Lycée de Ndondol
Cours de renforcement en Mathématiques 1eS

Année :2021-2022
Professeur : M Diogoul

« Parfois la peur de souffrir, fait plus souffrir que la souffrance elle-même !!! » **Niveau 1e S2**

« Ce n'est pas parce que les choses sont difficiles que je n'ose pas, mais c'est parce que je n'ose pas **qu'elles** ***sont difficiles »***

SERIE D'EXERCICES PRODUIT SCALAIRE ET LIGNE DE NIVEAUX

Exercice 1

A-Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs du plan tels que $\|\vec{u}\|$=2 ; $\|\vec{v}\|$=3 et $\vec{u}\cdot\vec{v}$ =1.

1-Calculer $(\vec{u}+\vec{v}).(3\vec{u}-\vec{v})$.

2-Calculer $(3\vec{u}-\vec{v})^2$.En déduire $\|3\vec{u}-\vec{v}\|$.

3-Calculer $\cos(\vec{u},\vec{v})$.

B- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux tels que : $\|\vec{u}\|$=1 ; $\|\vec{v}\|$=2. Calculer $(\vec{u}-\overrightarrow{2v})^2$ puis $\|\vec{u}-\vec{v}\|$.

Exercice 2

Dans un repère ortho normal $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$, on considère les points :A (-1, 2) ; B (3,1) et C (1,0).

1-Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; AB et AC.

2-En $\widehat{BAC}$ à 10^{-1} près.

Exercice 3 Le plan est muni d'un repère ortho normal $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$.Soit φ l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $x^2+y^2+2xy-y-\frac{47}{4}=0$

1-Démontrer que φ est un cercle. Préciser son centre Ω et son rayon r.

2-Vérifier que I $(2 ; \frac{5}{2})$ appartient à φ.

3-Déterminer une équation de la tangente (T) à φ au point I.

Exercice 4 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs tels que $\|\vec{u}\|$=1 ; $\|\vec{v}\|$=3 et $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = -2.

1-Calculer $(2\vec{u}+3\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$.

2-Déterminer un réel x tel que $(2\vec{u}+x\vec{v})$ soit orthogonal à $\vec{u}-\vec{v}$.

Exercice 5 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs tels que $\|\vec{u}\|$=5 ; $\|\vec{v}\|$=3 et $\cos(\vec{u},\vec{v})=-\frac{1}{3}$.

1-Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

2-On pose $\vec{w}=\vec{u}-2\vec{v}$ et $\vec{t}=\vec{u}+\vec{v}$

a-Calculer $\vec{w}\cdot\vec{t}$, $\|\vec{w}\|$ et $\|\vec{t}\|$

b- Vérifier que $\cos(\vec{w},\vec{t})=\frac{\sqrt{6}}{9}$.

Exercice 6 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$). On considère l'ensemble φ des points M vérifiant tels que : $x^2 + y^2 - x + 2y + \frac{1}{4} = 0$.

1-Démontrer que φ est un cercle dont on précisera le centre I et son rayon R.

2-Etudier la position relative de la droite (Δ) d'équation : $x + y + 1 = 0$

Exercice 7 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$). On donne les points :
A (-2, 1) et B (2,3) Déterminer une équation de la droite tangente au cercle de diamètre [AB] et passant A.

Exercice 8 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$). Déterminer une équation du cercle de diamètre [AB] sachant que les points A et B ont pour coordonnées respectives
A (1, -1) et B (3,-2).

Exercice 9 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$). On donne les points :
A (-1, 2) et B (3, 4). Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice [AB].

Exercice 10 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$). On donne les points :
M (2,λ) ; A (1, 3) et L (4 , 3$-\lambda$). Déterminer les réels λ tel que le triangle MAL est rectangle en A.

Exercice 11 Soit un rectangle ABCD tel que AB=2cm et AD=$\sqrt{2}$.I désigne le milieu de [AB].Montrer que les droites (AC) et (I D) sont perpendiculaires.

Exercice 12

A- Le plan est rapporté à un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1-Déterminer une équation du cercle (ξ) de centre $A\binom{1}{-2}$ et de rayon 3.

2-Soit (Γ) l'ensemble des points M$\binom{x}{y}$ tels que : que $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 5 = 0$.
Quelle est la nature de (Γ).Donner ces éléments caractéristiques.

3- Soit (ψ) l'ensemble des points M$\binom{x}{y}$ tels que : que $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 26 = 0$.
Quelle est la nature de (ψ) ?

B-ABC est un triangle tel que AB=5cm , $\widehat{A}$ =60° et $\widehat{B}$ =26°.Calculer BC et AC à 10^{-2} près

Exercice 13 Soit ABC un triangle équilatéral de centre de gravité G, de côté a. Calcule chacun en fonction de a, chacun des produits scalaires suivants : a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; b)$\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right)$; c) $\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BG}\right)\overrightarrow{AC}$; e) $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AG}\right)$; f) $\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right)\overrightarrow{AC}$.

Exercice 14

I- On donne AB=5cm , AC=7cm et BC=4cm.Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

II-L 'unité est le centimètre

1-Construire des points A,B ,C tels que AB=4cm , AC=5cm et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4$

2-Déterminer une valeur approchée de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ en degré , à 10^{-1} près

3-On donne le point I tel que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.Calculer le carré scalaire $\overrightarrow{AI}^2$ puis en déduire la distance AI.

4-On donne le point J tel que $\overrightarrow{AJ} = -7\,\overrightarrow{AB} + 4\,\overrightarrow{AC}$.Démontrer que le triangle AIJ est rectangle en A.

Exercice 15

ABCD est un parallélogramme Démontrer $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$

Exercice 16 Soit A et B des points du plan et I le milieu de [AB].

1-Démontrer que, pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$.

2-Dans cette question, on suppose que AB=4.Soit k un réel. On note φ_k l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

a-Discuter la nature de l'ensemble φ_k suivant les valeurs de k.

b-Représenter sur une même figure les ensembles φ_{-3} , φ_0 et φ_3

Exercice 17

1-Soit A et B des points du plan tels que AB=2.

a-Déterminer l'ensemble ψ des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 3$.

b-Déterminer l'ensemble ϕ des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -3$.

2-Soit A un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel. On note $\wp_k$ l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$.Démontrer que ,pour tout réel k ,l'ensemble $\wp_k$ est une droite de vecteur normal $\vec{u}$.

Exercice 18 On considère les points A $\left(1, \frac{1}{2}\right)$,B$\left(1, \frac{5}{2}\right)$, et C $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

1-Vérifier que $\widehat{ABC}$ =90°.

2-Déterminer une équation du cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC.

3-Calculer les coordonnées des points d'intersection de (Γ) avec les axes du repère.

Exercice 19 Soit ABC un triangle. On donne AB=5,4cm , AC=3,6cm et $\widehat{A}$ =62°.

1-Faire une figure

2-Calculer BC à 10^{-1} près.

3-calculer $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ à 10^{-1} près.

Exercice 20

Soit ABC un triangle et I le milieu de [BC]. On donne AB= 6,5cm, AI=4,5cm et AC = 3,5cm.

1-Calculer la valeur exacte de BC.

2-Calculer une valeur approchée de $\widehat{BAC}$ à 0,1 près.

3-Calculer l'aire S du triangle ABC à 10^{-1} près.

Exercice 21 Soit A,B,C et D des points .On note I et J les milieux respectifs de [AC] et [BD].

1-Démontrer que $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$.

2-En déduire qu'un quadrilatère est un parallélogramme si, et seulement si, la somme des carrés de ses cotés est égale à la somme des carrés de ses diagonales.

Exercice 22

i-ABCD est un carré de côté a ,de centre O et I est le milieu de [AB].

Calculer les produits suivants, en fonction de a.

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{BC}$; 4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

ii- ABCD est un losange de centre O. Exprimer les produits suivants en fonction de AC :

1) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CO}$; 2) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

iii- ABCD est un triangle équilatéral de côté a. On note I le milieu de [AB].

Exprimer les produits scalaires suivants en fonction de a : 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{AB}$

Vi- ABCD est un triangle équilatéral de centre O de côté a. Calculer 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$;2) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$

Exercice 23 Le plan est rapporté à un repère (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1-On donne $\vec{u}\binom{-1}{-3}$ et $\vec{v}\binom{4}{2}$ .Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, puis $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

2-On donne $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\vec{v}\binom{-b}{a}$,ou a et b désignent des réels.

Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$. Que peut-on en déduire ?

3-m désigne un réel. On donne $\vec{u}\binom{3}{-m+1}$ et $\vec{v}\binom{4m}{-1}$.

Déterminer m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

Exercice 24

Soit A et B deux points du plan tels que AB= 4cm

1-Déterminer l'ensemble E_1 des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = 8$.

2-Déterminer l'ensemble E_2 des points M du plan tels que : MA. MB = 21.

3-Déterminer l'ensemble E_3 des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = 26$.

Exercice 25

Soit A et B deux points du plan tels que AB=5

1-Déterminer la ligne de niveau de l'application $M \mapsto MA^2 - MB^2$ relative au réel k = -5

2-Déterminer la ligne de niveau de l'application $M \mapsto MA^2 + MB^2$ relative au réel k = -4

3-Déterminer la ligne de niveau de l'application M $\mapsto \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ relative au réel k = $-\frac{9}{4}$

Exercice 26 Soit A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur tel que $\|\vec{u}\|$=5

1-Rechercher les lignes de niveau de l'application M $\mapsto \vec{u}.\overrightarrow{AM}$ relatives aux réels k =15 et k =2,5

2-Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que -2,5$\leq \vec{u}.\overrightarrow{AM} \leq 15$

Exercice 27 Soit A et B deux points du plan tels que AB=5

1-Soit G le barycentre de (A,2) ; (B,3). Montrer en utilisant la relation de Chasles, que $2MA^2 + 3MB^2 = 5MG^2 + 2GA^2 + 3GB^2$

2-Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ *et* $\overrightarrow{GB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, puis les distances GA et GB en fonction de AB.

3-En déduire que $2MA^2 + 3MB^2 = 5MG^2 + \frac{6}{5}AB^2$

4-Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $2MA^2 + 3MB^2 = 50$

Exercice 28 Soit ABC un triangle et I milieu de [BC].
1-Montrer que $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$

2-Les côtés d'un triangle ont pour mesures 5cm ,7cm et 8cm.Calculer la mesure de chacune des médianes.

Exercice 29 Soit ABC un triangle non aplati d'orthocentre H, de centre de gravité G et O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.On désigne par I le milieu de [BC] et J celui de [AC].Soit le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$

1-Montrer que $\vec{u} = \overrightarrow{AH} - 2\overrightarrow{OI}$ puis en déduire que $\vec{u}.\overrightarrow{BC} = 0$

2-Etablir que $\vec{u}.\overrightarrow{AC} = 0$

3-En déduire que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

4-Montrer que les points O ; H et G sont alignés.

Exercice 30 Soit ABC un triangle un triangle quelconque tel que AB=c ; AC=b et BC=a

G le barycentre de (A,1) ; (B,-1) et (C,2)

1-Construire G.

2-calculer $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CB}$

3-Soit $f(M)$ =$MA^2 - MB^2 + 2MC^2$ .Montrons que $f(M) = 2MG^2 + GA^2 - GB^2 + 2GC^2$

4-Calculer GA^2 ; GB^2 et GC^2

5-Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = a^2 + b^2$

Exercice 31 Soit ABC un triangle rectangle d'hypothèse BC =2a. I est le milieu de [BC]

1-Montrer que le point G défini par 4 $\overrightarrow{GA}$ - $\overrightarrow{GB}$ - $\overrightarrow{GC}$ = $\vec{0}$ est le symétrique de I par rapport à A.

2-Quel est l'ensemble des points M du plan (ABC) tels que : $4MA^2 - MB^2 - MC^2 = 4a^2$

Exercice 32 On donne un triangle ABC rectangle en A de centre de gravité G et A' le milieu de [BC].On pose BC = a.

1-Exprimer $4\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{AA'}$ en fonction de a.

2-Exprimer $GB^2 + GC^2$ en fonction de a.

3-En déduire que $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{2}{3}a^2$

4-Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{3}{4}a^2$

Exercice 33 On considère un triangle ABC tel que : AB=AC=4cm et BC=2

1-Déterminer le point G tel que $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

2- Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $MB^2 + MC^2 = MA^2$

3-Montrer que pour tout point M du plan $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AG}$

4-En déduire l'ensemble F des points du plan tel que : $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 32$

Exercice 34 On considère un triangle non aplati ABC de centre de gravité G

1-Ecrire la relation vectorielle vérifiée par le point G.

2-Soit l'application du plan P dans V (ensemble des vecteurs du plan) définie pour tout $M \epsilon P$ par $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

a-Montrer que $\forall\ M \epsilon P$, $\overrightarrow{f(M)} = 3\overrightarrow{MG}$.

b-Montrer que si M_1 et M_2 sont deux points du plan tels que $\overrightarrow{f(M_1)} = \overrightarrow{f(M_2)}$ alors ils sont confondues .En déduire que G est l'unique point du plan tel que $\overrightarrow{f(G)} = \vec{0}$

3-Soient A' ,B' et C' les milieux respectifs des segments [BC] ; [AC] et [AB]

a-Montrer que $\forall\ M \epsilon P$, $\overrightarrow{f(M)} = 3\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'A} = 3\overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'B} = 3\overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{C'C}$

b-En déduire que $3\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A} = 3\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'B} = 3\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{C'C} = \vec{0}$

c-En déduire que les trois médianes de ABC sont concourantes.

Exercice 35

Soit ABC un triangle de centre de gravité G.

a-Montrer que pour tout point M du plan $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

b-Soit O le milieu de [BC].Montrer que pour tout point M du plan : $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{OA}$

c-Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tels que :

$\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$

2-Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : AB= 4cm

a) $MA^2 + MB^2 = 10$; b) $MA^2 - MB^2 = 8$

Exercice 36 *ABCD, un parallélogramme tel que* $AB = 50$; $AD = 80$; $AC = 70$.

1-Montrer que $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} = 2000$. En déduire une mesure en degré de l'angle $A\hat{D}C$.

2-Calculer $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ et $\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)^2$.

Exercice 37 Dans un parallélogramme $ABCD$ on donne : $AB = 4$; $AC = 7$ et $AD = 5$.
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

Dans un triangle ABC rectangle en A ; P désignant le milieu de $[AB]$ et O celui de $[AC]$.
Démontrer que $BO^2 + PC^2 = \dfrac{5BC^2}{4}$

Exercice 38 $ABCD$ est un parallélogramme tel que :AB =5cm ,AC=6cm et AD=4cm .
Calculer les produits scalaire suivants : 1) $\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{CA}$; 3) $\overrightarrow{DC} . \overrightarrow{AB}$; 4) $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}$.

Exercice 39 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$). On considère les points :
A (-1,2) ; B (1, -3) et C (3 , 4). Déterminer l'ensemble des points M,$(x; y)$:

$\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} . \overrightarrow{MC} - 2\, \overrightarrow{MC} . \overrightarrow{MA} = \vec{0}$

« Chers élèves ce n'est pas le chemin qui est difficile, c'est le difficile qui est le chemin »