer I – J e I + J + K
- 2) Calculer la primitive de Cos4x
- 3) En déduire la valeur de : I + J – 3K puis celles de I, J et K.

### Exercice 7 :

Soient les intégrales I et J définies par :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

- 1) Calculer I + J et I – J.
- En déduire les valeurs de I et J.

### Exercice 8 :

On se propose de calculer l'intégrale J définie par  $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3} dx$

- 1) Calculer les deux intégrales A et B tel que  $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$  et  $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$
- 2) Déterminer les réels a, b et c tel que  $\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$  (1)
- 3) En posant  $t = e^x$  dans l'égalité (1), calculer  $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$
- 4) a) A l'aide d'une intégration par partie, exprimer J en fonction de I.  
b) En déduire la valeur de J.

On considère les intégrales  $I = \int_0^\pi \cos^4 x dx$  et  $J = \int_0^\pi \sin^4 x dx$ .

1. a) Montrer que l'intégrale  $I$  peut s'écrire  $I = \int_0^\pi \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) dx$ .

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $I = \int_0^\pi \sin^2 x dx - \frac{1}{3} J$ .

c) Montrer de même que  $J = \int_0^\pi \cos^2 x dx - \frac{1}{3} I$ .

2. a) Montrer que  $I + J = \frac{3\pi}{4}$ .

b) Montrer que  $J - I = 0$

c) En déduire les intégrales  $I$  et  $J$ .

# Fonctions Logarithmes Népériens

## Objectifs

Ce thème vise à :

- définir et étudier la fonction logarithme népérien
- mettre en place les primitives de fonction de la forme  $\frac{u'}{u}$

## Savoirs et savoir-faire

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fonction logarithme népérien :               <ul style="list-style-type: none"> <li>- Définition, notation, propriétés, représentation graphique.</li> <li>- Limite de référence.</li> <li>- Primitives de <math>\frac{u'}{u}</math></li> </ul> </li> <li>• Logarithme décimal : définition.</li> <li>• Dérivée des fonctions du type <math>\ln(u)</math> et <math>\ln( u )</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Résoudre des équations ou inéquations faisant intervenir la fonction logarithme népérien.</li> <li>• Déterminer les primitives d'une fonction du type <math>\frac{u'}{u}</math></li> <li>• Etant donnée une fonction <math>f</math> faisant intervenir la fonction logarithme népérien :               <ul style="list-style-type: none"> <li>- Trouver les limites de <math>f</math> aux bornes de son ensemble de définition ;</li> <li>- Etudier les variations de <math>f</math></li> <li>- Représenter graphiquement <math>f</math>.</li> </ul> </li> </ul>

### 1- Situation problème :

Soit la fonction définie par  $f(x) = \frac{1}{x}$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

- Construis dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  sa courbe  $(C)$ .
- Calcule l'aire de la région du plan délimitée par la courbe  $(C)$ , l'axe des abscisses et la droite d'équation  $x = a$  avec  $a > 0$ .
- Que peut-on conclure ?

Un mathématicien du nom de Napier ou Népère trouva la solution à ce problème et lui donna son Nom : **Logarithme Népérien**.

### 2- Définition :

On appelle fonction Logarithme Népérien notée  $(\ln)$ , la primitive de la fonction  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  qui prend la valeur 0 en 1 sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$

### 3- Conséquences de la définition

**Par définition :**

- La fonction **logarithme** est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$  et sa fonction dérivée est  $\frac{1}{x}$ .
- La fonction **logarithme** est croissante sur  $]0 ; +\infty[$  car  $\forall x \in ]0 ; +\infty[$ ,  $\frac{1}{x} > 0$ . Tapez une équation ici.
- $\ln 1 = 0$  ;  $\forall x \in ]0 ; 1[$ ,  $\ln x < 0$  et ;  $\forall x \in ]1 ; +\infty[$ ,  $\ln x > 0$ .
- La fonction **logarithme** est une bijection de  $]0 ; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  ; elle admet donc une bijection réciproque de  $\mathbb{R}$  dans  $]0 ; +\infty[$ .

**Remarque :** un nombre négatif n'a pas de logarithme

### Evaluation

Soit  $\alpha \in ]0 ; 1[$ . Résous dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $x \ln \alpha \geq 2$

### 4- Ensemble de définition des fonctions logarithmiques :

- Si  $f(x) = \ln x \Rightarrow Df = ]0 ; +\infty[$

- Si  $f(x) = \ln(ax + b) \Rightarrow \text{Df} = \{x/x \in \mathbb{R}; ax + b > 0\}$
- Si  $f(x) = \ln [u(x)] \Rightarrow \text{Df} = \{x/x \in \mathbb{R}; u(x) > 0\}$
- Si  $f(x) = \ln \left( \frac{u(x)}{v(x)} \right) \Rightarrow \text{Df} = \{x/x \in \mathbb{R}; \frac{u(x)}{v(x)} > 0\}$
- Si  $f(x) = \ln|u(x)| \Rightarrow \text{Df} = \{x/x \in \mathbb{R}; u(x) \neq 0\}$

### 5- Propriétés Remarquables :

$\forall a > 0$  et  $\forall b > 0$ , on a :

- $\mathbf{P}_1 : \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$        $\mathbf{P}_6 : \ln\sqrt{a} = \ln a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln a$
- $\mathbf{P}_2 : \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$        $\mathbf{P}_7 : \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $\mathbf{P}_3 : \ln\left(\frac{1}{a}\right) = - \ln a$        $\mathbf{P}_8 : \ln e^a = a$  et  $e^{\ln a} = a$
- $\mathbf{P}_4 : \ln(a)^n = n \ln a$        $\mathbf{P}_9 : \ln(a) \geq \ln(b) \Leftrightarrow a \geq b$  et  $\ln(a) \geq \ln(b) \Leftrightarrow a \geq b$
- $\mathbf{P}_5 : \ln e = 1$  et  $\ln 1 = 0$        $\mathbf{P}_{10} : \ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$

### Evaluation

- a- Calcule les réels suivants :  $A = \ln 2 + \ln 3 - 5 \ln 9$  ;  $B = \ln \frac{5}{6} + \ln 5 - 3 \ln 36$  ;
- b- Exprime en fonction de  $\ln 2$ , les expressions suivantes :  $C = \ln 8 + \frac{1}{2} \ln 16 - \ln \sqrt{2}$  ;  
 $D = \ln 2 + \ln(2 + \sqrt{2}) + \ln(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \ln(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})$ .
- c- Résous dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :  
 $\ln x (2x + 7) = \ln(x - 3)$  ;  $\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x + 7)$   
 $\ln x + \ln(3x + 2) = \ln(2x + 3)$  ;  $\ln(x - 3) = \ln(x + 7) - \ln(x + 1)$ .  
 $\ln(2x - 2) + \ln(x + 2) \leq 3 \ln 2$  ;  $\ln(x - 2) + \ln(x + 3) > 2 \ln(x + 1)$ .

### 6- Limites remarquables

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$x \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x n \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x n \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^n} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad (\text{Nombre dérivé de la fonction } \ln \text{ au point } 1)$$

### 7- Dérivées logarithmiques:

La dérivée logarithmique d'une fonction  $u$ , est la dérivée de  $\ln|u|$

- Si  $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
- Si  $f(x) = \ln|ax + b| \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{ax+b}$
- Si  $f(x) = \ln(U(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$
- Si  $f(x) = \ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{v'(x)}{v(x)}$
- Si  $f(x) = \ln(U(x) \cdot v(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)}$
- Si  $f(x) = \ln[u(x)]^n \Rightarrow f'(x) = n \frac{u'(x)}{u(x)}$

### 8- Primitives remarquables :

#### Activité

En appliquant la technique de l'intégration par parties, calcule une primitive des fonctions :  $x \rightarrow \ln x$  et  $x \rightarrow \ln(ax + b)$ . Ainsi on retiendra :

- Si  $f(x) = \ln x \Rightarrow F(x) = x \ln x - x + K$
- Si  $f(x) = \ln(ax + b) \Rightarrow F(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right) \ln(ax + b) - x + K$
- Si  $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \Rightarrow F(x) = \ln |u(x)| + K$

### 9- Etude de la fonction $x \mapsto \ln x$ :

Le nombre **e** est l'unique solution de l'équation  $\ln x = 1$  avec **e = 2,718...**

Soit  $f(x) = \ln x$  et de courbe représentative (C).

$Df = ]0; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .


Alors la courbe (C) admet des branches :  $x = 0$  est asymptote verticale pour la courbe (C).

( $x'Ox$ ) est branche parabolique (car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ )

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} > 0$$

D'où le tableau de variation est le suivant :

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

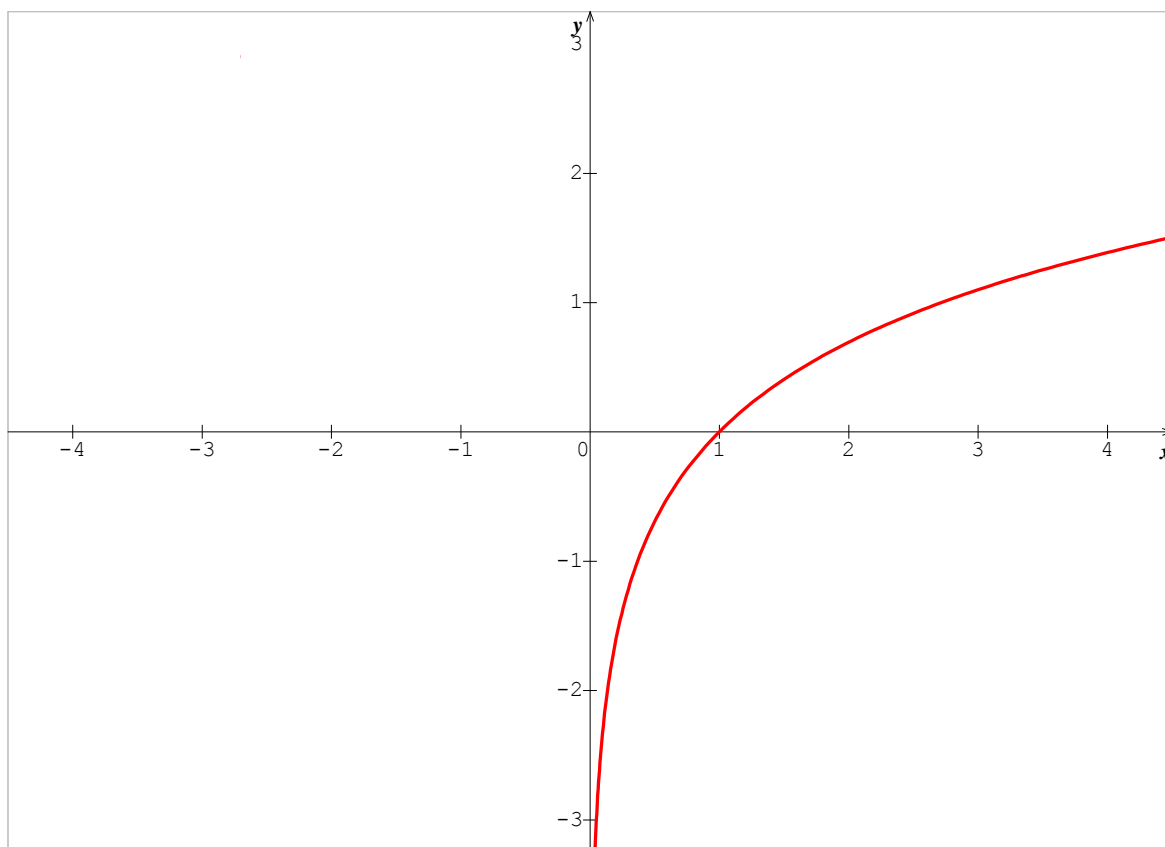


- (C)  $\cap_x(OX) \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$

Donc (C) coupe l'axe (ox) en 1

- (C)  $\cap_x(OY) \Rightarrow x = 0$  et  $f(0) = \ln(0)$  qui n'existe pas.  
Donc (C) ne coupe pas l'axe (oy).

Ainsi on a la représentation graphique suivante :



## 10- Fonction logarithme de base a :

### a) Définition :

Soit  $a$  un réel strictement positif et différent de 1. On appelle logarithme de base  $a$ , la fonction définie par :  $\log_a(x) : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

**N.B** : Lorsque  $a = 10$ , la fonction logarithme de base 10 est appelé fonction logarithme décimale. Ainsi la fonction logarithme d'un nombre réel positif est noté  $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

$M = \frac{1}{\ln 10}$  est appelée la **Mantisse** du logarithme décimal ; ainsi  $\log x = M \cdot \ln x$ .

### b) Propriétés :

$$P_1 : \log(ab) = \log a + \log b$$

$$P_3 : \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$P_2 : \log(ab)^n = n \log a$$

$$P_4 : \log(10)^n = n$$

$$P_5 : (\log x)' = \frac{1}{x \ln 10}$$

### 11- Etude de la fonction $\log_a(x)$ :

Soit  $f(x) = \log_a(x)$  et de courbe représentative  $(C_a)$ .

**1<sup>er</sup> Cas :  $0 < a < 1$  ( $\ln a < 0$ )**

$Df = ]0; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

Alors la courbe  $(C)$  admet des branches :  $x = 0$  est asymptote verticale pour la courbe  $(C)$ .

$(x'Ox)$  est branche parabolique (car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ )

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a} < 0$$

D'où le tableau de variation est le suivant :

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

-  $(C) \cap (OX) \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$

Donc  $(C)$  coupe l'axe  $(ox)$  en 1

-  $(C) \cap (OY) \Rightarrow x = 0$  et  $f(0) = \ln(0)$  qui n'existe pas.  
Donc  $(C)$  ne coupe pas l'axe  $(oy)$ .

**2<sup>ième</sup> Cas :  $a > 1$  ( $\ln a > 0$ )**

$Df = ]0; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .


Alors la courbe  $(C)$  admet des branches :  $x = 0$  est asymptote verticale pour la courbe  $(C)$ .

$(x'Ox)$  est branche parabolique (car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ )

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a} > 0$$

D'où le tableau de variation est le suivant :

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$



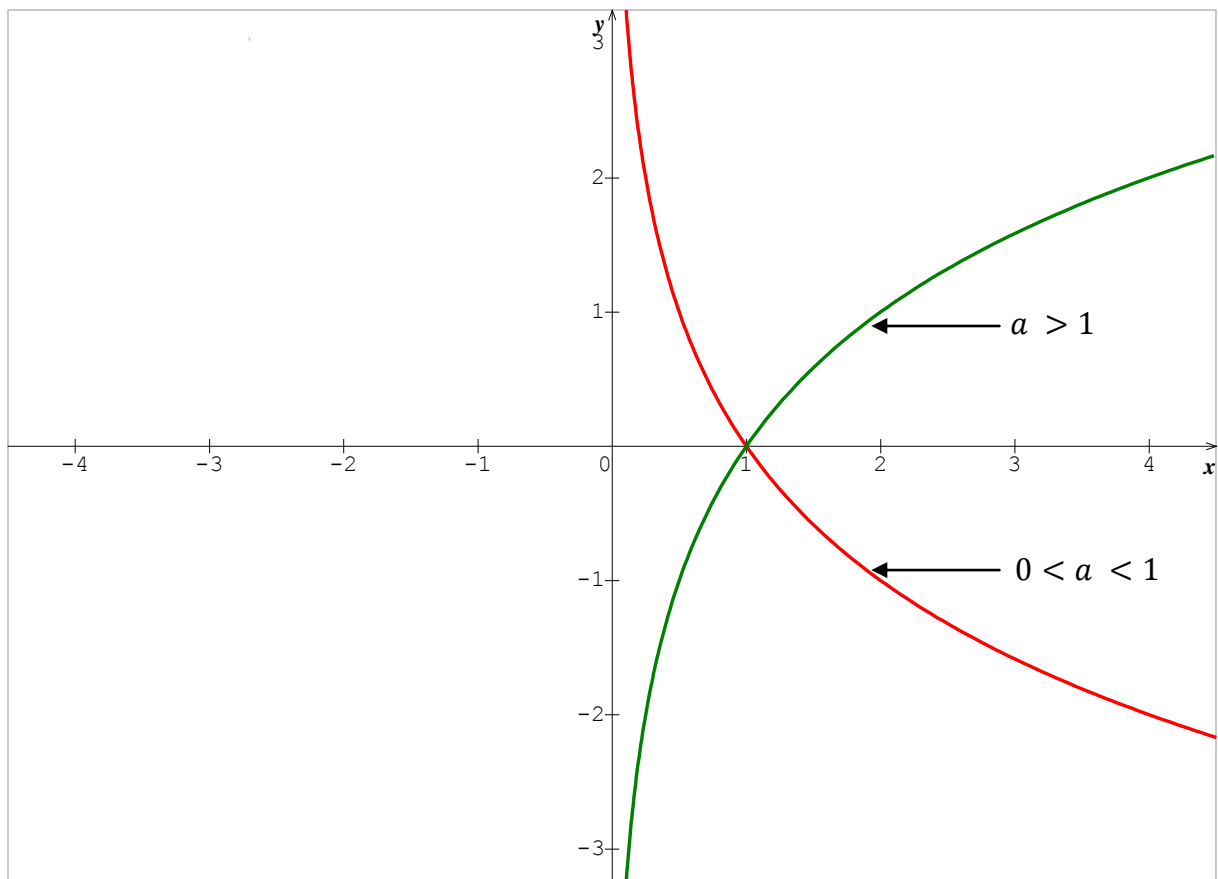
-  $(C) \cap (OX) \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$

Donc (C) coupe l'axe (ox) en 1

-  $(C) \cap (OY) \Rightarrow x = 0$  et  $f(0) = \ln(0)$  qui n'existe pas.  
Donc (C) ne coupe pas l'axe (oy).

NB : dans tous les cas,  $\log_a(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$

### Représentation



## EXERCICES

### Exercice 1 :

1) Exprimer en fonction de  $\ln 2$  les réels suivants :

$$A = \ln 8 + \frac{1}{2} \ln 16 - \ln \sqrt{2} ; B = \ln 2 + \ln (2 + \sqrt{2}) + \ln (2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \ln (2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})$$

$$C = \ln 2 \sqrt{2} + \ln 2^2 - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} ; D = 2 \ln \sqrt{2} + \ln \sqrt{2^3} - \frac{\ln 2^{\sqrt{2}}}{3 \ln 2^{\frac{3}{2}}}$$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

a) Les équations suivantes :

$$\ln (2x + 7) = \ln (x - 3) ; \ln (x^2 - 2x - 3) = \ln (x + 7)$$

$$\ln x + \ln (3x + 2) = \ln (2x + 3) ; \ln (x - 3) = \ln (x + 7) - \ln (x + 1).$$

$$\ln (2x - 2) + \ln (x + 2) = 3 \ln 2 ; \ln (x - 2) + \ln (x + 3) = 2 \ln (x + 1).$$

$$\ln \sqrt{2x - 3} = \ln (6 - x) - \frac{1}{2} \ln x ; \ln |x - 1| + \ln |2x - 1| = 0$$

$$\ln \sqrt{x+1} = \ln(3-x) - \frac{1}{2} \ln 2x ; \ln \left( \frac{x-1}{2x-3} \right) = 0$$

$$3(\ln x)^2 - 7\ln x + 2 = 0 ; -5(\ln x)^2 + (\ln x) + 6 = 0$$

**b) Les inéquations suivantes :**

$$\ln(2-3x) > \ln x ; \ln(2x-5) + \ln(x+1) \leq 2 \ln 2$$

$$\ln(x^2+2x+2) \geq \ln(-x^2+x+3) ; \ln(x+8) - \ln(x+14) + \ln(x+2) \leq 0$$

$$\ln(2x-1) - \ln(1-x) < \ln 3 ; \ln(x+1) > \ln(4x-1) - \ln(x-1).$$

$$(\ln x)^2 - \ln x - 6 < 0 ; (\ln x)^2 + 2\ln x + 1 = 0$$

$$\ln(x^2+2x+2) > \ln(3+x-x^2) ; \ln(5x^2+6x+1) < 0.$$

**c) Les systèmes suivants :**

$$\begin{cases} x+y=15 \\ \ln x + \ln y = \ln 36 \end{cases} ; \begin{cases} x^2+y^2=13 \\ \ln x + \ln y = \ln 6 \end{cases} ; \begin{cases} \ln x + \ln y = \ln \frac{3}{2} \\ x+y = \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\ln x) \cdot (\ln y) = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases} ; \begin{cases} 5x+4y=12 \\ \ln(x-1) + \ln y = \ln 3 - \ln 5 \end{cases} ; \begin{cases} 2\ln x - \ln y = 0 \\ 4\ln x + \ln y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot y = 243 \\ 4(\log_x y + \log_y x) = 17 \end{cases} ; \begin{cases} 2\ln(x-1) + 3\ln(x+y) = -2 \\ 3\ln(x-1) + 5\ln(x+y) = -4. \end{cases}$$

**Exercice 2 :**

**I)** Soit le polynôme  $p$  définie par  $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

- Calculer  $p(-1)$  puis factoriser  $p(x)$  en trois produits de facteur du premier degré.
- Résoudre l'équation  $p(x) = 0$
- En déduire la résolution de l'équation :  $2(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 - 4 \ln x + 3 \leq 0$

**II)** Soit le polynôme  $q$  définie par  $q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ .

- Calculer  $q(1)$  puis résoudre l'équation  $q(x) = 0$  et  $q(x) \geq 0$
- En déduire la résolution de :
  - l'équation :  $2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 8\ln x + 3 = 0$
  - l'inéquation  $2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 8\ln x + 3 \geq 0$

**Exercice 3 :**

**I)** Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes :

1)  $f(x) = \ln(2-x)$  ; 2)  $f(x) = \ln(-x^2+2x+3)$  ; 3)  $f(x) = x \ln x - x$  ; 4)  $f(x) = \frac{2x \ln x}{x+1}$

5)  $f(x) = \ln \left( \frac{2x-1}{x-3} \right)$  ; 6)  $f(x) = \ln |x^2 - 3x + 2|$

**II)** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+1)\ln|x+1| \text{ si } x \neq -1 \\ f(x) = 0 \text{ si } x = -1 \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en  $-1$
- 2) Dresser le tableau de variation de  $f$  puis construire sa courbe

**III)** Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R} - \{-1 ; 0 ; 1\}$  par  $g(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}$

- 1) Déterminer les nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tel que  $\forall x \in ]1; +\infty[$

On ait  $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$

- 2) Déterminer une primitive de la fonction  $g$  sur  $]1 ; + \infty[$
- 3) A l'aide d'une intégration par partie, calculer :  $I = \int_2^3 \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)^2} dx$

**Problème 1 :**

L'objet de ce problème est d'étudier, à l'aide d'une fonction auxiliaire, une fonction et de résoudre une équation différentielle dont elle est solution.

**A.** Etude d'une fonction auxiliaire

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)$ .

- 1) Calculer  $g'(x)$  et montrer que ce nombre est strictement négatif pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .
- 2) Déterminer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et  $+\infty$
- 3) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- 4) Donner le signe de  $g(x)$ .

**B.** Etude d'une fonction et calcul d'une aire :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-2x} \ln(1+2e^x)$ .

On note  $C$  sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.)

- 1) Calculer  $f'(x)$  et montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 2e^{-2x} g(x)$ .
- 2) a) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$   
 b) Déterminer la limite  $f$  en  $+\infty$ . On pourra remarquer que :

si on pose  $X = 1 + 2e^x$ ,  $f(x)$  s'écrit  $4 \frac{X}{(X-1)^2} \frac{\ln X}{X}$

3. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
4. Tracer  $C$ .
5. Soit  $\alpha$  un réel strictement positif.

a) Vérifier que, pour tout réel  $x$ ,  $\frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2 \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 2}$

En déduire la valeur de l'intégrale  $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x} dx$

b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale :  $J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$

Donner une interprétation graphique de  $J(\alpha)$ .

### C) Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :  $y' + 2y = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$ .

1. Vérifier que la fonction  $f$  étudiée dans la partie **B** est solution de (E).
2. montrer qu'une fonction  $\varphi$  est solution de (E) si et seulement si  $\varphi - f$  est solution de l'équation différentielle. (E') :  $y' + 2y = 0$
3. résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

### Problème 2 :

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie A la fonction numérique  $f$  définie sur

$]0, +\infty[$  par  $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$ , de déterminer ensuite dans la partie B la position de sa

courbe représentative par rapport à son asymptote oblique et enfin d'étudier une suite récurrente dans la partie C, cette dernière partie étant dans une large mesure indépendante des deux autres.

### Partie A :

1) Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = x^3 - x - 2 \ln x + 1$

a) Montrer que la fonction  $g$  est dérivable et que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$

$$g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}$$

b) Etudier les variations de la fonction  $g$  puis déterminer le signe de  $g(x)$ .

2) a. Déterminer les limites de  $f$  en  $0$  et en  $+\infty$ .

b) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$   $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$  puis donner le tableau de variations de  $f$ .

**Partie B :**

$\Gamma$  désigne la représentation graphique de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ , unité graphique 2 cm.

1.1 soit  $h$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $h(x) = x + \ln x$ .

a) Etudier le sens de variation de  $h$  puis montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur l'intervalle  $[0,4 ; 0,7]$ .

b) Montrer que l'on a :  $e^{-\alpha} = \alpha$ .

2) a) Vérifier que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$  est asymptote oblique à  $\Gamma$  en  $+\infty$ .

b) Utiliser les résultats de la question **1.a)** pour déterminer les positions relatives de  $\Gamma$  et  $\Delta$ .

3) Construire  $\Gamma$  et  $\Delta$  dans le repère ortho normal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

4) a) Calculer au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale  $I = \int_1^2 \frac{\ln t}{t^2} dt$ .

c) En déduire l'aire, en  $\text{cm}^2$  de la portion de plan limitée par la courbe  $\Gamma$ , la droite  $\Delta$  et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équation  $x = 1$  et  $x = 2$ .

### **Partie C** : Etude d'une suite

Dans cette partie :

- $I$  désigne l'intervalle  $[0,4 ; 0,7]$
- $\alpha$  est le réel mis en évidence au **B. 1.**
- $\varphi$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\varphi(x) = e^{-x}$
- $U$  est la suite récurrente définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 0,4 \\ \text{et} \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer qu'on a pour tout  $x \in I$  :

- $\varphi(x) \in I$
- $|\varphi'(x)| \leq 0,7$
- $|\varphi(x) - \alpha| \leq 0,7|x - \alpha|$ .

2) a) Montrer qu'on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,7|u_n - \alpha|$  puis en déduire par récurrence qu'on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $|u_n - \alpha| \leq 0,7^n$ .

b) Conclure alors quant à la convergence de la suite  $u$ .

3) Déterminer un entier  $p$  tel que pour  $n \geq p$  on ait  $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$  puis donné à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de  $u_p$  à  $10^{-3}$  près.

### **Problème 3** :

Dans tout le texte  $e$  désigne le nombre réel qui vérifie  $\ln e = 1$ . On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\ln x + xe}{x^2}$

On note  $\Gamma$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , unité graphique : 2 cm.

### **Partie A** : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $g(x) = -2\ln x - xe + 1$ .

- 1) Déterminer les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$ .
- 2) Etudier le sens de variation de  $g$ .
- 3) Montrer que dans  $[0,5 ; 1]$  l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution et une seule notée  $\alpha$ . Déterminer un encadrement de  $\alpha$  à 0,1 près.
- 4) En déduire le signe de  $g(x)$  selon les valeurs de  $x$ .

### **Partie B** : Etude de la fonction $f$

1) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

- 2) Soit  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ . Vérifier que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$  puis étudier le sens de variation de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
- 3) Montrer que  $f(\alpha) = \frac{1 + \alpha e}{2\alpha^2}$
- 4) Donner le tableau de variation de  $f$ .
- 5) Construire  $\Gamma$ .

### Partie C : Intégrale et suite

Soit  $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln t}{t^2} dt$  et  $A_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} f(t) dt$  pour tout entier naturel  $n$ .

- 1) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :  $I_n = \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}$
- 2) a) Montrer que  $A_n = I_n + e$ .  
b) Calculer  $I_0$  et  $A_0$ .  
c) Donner une interprétation géométrique de  $A_0$ .
- 3) Montrer que la suite  $(A_n)$  converge vers  $e$ .

### Problème 4 :

Les butes du problème sont l'étude de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$ , puis la recherche de primitives de cette fonction.

### Première partie : Etude de fonctions auxiliaires.

- 1) On définit la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par  $g(x) = 2x - (x-1) \ln(x-1)$ .
  - a) On admet le résultat suivant :  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ . En déduire la limite de  $g(x)$  lorsque  $x$  tend vers 1.
  - b) Calculer  $g'(x)$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $]1; +\infty[$ .
  - c) Résoudre l'inéquation  $1 - \ln(x-1) > 0$ , d'inconnue  $x$  appartenant à l'intervalle  $]1; +\infty[$ .
  - d) Etudier le sens de variation de  $g$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ .
  - e) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  a une solution unique, notée  $\alpha$ , dans l'intervalle  $[e+1; e^3+1]$ , et étudier le signe de  $g(x)$  sur chacun des intervalles  $]1; \alpha[$  et  $]\alpha; +\infty[$ .
- 2) Soit  $\varphi$  la fonction définie sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par  $\varphi(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$ 
  - a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)$  et prouver que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$
  - b) Calculer  $\varphi'(x)$  et montrer que  $\varphi'(x)$  est du signe de  $g(x^2)$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$

- c) Montrer que  $\varphi$  est croissante sur l'intervalle  $]1; \sqrt{\alpha} [$  [et décroissante sur l'intervalle  $]\sqrt{\alpha}; +\infty [$ .

**Deuxième partie :** Etude de la fonction f

- 1) Vérifier que pour tout x appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty [$  [on a  $f(x) = \varphi(e^x)$ .
- 2) En déduire :
  - a) La limite de f(x) lorsque x tend vers 0.
  - b) La limite de f(x) lorsque x tend vers  $+\infty$
  - c) Le sens de variation de f sur l'intervalle  $]0; +\infty [$  [et que f admet un maximum en  $\ln(\sqrt{\alpha})$
- 3) Montrer que, pour tout x de l'intervalle  $]0; +\infty [$ ,  $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$
- 4) Reproduire le tableau suivant et le compléter en donnant des valeurs approchées à  $10^{-2}$  près :

X	0,1	0,5	1	1,5	2	3
f(x)						

- 5) Représenter graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unités 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée. On prendra 10 comme valeur approchée de  $\alpha$ .

**Troisième partie :** Recherche de primitives de f

- 1) Vérifier que f est solution de l'équation différentielle  $y' + y = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}$
- 2) On pose  $h(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}$ 
  - a) Trouver une primitive H de h sur l'intervalle  $]0; +\infty [$
  - b) En déduire les primitives F de f sur l'intervalle  $]0; +\infty [$ .

**Problème 5 :**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty [$  [ par  $f(x) = x \ln(x^2) - 2x$ .

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ; unité graphique 1 cm.

**Partie A :** Etude de f.

- 1) Montrer que, pour  $x > 0$ ,  $f(x) = 2x \ln x - 2x$  puis que  $f(x) = 2x \ln \frac{x}{e}$
- 2) a) Etudier la limite de f en  $+\infty$ .
- b) Montrer que f est dérivable en tout  $x > 0$  ; calculer  $f'(x)$  pour  $x > 0$ .
- c) Etudier le sens de variation de f sur  $]0; +\infty [$ .
- d) Donner le tableau de variation de f sur  $]0; +\infty [$ .

3) Déterminer par le calcul l'abscisse du point d'intersection de la courbe (C) avec axe des abscisses.

4) Montrer que l'équation  $f(x) = 2$  admet sur l'intervalle  $[1 ; 5]$  une unique solution et en donner la valeur décimale arrondie à  $10^{-2}$ .

**Partie B** : Calcul d'aires.

1) Soit  $F$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par 
$$\begin{cases} F(0) = 0 \\ F(x) = x^2 \ln x - \frac{3x^2}{2} \quad \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) On admet que  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$  ; montrer que  $F$  est dérivable en 0 et préciser  $F'(0)$ .

b) Montrer que, pour tout  $x$  appartenant à  $]0 ; +\infty[$ ,  $F'(x) = f(x)$ .

2) On considère pour chaque entier  $n$  positif ou nul, la droite  $D_n$  d'équation  $y = nx$ . On trouvera en annexe un tracé de la courbe (C) et les droites  $D_0, D_1, D_2$ .

a) Déterminer les coordonnées du point  $I_n$ , d'abscisse strictement positive, intersection de (C) et de  $D_n$ . On appelle  $P_n$  le point de l'axe des abscisses de même abscisse que  $I_n$ .

Placer les points  $I_0, I_1, I_2, P_0, P_1, P_2$ , sur la figure donnée en annexe.

b) Déterminer la position relative de (C) et de  $D_n$  pour les abscisses appartenant à  $]0 ; +\infty[$ .

3) Pour tout  $n \geq 1$ , on considère le domaine  $A_n$  situé dans le quart de plan défini par  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ , délimité par (C),  $D_{n-1}$  et  $D_n$ . On note  $a_n$  son aire, exprimée en unité d'aire.

a) Faire apparaître les domaines  $A_1$  et  $A_2$  sur la figure.

b) Calculer l'aire  $t_n$  du triangle  $OP_nI_n$ , en unités d'aire.

c) Calculer l'aire  $u_n$ , en unités d'aire, du domaine situé dans le quart de plan défini par  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ , délimité par (C), l'axe des abscisses, et les parallèles à l'axe des ordonnées passant par  $P_0$  et  $P_n$ .

d) Vérifier que l'aire  $v_n$ , en unités d'aire, du domaine situé dans le quart de plan défini par  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ , délimité par (C), l'axe des abscisse et  $D_n$ , est  $v_n = t_n - u_n = \frac{e^2}{2}(e^n - 1)$ .

e) Calculer alors  $a_n$ .

4) Montrer que la suite  $(a_n)$  est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.

**Problème 6** :

### A) Etude d'une fonction

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$ . Sur  $C$  la courbe

représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  ; unité graphique : 5 cm.

1) Calculer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ . Déterminer les asymptotes de  $C$ .

2) Etudier le sens de variation de  $f$ . Dresser le tableau de variation de  $f$ .

- 3) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet sur l'intervalle  $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$  une solution unique, notée  $\alpha$ . Déterminer un encadrement de  $\alpha$ , d'amplitude  $10^{-2}$ . Donner, suivant les valeurs de  $x$ , le signe de  $f(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .
- 4) Tracer la courbe C.

### B) Calcul d'aire

- 1) Déterminer une équation de la tangente D à C au point d'abscisse 1.
- 2) a) soit  $\varphi$  la fonction définie pour tout  $x > 0$  par :  $\varphi(x) = x - x^2 + \ln x$ . Calculer  $\varphi'(x)$ . En déduire le sens de variation de  $\varphi$ , puis le signe de  $\varphi(x)$ , sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
- b) Montrer que, pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) - x = \frac{\varphi(x)}{x}$
- c) En déduire la position relative de C et de D.
- 3) On considère le domaine limité sur le graphique par l'axe des abscisses, la courbe C et la tangente D.
- a) Hachurer ce domaine.
- b) Soit A son aire, en  $\text{cm}^2$ . Ecrire la valeur exacte de A comme expression polynomiale du second degré en  $\alpha$ .

### C) Etude d'une suite

Soit  $x_0$  un réel appartenant à l'intervalle  $\left]\frac{1}{e}; \alpha\right[$  on note  $M_0$  le point de C d'abscisse  $x_0$ .

- 1) a) Donner une équation de la tangente  $F_0$  à C en  $M_0$ , en fonction de  $x_0$ ,  $f(x_0)$  et  $f'(x_0)$ .
- b) Soit  $x_1$  l'abscisse du point d'intersection de  $F_0$  avec des abscisses. Ecrire  $x_1$  en fonction de  $x_0$ ,  $f(x_0)$  et  $f'(x_0)$ .
- 2) On considère la fonction  $h$  définie sur  $\left]\frac{1}{e}; \alpha\right[$  par  $h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$  (On remarquera que  $h(x_0) = x_1$ )
- a) Montrer que  $h'(x) = \frac{f''(x) \cdot f(x)}{[f'(x)]^2}$
- b) Calculer  $f''(x)$  et étudier son signe sur  $\left]\frac{1}{e}; \alpha\right[$ .
- c) En déduire que  $h$  est strictement croissante sur  $\left]\frac{1}{e}; \alpha\right[$ , puis montrer que  $x_1 < \alpha$ .
- d) En écrivant  $h(x) - x = -\frac{f(x)}{f'(x)}$ , étudier le signe de  $h(x) - x$  sur  $\left]\frac{1}{e}; \alpha\right[$ . En déduire que  $\frac{1}{e} < x_0 < x_1 < \alpha$
- 3) a) Démontrer que, pour tout  $x$  appartenant à  $\left]\frac{1}{e}; \alpha\right[$ ,  $h(x)$  appartient à  $\left]\frac{1}{e}; \alpha\right[$ .

b) On considère la suite  $(x_n)$  de réels définie par  $x_0$  et  $x_{n+1} = h(x_n)$  pour tout entier naturel  $n$ . Montrer que la suite  $(x_n)$  est strictement croissante.

### **Problème 7 :**

**I)** Soit la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$

- 1) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- 2) Calculer  $g(1)$  puis en déduire le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

**II)** Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$

- 1) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 2) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet 2 solutions  $\alpha$  et  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ ).
- 3) a) Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = -\frac{1}{2}x + 1$  est asymptote à la courbe  $(C)$  de  $f$ .

b) Etudier le signe de  $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$  puis en déduire la position de  $(C)$  et  $(\Delta)$ .

4) Tracer  $(C)$  et  $(\Delta)$  dans le même repère.

### **Problème 8**

#### **Partie A :**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$

- 1- Etudier les limites de la fonction  $g$  aux bornes de son ensemble de définition.
- 2- Dresser le tableau de variation de  $g$  puis en déduire son signe sur  $]0; +\infty[$

#### **Partie B :**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$f(x) = x + 2 \bullet \frac{\ln x}{x}$  et soit  $(C)$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$

d'unité graphique 2 cm.

- 1) a) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.  
b) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.  
c) Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe  $(C)$ , puis étudier la position de  $(C)$  par rapport à la droite  $(\Delta)$ .
- 2) Déterminer les coordonnées du point  $A$  sachant que la courbe  $(C)$  admet au point  $A$  une tangente  $(T)$  parallèle à  $(\Delta)$ .
- 3) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que  $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .
- 4) Tracer  $(C)$  et  $(\Delta)$  dans le même repère.

5) Hâchurer puis calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) ; la droite ( $\Delta$ ) et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = 2$ .

### Problème 9 :

#### Partie A :

- 1) On considère la fonction numérique  $g$  définie par  $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$ 
  - a) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
  - b) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  telle que  $1,89 < \alpha < 1,90$ .
  - c) Déduire de ce qui précède le signe de  $g(x)$ .
- 2) On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0, +[$  par  $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$  et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique (2 cm).
  - a) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
  - b) Vérifier que  $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ . En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$  d'amplitude  $2 \cdot 10^{-3}$ .
  - c) Tracer (C) dans le repère.

#### Partie B :

On considère la fonction numérique définie sur  $]0, +[$  par :  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$

- 1) a) Prouver que  $F$  est dérivable sur  $]0; +[$  et préciser  $F'(x)$ .
- b) En déduire le sens de variation de  $F$ .

2) a) Vérifier que  $\forall t \geq 1$  on a :  $\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^2}$

b) Pour tout  $x > 0$  on pose  $I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$  et  $J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$

- i) à l'aide d'une intégration par parties, calculer  $I(x)$
- ii) à l'aide d'une intégration par partie et de l'égalité :

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \text{ pour } t > 0, \text{ calculer } J(x).$$

- c) Déduire de ce qui précède que  $\forall x > 1$  on a :

$$\ln 2 + \ln \left( \frac{x}{x+1} \right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

- d) On admet que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \theta$ . Sans calculer  $\theta$  vérifier que  $\ln 2 \leq \theta \leq 1$

$x \rightarrow +$

**Problème 10 :**

On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $I = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$  par  $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$  et la fonction numérique  $f$  définie sur  $] -1 ; + [$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- 1) a) Démontrer que pour tout réel  $t \geq 0$  ;  $-2t^3 \leq g'(t) \leq 0$   
b) Démontrer que pour  $t \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$  ;  $0 \leq g'(t) \leq -2t^3$
- 2) En utilisant les inégalités précédentes, démontrer que pour tout  $x \in [0 ; + [$  on a :  
 $-\frac{1}{2}x^4 \leq g(x) \leq 0$  (on utilisera une intégration).
- 3) a) Vérifier que pour tout  $x \geq -\frac{1}{2}$  et  $x \neq 0$  ;  $f(x) = \frac{-g(x)}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{x}{3}$   
b) En utilisant l'inégalité de la question 2) ; démontrer que  $f$  est dérivable en 0.  
c)  $f$  est-elle continue en 0 ? Justifier votre réponse.
- 4) Soit  $h$  la fonction définie sur  $] -1 ; + [$  par :  $h(x) = \frac{-x^2 - 2x}{1+x} + 2\ln(1+x)$   
a) Étudier le sens de variation de  $h$ . Calculer  $h(0)$  et en déduire le signe de  $h(x)$  sur  $] -1 ; + [$   
b) Démontrer que pour tout  $x \in ] -1 ; + [ \setminus \{0\}$  ; on a :  $f'(x) = \frac{h(x)}{x^3}$   
c) Dresser le tableau de variation de  $f$  en précisant les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
- 5) On appelle  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.
  - a) Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  en son point d'abscisse 0.
  - b) Préciser les asymptotes à  $(C)$  puis construire  $(C)$ .
  - c) Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire  $A(\alpha)$  du domaine plan limité par la courbe  $(C)$  ; l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = \alpha$  ( $\alpha > 1$ ). Déterminer la limite  $A(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  tend vers  $+$ .

**Problème 11 :**

A) Soit  $k$  un nombre réel strictement positif, soit la fonction numérique  $f_k$  définie sur

$$]0; +\infty[ \text{ par : } f_k(x) = k^2 x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln x.$$

On appelle  $(C_k)$  la courbe représentative de  $f_k$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  où l'unité est 5 cm.

- 1) Etudier les variations de  $f_k$  et dresser son tableau de variation en précisant les limites de  $f_k$  aux bornes de son ensemble de définition.
- 2) Soit  $M_k$  le point de  $(C_k)$  correspondant au minimum de  $f_k$ . Déterminer dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  une équation cartésienne de l'ensemble  $(\Gamma)$  des points  $M_k$  quand  $k$  décrit  $]0; +\infty[$
- 3) Tracer sur une même figure les courbes  $(C_1)$  et  $(\Gamma)$  après avoir précisé leur position relative.

B) Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln x$

1) On note  $\alpha$  un nombre réel strictement positif

a) A l'aide d'une intégration par parties calculer  $\int_{\alpha}^1 \ln x dx$ . En déduire la valeur de

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^1 f(x) dx$$

b) Déterminer la limite de  $I(\alpha)$  quand  $\alpha$  tend vers  $+$ .

2) Pour  $n$  entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n f\left(\frac{p}{n}\right)$

a) En utilisant le sens de variation de  $f$  sur  $]0; 1]$ , démontrer que pour  $p$  entier naturel

$$\text{vérifiant } 1 \leq p \leq n-1 \text{ on a : } \frac{1}{n} f\left(\frac{p+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{p}{n}\right)$$

b) En déduire que :  $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$  puis que  $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$

c) En déduire que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{3}$

**Problème 12 :**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0, +[$  par :  $f : x \rightarrow \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

On note (C) sa courbe dans le repère d'unité graphique 2 cm.

**Partie A :** (Encadrement de  $\ln(x+1)$ ).

1- Montrer que  $\forall x \geq 0$  on a :  $1 - x \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$

2- Etudier rapidement les fonctions  $x \mapsto \ln(x+1) - x$  et  $x \mapsto \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}$

puis en déduire que  $\forall x \geq 0$  on a :  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$  (1)

**Partie B :** (Etude d'une fonction auxiliaire)

Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0, +[$  par  $g(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2}$

1) Montrer que  $g$  est dérivable puis calculer  $g'(x)$ .

2) Montrer que  $\forall x \geq 0$ , on a  $0 \leq g'(x) \leq \frac{x^2}{4}$ . En déduire que  $\forall x \geq 0$ , on a :

$$0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{12} \quad (2)$$

(on pourra étudier la fonction  $x \mapsto g(x) - \frac{x^3}{12}$ )

**Partie C :** (Etude des variations de  $f$ )

1) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, +[$  et calculer  $f'(x)$ .

2) Etablir que  $\forall x \geq 0$  ;  $g(x) \leq \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ . Puis grâce à la relation (2). En déduire le sens de variation de  $f$ .

**Partie D :** (Etude de  $f$  aux bornes de l'ensemble de définition)

1) Déterminer la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $+$

2) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{1}{2}$  (on pourra utiliser (2))

En déduire que  $f$  est dérivable en 0 et calculer  $f'(0)$ .

Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 et grâce à (1), préciser la position de (C) par rapport à (T).

3) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .

4) Tracer la courbe (C) et la droite (T) dans le même repère.

### **Problème13** ( non corrigé)

#### **Partie A :**

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$  et soit  $(C)$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(o, i, j)$ .

- 1) Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$
- 2) Calculer les limites aux bornes de  $D_f$  puis en déduire que  $(C)$  admet deux asymptotes dont on précisera les équations.
- 3) Dresser le tableau de variation de  $f$
- 4) a-Ecrire une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse 1  
b-Etudier la position de  $(C)$  et  $(T)$  puis tracer  $(C)$  et  $(T)$  dans le même repère.
- 5) On considère l'intégrale  $I$  définie par  $I = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx$ .  
a-Calculer  $I$  en utilisant une intégration par parties.  
b-En déduire en  $\text{cm}^2$  l'aire  $A$  de la partie du plan délimité par la courbe  $(C)$ , la tangente  $(T)$  et la droite d'équation  $x = \frac{-1}{2}$

#### **Partie B :**

On considère dans cette partie la fonction numérique  $h$  définie sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  par

$h(x) = \frac{1}{2} f(\cos x)$  où  $f$  est la fonction définie dans la **Partie A :**

- 1) Vérifier que  $h$  est la primitive qui s'annule en  $\frac{\pi}{2}$  de la fonction  $g$  définie par

$$g(x) = \frac{1}{\sin x}$$

- 2) Calculer l'intégrale  $K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$

- 3) Soit l'intégrale  $(I_n)$ ;  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$  définie par  $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin x} dx$

a-Calculer  $I_0$  et  $I_1$

b- Calculer l'intégrale  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin x dx$

c- En déduire l'expression de  $I_n - I_{n+2}$  en fonction de  $n$  puis calculer  $I_2, I_3, I_4$  et  $I_5$

### **Problème14** ( non corrigé)

#### **PARTIE A :**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $g(x) = x^2 + 3x - 1 - \ln x$ . On désigne par  $Cg$  la courbe représentative de  $g$  dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  d'unité graphique 1 cm.

- 1) Etudier les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$ .
- 2) Etudier les branches infinies de la courbe  $Cg$ .
- 3) Etudier les variations de  $g$ .
- 4) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $[2 ; 3]$ .  
Déterminer un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près par dichotomie.
- 5) Dédire de ce qui précède le signe de  $g(x)$  en fonction de  $x$ .  
Interpréter graphiquement le résultat.
- 6) a- Tracer la courbe  $Cg$ .  
a- Discuter graphiquement suivant les valeurs du périmètre réel  $m$ , le nombre de solution de l'équation  $g(x) = m$

#### **PARTIE B :**

Soit la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x\ln x}$ . On désigne par  $(Cf)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  d'unité graphique : 1 cm.

- 1) a) Montrer que pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ , on a  $x > \ln x$ .  
b) justifier que la fonction  $f$  est bien définie sur  $]0 ; +\infty[$ .
- 2) Etudier les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ . Que peut-on en déduire ?
- 3) a- Montrer que pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2-x\ln x)}$   
b- Dresser le tableau de variation de  $f$ .  
c – Montrer que  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}$  puis en déduire un encadrement de  $f(\alpha)$ .
- 4) Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(Cf)$  de  $f$  au point d'abscisse 1.
- 5) Résoudre l'équation  $f(x) = 0$  puis tracer la courbe  $(Cf)$  et la tangente  $(T)$  dans le même repère.
- 6) a- Montrer que pour tout  $x \in ]0 ; +\infty[$ , on a :  $f'(x) = \frac{1-\frac{1}{x}}{x-\ln x}$   
b- Soit  $A(\alpha)$  l'aire de la partie du plan délimité par la courbe  $(Cf)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = \alpha$ .  
Montrer que  $A(\alpha) = 2\ln(\alpha - 1)$  puis en déduire un encadrement de  $A(\alpha)$ .
- 7) Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égale à .
  - a- Calculer  $a_n = \int_1^n f(x)dx$ . Interpréter graphiquement ce résultat.
  - b- Calculer la limite de  $a_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### PARTIE C :

Soit la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = \int_1^{e^x} f(t) dt$ . On désigne par  $(C_h)$  la courbe représentative de  $h$  dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  d'unité graphique : 1 cm.

- 1) a- Montrer que  $h(x) = \ln(e^x - x)$ .  
b- Montrer que pour tout nombre réel  $x$ , on a :  $e^x > x$ .
- 2) a- Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$  puis  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x}$

Que peut-on en déduire pour la courbe  $(C_h)$  ?

b- Montrer que pour tout nombre réel  $x$ , on a :  $h(x) = x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$ .

En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

- 3) a- Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  est asymptote oblique à la courbe  $(C_h)$  au voisinage de  $+\infty$ .  
b- Etudier la position relative de  $(C_h)$  et de  $(\Delta)$ .
- 4) Dresser le tableau de variation de  $h$  puis tracer.

### Problème 15 (non corrigé)

#### PARTIE A :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$ . On désigne par  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  d'unité graphique 1 cm.

- 1) Montrer que  $f$  est impaire.
- 2) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  puis montrer que sa dérivée  $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 1}}$ .
- 3) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 4) Etudier les branches infinies de la courbe  $(C_f)$ .
- 5) Trouver une équation cartésienne de la tangente  $(T)$  à  $(C_f)$  au point d'abscisse nul.
- 6) Préciser la position de  $(T)$  et  $(C_f)$ .
- 7) Tracer la droite  $(T)$  et la courbe  $(C_f)$ .
- 8) Soit  $\alpha$  un réel strictement positif. Calculer en fonction de  $\alpha$ , l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe  $(C_f)$  et les droites d'équations respectives  $x = 0$ ,  $y = 0$  et  $x = \alpha$ .

**PARTIE B :**

- 1) Montrer que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque  $g$  définie sur un intervalle  $I$  que l'on précisera.
- 2) Construis dans le même repère que  $(Cf)$ , la courbe  $(Cg)$  de la fonction  $g$ .
- 3) Montrer que pour tout  $x \in I$ , on a :  $g(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})$ .
- 4) Montrer que l'équation  $g(x) = x$  admet dans l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  une solution unique  $\alpha$  et que  $\alpha \in \left] -\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2} \right[$ .
- 5) Calculer en fonction de  $\alpha$  l'aire du domaine limité par les deux courbes  $(Cf)$  et  $(Cg)$  et situées dans le demi-plan  $x \geq 0$ .

**PARTIE C :**

On considère la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\varphi(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$ .

- 1) Montrer que  $\varphi$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
- 2) On pose  $h(x) = \varphi^{-1}(x)$ . Donner les expressions de  $h(x)$  et  $h'(x)$ .

# Fonctions Exponentielles

## Objectifs

Ce terme vise à :

- Définir et étudier les fonctions exponentielles et puissances ;
- Mettre en place les primitives de fonctions de la forme  $u' e^u$  et  $u' u^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ).

## Savoirs et savoir-faire

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"><li>• Fonction exponentielle népérienne :<ul style="list-style-type: none"><li>- définitions, notation, propriétés, représentation graphique ;</li><li>- limite de référence ;</li><li>- primitive de <math>u' e^u</math></li></ul></li><li>• Définition de la fonction exponentielle de base <math>a</math> (<math>a \in \mathbb{R}_+^*</math>)</li><li>• Définition de la fonction puissance d'exposant réel non nul.</li><li>• Primitive de <math>u' \times u^n</math> (<math>n \in \mathbb{R} - \{-1\}</math>).</li><li>• Croissance comparée des fonctions logarithme népérien, exponentielle et puissances.</li><li>• Dérivées de fonctions du type expo, <math>u^\alpha</math> (<math>\alpha \in \mathbb{R}^*</math>).</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Etant donnée une fonction faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne ou une fonction puissance, l'étudier et la représenter graphiquement.</li><li>• Résoudre des équations ou inéquations faisant intervenir des fonctions exponentielles.</li><li>• Déterminer les primitives d'une fonction du type :<ul style="list-style-type: none"><li>- <math>u' \times u^n</math> (<math>n \in \mathbb{R} - \{-1\}</math>).</li><li>- <math>u' e^u</math></li></ul></li><li>• Utiliser les limites sur la croissance comparée pour calculer d'autres limites.</li></ul>

### 1- Situation problème :

On sait que la fonction Logarithme est une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$ . Elle admet une bijection réciproque de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}_+^*$  ayant le même sens de variation que la fonction logarithme.

### 2- Définition :

La fonction exponentielle noté « **exp** » ou «  $e^x$  » est la fonction réciproque de la fonction  $\ln x$  définie sur  $\mathbb{R} = ]-\infty ; +\infty[$

### 3- Ensemble de définition de la fonction exponentielle :

Si  $f(x) = e^x$  alors  $Df = \mathbb{R} = ]-\infty ; +\infty[$

### NB :

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$  (car la fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction logarithme Népérien. Elle prend ces valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ ).

### 4- Propriétés remarquables :

$$P_1 : e^{a \times b} = (e^a)^b$$

$$P_2 : e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$P_3 : e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$P_4 : e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$P_5 : (e^a)^n = e^{na}$$

$$P_6 : e^{\ln a} = \ln e^a = a$$

$$P_7 : e^0 = 1 \text{ et } e^1 = e$$

$$P_8 : \ln e = e^{\ln 1} = 1$$

$$P_9 : e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

$$P_{10} : e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b \text{ et } e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$$

$$P_{11} : e^a = b \Leftrightarrow a = \ln b$$

### 5- Limites remarquables :

$$\lim e^x = 0 \text{ et}$$

$$\lim e^x = +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{et pour } a > 0, \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{\ln x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty$$

#### 6- Dérivées remarquables :

- Si  $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
- Si  $f(x) = e^{(ax+b)} \Rightarrow f'(x) = a e^{(ax+b)}$
- Si  $f(x) = e^{[u(x)]} \Rightarrow f'(x) = u'(x) e^{[u(x)]}$

#### 7- Primitives remarquables :

- Si  $f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x + K$
- Si  $f(x) = e^{(ax+b)} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a} e^{(ax+b)} + K$
- Si  $f(x) = u'(x) e^{[u(x)]} \Rightarrow F(x) = e^{[u(x)]} + K$

#### 8- Etude de la fonction $x \rightarrow e^x$

Soit  $f(x) = e^x$  et (C) sa courbe.

$$Df = \mathbb{R} = ]-\infty ; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

( $\mathcal{C}$ ). admet des branches infinies :  $y = 0$  est asymptote à ( $\mathcal{C}$ ). et ( $Y'OY$ ) est branche parabolique pour la courbe ( $\mathcal{C}$ ).

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \Rightarrow f'(x) > 0$$

D'où le tableau de variation est le suivant :

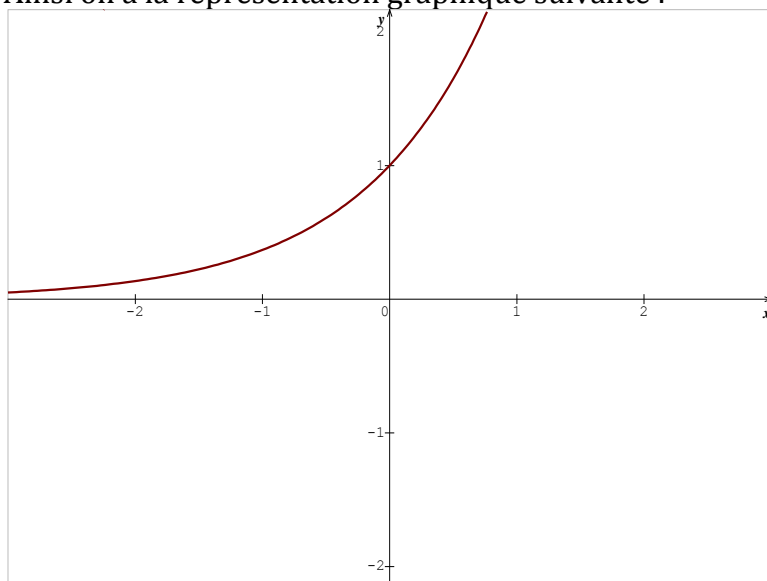
$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$ $\rightarrow$

- ( $\mathcal{C}$ )  $\cap$  ( $OX$ )  $\Leftrightarrow e^x = 0 \Leftrightarrow x = \ln 0$  impossible

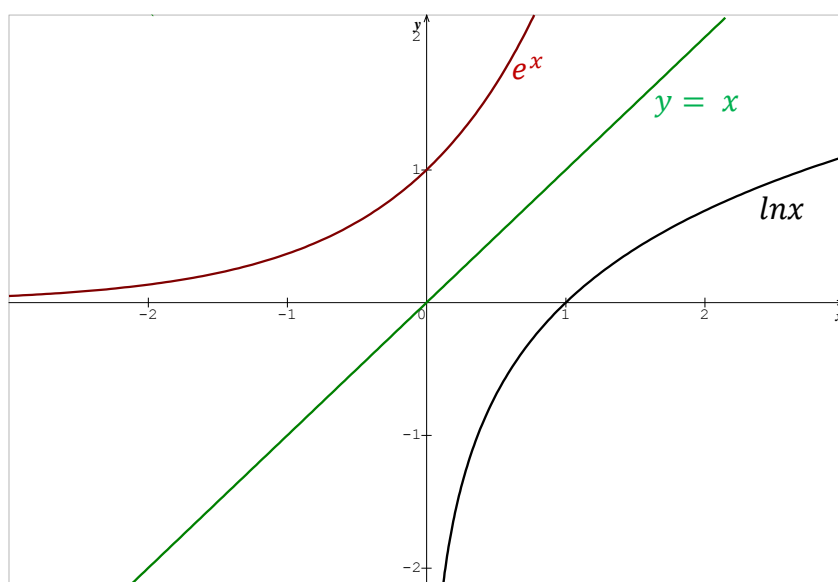
Donc (C) ne coupe pas l'axe (OX).

- ( $\mathcal{C}$ )  $\cap$  ( $OY$ )  $\Rightarrow x = 0$  et  $f(0) = e^0 = 1$ .  
Donc (C) coupe l'axe (OY) en 1

Ainsi on a la représentation graphique suivante :



**NB :** les courbes représentatives des fonctions  $x \rightarrow \ln x$  et  $x \rightarrow e^x$  dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la droite ( D ) d'équation :  $y = x$  ( première bissectrice )



## Evaluation

### Activité 1 :

Simplifie les expressions suivantes :

$$A = e^{\ln 3} - e^{-\ln 2} + e^{\frac{1}{2}\ln 8} - 2e^{-\ln \frac{1}{4}} \quad ; \quad C = -2 \ln e^3 + \ln \sqrt{e} - \ln(\ln e) + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{e^2}{2} \right)$$

### Activité 2 :

Résous dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a-  $e^x = 2$  ;  $e^x = \frac{1}{3}$  ;  $e^x = -\frac{3}{2}$  ;  $e^x = \sqrt{2}$

b-  $e^{x-2} = 1$  ;  $e^{3x+1} = e^{-x+3}$  ;  $e^{x^2+1} = e^{2x}$

$$c- \frac{e^x + 1}{e^x - 4} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 \quad ; \quad \frac{e^{2x}}{e^x + 1} = \frac{1}{e^{-x}}$$

### 9- Fonctions puissances :

#### a) Définition :

On appelle fonction puissance toute fonction  $f_a$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  
 $f_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$ , où  $a$  est un nombre réel positif et différent de 1.

#### b) Etude des fonctions puissances :

- Dérivée :  $f'_a(x) = (e^{x \ln a})' = \ln a e^{x \ln a}$ , d'où :  $f'_a(x) = a^x \ln a$

- **Tableaux de variation** :

Les tableaux de variations suivants résument l'étude de  $f_a$  suivant les valeurs de  $a$ .

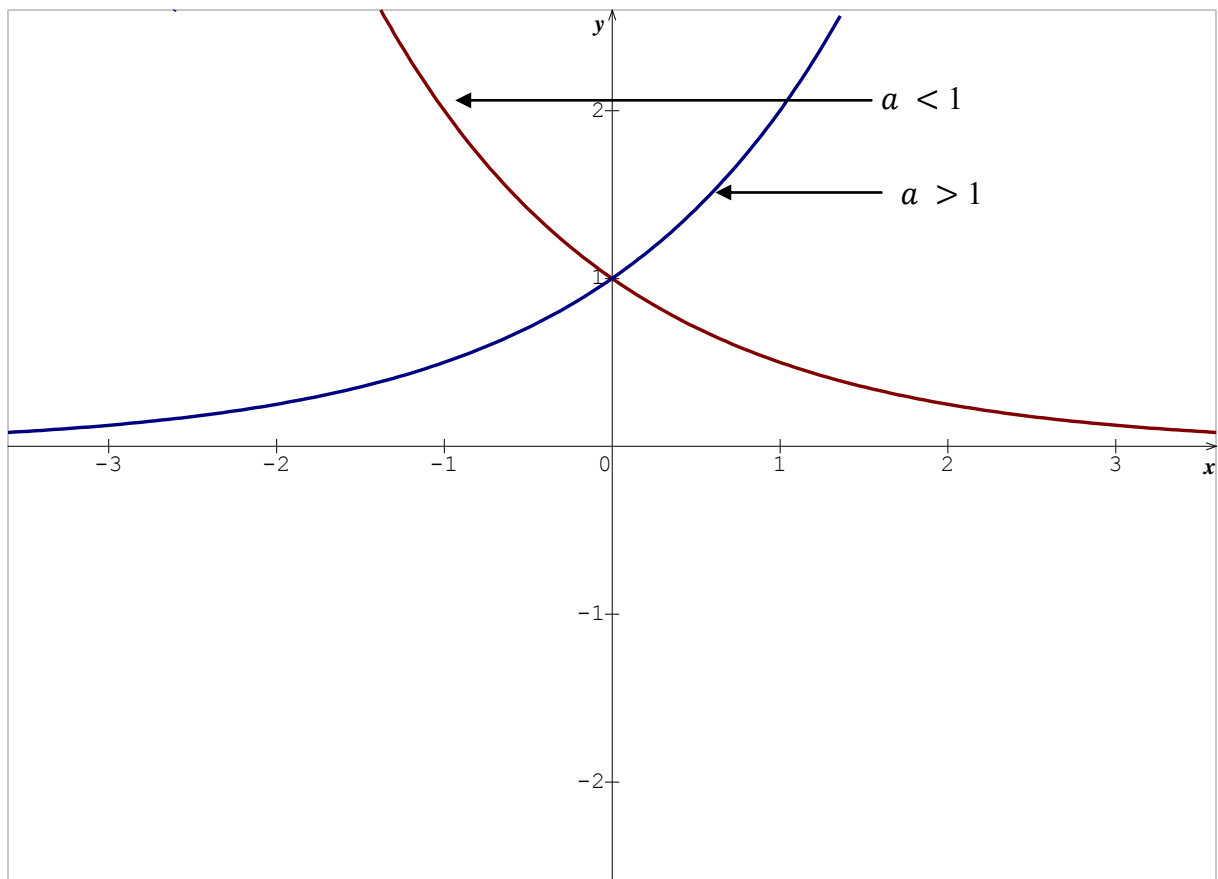
**1<sup>er</sup> cas** : Si  $0 < a < 1$  alors on a : le tableau suivant

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'_a(x)$	-	
$f_a(x)$	$+\infty$	0

**2<sup>ème</sup> cas** : Si  $a > 1$  alors on a : le tableau suivant

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'_a(x)$	+	
$f_a(x)$	0	$+\infty$

- **Représentations graphiques:**



### Evaluation

#### Activité 1

Résous dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

a-  $3^x = 4$  ; b-  $2^x = 3$  ; c-  $4^{-x} = 3$  ; d-  $3^x > 6$  ; e-  $2^{-x} \geq 3$  ; f-  $3^{-x} \leq 3^{2x}$

#### Activité 2

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , trace la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes :

a-  $f(x) = 2^x$  ; b-  $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$

# EXERCICES

**Exercice 1 :** Simplifier les expressions suivantes :

$$A = e^{\ln 3} - e^{-\ln 2} + e^{\frac{1}{2}\ln 8} - 2e^{-\ln \frac{1}{4}} \quad B = e^{2\ln 3} + e^{1+\ln 2} - e^{3-\ln 2} + e^{\frac{1}{2}+\ln 4}$$

$$C = -2\ln e^3 + \ln \sqrt{e} - \ln(\ln e) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}e^2\right) ; D = \frac{2 - \ln \sqrt{e}}{1 + \ln e^2} + \frac{1 + e^{-\ln 2}}{\ln(e \ln e)}$$

**Exercice 2 :**

**I)** Résolvez dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1)  $e^x = 2$  ;  $e^x = \frac{1}{3}$  ;  $e^x = -\frac{3}{2}$  ;  $e^x = \sqrt{2}$

2)  $e^{x-2} = 1$  ;  $e^{3x+1} = e^{-x+3}$  ;  $e^{x^2+1} = e^{2x}$

3)  $3^x = 4$  ;  $2^x = 3$  ;  $4^{-x} = 3$

4)  $\frac{e^x + 1}{e^x - 4} = \frac{1}{2}$  ;  $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$  ;  $\frac{e^{2x}}{e^x + 1} = \frac{1}{e^{-x}}$

5)  $x^2 + 3x - 4 = 0$  et  $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$

6)  $2x^2 - 5x + 2 = 0$  et  $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$

**II)** Résolvez dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1)  $e^x < 2$  ;  $e^{-x} \geq 1$  ;  $e^{-2x} \leq e^x$

2)  $(e^x - 1)(e^{-x} - 4) < 0$  ;  $(e^{2x} - 1)(2e^x + 1) \geq 0$

3)  $3^x > 6$  ;  $2^{-x} \geq 3$  ;  $3^{-x} \leq 3^{2x}$

4)  $x^2 + 2x - 3 \leq 0$  et  $e^{2x} + 2e^x - 3 \leq 0$

5)  $x^2 - x - 2 \geq 0$  et  $4^x - 2^x - 2 \geq 0$

**III)** soit la fonction polynôme définie par  $f(x) = x^3 - 4x^2 - 29x - 24$

1) Calculer  $f(-1)$  et  $f(-3)$  puis en déduire une factorisation de  $f$  sous forme d'un produit de 3 facteurs du premier degré.

2) Résolvez l'équation  $f(x) = 0$

3) En déduire la résolution de l'équation :  $e^{2x} - 4e^x - 29 - 24e^{-x} = 0$

**IV)** Résoudre les systèmes suivants :

a) 
$$\begin{cases} 2e^x - e^y = 15 \\ e^x + 2e^y = 40 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} e^x + e^y = 3 \\ e^{-x} + e^{-y} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} e^x e^y = 8 \\ e^x + e^y = 6 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ e^{x+y} = 6 \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} 3e^x - 2\ln y = 13 \\ 5e^x + 3\ln y = 9 \end{cases}$$

f) 
$$\begin{cases} e^{x+1} \times e^{y-2} = 2 \\ \ln x + \ln y = \ln(x-1) + \ln(y-1) \end{cases}$$

g) 
$$\begin{cases} 2^x - 2^{2-y} = 0 \\ 2^x + 2^{2+y} = 0 \end{cases}$$

h) 
$$\begin{cases} 3^x \times 3^{2y-1} = 1 \\ 3^{x+2} \times 3^y = 3 \end{cases}$$

### **Exercice 3 :**

**I)** Calculer la limite des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définition :

1)  $f(x) = x - e^x$  ;  $f(x) = x + e^{-x}$  ;  $f(x) = xe^x$  ;  $f(x) = xe^{-x}$

2)  $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$  ;  $f(x) = \frac{e^x}{(x-1)^2}$  ;  $f(x) = e^{-x^2}$  ;  $f(x) = \frac{e^x}{(x-1)^2}$

3)  $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x}$  ;  $f(x) = x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$  ;  $f(x) = \frac{\sin x}{1 - e^x}$

**II)** Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1)  $f(x) = e^{2x+1}$  ;  $f(x) = e^{2-3x}$  ;  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

2)  $f(x) = (2x - 1)e^x$  ;  $f(x) = (x - 1)^2 e^x$  ;  $f(x) = (x^2 + 1)e^{-2x}$

3)  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$  ;  $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$  ;  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

### **Exercice 4 :**

**I)** Déterminer la primitive des fonctions suivantes :

1)  $f(x) = e^{-x}$  ;  $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$  ;  $f(x) = xe^{x^2}$

2)  $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$  ;  $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$  ;  $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$

3)  $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$  ;  $f(x) = 2^x$  ;  $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

**II)** 1) déterminer les réels a et b pour que la fonction F soit une primitive sur R de la fonction f.

a)  $f(x) = (2x + 1)e^x$  et  $F(x) = (ax + b)e^x$

b)  $f(x) = (x + 1)e^{\frac{-x}{2}}$  et  $F(x) = (ax + b)e^{\frac{-x}{2}}$

2) Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction F soit une primitive sur R de la fonction f

a)  $f(x) = (x^2 - 1)e^{2x}$  et  $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$

b)  $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{-3x}$  et  $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-3x}$

### **Problème 1 :**

Le plan est rapporté à un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

### **Partie A :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (2 + \cos x) e^{1-x}$ . On note  $C$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Montrer que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $f(x) > 0$ .
- 2) a) Montrer que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$ .  
b) En déduire que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $2 + \cos x + \sin x > 0$   
c) Montrer que  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .
- 3) a) Montrer que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$   
b) En déduire les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .  
c) Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- 4) a) Montrer que, sur l'intervalle  $[0; \pi]$ , l'équation  $f(x) = 3$  admet une solution unique  $\alpha$ .  
b) Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .
- 5) Représenter la courbe  $C$  sur  $[0; 4]$ .

### **Partie B :**

On veut calculer l'aire,  $A$ , exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe  $C$ , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = 1$ .

- 1) Montrer que :  $A = 2e - 2 + \int_0^1 e^{1-t} \cos t \, dt$
- 2) On pose :  $I = \int_0^1 e^{1-t} \cos t \, dt$  et  $J = \int_0^1 e^{1-t} \sin t \, dt$ .  
a) A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :  
 $I = -\cos 1 + e - J$  et  $J = -\sin 1 + I$ .  
b) En déduire la valeur de  $I$ .
- 3) Déterminer la valeur exacte de  $A$  en unités d'aire, puis donner une valeur approchée de  $A$  à  $10^{-2}$  près par défaut.

### **Partie C :**

Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = -1 - \frac{\sin x}{2 + \cos x}$

- 1) a) Montrer que la fonction  $h$  admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ .  
b) Calculer la primitive  $H$  de la fonction  $h$ , qui prend en  $0$  la valeur  $(1 + \ln 3)$ .
- 2) a) Déterminer  $\ln(f(x))$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .  
b) Etudier le sens de variation de la fonction  $H$ .  
c) déterminer le tableau de variations de  $H$ .
- 3) On appelle  $\Gamma$  la courbe représentative de la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $x \rightarrow 1 - x + \ln(2 + \cos x)$ . (On ne demande pas de représenter  $\Gamma$ ). On appelle  $\Delta$  la droite d'équation  $y = -x + 1$ .
  - a) Etudier la position relative de  $\Gamma$  et de  $\Delta$ .
  - b) Déterminer les abscisses des points communs à  $\Gamma$  et  $\Delta$ .
- 4) a) Etablir une équation de la tangente  $T$  à  $\Gamma$  au point d'abscisse  $0$ .  
b) Etudier la position relative de  $\Gamma$  et  $T$ .
- 5) Montrer que la courbe  $\Gamma$  est contenue dans une bande du plan limitée par deux droites parallèles dont on donnera des équations.

## **Problème 2 :**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$$

On note  $C$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### **A) Etude de la fonction $f$ et construction de la courbe $C$ .**

- 1) Etudier la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$  puis en  $+\infty$  (on pourra écrire  $xe^{x-1} = \frac{1}{e}xe^x$ ).
- 2) Démontrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x + 1$  est asymptote à la courbe  $C$  en  $-\infty$  et préciser la position de la courbe  $C$  par rapport à la droite  $\Delta$ .
- 3) a) Calculer la dérivée  $f'$  et la dérivée seconde  $f''$  de la fonction  $f$ .  
b) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f'$  en précisant la limite de la fonction  $f'$  en  $-\infty$ .  
c) Calculer  $f'(1)$  et en déduire le signe de  $f'(x)$  pour tout réel  $x$ .  
d) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .
- 4) Soit  $I$  l'intervalle  $[1, 9 ; 2]$ . Démontrer que, sur  $I$ , l'équation  $f(x) = 0$  a une solution unique,  $\alpha$ .
- 5) Tracer la droite  $\Delta$  et la courbe  $C$  (unité graphique : 2 cm).

### **B) Recherche d'une approximation de $\alpha$ :**

On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $I$  par :  $g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$ .

- 1) Démontrer, sur  $I$ , l'équation  $f(x) = 0$  équivaut à l'équation  $g(x) = x$ .
- 2) Etudier le sens de variation de la fonction  $g$  sur  $I$  et démontrer que, pour tout  $x$  appartenant à  $I$ ,  $g(x)$  appartient à  $I$ .
- 3) Démontrer que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $I$ ,  $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$ .
- 4) Soit  $(U_n)$  la suite de nombres réels définie par :  
 $U_0 = 2$  et, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = g(U_n)$ .

On déduit de la question **B. 2.** que tous les termes de cette suite appartiennent à l'intervalle  $I$ . On ne demande pas de le démontrer.

- a) Démontrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|U_n - \alpha|$ .
- b) En déduire, en raisonnant par récurrence que :

$$\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}$$

- c) En déduire que la suite  $(U_n)$  converge et préciser sa limite.

### **C) Calcul d'aire :**

- 1) En intégrant par parties, calculer l'intégrale  $J = \int_1^\alpha xe^{x-1} dx$ .
- 2) a) Déterminer, en unités d'aire, l'aire  $A$  de la portion de plan limitée par la courbe  $C$ , l'axe des abscisses, la droite d'équation  $x = 1$  et la droite d'équation  $x = \alpha$ .

c) Démontrer qu'on peut écrire  $A = (\alpha - 1) \left( \alpha - \frac{1}{\alpha} \right)$ .

**Problème 3 :**

L'objet de ce problème est d'étudier, à l'aide d'une fonction auxiliaire, une fonction et de résoudre une équation différentielle dont elle est solution.

**A) Etude d'une fonction auxiliaire**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)$ .

- 1) Calculer  $g'(x)$  et montrer que ce nombre est strictement négatif pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .
- 2) Déterminer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- 3) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- 4) Donner le signe de  $g(x)$ .

**B) Etude d'une fonction et calcul d'une aire.**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-2x} \ln(1+2e^x)$ .

On note  $C$  sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

- 1) Calculer  $f'(x)$  et montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 2e^{-2x} g(x)$ .
- 2) a) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
- b) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

On pourra remarquer que : si on pose  $X = 1 + 2e^x$ ,  $f(x)$  s'écrit  $4 \frac{X}{(X-1)^2} \frac{\ln X}{X}$

- 3) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 4) Tracer  $C$ .
- 5) Soit  $\alpha$  un réel strictement positif.

a) Vérifier que, pour tout réel  $x$ ,  $\frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$

En déduire la valeur de l'intégrale  $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x} dx$ .

b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale :  $J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$ .

Donner une interprétation graphique de  $J(\alpha)$ .

**C) Résolution d'une équation différentielle**

On considère l'équation différentielle

(E) :  $y' + 2y = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$

- 1) Vérifier que la fonction  $f$  étudiée dans la partie **B** est solution de (E).

- 2) Montrer qu'une fonction  $\varphi$  est solution de (E) si et seulement si  $\varphi - f$  est solution de l'équation différentielle (E') :  $y' + 2y = 0$ .
- 3) Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

**Problème 4 :**

**Partie A :** Résolution de l'équation différentielle (1) :  $y' - 2y = xe^x$

- 1) Résoudre l'équation différentielle (2) :  $y' - 2y = 0$  où  $y$  désigne une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) Soient  $a$  et  $b$  deux réels et soit  $u$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = (ax + b)e^x$ .
  - a) Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $u$  soit solution de l'équation (1).
  - b) Montrer que  $v$  est une solution de l'équation (2) si et seulement si  $u + v$  est solution de (1).
  - c) En déduire l'ensemble des solutions de (1).
- 3) Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

**Partie B :** Etude d'une fonction auxiliaire

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2e^x - x - 2$ .

- 1) Déterminer la limite de  $g$  en  $-\infty$  et la limite de  $g$  en  $+\infty$ .
- 2) Etudier le sens de variation de  $g$ , puis dresser son tableau de variation.
- 3) On admet que l'équation  $g(x) = 0$  a exactement deux solutions réelles.
  - a) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.
  - b) L'autre solution est appelée  $\alpha$ . Montrer que  $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$ .
- 4) Déterminer le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs du réel  $x$ .

**Partie C :** Etude de la fonction principale

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$ .

- 1) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$  et la limite de  $f$  en  $+\infty$ . (On pourra mettre  $e^{2x}$  en facteur).
- 2) Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x)$  et  $g(x)$  ont le même signe. Etudier le sens de variation de  $f$ .
- 3) Montrer que  $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ , où  $\alpha$  est défini dans la **partie B**. En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$ . (On rappelle que  $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$ ).
- 4) Etablir le tableau de variation de  $f$ .
- 5) Tracer la courbe (C), représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

**Partie D :** Calcul d'aire

- 1) Soit  $m$  un réel négatif

Interpréter graphiquement l'intégrale  $\int_m^0 f(x)dx$ . (on justifiera la réponse).

- 2) a) Calculer  $\int_m^0 xe^x dx$  à l'aide d'une intégration par parties.

b) En déduire  $\int_m^0 f(x)dx$ .

3) Calculer la limite de  $\int_m^0 f(x)dx$ , lorsque  $m$  tend vers  $-\infty$ .

### **Problème 5 :**

Les objectifs du problème sont de déterminer une solution particulière d'une équation différentielle (partie A), d'étudier cette solution (partie B) et de la retrouver dans un contexte différent (partie C).

#### **Partie A :**

On appelle (E) l'équation différentielle  $y'' - y = 0$ , où  $y$  est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels.

- 1) Déterminer les réels  $r$  tels que la fonction  $h$ , définie par  $h(x) = e^{rx}$ , soit solution de (E).
- 2) Vérifier que les fonctions  $\varphi$  définies par  $\varphi(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux nombres réels, sont des solutions de (E). On admet qu'on obtient ainsi toutes les solutions de (E).
- 3) Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées  $\left(\ln 2; \frac{3}{4}\right)$  et admet en ce point une tangente dont le coefficient directeur est  $\frac{5}{4}$ .

#### **Partie B :**

On appelle  $f$  la fonction définie sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels par :  $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ .

On désigne par (C) la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Soit  $\mu$  un réel. Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \mu$  équivaut à  $e^{2x} - 2\mu e^x - 1 = 0$ .  
En déduire que l'équation  $f(x) = \mu$  a une unique solution dans  $\mathbb{R}$  et déterminer sa valeur en fonction de  $\mu$ .

- 2) a) Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .  
b) Calculer  $f'(x)$  pour tout nombre réel  $x$  et en déduire le sens de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

- 3) a) déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe au point d'abscisse 0;  
b) En étudiant le sens de variation de la fonction  $d$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $d(x) = f(x) - x$ , préciser la position de (C) par rapport à (T).  
c) Tracer (C) et (T). (unité graphique : 2 cm).

4) Soit D la partie représentant sur le graphique l'ensemble des points M de coordonnées

$$(x; y) \text{ tels que : } \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq f(x). \end{cases}$$

Calculer, en  $\text{cm}^2$ , l'aire de D.

**Partie C :**

On cherche à caractériser les fonctions  $\phi$ , dérivables sur l'ensemble des nombres réels, telles que, pour tout réel  $x$  :

$$\phi(x) - \int_0^x (x-t)\phi(t)dt = x$$

1) On suppose qu'il existe une telle fonction  $\phi$ .

a) Justifier que, pour tout nombre réel  $x$ ,

$$\phi(x) = x + x \int_0^x \phi(t)dt - \int_0^x t\phi(t)dt.$$

Calculer  $\phi(0)$ .

b) Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$ ,  $\phi'(x) = 1 + \int_0^x \phi(t) dt$ . Calculer  $\phi'(0)$ .

c) Vérifier que  $\phi$  est une solution de l'équation différentielle (E) de la **partie A**. Déterminer laquelle, parmi toutes les solutions explicitées dans la question **A. 2**.

2) a) à l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\int_0^x t(e^t - e^{-t})dt$ .

b) Démontrer que la fonction trouvée à la question 1. c) vérifie bien la relation (H).

### **Problème 6 :**

On considère la fonction  $f$ , définie sur l'intervalle  $]-1 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}$

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

#### **A) Etude de la fonction $f$ et tracé de $(C)$**

1) a) Calculer la limite de cette fonction lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

b) Calculer la limite de cette fonction lorsque  $x$  tend vers  $-1$ . Que peut-on en déduire pour la courbe  $(C)$  ?

2) Calculer  $f'(x)$  et montrer que son signe est celui de  $\frac{x-1}{x+1}$ .

3) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

4) Tracer la courbe  $(C)$ , les droites d'équations respectives  $x = -1$  et  $y = 1$ , ainsi que la tangente à cette courbe en son point d'abscisse 0.

(Unité graphique : 4 cm)

5) Montrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une unique solution, notée  $\alpha$ , dans l'intervalle  $[1; 10]$ . Utiliser le graphique précédent pour donner deux nombres entiers consécutifs  $a$  et  $b$  tels que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $[a; b]$ .

#### **B) Calcul d'une aire**

1) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]-1 ; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{e^x}{1+x}$ .

a) Etudier le sens de variation de  $g$  dans l'intervalle  $[1; 2]$ .

b) Montrer que, pour tout  $x$  appartenant à  $[1; 2]$ , on a :  $1 \leq g(x) \leq 2,5$ .

c) En déduire un encadrement de  $A_1 = \int_1^2 g(x) dx$ .

2) Soit  $A_2$  l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les droites d'équations respectives  $x = 1$  et  $x = 2$ , la courbe  $(C)$  et l'axe des abscisses.

A l'aide d'une intégration par parties, exprimer  $A_2$  en fonction de  $A_1$  et en déduire un encadrement de  $A_2$ .

#### **C) Approximation d'un nombre à l'aide d'une suite**

Pour cette partie, on utilisera sans justification le fait que l'équation  $f(x) = x$  a une unique solution  $\beta$  et que celle-ci est élément de l'intervalle  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .

Soit  $h$  la fonction définie sur  $]-1 ; +\infty[$  par  $h(x) = \frac{e^x}{(1+x)^3}$ .

1) a) Vérifier que, pour tout  $x$  appartenant à  $]-1 ; +\infty[$ , on a :  $f'(x) = f(x) - 2h(x)$ .

b) Calculer  $h'(x)$ .

c) En utilisant la question **a**), calculer  $f''(x)$ . En déduire le sens de variation de  $f'$  dans l'intervalle  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .

d) En déduire que, pour tout  $x$  appartenant à  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ , on a :  $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ .

2) On définit la suite  $(U_n)$ , pour tout nombre entier naturel  $n$ , par :  
 $U_0 = 1$  et  $U_{n+1} = f(U_n)$  pour  $n \geq 0$

On admet que, pour tout nombre entier naturel  $n$ , on a :  $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$ .

a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel  $n$ , on a :  $|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|U_n - \beta|$ .

b) Montrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel  $n$ , on a :  $|U_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ .

c) En déduire une valeur approchée numérique de  $\beta$  à  $10^{-3}$  près.

### **Problème 7 :**

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité 5 cm).

#### **Partie A :**

On considère la fonction  $f_1$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f_1(x) = xe^{-x^2}$  et on appelle  $C_1$  sa courbe représentative.

- 1) Montrer que pour tout réel positif  $x$ ,  $f_1(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$ . En déduire le sens de variation de  $f_1$ .
- 2) Calculer la limite de  $f_1$  en  $+\infty$  (on pourra poser  $u = x^2$ ). Interpréter graphiquement ce résultat.
- 3) Dresser le tableau de variation de  $f_1$ .
- 4) On appelle  $\Delta$  la droite d'équation  $y = x$ . Déterminer la position de  $C_1$  par rapport à  $\Delta$ .
- 5) Tracer  $C_1$  et  $\Delta$ .

#### **Partie B :**

On considère la fonction  $f_3$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f_3(x) = x^3e^{-x^2}$  et on appelle  $C_3$  sa courbe représentative.

- 1) Montrer que pour tout réel  $x$  positif,  $f_3(x)$  a même signe que  $3 - 2x^2$ . En déduire le sens de variation de  $f_3$ .
- 2) Déterminer les positions relatives de  $C_1$  et  $C_3$ .
- 3) Tracer  $C_3$  dans le même repère que  $C_1$  (on admettra que  $C_3$  a la même asymptote que  $C_1$  en  $+\infty$ ).
- 4) On appelle  $D$  la droite d'équation  $x = 1$ . Soit  $A_1$  l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe  $C_1$ , les deux axes de coordonnées et la droite  $D$  et soit  $A_3$  l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe  $C_3$ , les deux axes de coordonnées et la droite  $D$ .
  - a) Calculer  $A_1$ .
  - b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $A_3 = -\frac{1}{2e} + A_1$ .

#### **Partie C :**

On désigne par  $n$  un entier naturel non nul et on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$ . On note  $C_n$  la courbe représentative de  $f_n$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $f_n$  admet un maximum pour  $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$ . On note  $\alpha_n$  ce maximum.
- 2) On appelle  $S_n$  le point de  $C_n$  d'abscisse  $\sqrt{\frac{n}{2}}$ . Montrer que, pour tout  $n$ ,  $C_n$  passe par  $S_2$ . Placer  $S_1, S_2, S_3$  sur la figure.
- 3) Soit la fonction  $g$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = e^{\frac{x}{2}[-1 + \ln(\frac{x}{2})]}$  c'est-à-dire 
$$g(x) = \exp\left[\frac{x}{2}\left(-1 + \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right]$$
  - a) Etudier le sens de variation de  $g$ .

- b) Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\alpha_n = g(n)$ . En déduire que tout point  $S_n$  a une ordonnée supérieure à celle de  $S_2$ .

**Problème 8 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$  pour  $x > 0$  et  $f(0) = 0$ .

On note  $C$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 5 cm).

**Partie A :**

- 1) Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = 1$  est asymptote à  $C$ .
- 2) Pour  $x > 0$ , calculer  $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ . Etudier la limite de cette expression quand  $x$  tend vers 0 (on pourra utiliser, pour  $n$  entier naturel non nul,  $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^n e^{-u} = 0$ )

Que peut-on en déduire pour la fonction  $f$  ?  
Que peut-on en déduire pour la courbe  $C$  ?

- 3) Démontrer que pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  on a  $f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$ .
- 4) Etudier les variations de la fonction  $f$  et dresser le tableau des variations de  $f$ .

**Partie B :**

On note  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = f(x) - xf'(x)$ .

- 1) Montrer que dans  $]0, +\infty[$ , les équations  $g(x) = 0$  et  $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$  sont équivalentes.
- 2) Démontrer que l'équation  $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$  admet une seule racine réelle  $\alpha$  dont on justifiera un encadrement à  $10^{-2}$  près.
- 3) On pose  $A = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$ . Encadrer  $A$  à  $2 \times 10^{-1}$  près (justifier) et montrer que  $A = f'(\alpha)$ .
- 4) Pour tout  $a > 0$ , on note  $T_a$  la tangente à  $C$  au point d'abscisse  $a$ . Montrer que  $T_a$  a pour équation  $y = Ax$ . Tracer  $T_\alpha$ , puis la courbe  $C$ .
- 5) Déduire des questions précédentes que de toutes les tangentes  $T_a$  à  $C$  (en des points d'abscisses non nulles), seul  $T_\alpha$  passe par l'origine  $O$ .
- 6) On admettra que  $T_\alpha$  est au dessus de  $C$  sur  $]0, +\infty[$ .
  - a) Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = m$ , suivant le réel  $m$  donné.
  - b) Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = mx$  selon le réel  $m$  donné.

**Parti C :**

- 1) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $U_n = \int_n^1 f(x) dx$ . Sans calculer explicitement  $U_n$  déterminer le signe de  $U_{n+1} - U_n$ . En déduire que la suite est croissante.
- 2) Démontrer que la fonction  $h$ , définie sur  $]0, +\infty[$  par  $h(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ , est une primitive de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .

- 3) Calculer  $U_n$ . Interpréter graphiquement le résultat. Etudier la convergence de la suite  $(U_n)$ .

**Problème 9 :**

Le but du problème est l'étude simultanée de deux fonctions  $f$  et  $g$  (partie A), utilisées ensuite pour déterminer une valeur approchée d'un certain nombre réel noté  $C$ .

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  ; (unité graphique : 2 cm).

**Partie A :**

Soient les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = x - e^x \text{ et } g(x) = (1 - x)e^x ;$$

On appelle  $(C)$  et  $(C')$  leurs courbes représentatives respectives.

- 1) a) Déterminer les limites des fonctions  $f$  et  $g$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .  
 b) Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe  $(C)$ .  
 c) Etudier le sens de variation de chacune des fonctions  $f$  et  $g$ , sur l'ensemble des nombres réels.  
 d) Dresser les tableaux de variation des fonctions  $f$  et  $g$ .
- 2) Pour tout réel  $x$ , on pose  $h(x) = f(x) - g(x)$ .  
 a) Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $h'(x) = 1 - g(x)$ .  
 b) En déduire le sens de variation de la fonction  $h$ , sur l'ensemble des nombres réels.  
 c) Démontrer que les courbes  $(C)$  et  $(C')$  admettent un unique point d'intersection, dont l'abscisse, notée  $\alpha$ , appartient à l'intervalle  $[1 ; 2]$ . Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-1}$ .  
 d) Etudier, suivant les valeurs de  $x$ , la position relative de  $(C)$  et de  $(C')$ .
- 3) Tracer la droite  $(\Delta)$  et les courbes  $(C)$  et  $(C')$ .
- 4) Pour tout réel  $x$ , on pose  $\theta(x) = \int_0^x h(t) dt$ .  
 a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\theta(x)$ .  
 b) En déduire, sous la forme d'une expression rationnelle en  $\alpha$ , l'aire en  $\text{cm}^2$  du domaine limité sur le graphique par les courbes  $(C)$  et  $(C')$ , l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = \alpha$ .

**Partie B :**

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ .

- 1) A l'aide d'une calculatrice, déterminer un encadrement de  $S_{20}$ , d'amplitude  $10^{-3}$ .
- 2) a) En utilisant le tableau de variation de la fonction  $g$  définie dans la partie A, démontrer que, pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0 ; 1[$ ,  $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ .  
 b) En déduire que, pour tout nombre entier  $k \geq 2$ ,  $e^{\frac{1}{k}} \leq \frac{k}{k-1}$ , puis que, pour tout nombre entier  $k \geq 2$ ,  $\frac{1}{k} \leq \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$ .

c) Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , calculer  $S_n - S_{n-1}$ . En déduire que la suite  $(S_n)$  est décroissant.

3) Pour tout entier  $n > 20$ , on pose  $u_n = S_{20} - S_n$ .

a) Vérifier que pour tout entier  $n > 20$ ,  $u_n \geq 0$ .

b) En utilisant le tableau de variation de la fonction  $f$  définie dans la partie A, démontrer que, pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0 ; 1]$ ,  $1 + x \leq e^x$ .

c) En déduire que pour tout nombre entier  $k \geq 1$ ,  $\frac{k+1}{k} \leq e^{\frac{1}{k}}$ , puis que, pour tout nombre

entier  $k \geq 1$ ,  $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$ .

d) Vérifier que, pour tout entier naturel  $n > 20$ ,  $u_n = \ln\left(\frac{n}{20}\right) - \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{n}\right)$ . En raisonnant par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel

$n > 20$ ,  $\ln\left(\frac{n+1}{21}\right) \leq \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{n}$ .

e) En déduire que, pour tout entier naturel  $n > 20$ ,

$u_n \leq \ln\left(\frac{21}{20}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ , puis que pour tout entier naturel  $n > 20$ ,  $u_n \leq 0,049$ .

4) On admet que la suite  $(S_n)$  est convergente de limite notée  $C$ .

a) Justifier l'encadrement  $S_{20} - 0,049 \leq C \leq S_{20}$ .

b) Déterminer un encadrement de  $C$  d'amplitude  $0,05$ .

### **Problème 10 :**

Le problème est composé de l'étude d'une suite de fonctions dépendant d'un paramètre, puis de la recherche d'une valeur approchée d'une solution d'une équation du type :  $f(x) = x$ .

#### **Partie A :**

Pour tout entier  $n$  strictement positif, on note  $f_n$  la fonction numérique de la variable réelle

définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par :  $f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$

On note  $(C_n)$  la courbe représentative de  $f_n$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).

- 1) Déterminer la fonction dérivée  $f'_n$  de  $f_n$  et donner l'expression de  $f'_n$  en fonction de  $f_n$  et de  $f_{n+1}$ .
- 2) Étudier les variations de  $f_n$  et ses limites éventuelles en  $-\infty$ ,  $-1$  et  $+\infty$ . (On distinguera les cas où  $n$  est pair et  $n$  est impair.)
- 3) Démontrer que toutes les courbes  $(C_n)$  passent par un même point.
- 4) Déterminer la limite de  $\frac{f_n(x)}{x}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . Que peut-on en déduire pour les courbes  $(C_n)$ ? Tracer sur deux figures distinctes les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$ .

#### **Partie B :**

Pour tout entier  $n$  strictement positif, on note :  $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .

- 1) Démontrer que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et qu'elle converge.
- 2) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on a :  
$$\frac{1}{n-1} \left( 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) \leq I_n \leq \frac{e}{n-1} \left( 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right).$$

En déduire la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

3) Démontrer en utilisant la relation de la question A.1., une relation entre  $I_n$  et  $I_{n+1}$ .

4) Démontrer que : 
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_{n+1} = 1$$

En déduire que la suite  $(n I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge et déterminer sa limite.

### **Partie C :**

Dans cette partie,  $n = 2$ .

- 1) Démontrer que l'équation  $f_2(x) = x$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .

Le but de cette partie est de déterminer une valeur approchée de  $\alpha$ .

- 2) Etudier les variations de  $f'_2$  dans  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$  et en déduire que pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ , on a :  $-0,25 \leq f'_2(x) \leq 0$

- 3) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{n+1} = f_2(u_n) \end{cases}$

- a) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  ;  $u_n$  est élément de  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .

- b) Démontrer, en utilisant la question C.2., que pour tout entier naturel  $n$  :  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$ .

- c) En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$  et que la suite

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$ .

- 4) Pour quelles valeurs de  $n$ , un est – elle une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près ? (On donne :  $\sqrt{e} = 1,65$  ;  $\ln 2 = 0,69$  ;  $\ln 5 = 1,6$ .)

### **Problème 11 :**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, +[$  par  $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$

On note (C) sa courbe dans un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique (4 cm).

#### **Partie A :** (Etude d'une fonction auxiliaire).

On définit la fonction  $g$  sur  $[0, +[$  par  $g(x) = x + 2 - e^x$

- 1) Etudier les variations de  $g$ , dresser son tableau de variation. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution  $\alpha$  et que  $1,14 < \alpha < 1,15$ .
- 2) En déduire le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

#### **Partie B :** (Etude et tracée de $f$ ).

- 1) Montrer que  $\forall x \in [0, +\infty[ ; f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$ . En déduire le sens de variation de  $f$ .
- 2) a) Montrer que  $\forall x \in ]0, +\infty[ ; f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$   
b) En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Interpréter graphiquement ce résultat.
- 3) Montrer que  $\forall x \in ]0, +\infty[ ; f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$  puis déterminer l'équation de la tangente au point  $x_0 = 0$
- 4) Montrer que  $f(x) - x = \frac{(x+1)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1}$ . Etudier les variations de la fonction  $T(x) = e^x - xe^x - 1$ . Puis en déduire la position de (C) par rapport à (T). Tracer (C) et (T).

#### **Partie C :**

- 1) Déterminer une primitive  $F$  de  $f$  en utilisant la question 2) a) de la partie B.
  - 2) Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire  $A$  du domaine plan limité par (C), la tangente (T) et droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 1$
  - 3)  $\forall n \in \mathbb{N}$  on pose  $I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$ 
    - a) Calculer à  $10^{-2}$  près les valeurs de  $I_1 ; I_0 ; I_2$ .
    - b) Interpréter graphiquement  $I_n$ .
    - c) Montrer que  $\forall n \geq 2 ; f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$
- En déduire la monotonie de la suite  $(I_n)$  à partir de  $n = 1$ .
- d) déterminer la limite de la suite  $(I_n)$

## **Problème 12 :**

### **Partie A :**

Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^x + x - 5$

- 1) Etudier le sens de variation de  $g$ . (On ne demande pas de déterminer les limites de  $g$ , ni de construire sa courbe).
- 2) a) Calculer  $g(0)$  et  $g(2)$   
b) Démontrer que l'équation :  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + x - 5 = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que  $1,30 < \alpha < 1,31$

### **Partie B :**

Soit la fonction numérique  $f$  définie sur  $] - , 5[$  par :  $f(x) = \ln(5 - x)$ .

- 2) Etudier le sens de variation de  $f$ . Préciser les limites de  $f$  en  $5$  et en  $-$ .
- 3) Prouver que  $f(\alpha) = \alpha$
- 4) a) Démontrer que  $\forall x \in [0,3]$  on a  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$   
b) En déduire que  $\forall x \in [0,3]$  on a :  $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$   
c) Démontrer que si  $0 \leq x \leq 3$ , alors  $0 \leq f(x) \leq 3$ .
- 5) Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ , d'unité graphique (3 cm), on désigne son (C) la représentation graphique de la fonction  $f$ .  
a) Tracer la courbe (C), puis hachurer la partie du plan formée des points de coordonnées

$(x, y)$  tel que :  $\begin{cases} \alpha \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$  on notera (S) cette partie.

- b) En remarquant  $\alpha$  que,  $\forall x \neq 5 : \frac{x}{x-5} = 1 + \frac{5}{x-5}$ , Montrer que  $\int_{\alpha}^4 \frac{x}{x-5} dx = 4 - 6\alpha$
- c) Prouver que l'aire  $A$  de la partie (S) en  $\text{cm}^2$  est donnée par  $A = -\alpha^2 + 6\alpha - 4$ .  
(On utilisera une intégration par partie).

# Equations Différentielles

## Objectifs

**Ce thème vise à :**

- étudier la forme des solutions de certaines équations différentielles ;
- modéliser quelques problèmes à l'aide d'une équation différentielle et en déduire une solution.

## Savoirs et savoir-faire

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"><li>• Equation différentielle du type <math>f' = kf</math>.</li><li>• Equation différentielle du type <math>f'' = 0</math>.</li><li>• Equation différentielle du type <math>f'' = kf</math>.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Résoudre une équation différentielle du type <math>f' = kf</math>.</li><li>• Equation différentielle du type <math>f'' = 0</math>.</li><li>• Equation différentielle du type <math>f'' = kf</math>.</li></ul>

### 1) Définition :

On appelle équations différentielles, toutes équations faisant intervenir une fonction (l'inconnue), ses dérivées et sa variable  $x$ . Leur résolution consiste à déterminer toutes les fonctions solutions. Ainsi les équations différentielles sont classées par ordre.

### 2) Différents types d'équations différentielles

#### Equations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre ( $y' - ay = 0$ )

##### a) Définition :

$f$  étant une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , la relation  $f'(x) - a f(x) = 0$ ; où  $f$  est une fonction inconnue, est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, sans second membre. Cette équation est souvent notée  $y' - ay = 0 = 0$ .

##### b) Résolution :

Les solutions, définies sur  $\mathbb{R}$ , de l'équation différentielles  $y' - ay = 0$  sont les solutions  $f_k$  qui à tout nombre réel  $x$ , associent  $f_k(x) = k e^{ax}$ , où  $k$  est un nombre réel quelconque.

Ainsi l'ensemble solution est :  $S = \{ k e^{ax} \}$

##### Exemple :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a)  $y' - 2y = 0$  ; b)  $2y' + 3y = 0$

##### Solution :

a)  $y' - 2y = 0 \Rightarrow S = k e^{2x}$

b)  $2y' + 3y = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{2}{3}y = 0 \Rightarrow S = k e^{-\frac{2}{3}x}$

#### Equations différentielles du 2<sup>ème</sup> ordre :

##### a) Cas particulier : (Equation du 2<sup>ème</sup> ordre de la forme $y'' + A(x) = 0$ )

Avec  $A(x)$  est une fonction quelconque.

Ce type d'équation différentielle contient uniquement la variable  $x$  et la dérivée seconde de la fonction à cherchée. Chercher  $y$  revient donc, dans un premier temps, à chercher  $y'$  puis ayant déterminé  $y'$  à chercher  $y$ .

##### Exemple :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a)  $y'' - 2x + 1 = 0$  ;    b)  $y'' - \sin x + x = 1$ .

**Solution**

a)  $y'' - 2x + 1 = 0 \Rightarrow y'' = 2x - 1$ .

**La fonction  $y'$  est une primitive de  $y''$ , donc on a :**

$$y' = \int (2x - 1) dx = x^2 - x + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

**La fonction  $y$  est une primitive de  $y'$ , donc on a :**

$$y = \int (x^2 - x + k) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + kx + k' \quad (k' \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + kx + k' \quad (k' \in \mathbb{R})$$

b)  $y'' - \sin x + x = 1 \Rightarrow y'' = \sin x - x + 1$

**La fonction  $y'$  est une primitive de  $y''$ , donc on a :**

$$y' = \int (\sin x - x + 1) dx = -\cos x - \frac{1}{2}x^2 + x + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

**La fonction  $y$  est une primitive de  $y'$ , donc on a :**

$$y = \int (-\cos x - \frac{1}{2}x^2 + x + k) dx = -\sin x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + kx + k' \quad (k' \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow y = -\sin x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + kx + k' \quad (k' \in \mathbb{R})$$

**b) Equation différentielle de la forme:  $(ay'' + by' + cy = 0)$**

Pour résoudre de telles équations différentielles, on recherche d'abord une équation caractéristique de la forme  $ar^2 + br + c = 0$ . Ainsi on calcule le discriminant associé  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

\* Si  $\Delta > 0$  on a deux solutions distinctes  $r_1$  et  $r_2$  tel que

$$\boxed{\mathbf{S = f(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \text{ (avec } C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R})}}$$

\* Si  $\Delta = 0$ , on a deux solutions doubles  $r_1$  et  $r_2$  tel que  $r_1 = r_2$  et

$$\boxed{S = f(x) = (C_1 x + C_2) e^{rx} \text{ avec } (C_1 \text{ et } C_2 \in R)}$$

\* Si  $\Delta < 0$ , on a 2 solutions complexes  $r_1$  et  $r_2$  tel que :

$$r_1 = \alpha + i\beta \text{ et } r_2 = \alpha - i\beta \text{ et } \boxed{S = f(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)}$$

### Exemple :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a)  $3y'' - 5y' + 2y = 0$  ;    b)  $y'' + y' + y = 0$  ;    c)  $y'' - 4y' + 4y = 0$

### Solution :

**a)  $3y'' - 5y' + 2y = 0$**

Equation caractéristique :  $3r^2 - 5r + 2 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4(3)(2) = 25 - 24 = 1 = > \Delta > 0$  alors :  $r_1 = 1$  et  $r_2 = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow S = \{C_1 e^x + C_2 e^{\frac{2}{3}x}\}$

**b)  $y'' + y' + y = 0$**

Equation caractéristique :  $r^2 + r + 1 = 0$

$\Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3 = 3i^2$  alors :  $r_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $r_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow S = \left\{ (C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)) e^{-\frac{1}{2}x} \right\}$

**c)  $y'' - 4y' + 4y = 0$**

Equation caractéristique :  $r^2 - 4r + 4 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$  alors :  $r_1 = r_2 = r = -\frac{4}{2} = -2$

$\Rightarrow S = \{(C_1 x + C_2) e^{-2x}\}$

### Equations différentielles de la forme $(y'' + w^2 y = 0)$

Ce type d'équation différentielle est très fréquent en sciences physiques. Sa résolution est suivit d'une application.

**Résolution :**

La solution de telles équations est de la forme:

$$S = A \cos(\omega t + \varphi), \text{ où } A \text{ et } \varphi \text{ sont deux nombres réels quelconques.}$$

$$\text{Ou } S = A \cos \omega x + B \sin \omega x$$

**Equations différentielles de la forme** ( $y'' - \omega^2 y = 0$ )

Ce type d'équation différentielle est utilisé ici pour résoudre une application concrète.

**Résolution :**

La solution de telles équation est de la forme :  $S = a e^{\omega t} + b e^{-\omega t}$

**Exemple :**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\text{a) } y'' + 9y = 0 \quad ; \quad \text{b) } 4y'' - 9y = 0 \quad ; \quad \text{c) } y'' + 5y = 0$$

**Solution**

$$\text{a) } y'' + 9y = 0 \Rightarrow \omega^2 = 9 \Rightarrow \omega = 3 \Rightarrow S = A \cos 3x + B \sin 3x$$

$$\text{b) } 4y'' - 9y = 0 \Leftrightarrow y'' - \frac{9}{4}y = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \omega = \frac{3}{2} \Rightarrow S = a e^{\frac{3}{2}x} + b e^{-\frac{3}{2}x}$$

$$\text{c) } y'' + 5y = 0 \Rightarrow \omega^2 = 5 \Rightarrow \omega = \sqrt{5} \Rightarrow S = A \cos \sqrt{5}x + B \sin \sqrt{5}x$$

**EXERCICES**

**Exercice 1 :**

Vérifiez que les fonctions f données sont solutions des équations correspondantes.

$$1) f(x) = 2e^{-2x} + 3e^{2x} ; \quad y'' - 4y = 0$$

$$2) f(x) = (2x + 1)e^{-x} ; \quad y'' + 2y' + y = 0$$

$$3) f(x) = x \sin x ; \quad y'' + y = 2 \cos x$$

$$4) f(x) = e^{-x} \sin x ; \quad y'' + 2y' + 2y = 0$$

### Exercice 2:

Résolvez les équations différentielles proposées.

- 1)  $y'' - 4y' + 3y = 0$
- 2)  $y'' - y = 0$
- 3)  $y'' - 5y' + 6y = 0$
- 4)  $2y'' - y' - y = 0$
- 5)  $y'' + 2y' + y = 0$
- 6)  $y'' - 2y' + y = 0$
- 7)  $9y'' + 6y' + y = 0$
- 8)  $4y'' + 12y' + 9 = 0$
- 9)  $y'' + y = 0$
- 10)  $y'' + y' + y = 0$
- 11)  $4y'' + 9y = 0$
- 12)  $y'' + 3y' + 4y = 0$

### Exercice 3 :

Déterminez la solution  $f$  de l'équation différentielle donnée, vérifiez les conditions données.

- 1)  $y'' - 2y' + y = 0$  ;  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 1$
- 2)  $y'' - y' - y = 0$  ;  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1$
- 3)  $y'' + 4y = 0$  ;  $f(0) = 6$  et  $f'(0) = 10$
- 4)  $y'' + y = 0$  ;  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1$
- 5)  $y'' - 4y' - 5y = 0$  ;  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = -6$
- 6)  $y'' - 4y = 0$  ;  $f(0) = 2$  et  $f'(0) = -2$
- 7)  $y'' - 3y' + 2y = 0$  ;  $f(1) = 1$  et  $f'(1) = 3$

### Exercice 4 :

Étudiez les variations et tracez dans un plan muni d'un repère orthonormal la courbe représentative (C) de la solution  $f$  de l'équation différentielle proposée vérifiant la courbe des conditions (S) données.

- 1)  $y' - 3y = 0$  ; (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite d'équation  $y = x$ .
- 2)  $2y' - y = 0$  ; (C) passe par le point de coordonnées (2 ; e).
- 3)  $y'' + 2y = 0$  ; (C) passe par le point de coordonnées (0 ; 0) et admet la droite d'équation  $y = x$  comme tangente en ce point.
- 4)  $y'' - 4y' + 4y = 0$  ; (C) passe par le point de coordonnées (0 ; 1) et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
- 5)  $y'' - 3y' + 2y = 0$  ; (C) passe par le point coordonnées (ln 2; 0) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur - 4
- 6)  $y'' - 2y + 2y = 0$  ; (C) passe par le point de coordonnées  $\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$  et sa tangente au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

Equations différentielles avec second membre :

### Exercice 5

I) Soit (E) l'équation différentielle  $y' + 2y = x^2$ .

- 1) Déterminer une fonction polynôme  $g$ , de degré deux, solution de (E).
- 2) Démontrer qu'une fonction  $f$  est solution de (E) si, et seulement si,  $f - g$  est solution de l'équation (E') :  $y' + 2y = 0$
- 3) a) Résolvez l'équation (E').  
b) Donnez les solutions de l'équation (E).

II) 1) Résolvez l'équation différentielle :  $y' - 2y = 0$

2) Déterminer un polynôme du second degré  $P(x)$  solution de l'équation différentielle :

$$y' - 2y = 8x^2 - 8x \quad (1)$$

3) Démontrez que les fonctions  $f_k$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f_k(x) = ke^{2x} - 4x^2$ , où  $k$  est un réel donné quelconque, sont solutions de l'équation différentielle (1).

### Exercice 6 :

on se propose de déterminer les fonctions deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$ , solution de l'équation différentielle. (E)

$$(E) : y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$$

- 1) Déterminer une fonction polynôme du second degré,  $g$ , solution de l'équation (E).
- 2) Démontrer que  $\varphi$  est solution de (E) si et seulement si,  $\varphi - g$  est solution de l'équation différentielle (E') définie par : (E') :  $y'' + 2y' + y = 0$
- 3) Résolvez (E') ; puis déduire  $J$  – en l'ensemble des fonctions  $\varphi$  solutions de l'équation différentielle (E).

### Exercice 7 :

On se propose de résoudre le problème suivant :

Trouvez une fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ , s'annulant pour  $x = 1$  et vérifiant la propriété suivante :  $\forall x > 0, x \times f'(x) - 3 \times f(x) = 3 \ln x$  (E)

- 1) Trouver tous les polynômes  $P$  du 3<sup>ème</sup> degré telles que, pour tout réel  $x$  ;  
 $x \times P'(x) - 3 \times P(x) = 0$
- 2) Soit une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $]0, +\infty[$  telle que  $f(1) = 0$  et soit  $h$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par la relation  $f(x) = x^3 \times h(x)$ 
  - a) Calculer  $h(1)$  et calculer  $f'(x)$  en fonction de  $h'(x)$  et  $h(x)$ .
  - b) Démontrer que :  $f$  vérifie (E) ssi  $\forall x \in ]0, +\infty[, h'(x) = \frac{3}{x^4} \ln x$
  - c) On suppose que  $f$  vérifie (E). Démontrer que  $h$  est définie sur  $]0, +\infty[$  par  
$$h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4} \ln t dt$$
  - d) Déterminer  $h(x)$  en fonction de  $x$  par une intégration par partie

- e) Démontrer qu'il existe une unique fonction  $f$  solution du problème posé et donner l'expression de  $f(x)$ .

**Exercice 8 :**

On se propose de résoudre l'équation différentielle :

$$(E_1) : y' - 2y = \frac{2}{1 + e^{-2x}}$$

- 1) Déterminer la solution de l'équation différentielle  $(E_2) : y' - 2y = 0$  qui prend la valeur 1 en 0.
- 2) Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ , telle que  $f(0) = \ln 2$  et soit  $g$  la fonction définie par la relation :  $f(x) = e^{2x} \times g(x)$ .

- a) Calculer  $g(0)$
- b) Calculer  $g'(x)$  en fonction de  $f'(x)$  et de  $f(x)$ .

- c) Démontrer que  $f$  est solution de  $(E_1)$  si et seulement si  $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

- d) En déduire l'expression de  $g(x)$ , puis celle de  $f(x)$  de telle sorte que  $f$  soit solution de  $(E)$ .

### Exercice 9 :

On considère le système suivant, d'équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre tel que :

$$\begin{cases} y' + 4z = 2e^{2x} \\ z' - y = e^{2x} \end{cases} \quad \text{Où } y \text{ et } z \text{ désignent deux fonctions inconnues de variables réels } x.$$

- a) Former l'équation différentielle du second ordre (E) à la quelle satisfait  $y(x)$
- b) Intégrer l'équation (E) et en déduire la solution générale du système.

Préciser la solution particulière pour laquelle on a :  $y = 1$  et  $z = -1$  pour  $x = 0$ .

### Exercice10 (non corrigé)

Lors du tremblement de terre qui a secoué la centrale nucléaire de FUKUSHIMA au Japon, le nombre d'atome de radium  $N(t)$  échappé à l'instant  $t$  est donné par la relation :

$$N'(t) = -25 \cdot 10^{-8} N(t) \text{ et } N(0) = N_0 \text{ où } (t \text{ est exprimé en années}).$$

- 1) Déterminer l'expression de  $N(t)$  en fonction de  $N_0$  et  $t$ .
- 2) Au bout de combien d'années le nombre d'atome de radium aura-t-il diminué de moitié ?

### Exercice11 (non corrigé)

- 1) Résoudre l'équation différentielle d'inconnue  $f$  tel que :  $x^2 f'(x) + 2xf(x) - 1 = 0$ .
- 2) Soit l'équation (E) :  $x^2 f'(x) - 2xf(x) + f^2(x) = 0$ .
- 3) On pose  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ 
  - a- Montrer que l'équation (E) est équivalent à  $x^2 g'(x) + 2xg(x) = 1$ .
  - b- Déduisez-en la résolution de l'équation (E).

### Exercice12 (non corrigé)

- 1) Résoudre l'équation différentielle  $y'' + y = 0$ .
- 2) Soit (E) l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$  où  $f'$  désigne la fonction dérivée de  $f$ .
  - a) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \cos x$ . Vérifier que  $g$  est un élément de (E).
  - b) Soit  $f$  un élément de (E). Vérifie que pour tout réel  $x$ ,  $f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .
  - c) En déduire que si  $f$  un élément de (E) alors  $f$  est une solution de l'équation différentielle  $y'' + y = 0$ .
  - d) Détermine l'ensemble solution de (E).

# Dénombrement-Probabilité- Variable aléatoire-Loi Binomiale-Epreuve de Bernoulli

## Objectifs

Ce thème vise à :

- consolider les acquis sur le dénombrement.
- calculer la probabilité d'un événement ;
- calculer les probabilités d'événement indépendants.

## Savoirs et savoir-faire

### 1. PROBABILITES

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"><li>• Vocabulaire.</li><li>• Définition d'une probabilité dans le cas d'une équiprobabilité.</li><li>• Propriété.</li><li>• Evénements indépendants<ul style="list-style-type: none"><li>- Définition ;</li><li>- Propriétés.</li></ul></li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Dénombrer, dans le cas d'une expérience conduisant à un nombre fini d'éventualités :<ul style="list-style-type: none"><li>- Les cas possibles d'une expérience ;</li><li>- Les cas favorables d'un événement</li></ul></li><li>• Calculer la probabilité d'un événement.</li><li>• Démontrer que deux événements sont indépendants.</li></ul>

## 2. VARIABLES ALEATOIRES

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"><li>• Définition</li><li>• Loi de probabilité.</li><li>• Fonction de répartition.</li><li>• Espérance mathématique.</li><li>• Variance ; écart type</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Une variable aléatoire étant donnée :<ul style="list-style-type: none"><li>- Déterminer sa loi de probabilité et sa fonction de répartition ;</li><li>- Construire sa fonction de répartition ;</li><li>- Calculer son espérance mathématique ;</li><li>- Calculer sa variance et son écart type.</li></ul></li></ul>

## 3. LOI BINOMIALE

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"><li>• Probabilité d'obtenir k succès dans une suite de n épreuves Bernoulli</li><li>• <math>E(X) = np</math>.</li><li>• <math>V(X) = np(1 - p)</math>.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Calculer la probabilité d'obtenir k succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli. (<math>0 \leq k \leq n</math>).</li></ul>

## Dénombrement :

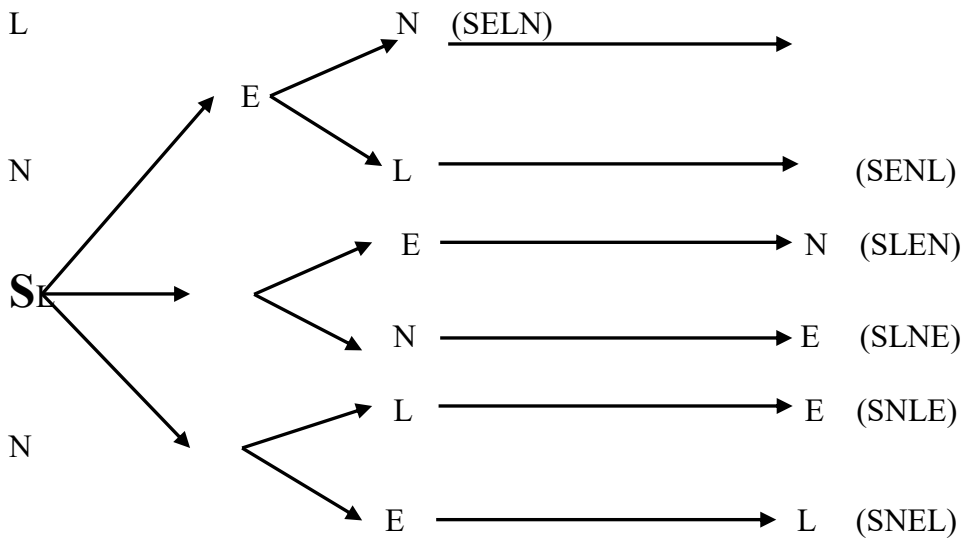
### 1) Théorie des ensembles :

#### a) Activité 1 :

Combien de mot peut-on former avec 4 lettres et sans répétition avec le mot : SELN ?

SELN ;	ESLN ;	LESN ;	NELS ;
SENL ;	..... ;	..... ;	..... ;
SLNE ;	..... ;	..... ;	..... ;
SLNE ;	..... ;	..... ;	..... ;
SLEN ;	..... ;	..... ;	..... ;
SNLE ;	..... ;	..... ;	..... ;
SNEL ;	..... ;	..... ;	..... ;
Pour <b>S</b> en 1 <sup>ère</sup> Position	Pour <b>E</b> en 1 <sup>ère</sup> Position	Pour <b>L</b> en 1 <sup>ère</sup> Position	Pour <b>N</b> en 1 <sup>ère</sup> Position

Ainsi on aura donc formé au total  $6 \times 4 = 24$  mots. Ceci peut être résumé par l'arbre ou le diagramme suivant :



On a donc fait un arrangement de 4 lettres pour 4 places et d'une manière symbolique on écrit :  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

**b) activité 2 :**

Former un bureau de 3 personnes (un directeur, un secrétaire et un commis) ; combien de bureau peut on former ? Sachant que le bureau n'admet pas de doubles postes.

**Solution :**

D

S

C

$$45 \quad \times \quad 44 \quad \times \quad 43 \quad = \quad 85140$$

On a donc fait un arrangement de 45 personnes pour 3 élèves. On la note ainsi  $A_{45}^3$  tel que  $A_{45}^3 = 45 \times 44 \times 43 = 85140$

**c) Activité 3 :**

Dans un jeu de 32 cartes ordinaires, on tire successivement 3 cartes.

- 1) Quel est le nombre de tirage possible ?
- 2) Quel est le nombre de tirage contenant 1 seule carte cœur ?
- 3) Quel est le nombre de tirage possible contenant 1 seule carte noire ?

**Solution :**

- 1) On a  $A_{32}^3 = 32 \times 31 \times 30 = 29760$
- 2) On a :  $A_8^1 \times A_{24}^2$
- 3) On a :  $A_{16}^1 \times A_{13}^2$

## 2) Probabilité sur un ensemble fini :

### a- Vocabulaire :

- **Expérience aléatoire** : expérience dont le résultat dépend du hasard.
- **Eventualité** : résultat possible d'une expérience aléatoire.
- **Univers ou CardE = n**: ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire.
- **Événement** : sous-ensemble de l'univers.
- **Événement élémentaire** : événement réduit à un seul élément.
- **Union de 2 ensembles**: Soit A et B deux ensembles finis. On appelle Union de A et B l'ensemble des éléments de A ou B. On note :  $A \cup B = \{x/x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- **Intersection de 2 ensemble** : L'intersection de deux ensembles A et B regroupent les éléments communs aux deux ensembles A et B. On note :  $A \cap B = \{x/ x \in A \text{ et } x \in B\}$

### N.B :

$$A \cap \phi = \phi$$

$$A \cup \phi = A$$

$$\text{Card}\phi = 0$$

### Exercices d'application :

Soit E et F deux ensembles tels que :

$$E = \{0, 1, 2, 3\}, F = \{1, 2, 0, a, b, c, 4, 8\}$$

- 1) Déterminer  $E \cup F$  et  $E \cap F$
- 2) Déterminer  $\text{card}E$ ,  $\text{card}F$ ,  $\text{card}(E \cup F)$ ,  $\text{card}(E \cap F)$

### Solution :

- 1)  $E \cup F = \{0, 1, 2, 3, 4, 8, a, b, c\}$   
 $E \cap F = \{0, 1, 2\}$
- 2)  $\text{Card} E = 4$ ,  $\text{Card} F = 8$   
 $\text{Card}(E \cup F) = 9$ ,  $\text{Card}(E \cap F) = 3$

### b- Propriétés :

$$P_1 : \text{Card } \phi = 0$$

$P_2$  : Soient A et B deux univers finis :

- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card} A + \text{Card} B - \text{Card}(A \cap B)$
- $\text{Card}(A \cap B) = \text{Card} A + \text{Card} B - \text{Card}(A \cup B)$

$P_3$  : Soient A et B, deux ensembles distinctes de B, on appelle produit cartésien  $A \times B$  l'ensemble défini par :  $\{(x, y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$

**Exemple:**

Soient A et B deux ensembles tel que :

$$A = \{1, 2\} ; B = \{a, b, c\}$$

- a) Donner les éléments de  $A \times B$
- b) Déterminer  $\text{Card}(A \times B)$

**Solution :**

- a)  $A \times B = \{(1, a) ; (1, b) ; (1, c) ; (2, a) ; (2, b) ; (2, c)\}$
- b)  $\text{Card}(A \times B) = \text{Card} A \times \text{Card} B = 2 \times 3 = 6.$

**N.B :**

- $A \times B \neq B \times A$  (le produit cartésien n'est pas commutatif)
- $\text{Card}(A \times B) = \text{Card} A \times \text{Card} B.$

**P<sub>4</sub> : Complémentarité :** On appelle complémentaire de A dans B l'ensemble des éléments de B n'appartenant pas à A on la note  $\bar{A} = C_B^A = \{x / x \in B \text{ et } x \notin A\}$

**Exemple :**

Soit  $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} ; F = \{0, 3, 4, 5\}$

- a) Déterminer  $\bar{F} = C_E^F$
- b) Déterminer  $\text{Card} \bar{F}$

**Solution**

- a)  $\bar{F} = C_E^F \{1, 2, 6, 7, 8\}$
- b)  $\text{Card} \bar{F} = \text{Card} E - \text{Card} F = 9 - 4 = 5$

**N.B :**  $\text{Card}(C_E^F) = \text{Card} E - \text{Card} F$

### 3) Permutation–Arrangement – combinaison

#### a) Permutation :

- Définition :

On appelle permutation d'un ensemble fini F de cardinal n ; toute bijection de [1 ; n] dans F.  
Le nombre de permutation d'un ensemble fini de cardinal n.  
On la note : **n!** (et se lit Factorielle n).

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots \times 2 \times 1$$

- Propriétés :

$$P_1 : 1! = 1 \quad ; \quad P_2 : 0! = 1$$

#### b) Arrangement :

- Définition :

Soit E un ensemble à n éléments, et P un ensemble fini tel que : (n ≥ P). On appelle arrangement de P éléments de E, toute injection de P dans E.

On le note :  $A_n^P$  et on lit : « A , n , P ».

$$A_n^P = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1) \quad \text{ou} \quad A_n^P = \frac{n!}{(n-P)!}$$

- Propriétés :

$$P_1 : A_n^0 = 1 \quad P_3 : A_n^n = n!$$

$$P_2 : A_n^1 = n \quad P_4 : A_n^{n-1} = n!$$

#### c) Combinaison :

- Définition :

Soit E un ensemble à n éléments, et P un ensemble fini tel que : (n ≥ P). On appelle combinaison de p éléments de E tout sous ensemble de E ayant p éléments.

On le note :  $C_n^P$  et on lit : « C , n , P ».

$$C_n^P = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)}{n(n-1) \dots 2 \times 1} \quad \text{ou} \quad C_n^P = \frac{A_n^P}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

- Propriétés :

$$P_1 : C_n^0 = 1 \quad P_3 : C_n^n = 1$$

$$P_2 : C_n^1 = n \quad P_4 : C_n^{n-1} = n$$

**N.B** : Pour calculer le  $C_n^P$ , on utilise le triangle de Pascal qui est le suivant :

N \ P	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1													
1	1	1												
2	1	2	1											
3	1	3	3	1										
4	1	4	6	4	1									
5	1	5	10	10	5	1								
6	1	6	15	20	15	6	1							

d) Nombre d'application d'un ensemble fini dans un ensemble fini ( P- liste )

• Définition :

Soit E et F deux ensembles finis ; on appelle application de l'ensemble E dans F, toute relation qui permet d'associer à tout élément de E, un élément unique de F. Le nombre d'application distincte d'un ensemble fini de cardinal p dans un ensemble fini de Cardinal n est noté :  $A_n^{\hat{P}}$  tel que :  $A_n^{\hat{P}} = n^P$

• Propriétés:

$$P_1 : A_n^{\hat{0}} = n^0 = 1 ;$$

$$P_2 : A_n^{\hat{1}} = n^1 = n;$$

4) Les différents types de tirages

a) **Tirages successif et sans remise :**

Si l'énoncé contient les mots : **successif et sans remise**, cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments a de l'importance mais que tous les éléments considérés sont distincts ( ou qu'il n'y a pas de répétition d'éléments ).

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **l'arrangement**.

$$A_n^P = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1) \quad \text{ou} \quad A_n^P = \frac{n!}{(n-p)!}$$

b) **Tirages successif et avec remise :**

Si l'énoncé contient les mots : **successif et avec remise**, cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments a de l'importance et qu'un élément peut éventuellement être répété.

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **la P-liste**.

$$A_n^{\hat{P}} = n^P$$

c) **Tirage simultané :**

Si l'énoncé contient le mot : **simultanément**, cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments n'a pas d'importance.

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **la combinaison**.

$$C_n^P = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)}{n(n-1)(n-2) \dots \cdot 2 \cdot 1} \quad \text{ou} \quad C_n^P = \frac{A_n^P}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

d) **Tirage successif :**

Si l'énoncé contient le mot : **successif**, il faut en tenir compte de tous les ordres dans les quels on peut obtenir un événement donné.

On doit souvent multiplier par le nombre d'ordres possibles le résultat trouvé pour un ordre déterminé.

**Attention :**

Il ne s'agit que d'indications, elles admettent des exceptions.

**Application :**

Une boîte contient 11 boules rouges, 4 boules bleues, 9 boules jaunes, et 6 boules noires. Dénombrer les cas possible à cette épreuve si l'on tire 3 boules de la boîte et que :

- a) le tirage est simultané
- b) le tirage est successif et sans remise
- c) le tirage est successif et avec remise

**Solution :**

**Ici :** - le nombre d'élément qui constitue l'univers est :  $n = 30$   
- le nombre d'élément tiré est :  $p = 3$

- a) le tirage est simultané :

Alors le nombre de cas possible est :  $C_{30}^3 = \frac{30!}{3!(30-3)!} = 4060$

- b) le tirage est successif et sans remise :

Alors le nombre de cas possible est :  $A_{30}^3 = \frac{30!}{(30-3)!} = 24360$

- c) le tirage est successif et avec remise :

Alors le nombre de cas possible est :  $A_{30}^{\hat{3}} = 30^3 = 2700$

## I- Probabilité simple :

### 1) Définition :

Dans une épreuve où tous les événements élémentaires d'un univers  $\Omega$  sont équiprobables, la probabilité d'un événement A est le nombre réel défini par le rapport entre le Nombre de Cas Favorable à l'évènement A et le Nombre de Cas Possibles. On note  $P_A$  ou  $P(A)$ .

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Nombre de Cas Favorables à la réalisation de A}}{\text{Nombre Total de Cas Possibles à la réalisation de A}}$$

#### Exemple:

On jette un dé ordinaire non piqué. Soit  $\Omega$  l'ensemble des résultats possibles tel que :  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .  $\Omega$  est appelé univers ou population.

- Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre paire ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir exactement le chiffre 3 ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur à 1 ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6 ?

#### Solution :

Le nombre de cas possible est : 6.

- La probabilité d'obtenir 1 chiffre paire est  $P = \frac{3}{6} = 0,5$
- La probabilité d'obtenir exactement le chiffre 3 est :  $P = \frac{1}{6}$
- La probabilité d'obtenir un chiffre inférieur à 1 est  $P = \frac{0}{6} = 0$
- La probabilité d'obtenir un chiffre inférieur ou égale à 6 est  $P = \frac{6}{6} = 1$

### 2) Propriétés :

Soit  $\Omega$  l'univers ou l'évènement certain et A et B deux évènement élémentaires de  $\Omega$ .  
On a :

- $P(\Omega) = 1$
- $P(\phi) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + (P(B) - P(A \cap B))$
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- Si A et B sont disjoints ( $A \cap B = \phi$ ) alors on a :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

#### Exemple :

Une urne contient 7 boules indiscernables au touché dont 3 blanches et 4 noires. On tire simultanément et au hasard 3 boules de cette urne.

- 1) Quelle est la probabilité d'avoir : "A" exactement 2 boules blanches.
- 2) Quelle est la probabilité d'avoir "B" au plus 1 boule noire.
- 3) Quelle est la probabilité d'avoir "C" 2 boules de même couleur.
- 4) Quelle est la probabilité d'avoir "D" des boules de même couleur.

**Solution :**

Tirage simultané : on utilise  $C_n^p$  avec  $\begin{cases} n = 7 \\ p = 3 \end{cases}$

Désignons par NCP : le Nombre de Cas Possible  
et

par NCF : le Nombre de Cas Favorable

$$\begin{array}{l} 1) \text{ Nombre de cas possible } C_7^3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35 \\ \text{Nombre de cas favorable } C_3^1 \times C_4^1 = 12 \end{array} \left| P(A) = \frac{12}{35} \right.$$

$$\begin{array}{l} 2) N.C.P = C_7^3 = 35 \\ N.C.F = C_4^0 \times C_3^3 + C_3^2 = 12 + 1 = 13 \end{array} \left| P(B) = \frac{13}{35} \right.$$

$$\begin{array}{l} 3) N.C.P = C_7^3 = 35 \\ N.C.F = C_3^2 \times C_4^1 + C_4^2 \times C_3^1 = 13 + 18 = 30 \end{array} \left| P(C) = \frac{6}{7} \right.$$

$$\begin{array}{l} 4) N.C.P = C_7^3 = 35 \\ N.C.F = C_3^3 \times C_4^0 + C_4^3 \times C_3^0 = 5 \end{array} \left| P(D) = \frac{5}{35} \right.$$

**3) Equiprobabilité:**

On parle d'équiprobabilité si la probabilité de réalisation de chaque évènement élémentaire est le même.

- Le lancé du dé est un évènement d'équiprobable car la probabilité d'apparition de chaque face est  $\frac{1}{6}$
- Le lancé d'une pièce de monnaie est aussi un évènement d'équiprobable car la probabilité d'apparition de chaque face est de  $\frac{1}{2}$ .

## **II- Probabilités conditionnelles et Indépendance**

**1) Définition :**

Soient A et B deux évènements de probabilité non nulles tels que  $A \cap B \neq \emptyset$ .  
 La probabilité de réalisation de A quand B est réalisé s'appelle probabilité conditionnelle de A par rapport à B ou probabilité de A sachant B.  $P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ .

**2) Indépendance :**

Deux évènements A et B sont indépendants si la réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation de l'autre. On a alors :

$$\begin{cases} P_B(A) = P(A) \\ P_A(B) = P(B) \end{cases} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

**3) Variable aléatoire :**

On appelle variable aléatoire réelle, toute application  $x$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ . L'ensemble des valeurs prises par  $x$ , noté  $x(\Omega)$  et s'appelle l'univers image de  $\Omega$  par  $x$ .

**4) Partie associée à une valeur image :**

Etant donnée une valeur image  $x_i$ , on désigne par " $X = x_i$ ", l'évènement constitué par l'ensemble des éventualités  $e_k$  de  $\Omega$  ayant pour image  $x_i$  par  $X$  on note " $X(e_k) = x_i$ " ou " $X = x_i$ ".

**N.B :** L'ensemble des évènements " $X = x_i$ ", constitue une partition de  $\Omega$  et forme un système complet d'évènements.

On définit également les notations :  $X > a$  ;  $X \geq a$  ; .....

C'est l'ensemble des éventualités de  $\Omega$  dont l'image est strictement supérieure à  $a$ , supérieure ou égale à  $a$ ,.....

**5) Loi de probabilité d'une variable aléatoire X**

On appelle loi de probabilité d'une variable aléatoire  $x$  la fonction :

$P : x \mapsto P(X = x)$  qui à toute valeur image  $x_i$  associe la probabilité  $P_i = P(X = x_i)$ .

**N.B :** Une loi de probabilité se présente sous forme d'un tableau de valeurs

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	.....	$x_n$
$P(X=x_i)$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	.....	$P_n$

Avec  $P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = 1$

**6) Fonction de répartition d'une variable aléatoire X**

On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire  $x$ , la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$F : x \mapsto p(X \leq x)$$

**N.B :**

$$\text{Si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \text{ alors } F(x) = P_1 + P_2 + \dots + P_i$$

En particulier :  $F(x) = 0$  pour  $x < x_1$  ;  $F(x) = 1$  pour  $x > x_n$

La fonction  $F$  est une fonction en escalier, croissante de 0 à 1

## 7) Valeurs caractéristiques d'une variable aléatoire :

### a) Espérance mathématique X

On appelle espérance mathématique d  $X$ , le nombre  $\bar{X} = E(x)$  tel que :

$$\bar{X} = E(x) = \sum_{i=1}^n p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_n x_n$$

**N.B :**

C'est la moyenne pondérée des valeurs images  $x_i$ , pondérées par les probabilités  $P_i$  (Car :  $P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$ )

### Propriétés :

$$P_1 : E(x - E(x)) = 0$$

$$P_3 : E(x + k) = E(x) + k$$

$$P_2 : E(k) = k$$

$$P_4 : E(kx) = k E(x).$$

### b) Variance :

On appelle variance de  $x$  l'espérance mathématique du carré de la variable  $x - E(x)$ . Elle est noté  $V(x)$  telle que :

$$V(x) = \sum P_i [x_i - E(x)]^2 = P_1 (x_1 - E(x))^2 + P_2 (x_2 - E(x))^2 + \dots + P_n (x_n - E(x))^2$$

$$\text{Ou } V(x) = (P_1 x_1^2 + P_2 x_2^2 + \dots + P_n x_n^2) - (E(x))^2$$

### Propriétés :

$$P_1 : V(k) = 0 ; \quad P_2 : V(X+k) = V(x)$$

$$P_3 : V(kx) = k^2 V(x)$$

### c) Ecart - type :

On appelle écart-type la racine carré de la variance. On la note  $\delta(x)$  tel que  $\delta(x) = \sqrt{v(x)}$ .

### Propriété:

$$\delta(kx) = k \delta(x)$$

## 6°) Epreuve de Bernoulli

On appelle épreuve de Bernoulli toute épreuve ne conduisant qu'à deux éventualités. L'une de ces deux éventualités est appelée succès avec pour probabilité  $p$  et l'autre échec avec pour probabilité  $q = 1 - p$ .

7°) **Loi binomiale** :

Soit une suite de  $n$  épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Soit  $P$  la probabilité du succès et  $q = 1 - p$  celle de l'échec.

Soit  $x$  la variable aléatoire désignant le nombre de succès.

La probabilité d'avoir exactement  $k$  succès est :  $p(x = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

**Exercices d'application :**

**Exercice 1 :**

Soit le tableau ci – dessous donnant la loi de probabilité de fabrication de voiture d'une société

X	0	1	2
P(x = x <sub>i</sub> )	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

- Calculer l'espérance mathématique
- Calculer la variance puis en déduire l'écart – type
- Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire X de cette loi de probabilité puis faite sa représentation la graphique.

### Exercice 2 :

On suppose que la probabilité de faire un garçon est  $\frac{1}{4}$ . Une famille a 5 enfants. Calculer la probabilité pour qu'il y ait exactement 3 garçons.

### Exercice 3 :

L'objectif de cet exercice est de déterminer les quels des avions à 2 ou 4 moteurs sont les plus sûrs.

Un avion ne s'écrase pas tant que la moitié au moins de ses moteurs fonctionne. Les moteurs d'un avion tombent en panne de manière indépendante.

### Partie A :

Dans cette partie on prend  $p = 0,1$

- Calculer la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.
- Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne.
- Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne
- En déduire la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'crase.

### Partie B :

On revient au cas général

- Soit  $f(p)$  la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'crase. Démontrer que  $f(p) = p^2$

Soit  $g(p)$  la probabilité pour qu'un avion à 4 moteur s'écrase. Démontrer que  $g(p) = p^2 (-3p^2 + 4p)$

- On pose  $h(p) = f(p) - g(p)$ .
  - Etudier le signe de  $h(p)$  en fonction de P.
  - En déduire, suivant les valeurs de p dans quels avions il vaut mieux monter.

### Solutions :

### Exercice 1 :

a) **Espérance mathématique est :**

$$E(x) = 0 \times \frac{2}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{1}{7} = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7} = 0,857 \Rightarrow E(x) = 0,857$$

b) **La variance et l'écart – type**

• **Variance :**

$$V(x) = 0^2 \times \frac{2}{7} + 1^2 \times \frac{4}{7} + 2^2 \times \frac{1}{7} - 0,857^2 = \frac{4}{7} + \frac{4}{7} - 0,857^2 \Rightarrow V(x) = 1,142 - 0,857^2 = 0,407$$

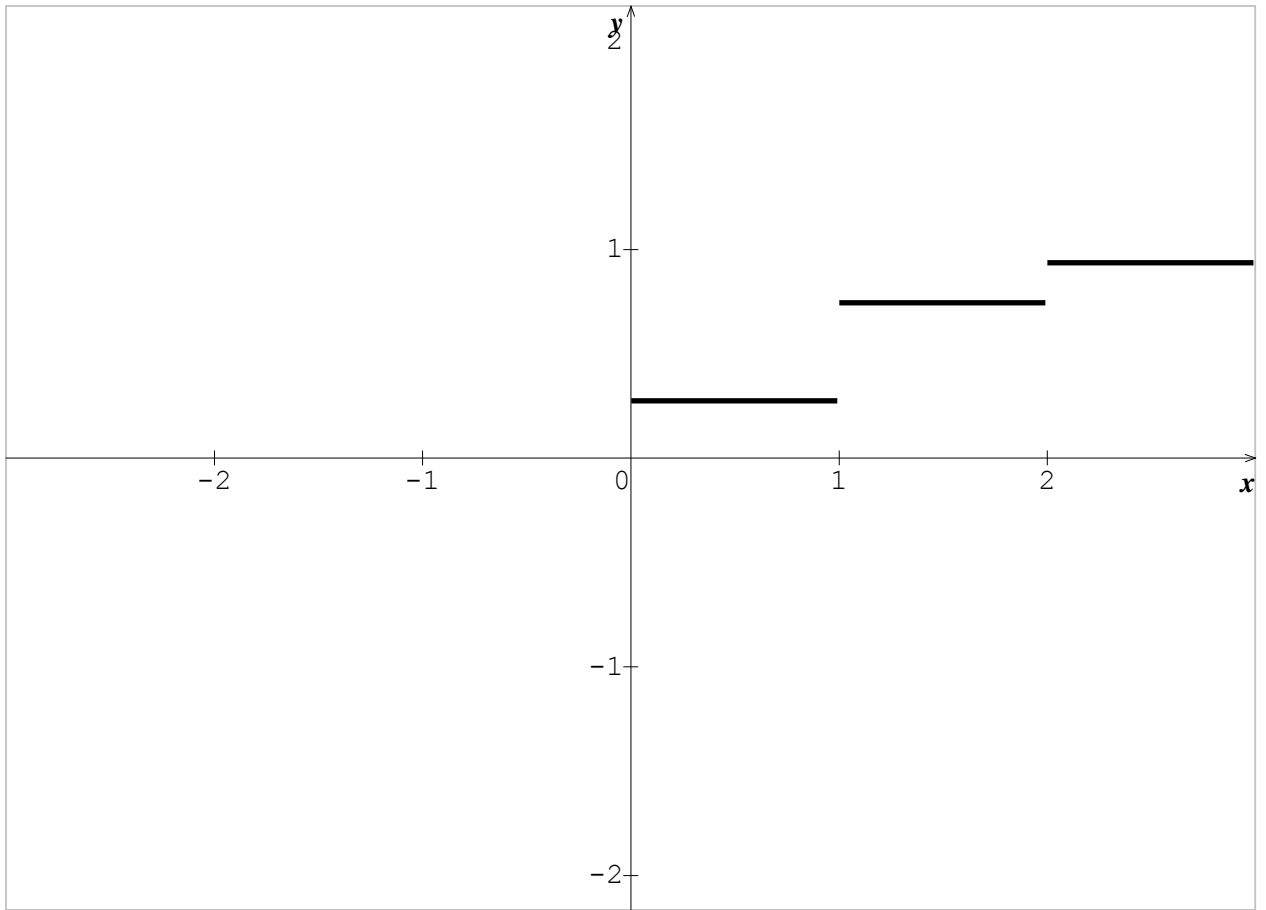
• L'écart – type :  $\delta(x) = \sqrt{0,407} = 0,637$

c) **La fonction de répartition est :**

$$P(x < 0) = 0 \left| \begin{array}{l} P(x \leq 1) = P(x = 0) + P(x = 1) = \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{6}{7} \\ P(x \leq 2) = P(x = 2) + P(x = 1) + P(x = 0) = \frac{1}{7} + \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = 1 \end{array} \right.$$

$$D'où \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{7} & \text{si } x \in [0;1] \\ \frac{6}{7} & \text{si } x \in [1;2] \\ 1 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

La présentation graphique est définie par la figure suivante :



### Exercice 2 :

Avoir une naissance simple conduit à 2 éventualités : soit on a un garçon, soit on a une fille. C'est donc une épreuve de Bernoulli. On pourrait considérer l'épreuve « avoir un garçon » comme le succès de probabilité  $p = \frac{1}{4}$  et l'épreuve « avoir une fille » comme l'échec de probabilité  $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ . Cinq naissances successives constituent une succession de 5 épreuves de Bernoulli. Pour Calculer la probabilité d'avoir exactement 3 garçons, on utilise alors la loi binomiale de paramètre 5 et  $\frac{3}{4}$  tel que

$$p(x = 3) = C_5^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 10 \times \frac{1}{64} \times \frac{9}{16} = \frac{90}{1024} \Rightarrow p(x = 3) = \frac{45}{512} = 0,088$$

$$\Rightarrow p(x = 3) = 0,088$$

Alors la probabilité d'avoir exactement 3 garçons est  $p(x = 3) = 0,088$ .

### Exercice 3 :

Soit p la probabilité pour qu'un moteur tombe en panne

#### Partie A :

On donne  $p = 0,1$

a) La probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase. Un avion à deux moteurs s'écrase si ses deux moteurs sont en panne.  $p_1 = p \times p = p^2 = 0,1 \times 0,1 = 0,01$

b) La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne.

$$P_2 = p \times p \times p \times p = p^4 = 0,1 \times 0,1 \times 0,1 \times 0,1 = 0,0001$$

c) La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne. L'état de fonctionnement d'un moteur conduit à 2 éventualités : soit il est en panne soit il ne l'est pas. Avoir un moteur en panne est donc une épreuve de Bernoulli.

La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne se détermine par la loi binomiale de paramètre  $p = 0,1$  et  $k = 3$

$$p_3 = p(x=3) = C_4^3 (0,1)^3 (0,9)^1 = 4 \times (0,001) \times (0,9) = 0,0036$$

d) La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase. Un avion à 4 moteurs s'écrase si ses 4 moteurs sont en panne ou s'il a 3 moteurs en panne.

$$p_4 = p_2 + p_3 = 0,0001 + 0,0036 = 0,0037$$

## Partie B :

On revient au cas général

a) Soit  $f(p)$  la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.

Démontrons que  $f(p) = p^2$

Un avion à 2 moteurs s'écrase si ses deux moteurs sont en panne.

$$f(p) = p \times p = p^2$$

b)  $g(p)$  est la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.

Démontrons que  $g(p) = p^2(-3p^2 + 4p)$

Un avion à 4 moteurs s'écrase si ses 4 moteurs sont en panne ou s'il a trois moteurs en panne.

$$g(p) = p^4 + p(x=3) = p^4 + C_4^3 p^3(1-p) = p^4 + 4p^3(1-p)$$

$$\Rightarrow g(p) = p^4 + 4p^3 - 4p^4 = -3p^4 + 4p^3 = p^2(-3p^2 + 4p)$$

$$\Rightarrow g(p) = p^2(-3p^2 + 4p)$$

c) On pose  $h(p) = f(p) - g(p)$

$$h(p) = f(p) - g(p) = p^2 - p^2(-3p^2 + 4p) = p^2(1 + 3p^2 - 4p)$$

$$\Rightarrow h(p) = p^2(3p^2 - 4p + 1)$$

Si  $p^2 > 0$  alors le signe de  $h(p)$  dépend du signe  $3p^2 - 4p + 1$

$$\text{Or } 3p^2 - 4p + 1 = 3(p-1)\left(p - \frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow h(p) > 0 \text{ si } p \in ]0 ; \frac{1}{3}[ ; h(p) < 0 \text{ si } p \in ]\frac{1}{3} ; 1[ ; h(p) = 0 \text{ si } p \in \{\frac{1}{3} ; 1\}$$

En déduisons, suivant les valeurs de  $p$ , dans quels avions il vaut mieux monter.

- Si  $p \in ]0 ; \frac{1}{3}[$ , alors  $h(p) > 0 \Rightarrow f(p) > g(p)$ . Un avion à 4 moteurs est plus sûr.
- Si  $p \in ]\frac{1}{3} ; 1[$ , alors  $h(p) < 0 \Rightarrow f(p) < g(p)$  : Un avion à deux (2) moteurs est plus sûr.
- Si  $p \in \{\frac{1}{3} ; 1\}$  ; alors  $h(p) = 0 \Leftrightarrow f(p) = g(p)$  : le risque est le même.

# EXERCICES

## Exercice 1 :

1) calculer les expressions suivantes :

a)  $5! ; 7! ; (2^3)! ; 3(4!) ; \frac{8!}{6!}$

b)  $A_8^3 ; A_{10}^4 ; A_{10}^{10} ; C_5^2 ; C_8^3 ; C_{10}^{10}$

c)  $\frac{C_{10}^5}{C_{10}^3} ; \frac{A_8^5}{A_8^1} ; C_{15}^{14} + C_3^0$

2) Résoudre dans  $\mathbb{N}^*$  les équations suivantes :

a)  $C_n^2 = 5n ; A_{n+1}^3 = n(n^2 - 1)$

b)  $A_n^2 = n(2n + 5) ; A_n^2 = C_n^3$

c)  $C_n^2 = 45 ; C_n^3 = 2n ; C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 475n$

d)  $C_n^1 + C_n^2 = 10 ; n^2 + 3C_n^2 = 1$

## Exercice 2 :

On dispose d'un jeu de 32 cartes ordinaires

- 1) combien de "mains" différentes de 8 cartes peut – on constituer ?
- 2) combien de "mains" différentes de 8 cartes comprenant 2as peut – on constituer ?
- 3) combien de "mains" de 8 cartes ayant au moins 2 cœurs peut – on constituer ?

## Exercice 3 :

Une association comprenant 20 personnes dont 12 hommes et 8 femmes désirent former un comité de 5 personnes dans lequel doivent se trouver au moins 2 hommes et 2 femmes. Trouver de combien de façon l'on peut former ce comité dans chaque cas :

- 1) chaque membre de l'association accepte de faire partie du comité
- 2) deux des hommes refusent d'en faire partie
- 3) monsieur x et madame y refusent de siéger ensemble

## Exercice 4 :

Un sac contient 25 boules dont 9 rouges, 6 vertes et 10 jaunes. On tire 5 boules du sac.

I) Dénombrer les cas possible à cette épreuve si :

- 1) le tirage est simultané
- 2) le tirage est successif sans remise
- 3) le tirage est successif avec remise.

II) Dénombrer les cas favorables ainsi que la probabilité dans chaque cas si :

- 1) le tirage est successif sans remise et le résultat contient au plus 3 jaunes
- 2) le tirage est simultané et le résultat contient 2 rouges, 2 vertes et 1 jaune.
- 3) Le tirage est successif avec remise et le résultat contient au moins 7 rouges.
- 4) Le tirage est simultané et le résultat contient au plus 1 verte
- 5) Le tirage est successif sans remise et le résultat est unicolore.

**Exercice 5 :**

Dans une classe de 40 élèves :

- 25 aiment la mathématique
- 30 aiment le français
- 17 aiment la mathématique et le français

Trouver le nombre d'élève :

- a) qui aiment uniquement le français
- b) qui aiment uniquement la mathématique
- c) qui aiment la mathématique ou le français
- d) qui n'aiment aucune des deux matières

**Exercice 6 :**

Un sac contient 5 boules rouges et 3 boules blanches, on tire simultanément et au hasard 3 boules.

- 1) calculer la probabilité de chacune des évènements suivants :
  - a) aucune boule rouge n'est tirée
  - b) une boule rouge et une seule est tirée
  - c) deux boules rouges et deux seulement sont tirées
  - d) une boule rouge au moins est tirée
  - e) deux boules blanches au plus sont tirées
- 2) soit  $x$  la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de boules rouges qui se trouvent parmi les 3 boules tirées.
  - a) Donner la loi de probabilité de  $x$
  - b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de  $x$
  - c) Calculer la probabilité de l'évènement  $1 \leq x \leq 2$

**Exercice 7 :**

Dans tout l'exercice on suppose les tirage équiprobables ( $n \in \mathbb{N}_+^*$ )

- 1) Une urne contient  $(n + 1)$  boules vertes et  $(n - 1)$  boules rouges

Le jeu suivant consiste à tirer une boule de l'urne :

- Si la boule est rouge, le joueur perd
- Si la boule est verte, le joueur gagne

- a) Quelle est la probabilité  $P_1$  que le joueur gagne ?
- b) Quelle est la probabilité  $P_2$  que le joueur perd ?

- 2) Lorsque le joueur gagne, il reçoit 200 F CFA, s'il perd il doit verser 300 F FCFA. On définit la variable aléatoire  $x$  qui à chaque tirage associe le gain en FCFA.

(le gain pouvant être négatif).

- a) Déterminer la loi de probabilité de  $x$
- b) Calculer l'espérance mathématique de  $x$
- c) Pour quelle valeur de  $n$ , le jeu est-il équitable ? (le jeu est équitable si l'espérance mathématique de la variable  $x$  est nulle).

**Exercice 8 :**

Une étude statistique faite an le nombre de vente de voiture en une journée par un de ses représentants a conduit à la loi de probabilité suivante pour la variable aléatoire  $x$  prenant pour valeurs le nombre de ces ventes.

n	0	1	2	3	4	5 et plus
P(x=n)	0,15	0,40	0,30	0,10	0,05	0

- 1) Dresser le tableau de la fonction de répartition  $F$  de la variable aléatoire  $x$  et représenter cette fonction dans le plus rapporté à un repère orthogonal convenable
- 2) Calculer l'espérance mathématique  $E(x)$  et la variance  $V(x)$  de la variable  $x$ .

**Exercice 9 :**

Un établissement scolaire comporte 55% de filles et 45% de garçons. 20% des filles et 40% des garçons utilisent un moyen de transport individuel pour se rendre à l'établissement ; les autres utilisent des cars de ramassage scolaire qui arrivent tous à 8 heures à l'établissement.

- 1) Quel est le pourcentage des élèves de l'établissement utilisant un moyen de transport individuel ?
- 2) On aperçoit la silhouette d'un élève descendant d'un car. Quelle est la probabilité pour que ce soit :
  - a) une fille ;
  - b) un garçon.

**Exercice 10 :**

Des lycéens préparent le BAC blanc de mathématique. Trois professeurs  $X$ ;  $Y$  et  $Z$  sont susceptibles de donner le sujet. D'après les statistiques des années précédentes et d'autres contraintes, les lycéens évaluent à :

- \* 0,35 la probabilité pour que ce soit  $X$  qui choisisse le sujet;
- \* 0,4 la probabilité pour que ce soit  $Y$ ;
- \* 0,25 la probabilité pour que ce soit  $Z$ .

Par ailleurs, les lycéens redoutent qu'un certain chapitre noté  $r$  ne soit donné à l'examen. Ils pensent qu'ils ont 1 chance sur 10 que le sujet porte sur  $r$  si  $X$  le choisit, 2 chances sur 5 si c'est  $Y$  qui le choisit et enfin 41 chances sur 50 si c'est  $Z$  qui fait le choix du sujet.

- 1) Quelle est la probabilité que le sujet porte sur le chapitre  $r$  ?
- 2) Au BAC blanc, le sujet porte effectivement sur le sujet  $r$ . Quelle est alors la probabilité pour que le sujet ait été choisi par :
  - a) par  $X$  ?
  - b) par  $Y$  ?
  - c) par  $Z$  ?

### **Exercice 11 :**

On considère deux dés cubiques identiques non pipés, dont les faces sont marquées:  $(0;0)$ ,  $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$ ,  $\left(\frac{4\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right)$ .

On lance simultanément les deux dés, et on lit les résultats a et b de leurs faces supérieures. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer des deux dés, associe la valeur  $\sin(a + b)$

- 1) Quelles sont les valeurs prises par X ? Déterminer la loi de probabilité de X.
- 2) Calculer l'espérance mathématique E(X) et la variance V(X) de X.

### **Exercice 12**(non corrigé)

- 1- On suppose que la probabilité de faire un garçon est  $\frac{1}{4}$ . Une famille a 5 enfants.

Calculer la probabilité pour qu'il y ait exactement 3 garçons.

- 2- L'objectif de cet exercice est de déterminer les quels des avions à 2 ou 4 moteurs sont les plus sûrs.

Un avion ne s'écrase pas tant que la moitié au moins de ses moteurs fonctionne. Les moteurs d'un avion tombent en panne de manière indépendante.

### **Partie A :**

Dans cette partie on prend  $p = 0,1$

- e) Calculer la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.
- f) Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne.
- g) Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne
- h) En déduire la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.

### **Partie B :**

On revient au cas général

- c) Soit  $f(p)$  la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase. Démontrer que  $f(p) = p^2$
- d) Soit  $g(p)$  la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase. Démontrer que  $g(p) = p^2 (-3p^2 + 4p)$
- e) On pose  $h(p) = f(p) - g(p)$ .

- Etudier le signe de  $h(p)$  en fonction de P.
- En déduire, suivant les valeurs de p dans quels avions il vaut mieux monter.

# Barycentre

## Objectifs

**Ce chapitre vise à :**

- réinvestir les notions vues en classe de première ;
- étendre l'étude de l'outil barycentre à un nombre quelconque de points dans le plan et dans l'espace;
- déterminer des lignes et surfaces de niveaux et les construire.

## Savoirs et savoir-faire

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Barycentre de n points pondérés</li> </ul> <p>Réduction de :</p> $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ <p>Réduction de :</p> $\sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ligne de niveau de l'application :  <math>M \mapsto \text{Mes}(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})</math></li> <li>• définition</li> <li>• Propriétés</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Réduire           <math display="block">\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}</math> </li> <li>• Réduire           <math display="block">\sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2</math> </li> <li>• Déterminer les lignes et surfaces de niveaux des applications du type :           <math display="block">M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2</math> <math display="block">M \mapsto \frac{MA}{MB}</math> </li> <li>• Construire dans le plan les lignes de niveau de l'application           <math display="block">M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2</math> </li> <li>• Déterminer et construire une ligne de niveau de l'application  <math>M \mapsto \text{Mes}(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})</math></li> </ul>

## I- Introduction :

Dans ce qui suit nous faisons allusions au point dans un ensemble noté souvent E où est défini un produit scalaire et appelé espace affine à une dimension (de repère  $(o; \vec{i})$  par exemple) où tout point est du type  $A(x_A)$ , à 2 dimensions (de repère  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  par exemple) où tout point est du type  $A(x_A; y_A)$  ou a 3 dimensions (de repère  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  par exemple) où tout point est du type  $A(x_A; y_A; z_A)$ ..... cet espace affine sera toujours associé à un espace vectoriel (ensemble non vide particulier dont les éléments sont des vecteurs munis d'une base).

## II- Rappels :

- Dans un espace affine les points A, B, C sont alignés lorsqu'il existe  $k \in \mathbb{R}^*$  unique tel que  $\vec{AB} = k\vec{AC}$  on dit que B a pour abscisse k dans le repère de graduation d'origine A et de point unitaire C.
- Lorsque cette condition n'est pas remplie, les points A, B, C ne sont pas alignés on dit alors qu'ils sont coplanaires et déterminent toujours un repère du plan. En fixant A le repère est  $(A; \vec{AB}; \vec{AC})$
- Dans tous les cas :
  - La relation de Charles est vérifiée par :  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$
  - $d(A,B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{\vec{AB}^2} = AB$  ; alors  $AB^2 = \vec{AB}^2$

## III- Barycentre d'un système de points :

### 1) Système de points pondérés :

On appelle système de point pondérés tout ensemble du type :  $\{(A_1; \alpha_1), (A_2; \alpha_2); \dots; (A_n; \alpha_n)\}$  où les  $A_i$  sont les points d'un espace affine et les  $\alpha_i$  sont des nombres réels appelés coefficients de pondération. Chaque  $\alpha_i$  est appelé coefficient de pondération.

### 2) Barycentre de deux points pondérés

On appelle barycentre du système de points pondérés  $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$ , l'unique point G s'il existe tel que :  $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$

En fixant A on a :  $\alpha\vec{GA} + \beta(\vec{GA} + \vec{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha + \beta)\vec{GA} = -\beta\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{GA} = -\beta\frac{\vec{AB}}{\alpha + \beta}$

Avec  $\alpha + \beta \neq 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \beta \frac{\overrightarrow{AB}}{\alpha + \beta}$

Ainsi si G est le barycentre de  $\{(A ; \alpha) ; (B ; \beta)\}$  ; Alors A, B et G sont alignés, et G a pour abscisse  $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$  dans la graduation de repère ( A ; B ).

**Construction du barycentre de deux points pondérés :**

Détermine puis Construire le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivants :

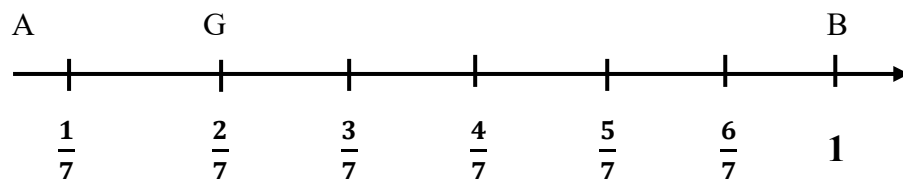
a-  $\{(A ; 5) ; (B ; 2)\}$

b-  $\{(A ; 3) ; (B ; -8)\}$

**Solution**

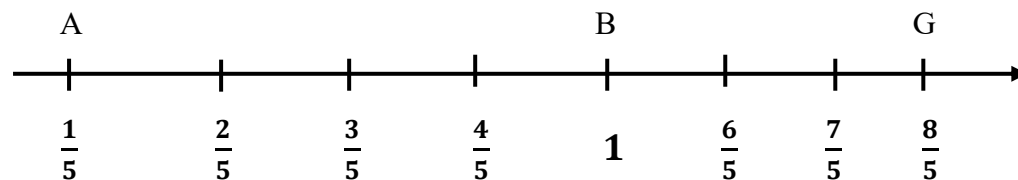
a-  $G = \{(A ; 5) ; (B ; 2)\}$

$5 + 2 = 7 \neq 0$  alors G existe et  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$



d-  $G = \{(A ; 3) ; (B ; -8)\}$

$3 - 8 = -5 \neq 0$  donc il existe un unique point G tel que  $\overrightarrow{AG} = \frac{8}{5}\overrightarrow{AB}$



**3) Barycentre de trois points pondérés**

On appelle barycentre de trois points pondérés affectés au système :

$\{(A ; \alpha) ; (B ; \beta) ; (C ; \gamma)\}$  l'unique point (s'il existe) G tel que :  $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

En fixant A on a :  $\alpha(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA}) + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + \gamma(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AC} \quad \text{avec } (\alpha + \beta + \gamma \neq 0)$$

**Construction du barycentre de trois points pondérés :**

Détermine puis construire le barycentre G dans chacun des cas suivants :

**a-**  $G = \text{Bary} \{(A; -3); (B; -2); (C; 3)\}$

**b-**  $G = \text{Bary} \{(A; 1); (B; -2); (C; 1)\}$

**Solution :**

$$\mathbf{a-G} = \text{Bary} \{(A ; -3) ; (B ; -2) ; (C ; 3)\}$$

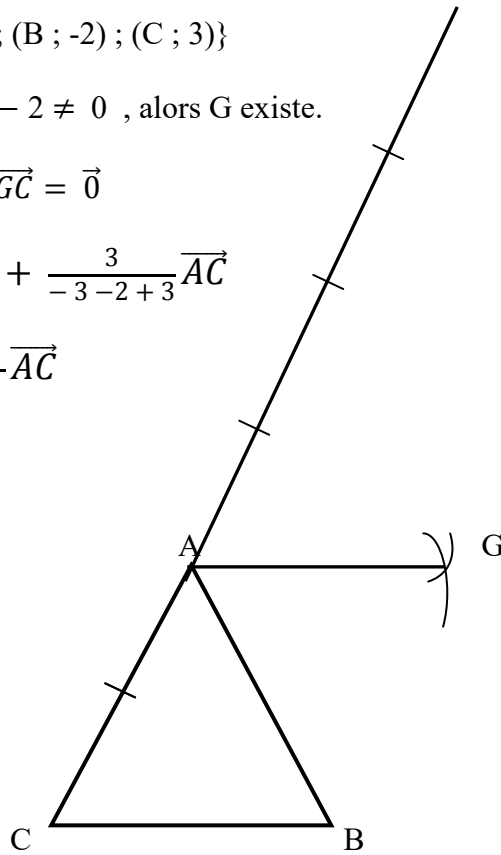
$(-3) + (-2) + (3) = -2 \neq 0$  , alors G existe.

$$\text{On a : } -3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{-2}{-3-2+3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{-3-2+3}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{-2}{-2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{-2}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$



$$\mathbf{b- G} = \text{Bary} \{(A ; 1) ; (B ; -2) ; (C ; 1)\}$$

$(1) + (-2) + (1) = 0$  , alors G n'existe pas.

#### 4) Barvcentre de n points pondérés :

##### a- Définition :

On appelle barycentre de n points pondérés du système :

$\{A_1 ; \alpha_1\} ; \{A_2 ; \alpha_2\} ; \{A_3 ; \alpha_3\} \dots \{A_n ; \alpha_n\}$ , le point G (s'il existe) tel que :

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \alpha_3 \overrightarrow{GA_3} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} (\alpha_n \neq 0) \text{ ou encore } \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

Lorsque le plan est rapporté à un repère d'origine 0, en fixant cette origine on a : en fixant 0

$$\text{on a : } \alpha_1 (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_1}) + \alpha_2 (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_2}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_n}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GO} (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) + \alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \alpha_n \overrightarrow{OA_n}}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \overrightarrow{OA_1} + \frac{\alpha_2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \overrightarrow{OA_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \overrightarrow{OA_n}$$

### **b) Coordonnées du barycentre de 3 points pondérés :**

Dans l'espace affine, le repère  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  considérons le système

$\{(A_1, \alpha_1) ; (A_2, \alpha_2) ; (A_3, \alpha_3)\}$  tel que  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \neq 0$  alors  $\exists ! G \in \varphi$  tel que :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \overrightarrow{OA_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \overrightarrow{OA_2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \overrightarrow{OA_3}$$

$$\text{Or } \overrightarrow{OG} = \begin{cases} x_G - x_O = x_G \\ y_G - y_O = y_G \\ z_G - z_O = z_G \end{cases} \overrightarrow{OA} = \begin{cases} x_{A_1} \\ y_{A_1} \\ z_{A_1} \end{cases} \overrightarrow{OA} = \begin{cases} x_{A_2} \\ y_{A_2} \\ z_{A_2} \end{cases} \overrightarrow{OA} = \begin{cases} x_{A_3} \\ y_{A_3} \\ z_{A_3} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \begin{pmatrix} x_{A_1} \\ y_{A_1} \\ z_{A_1} \end{pmatrix} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \begin{pmatrix} x_{A_2} \\ y_{A_2} \\ z_{A_2} \end{pmatrix} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \begin{pmatrix} x_{A_3} \\ y_{A_3} \\ z_{A_3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1 x_{A_1} + \alpha_2 x_{A_2} + \alpha_3 x_{A_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ \frac{\alpha_1 y_{A_1} + \alpha_2 y_{A_2} + \alpha_3 y_{A_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ \frac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \alpha_3 z_{A_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{pmatrix} \text{ D'où } \begin{cases} x_G = \frac{\alpha_1 x_{A_1} + \alpha_2 x_{A_2} + \alpha_3 x_{A_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ y_G = \frac{\alpha_1 y_{A_1} + \alpha_2 y_{A_2} + \alpha_3 y_{A_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ z_G = \frac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \alpha_3 z_{A_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{cases}$$

**NB :**

D'une manière générale si A ; B et C sont 3 points affectés aux complexes  $Z_A$  ;  $Z_B$  et  $Z_C$  et soit G le barycentre affecté au complexe  $Z_G$  tel que  $Z_G \text{ bary} = \{(A, \alpha) ; (B, \beta) ; (C, \gamma)\}$ .

$$\text{On a : } Z_G = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

### 5) Propriétés du barycentre de trois points pondérés :

- Le barycentre G d'un système ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont choisis ces points pondérés.

**Exemple:**  $G = \text{bary} \{(A, \alpha) ; (B, \beta) ; (C, \gamma)\}$

$$G = \text{bary} \{(B, \beta) ; (A, \alpha) ; (C, \gamma)\}$$

$$G = \text{bary} \{(C, \gamma) ; (B, \beta) ; (A, \alpha)\}$$

- Le barycentre G d'un système ne change pas en multipliant ou en divisant chaque coefficient de pondération par une même constante non nulle.

**Exemple** :  $\forall k \in \mathbb{R}^*$  on a  $G = \text{bary} \{(A, k\alpha) ; (B, k\beta) ; (C, k\gamma)\}$

$$G = \left\{ \left( A ; \frac{\alpha}{k} \right) ; \left( B ; \frac{\beta}{k} \right) ; \left( C ; \frac{\gamma}{k} \right) \right\}$$

- Le barycentre G d'un système ne change pas lorsqu'on remplace dans le système un certain nombre de points pondérés par leur barycentre partiel G' à condition que ce dernier soit affecté de la somme partielle des coefficients de pondération partielle considérée.

**Exemple** :  $\text{bary} \{(A, \alpha) ; (G', \beta + \gamma + \delta \neq 0)\}$

### Remarques :

- Le barycentre G d'un système du type :  $\{(A_1 ; \alpha) ; (A_2, \alpha) ; (A_3, \alpha) ; \dots (A_n ; \alpha)\}$  avec  $\alpha \neq 0$  est appelé isobarycentre.
- Coordonnées barycentriques : tous les N uplets de réels du type :  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$  tel que  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n \neq 0$  sont appelés des coordonnées barycentriques.

**Exemple** : (3, 5, -3, 2, 7) sont appelés coordonnées barycentriques car :  $3 + 5 - 3 + 2 + 7 \neq 0$

### 6) Ensemble des barycentres d'un système

**a) Barycentre de deux points pondérés :**

On se rappelle que pour le système  $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$   $\alpha + \beta \neq 0$  on a : en fixant A on a :

$$\overrightarrow{AG} = \left( \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right) \overrightarrow{AB}$$

$\Leftrightarrow G \in (AB)$

Considérons les systèmes  $\{(A, \alpha_i); (B, \beta)\}$   $1 \leq i \leq n$

Si  $\alpha_1 + \beta_1 \neq 0 \Rightarrow \exists ! G \in \varphi /$  en fixant A on a :  $\overrightarrow{AG} = \left( \frac{\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} \right) \overrightarrow{AB} \Rightarrow G \in (AB)$

Si  $\alpha_2 + \beta_2 \neq 0 \Leftrightarrow \exists ! G_2 \in \varphi /$  en fixant A on a :  $\overrightarrow{AG_2} = \left( \frac{\beta_2}{\alpha_2 + \beta_2} \right) \overrightarrow{AB} \Rightarrow G_2 \in (AB)$

⋮

Si  $\alpha_n + \beta_n \neq 0 \exists ! G_n \in \varphi /$  en fixant A on a :  $\overrightarrow{AG_n} = \left( \frac{\beta_n}{\alpha_n + \beta_n} \right) \overrightarrow{AB} \Rightarrow G_n \in (AB)$

D'où l'ensemble des barycentres des points A et B est engendré par la droite vectorielle (AB) donc cet ensemble est la droite affine passant par les deux points A et B.

**b) Barycentre de trois points pondérés :**

On a  $\overrightarrow{AG_n} = \left( \frac{\beta_n}{\alpha_n + \beta_n} \right) \overrightarrow{AB} \Rightarrow G_n \in (AB)$

**Rappel :**

$\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  avec  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$  et en fixant A, il existe un point

$$G \in \varphi / \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AC} \Rightarrow G \in \text{au plan A, B, C.}$$

Considérons les systèmes  $\{(A, \alpha_i); (B, \beta_i); (C, \gamma_i)\}$   $1 \leq i \leq n$

Si  $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i \neq 0 \Rightarrow \exists ! G_1 \in \varphi /$  en fixant A

On a :  $\overrightarrow{AG_1} = \frac{\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma_1}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \overrightarrow{AC} \Rightarrow G_1 \in \text{au plan A, B, C}$

Si  $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \neq 0 \Rightarrow \exists ! G_2 \in \varphi /$  en fixant A

On a  $\overrightarrow{AG_2} = \frac{\beta_2}{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma_2}{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \overrightarrow{AC} \Rightarrow G_2 \in \text{au plan A, B, C}$

Si  $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n \neq 0 \Rightarrow \exists ! G_n \in \varphi /$  en fixant A on a :

$$\overrightarrow{AG_n} = \frac{\beta_n}{\alpha_n + \beta_n + \gamma_n} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma_n}{\alpha_n + \beta_n + \gamma_n} \overrightarrow{AC} \Rightarrow G_n \in \text{au plan A, B, C}$$

D'où l'ensemble des barycentres des points A, B et C est engendré par le plan vectoriel  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ .

### III-Fonction vectorielle de Leibniz associée à un système de points pondérés :

Considérons le système de points pondérés  $\{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); (A_3, \alpha_3)\}$  on appelle fonction vectorielle de Leibniz associée à ce système  $(A_n; \alpha_n)$  la fonction notée et déterminée par :  $f : E \rightarrow V$

$$M \mapsto f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}$$

- Pour  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = 0$  on a :

$$\begin{aligned} \text{Pour } M = A_1 \Rightarrow f(A_1) &= \alpha_1 \overrightarrow{A_1 A_1} + \alpha_2 \overrightarrow{A_1 A_2} + \alpha_3 \overrightarrow{A_1 A_3} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{A_1 A_n} \\ f(A_1) &= \alpha_2 \overrightarrow{A_1 A_2} + \alpha_3 \overrightarrow{A_1 A_3} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{A_1 A_n} \end{aligned}$$

Or par la relation de Charles on a :

$$\begin{aligned} \forall M \in E, f(M) &= \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 (\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1 A_2}) + \alpha_3 (\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1 A_3}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1 A_n}) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{A_1 A_2} + \alpha_3 \overrightarrow{A_1 A_3} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{A_1 A_n} \\ f(M) = 0 + f(A_1) &= f(A_1) \end{aligned}$$

$$\text{pour } M = A_2 ; f(A_2) = \alpha_1 \overrightarrow{A_2 A_1} + \alpha_3 \overrightarrow{A_2 A_3} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{A_2 A_n}$$

$$\begin{aligned} \forall M \in E, f(M) &= \alpha_1 (\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{A_2 A_1}) + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \alpha_3 (\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{A_2 A_3}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{A_2 A_n}) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MA_2} + \alpha_1 \overrightarrow{A_2 A_1} + \alpha_3 \overrightarrow{A_2 A_3} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{A_2 A_n} \\ &= 0 + f(A_2) \end{aligned}$$

$$\forall M \in E \text{ on a } f(M) = f(A_2)$$

De façon plus générale en fixant un point quelconque du plan

Posons  $M = P$

$$f(P) = \alpha_1 \overrightarrow{PA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{PA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{PA_n}$$

par la relation de Charles on a :

$$\begin{aligned} f(M) &= \alpha_1 (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA_1}) + \alpha_2 (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA_2}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA_n}) \\ &= \overrightarrow{MP} (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) + f(P) \end{aligned}$$

$$f(M) = f(P) \text{ qui est indépendante de } M$$

\* pour

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n \neq 0 \text{ alors } \exists ! G \in E \text{ telque } \alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

$$\text{Or } f(G) = \alpha_1 \overrightarrow{GA} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} \text{ donc } f(G) = \vec{0}$$

Ainsi pour tout point  $M \in E$

$$\begin{aligned} \text{On a : } f(M) &= \alpha_1 (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_1}) + \alpha_2 (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_2}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_n}) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MG} + f(G) \end{aligned}$$

$$f(M) = \overrightarrow{MG} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right)$$

Montrons que  $f$  est une bijection :

$$f : E \rightarrow V$$

$$M \mapsto f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$$

Cas où  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ , prouvons que  $f$  est une bijection de  $E$  sur  $V$  soit  $\vec{v} \in \mathcal{G}$  résolvons l'équation

$$\text{d'inconnue } M \in E, f(M) = \vec{v}$$

- Lorsque  $\vec{v} = \vec{0}$  alors  $f(M) = \vec{v} \Leftrightarrow f(M) = \vec{0}$

Si  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$  alors  $\exists ! G \in E / G = \text{bary}\{A_i, \alpha_i\}$  et  $f(G) = \vec{0}$  donc l'ensemble solution est dans ce cas un singleton

Si  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ , on a  $f(M) = f(P) = \alpha_1 \overrightarrow{PA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{PA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{PA_n} = \overrightarrow{PP'}$  où  $P$  est le point

fixé et  $P'$  l'extrémité du vecteur alors  $f(M) = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = \vec{0} \Leftrightarrow P' = P$  donc l'ensemble solution est le singleton  $\{P\}$

- Lorsque  $\vec{v} \neq \vec{0}$  on a :

- pour  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$  alors  $f(M)$  est indépendant de  $M$  donc  $f(M) = \vec{v}$  alors

$$\alpha_1 \overrightarrow{PA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{PA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{PA_n} = \vec{v}$$

Alors  $P$  est l'unique point vérifiant cette équation pour  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$  on a  $f(M) = \overrightarrow{MG}(\sum_{i=1}^n \alpha_i)$

$$\text{Alors } f(M) = \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) = \vec{v}$$

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\vec{v}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} = \left( \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \right) \vec{v} = \vec{w}$$

Comme  $\vec{w}$  est constant (car  $\vec{v}$  et  $\frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$  sont constants) alors  $\exists ! M \in E$  tel que  $\overrightarrow{MG} = \vec{w}$  d'où

l'équation :  $f(M) = \vec{v}$  n'admet qu'une solution.

### **Conclusion :**

Dans tous les cas l'équation  $f(M) = \vec{v}$  n'admet qu'une seule solution. On dit alors que  $f$  est une bijection de  $C$  sur  $\mathcal{V}$ .

### Exemple

A, B et C étant 3 points non alignés du plan

détermine la nature de  $(\Gamma)$  tel que :  $\{M \in P ; \|\vec{2MA} - \vec{MB} + 3\vec{MC}\| = \|\vec{AB}\|\}$

### Solution

Déterminons la nature de  $(\gamma)$  tel que :  $\{M \in \delta / \|\vec{2MA} - \vec{MB} + 3\vec{MC}\| = \|\vec{AB}\|\}$

Posons  $f(M) = 2\vec{MA} - \vec{MB} + 3\vec{MC}$ , la fonction vectorielle de Leibniz associée au système  $\{(A ; 2) ; (B ; -1) ; (C, 3)\}$  où  $2 - 1 + 3 = 4 \neq 0$

Comme  $4 \neq 0$ , G existe uniquement tel que  $f(G) = \vec{0}$  et  $f(M) = 2(\vec{MG} + \vec{GA}) - (\vec{MG} + \vec{GB}) + 3(\vec{MG} + \vec{GC}) = 4\vec{MG}$  Ainsi

$$\vec{MG} + \vec{GA}) - (\vec{MG} + \vec{GB}) + 3(\vec{MG} + \vec{GC}) = 4\vec{MG} \text{ Ainsi}$$

$$\|f(M)\| = \|\vec{AB}\| \Leftrightarrow \|4\vec{MG}\| = \|\vec{AB}\| \Leftrightarrow 4\|\vec{MG}\| = \|\vec{AB}\| \Leftrightarrow \|\vec{MG}\| = \frac{1}{4}\|\vec{AB}\| \Leftrightarrow MG = \frac{1}{4} AB$$

Ainsi  $(\gamma)$  est un cercle de centre G et de rayon  $r = \frac{1}{4} AB$

### III- Fonction scalaire (au numérique) de Leibniz :

**1) Définition :**

On appelle scalaire de Leibniz associée au système  $\{(A_i ; \alpha_i)\} (1 \leq i \leq n)$

L'application  $\varphi = E \rightarrow \mathbb{R}$

$$M \mapsto \varphi(M) = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$$

**2)-Ecriture réduite de  $\varphi(M)$**

$$\begin{aligned} \text{Soit } N \in E \text{ on a } \varphi(N) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i NA_i^2 \quad \text{alors } \varphi(M) - \varphi(N) = \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i NA_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i MA_i^2 - \alpha_i NA_i^2) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (MA_i^2 - NA_i^2) \\ \varphi(M) - \varphi(N) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MA_i}^2 - \overrightarrow{NA_i}^2) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MA_i} + \overrightarrow{NA_i})(\overrightarrow{MA_i} - \overrightarrow{NA_i}) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MA_i} + \overrightarrow{NA_i})(\overrightarrow{MA_i} + \overrightarrow{NA_i}) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MA_i} + \overrightarrow{NA_i}) \bullet \overrightarrow{MN} \\ &= \overrightarrow{MN} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{NA_i} \right) \end{aligned}$$

$\varphi(M) - \varphi(N) = \overrightarrow{MN} [f(M) + f(N)]$  où  $f$  est la fonction vectorielle de Leibniz associée au système  $\{(A_i ; \alpha_i)$

$1 \leq i \leq n$

D'où  $\varphi(M) = \overrightarrow{MN} [f(M) + f(N)] + \varphi(N)$

**On distingue encore 2 cas :**

**1<sup>er</sup> cas** Si  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$  alors  $\exists ! G \in E / G = \text{bary}\{(A_i, \alpha_i)\}$  alors  $1 \leq i \leq n$

$$\varphi(G) = \sum_{i=1}^n \alpha_i GA_i^2$$

Ainsi  $\varphi(M) = \overrightarrow{MG}(f(M) + f(G)) + \varphi(G)$  or  $f(G) = \vec{o}$  donc  $\varphi(M) = \overrightarrow{MG} \cdot f(M) + \varphi(G)$  et  $f(M) = \overrightarrow{MG} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right)$  alors  $\varphi(M) = \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MG} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) + \varphi(G)$  d'où  $\varphi(M) = MG^2 \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) + \varphi(G)$

**Remarque :**

- si  $G = \text{bary} \{A; a\}; \{B; b\}; \{C; c\}$  et  $\varphi$  fonction scalaire de Leibniz associée à ce système alors on a :  $\varphi(G) = \frac{abAB^2 + acAC^2 + bcBC^2}{a + b + c}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$

$\varphi : \mathcal{E} \rightarrow R$

$$M \mapsto \varphi(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$$

$$\varphi(M) = MG^2 \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) + \varphi(G)$$

1<sup>er</sup> cas : si  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$

En notant  $m = \sum \alpha_i$  alors  $\forall M \in \mathcal{E}$  on a  $\varphi(M) = m.MG^2 + \varphi(G)$

$$\Leftrightarrow m.MG^2 = \varphi(M) - \varphi(G)$$

$$\Rightarrow MG^2 = \frac{\varphi(M) - \varphi(G)}{m}; MG^2 = \frac{k - \varphi(G)}{m} \text{ avec } k = \varphi(M)$$

$MG^2 = \frac{1}{m}k - \frac{\varphi(G)}{m}$  qui est un polynôme du 1<sup>er</sup> degré en k alors

$$\frac{1}{m}k - \frac{\varphi(G)}{m} = 0 \Leftrightarrow \frac{k - \varphi(G)}{m} = 0 \Rightarrow k = \varphi(G) \text{ alors on a le tableau de signe suivant :}$$

	-	$\varphi(G)$	+
K			
MG <sup>2</sup>	Signe contraire du signe de m	Signe de m	

En notant  $\lambda(k) = \frac{1}{m}k - \frac{\varphi(G)}{m}$  alors cette fonction est telle que  $\lambda(k) = MG^2$

- lorsque  $\lambda(k) < 0$  alors  $MG^2 = \lambda(k)$  absurde donc  $S_k = \emptyset$  et f n'est pas surjective donc ne peut être une bijection de  $\mathcal{E}$  sur R
- lorsque  $\lambda(k) = 0 \Leftrightarrow k = \varphi(G)$  alors  $S_k = \{G\}$
- lorsque  $\lambda(k) > 0$  alors  $MG = \sqrt{\lambda(k)}$  :
- lorsque la dimension de  $\mathcal{E} = 3$ , l'ensemble  $S_k$  est appelé la sphère de centre G et de rayon  $\sqrt{\lambda(k)}$  identifier sous le nom de surface de niveau k pour  $\varphi$

- si la dimension de  $\varepsilon$  est 2, l'ensemble  $S_k$  est le cercle de centre G et de rayon  $\sqrt{\lambda(k)}$  encore appelé ligne de niveau  $k$  pour  $\varphi$ . Ainsi pour  $\lambda(k) > 0$ ,  $\varphi$  n'est pas injective donc ne peut être une bijection sur  $\mathbb{R}$ .

**Conclusion** : Pour  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ , l'application  $\varphi : \varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$  n'est pas bijective

**2<sup>e</sup> Cas** : Dans ce cas,  $\exists ! \vec{u}_o \in V$  tel que pour tout  $m \in \varepsilon; f(m) = \vec{u}_o$

$$\forall M \in \varepsilon, f(M) = \vec{u}_o$$

Soit  $N \in \varepsilon$  alors  $f(N) = \vec{u}_o$  ainsi  $\varphi(M) - \varphi(N) = \overrightarrow{MN} \cdot [\vec{u}_o + \vec{u}_o]$

$$\varphi(M) - \varphi(N) = 2 \cdot \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_o$$

En choisissant N dans  $\{(A_i; \alpha_i)\}$  tel que  $N = I$

Alors on a  $\varphi(M) - \varphi(I) = 3 \overrightarrow{MI} \cdot \frac{1}{u_o} \Rightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \vec{u}_o = \frac{\varphi(M) - \varphi(I)}{2}$  et en posant  $\varphi(M) = k$  on a

$$\overrightarrow{MI} \cdot \vec{u}_o = \frac{k - \varphi(I)}{2}$$

- pour  $\vec{u}_o = \vec{0}$  alors  $\overrightarrow{MI} \cdot \vec{0} = \frac{k - \varphi(I)}{2}$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{k - \varphi(I)}{2}$$

- Si  $k \neq \varphi(I)$  alors  $\forall M \in \varepsilon$  on a :  $0 = \frac{k - \varphi(I)}{2}$  donc absurde alors  $S_k = \emptyset$
- Si  $k = \varphi(I)$  on a :  $0 = 0$  alors  $S_k = \{I\}$
- pour  $\vec{u}_o \neq \vec{0}$  alors on a  $\overrightarrow{MI} \cdot \vec{u}_o = \frac{k - \varphi(I)}{2}$

En notant  $\vec{u}_o = \overrightarrow{IJ}$  où I est le point choisi du système et J l'extrême on a :

$$\overrightarrow{MI} \cdot \vec{u}_o = \frac{k - \varphi(I)}{2}$$

$$\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IJ} = \frac{k - \varphi(I)}{2}$$

$$- \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IJ} = \frac{\varphi(I) - k}{2}$$

$$\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IJ} = \frac{\varphi(I) - k}{2}$$

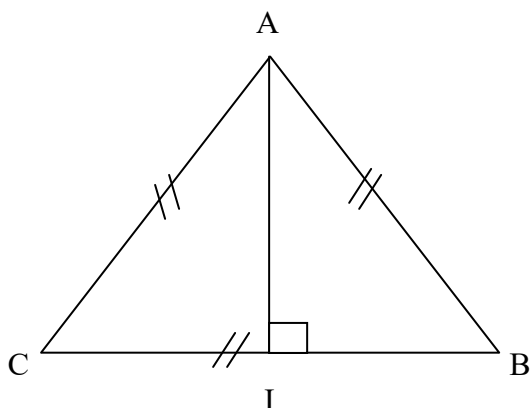
Notons H le projeté orthogonal du point M sur la droite (IJ) alors  $\overrightarrow{IH} \times \overrightarrow{IJ} = \frac{\varphi(I) - k}{2}$

L'ensemble  $S_k$  cherché est :

- Le plan orthogonal en H à la droite (IJ) si la dimension de  $\varepsilon$  est 1
- Si la dimension de  $\varepsilon$  est 1, il s'agit de la droite orthogonal à IJ au point H

## IV- Produit scalaire et médiane d'un triangle :

### 1) Triangle équilatéral

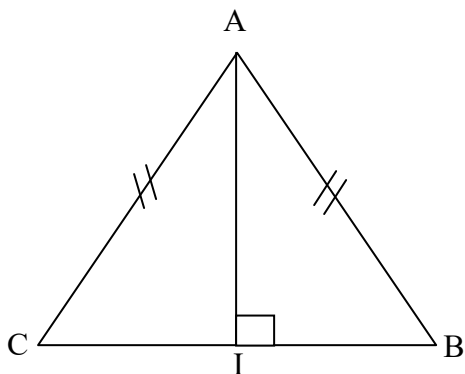


$AB = AC = BC$  et  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$   
 I Milieu de  $[BC]$   
 AI Médiane de  $[BC]$

On a :  $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 2AI$  et  $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

### 2) Triangle isocèle en A

$AB = AC$  et  $\hat{B} = \hat{C}$



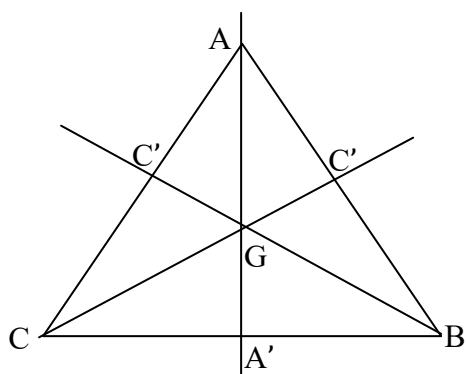
I Milieu de  $[BC]$

AI Médiatrice de  $[BC]$

On a :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2AI$  et  $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$$

### 3) Médiane d'un triangle quelconque



A' Milieu de  $[BC]$

B' Milieu de  $[AC]$

C' Milieu de  $[AB]$

G centre de gravité du triangle ABC

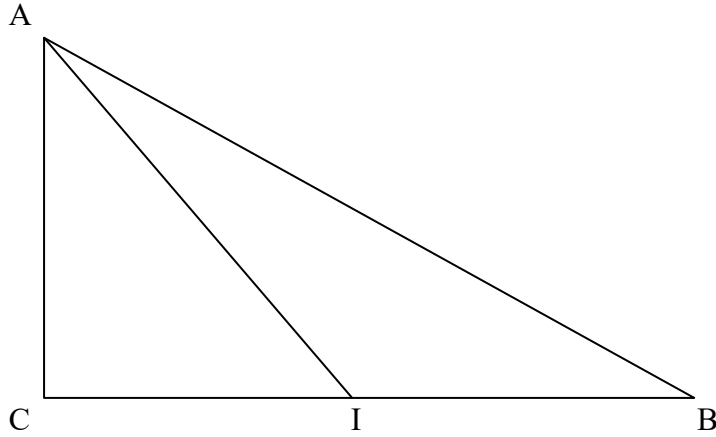
On a :

$$AG = \frac{2}{3}AA' ; \quad BG = \frac{2}{3}BB' ; \quad CG = \frac{2}{3}CC'$$

**NB :** Pour un triangle isocèle, on a  $AG = \frac{3}{4}AA'$

#### 4) Théorème de la médiane

Soit ABC un triangle quelconque et I milieu de [BC]



##### a- Première énoncée de la médiane

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

##### b- Deuxième énoncée de la médiane

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

##### c- Troisième énoncée de la médiane

$$MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB}$$

# EXERCICES

## Exercice 1 :

Dans le plan affine euclidien ; on considère un triangle équilatérale A, B, C dont le côté mesure a.

- 1) Construire le barycentre G du système  $\{(A, 4) ; (B, 1) ; (C, -1)\}$ .
- 2) Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  tel que :  $f(M) = 4MA^2 + MB^2 - MC^2$

Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan tel que  $f(M) = \frac{63a^2}{4}$

## Exercice 2 :

Soit A, B, C trois points du plan P tel que  $AB = AC = 5$  cm et  $BC = 6$  cm.

- 1) Construire le triangle ABC puis calculer  $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$
- 2) Soit G le barycentre des points pondérés  $\{(A, 2) ; (B, 3) ; (C, 3)\}$ . Construire G puis calculer GA.
- 3) Soit  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$

$$M \rightarrow 2 \overrightarrow{MB} \bullet \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \bullet \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB}$$

- a) Exprimer  $f(M)$  en fonction de  $f(G)$  et MG
- b) Calculer  $f(G)$ .

- 4) Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan tels que :  $f(M) = f(A)$ .

## Exercice 3 :

Soit E un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé. On considère les points A, B, C de coordonnées respectives :  $A(3, 1) ; B(-2, 3) ; C(1, 0)$

Soit G le barycentre des points A, B, C affectés des points 2 ; 1 ; - 1

- 1) Trouver les coordonnées G
- 2) Trouver suivant les valeurs du nombre réel K l'ensemble des points M tel que :  
 $2MA^2 + MB^2 - MC^2 = k$
- 3) Construire les points M du plan tel que :  $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 8$

## Exercice 4 :

Le plan P est muni d'un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ . On considère les 4 points A ; B ; C ; D tel

que  $A \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} ; B \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; C \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} ; D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- 1) Déterminer les coordonnées x et y de D sachant que  $\|\overrightarrow{DA}\| = \|\overrightarrow{DB}\| = \|\overrightarrow{DC}\|$
- 2) Déterminer les réels m et n tels que D soit barycentre des points  $(A, 1) ; (B, m) ; (C, n)$
- 3) Trouver l'ensemble (E) des points M du plan tel que  $4\|\overrightarrow{MA}\|^2 + 3\|\overrightarrow{MB}\|^2 + 5\|\overrightarrow{MC}\|^2 = k$

- 4) Déterminer le réel  $k$  tel que  $A \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  soit élément de  $(E)$  que l'on représentera.

**Exercice 5 :**

Soit  $A, B, C$  un triangle équilatéral de côté 3 ;  $B'$  le milieu de  $[AC]$  et un point  $D$  tel que  $4\vec{AD} = \vec{AB} + 3\vec{BC}$

- Démontrer que  $D$  est le barycentre des points pondérés  $(A, 3)$  ;  $(B, -2)$  ;  $(C, 3)$ . En déduire que  $D$  appartient à la médiatrice du segment  $[AC]$ .
- Démontrer que  $\vec{BB'} = \frac{2}{3}\vec{BD}$
- Calculer  $DA^2$  et  $DB^2$
- Déterminer l'ensemble  $(E)$  des points  $M$  du plan vérifiant la relation :  $3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$
- Vérifier que l'isobarycentre du triangle  $A, B, C$  appartient à l'ensemble  $(E)$
- Tracer  $(E)$ .

**NB :** on fera une figure explicite du triangle  $A, B, C$ .

**Exercice 6 :**

Le plan est rapporté au repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 1 cm. On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectifs :

$$Z_A = (3\sqrt{3} - 2) + i(3 + 2\sqrt{3})$$

$$Z_B = (1 - 4\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} - 1)$$

$$Z_C = (1 - 4\sqrt{3}) + i(-4 - \sqrt{3})$$

- Calculer  $Z_A - Z_B + Z_C$ .
  - En déduire que le point  $o$  est le barycentre du système de point pondérés  $\{(A, 1) ; (B, -1) ; (C, 1)\}$
- Soit  $(E)$  l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :  $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\|$ 
  - Vérifier que  $B$  appartient à  $(E)$
  - Déterminer puis construire  $(E)$
- Déterminer puis construire l'ensemble  $(D)$  des points  $M$  du plan tel que :  $2\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - 3\vec{MB}\|$

**Exercice 7 :**

Dans l'espace  $E$ , on note la distance de deux points  $M$  et  $N$  par  $MN$

- Soit 3 points  $A, B, C$  non alignés et  $I$  le point défini par  $\vec{AI} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ . De quel coefficients  $a, b, c$  faut-il affecter respectivement les points  $A, B, C$  pour que  $I$  soit leur barycentre ?
- On suppose maintenant que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$  tel que  $AB = 2 AC = 1$ .  
On suppose que :  $S = \{M \in E / MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -3\}$   
Démontrer que  $S$  est une sphère de centre  $W$  et de rayons  $r$  à préciser.

### **EXERCICE 8 :**

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que :  $AB = 4$  ;  $AC = 6$ .

Soit I le milieu du segment  $[AB]$ .

1) a- Construire le barycentre  $G = \{(A, 5) ; (B, -3) ; (C, 2)\}$ .

b- Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  puis en déduire  $AG^2$  et  $BC^2$ .

2) Déterminer puis construire l'ensemble  $E_1$  des points M du plan tel que :

$$\|5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|.$$

3) Déterminer puis construire l'ensemble  $E_2$  des points M du plan tel que :

$$\|5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|.$$

4) Déterminer puis construire l'ensemble  $E_3$  des points M du plan tel que :

$$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 24 .$$

5) Déterminer puis construire l'ensemble  $E_4$  des points M du plan tel que :

$$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = k \text{ ( on discuteras suivant les valeurs de } k \text{ )}.$$

6) Déterminer puis construire l'ensemble  $E_5$  des points M du plan tel que :

$$5MA^2 - 3MB^2 - 2MC^2 = -72 .$$

### **EXERCICE 9 :**

Soit ABC un trapèze tel que ( AB ) parallèle à ( CD ) .

Soient I ; J et O les milieux respectifs des segments  $[AB]$  ;  $[CD]$  et  $[IJ]$ .

1) Déterminer puis construire l'ensemble  $E_1$  des points M du plan tel que :

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|.$$

2) Les médiatrices des côtés  $[AD]$  ;  $[BC]$  se coupent en G. Démontrer que

$$GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2.$$

3) Démontrer que l'ensemble  $E_2 : MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$  est non vide.

# Applications Affines

## A-LES APPLICATIONS AFFINES PLANES

Activité d'approche :

Soit  $\mathcal{P}_2$  un plan affine associé au plan vectoriel  $\mathbf{P}$  et rapporté au repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

On considère l'application  $f$  de  $\mathcal{P}_2$  dans  $\mathcal{P}_2$  définie par :

$$M(x ; y) \rightarrow M'(x' ; y') \text{ tel que : } \begin{cases} x' = 2x - y + 1 \\ y' = x + y - 3 \end{cases}$$

a- Détermine par ses coordonnées l'image  $O'$  de  $O$  par  $f$ .

b- Montre que l'application de  $\mathbf{P}$  dans  $\mathbf{P}$  telle que :

$\forall M \in \mathcal{P}_2 \quad \varphi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'M'}$  est un endomorphisme de  $\mathbf{P}$  (**application linéaire de  $\mathbf{P}$**  dans lui-même).

L'application  $f$  ainsi définie est dite **application affine**.

### I- Définition-propriétés-points invariants expression analytique :

#### 1) Définition

Soit  $E$  un espace affine associé à l'espace vectoriel  $\vec{E}$  et  $f$  une application de  $E$  dans  $E$ .  
 $f$  est une application affine de  $E$  dans  $E$  s'il existe un endomorphisme  $\varphi$  de  $\vec{E}$  et un point  $M_0$  de  $E$  tels que  $\forall M \in E, \varphi(\overrightarrow{M_0M}) = \overrightarrow{M'_0M'}$  avec  $M'_0 = f(M_0)$  et  $M' = f(M)$

L'homothétie de centre et de rapport donné. La translation de vecteur donné, la symétrie et la projection de base et de direction données et la rotation de centre et d'angle donné sont des exemples d'applications affines.

**NB :** les applications affines conservent le coefficient de colinéarité et toute application bijective du plan est appelée transformation affine du plan.

#### Définition :

Une application d'un espace vectoriel  $E$  dans lui-même est dite affine quand elle est de la forme  $\vec{u} \rightarrow A + \varphi(\vec{u})$  où  $\varphi$  est une application linéaire de  $E$  dans lui-même (endomorphisme de  $E$ ) dans l'espace après le choix d'une origine  $O$ . Une application  $M \rightarrow M'$  est dite affine quand l'application est affine.

Activité:

Soit  $f$  une application affine de  $E$  dans  $E$ .

a- Montre que  $\forall (M, N) \in E \times E, \varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$ .

b- Montre qu'il existe un et un seul endomorphisme  $\varphi$  de l'espace vectoriel  $\vec{E}$  tel que :

$$\forall (M, N) \in E \times E, \varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$$

( on pourra raisonner par l'absurde en montrant que  $\forall \vec{u} \in \vec{E} ; \varphi(\vec{u}) = \varphi'(\vec{u})$  avec  $\varphi$  et  $\varphi'$  étant deux endomorphismes de  $\vec{E}$ .

**Remarque :**  $\varphi$  est appelé l'endomorphisme associé à l'application affine  $f$ .

Par contre à un même endomorphisme peuvent être associées plusieurs application affines dans les expressions analytiques, il suffire de changer les constantes.

## 2) Propriétés

**P<sub>1</sub>** : Les applications affines conservent le barycentre de  $n$  points pondérés : c'est-à-dire si  $f$  est une application affine, l'image du barycentre d'un système de  $n$  points pondérés est le barycentre du système des images de ces points affectés des mêmes coefficients.

Ainsi nous retenons que :

- L'image une droite est une droite.
- L'image d'un plan est un plan.
- L'image d'un segment est un segment.

### D'une manière générale :

- L'image d'une partie convexe de  $E$  est une partie convexe de  $E$ .
- L'homothétie de centre et de rapport donné ; La translation de vecteur donné ; la symétrie et la projection de base et de direction données et la rotation de centre et d'angle donné sont des exemples d'applications affines.

**P<sub>2</sub>** : la réciproque d'une transformation affine du plan est une transformation affine du plan.

## 3) Application vectorielle associée à une application affine

a) **Définition** : soit  $f$  une application affine du plan  $p$  dans  $p$  et  $A ; B ; C$  et  $D$  quatre points du plan d'images respectives  $A' ; B' ; C'$  et  $D'$ .

On appelle application affine vectorielle associée à  $f$ , tout application vectorielle  $\mathcal{V}$  dans

$\mathcal{V}$  notée  $\varphi$  tel que :  $\forall A \in p$  et  $\forall B \in p$  on a :  $\overrightarrow{A'B'} = \varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$ .

D'où  $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$ .

b) **Propriétés** :

Soit  $f$  une application affine du plan  $p$  dans  $p$  et  $\varphi$  l'application linéaire associée à  $f$ . Pour tout vecteur  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  du plan vectorielle  $\mathcal{V}$  et pour tout réel  $\alpha$  donné, on a les propriétés suivantes :

**P<sub>1</sub>**:  $\varphi(\alpha\vec{u}) = \alpha\varphi(\vec{u})$ .

**P<sub>2</sub>**:  $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$ .

**P<sub>3</sub>**:  $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$

$$P_4: \varphi(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{u}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(\vec{u}_i)$$

#### 4) Points invariants par une application affine f

##### a) Définition

Soit  $f$  une application affine du plan  $P$  dans  $P$ . L'ensemble des points invariants par  $f$  est soit un ensemble **vide**, soit un **singleton**, soit une droite ou encore un **plan** tout entier.

##### b) Propriétés :

$P_1$  : L'image d'une droite par une transformation affine est une droite.

$P_2$  : Si  $(AB)$  et  $(CD)$  sont deux droites parallèles du plan et  $(A'B')$  et  $(C'D')$  leur images respectives par une application affine  $f$  du plan, alors les droites  $(A'B')$  et  $(C'D')$  sont parallèles.

$P_3$  : Soit  $f$  une application affine du plan  $P$  dans  $P$ .

- Si  $f$  est bijective alors  $f(P) = P$
- Si  $f$  n'est pas bijective alors  $f(P)$  est un singleton ou une droite.

#### 5) Expression analytique d'une application affine f

##### a) Définition :

Le plan est muni d'une repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ . Soit  $f$  une application affine du plan et soit  $\varphi$  soit application linéaire associée. Soit  $(a ; a') ; (b ; b')$  et  $(c ; c')$  les coordonnées respectives de  $\varphi(\vec{i}) ; \varphi(\vec{j})$  et de  $O'$  avec  $O' = f(O)$ . On a :  $\vec{O'M'} = \varphi(\vec{OM})$

$$\begin{aligned} &= \varphi(x\vec{i} + y\vec{j}) \\ &= x\varphi\vec{i} + y\varphi\vec{j} \\ &= x(a\vec{i} + a'\vec{j}) + y(b\vec{i} + b'\vec{j}) \\ &= xa\vec{i} + xa'\vec{j} + yb\vec{i} + yb'\vec{j} \\ &= (ax + by)\vec{i} + (a'x + b'y)\vec{j} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x' - c')\vec{i} + (y' - c')\vec{j} = (ax + by)\vec{i} + (a'x + b'y)\vec{j}$$

Par identification on a :

$$\Rightarrow \begin{cases} (x' - c') = (ax + by) \\ (y' - c') = (a'x + b'y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - c' = ax + by \\ y' - c' = a'x + b'y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = ax + by + c' \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

##### b) propriété:

Une application  $f$  est dite affine si son expression analytique est sous la forme :

$$\begin{cases} x' = ax + by + c' \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

### Evaluation

Dans le plan  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , on considère les points :

$$A\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right); B\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right); C\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right); A'\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 10 \end{smallmatrix}\right); B'\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \end{smallmatrix}\right) \text{ et } C'\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$$

Soit  $f$  l'application affine du plan tel que :  $f(A) = A'$  ;  $f(B) = B'$  ;  $f(C) = C'$

- 1) Montrer que  $f$  est bijective
- 2) Déterminer l'expression analytique de  $f$ .

### Synthèse

Soient les points  $A; B; C; A'; B'; C'$  tels que :

$$A(2, 0); B(1, 1); C(-2, -1); A'(3, 10); B'(4, 6); C'(-3, -1)$$

Soient l'application affine du plan tel que :

$$f(A) = A'; f(B) = B' \text{ et } f(C) = C'.$$

- 1) Montrons que  $f$  est bijective :

$f$  est bijective si et seulement si  $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \neq 0$  et  $\det(\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{A'C'}) \neq 0$

$$\text{Alors } \det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 5 \neq 0 \text{ et } \det(\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{A'C'}) = -13 \neq 0$$

Alors  $f$  est une application bijective.

- 2) Déterminons l'expression analytique de  $f$ . l'expression analytique de  $f$  est :

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

$$\text{Soit } \begin{cases} \varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'} \\ \varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \varphi(\vec{i}) = a\vec{i} + a'\vec{j} \\ \varphi(\vec{j}) = b\vec{i} + b'\vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(-\vec{i} + \vec{j}) = \vec{i} - 4\vec{j} \\ \varphi(-4\vec{i} - \vec{j}) = -6\vec{i} - 11\vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\varphi(\vec{i}) + \varphi(\vec{j}) = \vec{i} - 4\vec{j} \\ -4\varphi(\vec{i}) - \varphi(\vec{j}) = -6\vec{i} - 11\vec{j} \end{cases}$$

$$\underline{-5\varphi(\vec{i}) = -5\vec{i} - 15\vec{j}} \Leftrightarrow \varphi(\vec{i}) = \vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \varphi(\vec{i}) = \vec{i} + 3\vec{j} \\ \varphi(\vec{j}) = 2\vec{i} - \vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1; b = 3 \\ a' = 2; b' = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x + 2y + c \\ y' = 3x - y + c' \end{cases} \text{ or } f(A) = A' \Leftrightarrow \begin{cases} x'_A = x_A + 2y_A + c \\ y'_A = 3x_A - y_A + c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 2 + 2(0) + c \\ 10 = 3(2) - 0 + c' \end{cases}$$

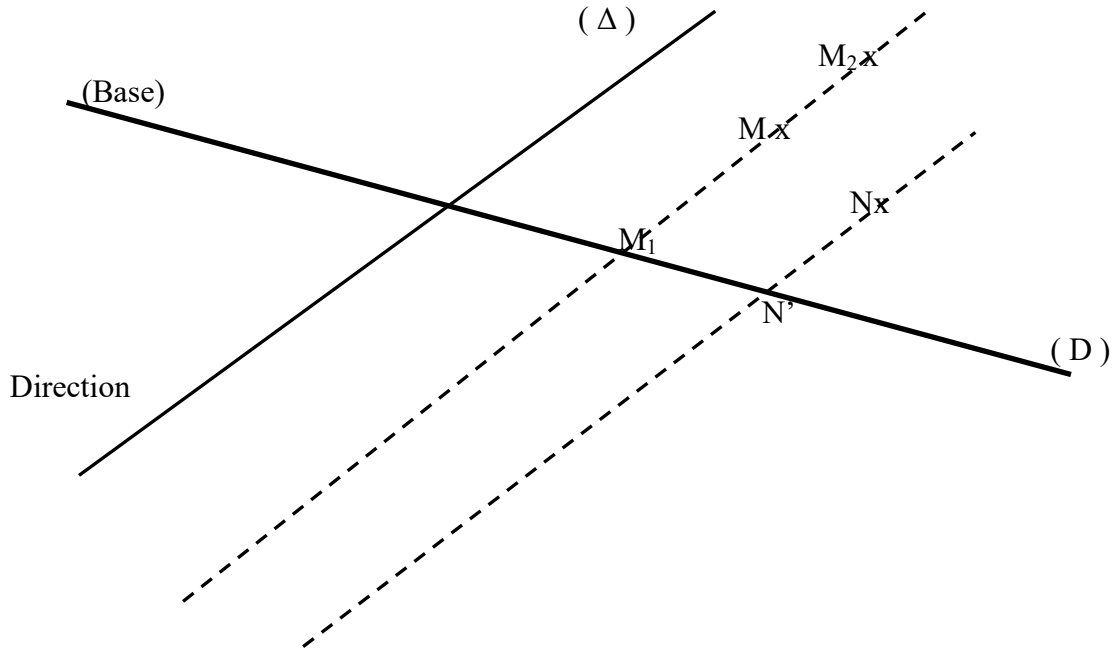
$$\Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ C' = 4 \end{cases}$$

Ainsi l'expression analytique de  $f$  est :  $\begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = 3x - y + 4 \end{cases}$

## II- Cas des transformations affines du plan

### 1) Définition :

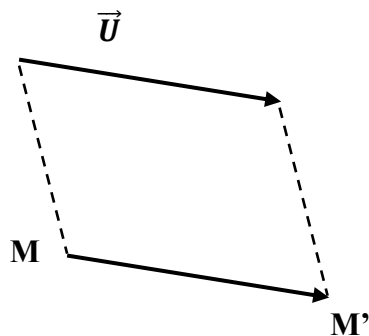
Une transformation affine est une application bijective de  $\varphi$  dans  $\varphi$ . Contre exemple de transformation la projection P



$P(M_1) \neq P(M_2)$ , donc n'est pas bijective.

$P(M_1) = P(M_2)$ , tandis que  $M_1 \neq M_2$  alors n'est pas injective par suite elle n'est pas bijective.

### 2) Translation de vecteur $\vec{U}$



#### a) Définition :

Etant donné un vecteur  $\vec{u}$ , on appelle translation de vecteur  $\vec{u}$ , l'application ponctuelle notée et déterminée par :

$$t_{\vec{u}} : P \rightarrow P$$

$$M \rightarrow t_{\vec{u}}(M) = M'$$

$$\text{Alors on a : } \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

**Cas particulier :** Si  $\vec{u} = \vec{0}$  alors  $t_{\vec{0}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{0} \Leftrightarrow M = M'$  donc  $t_{\vec{0}} = id_P$

**b) Point invariant :**

Pour toute translation  $t_{\vec{u}}$  avec  $\vec{u} \neq \vec{0}$  on observe aucun point invariant.

**c) Expression analytique d'une translation :**

$$\text{Soit } \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

L'expression analytique de  $\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$

$$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = a + x \\ y' = b + y \end{cases}$$

**d) Caractéristique d'une translation :**

Toute translation  $t_{\vec{u}}$  est caractérisée par son vecteur  $\vec{u}$  de translation.

**Exercice d'application**

Dans le plan  $\varphi$  rapporté au repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ , on considère la translation  $t_{\vec{u}}$  définie par :

$$t_{\vec{u}}(A) = B \text{ où } A(-3 ; 1) ; B(1 ; 7)$$

- Caractériser cette translation
- Déterminer le point C' image du point C par  $t_{\vec{u}}$  où  $C(0 ; -2)$

**Solution**

- Caractérisons la translation

$$t_{\vec{u}}(A) = B \text{ si } \overrightarrow{AB} = \vec{u}$$

$\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$  alors  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3 \\ 7 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ . D'où  $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$  est le vecteur de translation.

- Déterminons le point C' image de C par translation de  $\vec{u}$

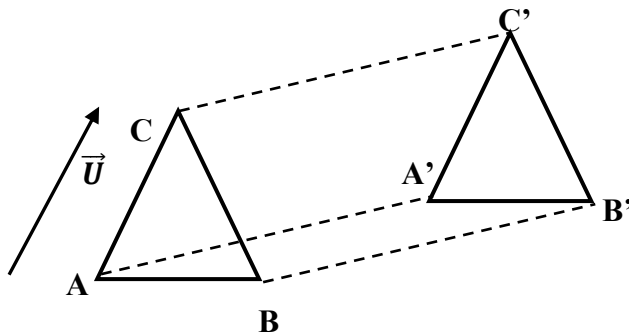
$$\text{On a : } t_{\vec{u}}(C) = C' \Leftrightarrow \overrightarrow{CC'} = \vec{u}$$

$$\overrightarrow{CC'} \begin{pmatrix} x_{C'} - x_C \\ y_{C'} - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{C'} \\ y_{C'} + 2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{CC'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{C'} = 4 \\ y_{C'} + 2 = 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_{C'} = 4 \\ y_{C'} = 4 \end{cases} \text{ D'où } C' \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ tel que}$$

$$t_{\vec{u}}(C) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

### e) Quelques propriétés de $t_{\vec{u}}$

Les translations conservent l'alignement, le parallélisme, la distance, la valeur et l'orientation du plan, la nature des figures.



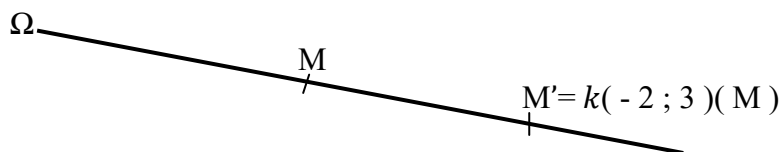
## 3) Homothétie

### a) Définition :

On appelle homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $k$  l'application notée et déterminée par :

$$M \mapsto M' / \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$$

**Exemple** :  $h(\Omega, 3)$  ;  $M' = k(-2 ; 3)^{(n)}$  ;  $\overrightarrow{\Omega M'} = 3 \overrightarrow{\Omega M}$



Pour  $k \in ]0 ; 1[$ ,  $M' \in [\Omega ; M]$

Pour  $k > 1$ ,  $M' \in [\Omega ; M]$

Pour  $k < 1$ ,  $\Omega' \in [M' M]$

Pour  $k = 1$ ,  $M = M'$

Alors  $h(\Omega, 1)$  est l'application identique du plan

Si  $k = 0$ ,  $M' = \Omega$  alors  $h(\Omega, 0)$  est l'application constante qui envoie tous les points sur  $\Omega$ .

**b) Expression analytique**

Soit  $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ;  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  tel que  $h(\Omega; k)(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$

$$\begin{pmatrix} x_{M'} - x_\Omega \\ y_{M'} - y_\Omega \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_M - x_\Omega \\ y_M - y_\Omega \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' - x_0 \\ y' - y_0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' - x_0 = k(x - x_0) \\ y' - y_0 = k(y - y_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx - kx_0 + x_0 \\ y' = ky - ky_0 + y_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = kx + x_0(1 - k) \\ y' = ky + y_0(1 - k) \end{cases}$$

**c) Caractéristiques :**

Une homothétie est caractérisée par son centre  $\Omega$  et son rapport  $k$ .

**d) Point invariant :**

Dans le plan une homothétie  $h(\Omega, k)$  ne laisse invariant que son centre  $\Omega$ .

**e) Quelques propriétés:**

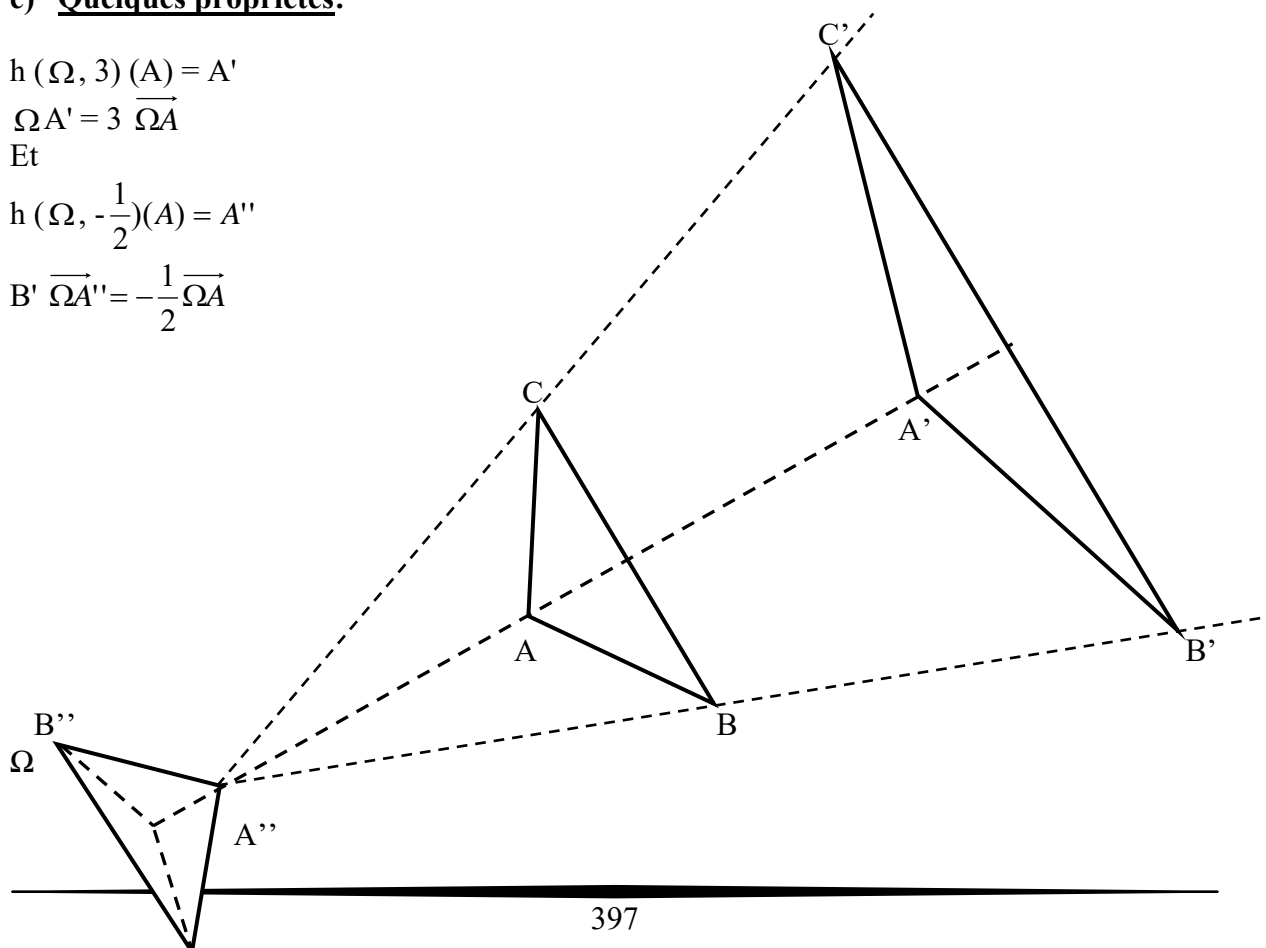
$$h(\Omega, 3)(A) = A'$$

$$\overrightarrow{\Omega A'} = 3 \overrightarrow{\Omega A}$$

Et

$$h(\Omega, -\frac{1}{2})(A) = A''$$

$$B' \overrightarrow{\Omega A''} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega A}$$



C''

L'homothétie conserve l'alignement, le parallélisme, l'orientation, la nature, des figures et multiplie les distances par  $|k|$  donc ne conserve pas la distance.

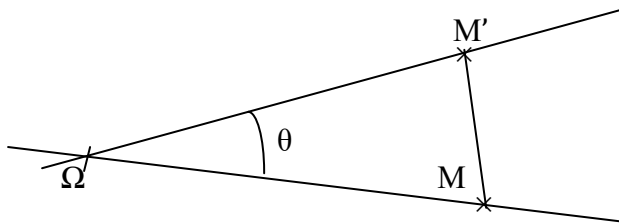
#### 4) Rotation : $r(\Omega ; \theta)$

**a-Définition**: On appelle rotation  $r(\Omega ; \theta)$  l'application notée et déterminée par :

$$r(\Omega ; \theta)(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\widehat{\Omega M'} ; \widehat{\Omega M}) = \theta \end{cases}$$

#### **b-Expression analytique :**

Considérons la rotation  $r(\Omega ; \theta)$  et le point M tel que  $r(\Omega ; \theta)(M) = M'$



En rapportant le plan au repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  et en notant  $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  ;  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

on a : 
$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \widehat{M\Omega M'} = \theta \end{cases}$$

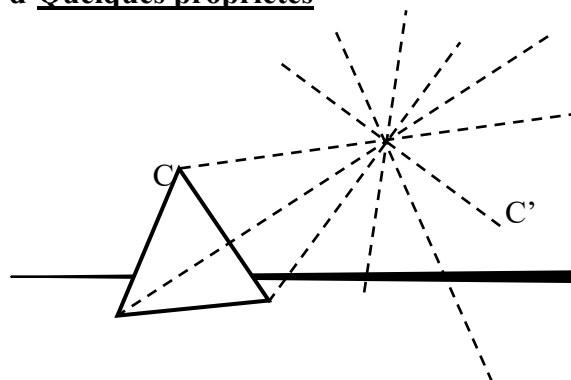
Le traitement de ces conditions aboutit au système

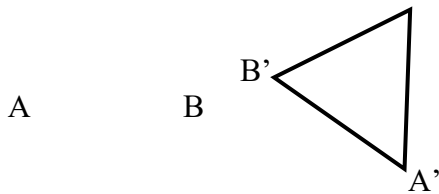
$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta - x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta + x_0 \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta + x_0 \sin \theta - y_0 \cos \theta + y_0 \end{cases}$$

#### **c-Caractéristique d'une rotation**

Une rotation est caractérisée par son centre  $\Omega$  et son angle  $\theta$ . Dans le plan le seul point invariant d'une rotation est son centre.

#### **d-Quelques propriétés**





Une rotation conserve l'alignement, la nature des figures l'orientation des angles et la distance.

## 5) Symétrie orthogonale

### a) Définition :

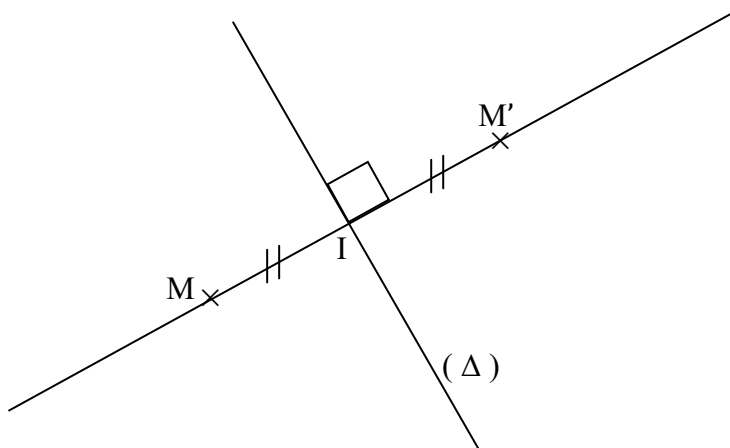
Une symétrie orthogonale d'axe  $(\Delta)$  est toute application affine notée  $S/\Delta$  et définie par :

$$S/\Delta : P \rightarrow P$$

$$M \mapsto S/\Delta (M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} MM' \perp \Delta \\ \text{et } I \text{ milieu } [MM'] \in \Delta \end{cases}$$

### b) Expression analytique :

Considérons la symétrie orthogonale d'axe  $\Delta$  noté  $S/\Delta$  transformant le point  $M$  en  $M'$  avec  $(\Delta) : ax + by = C$  alors l'équation:  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}y = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  est dite équation normalisée de  $\Delta$



En rapportant le plan au repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ , il existe un unique angle  $\theta$  tel que :

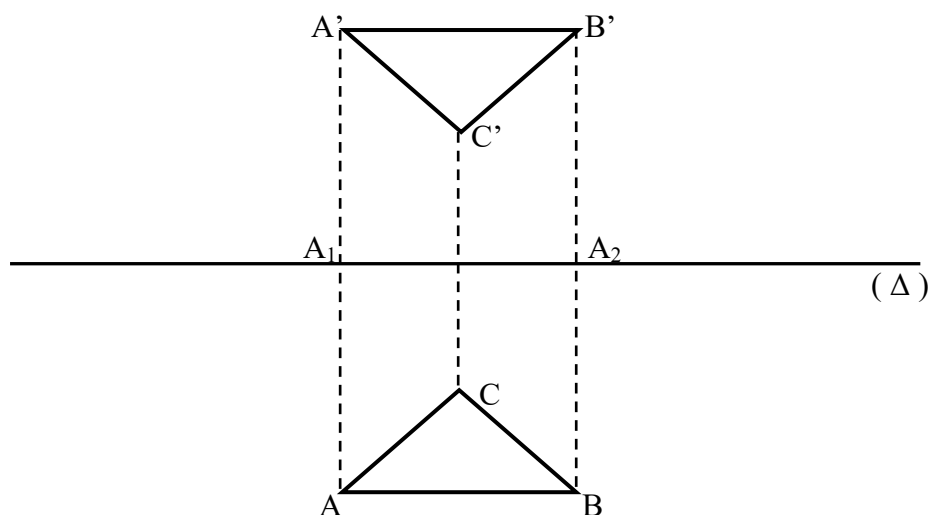
$$\theta = \begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

$$\text{Conditions aboutit au système } \begin{cases} x' = x \cos 2\theta + y \sin 2\theta - 2ab \\ y' = x \sin 2\theta - y \cos 2\theta - 2ac \end{cases}$$

c) **Caractéristiques :**

Une symétrie orthogonale est caractérisée par son axe ( $\Delta$ ) et tout point situé sur cet axe reste invariant par la symétrie

d) **Quelques propriétés :**



Les symétries conservent l'alignement, la nature des figures, opposent les angles et conservent les distances.

**Remarque :** Une des caractéristiques de la symétrie orthogonale  $s/\Delta$  est :  $s/\Delta \circ s/\Delta = \text{Idf}$

## **B) LES APPLICATIONS AFFINES DANS L'ESPACE**

L'extension de ces applications en dimension III fait l'objet d'une étude ultérieure. Cependant

dans l'espace associé un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  tout point  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  est représenté comme

l'indique les points ci-dessous  $A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ;  $B \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;  $C \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ;  $D \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

## I- Isométrie et similitude plane :

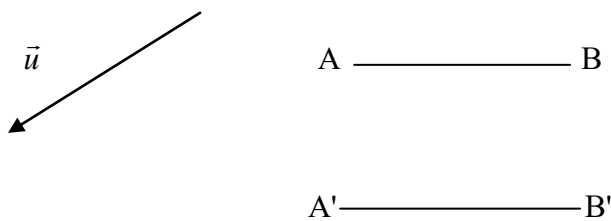
### 1) Isométrie :

#### a-Définition :

Une isométrie plane est une transformation qui conserve la distance. En la notant  $\mathbf{i}$  cela signifie que : Si  $\mathbf{i}(A) = A'$  et  $\mathbf{i}(B) = B'$  alors  $AB = A'B'$ .

#### Exemple :

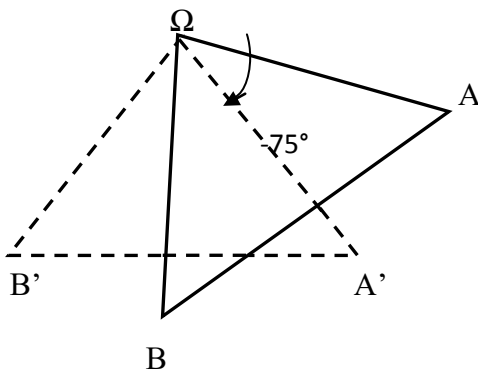
- la translation : soit  $t_{\vec{u}}$  de vecteur  $\vec{u}$  fixé et A, B, A', B' les points tels que :  
 $A' = t_{\vec{u}}(A)$  et  $B' = t_{\vec{u}}(B)$



On a bien  $AB = A'B'$  alors  $t_{\vec{u}}$  est une isométrie plane

- La rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\theta$ .**

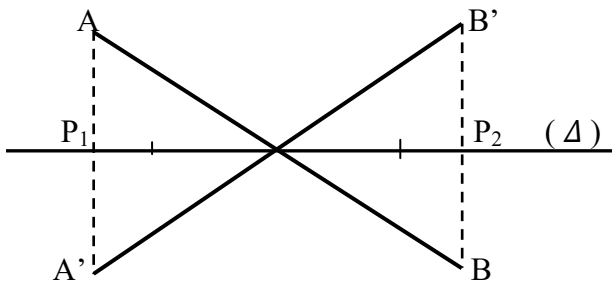
Soit  $\theta = -75^\circ$  les points A, B, A' et B' tels que  $r(A) = A'$ ,  $r(B) = B'$



$AB = A'B'$  alors  $r$  est une isométrie

- La symétrie orthogonale  $s_{\Delta}$**

$$A' = s/\Delta (A) \text{ et } B' = s/\Delta (B)$$



$AB = A'B'$  donc  $s/\Delta$  est une isométrie

### **b-Classification des isométries**

Les isométries se subdivisent en deux sous – ensembles :

- les isométries positives notés  $I^+$  dont l'expression analytique se présente sous la forme

$$\vec{i} : P \rightarrow P$$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = i(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = -bx + ay + c' \end{cases} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1$$

Ce sous ensemble regroupe les rotations et les translations

- Les isométries négatives notés  $I^-$  reconnues avec l'expression

$$\vec{i} : P \rightarrow P$$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = i(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + c' \end{cases} \text{ avec } -a^2 - b^2 = -(a^2 + b^2) = -1$$

Ce sous-ensemble regroupe les symétries orthogonales

### **c- Propriétés des isométries**

**Soit  $f$  une isométrie d'un espace affine  $\mathcal{E}$ .**

**$P_1$  :** Si  $f$  possède deux points fixes distincts  $A$  et  $B$  alors tout point de la droite  $(AB)$  est un point fixe par  $f$ .

**$P_2$  :** Si  $f$  possède trois points fixes distincts  $A$  ;  $B$  et  $C$  non alignés alors tout point du plan  $(ABC)$  est un point fixe.

**$P_3$  : Déplacements :** translations – rotations d'axe  $\Delta$  et d'angle  $\Theta$ , ou les vissages.

**$P_4$  : Antidéplacements :** symétries orthogonales par rapport à un plan , composée d'un déplacement et d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan.

**Soit  $f$  une isométrie d'un plan affine  $\mathcal{P}$ .**

**$P_5$  : Déplacements :** translations – rotations – symétries centrales.

**$P_6$  : Antidéplacements :** symétries orthogonales composées d'une symétrie orthogonale et d'une translation.

La composée de deux antidéplacements est un déplacement.

## 2) Similitude plane :

### a-Définition

Une similitude est une transformation qui conserve le rapport de distance. En la notant  $s$  cela signifie que si  $S(A) = A'$

$$S(B) = B' \text{ alors } \frac{AB}{A'B'} = k \text{ avec } k \in \mathbb{R}_*^*$$

### b-Propriétés :

- Pour les isométries on a établi l'égalité  $AB = A'B' \Leftrightarrow \frac{AB}{A'B'} = 1$  donc toute isométrie est un cas particulier de similitude dont la constante est 1
- Toute similitude  $s$  est la composée commutative d'une homothétie et d'une isométrie, on écrit dont  $S = hoi = ioh$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ hom & & iso \end{array}$$

### c-Caractéristiques d'une similitude :

Comme les isométries se décomposent en 2 sous groupes (à savoir) et que chaque similitude est la composée d'une isométrie et d'une homothétie alors on distingue 2 sous groupes de similitude. Les similitudes directes (homothétie, isométrie positive) et les similitudes inverses ou indirectes (homothétie, isométrie négative)

➤ **Cas de similitude directe**

**Expression complexe**

Soit  $s$  une similitude directe du plan qui au point  $M$  d'affixe  $z$  associé le point  $M'$  d'affixe  $z'$  alors ces affixes vérifient l'égalité  $z' = az + b$  où  $a, b \in \mathbb{C}$   
 $S$  est caractérisé par

- son rapport  $k = |a|$
- son angle  $\theta = \arg(a)$
- son centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega = \frac{b}{1-a}$  avec  $a \neq 1$
- $\Omega$  est invariant pour  $a \neq 1$

**Expression exponentielle**

Considérons la similitude directe  $S : z' = az + b$  (1)

Pour le cas le  $z' = \omega$  on a  $\omega = a\omega + b$  (2)

Alors (1) - (2)  $Z' - \omega = a(z - \omega)$  or  $a = ke^{i\theta} = |a|e^{i\theta}$  alors  $z' - \omega = |a|e^{i\theta}(z - \omega)$

**Expression analytique**

Notons  $z' = x' + iy'$  et  $z = x + iy$

Alors  $z' = az + b \Leftrightarrow x' + iy' = a(x + iy) + b$

$$\Leftrightarrow x' + iy' = ax + ai y + b = \begin{cases} x' = ax + b \\ y' = ay \end{cases}$$

➤ **Cas de Similitude indirecte ou inverse :**

**Expression complexe**

Considérons la similitude inverse  $S$  qui au point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  alors ces affixes vérifient l'égalité  $z' = a\bar{z} + b$  où  $a, b \in \mathbb{C}$   
 Dans ce cas  $S$  est caractérisé par :

- son rapport  $k = |a|$

- son axe  $(\Delta) : y = px + q$
- son centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega = \frac{b + a\bar{b}}{1 - a\bar{a}}$

### Expression analytique

$$z' = x' + iy'; \quad \bar{z} = x - iy$$

$$\Leftrightarrow x' + iy' = a(x - iy) + b$$

$$\Leftrightarrow x' + iy' = ax - aiy + b \Rightarrow \begin{cases} x' = ax + b \\ y' = -ay \end{cases}$$

### Remarque :

Dans le cas où  $\omega \in (\Delta)$  ; on observe aucun point invariant et la similitude est dite vissage.

## Retenons

### Soit $f$ la transformation : $z' = az + b$

- si  $a = 1$  , alors  $f$  est une translation de vecteur  $\vec{u}$  et d'affixe  $b$ .
- si  $a = -1$  , alors  $f$  est la symétrie centrale de centre  $\Omega$  d'affixe  $w = \frac{1}{2}b$ .
- si  $a \in \mathbb{R}^* - \{-1; 1\}$  , alors  $f$  est une homothétie de rapport  $k = |a|$  et de centre  $\Omega$  d'affixe  $w = \frac{b}{1-a}$ .
- si  $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$  et  $|a| = 1$  alors  $f$  est une rotation d'angle  $\alpha = \arg(a)$  et de centre  $\Omega$  d'affixe  $w = \frac{b}{1-a}$ .
- si  $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$  et  $|a| \neq 1$  alors  $f$  est une similitude directe de rapport  $k = |a|$ , d'angle  $\alpha = \arg(a)$  et de centre  $\Omega$  d'affixe  $w = \frac{b}{1-a}$ .

### Soit $f$ la transformation : $z' = a\bar{z} + b$

- Si  $|a| = 1$  , alors  $f$  est une symétrie orthogonale d'axe l'ensemble des solutions de  $z' = z$  .
- Si  $|a| \neq 1$  alors  $f$  est une similitude indirecte de rapport  $k = |a|$ , d'angle  $\alpha = \arg(a)$  ,  
d'axe  $(\Delta) : y = px + q$  et de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega = \frac{b + a\bar{b}}{1 - a\bar{a}}$

## Composée des transformations

- La composée de deux translations de vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est une translation  $\vec{u} + \vec{v}$ .
- La composée de deux homothéties  $h_1(\Omega ; k_1)$  et  $h_2(\Omega ; k_2)$  est une homothétie  $h(\Omega ; k_1 \cdot k_2)$ . Avec  $k_1 \neq k_2$ .
- La composée de deux homothéties  $h_1(\Omega_1 ; k_1)$  et  $h_2(\Omega_2 ; k_2)$  est :
  - Une homothétie  $h(\Omega ; k_1 \cdot k_2)$  si  $k_1 \cdot k_2 \neq 1$ .
  - Une translation de vecteur  $\vec{u}$  si  $k_1 \cdot k_2 = 1$ .
- La composée d'une translation de vecteur  $\vec{u}$  et d'une homothétie  $h(\Omega ; k)$  est :
  - Une translation si  $k = 1$ .
  - Une homothétie si  $\vec{u} = \vec{0}$ .
  - Une homothétie si  $k \neq 1$  et  $\vec{u} = \vec{0}$ .
- La composée d'une homothétie et d'une isométrie est une similitude.
- La composée d'une homothétie et d'une symétrie orthogonale est une similitude indirecte.
- La composée de deux antidéplacements est un déplacement.
- La composée de deux déplacements est un déplacement.
- La composée de d'un antidéplacement et un déplacement est un antidéplacement.
- La composée de deux rotations  $r$  et  $r'$  d'angles respectifs  $\alpha$  et  $\alpha'$  est :
  - Une rotation d'angle  $\alpha + \alpha'$  si  $\alpha + \alpha' \neq 0$
  - Une translation  $\alpha + \alpha' = 0$
- La composée d'une rotation et d'une translation est une symétrie orthogonale.

## Expressions analytiques des transformations

- Expression analytique d'une translation de vecteur translateur  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Si  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont deux points quelconques du plan tel que  $\overline{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow$

$Z' - Z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ , alors l'expression analytique d'une translation est :  $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ .

- Expression analytique d'une homothétie de rapport  $k$  et de centre  $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

Si  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont deux points quelconques du plan tel que  $\overline{\Omega M'} = k \overline{\Omega M} \Leftrightarrow$

$Z' - \omega = k(Z - \omega)$ , alors l'expression analytique d'une homothétie est :

$$\begin{cases} x' = kx + x_0(1 - k) \\ y' = ky + y_0(1 - k) \end{cases}$$

- **Expression analytique d'une rotation d'angle  $\Theta$  et de centre  $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$**

Si  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont deux points quelconques du plan tel que,  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \widehat{M\Omega M'} = \theta \end{cases}$

$Z' - \omega = e^{i\theta}(Z - \omega)$ , alors l'expression analytique d'une rotation est :

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta - x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta + x_0 \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta + x_0 \sin \theta - y_0 \cos \theta + y_0 \end{cases}$$

- **Expression analytique d'une symétrie centrale de centre  $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$**

Si  $M \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$  et  $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont deux points quelconques du plan tel que  $\overline{MM'} = 2\overline{O\Omega}$  alors

l'expression analytique d'une homothétie est :  $\begin{cases} x' = -x + 2x_0 \\ y' = -y + 2y_0 \end{cases}$ .

- **Expression analytique d'une symétrie orthogonale d'axe  $(\Delta) : y = ax + b$**

Si  $M \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$  et  $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont deux points quelconques du plan tel que si  $M \mapsto S_{\Delta} / (M) = M'$  et

$$\begin{cases} MM' \perp \Delta \\ \text{milieu} \\ [MM'] \in \Delta \end{cases} \quad \text{alors l'expression analytique d'une symétrie orthogonale est :}$$

$$\begin{cases} x' = x \cos 2\theta + y \sin 2\theta - 2ab \\ y' = x \sin 2\theta - y \cos 2\theta - 2ac \end{cases}$$

- **Expression analytique d'une similitude directe**

Si  $M \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$  et  $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont deux points quelconques du plan tel que

$z' = az + b$  avec  $a$  et  $b \in \mathbb{C}^*$ , alors l'expression analytique d'une similitude directe

est :  $\begin{cases} x' = ax + b \\ y' = ay \end{cases}$ .

- **Expression analytique d'une similitude indirecte**

Si  $M \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$  et  $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont deux points quelconques du plan tel que

$z' = a\bar{z} + b$  avec  $a$  et  $b \in \mathbb{C}^*$ ,

alors l'expression analytique d'une similitude indirecte est :  $\begin{cases} x' = ax + b \\ y' = -ay \end{cases}$

- **Expression analytique d'une isométrie**

• **Isométrie positive ou déplacement**

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1 \text{ et } \det(\text{Mat}f) = 1$$

**NB :** tout déplacement ( **isométrie positive**) est une similitude directe de rapport  $k = 1$  et les déplacements sont des transformations qui conservent l'angle orienté ( Rotation ; translation ; symétrie centrale )

**Classification des déplacements à partir de l'ensemble des points invariants**

Ensemble des points invariants par $f$	Nature de la transformation $f$
Plan P	$f$ est l'identité du plan
Ensemble vide $\emptyset$	$f$ est la translation du vecteur non nul
Singleton $\{A\}$	$f$ est la rotation de centre A

• **Isométrie négative ou antidéplacement**

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + c' \end{cases} \text{ avec } -a^2 - b^2 = -1 \text{ et } \det(\text{Mat}f) = -1$$

**NB :** tout antidéplacement (isométrie **négative**) est une similitude indirecte de rapport  $k = 1$  et les antidéplacements sont des transformations qui conservent l'angle orienté (symétrie orthogonale ; réflexion ; symétrie glissée)

**Classification des antidéplacements à partir de l'ensemble des points invariants**

Ensemble des points invariants par $f$	Nature de la transformation $f$
Droite ( D )	$f$ est la symétrie orthogonale par rapport à (D)
Ensemble vide $\emptyset$	$f$ est la symétrie glissée

- **Expression analytique d'une réflexion d'axe**

- Par rapport à la droite d'équation  $y = x$  , on a :  $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$
- Par rapport à la droite d'équation  $y = 0$  , on a :  $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$
- Par rapport à la droite d'équation  $x = 0$  , on a :  $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

- **Déterminant – Bijection – Projection – Points invariants –Involution d'une transformation  $f$**

• **Déterminant :**

Soit  $f$  l'application affine tel qu'on ait :

$$f : \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

Soit  $\text{mat}(f)$  la matrice  $A$  de  $f$  tel que  $\text{mat}(f) = A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$

Soit  $\det(A)$  le déterminant de la matrice  $A$  tel qu'on ait :  $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

• **Bijection**

$f$  est une bijection ou réalise une bijection ssi :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$$

**N.B** : On utilise la même méthode pour montrer que trois points  $A, B, C$  forment un repère du plan c'est-à-dire  $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \neq 0$

• **Projection**

$f$  est une projection si et seulement si, il existe trois points :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} ; M'' \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \in P \text{ tel que : } f(M) = f(M') = M''$$

$$\text{C'est-à-dire } \begin{cases} x'' = ax' + by' + c \\ y'' = a'x' + b'y' + c' \end{cases} \Leftrightarrow f \circ f = f$$

• **Points invariants**

$f$  admet un point invariant si et seulement si, il existe deux points

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in P \text{ tel que } f(M) = M' \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ax + by + c \\ y = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

- **Involution**

$f$  est involutive ou réalise une involution si et seulement si : La matrice au carrée de  $f$  est

égale à la matrice identité c'est-à-dire  $\text{Mat}(A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## c) **Les matrices**

### **I-Définition :**

Une matrice est un ensemble de nombres disposés en lignes et en colonnes sous forme de tableau rectangulaire. (Les lignes sont horizontales et les colonnes sont verticales).

Une matrice comportant  $m$  lignes et  $p$  colonnes est une matrice de dimension  $m \times p$ .

Chaque élément d'une matrice est identifiée par la position qu'il occupe dans le tableau chaque élément se situe à l'intersection d'une ligne et d'une colonne ; la position est donnée en indiquant le numéro de la ligne suivi du numéro de la colonne. Ainsi, l'élément  $a_{ij}$  d'une matrice occupe l'intersection de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$ .

Une matrice  $A_{m \times p}$  est un tableau comme suite :

$$A_{m \times p} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix}$$

Notation compact:  $A = (a_{i,j})_{(1 \leq i \leq m ; 1 \leq j \leq p)}$

### **II-Matrices particulières**

Soient  $m, p \in \mathbb{N}^*$  et soit  $A = (a_{ij})_{(1 \leq i \leq m ; 1 \leq j \leq p)}$  une matrice de type  $m, p$  à coefficients réels.

- 1) Si  $p = 1$  on dit que  $A$  est une matrice colonne ;
- 2) Si  $m = 1$  on dit que  $a$  est une matrice ligne ;
- 3) Si tous les  $a_{ij}$  sont nuls, on dit que  $A$  est la matrice nulle. On la note  $O_{m \times p}$  ;
- 4) Si  $m = p$  la matrice  $A$  est dite carrée d'ordre  $m$ . Les scalaires  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$  constituent alors ce que l'on appelle la diagonale principale de  $A$ .
- 5) Si  $A$  est une matrice et si tous les coefficients situés hors de la diagonale principale sont nuls. On dit que  $A$  est une matrice diagonale ;
- 6) Si  $A$  est carrée et si  $a_{ij} = a_{ji}$  pour tous  $i, j$  on dit que  $A$  est matrice symétrique.

- 7) La matrice diagonale dont tous les coefficients situés sur la diagonale principale valent 1 est notée  $1_p$  et est appelée matrice unité d'ordre  $p$ .
- 8) Si  $A$  est une matrice et si tous les coefficients situés strictement au – dessus (respectivement en dessous) de la diagonale principale sont nuls, on dit que  $A$  est triangulaire inférieure (respectivement triangulaire supérieure).

### III- Relations entre les matrices

#### 1) Définition:

Deux matrices réelles de mêmes dimensions sont égales si les éléments qui occupent la même position dans l'une et l'autre matrice sont égaux.

Soient deux matrices de même dimension :  $A = (a_{ij})_{m \times p}$ ,  $B = (b_{ij})_{m \times p}$

$$A = B \Leftrightarrow \forall i, j, a_{ij} = b_{ij}$$

#### 2) Opérations sur les matrices :

Nous définissons quatre opérations sur les matrices : une addition de deux matrices une multiplication d'une matrice par un scalaire, une multiplication de deux matrices et enfin, la transposition d'une matrice.

##### a) Addition de deux matrices :

L'opération addition de deux matrices crée une nouvelle matrice appelée somme. Cette opération est définie sur les matrices de même dimension. Chaque élément de la matrice somme  $A + B$  est la somme des éléments de même position des matrices  $A$  et  $B$ .

$$A = (a_{ij})_{m \times p}, B = (b_{ij})_{m \times p} \quad A + B = (S_{ij})_{m \times p} \quad \text{où} \quad S_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

**Exemple :**  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$  la somme  $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 18 & 1 \end{pmatrix}$

Soit  $M_{m \times p}$  l'ensemble des matrices réelles de dimension  $m \times p$ . L'addition de deux matrices possède les propriétés suivantes : fermeture, associative, commutative, neutre (matrice nulle), inverse  $A$  où  $-A = (a_{ij})_{m \times p}$

##### b) Multiplication par un scalaire :

L'opération multiplication par un scalaire est une opération qui crée une nouvelle matrice en utilisant, par exemple, une matrice  $A$  et un scalaire  $k$ . Chaque élément de la matrice  $kA$  est l'élément de même position de la matrice  $A$  multipliée par le scalaire  $k$ .

Soit un scalaire  $k$  et une matrice réelle  $A = (a_{ij})_{m \times p}$   $kA = (p_{ij})_{m \times p}$  où  $k_{ij} = ka_{ij}$

**Exemple :** Si le scalaire est 2 et la matrice est

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ alors la matrice produit est } (-2)A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

La multiplication d'une matrice par un scalaire possède les propriétés suivantes : fermeture, associative, commutative, neutre (1) distributivité sur une somme de matrices, distributivité sur une somme de scalaires.

Notez que : Pour l'addition et la multiplication par un scalaire l'ensemble  $M_{mp}$  des matrices à m lignes, p colonnes, à coefficients dans le corps K est un K espace vectoriel.

### **c) Multiplication de deux matrices:**

L'opération multiplication de deux matrices est une opération qui crée une nouvelle matrice appelée produit; par exemple, une matrice AB est le produit de A et B. L'élément de la matrice AB occupant la position ij est obtenu en utilisant la ligne i de A et la colonne j de B, de la façon suivante : (1<sup>er</sup> élément de la ligne i de A fois 1<sup>er</sup> élément de la colonne j de B) + (2<sup>e</sup> élément de la ligne i de A fois 2<sup>e</sup> élément de la colonne j de B) + ... + (dernier élément de la ligne i de A fois dernier élément de la colonne j de B). La multiplication de deux matrices A et B est possible si et seulement si le nombre de colonne de A est égal au nombre de lignes de B.

Soient deux matrices  $A = (a_{ij})_{m \times p}$ ,  $B = (b_{ij})_{p \times p}$   $AB = (c_{ij})_{m \times p}$  où

$$c_{ij} = \sum a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$$

**Exemple** : Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} -3 & -15 & -5 \\ 6 & 6 & 17 \end{pmatrix}$$

La multiplication de deux matrices n'est pas une opération commutative ; elle possède les propriétés de fermeture, associative, neutre I, distributivité sur une somme de matrices.

### **Exercices d'applications**

#### **Exercice 1:**

Soient les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer :  $A + B$  ;  $A \times B$  ;  $B \times A$

2. Calculer :  $A^2 + B^2 + 2AB$  et  $(A + B)^2$

Puis conclure.

### Exercice 2 :

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Calculer  $A + B$  ;  $A \times B$  ;  $B \times A$
- Calculer  $(A + B)^2$

Puis conclure

### d) Transposition d'une matrice :

La transposition d'une matrice est une opération qui crée une nouvelle matrice de même dimension. L'élément de la matrice transposée située sur la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne est l'élément situé sur la  $j^{\text{ème}}$  ligne et la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $A$ . Si une matrice  $A$  est symétrique alors elle est égale à sa transposée. On dit que  $A$  est antisymétrique si  $A = -A$ .

Ainsi si  $A = (a_{ij})$ , on appelle transposé de  $A$ , la matrice notée  $t_A$  tel que :  $t_A = (a_{ji})$ .

### Exemple :

Soit la matrice  $A$  définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \text{ déterminer la transposée de } A.$$

### Solution

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow t_A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

### e) Comatrice d'une matrice :

Soit la matrice réelle définie par :  $A_{m \times p} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix}$

On appelle comatrice de A, la matrice obtenue en calculant les différentes valeurs de  $a_{ij}$ .  
On la note :  $C_A$  tel que :  $C_A = (-1)^{i+j} [\det a_{ij}]$

### f) Déterminant et inverse d'une matrice :

À chaque matrice carrée A est associé un nombre appelé déterminant de A et noté  $\det A$ .

Une matrice carrée A est dite inversible s'il existe une unique matrice carrée B telle que  $AB = BA = I$ . La matrice B est alors l'inverse de A et notée  $A^{-1}$ . On démontre qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Ainsi si  $\det A \neq 0$ , alors  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot t_{C_A}$  (où  $t_{C_A}$  est la transposée de la comatrice de A).

### Exercices d'application

#### Exercice 1 :

Soit la matrice A tel que  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^{-1}$

#### Exercice 2 :

Soit la matrice B tel que  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $B^{-1}$

#### Solution 1 :

Soit la matrice A tel que  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ . Calculons  $A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot t_{C_A}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (1)(5) - (3)(2) = 5 - 6 = -1$$

$\det A \neq 0$  Alors A est inversible.

Calculons la comatrice de A.

$$\text{Posons } \mathbf{C}_A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Calculons ainsi :  $A_{11}$  ;  $A_{12}$  ;  $A_{21}$  ;  $A_{22}$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(5) = (-1)^2(5) = 5$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}(3) = (-1)^3(3) = -3$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(2) = (-1)^3(2) = -2$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}(1) = (-1)^4(1) = 1$$

$$\text{Or } \mathbf{C}_A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{C}_A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Et } \mathbf{t}_{\mathbf{C}_A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \mathbf{t}_{\mathbf{C}_A} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

**Solution 2 :**

Soit la matrice B tel que  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ . Calculons  $B^{-1}$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot {}^t C_B$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

Appliquons la méthode de **Sarius** pour le calcul de  $\det B$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & | & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & | & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-3 + 4 - 2) - (-6 - 2 + 2) = 5$$

$\det B \neq 0$  Alors B est inversible.

Calculons la comatrice de A.

$$\text{Posons } C_B = \begin{pmatrix} A_{11}A_{12}A_{13} \\ A_{21}A_{22}A_{23} \\ A_{31}A_{32}A_{33} \end{pmatrix}$$

Calculons ainsi :  $A_{11}$  ;  $A_{12}$  ;  $A_{13}$  ;  $A_{21}$  ;  $A_{22}$  ;  $A_{23}$  ;  $A_{31}$  ;  $A_{32}$  ;  $A_{33}$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-1} \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(-3+2) = (-1)^2(-1) = -1$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-1} \\ -1 & \cancel{3} & 1 \\ 2 & \cancel{-2} & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}(1-2) = (-1)^3(-1) = 1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-1} \\ -1 & 3 & \cancel{1} \\ 2 & -2 & \cancel{-1} \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(2-6) = (-1)^4(-4) = -4$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-1} \\ \cancel{-1} & \cancel{3} & \cancel{1} \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(-2-2) = (-1)^3(-4) = 4$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-1} \\ -1 & \cancel{3} & \cancel{1} \\ 2 & \cancel{-2} & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}(-1+2) = (-1)^4(1) = 1$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-1} \\ -1 & \cancel{3} & \cancel{1} \\ 2 & -2 & \cancel{-1} \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}(-2-4) = (-1)^5(-6) = 6$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-1} \\ -1 & \cancel{3} & \cancel{1} \\ \cancel{2} & \cancel{-2} & \cancel{-1} \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(2+3) = (-1)^4(5) = 5$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-1} \\ -1 & \cancel{3} & \cancel{1} \\ 2 & \cancel{-2} & \cancel{-1} \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}(1-1) = (-1)^5(0) = 0$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} (3+2) = (-1)^6 (5) = 5$$

$$\text{Or } C_B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \Rightarrow C_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Et } t_{C_B} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{D'où } B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot t_{C_B} = \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-14}{5} & 1 \\ \frac{11}{55} & 0 \\ \frac{-46}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-14}{5} & 1 \\ \frac{11}{55} & 0 \\ \frac{-46}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

## D) Applications Affines, matrice et déterminant

- Soit  $f$  l'application affine tel qu'on ait :

$$f: \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

- Soit  $\text{mat}(f)$  la matrice  $A$  de  $f$  tel qu'on ait :

$$\text{Mat}(f) = A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

- Soit  $\det(A)$  le déterminant de la matrice  $A$  tel qu'on ait :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

## I- Bijection :

f est une bijection ou réalise une bijection ssi :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$$

**N.B :** On utilise la même méthode pour montrer que trois points A, B, C forment un repère du plan c'est-à-dire  $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \neq 0$

## II- Projection :

f est une projection si et seulement si, il existe trois points :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}; M'' \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \in P \text{ tel que : } f(M) = f(M') = M''$$

$$\text{C'est-à-dire } \begin{cases} x'' = ax' + by' + c \\ y'' = a'x' + b'y' + c' \end{cases} \Leftrightarrow f \circ f = f$$

## III- Point invariant :

f admet un point invariant si et seulement si, il existe deux points

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in P \text{ tel que } f(M) = M' \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ax + by + c \\ y = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

## IV- Involution :

f est involutive ou réalise une involution ssi : La matrice carrée associée à f est égale à la

$$\text{matrice identique c'est-à-dire } \text{Mat}(A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## EXERCICES

**Exercice 1** : Soit  $A(3, 0)$  et  $B(1, -1)$  deux points du repère  $(o, \vec{i}, \vec{j})$

a) Montrer qu'il existe une application affine telle que :

$$\begin{cases} f(o) = B \\ f(B) = B \\ f(A) = A \end{cases}$$

b) Calculer les coordonnées  $(x', y')$  de  $f(M) = M'$  en fonction des coordonnées  $(x, y)$  de  $M$ .

c) Calculer  $f \circ f$  et déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'application  $f$ .

**Exercice 2** : Déterminer la traduction complexe de la transformation  $f$  dans chacun des cas :

1)  $f$  est la transformation qui transforme  $A$  d'affixe  $-1 + i$  en  $B$  d'affixe  $-2 + 3i$

2)  $f$  est l'homothétie de rapport  $\frac{1}{2}$  qui transforme  $A$  d'affixe  $-1 + i$  en  $B$  d'affixe  $-2 + 3i$

3)  $f$  est la rotation d'angle  $\frac{3\pi}{4}$  qui transforme  $A$  d'affixe  $-1 + i$  en  $B$  d'affixe  $-2 + i$

**Exercice 3** : Dans le plan  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  on considère les points  $A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  $B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;  $C \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ;  $A' \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$ ;

$B' \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ ;  $C' \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$  soit  $f$  l'application affine du plan tel que :

$$f(A) = A'; f(B) = B'; f(C) = C'$$

3) Montrer que  $f$  est bijective

4) Déterminer l'expression analytique de  $f$ .

**Exercice 4** : Le plan est muni du repère  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $f$  l'application du plan dans lui-même qui à tout point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  associe le point  $M'$  de coordonnées  $(x', y')$  tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$$

- 1) Démontrer que le vecteur  $\overrightarrow{MM'}$  à une direction fixe que l'on précisera.
- 2) Démontrer que  $f \circ f = f$
- 3) a) Déterminer l'ensemble des points invariants par  $f$ .  
b) En déduire la nature des éléments caractéristiques.

**Exercice 5** : On considère dans le plan  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  les points  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases}$$

- 1) Démontrer que  $f \circ f = \text{Id}$
  - 2) Démontrer que l'ensemble des points invariants par  $f$  est une droite (D) que l'on précisera.
  - 3) Soit  $M$  un point du plan et  $M'$  son image par  $f$ .
- a) Démontrer que le milieu de  $[MM']$  appartient à la droite (D).
  - b) Démontrer que le vecteur  $\overrightarrow{MM'}$  à une direction fixe orthogonale à celle de (D).
  - c) En déduire les éléments caractéristiques de  $f$ .

**Exercice 6 :**

Le plan euclidien P est rapporté à un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ . Etant donné un nombre réel a, on appelle T l'application de P dans P qui à tout point M  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  fait correspondre le point M'

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ tel que : } \begin{cases} x' = (a-1)x + 2y \\ y' = ax + y \end{cases}$$

- 1) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles Ta est bijective.
- 2) Déterminer l'ensemble des points invariants par Ta.
- 3) Déterminer a pour que Ta soit involutive et caractériser géométriquement l'application Ta correspondant à cette valeur de a obtenue.

**Exercice 7 :**

On considère l'application g de E dans E qui à tout point M  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  associe le point

$$M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ tel que : } \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -y + 2 \end{cases}$$

- 1) Montrer que g est affine, sans point invariant et que son endomorphisme associé  $\varphi$  est involutif.
- 2) a) Démontrer que  $gog$  est une translation.

b) soit  $\vec{u}$  le vecteur de cette translation et t la translation de vecteur  $\frac{\vec{u}}{2}$ .

Préciser la nature de l'application S telle que  $g = toS$ .

Prouver que  $toS = Sot$ .

- 3) Montrer que l'image (C') de la courbe  $(C_1)$  par g a pour équation  $y = -x + 2 + \ln x$ .
- 4) Construire (C') dans le repère  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

**NB :** (C') Coupe l'axe des abscisses aux points :  $x_0 = 0,16$  et  $x_1 = 3,14$ .

**Exercice 8 :** Soit l'application affine f.

$$f: P \rightarrow P ; M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ tel que : } \begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$$

- a) Vérifier que f est bijective.
- b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
- c) On désigne par Z et Z' les affixes respectives des points M et M'. Exprimer Z' en fonction de Z.
- d) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

**Exercice 9 :**

Dans le plan  $P$ , on considère la translation  $t_{\vec{u}}$  définie par  $t_{\vec{u}}(A) = B$  où  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ .

a) Caractériser cette translation.

b) Déterminer le point  $C'$  image du point  $C \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  par  $t_{\vec{u}}$

**Exercice 10 :**

Le plan  $P$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

Soit  $A$  et  $B$  deux points du plan d'affixes respectives  $a = 1 + i$  et  $b = -4 - i$

Soit  $T$  la transformation du plan  $P$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $Z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $Z'$  tel que  $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$ .

b- Exprimer  $(x' ; y')$  en fonction de  $(x ; y)$  puis  $Z'$  en fonction de  $Z$ .

c- Montrer que  $T$  admet un seul point invariant  $\Omega$  dont on donnera l'affixe. En déduire que  $T$  est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

# Statistique

## I- Vocabulaire de la statistique

### Evaluation diagnostique

#### Activité

Voici une liste de notes attribuées à 30 élèves d'une terminale :

- 13 personnes on une note comprise entre 0 et 3.
- 9 personnes on une note comprise entre 3 et 8.
- 4 personnes on une note comprise entre 8 et 10.
- 3 personnes on une note comprise entre 10 et 15.
- 2 personnes on une note comprise entre 15 et 18.

Utilise le tableau ci-dessous pour Classer ses notes dans des intervalles bien déterminés.

Nombre d'élève	Intervalles de notes attribuées

#### Solution

Nombre d'élève	Intervalles de notes attribuées
13	$[ 0 ; 3 [$
9	$[ 3 ; 8 [$
4	$[ 8 ; 10 [$
3	$[ 10 ; 15 [$
1	$[ 15 ; 18 [$

Le faite que tu est classé ses notes donne la notion de statistique.

#### 1- Définition :

D<sub>1</sub> : La statistique est un ensemble de données chiffrés ou non.

D<sub>2</sub> : La statistique est la branche de la mathématique qui consiste à regrouper les données ; à les analyser et à tirer des conclusions.

Comme toutes les sciences, la statistique fait appel à un langage spécialisé.

## 2- Langage statistique :

### a- Notion de population et d'individu :

L'ensemble sur lequel porte l'étude statistique est appelé la population, un élément de cet ensemble est l'individu.

**N.B** : En statistique, les mots (population – individu) peuvent désigner des êtres ou des objets animés ou inanimés.

### b- Caractères et modalités :

Dans l'étude de statistique d'une population, l'attention est portée généralement sur un événement commun à tous les membres de la population : c'est le caractère.

**Exemple** : Le caractère situation matrimoniale à 4 modalités : marié, divorcé, célibataire, veuf.

Il existe deux sortes de caractères : **Les caractères qualitatifs et les caractères quantitatifs.**

#### - **Caractères qualitatifs :**

Un caractère est dit qualitatif si ses différentes modalités ne sont pas mesurables.

**Exemple** : La situation matrimoniale ; le sexe, la profession, la nationalité....

#### - **Caractères quantitatifs :**

Un caractère est dit quantitatif si ses différentes modalités sont mesurables c'est à dire des nombres.

**Exemple** : l'âge, la taille, le poids.....

Un caractère quantitatif peut être discret (discontinue) ou (continue)

Un caractère quantitatif est dit discret si ses valeurs prises sont isolées.

**Exemple** : le nombre de frère de chaque élève, le nombre de femme.....

Un caractère quantitatif est dit continu si ses valeurs prises sont en nombre infini dans un intervalle.

Exemple : la température du corps, la taille, l'âge...;

### c- Echantillon :

L'étude d'un caractère sur une grande population est parfois sensible et coûteux.

Exemple : recensement de population, enquête etc... c'est pourquoi on étudie ce caractère sur un petit groupe de cette membre de cette population : c'est l'échantillon.

## II- Présentation des données statistiques :

Plusieurs méthodes sont utilisées par les organismes de la statistique pour la collecte des données statistiques. Les données ayant été recueillis et est nécessaire dans une première phase de les grouper, de les présenter sous forme de tableau et de représentation graphique.

### 1- Cas d'un caractère qualitatif :

#### a- Tableau statistique :

**Exemple** : l'étude du caractère situation matrimoniale sur 10 élèves d'une classe a donné le résultat suivant :

	Modalité ( $x_i$ )	Nombre d'élément ( $n_i$ )
A : marié	Marié	3
B : Divorcé	Célibataire	4
C : Célibataire	Divorcé	2
D : Célibataire	Veuf	1
E : Marié	Total	10
F : Veuf		
G : Divorcé		
H : Célibataire		
I : Célibataire		
J : Marié		

Le caractère situation matrimoniale à 4 modalités; on dresse un tableau à deux colonnes.

- 1<sup>ère</sup> Colonne contient la nomenclature des différentes modalités. On la note  $x_i$
- La 2<sup>ème</sup> Colonne contient le nombre d'élément de chaque modalité. On la note  $n_i$ .

$n_i$  est l'effectif relatif de la modalité  $x_i$ . C'est le nombre d'élément présentant la modalité  $x_i$ .

**Exemple** :  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 4$ ,  $n_3 = 2$ ,  $n_4 = 1$  (d'après le tableau).

Alors  $N = \sum n_i = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 10$

N est appelé somme des  $n_i$ .

A ce tableau, on peut ajouter une 3<sup>ème</sup> colonne ; celle des **fréquences notés  $f_i$**  tel que  $f_i =$

$$\frac{n_i}{N} = \frac{\text{effectif relatif}}{\text{effectif total}}$$

Modalités	Nombre d'éléments	Fréquences
( $x_i$ )	( $n_i$ )	( $f_i$ )
Marié	3	$3/10 = 0,3$
Célibataire	4	$4/10 = 0,4$

Divorcé	2	$2/10 = 0,2$
Veuf	1	$1/10 = 0,1$
Total	10	$10/10 = 1$

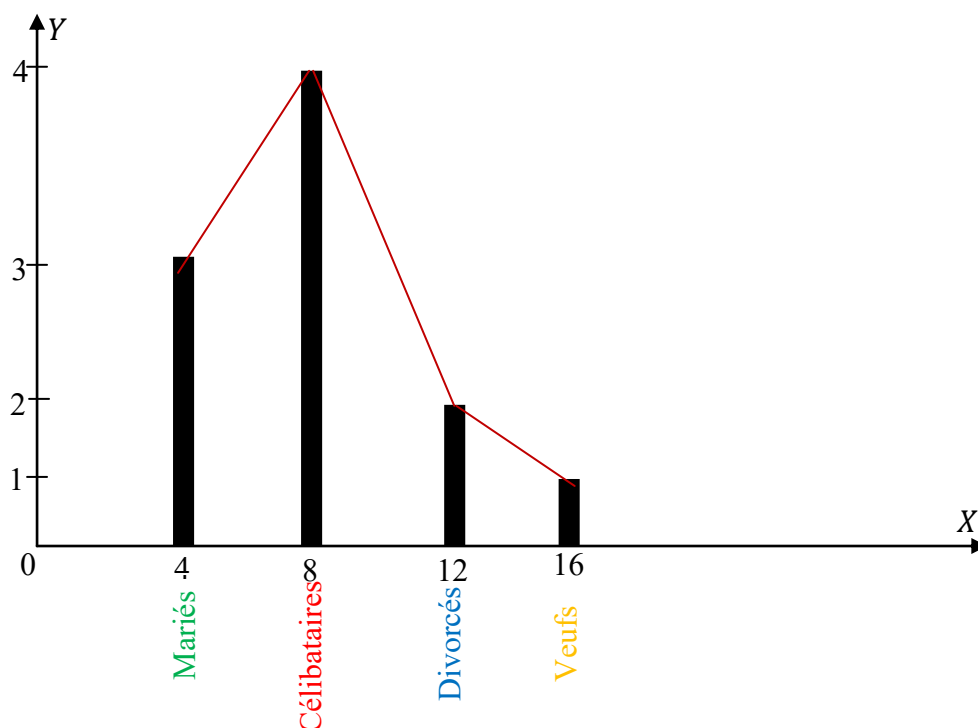
**NB** : la somme des fréquences est toujours égale à 1 :  $\sum f_i = 1$

### b- Représentation graphique :

#### Diagramme en bâton :

Dans un repère orthogonal, on place sur l'axe des abscisses les  $x_i$  (modalités) ; et sur l'axe des ordonnées les effectifs  $n_i$  ou les fréquences  $f_i$ .

Pour construire le diagramme en bâton des effectifs, on place les points  $A_i(x_i ; 0)$  et  $B_i(x_i ; n_i)$  et on construit en trait plein les segments  $[A_i B_i]$ .



#### **N.B** :

Si les fréquences  $f_i$  étaient en ordonnée, le diagramme est appelé diagramme en bâton des fréquences. Le polygone des effectifs est la ligne brisée reliant les extrémités des bâtons dans le diagramme (Voir figure ci-dessus).

D'une manière générale, la ligne polygonale obtenue en joignant les différents points  $B_i(x_i ; n_i)$

#### Diagramme en secteur circulaire :

Soit le demi-cercle (C) ; représentons la série précédente sur (C). Chaque modalité est représenté par un secteur angulaire proportionnel à son effectif  $\alpha_i$  tel que  $\alpha_i = f_i \times 180^\circ$ .

**Marié** :  $\alpha_1 = 0,3 \times 180^\circ \Rightarrow \alpha_1 = 54^\circ$

**Célibataire** :  $\alpha_2 = 0,4 \times 180^\circ \Rightarrow \alpha_2 = 72^\circ$

**Divorcé** :  $\alpha_3 = 0,2 \times 180^\circ \Rightarrow \alpha_3 = 36^\circ$

**Veuf** :  $\alpha_4 = 0,1 \times 180^\circ \Rightarrow \alpha_4 = 18^\circ$

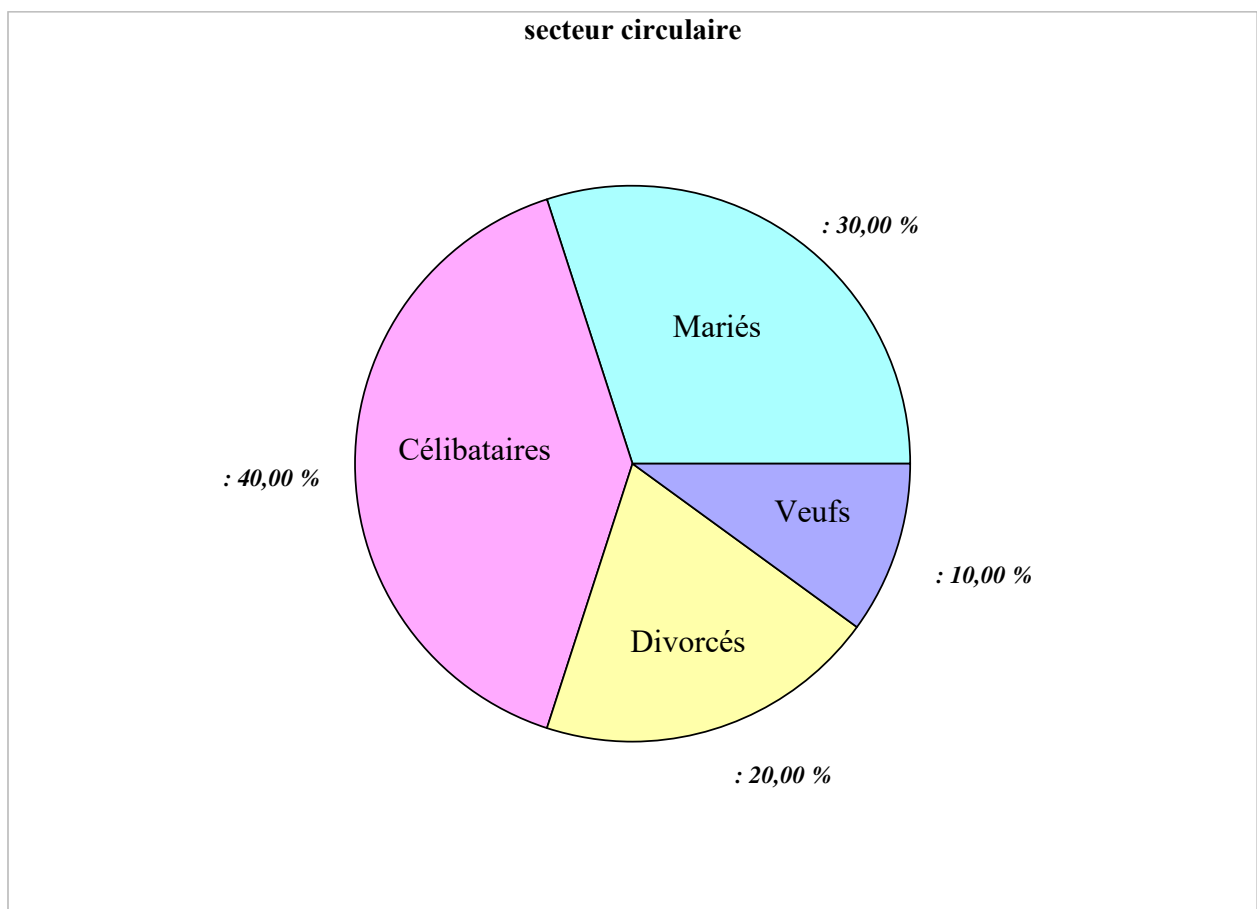
**NB** : pour le cercle tout entier le secteur angulaire  $\alpha_i$  est :  $\alpha_i = f_i \times 360$

$$\alpha_1 = 108^\circ$$

$$\alpha_2 = 144^\circ$$

$$\alpha_3 = 72^\circ$$

$$\alpha_4 = 36^\circ$$



**2- Cas d'un caractère quantitatif discret :**

**a- Etude du caractère nombre de frère dans un tableau statistique**

L'étude du caractère nombre de frère dans une classe de 12è a donné les résultats suivants : 4 ; 2 ; 2 ; 1 ; 3 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 2 ; 1.

Regrouper ces données dans un tableau statistique.

Modalités $x_i$	Effectif $n_i$	Fréquence $f_i$	Effectif cumulé croissant	Effectif cumulé décroissant	Fréquence croissante	Fréquence Décroissante
1	2	0,2	2	10	0,2	1
2	4	0,4	6	8	0,6	0,8
3	3	0,3	9	4	0,9	0,4
4	1	0,1	10	1	1	0,1
Total	10	1	/	/	/	/

Le regroupement en tableau se fait de la même manière que les caractères qualitatifs. La seule différence est que les modalités sont des nombres s'écrivant dans l'ordre croissant. A ce tableau, on peut ajouter les colonnes, les effectifs cumulés croissants et décroissants ainsi que les fréquences cumulés croissantes et de croissantes. Les valeurs du caractère étant rangées dans l'ordre croissant, on appelle :

**- Effectif cumulé croissant de  $x_i$  :**

La somme des modalités inférieures ou égales à  $x_i$  c'est-à-dire :

$$n_i = (n_1 + n_2) + \dots + n_i$$

$$n_1 = n_1 = 2$$

$$n_2 = n_1 + n_2 = 2 + 4 = 6$$

$$n_3 = n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 4 + 3 = 9$$

$$n_4 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 2 + 4 + 3 + 1 = 10 \text{ et la fréquence croissante cumulé est } f_i = \frac{n_i}{N = 10}$$

**- Effectif cumulé décroissant de  $x_i$  :**

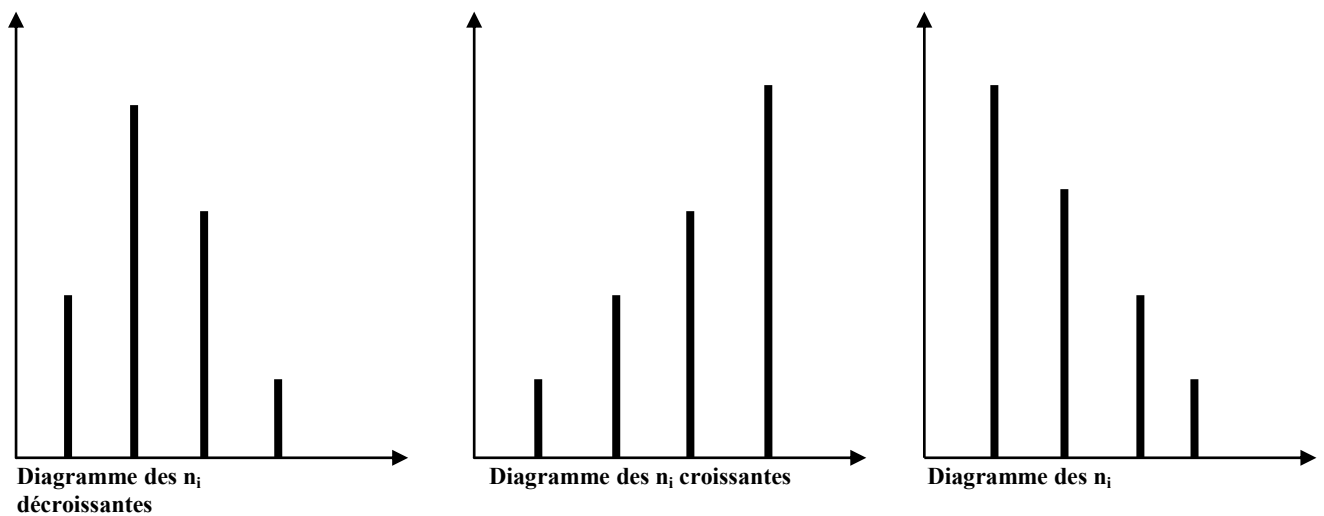
On appelle effectif cumulé décroissant de la modalité  $x_i$ , la somme des modalités qui le succède ; c'est-à-dire  $n_i = n_i + n_{i+1} + \dots + n_k$  et la fréquence cumulée

décroissante est :  $f_i = \frac{n_i}{N}$

### **b- Diagramme en bâton des effectifs cumulés :**

Dans un repère orthogonal, on place sur l'axe des abscisses les  $x_i$  (modalités) ; et sur l'axe des ordonnées les effectifs  $n_i$  cumulés croissants ou décroissants.

Pour construire le diagramme en bâton des effectifs cumulés croissants ou décroissants, on place les points  $A_i(x_i ; 0)$  et  $B_i(x_i ; n_i)$  et on construit en trait plein les segments  $[A_i B_i]$ .



### **3- Cas des caractères quantitatifs continus :**

#### **a- Tableau statistique :**

Dans le cas d'un caractère quantitatif continu, les valeurs du caractère sont regroupées dans un intervalle de même amplitude  $[x_i; x_{i+1}]$  (soit appelées des classes).

Exemple : l'étude du caractère taille sur 30 élèves d'une classe de 12<sup>e</sup> a donné les résultats suivants en cm :

175	165	172	171	168
170	178	170	171	173
170	170	168	150	160
165	175	179	180	170
173	165	168	176	150
174	158	153	144	172

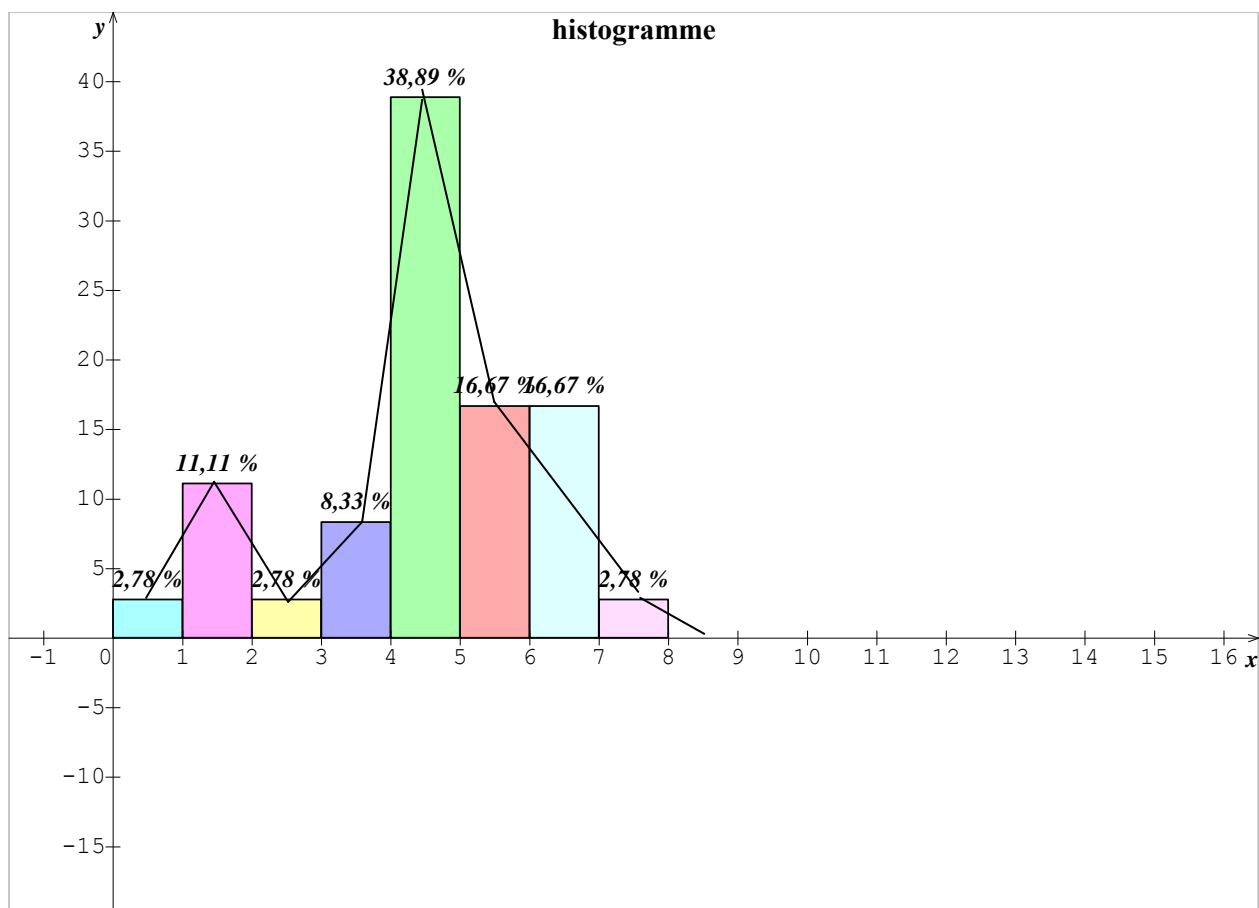
Dresser le tableau des effectifs et des fréquences cumulées.  
 Prenons des classes d'amplitude 6.

Classes	Effectif	Centre des classes	$n_i$	$n_i$ croissante	$f_i$
$[x_i ; x_{i+1}]$	$n_i$	$c_i$			
[144 ; 150]	1	147	1	30	0,633
[150 ; 156]	4	153	5	29	0,166
[156 ; 162]	1	159	6	25	0,2
[162 ; 168]	3	165	9	24	0,3
[168 ; 174]	14	171	23	21	0,76
[174 ; 180]	6	177	29	7	0,966
[180 ; 186]	1	183	30	1	1
Total	30	—	—	—	—

On appelle centre ( $c_i$ ) de la classe  $(x_i, x_{i+1})$  le nombre  $c_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

Pour les calculs, nous conviendrons de prendre la valeur  $c_i$  commune à tous les individus de la classe  $(x_i, x_{i+1})$

### Histogramme des effectifs (représentation graphique)



Dans un repère cartésien, les valeurs des bornes de classe sont portées en abscisse et les effectifs (ou fréquence) sont portés en ordonnées.

Pour chaque classe  $[x_i ; x_{i+1}[$ , on trace le rectangle de base  $[x_i ; x_{i+1}[$ , et de hauteur ( $n_i$  ou  $f_i$ ).

La représentation graphique obtenue est appelée : **Histogramme des effectifs ou des fréquences.**

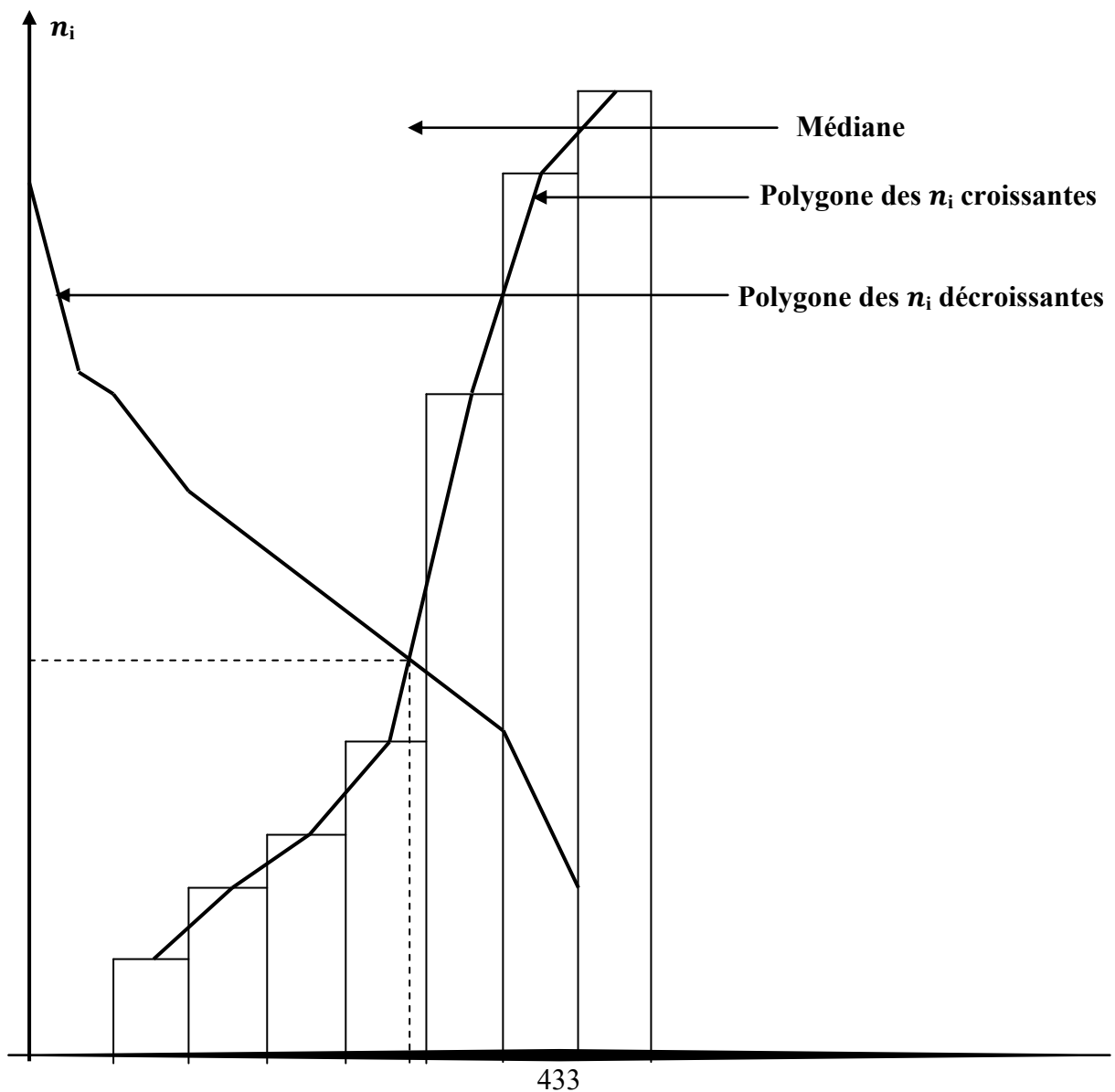
### Les polygones :

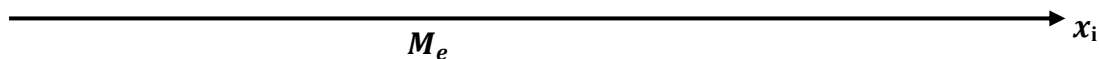
On appelle polygones les effectifs, la ligne brisée joignant les points  $(c_i ; n_i)$ .

On appelle polygone des effectifs cumulés croissants, la ligne brisée passant par les points d'abscisse et d'ordonnées  $(x_{i+1} ; n_i)$ .

On appelle polygone des effectifs cumulés décroissants, la ligne brisée joignant les points de coordonnées  $(x_i ; n_{i\blacktriangleright})$

Les deux polygones des effectifs cumulés croissant et décroissant se coupent en un point d'abscisse  $M_e$  : ( $M_e$  est la médiane).





### III- Eléments caractéristiques d'une série statistique:

#### 1- Les caractéristiques de position :

##### a- Le mode ou dominantes :

Le mode d'une série statistique est la valeur du caractère qui a le plus grand effectif (ou fréquence). On le note  $M_o$ .

**Exemple :** Déterminer le mode de la série suivante :

10, 7, 8 ; 5, 2, 7 ; 4, 4, 5 ; 7, 10

Ici : le mode est 7 (car 7 est compté plus que les autres)

##### b- La médiane d'une série :

Définition : La médiane d'une série est la valeur du caractère qui divise la série en deux séries de même effectif. On la note  $M_e$ .

**Exemple 1 :** soit la série suivante :

11, 7, 8, 3, 5, 6, 2

Déterminer la médiane. Pour cela écrivons la série dans l'ordre croissant :

2, 3, 5, **6**, 7, 8, 11

La médiane est donc  $M_e = 6$

**Exemple 2 :** soit la série suivante : 12, 3, 5, 7, 8, 6, 11, 4

Déterminer la médiane de cette série :

3, 4, 5, **6, 7**, 8, 11, 12. Par convention.

Ici la médiane est  $M_e = \frac{6+7}{2} = 6,5$

La médiane d'une série statistique est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif cumulé

$$n_i = \frac{N}{2}$$

**NB :**

N désignant les valeurs de la série statistique rangée dans l'ordre croissant, on a :

-Si N est impaire, la médiane correspond à la valeur de rang  $\frac{N+1}{2}$

-Si N est paire, la médiane correspond à la valeur de rang  $\frac{N}{2}$  et  $\frac{N}{2}+1$

Détermination de la médiane dans le cas d'un caractère continu.

**Exemple :**

Déterminer la médiane dans la distribution des tailles de classe de 12<sup>ème</sup> dont les données sont dans le tableau en 3°).

La médiane  $M_e$  correspond à l'effectif cumulé  $\frac{N}{2} = 15$

$M_e \in [168 ; 174[$  est la classe médiane.

$x_i : 168 < M_e < 174$

$n_i : 9 < 15 < 23$

$$\frac{M_e - 168}{174 - 168} = \frac{15 - 9}{23 - 9} \Rightarrow M_e = 170,57$$

**c- Moyenne arithmétique d'une série :**

**Définition :** La moyenne arithmétique d'une série est le quotient de la somme de ces valeurs par l'effectif total. Si  $x_1, x_2, \dots, x_k$  sont les valeurs et  $n_1, n_2, \dots, n_k$  sont les effectifs alors la moyenne est notée :

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \frac{1}{N} \sum_i^k n_i x_i$$

**NB :** Dans le cas d'un caractère continu, les  $x_i$  sont remplacés par les  $c_i$  (centre de classe  $[x_i, x_{i+1}]$ )

**Exemple :** Soit le tableau statistique donné par :

$x_i$	$n_i$	$n_i \times x_i$
7	1	7
8	3	24
9	5	45
10	4	40
11	2	22
12	2	24
13	4	52
14	1	14
15	2	30
16	0	0
17	1	17

Total	25	275

## 2- Les caractéristiques de dispersion :

### a- Amplitude ou étendue d'une série :

L'amplitude d'une série est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur du caractère.

**Exemple :** Déterminer l'amplitude des séries suivantes :

a)  $-5; 4; 3; 1; 10; 12$  / Rep. :  $(12) - (-5) = 12 + 5 = 17$

b)  $5; 10; 9; 20; 40; 30; 8$  / Rep :  $(40) - (5) = 40 - 5 = 35$

### b- Les quartiles

Les valeurs du caractère étant rangées dans l'ordre croissant ou décroissant, on appelle quartiles les 3 valeurs qui divisent la série en 4 groupes de même effectifs : on note :  $Q_1$  ;  $Q_2$  ;  $Q_3$  ces 3 valeurs

**Exemple :** Déterminer les quantiles de la série suivante :

9 ; 12 ; 5 ; 11 ; 7 ; 15 ; 1 ; 2 ; 18 ; 20 ; 16 ; 19 ; 30 ; 40 ; 34

Rep : 1, 2; 5 ; **7** ; 9 ; 11 ; 12 ; **15** ; 16 ; 18 ; 19 ; **20** ; 30 ; 34 ; 40

$Q_1$

$Q_2$

$Q_3$

Déterminer les quantiles de la série suivante : ci-dessus. On a donc  $Q_1 = 7$  ;  $Q_2 = 15$  ;  $Q_3 = 20$   
 $Q_2$  est la médiane, il est appelé quantile centrale  
 $Q_1$  et  $Q_3$  sont les quantiles extrémités

**NB :**  $Q_1$  est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif cumulé  $n_i = \frac{N}{4}$

$Q_3$  est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif cumulé  $n_i = \frac{3N}{4}$

$Q_3 - Q_1$  est l'écart interquartile

$\frac{Q_3 - Q_1}{Q_2}$  Est l'écart interquartile relatif.

**c- Variance ou fluctuation :**

La variance d'une série est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne c'est-à-dire :  
Si  $x_1, x_2, \dots, x_k$  sont les valeurs du caractère et  $n_1 ; n_2 ; \dots ; n_k$  les effectifs.

La variance est notée :  $V = \frac{1}{N} \sum_i^k n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$  ou encore on la note :  $V = \frac{1}{N} \sum_i^k (n_i x_i - \bar{x})^2$

**d- L'écart type :**

C'est la racine carrée de la variance, on la note  $\sigma$  tel que  $\sigma = \sqrt{v} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i^k n_i x_i^2 - (\bar{x})^2}$

**EXERCICE 1 :**

Soit le tableau de la série statistique correspondant aux pointures des chaussures de 48 élèves.

$x_i$	$n_i$
36	5
37	11
38	12
39	8
40	4
41	3
42	4
43	1

- 1) Quelle est la population ?
- 2) le caractère étudié ?
- 3) Déterminer le mode
- 4) Déterminer la pointure moyenne

**Solution**

- 1- La population est un ensemble d'élèves.
- 2- Le caractère est : la pointure des chaussures.
- 3- Le mode est : 38

4- La moyenne des pointures :  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1849}{48} \Rightarrow \bar{x} = 38,52$$

$x_i$	$n_i$	$n_i x_i$	$x_i^2$	$n_i x_i^2$
36	5	180	1296	6480
37	11	407	1369	15059
38	12	456	1444	17328
39	8	312	1521	12168
40	4	160	1600	6400
41	3	123	1681	5043
42	4	168	1761	7056
43	1	43	1849	1849
Total		1849		71383

### **EXERCICE 2 :**

A l'occasion d'un concours de pêche, les 250 poissons pêchés ont été mesurés et leurs tailles ont été regroupées dans le tableau suivant :

Classe des tailles (cm)	Effectifs	$n_i$	$c_i$	$n_i \cdot c_i$
[10, 20[	16	16	15	240
[20, 30[	26	42	25	1050
[30, 40[	36	78	35	2730
[40, 50[	52	130	45	5850
[50, 60[	38	168	55	9240
[60, 70[	30	198	65	12870
[70, 80[	20	218	75	16350
[80, 90[	12	230	85	19530
[90, 100[	10	240	95	22800
[100, 110[	6	246	105	25830
[110, 120[	4	250	115	28750

**N.B** : Les parties complétées sont :

$$n_i : n_1 = 16; n_2 = 16 + 26 = 42, n_3 = 16 + 26 + 36 = 78 \dots\dots$$

$$c_i : c_1 = \frac{10+20}{2} = 15 ; c_2 = \frac{20+30}{2} = 25 ; c_3 = \frac{30+40}{2} = 35$$

$$n_i \cdot c_i : n_1 \cdot c_1 = 16 \times 15 = 240 ; n_2 \cdot c_2 = 42 \times 25 = 650 ; n_3 \cdot c_3 = 78 \times 35 = 1260$$

## Évaluation

- a- compléter le tableau :
- b- déterminer la population, le caractère et la nature du caractère
- c- déterminer les quartiles
- d- déterminer la moyenne et l'écart type.

## Solution

a- Complétons le tableau (voir tableau)

b- La population : les poissons

- le caractère : la taille
- nature du caractère : caractère quantitatif continu

c- Déterminons les quartiles :

$$Q_1 n_i = \frac{N}{4} = \frac{250}{4} = 62,5 \quad \text{alors} \quad Q_1 \in [30,40[ \Leftrightarrow 42 < 62,5 < 78$$

$$\frac{Q_1 - 30}{40 - 30} = \frac{62,5 - 42}{78 - 42} \Leftrightarrow \frac{Q_1 - 30}{10} = 0,56 \Rightarrow Q_1 = 35,6 \quad \text{or le } n_i =$$

$$\frac{N}{2} = \frac{250}{2} = 125 \Leftrightarrow 40 < Q_2 < 50$$

$$n_i = \frac{3N}{4} = \frac{3 \times 250}{4} = 187,5$$

$$Q_3 \in [60 - 70[$$

d- Déterminons la moyenne et l'écart type

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{250} \times 13090 = 52,36$$

**L'écart type :**

- Variance  $V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - (\bar{x})^2 = \frac{1}{250} \cdot 1063064 - (52,36)^2$
- Ecart type :  $\sigma = \sqrt{v} = \sqrt{1510,6864} = 38,86$

$$\sigma = 38,86$$

## IV- Série statistique à double caractères x et y

### 1- Nuage de points associé :

Le plan étant muni d'un repère orthogonal, on appelle nuage de points associé, l'ensemble des points  $M_{ij}$  de coordonnées  $(x_i, y_i)$ .

### 2- Point moyen d'un nuage de points :

On appelle point moyen d'un nuage de points représentant une série, le point G de coordonnées  $(X_G ; Y_G)$  où

$$\begin{cases} X_G = \bar{X} = \frac{\sum x_i}{N} \\ \text{et} \\ Y_G = \bar{Y} = \frac{\sum y_i}{N} \end{cases}$$

### 3- Covariance :

La covariance d'une série statistique à deux caractères x et y, de moyennes respectives  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  et d'effectif total N est le nombre réel noté Cov (X, Y) ou  $\sigma_{x,y}$  tel que :

$$\text{Cov}(x,y) = \frac{\sum n_{ij}(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{\text{Effectif total}}$$

ou

$$\text{Cov}(x,y) = \frac{\sum n_{ij}x_i y_i}{\text{Effectif total}} - \bar{X} \cdot \bar{Y}$$

### 4- Droit de régression de y en x :

La droite (D) de régression de y en fonction de x passe par le point G  $(\bar{X}, \bar{Y})$ , point moyen du nuage de point son équation est  $y = ax + b$  avec :

$$a = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{V(X)} \text{ et } b = \bar{Y} - a\bar{X}$$

où  $V(X)$  est la variance et a pour formule :  $V(X) = \frac{\sum X_i^2}{N} - \bar{X}^2$

### 5- Droite de régression de X en Y :

La droite (D') de régression de X en fonction de Y passe par le point  $G(\bar{X} ; \bar{Y})$ , point moyen du nuage de point. Son équation est  $x = a'y + b'$  avec :

$$a' = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{V(Y)} \text{ et } b' = \bar{X} - a'\bar{Y}$$

où  $V(Y)$  est la variance et a pour formule :  $V(Y) = \frac{\sum Y_i^2}{N} - \bar{Y}^2$

### Remarque :

$G(\bar{X} ; \bar{Y})$  appartient aux deux droites de régression pour tracer ces droites, il suffit donc de déterminer un autre point vérifiant l'équation.

### 6- Corrélation linéaire

Deux variables statistiques X et Y sont dites en corrélation linéaire lorsque la courbe de régression de Y en X et la courbe de régression de X en y sont des droites.

### 7- Coefficient de corrélation linéaire :

#### a) Définition :

On appelle coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique double de caractère (X ;

Y), le nombre réel  $r$  définie par  $r = \frac{\text{Cov}(X;Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}}$

#### b) Propriétés de r :

$P_1$  : Si  $0,87 \leq |r| \leq 1$ , on considère que la corrélation linéaire entre les deux variables est forte.

$P_2$  : si  $r = 1$ , on dit que la corrélation est parfaite.

### 8- Estimation et prévision

Lorsqu'il existe une bonne corrélation linéaire, il est possible de prévoir la valeur de y connaissant celle de x, en utilisant l'équation de la droite de régression de y en x ; et vice-versa.

### Exercices d'application :

#### Exercice 1 :

Un pharmacien observe, durant les 6 premiers mois de l'ouverture de son officine, le chiffre d'affaire en millions de francs CFA. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau suivant où x désigne le numéro du mois et y le chiffre d'affaires – correspondant.

X	1	2	3	4	5	6
Y	12	13	15	19	21	22

- 1- Calculer  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  les moyennes des variables X et Y.
- 2- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique double ainsi que le point G. on prendra : (Unités : 2 cm en abscisses et 1 cm pour 2 unités en ordonnées).
- 3- Calculer la variance V(X) de x et la covariance Cov(X,Y) de x et y.

**N.B** : Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

- 4- Démontrer qu'une équation de la droite de régression (D) de y en x est :  $y = \frac{78}{35}x + 9,2$
- 5- Tracer la droite (D).
- 6- En utilisant la droite (D), calculer une estimation du chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7<sup>ème</sup> mois.

#### Exercice 2 :

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente (en milliers de francs) de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci – dessous.

Prix de vente en milliers de francs xi	9	10	11	12	14	15	16	17
Nombre d'acheteurs potentiels yi	180	160	150	130	100	90	80	70

- 1- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique. On prendra pour unité :  
1 cm pour 1000 francs en abscisse  
1 cm pour 10 acheteurs en ordonnée.
- 2- Déterminer les coordonnées du point G
- 3- Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r puis interpréter le résultat obtenu.
- 4- Déterminer une équation de la droite (D) de régression de y en x. Tracer (D)
- 5- Estimer graphiquement le prix maximum à fixer pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels.
- 6- En utilisant l'équation de la droite (D) de régression de y en x, puis déterminer :

- a) Le nombre d'acheteurs à prévoir si le prix est fixé à 13 000 F
- b) Le prix à fixer pour que le nombre d'acheteurs potentiels soit supérieur à 250.

**Solution**

**Exercice 1**

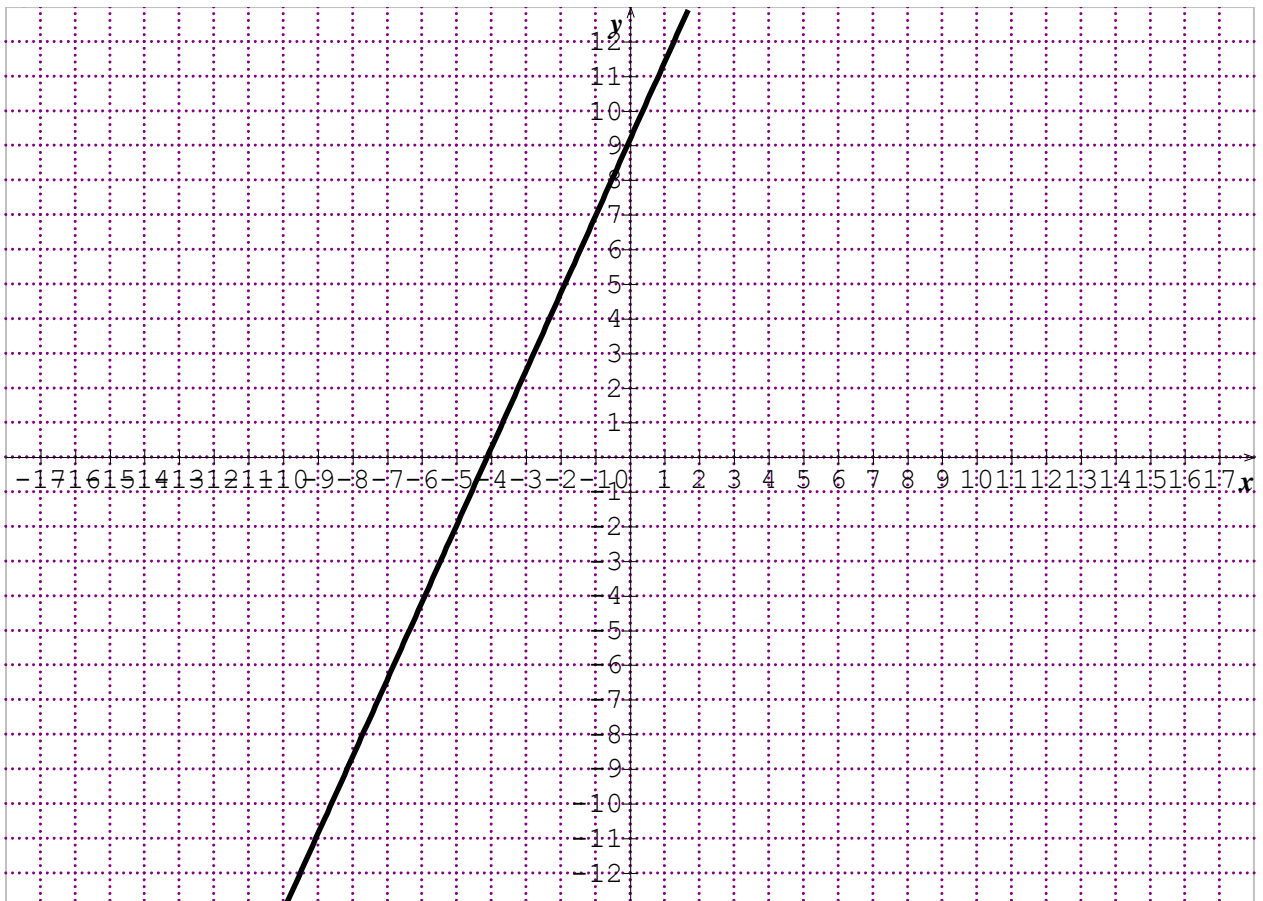
Pour le calcul, on pourra s'aider du tableau ci-dessous :

$X_i$	$Y_i$	$X_i, y_i$	$X_i^2$	$Y_i^2$	
1	12	12	1	144	
2	13	26	4	676	
3	15	45	9	225	
4	19	76	16	361	
5	21	105	25	441	
6	22	132	36	484	
21	102	396	91	2 331	Total

1- Calcul de  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  les moyennes des variables x et y.

$$\bar{X} = \frac{\sum_1^6 x_i}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5 ; \bar{Y} = \frac{\sum_1^6 y_i}{6} = \frac{102}{6} = 17$$

2- Le nuage de points de la série statistique ainsi que le point moyen G.



1- Calcul de la variante  $V(x)$  de  $x$  et la covariance  $Cov(x, y)$  de  $x$  et  $y$ .

$$V(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{70}{24} = \frac{35}{12}; \text{ cov}(X; Y) = \frac{396}{6} - \left(\frac{7}{2} \times 17\right) = \frac{39}{6} = \frac{13}{2}$$

2- Montons qu'une équation de la droite de régression (D) de  $y$  en  $x$  est :  $y = \frac{78}{35}x + 9,2$

$$a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{35}{12}} = \frac{13}{2} \times \frac{12}{35} = \frac{156}{70} = \frac{78}{35} \text{ et } b = \bar{Y} - a\bar{X} = 17 - \frac{78}{35} \times \frac{7}{2} = 9,2$$

donc l'équation de la droite de régression est :  $y = \frac{78}{35}x + 9,2$

3- Tracé de la droite (D). (Voir nuage de points)

La droite (D) passe par le point moyen point G (3,5 ; 17) et par un autre point que l'on détermine en remplaçant dans l'équation de la droite de régression,  $x$  par une valeur que l'on choisira.

Par exemple, si  $x = 0$ , on obtient  $y = 9,2$ . (D) passe donc également par le point A(0 ; 9,2).

4- Calcul d'une estimation du chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7<sup>ème</sup> mois. Le 7<sup>ème</sup> mois correspond à  $x = 7$ . Il s'agit de déterminer la valeur de  $y$  associée à cette valeur de  $x$ .

Pour  $x = 7$ , on a :  $y = \frac{78}{35} \times 7 + 9,2 = 24,8$  millions de francs CFA.

**3°) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire  $r$ . interpréter le résultat obtenu.**

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \frac{\sum X_i \cdot Y_i}{n} - \bar{X} \cdot \bar{Y} \\ &= \frac{9 \times 180 + 10 \times 160 + 11 \times 150 + 12 \times 130 + 14 \times 100 + 15 \times 90 + 16 \times 80 + 17 \times 70}{8} - 13 \times 120 \end{aligned}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = -103,75$$

$$r = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$$

$$V(X) = \frac{\sum X_i^2}{N} - \bar{X}^2 = \frac{9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2}{8} - 13^2$$

$$V(X) = 7,499$$

$$V(Y) = \frac{\sum Y_i^2}{N} - \bar{Y}^2 = \frac{180^2 + 160^2 + 150^2 + 130^2 + 100^2 + 90^2 + 80^2 + 70^2}{8} - 120^2$$

$$V(Y) = 1450,003$$

$$r = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{-103,75}{\sqrt{7,499 \times 1450,003}} = -0,995$$

$0,87 \leq |r| \leq 1$  : il existe alors une forte corrélation linéaire entre les variables X et Y. L'on peut donc faire un ajustement linéaire entre X et Y.

#### 4°) Equation de la droite (D) de régression de y en x.

$$(D) : y = ax + b$$

$$a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)} = \frac{-103,75}{7,499} = -13,88$$

$$\bar{Y} = a\bar{x} + b \Rightarrow b = \bar{y} - a\bar{x} = 120 - (-13,88) \times 13 = 199,83$$

$$(D) : y = -13,88x + 299,83$$

Tracé de (D) : (D) passe par le point moyen G(13,120), déterminons un second point en remplaçant par exemple x par 10. On trouve y = 161,03. On obtient : A (10 ; 161,03)

**5°) Pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels, on lit graphiquement que le prix à fixer ne doit pas dépasser 18 000 francs.**

6°) a°) Le nombre d'acheteurs à prévoir, si le prix est fixé à 13 000 F, correspond à x = 13  
 $y = -13,88 \times 13 + 299,83 = 119,39 \approx 119$

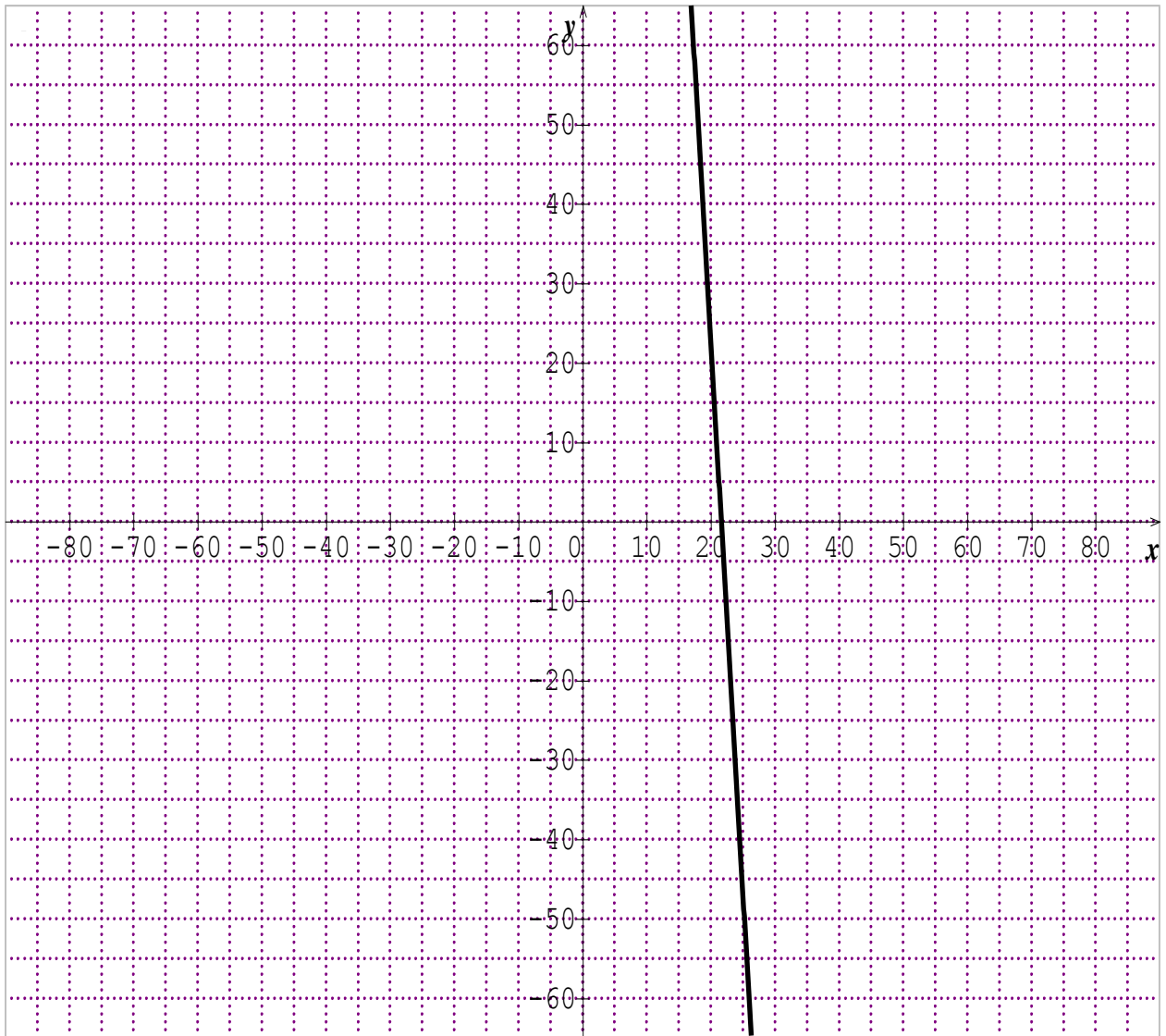
b°) Il s'agit de déterminer x pour y = 250.

$$y = -13,88x + 299,83 \Rightarrow x = \frac{y-299,83}{-13,88}$$

$$\text{Pour } y = 250, \text{ on a : } x = \frac{250-299,83}{-13,88} = 3,59 \text{ milliers de francs} = 3590 \text{ F}$$

#### **Exercice 2 :**

- 1- Représentation graphique du nuage de points de cette série statistique (unité : 1 cm pour 1000 francs en abscisse, 1 cm pour 10 acheteurs en ordonnée).



2- Déterminons les coordonnées du point G.

$$\bar{X} = \frac{\sum_1^8 x_i}{8} = \frac{9+10+11+12+14+15+16+17}{8} = 13$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_1^8 y_i}{8} = \frac{180+160+150+130+100+90+80+70}{8} = 120$$

} => G(13, 120)

3-Détermination du coefficient de corrélation linéaire r .

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov} = \frac{\sum X_i \cdot Y_i}{N} - \bar{X} \cdot \bar{Y}$$

$$\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = \frac{9 \cdot 180 + 10 \cdot 160 + 11 \cdot 150 + 12 \cdot 130 + 14 \cdot 100 + 15 \cdot 90 + 16 \cdot 80 + 17 \cdot 70}{8} - 13 \cdot 120$$

$$\text{Cov}(X, Y) = -103,75$$

$$r = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}}$$

$$V(X) = \frac{\sum X_i^2}{N} - \bar{X}^2 = \frac{9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2}{8} - 13^2$$

$$V(X) = 7,499$$

$$V(Y) = \frac{\sum Y_i^2}{N} - \bar{Y}^2 = \frac{180^2 + 160^2 + 150^2 + 130^2 + 100^2 + 90^2 + 80^2 + 70^2}{8} - 120^2$$

$$V(Y) = 1450,003$$

$$r = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}} = \frac{-103,75}{\sqrt{7,499.1450,003}} = -0,995$$

$0,87 \leq |r| \leq 1$  : il existe alors une forte corrélation linéaire entre les variations X et Y. linéaire

L'on peut donc faire un ajustement linéaire entre X et Y.

4- Equation de la droite (D) de régression de Y en X

$$(D) : y = ax + b$$

$$A = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)} = \frac{-103,75}{7,499} = -13,88$$

$$\text{Alors on a } \bar{y} = a\bar{x} + b \Rightarrow b = \bar{y} - a\bar{x} = 120 - (-13,88) \times 13 = 299,83$$

$$(D) : y = -13,88x + 299,83$$

Tracé de (D) : (D) passe par le point moyen G (13 ; 120). Déterminons un second en remplaçant par exemple x par 10. On trouve y = 161,03. On obtient : A (10 ; 161,03)

5- Pour qu'il ait au moins 50 acheteurs potentiels, on lit graphiquement que le prix à fixer ne doit pas dépasser 18000 francs.

6- a) le nombre d'acheteurs à prévoir, si le prix est fixé à 13000 F, correspond à x = 13.

$$Y = -13,88 \times 13 + 299,83 = 119,39$$

b) il s'agit de déterminer x pour y = 250

$$Y = -13,88x + 299,83 \text{ alors } x = \frac{y - 299,83}{-13,88}$$

$$\text{Pour } y = 240, \text{ on a : } x = \frac{250 - 299,83}{-13,88} = 3,59 \text{ milliers de franc} = 3590 \text{ F}$$

# EXERCICES

## EXERCICE 1 :

Soit tableau de la série statistique correspondant aux pointures des chemises de 48 militaires.

$x_i$	36	37	38	39	40	41	42	43
$n_i$	5	11	12	8	4	3	4	1

- 1) Déterminer la population et le caractère étudié.
- 2) Déterminer le mode des chemises
- 3) Calculer la pointure moyenne des chemises
- 4) Calculer la variance et l'écart – type de cette série.

## EXERCICE 2 :

L'étude statistique faite sur la taille des voitures de la société Renault a donné les résultats suivants :

Classes $[x_i ; x_{i+1}[$	[144 ; 150[	[150 ; 156[	[156 ; 162[	[162 ; 168[	[168 ; 174[	[174 ; 180[	[180 ; 186[
Effectifs $n_i$	1	4	1	3	14	6	1

- 1) Dresser el tableau des centres ci .
- 2) Dresser le tableau des effectifs et des fréquences cumulées (croissants et décroissants).
- 3) En déduire l'histogramme des effectifs ( $n_i$ ) puis celle effectifs ( $n_i$  et  $n_j$ ).

## EXERCICE 3 :

Soit la série suivante : 3 ; 8 ; 7 ; 11 ; 5 ; 13 ; 15 ; 10 ; 2 ; 17 ; 1 ; 20 ; 12.

- 1) Déterminer la médiane et les quartiles.
- 2) Faites la représentation en boîte de cette série.

## EXERCICE 4 :

Une agence de voyage propose 21 voyages organisés dont voici les tarifs en euros :

152 ; 320 ; 250 ; 320 ; 137 ; 183 ; 137 ; 152 ; 244 ; 122 ; 190 ; 139 ; 202 ; 285 ; 137 ; 180 ; 143 ; 190 ; 137 ; 180 ; 190.

- 1) Calculer la moyenne et l'écart type de la série des prix. Quel est le premier et le troisième quartile, la médiane ?
- 2) Ne rentrant pas dans ses frais, l'agence hésite entre deux solutions : augmenter tous les tarifs de 190 euros ou doubler tous les tarifs. Donner pour chacune des solutions la moyenne et l'écart – type de la nouvelle série des prix. Que deviennent les quartiles et la médiane ?
- 3) Une des deux solutions est – elle plus avantageuse financièrement pour l'agence ? Tracer les deux diagrammes en boîte correspondants.

### **EXERCICE 5 :**

Lors d'un concours d'entrée à l'école statistique, la moyenne générale des 600 candidats a été de 11,4 sur 20. Il y a 300 places au concours. Hélène a eu une moyenne de 12. Pourtant elle a échoué. Expliquer ce résultat.

### **EXERCICE 6 :**

Une série statistique a pour effectif 40. Sa moyenne est égale à 15,75 et son écart – type à 11,438. On ajoute à cette série une 41<sup>ème</sup> valeur égale à 18. Calculer la moyenne et l'écart – type de la nouvelle série.

### **EXERCICE 7 :**

On a relevé le montant en euros de 100 chèques déposés dans un commerce dans une journée. Voici le tableau obtenu : les chèques ont été regroupés en fonction de leur montant par classes dont l'amplitude est 15 euros.

Montant des chèques	Effectif	Fréquence	Fréquence cumulée croissante
[0,15[	20		
[15,30[	9		
[30,45[	19		
[45,60[	27		
[60,75[	18		
[75,90[	6		
[90,105[	1		
Total			

- 1) compléter le tableau
- 2) soit  $s$  le montant de l'ensemble des 100 chèques. Donner un encadrement de  $S$ . En déduire un intervalle  $I$  tel que le montant moyen des chèques appartienne à  $I$ .
- 3) pour estimer la moyenne d'une série statistique où les valeurs ont été regroupées en classes de même amplitude, on procède souvent de la manière suivante : on remplace chaque classe par son centre et on calcule la moyenne de la série des centres (avec les mêmes effectifs).

Faire le calcul pour la série ci-dessus. Vérifier que la moyenne obtenue est le centre de l'intervalle  $I$  trouvé à la question précédente.

- 4) Quelle est la classe pour laquelle la fréquence cumulée croissante passe la « barre » des 50 % ? Justifier pourquoi on appelle cette classe la classe médiane.

**Exercice 8 :** ( non corrigé)

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente (en milliers de francs) de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci – dessous.

Prix de vente en milliers de francs $x_i$	9	10	11	12	14	15	16	17
Nombre d'acheteurs potentiels $y_i$	180	160	150	130	100	90	80	70

1- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique. On prendra pour unité :

1 cm pour 1000 francs en abscisse

1cm pour 10 acheteurs en ordonnée.

2- Déterminer les coordonnées du point G

3- Déterminer le coefficient de corrélation linéaire  $r$  puis interpréter le résultat obtenu.

4- Déterminer une équation de la droite (D) de régression de  $y$  en  $x$ . Tracer (D)

5- Estimer graphiquement le prix maximum à fixer pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels.

6- En utilisant l'équation de la droite (D) de régression de  $y$  en  $x$ , puis déterminer :

a) Le nombre d'acheteurs à prévoir si le prix est fixé à 13 000 F

b) Le prix à fixer pour que le nombre d'acheteurs potentiels soit supérieur à 250.

## Exercice 1

Soit tableau de la série statistique correspondant aux pointures des chemises de 48 militaires.

$x_i$	36	37	38	39	40	41	42	43
$n_i$	5	11	12	8	4	3	4	1

- 5) Déterminer la population et le caractère étudié.
- 6) Déterminer le mode des chemises
- 7) Calculer la pointure moyenne des chemises
- 8) Calculer la variance et l'écart – type de cette série.

## EXERCICE 2 :

L'étude statistique faite sur la taille des voitures de la société Renault a donné les résultats suivants :

Classes $[x_i ; x_{i+1}[$	[144 ; 150[	[150 ; 156[	[156 ; 162[	[162 ; 168[	[168 ; 174[	[174 ; 180[	[180 ; 186[
Effectifs $n_i$	1	4	1	3	14	6	1

- 4) Dresser el tableau des centres ci .
- 5) Dresser le tableau des effectifs et des fréquences cumulées (croissants et décroissants).
- 6) En déduire l'histogramme des effectifs ( $n_i$ ) puis celle effectifs ( $n_i$  et  $n_j$ ).

## EXERCICE 3 :

Soit la série suivante : 3 ; 8 ; 7 ; 11 ; 5 ; 13 ; 15 ; 10 ; 2 ; 17 ; 1 ; 20 ; 12.

- 3) Déterminer la médiane et les quartiles.
- 4) Faites la représentation en boîte de cette série.

## EXERCICE 4 :

Une agence de voyage propose 21 voyages organisés dont voici les tarifs en euros :

152 ; 320 ; 250 ; 320 ; 137 ; 183 ; 137 ; 152 ; 244 ; 122 ; 190 ; 139 ; 202 ; 285 ; 137 ; 180 ; 143 ; 190 ; 137 ; 180 ; 190.

- 4) Calculer la moyenne et l'écart type de la série des prix. Quel est le premier et le troisième quartile, la médiane ?
- 5) Ne rentrant pas dans ses frais, l'agence hésite entre deux solutions : augmenter tous les tarifs de 190 euros ou doubler tous les tarifs. Donner pour chacune des solutions la moyenne et l'écart – type de la nouvelle série des prix. Que deviennent les quartiles et la médiane ?
- 6) Une des deux solutions est – elle plus avantageuse financièrement pour l'agence ? Tracer les deux diagrammes en boîte correspondants.

### **EXERCICE 5 :**

Lors d'un concours d'entrée à l'école statistique, la moyenne générale des 600 candidats a été de 11,4 sur 20. Il y a 300 places au concours. Hélène a eu une moyenne de 12. Pourtant elle a échoué. Expliquer ce résultat.

### **EXERCICE 6 :**

Une série statistique a pour effectif 40. Sa moyenne est égale à 15,75 et son écart – type à 11,438. On ajoute à cette série une 41<sup>ème</sup> valeur égale à 18. Calculer la moyenne et l'écart – type de la nouvelle série.

### **EXERCICE 7 :**

On a relevé le montant en euros de 100 chèques déposés dans un commerce dans une journée. Voici le tableau obtenu : les chèques ont été regroupés en fonction de leur montant par classes dont l'amplitude est 15 euros.

Montant des chèques	effectif	Fréquence	Fréquence cumulée croissante
[0,15[	20		
[15,30[	9		
[30,45[	19		
[45,60[	27		
[60,75[	18		
[75,90[	6		
[90,105[	1		
Total			

- 4) compléter le tableau
- 5) soit  $s$  le montant de l'ensemble des 100 chèques. Donner un encadrement de  $S$ . En déduire un intervalle  $I$  tel que le montant moyen des chèques appartienne à  $I$ .
- 6) pour estimer la moyenne d'une série statistique où les valeurs ont été regroupées en classes de même amplitude, on procède souvent de la manière suivante : on remplace chaque classe par son centre et on calcule la moyenne de la série des centres (avec les mêmes effectifs).

Faire le calcul pour la série ci-dessus. Vérifier que la moyenne obtenue est le centre de l'intervalle  $I$  trouvé à la question précédente.

- 4) Quelle est la classe pour laquelle la fréquence cumulée croissante passe la « barre » des 50 % ? Justifier pourquoi on appelle cette classe la classe médiane.

**Exercice 8 :** ( non corrigé)

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente (en milliers de francs) de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci - dessous.

Prix de vente en milliers de francs xi	9	10	11	12	14	15	16	17
Nombre d'acheteurs potentiels yi	180	160	150	130	100	90	80	70

7- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique. On prendra pour unité :

1 cm pour 1000 francs en abscisse

1 cm pour 10 acheteurs en ordonnée.

8- Déterminer les coordonnées du point G

9- Déterminer le coefficient de corrélation linéaire  $r$  puis interpréter le résultat obtenu.

10- Déterminer une équation de la droite (D) de régression de  $y$  en  $x$ . Tracer (D)

11- Estimer graphiquement le prix maximum à fixer pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels.

12- En utilisant l'équation de la droite (D) de régression de  $y$  en  $x$ , puis déterminer :

c) Le nombre d'acheteurs à prévoir si le prix est fixé à 13 000 F

d) Le prix à fixer pour que le nombre d'acheteurs potentiels soit supérieur à 250.

# Coniques

## Objectifs

### Ce chapitre vise à :

- Dédire des propriétés géométriques des coniques, différentes méthodes de construction de ces courbes ;
- Utiliser des outils analytiques, géométriques, complexes dans la résolution des problèmes.

## Savoirs et savoir-faire

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"><li>• Définition géométrique :<ul style="list-style-type: none"><li>- Définition par foyer et directrice</li><li>- Vocabulaire : foyers, directrices, excentricité, sommets, axe focal.</li><li>- Définition bifocale de l'ellipse et de l'hyperbole.</li></ul></li><li>• Equations cartésiennes :<ul style="list-style-type: none"><li>- Equations réduites d'une parabole, d'une ellipse et d'une hyperbole</li><li>- Eléments remarquable : paramètre, sommets, axe focal, foyers, directrices, asymptotes, demi- distance focale.</li></ul></li><li>• représentation graphique des coniques.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Déterminer l'équation réduite d'une conique :<ul style="list-style-type: none"><li>- A l'aide de la définition par foyer et directrice ;</li><li>- A l'aide de la définition bifocale ;</li><li>- Par un changement de repère (l'équation étant de la forme <math>ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0</math>)</li></ul></li><li>• Connaissant l'équation réduite d'une conique déterminer ses éléments remarquables.</li><li>• Représenter graphiquement une conique à l'aide de ses éléments remarquables.</li></ul>

## A) Généralité :

### Définition :

On appelle courbe du second degré, la représentation M dans le plan de l'ensemble des points

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ tels que : } Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0 \text{ où } |A| + |B| \neq 0$$

### Exemples :

1)  $-3x^2 + 5y^2 - xy - 7y - 2 = 0$  ; ici :  $a = -3$  ;  $B = 5$  ;  $c = 1$  ;  $d = 0$  ;  $E = -7$  et  $F = -2$

2)  $7x^2 + \frac{3}{7}y^2 - 8x + 9y = 0$  ; ici :  $A = 7$  ;  $B = \frac{3}{7}$  ;  $C = 0$  ;  $F = 0$  ;  $D = -4$  et  $E = \frac{9}{2}$

3)  $-\frac{4}{3}y^2 + 6y - xy - 7 = 0$  ; ici :  $A = D = 0$  ;  $B = -\frac{4}{3}$  ;  $C = -\frac{1}{2}$  ;  $E = 3$  et  $F = -7$

4)  $-x^2 + 6xy = 1$  ; ici :  $A = F = -1$  ;  $B = E = D = 0$  ;  $C = 3$

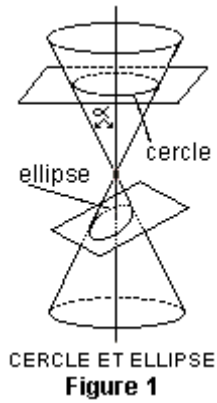
## B) coniques

### I INTRODUCTION ET PRÉSENTATION

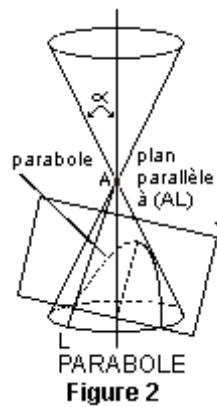
Coniques, courbes planes obtenues par l'intersection d'un cône de révolution avec un plan ne contenant pas le sommet du cône. Les coniques se rencontrent dans plusieurs domaines de la physique, notamment en optique et en mécanique céleste.

### II CLASSIFICATION DES CONIQUES

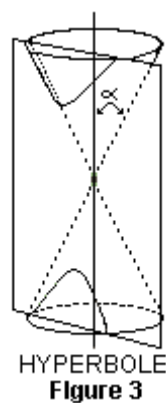
- a) Considérons un cône de révolution, et notons  $\alpha$  l'angle entre l'axe et la génératrice du cône. Si le cône est coupé par un plan qui forme avec l'axe un angle supérieur à  $\alpha$ , l'intersection est une courbe fermée appelée ellipse.



- b) Si le plan est perpendiculaire à l'axe, l'intersection est un cercle, que l'on considère comme un cas particulier d'ellipse. Si le plan coupe l'axe selon un angle égal à  $\alpha$ , de sorte que le plan est parallèle à la surface latérale du cône, l'intersection est une courbe ouverte appelée parabole.



Si le cône est coupé par un plan parallèle à son axe ou formant avec l'axe un angle inférieur à  $\alpha$ , l'intersection est une hyperbole.



Dans ce cas, les deux nappes du cône étant coupées par le plan, il en résulte que l'hyperbole a deux branches, qui sont chacune de longueur infinie.

### III DÉFINITION MÉTRIQUE

Les coniques étant des courbes planes, on peut les définir sans recourir à la figure tridimensionnelle du cône. Une de ces définitions fait appel aux notions de foyer et de directrice. Soient  $D$  une droite du plan,  $F$  un point du plan n'appartenant pas à  $(D)$ , et  $e$  un réel strictement positif. La conique de foyer  $F$  et de directrice  $(D)$  est l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $MF / MH = e$ , où  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(D)$  ( $MH$  est donc la distance de  $M$  à la droite  $D$ ).  $e$  est appelé l'excentricité de la conique.

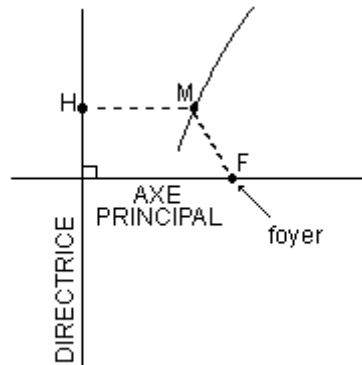


Figure 4

- Si  $e = 1$ , la conique est une parabole ;
- si  $e > 1$ , c'est une hyperbole ;
- si  $e < 1$ , il s'agit d'une ellipse.

Le cercle est une ellipse particulière dont les foyers seraient confondus, la directrice étant rejetée à l'infini. Son excentricité est nulle.

Toutes les coniques ont au moins un axe de symétrie : la perpendiculaire à la directrice passant par le foyer. L'intersection de la conique par cet axe s'appelle sommet (un pour la parabole, deux pour l'ellipse et l'hyperbole).

Voir cercle ; ellipse ; hyperbole ; parabole (mathématiques).

### IV ÉQUATIONS CARTÉSIENNES ET RÉDUITES

Dans un repère cartésien (voir coordonnées), les coniques ont une équation, appelée équation

cartésienne, de la forme :  $ax^2 + by^2 + cxy + dx + fy + g = 0$

Avec  $a, b, c, d, f$  et  $g$ , 6 réels (voir nombres),  $a, b$  et  $c$  étant non tous nuls.

Notons  $O$  le milieu de  $[S_1S_2]$ ,  $S_1$  et  $S_2$  étant les sommets de la conique (ellipse ou hyperbole). On appelle foyer secondaire  $F'$  le point symétrique de  $F$  par rapport au

point O. Considérons alors le repère orthonormé d'origine O et dont l'axe des abscisses est l'axe focal (droite contenant les foyers), orienté de O vers le foyer F (situé à la droite de O). Si la conique est une parabole, on choisit le repère ayant pour origine le sommet de la parabole, et pour axe des ordonnées l'axe de symétrie de la parabole. Dans ces repères appropriés, les équations des coniques, appelées équations réduites, deviennent :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ pour l'ellipse (} a \neq b \text{)} \\ \text{ou pour le cercle (} a = b \text{);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ pour l'hyperbole ;}$$

$$y^2 = 2px \text{ (} p \text{ réel strictement positif)} \\ \text{pour la parabole .}$$

La lettre  $p$  est appelée le paramètre de la parabole.

## V APPLICATIONS

Les coniques ont de nombreuses propriétés mathématiques et sont très fréquemment rencontrées en physique. Par exemple, en astronomie, d'après les lois de Kepler, la trajectoire d'un satellite naturel, tel qu'une planète ou une comète, est toujours une conique (*voir* orbite). En astronautique, il en va de même pour les satellites artificiels ou les sondes spatiales. En optique, on utilise les propriétés des coniques ou des surfaces qu'elles engendrent (notamment les paraboloïdes de révolution) pour construire des miroirs ou des antennes qui, par réflexion, concentrent la lumière ou des ondes électromagnétiques ou émettent celles-ci en un faisceau rigoureusement parallèle.

## C) APROFONDISSEMENT:

### I- Définition :

Une conique est un cas particulier de courbe du second degré (  $\Gamma$  ) représentant dans le repère orthonormé du plan l'ensemble des points  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  vérifiant l'équation (  $\Gamma$  ) :

$$Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0. \text{ Avec } (|A| + |B| \neq 0)$$

Ainsi divers cas se présentent :

## II- Représentation de la courbe d'une conique :

### 1) Les Paraboles d'équation : $(Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0)$

#### a) 1<sup>er</sup> Cas : $(B = 0)$

La courbe  $(\Gamma)$  devient :  $Ax^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0 \Rightarrow y = \frac{-Ax^2 - 2Cx - E}{2D}$

$$\Rightarrow y = \frac{-A\left(x^2 + \frac{2C}{A}x + \frac{E}{A}\right)}{2D}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-A}{2D}\left(x^2 + \frac{2C}{A}x + \frac{E}{A}\right) \text{ (en utilisant la forme canonique)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-A}{2D}\left[\left(x + \frac{C}{A}\right)^2 - \frac{C^2 - AE}{A^2}\right]$$

$\Rightarrow$  Alors  $(\Gamma)$  est une parabole dont les éléments caractéristiques sont :

- Sommet :  $S\left(\frac{-C}{A} ; \frac{C^2 - AE}{2AD}\right)$
- Axe de symétrie :  $x = \frac{-C}{A}$  (Suivant l'axe  $y'$  o  $y$ )

#### N.B :

- Si  $\frac{-A}{2D} < 0$  alors la concavité de la parabole  $(\Gamma)$  est orientée vers le bas.
- Si  $\frac{-A}{2D} > 0$ ; alors la concavité de la parabole  $(\Gamma)$  est orientée vers le haut;

#### Exemple :

Donner la nature et les éléments caractéristiques de la courbe  $(\Gamma)$  définie par  $(\Gamma) : -x^2 + 4x - y + 3 = 0$  puis représenter  $(\Gamma)$ .

#### Solution :

$$(\Gamma) : -x^2 + 4x - y + 3 = 0 ; \text{ ici } A = -1 ; C = 2 ; D = \frac{-1}{2} ; E = 3.$$

$$\text{Or } y = \frac{-A}{2D}\left[\left(x + \frac{C}{A}\right)^2 - \frac{C^2 - AE}{2AD}\right]$$

$$\Leftrightarrow y = -\left[(x-2)^2 - \frac{7}{1}\right] \Rightarrow y = -[(x-2)^2 - 7]$$

Donc  $(\Gamma)$  est une parabole dont les éléments caractéristiques sont :

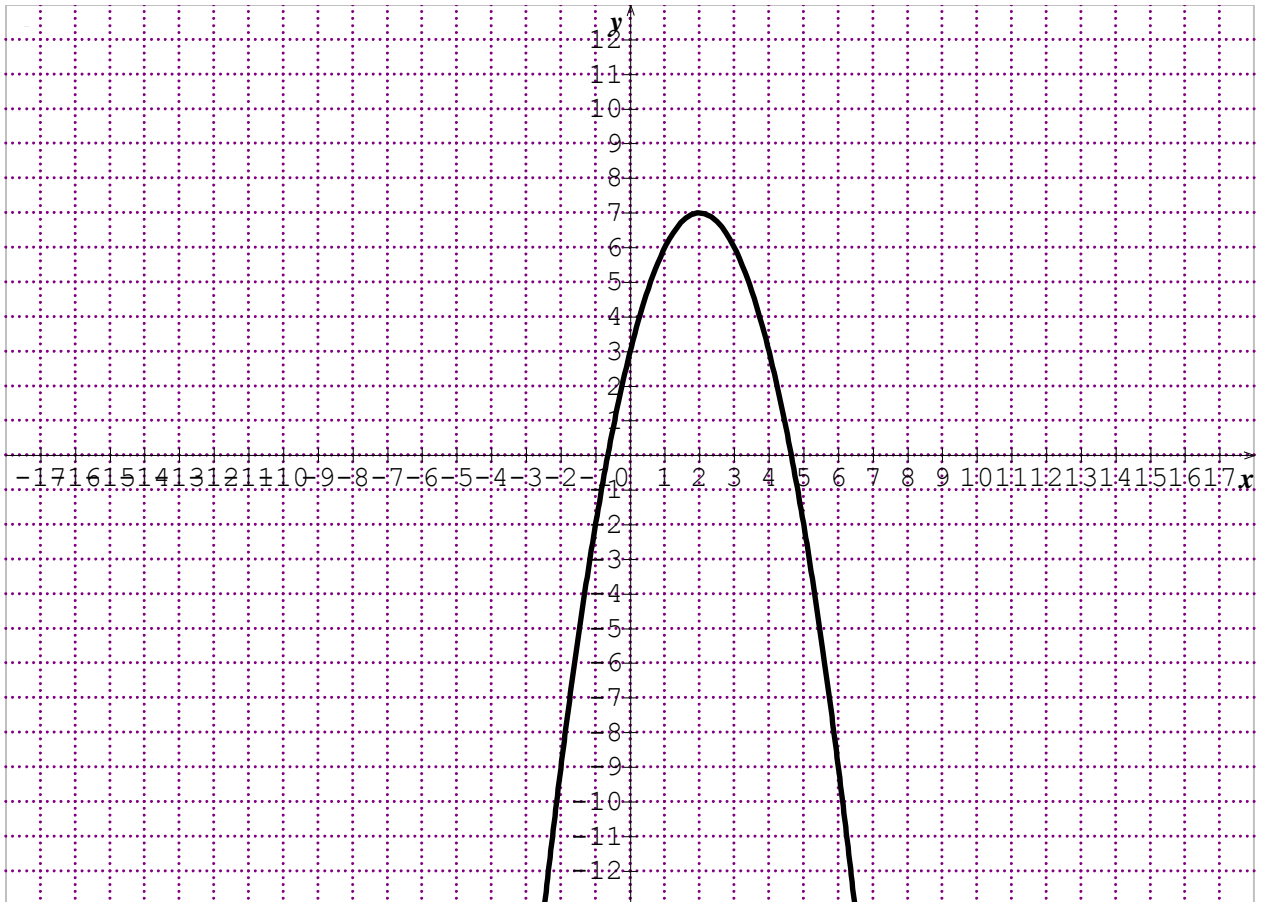
- Sommet : S (2 ; 7)
- Axe de Symétrie :  $x = 2$

$$(\Gamma) \cap (0x) \Rightarrow y = 0 \Leftrightarrow x = 4,64 \text{ ou } x = -0,64$$

Donc  $(\Gamma)$  coupe l'axe (ox) en 4,64 et -0,64

$$(\Gamma) \cap (oy) \Rightarrow x = 0 ; \Leftrightarrow y = 3$$

Donc  $(\Gamma)$  coupe l'axe (oy) en 3. et  $\frac{-A}{2D} = -1 < 0$  donc  $(\Gamma)$  est orienté vers bas.



**b) 2<sup>e</sup> Cas (A = 0)**

La courbe  $(\Gamma)$  dévient :  $By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$

$$\text{De la même manière on obtient } x = \frac{-B}{2C} \left[ \left( y + \frac{D}{B} \right)^2 - \frac{D^2 - BE}{B^2} \right]$$

Alors  $(\Gamma)$  est une parabole dont les éléments caractéristiques sont :

- Sommet : S  $\left( \frac{D^2 - BE}{2CB} ; \frac{-D}{B} \right)$

- Axe de symétrie :  $y = \frac{-D}{B}$

**N.B :**

\* Si  $\frac{-B}{2C} < 0$  ; alors la concavité de courbe ( $\Gamma$ ) est orientée vers la gauche.

\* Si  $\frac{-B}{2C} > 0$  ; alors la concavité de la courbe ( $\Gamma$ ) est orientée vers la droite.

**Exemple :**

Donner la nature et les éléments caractéristiques de la courbe ( $\Gamma$ ) définie par :

( $\Gamma$ ) :  $-2y + x + 2y^2 - 1 = 0$  puis représenter ( $\Gamma$ )

**Solution :**

( $\Gamma$ ) :  $-2y + x + 2y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 + x - 2y - 1 = 0$

Ici  $B = 2$  ;  $C = \frac{1}{2}$  ;  $D = -1$  ;  $E = -1$

Or  $x = \frac{-B}{2C} \left[ \left( y + \frac{D}{B} \right)^2 - \frac{D^2 - BE}{B^2} \right]$

$\Leftrightarrow x = -2 \left[ \left( y - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{3}{4} \right]$

Donc ( $\Gamma$ ) est une parabole dont les éléments caractéristiques sont :

- Sommet :  $S \left( \frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right)$

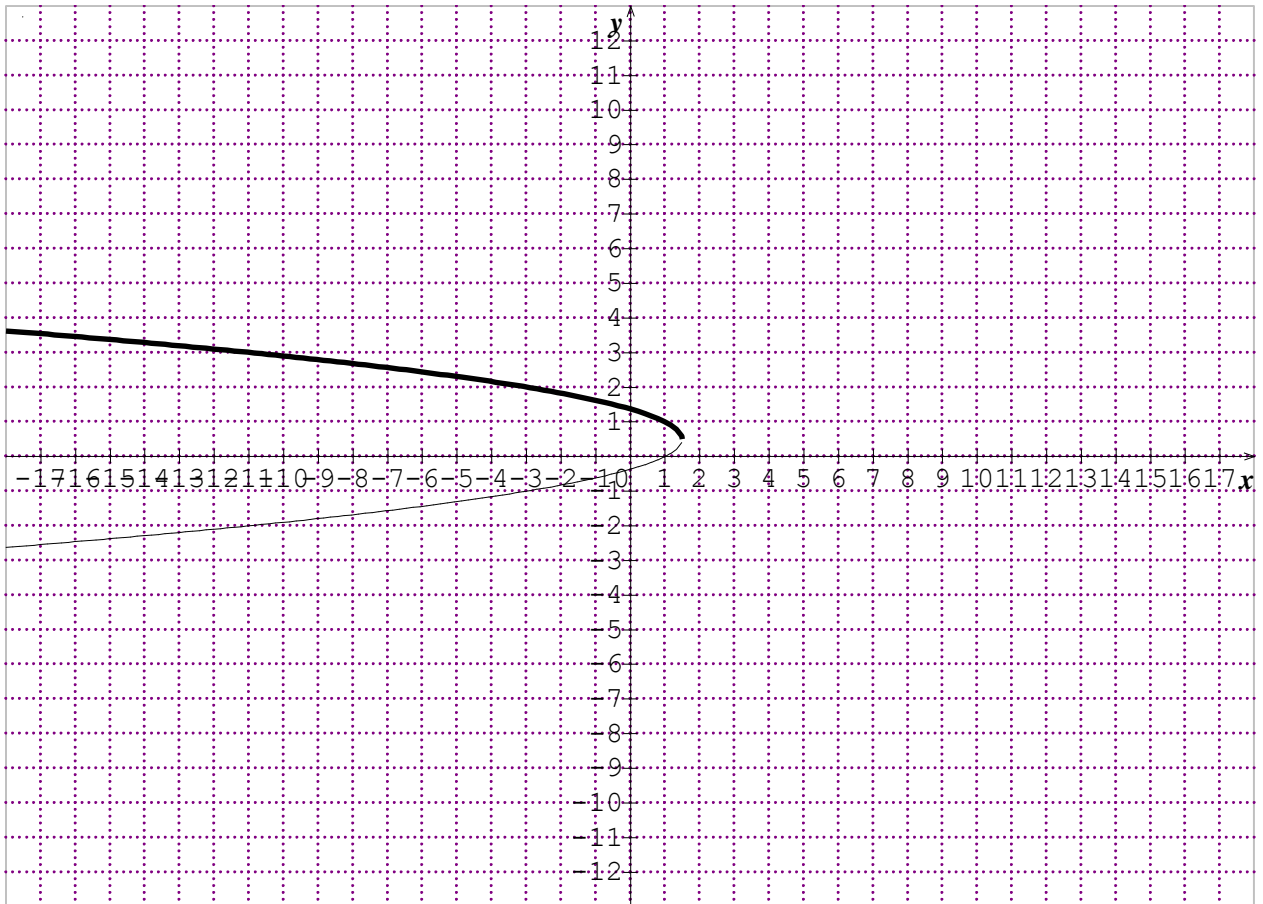
- Axe de symétrie :  $Y = \frac{1}{2}$

( $\Gamma$ )  $\cap$  (ox)  $\Rightarrow y = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Donc ( $\Gamma$ ) coupe l'axe (ox) en 1

( $\Gamma$ )  $\cap$  (oy)  $\Rightarrow x = 0 \Leftrightarrow y = 1,36$  ou  $y = -0,36$

Donc ( $\Gamma$ ) coupe l'axe (oy) en 1,36 et -0,36. et  $\frac{-B}{2C} = -2 < 0$



## 2) Les ellipses :

Equation cartésienne :  $Ax^2 + by^2 + Cx + Dy + E = 0$

$$\text{Equation réduite : } A\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + B\left(y + \frac{D}{2B}\right)^2 = \frac{AD^2 + BC^2 - 4ABE}{4AB}$$

$$\text{Equation caractéristique : } \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

a) 1<sup>er</sup> Cas : ( $a > b$ )

L'ellipse est portée par l'axe  $x'$   $\Omega x$  qui est le grand axe de l'ellipse. Ainsi les éléments caractéristiques sont :

- Centre :  $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  où  $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$

-

- Foyers :  $F(\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$  ;  $F'(-\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$

-

- L'excentricité :  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$
- 
- Les Directrices : (D) :  $X = \frac{a}{e}$  ; (D') :  $X' = \frac{-a}{e}$
- 
- Les sommets : A(a ; 0) ; A'(-a ; 0) ; B(0 ; b) ; B'(0 ; - b)

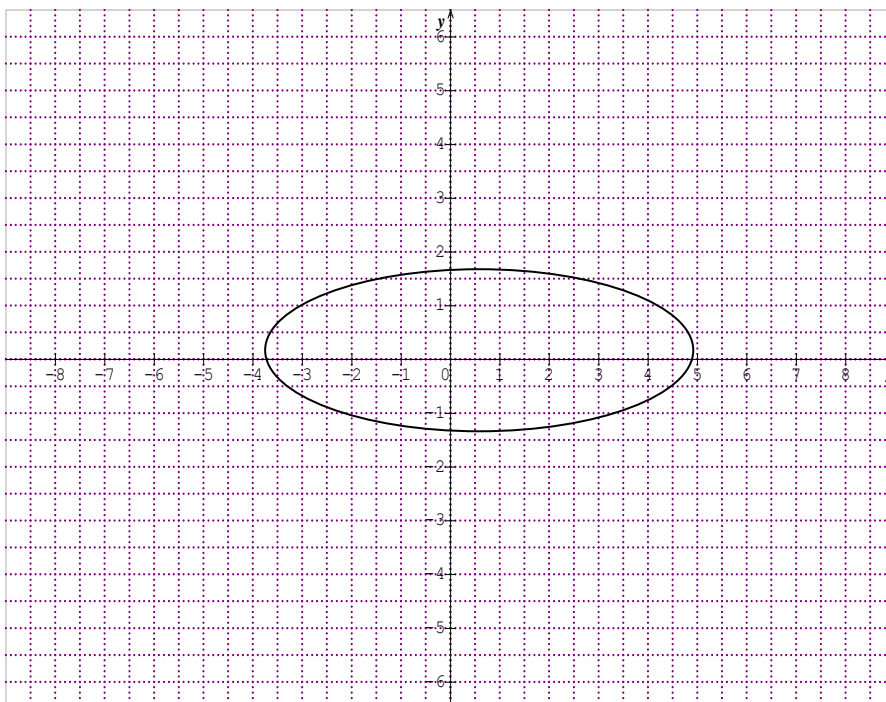
**b) 2<sup>è</sup> Cas :** (a < b)

L'ellipse est portée par l'axe  $y' \Omega y$  qui est le petit axe de l'ellipse.  
Ainsi les éléments caractéristiques sont :

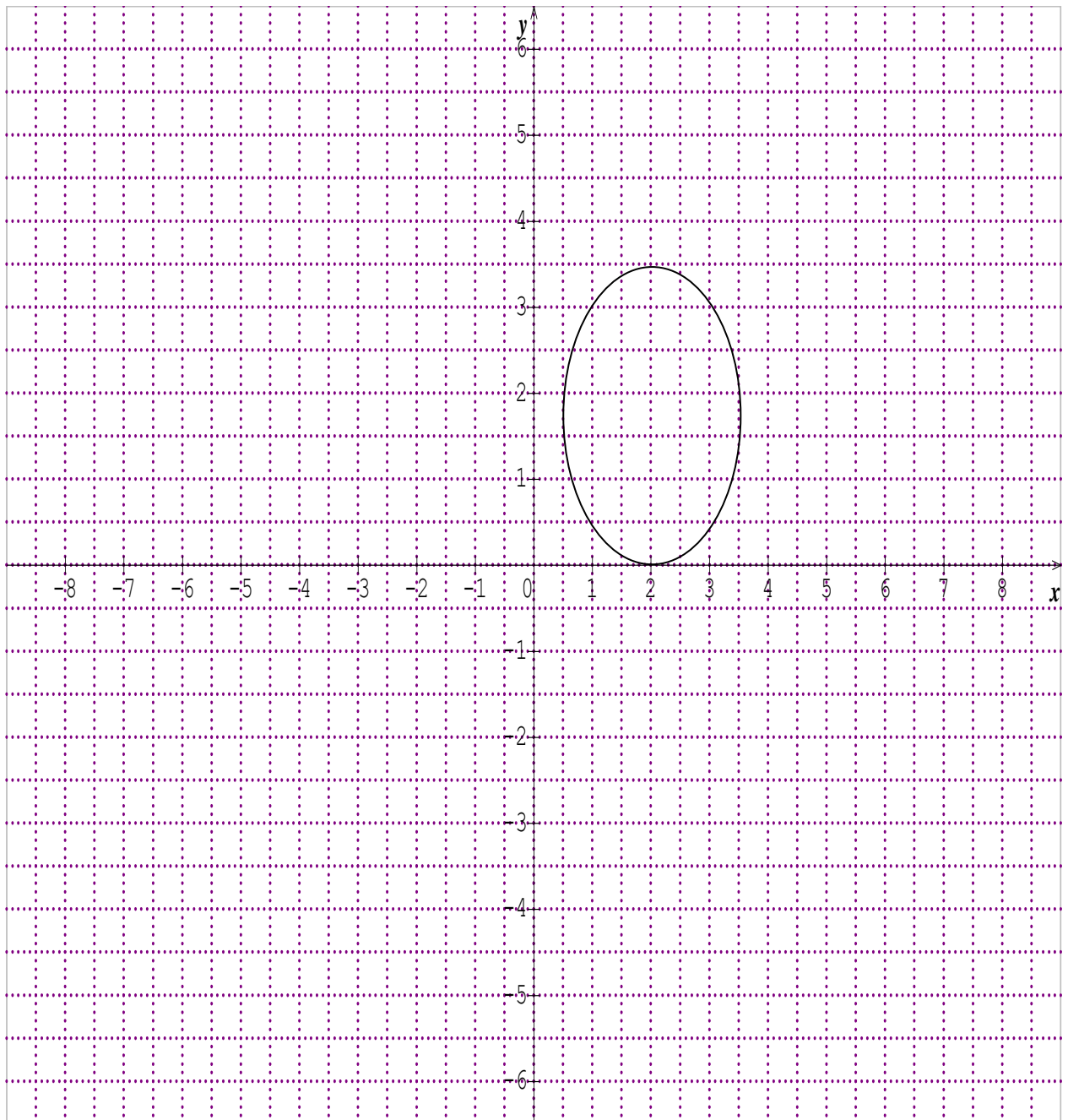
- centre :  $\Omega \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}$  ou  $\begin{cases} X = x - x_o \\ Y = y - y_o \end{cases}$
- foyers : F (o ;  $\sqrt{b^2 - a^2}$ ) ; F' (o ;  $-\sqrt{b^2 - a^2}$ )
- l'excentricité :  $e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$
- les Directrices : (D) :  $y = \frac{b}{e}$  ; (D') :  $y' = \frac{-b}{e}$
- les sommets : A(a, o) ; A'(-a ; o) B(0 ; b) ; B'(o ; - b)

**c) Représentation graphique :**

**1<sup>er</sup> Cas :** (a > b)



**2<sup>ème</sup> Cas (a < b)**



### Exemple :

Déterminer les éléments caractéristiques de (M) puis construire sa courbe dans le repère.

- a) (M) :  $\left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in P / 9x^2 + y^2 - 18x - 4y = -4 \right\}$
- b) (M) :  $\left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in P / x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13 = 0 \right\}$

### Solution :

$$a) 9x^2 + y^2 - 18x - 4y = -4 \Leftrightarrow 9x^2 + y^2 - 18x - 4y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow A = 9 ; B = 1 ; C = -18 ; D = -4 ; E = 4$$

$\Leftrightarrow$

$$\text{Or } A \left( x + \frac{C}{2A} \right)^2 + B \left( y + \frac{D}{2B} \right)^2 = \frac{AD^2 + BC^2 - 4ABE}{4AB}$$

$$\Leftrightarrow 9 \left( x + \frac{-18}{2(9)} \right)^2 + 1 \left( y + \frac{-4}{2(1)} \right)^2 = \frac{9(-4)^2 + 1(-18)^2 - 4(9)(1)(4)}{4(9)(1)}$$

$$\Leftrightarrow 9(x-1)^2 + 1(y-2)^2 = 9. \text{ (en divisant le tout par 9) on a :}$$

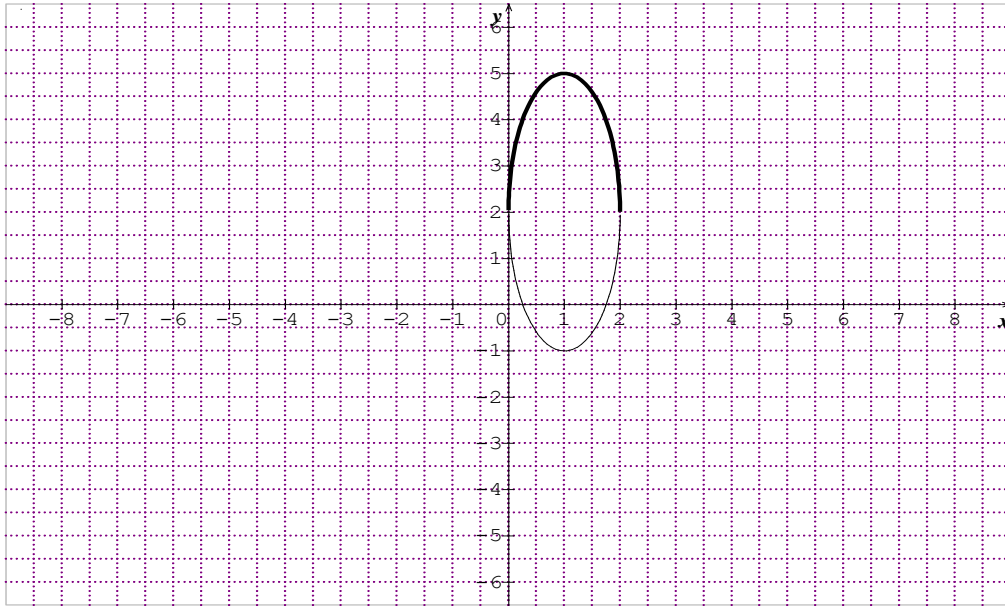
$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \text{ (en posant } X = x-1 \text{ et } Y = y-2) \text{ on a :}$$

$$\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{9} = 1 \text{ Avec } \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow (a < b)$$

Alors l'ellipse est portée par l'axe ( $y' \Omega y$ )

Ainsi les éléments caractéristiques sont :

- Centre :  $\Omega (1 ; 2)$
- Foyers :  $F(o ; \sqrt{8}) ; F'(o ; -\sqrt{8})$
- Excentricité :  $e = \frac{\sqrt{8}}{3} = 0,9$
- Directrice : (D) :  $y = \frac{9}{\sqrt{8}} = 3,18 ; (D') : y' = \frac{-9}{\sqrt{8}} = -3,18$
- Sommets :  $A(1 ; 0) ; A'(-1 ; 0) ; B(0 ; 3) ; B'(0 ; -3)$ .



$$b) x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow A = 1 ; B = 4 ; C = -2 ; D = 16 ; E = 13$$

$\Leftrightarrow$

$$\text{Or } A \left( x + \frac{C}{2A} \right)^2 + B \left( y + \frac{D}{2B} \right)^2 = \frac{AD^2 + BC^2 - 4ABE}{4AB}$$

$$\Leftrightarrow 1 \left( x + \frac{-2}{2(1)} \right)^2 + 4 \left( y + \frac{16}{2(4)} \right)^2 = \frac{1(16)^2 + 4(-2)^2 - 4(1)(4)(13)}{4(1)(4)}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 4 \text{ (en divisant le tout par 4) on a :}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1 \text{ (En posant } X = x - 1 \text{ et } Y = y + 2) \text{ on a :}$$

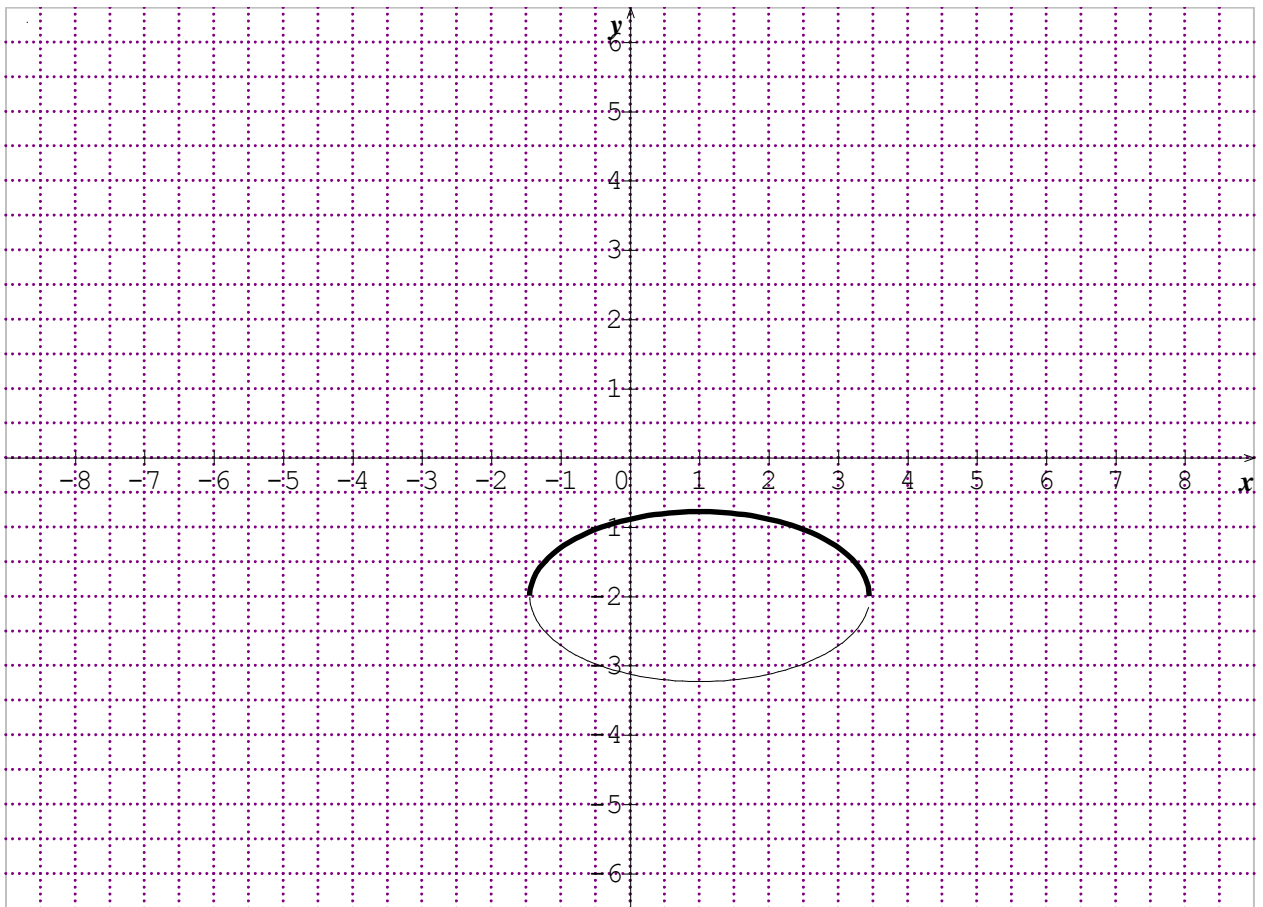
$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{1} = 1 \text{ Avec } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow (a > b)$$

Alors l'ellipse est portée par l'axe  $(x' \Omega x)$

Ainsi les éléments caractéristiques sont :

- Centre :  $\Omega(1 ; -2)$
- Foyers :  $F(\sqrt{3};0)$   $F'(-\sqrt{3};0)$
- Excentricités :  $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- Directrices :  $(D) : X = \frac{4}{\sqrt{3}}$  ;  $(D') : X' = \frac{-4}{\sqrt{3}}$

- Sommets :  $A(2 ; 0)$  ;  $A'(-2 ; 0)$  ;  $B(0 ; 1)$   $B'(0 ; -1)$



### 3) Les Hyperboles

Equation cartésienne :  $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

Equation réduite :  $A\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + B\left(y + \frac{D}{2B}\right)^2 = \frac{AD^2 + BC^2 - 4ABE}{4AB}$

Equations caractéristiques :  $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$  ou  $\frac{-x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

a) 1<sup>er</sup> Cas :  $\left(\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1\right)$

L'hyperbole est portée par l'axe  $(X' \Omega X)$   
Ainsi les éléments caractéristiques sont :

- Centre  $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  ou  $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$
- Foyers :  $F(\sqrt{a^2 + b^2}; 0)$  ;  $F'(-\sqrt{a^2 + b^2}; 0)$
- L'excentricité :  $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$
- Les Asymptotes (D) :  $Y = \frac{b}{a}x$  ; (D') :  $Y = -\frac{b}{a}x$
- Les sommets :  $A(a; 0)$  ;  $A'(-a; 0)$

b) 2<sup>ème</sup> Cas :  $\left(\frac{-X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1\right)$

Les éléments caractéristiques dans ce cas sont :

- Centre  $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  où  $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$
- 
- Foyers :  $F(0; \sqrt{a^2 + b^2})$  ;  $F'(0; -\sqrt{a^2 + b^2})$
- 
- L'excentricité :  $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$
- Les Asymptotes : (D) :  $X = \frac{a}{b}y$  ; (D') :  $X = -\frac{a}{b}y$
- 
- Les sommets :  $B(0; b)$  ;  $B'(0; -b)$ .

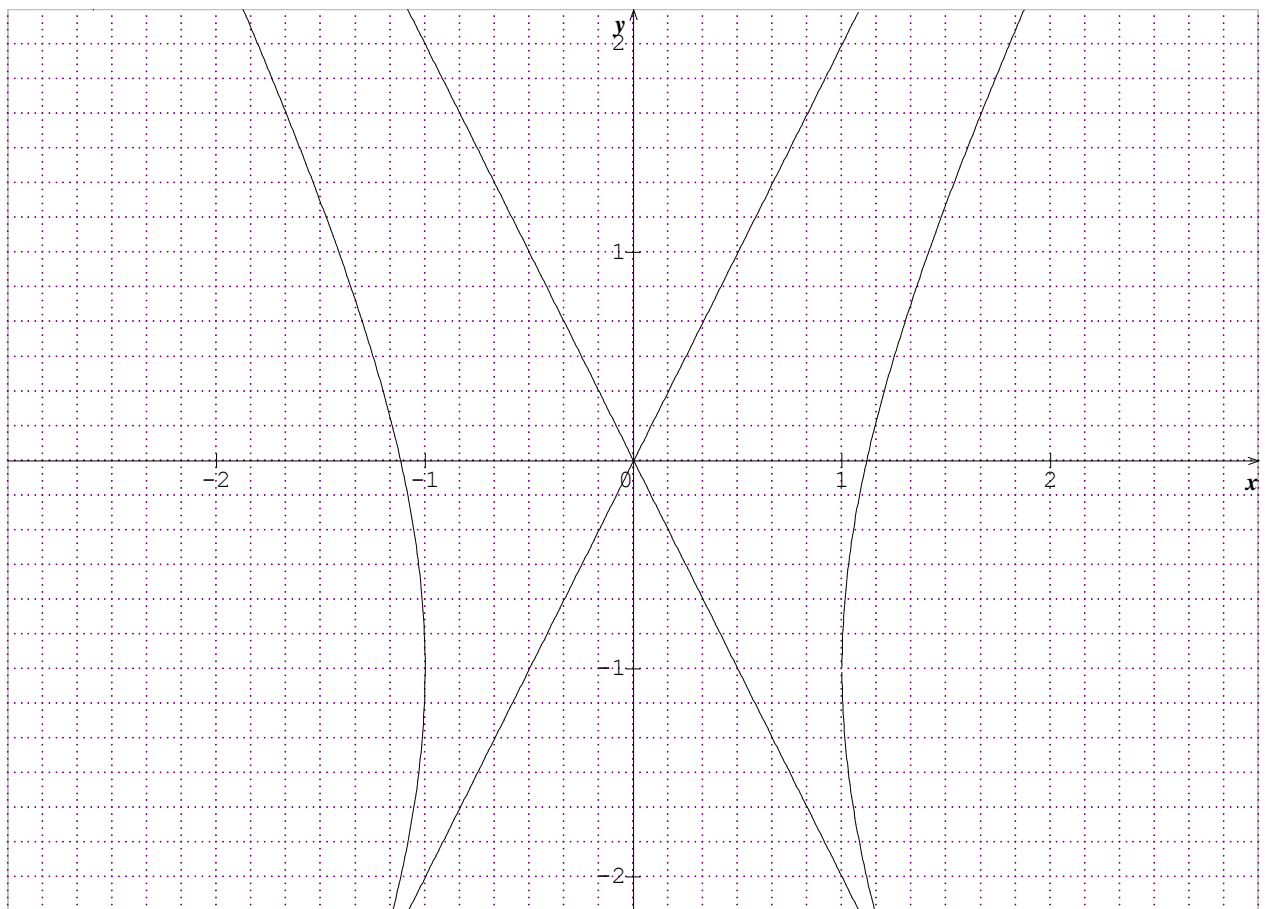
**NB:**

Dans les deux cas de parabole, on a :

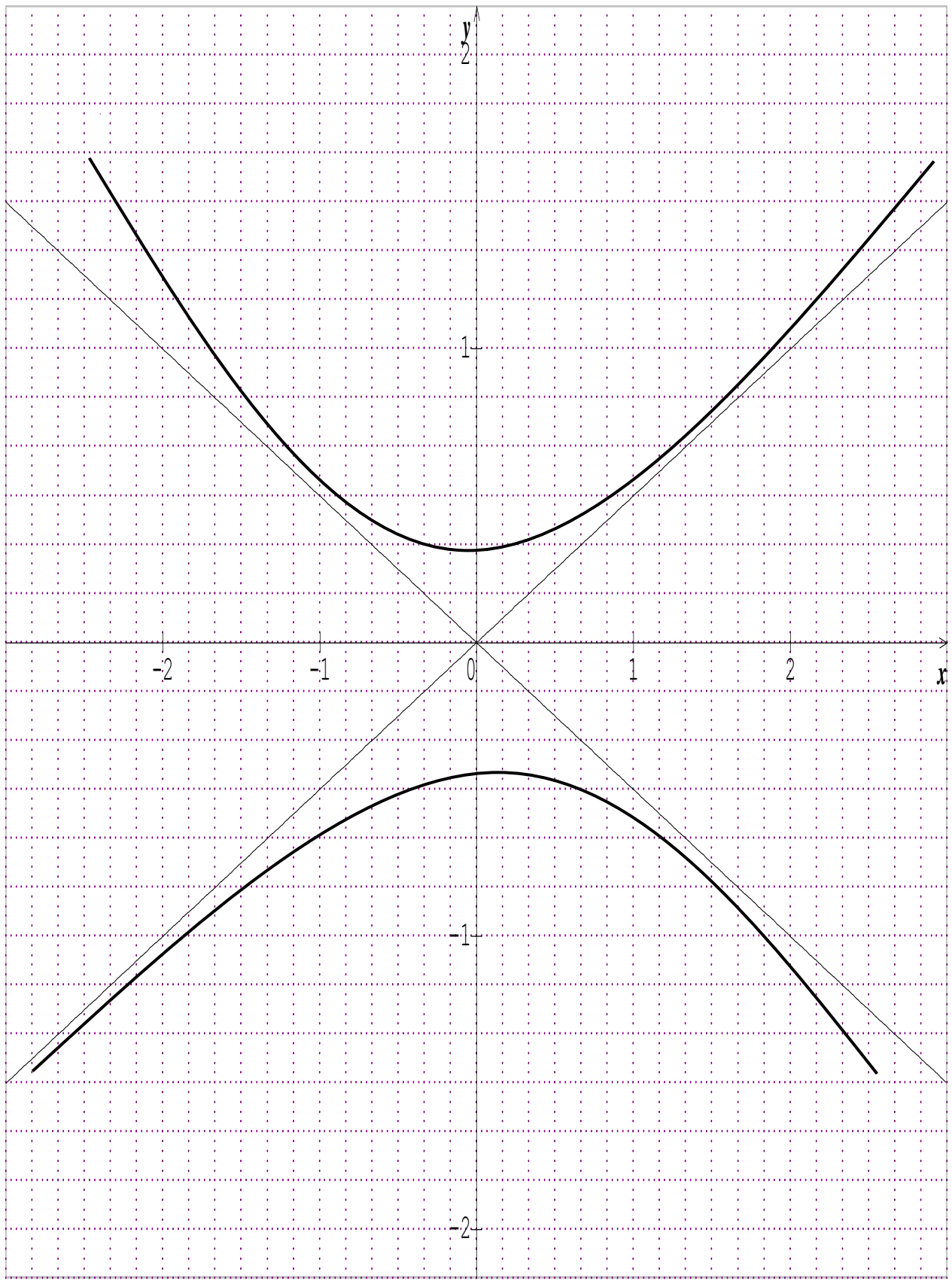
- $X'\Omega X$  et  $y'\Omega y$  sont des axes de symétrie.
- Si  $a > b$  ; alors l'hyperbole est portée par l'axe ( $x' \Omega x$ )
- Si  $a < b$  ; alors l'hyperbole est portée par l'axe ( $y' \Omega y$ )
- 

**C) Représentation graphique :**

**1<sup>er</sup> Cas** ( $a < b$ )



2<sup>ème</sup> Cas ( $a > b$ )



**Exemple :**

Déterminer les éléments caractéristiques de  $(\Gamma)$  puis construire sa courbe dans le repère.

$$c) (\Gamma) : \left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in P / 4x^2 - y^2 - 2y - 5 = 0 \right\}$$

$$d) (\Gamma) : \left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in P / -x^2 + 4y^2 + 2x + 16y = -13 \right\}$$

**Solution :**

$$a) 4x^2 - y^2 - 2y - 5 = 0 \Rightarrow A = 4 ; B = -1 ; C = 0 ; D = -2 ; E = -5$$

$$\text{Or } A \left( x + \frac{C}{2A} \right)^2 + B \left( y + \frac{D}{2B} \right)^2 = \frac{AD^2 + BC^2 - 4ABE}{4AB}$$

$$\Leftrightarrow 4 \left( x + \frac{0}{2(4)} \right)^2 - 1 \left( y + \frac{-2}{2(-1)} \right)^2 = \frac{4(-2)^2 - 1(0)^2 - 4(4)(-1)(-5)}{4(4)(-1)}$$

$$\Leftrightarrow 4(x+0)^2 - (y+1)^2 = 1 \text{ (en divisant le tout par 4) on a :}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+0)^2}{1} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \text{ (en posant } X = x+0 \text{ et } Y = y+1), \text{ on a :}$$

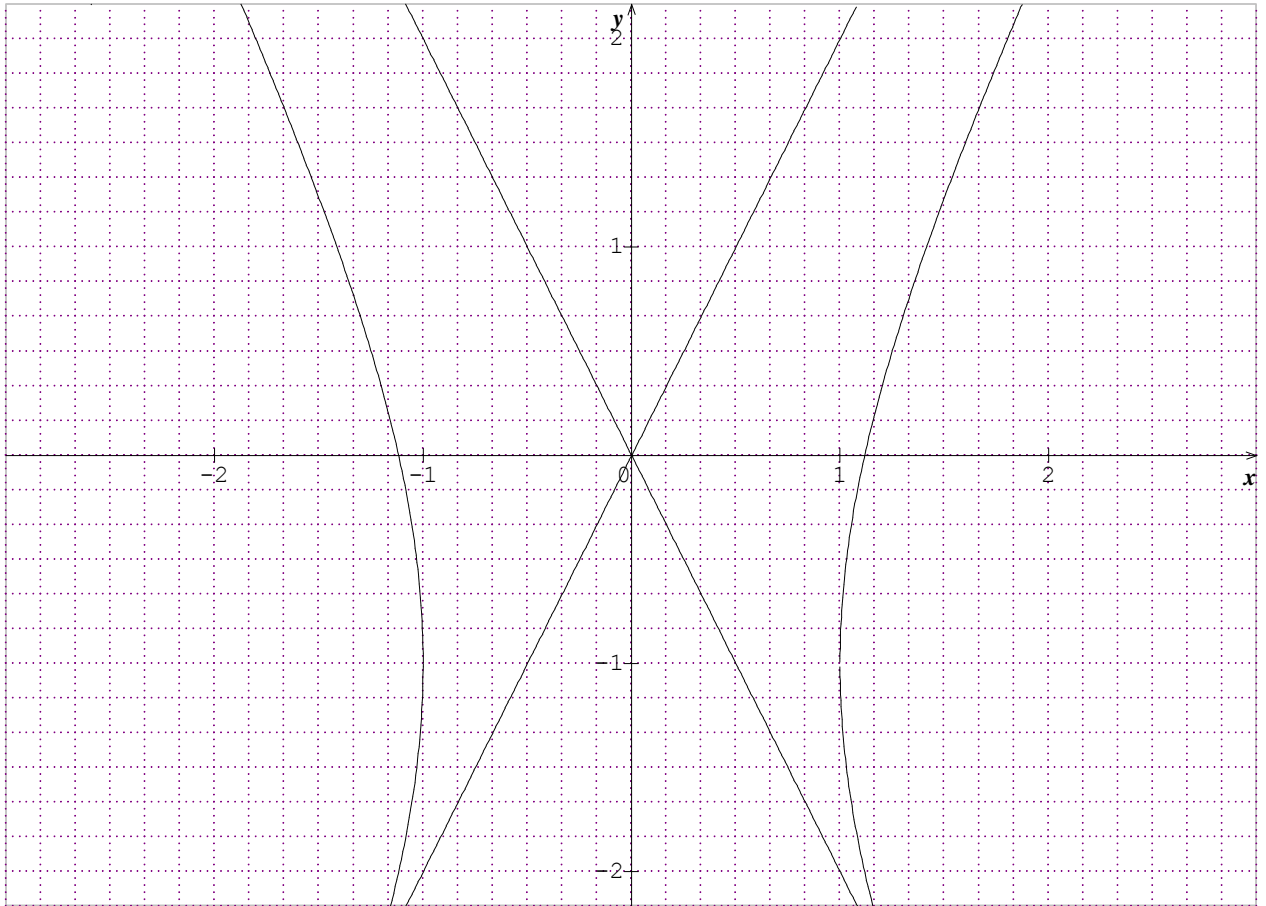
$$\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{4} = 1 \text{ avec } \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow (a < b)$$

Alors l'hyperbole est portée par l'axe ( $y' \Omega y$ )

Ainsi les éléments caractéristiques sont :

- Centre :  $\Omega(0 ; -1)$
- Foyers :  $F(\sqrt{5}; 0) ; F'(-\sqrt{5}; 0)$
- L'excentricité :  $e = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5} = 2,23$
- Les Asymptotes : (D) :  $y = \sqrt{4}.x = 2x$  ; (D') :  $y' = -2x$
- Les sommets :  $A(1 ; 0) ; A'(-1 ; 0)$

**NB** : Pour construit les Asymptotes (D) et (D') on fait un tableau de valeur.



b)  $-x^2 + 4y^2 + 2x + 16y = -13 \Leftrightarrow -x^2 + 4y^2 + 2x + 16y + 13 = 0$

c)

$\Rightarrow A = -1 ; B = 4 ; C = 2 ; D = 16 ; E = 13$

Or  $A\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + B\left(y + \frac{D}{2B}\right)^2 = \frac{AD^2 + BC^2 - 4ABE}{4AB}$

$\Leftrightarrow -1\left(x + \frac{2}{2(-1)}\right)^2 + 4\left(y + \frac{16}{2(4)}\right)^2 = \frac{-1(16)^2 + 4(2)^2 - 4(-1)(4)(13)}{4(-1)(4)}$

$\Leftrightarrow \frac{-(x-1)^2}{2} + 2(y+2)^2 = 1$

$\Leftrightarrow -\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(y+2)^2}{\frac{1}{2}} = 1$  (en posant  $X = x-1$  et  $Y = y+2$ ) on a :

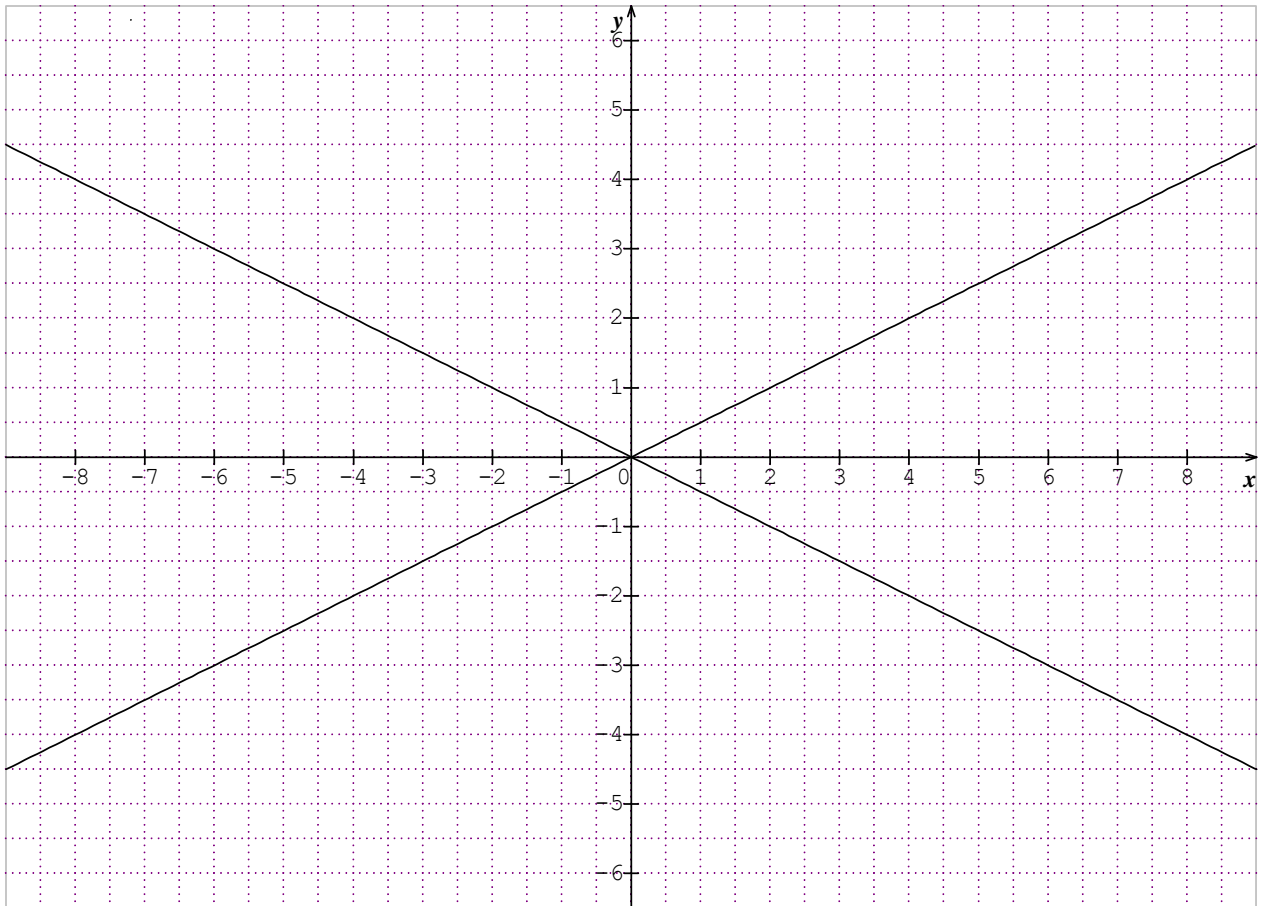
$\frac{-X^2}{2} + \frac{Y^2}{\frac{1}{2}} = 1$  avec  $\begin{cases} a^2 = 2 \\ b^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow (a > b)$

Alors l'hyperbole est portée par l'axe  $(X'\Omega X)$

Ainsi les éléments caractéristiques sont :

- Centre :  $\Omega(1 ; -2)$
- Foyers :  $F\left(0 ; \sqrt{\frac{5}{2}}\right) ; F'\left(0 ; -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$
- L'excentricité :  $e = \sqrt{5} = 2,23$
- Les Asymptotes : (D) :  $X = 2y$  ; (D') :  $X = -2y$
- Les sommets :  $B\left(0 ; \sqrt{\frac{2}{2}}\right) ; B'\left(0 ; -\sqrt{\frac{2}{2}}\right)$

Reproduire vous-même le schéma de cette courbe



**NB** : Pour la construction des Asymptotes, on fait un tableau de valeur.

# EXERCICES

## EXERCICE 1 :

Déterminer la nature puis tracer la courbe (M) dans chacun des cas suivants.

- 1)  $-x^2 + 4x - y + 3 = 0$
- 2)  $3x^2 + 4y^2 - 3x - 2y - 5 = 0$
- 3)  $4x^2 - y^2 - 2y - 5 = 0$
- 4)  $-2y + x + 2y^2 - 1 = 0$
- 5)  $-x^2 + 4y^2 + 2x + 16y = -13$
- 6)  $x^2 - 4y^2 - 4x + 16y + 4 = 0$
- 7)  $9x^2 - 36y^2 + 18x + 144y = 176$
- 8)  $-6x^2 - 4y^2 + y - 2 = 0$
- 9)  $9x^2 + y^2 - 18x - 4y = -4$
- 10)  $x^2 + 2y^2 - 4x = 1$

## EXERCICE 2 :

A tout nombre complexe  $z$ , on associe  $f(z)$  tel que  $f(z) = 2z - \bar{z}$

- 1) Déterminer l'ensemble  $(\Gamma)$  des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que  $|f(z) - 3| = 3$
- 2) Préciser la nature de  $(\Gamma)$  puis ses éléments caractéristiques (centre, axes, sommets, excentricité, foyers et directrices).

## EXERCICE 3 :

On considère la courbe (C) d'équation  $xy - 2x - 3y - 1 = 0$  et la transformation  $f$  du plan qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que  $z' = \frac{1-i}{2} z - 2 + 2i$

- 1) Démontrer que  $f$  admet un point invariant  $P$  que l'on déterminera.
- 2) Reconnaître la nature de  $f$  puis donner ces éléments caractéristiques
- 3) Exprimer les coordonnées  $(x, y)$  de  $M$  en fonction des coordonnées  $(x, y)$  de  $M'$ .
- 4) Démontrer que l'image de la courbe (C) par  $f$  est la courbe (C') d'équation  $x^2 - y^2 - x + 3y - 9 = 0$
- 5) en déduire la nature de (C') puis construire (C').

## EXERCICE 4 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ . A tout réel  $m$  élément de l'intervalle

$]0, 1[$ , on associe la conique  $(E_m)$  d'équation  $(E_m) : y^2 = 2x - \frac{x^2}{m}$

- a) Quelle est la nature de  $(E_m)$  ?
- b) Déterminer, par leurs coordonnées, les centres et les sommets de  $(E_m)$ .

- c) Déterminer la courbe (P) constituant l'ensemble des sommets du grand axe de  $(E_m)$  quand  $m$  varie dans l'intervalle indiqué.
- d) Déterminer la courbe (C) constituant l'ensemble des foyers de  $(E_m)$  quand  $m$  varie dans l'intervalle indiqué.
- e) Construire  $E_{3/4}$

# Systemes Linéaires

## 1) Définitions :

### a) Cas général :

On appelle **système linéaire de p équations à n inconnues** tout système d'équations de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + a_{p3}x_3 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases} \quad (S)$$

Dans lequel  $a_{ij}$  et  $b_i$  ( $1 \leq i \leq p$ ,  $1 \leq j \leq n$ ) sont des réels ou des complexes donnés.

Une **solution** de (S) est un  $n$  – uplet  $(x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n)$  de nombres réels ou complexes vérifiant simultanément les  $p$  équations de (S). Résoudre un tel système c'est trouver l'ensemble des solutions de (S).

**Deux systèmes (S<sub>1</sub>) et (S<sub>2</sub>) sont équivalents**, s'ils ont même ensemble de solutions, c'est-à-dire si toute solution de (S<sub>1</sub>) est solution de (S<sub>2</sub>) et réciproquement, si toute solution de (S<sub>2</sub>) est solution de (S<sub>1</sub>).

### Exemple :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -10 \\ 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$
 est un système de 2 équations à 3 inconnues.  $(1 ; -2 ; 2)$  en est une solution.

### b) Cas particuliers :

Un système est dit **carré** si  $p = n$ .

Un système carré est dit **triangulaire à diagonale unité** si l'on a :

$a_{ij} = 0$  pour  $i > j$  et  $a_{ii} = 1$ , avec  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

Par exemple, la forme générale d'un système de 3 équations à 3 inconnues, triangulaire à diagonale unité est :

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \quad x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ \quad \quad x_3 = b_3 \end{cases}$$

La résolution d'un tel système est très simple et, de plus on admet :

### **Propriété**

**Un système triangulaire à diagonale unité admet, quelque soit le second membre, une et une seule solution.**

### **Exemple :**

Résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9 & L_1 \\ \quad x_2 + 4x_3 = 7 & L_2 \\ \quad \quad x_3 = 2 & L_3 \end{cases}$$

Les solutions successives des équations  $L_3$  puis  $L_2$  puis  $L_1$  montrent que (S) admet une solution et une seule (1 ; -1 ; 2).

## **2) Opérations élémentaires**

### **a) Exemple et notations**

Soit le système :

$$(S) \begin{cases} 2x + 12y + 17z = 53 \\ x + 5y + 7z = 22 \\ 3x + 22y + 19z = 35. \end{cases}$$

On va ramener la résolution de (S) à celle d'un système de (3 - 1) équations à (3 - 1) inconnues. Pour cela on forme un système équivalent à (S), en éliminant une inconnue dans deux équations du système.

- Echangeons les lignes 1 notée  $L_1$ , et 2 notée  $L_2$ .

**Codage**

**Systeme**

$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$(S_1) \begin{cases} x + 5y + 7z = 22 \\ 2x + 12y + 17z = 53 \\ 3x + 22y + 19z = 35. \end{cases}$$

- Multiplions les deux membres de  $L_1$  par  $-2$  et ajoutons l'équation obtenue à  $L_2$ , membre à membre, afin d'éliminer  $x$  dans la deuxième équation. Procédons de même avec  $L_3$ .

**Codage**

**Système**

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 3L_1 \end{aligned}$$

$$(S_2) \begin{cases} x + 5y + 7z = 22 \\ 2y + 3z = 9 \\ 7y - 2z = -31. \end{cases}$$

- Appliquons à nouveau le procédé au système de 2 équations à 2 inconnues en éliminant  $y$  dans  $L_3$ .

**Codage**

**Système**

$$L_2 \leftarrow \frac{L_2}{2}$$

$$(S_3) \begin{cases} x + 5y + 7z = 22 \\ y + \frac{3}{2}z = \frac{9}{2} \\ 7y - 2z = -31. \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2$$

$$(S_4) \begin{cases} x + 5y + 7z = 22 \\ y + \frac{3}{2}z = \frac{9}{2} \\ -\frac{25}{2}z = -\frac{125}{2}. \end{cases}$$

Nous obtenons un système triangulaire  $(S_4)$ . On vérifie que :

$(S_4)$  est équivalent à  $(S)$  ;

$(S_4)$  admet une solution et une seule :  $(2 ; -3 ; 5)$

On en déduit que  $(S)$  admet une solution et une seule  $(2 ; -3 ; 5)$ .

### **b) Opérations élémentaires**

On note de haut en bas  $L_1, L_2, \dots, L_n$  les  $n$  équations ou lignes du système.

On définit sur ces lignes les opérations suivantes, dites **élémentaires** :

- Echange de deux lignes :

$$L_i \leftrightarrow L_j.$$

- Multiplication d'une ligne par un réel non nul :

$$L_i \leftarrow \mu L_i (\mu \in \mathbb{R}^*).$$

- Addition à une ligne d'un multiple d'une autre ligne :

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j (\lambda \in \mathbb{R}, i \neq j).$$

On admet le théorème suivant.

**Théorème :**

Etant donné un système linéaire de  $p$  lignes  $L_1, L_2, \dots, L_p$ , on obtient un système équivalent en effectuant une des opérations élémentaires suivantes :

- $L_i \leftrightarrow L_j$
- $L_i \leftarrow \mu L_i (\mu \in R^*)$
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j (\lambda \in R, i \neq j)$ .

**La méthode du pivot de Gauss** consiste à exécuter, dans un ordre bien déterminé, des opérations élémentaires sur les lignes d'un système, conduisant à un système triangulaire (équivalent) plus facile à résoudre ; cette méthode est en fait un algorithme susceptible d'être exécuté par un ordinateur.

### Exercice d'application :

Résoudre dans  $R^4$  le système :

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 \quad \quad + 7x_4 = -8 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 20. \end{cases}$$

### Solution

#### 1<sup>ère</sup> Etape :

On fait apparaître 1 pour coefficient de  $x_1$  dans la première ligne.

$$L_1 \leftarrow \frac{L_1}{2} \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 \quad \quad + 7x_4 = -8 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 20 \end{cases}$$

#### 2<sup>ème</sup> Etape :

On élimine  $x_1$  dans les lignes 2, 3 et 4.

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 + L_1 \end{aligned} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 0 + 0 - 2x_3 + 4x_4 = -10 \\ 0 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ 0 - 2x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 22 \end{cases}$$

#### 3<sup>ème</sup> Etape :

Le pivot de rang 2, coefficient de  $x_2$  dans la deuxième équation, est nul, on échange  $L_2$  et une autre ligne de façon à obtenir un pivot non nul.

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ -2x_3 + 4x_4 = -10 \\ -2x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 22. \end{array} \right.$$

Puis on élimine  $x_2$  dans la ligne 4.

$$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ -2x_3 + 4x_4 = -10 \\ 3x_3 - 5x_4 = 14. \end{array} \right.$$

**4<sup>ème</sup> Etape :**

On fait apparaître 1 pour coefficient de  $x_3$  dans la troisième ligne, puis on élimine  $x_3$  dans la ligne 4.

$$L_3 \leftarrow \frac{L_3}{-2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_3 - 5x_4 = 14. \end{array} \right.$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ x_3 - 2x_4 = 5 \\ x_4 = -1. \end{array} \right.$$

En résolvant  $L_4$ , puis  $L_3$ ,  $L_2$  et  $L_1$ , on obtient  $x_4 = -1$ ,  $x_3 = 3$ ,  $x_2 = 1$  et  $x_1 = 0$ .  
Le système admet donc une solution unique  $(0 ; 1 ; 3 ; -1)$

**Remarque :**

Lorsqu'il est impossible d'obtenir un pivot non nul on dit que la méthode de Gauss "se bloque"  
; c'est le cas dans l'exercice 2.

### Exercice d'application

Résoudre dans  $\mathbb{R}^4$  le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - 9x_4 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 13x_4 = a + 4 \quad (a \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

### Solution

**1<sup>ère</sup> Etape :** on élimine l'inconnue  $x_1$  dans les lignes 2, 3 et 4.

$$\begin{array}{l} l_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 0 + 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 = -2 \\ 0 + 2x_2 - 4x_3 - 7x_4 = -1 \\ 0 - 3x_3 + 6x_3 + 11x_4 = a + 3. \end{cases}$$

**2<sup>ème</sup> Etape :** on élimine l'inconnue  $x_2$  dans les lignes 3 et 4.

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_4 \leftarrow 2L_4 + 3L_2 \end{array} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 0 \quad 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 = -2 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad x_4 = -1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4x_4 = 2a. \end{cases}$$

**Deux cas sont à envisager :**

**1<sup>er</sup> Cas :**  $a \neq -2$ , le système initial n'a pas de solution  $S = \emptyset$ .

**2<sup>ème</sup> Cas :**  $a = -2$ , le système initial (ou final) admet une infinité de solutions :

$$S = \{(7 - k; 2k - 4; k; -1); k \in \mathbb{R}\}.$$

# EXERCICES

## Exercice 1 :

Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  les systèmes donnés.

$$1) \begin{cases} 3x + 4y - 5z = 7 \\ 3y - 7z = 1 \\ 8z = 16. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 12 \\ x + 3y + z = 6 \\ -x - 2y + 3z = -8 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ x + 4y + 3z = 3 \\ 2x + 7y + 6z = 8 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ x - y + 7z = 7 \\ 2x + 4y + 9z = 15. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ x - y + 7z = -4 \\ 2x + 4y + 9z = -9 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x + y & = a \\ x & + z = b \\ y & + z = c \end{cases}$$

a, b et c sont trois nombres réels donnés.

$$7) \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + y + 2z = 4. \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 4x - 2y + 7z = 20 \\ 3x - y + 3z = 10 \\ 2x - 3y - z = 3. \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 2x + 3y - 5z = 4 \\ x + y - z = 1 \\ -3x - 4y + z = -5 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 2x + 4y & = 16 \\ 3x + 9y + 18z & = 9 \\ 4x + 8y + z & = 29 \end{cases}$$

$$11) a) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

### Exercice 2 :

Résoudre dans  $\mathbb{R}^4$  les systèmes donnés.

$$1) \begin{cases} 2x + 3y - z + 4t = -1 \\ 3y - 2z - 2t = -6 \\ z + 6t = -1 \\ -4t = 2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x + 2y + 4z + 6t = 8 \\ 3x + 4y + 11z + 15t = 21 \\ 5x + 8y + 27z + 17t = 57 \\ 4x + 2y - 5z + 27t = -5 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 8x_1 + 40x_2 - 32x_3 + 24x_4 = 16 \\ 2x_1 + 13x_2 + 4x_3 - 6x_4 = -2 \\ -3x_1 - 17x_2 + 6x_3 - 7x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 - 11x_3 + 5x_4 = -7 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 6x_4 = -4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 14x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 + 3x_2 + 14x_3 - 9x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 10x_4 = -3 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x + 6y + 4z + 2t = -2 \\ -2x - 3y + 5z - 5t = 2 \\ -3x - 8y - 3z + 2t = 1 \\ -x - 2y + z + 10t = 0. \end{cases}$$

### Exercice 3 :

Résoudre dans  $\mathbb{R}^5$  les systèmes donnés.

$$1) \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 - 5x_5 = -5 \\ 2x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 16x_5 = 18 \\ 5x_1 + 9x_2 - x_3 + 10x_4 + 12x_5 = -2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x + 4y + 6z + 8t + 10u = -2 \\ -x + z + 2t - 7u = -3 \\ -2x - 5y - 6z - 15t - 15u = 2 \\ -x - 4y - 7z - 10t - 3u = 5 \\ -2x - 7y - 10z - 20t - 9u = -6 \end{cases}$$

### Exercice 4 :

1) Trouver un polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant :

$$P(0) = 1 ; P(1) = 3 \text{ et } P(-1) = 1.$$

2) Trouver un polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant :

$$P(2) = P(-2) = 1 ; P(0) = -1$$

3) Trouver un polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant :

$$P(1) = 0 ; P(3) = 16 ; P'(2) = 8$$

4) Trouver un polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant :

$$P(1) = 1 ; P(2) = 15 ; P(3) = 51 ; P'(-1) = 11.$$

5) Trouver un polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 qui prenne la valeur 1 en 0 et la valeur  $-4$  en 1 et dont la courbe représentative C admette des tangents de coefficients directeurs  $-6$  et  $6$  respectivement aux points de C d'abscisses 0 et 2.

**Exercice 5 :**

Un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace est donné

1) Déterminer l'intersection des plans  $P_1, P_2$  et  $P_3$ .

$$P_1 : 2x + 2y + 6z = -1$$

$$P_2 : -3x - 4y - 9z = 1$$

$$P_3 : -y + 2z = 4.$$

2) Déterminer l'intersection des plans  $P_1, P_2$  et  $P_3$ .

$$P_1 : 3x + 3y - 3z = -3$$

$$P_2 : -3x - 3y = -1$$

$$P_3 : 2x + 2y - 8z = -8$$

**Exercice 6 :**

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  le système suivant :

$$\begin{cases} 5x + 7y - 3z = 22 \\ x + 2y - z = 6 \\ 2x - 2y + 5z = -7 \end{cases}$$

2) En déduire la solution des systèmes suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} 5|a| + 7|b| - 3|c| = 22 \\ |a| + 2|b| - |c| = 6 \\ 2|a| - 2|b| + 5|c| = -7 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{10}{x-1} + \frac{7}{2y} - 3(z+2) = 22 \\ \frac{2}{x-1} + \frac{1}{y} - (z+2) = 6 \\ \frac{4}{x-1} - \frac{1}{y} + 5(z+2) = -7 \end{cases}$$

**Exercice 7 :**

a) Résoudre dans  $\mathbb{R}^4$  le système :

$$\begin{cases} x + y + z + t = -4 \\ -x + y - z + t = 4 \\ 8x + 4y + 2z + t = 1 \\ 3x + 2y + z = 0. \end{cases}$$

b) Déterminer les coefficients a, b, c, d de la fonction.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X \mapsto aX^3 + bX^2 + cX + d$$

Sachant que  $f(1) = -4$ ,  $f(-1) = 4$ ,  $f(2) = 1$  et que f admet un minimum pour 1.

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}^4$  le système linéaire à quatre inconnues réelles a, b, c, d :

$$\begin{cases} a + b + c + d = -\frac{13}{2} \\ 4a + 3b + 2c + d = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = -2 \\ 32a + 12b + 4c + d = 0 \end{cases}$$

2) Application : Soit f la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Déterminer les réels a, b, c, d, e sachant que la courbe représentative C passe par les points  $O(0; 0)$ ,  $A\left(1; -\frac{13}{2}\right)$ ,  $B(2; -4)$ , et que C admet en chacun des points A et B une tangente de vecteur directeur  $\vec{i}$ .

### **Exercice 8 :**

1) Déterminer la fonction polynôme  $P$ , de degré 5 qui coïncide avec la fonction sinus en 0 et en  $\pi$ , dont la dérivée première coïncide avec celle de la fonction sinus en 0 et en  $\pi$ , et dont la dérivée seconde coïncide avec celle de la fonctions sinus en 0 et en  $\pi$ .

2) Soit  $f_0, f_1, f_2$  et  $f_3$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_0(x) = 1 ; \quad f_1(x) = 1 + x ; \quad f_2(x) = 1 + x + x^2 ; \quad f_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3.$$

a) On considère la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\varphi(x) = -\frac{4}{5}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + x - 7$$

Etablir qu'il existe un quadruplet de réels  $(a ; b ; c ; d)$  et un seul tel que :

$$\varphi = af_0 + bf_1 + cf_2 + df_3.$$

b) soit  $\Psi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\Psi(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3, \text{ où } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ sont des réels donnés.}$$

Démontrer qu'il existe un quadruplet  $(a ; b ; c ; d)$  et un seul tel que :

$$\Psi = af_0 + bf_1 + cf_2 + df_3.$$

### **3) Triangle**

On considère un triangle  $ABC$  tel que  $AB = 5$  cm,  $AC = 6$  cm et  $BC = 7$  cm.

Le cercle inscrit dans le triangle  $ABC$  est tangent à  $(BC)$  en  $A'$ , à  $(AC)$  en  $B'$  et à  $(AB)$  en  $C'$ .

Calculer  $AC'$ ,  $AB'$ ,  $BA'$ ,  $CA'$  et  $CB'$ .