L2- GP- S1

MDF

BHL

Généralités

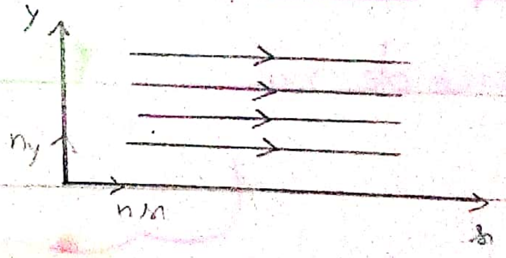
- ligne de courant : est une ligne tjr orientée, en chaqu'un des points le vecteur est tangent.

$$\frac{dx}{V_x(x,y,z;t)} = \frac{dx}{V_x(x,y,z;t)} = \frac{dy}{V_y(x,y,z;t)} = \frac{dz}{V_z(x;y,z;t)}$$

Profil de Vitesse.

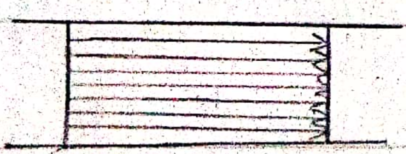
↳ ecoulement unidirectionnel :

$$V = \begin{cases} V_x = V_x(x,y,z;t) \\ V_y = 0 \\ V_z = 0 \end{cases}$$

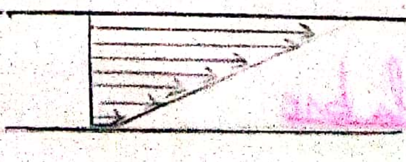


↳ ecoulement avec recirculation :

a- V uniforme



b- V linéaire



c- V parabolique

Convention d'Einstein:

$\{x = x_1 ; y = x_2 ; z = x_3 ; V_x = V_1 , V_y = V_2 , V_z = V_3 ; n_x = n_1 , n_y = n_2 , n_z = n_3\}$

$$\Leftrightarrow d\vec{r} = dx\,\vec{n}_x + dy\,\vec{n}_y + dz\,\vec{n}_z = dx_i\, n_i$$

Vecteur gradient:

$$\overrightarrow{grad}\ e = \frac{de}{dx}\vec{n}_x + \frac{de}{dy}\vec{n}_y + \frac{de}{dz}\vec{n}_z = \frac{de}{dx_i}\vec{n}_i$$

$\vec{\nabla} e$

$$\overrightarrow{grad}\ e = \vec{\nabla} e$$

Divergence d'un Vecteur:

$$div\,\vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left(\frac{d}{dx_i} n_i\right) \cdot (V_j \vec{n}_j)$$

$$div\,\vec{V} = \frac{dV_i}{dx_i} (\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j) \Rightarrow div\,\vec{V} = \frac{dV_i}{dx_i}\cancel{d_{ij}} = \frac{dV_i}{dx_i}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Rotationel d'un Vecteur:

$$rot\,\vec{V} = \vec{\nabla} + \vec{V} = \begin{vmatrix} n_x & n_y & n_z \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{dV_z}{dy} - \frac{dV_y}{dz} \\ \frac{dV_x}{dz} - \frac{dV_z}{dx} \\ \frac{dV_y}{dx} - \frac{dV_x}{dy} \end{Bmatrix}$$

Propriétés phy des fluides

r => cst massique des gaz parfait - $r = \frac{R}{M} = 286,9 \, J \, kg^{-1}/K$

Compressibilité isotherme :

l'amplitude du fluide à voir son valeur dernier sous l'effet d'une compression

(V↘ ⇒ P↗ et T cst)

(Compression isotherme)

$$\chi_T = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dp}\Big|_T$$

Contrainte de Cisaillement :

$$\tau = \lim_{S \to 0} \left(\frac{dF}{dS}\right) = \mu \cdot \frac{dV_x}{dy} = \mu \, \overrightarrow{grad} \, V$$

μ = Viscosité dynamique

τ = Contrainte de

$[\mu] = kg \, m^{-1} \cdot s^{-1} = PL$ (Poiseuille)

$\mu_{eau} (80°C) = 10^{-3} PL$, $\mu_{air} (0°C) = 18 \cdot 10^{-6} PL$

Viscosité cinétique.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$ — Viscosité dynamique

(viscosité cinétique ν)

Dérivées particulaires :

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{dV_x}{dt} + \underbrace{V_x \frac{dV_x}{dx} + V_y \frac{dV_y}{dy} + V_z \frac{dV_z}{dz}}_{\text{dirv convective}}$$

dirv instantanée ou locale

Condition de non pénétration: (d'imperméabilité)

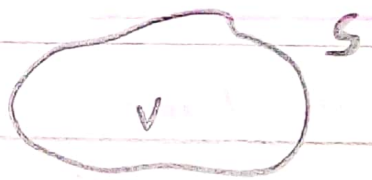
- suppose que le paroi ne soit pas perméable au fluide $(V_{fluide})_n = (V_{paroi})_n$
- Égalité des composante normales.

Condition de non glissement:

- suppose l'intence d'une viscosité aussi faible soit-elle a égalité des composante tangentielle.

HS Hydrostatique

c'est l'etude de fluide au repos, les forces de frottement sont nulles.



les forces extérieure: 2 forces:

↳ force de Volume: l'intégrale de Volume

$$F_V = \int_V \rho \vec{g}\, d\vec{V} = \int_V \rho g_i \, dV$$

↳ force de surface: l'intégrale de surface

$$F_S = \int_S P\vec{n}\, ds = -\int_S P n_i \, ds$$

Condition d'équilibre: $F_V - F_S = 0$

$$\int_V \rho \vec{g} \, dV - \int_S P\vec{n}\, ds = 0 \Rightarrow \int_V \rho g_i \, dV - \int_S P n_i \, ds = 0$$

On Trouve: $\rho \vec{g} - \vec{grad}\, P = 0 \Rightarrow \rho g_i - \frac{dP}{dx_i} = 0$ ← LFH fluide au repos, pas soumis au champ de pesenteur

⇒ repartition de pression statique uniforme

* b) fluide au repos. Soumis au champ de pesenteur

⇒ le champ de pression hydrostatique est uniforme

c) fluide au repos, soumis au champ pesenteur

⇒ la pression diminue ↓ avec l'altitude

Pression hydrostatique: $z \nearrow \Rightarrow P(z) \searrow$

$P(z) + \rho g z = cte$ ← la LFH (fluide incompressible)

la Pression motrice: $P^* = P(z) + \rho g z$

fluide compressible

$$P(z) = P_0 \exp\left[-\frac{\rho_0 g_0 R^2 T_0}{P_0}\int_0^z \frac{dz}{T(z)(R+z)^2}\right]$$

* Les éléments de réduction d'un torseur en un point:

↳ la résultante: $\vec{R} = \sum_{k=0}^{n} \vec{F_k}$

↳ Moment résultant par rapport à O:

$$\vec{M_O} = \sum M_{ik} = \sum_{k=1} (\vec{OA_k} \wedge \vec{F_k})$$

Poussé d'Archimède.

- Pour calculer R il faut connaître P

$$R = \begin{cases} R_x = \int_{z_1}^{z_2} P.L.\, dz \\ R_z = \int_{x_1}^{x_2} P L\, dx \end{cases}$$

- la Poussé d'Archimède est due aux force de pression hydrostatique

$$\int_V \rho \vec{g}\, dv - \int_S P\vec{n}\, ds = 0 \Leftrightarrow \underbrace{-\int P\vec{n}\, ds}_{R} = \underbrace{-\int_V \rho \vec{g}\, dV}_{P_A}$$

Conservation de masse

Théoreme de leibniz :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}\int_v \rho\, dv = \int_v \frac{d\rho}{dt}\, dV + \int_S \rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\, ds$$

conservation du débit :

↳ écoulement stationnaire : le débit massique se conserve tout au long du tube de courant.

↳ écoulement incompressible : le débit volumique se conserve le long d'un tube de courant en s'écoulement stationnaire

ssible)

aint :

5

Vitesse débitante :

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{U_1 = \frac{Q}{A_1}} = -\frac{1}{A_1} \int_{A_1} (\vec{V}.\vec{n})\, ds \\ \boxed{U_2 = \frac{Q}{A_2}} = \frac{1}{A_2} \int_{A_2} (\vec{V}\vec{n_2})\, ds \end{array}\right\} \longrightarrow U_1 A_1 = U_2 A_2 = Q$$

$\rho = cte \Rightarrow Q = U_1 A_1 = U_2 A_2 = cte.$

BHL

Fluide Parfait

Thm de qtt de mvt :

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} (m_k . \vec{V_k}) = \sum_{k=1}^{n} \vec{F_k}$$

Eq d'Euler : $\rho \underbrace{\left(\frac{dV_i}{dt} + V_i \frac{dV_i}{dx_i} \right)}_{\frac{dV_i}{dt}} = \rho g_i - \frac{d\rho}{dx_i}$

Thm de bernoulli :

$$\rho \frac{dV_i}{dt} dx_i + \rho d\left(\frac{V^2}{x}\right) + \rho d(g.z) + dP = 0$$

fluide incompressible

$$\int_1^2 \rho \frac{d\vec{V}}{dt} d\vec{l} + \left[(P + \rho g z) + \frac{1}{2} \rho V^2 \right]_1^2 = 0$$

Ecoulement stationnaire :

$$(P + \rho g z) + \frac{1}{2} \rho V^2 = cte$$

fluide compressible

$$\int_1^2 \frac{dV}{dt} d\vec{l} + \left[g z + \frac{1}{2} V^2 \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{dP}{\rho} = 0$$

écoulement instationnaire :

$$\left[P + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2\right]_1^2 + \underbrace{\int_1^2 \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\, d\vec{l}}_{} = 0$$

caractère instationnaire

de l'écoulement.