OUVRAGE COLLABORATIF

100% GRATUIT

MATHEMATIQUES en T^{le} I

Cours • Exercices

Conformes au nouveau programme en vigueur au Cameroun

Groupe WhatsApp

LES GRANDS PROFS DE MATHS

3EME EDITION

AVANT - PROPOS

Dans un contexte où l'insertion dans le monde de l'emploi est devenu de plus en plus difficile, beaucoup d'Etats ont compris qu'en ce qui concerne le système éducatif, il faut mettre l'apprenant au centre de la « construction du savoir » ; il faut une école soucieuse d'outiller les apprenants afin qu'ils puissent faire face à des situations de vie réelle, complexes et diversifiées. À la place d'une école coupée de la société, il faut une école intégrée, soucieuse du développement durable, et qui prend en compte les cultures et les savoirs locaux. C'est ainsi que dès 2014, le Cameroun a emboité le pas à d'autres pays africains et a ouvert les portes à l'APC qui remplacera progressivement l'APO jusqu'en classe de terminale en 2020. Pour le gouvernement, c'est un outil majeur pour atteindre l'émergence en 2035. Un groupe de jeunes enseignants soucieux de l'éducation en Afrique en générale et au Cameroun en particulier a donc décidé de ne pas rester spectateurs et de jouer les premiers rôles dans ce processus.

Cet ouvrage et toute la collection de la 6ème en Tle, est l'œuvre d'un groupe d'enseignant dynamique et rompu à la tâche. Ils sont réunis dans un forum whatsapp dénommé « Grangprofs de maths (GPM) ». Cette 3ème édition est le fruit de l'un de ces objectifs majeurs ; une conséquence de trois mois et demi de travail dont la partie intense s'étendait du 27/07/2020 au 05/10/2020 (date de la rentrée scolaire au Cameroun.)

Destinés exclusivement à l'usage de l'enseignant, les documents de cette édition n'ont pas la prétention de remplacer les livres inscrits au programme mais d'être des compléments de ces derniers. Chaque leçon de cette édition respecte les dernières mises à jours qu'ont connu l'APC qui est encore jeune et en mutation au Cameroun. Ainsi, dans toutes les leçons de cette 3ème édition, il existe une forte corrélation entre la situation problème et une partie de l'activité d'apprentissage dont l'objectif est non seulement d'installer les ressources de la leçon, mais aussi de résoudre le problème posé dans la situation problème.

Cette édition doit son succès à un groupe d'enseignants de mathématiques exerçant dans toutes les régions du Cameroun. Une mention spéciale est à décerner à tous les chefs d'ateliers qui ont travaillé inlassablement pour mener ce projet à bon port ; aux administrateurs, surtout **M. Pouokam Léopold Lucien** qui a su remobiliser les troupes quand le déroulement des travaux a connu un coup à cause de la rentrée scolaire. Difficile de ne pas mentionner l'un des pédagogues dont la contribution pour la fusion des documents a été capitale, il s'agit de **M. NJANDA NJANDA Jacques**. Nous ne saurons terminer sans féliciter les acteurs principaux, ceux-là qui ont cru en ce projet, y ont consacré leur précieux temps et leur savoir-faire non seulement dans la réalisation d'au moins l'un des 185 chapitres du projet mais aussi pour les critiques constructives qui ont permis d'optimiser la qualité des cours produits.

La perfection étant utopique, nous avons l'intime conviction et le ferme espoir que les éventuelles coquilles que pourrait contenir un document de cette collection rencontreront l'indulgente compréhension des utilisateurs. Pour ainsi dire, nous serons ouverts aux suggestions et critiques constructives.

Tous les enseignants ou passionnés des mathématiques désirant faire partir de la famille « GPM » et disponible à participer aux futurs projets du groupe sont priés de bien vouloir écrire à l'un des administrateurs ci-dessous : **M. Guela Kamdem Pierre (697 473 953 / 678 009 612), M. Pouokam Léopold Lucien (696 090 236 / 651 993 749), M. Tachago Wabo Wilfried Anderson (699 494 671) et M. NTAKENDO Emmanuel (676 519 464).**

NB : Toute utilisation d'un document de cette collection à but lucratif est formellement proscrite.

Les auteurs.

SOMMAIRE

MODULE : 24	RELATIONS ET OPÉRATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS

CHAPITRE I : ARITHMETIQUE

LECON 1 : DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$ 100 minutes

Motivation :

En cryptologie, le processus de codage et de décodage fait appel à plusieurs notions dont l'une est le calcul des cryptages qui se feront modulo n.

Objectifs pédagogiques :

A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :
- Déterminer l'ensemble des diviseurs et des multiples d'un entier relatif.
- Utiliser les règles de calculs sur les congruences pour déterminer le reste de la division euclidienne.
- Utiliser les règles de calcul sur les congruences pour déterminer les critères de divisibilité en base 10.

Prérequis :

Effectuez la division euclidienne de :
- 27 par 5
- 27 par 3

Situation problème :

Adama élève en classe de seconde C possède un cartable et un téléphone portable portant chacun un code. Par négligence il a oublié ses codes et ne parvient plus ni à ouvrir son cartable ni à déverrouiller son téléphone. Il sait néanmoins que le code du cartable est formé de 5 chiffres sont les 5 premiers diviseurs positifs de 12 et que le code du téléphone forme de 5 chiffres sont les 5 premiers sont les 5premiers multiples de 3 proches de zéro et dans l'ordre croissant et le 6[e] chiffre x est tel que le reste de la division euclidienne de x par 5 est 2 avec x non paire. Aidez Adama à retrouver ses codes.

Activité d'apprentissage

Activité

a. Déterminer les diviseurs positifs des 12
b. Déterminer les diviseurs de 12 dans $\mathbb{Z}$.
c. Déterminer les multiples de 3 et -3 dans $\mathbb{Z}$.
d. Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Reste la division de x par 5										

e. Que peux-tu dire à Adama ?

Solution

a. 12=1×12 ; 12=2×6 ; 12=3×4 ; 12=4×3 ; 12=6×2 ; 12=12×1.
Donc $\mathfrak{D}^{+}(12) = \{1,2,3,4,6,12\}$
b. $\mathfrak{D}(12) = \{-12,-6,-4,-3-2,-1,1,2,3,4,6,12\}$
c. $M(3) = \{\ldots -12,-9,-6,-3\ ,0\ ,3\ ,6,9,12,\ldots\}$; $M(-3) = \{\ldots -12,-9,-6,-3\ ,0\ ,3\ ,6,9,12,\ldots\}$

d.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste la division de x par 5	0	1	2	3	4	0	1	2	3

e. L'ensemble diviseurs de 12 est $\mathfrak{D}(12) = \{-12\,;-6\,;-4\,;-3\,;-2\,;-1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 12\}$.
Donc le code du cartable est $C1 = 12346$.
L'ensemble des multiples de 3 est $M(3) = \{\dots-12\,,-9\,,-6\,,-3\,,0\,,3\,,6\,,\ 9\,,12\,,\dots\}$.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste la division de x par 5	0	1	2	3	4	0	1	2	3

Le code du téléphone portable est $C2 = -6 - 30367$

Résumé

1.1. Relation de divisibilité

Définition :
Soient $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}*$, on dit que a est divisible par b ou que b est un diviseur de a, ou que a est un multiple de b s'il existe k ∈ ℤ tel que $a = bk$. Cette relation entre a et b se note a|b.

Exemple : 3|21 car 21= 7 × 3, 5|15 car 15 = 5 × 3

Remarque :
L'ensemble des diviseurs d'un entier b est noté (b) et l'ensemble des multiples d'un entier relatif a est noté aℤ .
Exemples : 2ℤ $= \{\dots;-6\,;\ -4\,;\ -2\,;0\,;\ 2\,;\ 4\,;\ 6\,;\dots\dots.\}$ et $\mathfrak{D}(6) = \{-6\,;\ -3\,;\ -2\,;-1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 6\}$

Propriétés : Soient $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{Z}*$
P1 : a|b et b|a ⟺ a = b ou a = - b ;
P2 : Si d|a et d|b alors pour tous entiers relatifs u et v , d|(au+bv) ;
P3 : Si a|b et c|d, alors ac|bd ;
P4 : Si a|b , alors pour tout entier naturel k , $a^k|b^k$;
P5 : Si d est un entier relatif non nul , alors a|b ⟺ ad| bd ;
P6 : Si b|a , alors a ℤ ⊂ b ℤ .
P7 : Si b|a alors |b| ≤ |a|

1.2. Division Euclidienne

Définition : Soient a ∈ ℤ et b ∈ ℤ*. Il existe un unique couple (q,r) ∈ ℤ × ℕ tel que :
$a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$. Dans cette expression a est appelé le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste.

Exemple : La division Euclidienne de 12839 par 2567 s'écrit par 12839 = 5×2567 + 4
La division Euclidienne de - 26 par 3 s'écrit par -26 = 3× (-9) + 1

1.3. Relation de congruence :

Définition :(congruence modulo un entier) Soient n∈ ℕ* et a, b ∈ ℤ . On dit que a est congru à b modulo n si n|(b-a), c'est-à-dire s'il existe k∈ ℤ tel que $a - b = kn$. On note $a \equiv b\ mod[n]$ ou $a \equiv b\ [n]$; se lit "a congru à b modulo n ".

Exemple : 6≡ 1 mod[5] car 6 – 1= 5 = 5 × 1; 25≡ 4 mod[7] car 25 – 4= 21 = 7 × 3 ; 6≡ -1 mod[7]

Propriété : Si a ≡ b mod[n] , alors a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.

Exemple : On sait que 11 ≡ 6 mod[5] , or le reste de la division euclidienne de 6 par 5 est 1. D'où 1 est aussi le reste de la division euclidienne de 11 par 5.

Conséquence : Si a ≡ b mod[n] et que $0 \leq b <$ n alors b est le reste de la division euclidienne de a par n.
Ainsi les restes possibles de la division euclidienne d'un entier relatif a par un entier naturel n sont 0 ; 1 ; $2\,;\ 3\ \dots.;\ n-1$.

Propriétés :

P1 : $a \equiv a \, mod[n]$

P2 : Si $a \equiv b \, mod[n]$ et $b \equiv c \, mod[n]$, alors $a \equiv c \, mod[n]$

P3 : Si $a \equiv a' \, mod[n]$, $b \equiv b' \, mod[n]$ alors : $a + b \equiv (a' + b') \, mod[n]$

P4 : Si $a \equiv a' \, mod[n]$, $b \equiv b' \, mod[n]$ alors : $ab \equiv a'b' \, mod[n]$

P5 : Si $a \equiv a' \, mod[n]$, $k \in \mathbb{Z}^*$ alors : $ka \equiv ka' \, mod[n]$

P6 : Si $a \equiv a' \, mod[n]$, $k \in \mathbb{Z}^*$ alors : $a^k \equiv a'^k$ mod[n]

P7 : $a \equiv 0 \, mod[n]$ $\Leftrightarrow$ a est multiple de n

Remarque :

Si $pgcd(k, n) = 1$, alors ($ka \equiv ka' \, mod[n]$ avec $k \in \mathbb{Z}*$) $\Longrightarrow$ ($a \equiv a' \, mod[n]$)

Critère de divisibilité :

Soit x un entier relatif

P1 : x est divisible par 2 (respectivement par 5) si et seulement si $x_0 \equiv 0$ mod[2] (respectivement $x_0 \equiv 0$ mod[5]) ou x_0 est le dernier chiffre de x.

P2 : Un entier est divisible par 3 (respectivement par 9) si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3 (respectivement par 9)

P3: Un entier est divisible par 11 si et seulement si la somme des chiffres de rang paire diminué de la somme des chiffres de rang impair est multiple de 11

P4 : Un entier est divisible par 3 (respectivement par 9) si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3 (respectivement par 9)

Exercice d'application :

1- Déterminer le reste de la division de 478987 par 4 et par 25

2- Vérifier que 12475 est divisible par 5

3- Déterminer le reste de la division de 478987 par 3.

4- 165789 est 'il multiple de 11 ?

5- Pour tout entier naturel n, on pose $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$.

a- Montrer que $A_{n+3} \equiv A_n$ [7].

b- Déterminer l'ensemble S des entiers naturels n tels que $An \equiv 0$ [7]

Solution :

1- 47897=4×11976+3 et 47897=25×1915+22

2- 5≡ 0[5] donc 1245 est divisible par 5.

3- 478987=400000+70000+900+80+7 On a 400000≡ 1[3] ;70000≡ 1[3] ; 900≡0[3] ;7≡ 2[3]. Donc 478987≡ 2[3].

4- 8+5+1=14 et 9+7+6=22 et 14-22=-8

5- a- $A_{n+3} = 2^{n+3} + 2^{2n+6} + 2^{3n+9} = 8.\, 2^n + 64.\, 2^{2n} + 512.2^{3n}$ or 8≡ 1[7] et 64≡ 1[7] et 512≡ 1[7]. Donc $A_{n+3} \equiv A_n$ [7].

b- Si $n \neq 3k$ alors $A_n \equiv 0$ [7]. En effet, on a le tableau des restes suivant :

n	0	1	2	3	4	5
2^n	1	2	4	1	2	4
2^{2n}	1	4	2	1	4	2
2^{3n}	1	1	1	1	1	1
A_n	3	0	0	3	0	0

LECON 2 : NOMBRES PREMIERS, PGCD ET PPCM - 100 minutes

Motivation :

En cryptologie, le processus de codage et de décodage fait appel à plusieurs notions dont l'une est le choix de deux nombres premiers p et q que l'on garde secrets et on pose $n = p \times q$. Le principe étant que même connaissant n il difficile de retrouver pet q.

Objectifs pédagogiques :

A la fin de cette leçon, l'élève devra être capable de :

- Reconnaitre si un nombre est premier.
- Déterminer le nombre de diviseur d'un entier.
- Déterminer des entiers connaissant leur PGCD et leur PPCM.
- Calculer le PGCD de deux entiers en utilisant l'algorithme d'Euclide.

Prérequis

Reconnaitre parmi les nombres suivants les nombres premiers : 6 ;9 ;8 ;11 ;2 ;5 ; 3 ;16.

situation problème

Paul ingénieur programmeur possède deux disques procédant chacun un signal lumineux programmés de façon à ce que le premier émet chaque 150 secondes et la deuxième chaque 335 secondes. Il y a coïncidence à 21h00 et il observe le phénomène et se pose la question de savoir à quel moment aura lieu la prochaine coïncidence après 21h00. Aide-le à résoudre son problème.

Activité d'apprentissage

Activité

a- Décompose 150 et 335 en produit de facteurs premiers
b- Détermine le PGCD et le PPCM de 150 et 335
c- Effectue les opérations PGCD×PPCM et 335×150
d- Conjecturer une relation entre PGCD et PPCM
e- Recopier et compléter le tableau suivant sachant que $a = bq + r$:

a	335	150		
b	150	35		
R	35			

Déterminer le PGCD de 335 et 150 puis déduire de d-) le PPCM de 150 et 335.
f- Que peux-tu dire à cet ingénieur ?

Solution

a- $150 = 2\times3\times5^2$; $335 = 5\times67$
b- PGCD (150 ;335) = 5 et PPCM (150 ;335) $=2\times3\times5^2\times67=10050$
c- $5\times10050=50250$ et $150\times335=50250$
d- On a PGCD (a ; b) × PPCM (a ; b) = a×b
e-

a	335	150	35	10
b	150	35	10	5
R	35	10	5	0

$PGCD\ (335\ ;\ 150) = 5$ puis $PPCM\ (150\ ;\ 335) = \frac{150\times335}{5} = 10050$

f- Le $PPCM\ (150\ ;\ 335)$ est $10050 = 3600 \times 2 + 2850 = 3600 \times 2 + 60 \times 47 + 30$
Soit 2H47mn30s +21H cette coïncidence aura lieu à 23H47mn30s

Résumé

2.1. *Nombres premiers*

Définition :
On dit qu'un entier naturel p est premier s'il possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et p.
Exemple : 2 , 3 , 5 , 7 , 11 et 13 sont des nombres premiers.
Propriété : Tout entier naturel n différent de 0 et de 1 admet au moins un diviseur premier. Si n n'est pas premier, alors il admet au moins un diviseur premier p tel que $2 \leq p \leq \sqrt{n}$
Remarque : Le critère d'arrêt s'énonce encore comme suit : "si n n'admet pas de diviseur premier p tel que $2 \leq p \leq \sqrt{n}$, alors n est premier."
Exemple: Montrer que 29 est un nombre premier.
Les nombres premiers inferieurs à $\sqrt{29}$ sont : 2 ; 3 ; 5. Aucun de ces nombres ne divise 29 donc 29 est premiers.
Propriété : Il existe une infinité de nombres premiers
Preuve :
Procédons par l'absurde Supposons qu'il existe un nombre fini n de nombres premiers : $P_1, P_2, \cdots, p_i, \cdots, P_n$. Soit N un nombre entier non premier, supérieur à 2 : $N=P_1\times P_2\times\cdots\times P_{n-1}\times P_n+1$. D'après le critère d'arrêt, N admet un diviseur premier. Soit Pi, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, ce diviseur premier. Pi divise $P_1\times P_2\times\cdots\times P_{n-1}\times P_n$ et N donc Pi divise $1 = N-P_1\times P_2\times\cdots\times P_{n-1}\times P_n$. Ceci est absurde car $Pi \geq 2$.
Conclusion : il existe une infinité de nombres premiers. ■

2.2. *Décomposition, diviseur d'un entier*

Propriété

- **Théorème fondamental de l'arithmétique** :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Il existe des nombres premiers $P_1, P_2, \cdots P_k$ et des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_k$ tels que : $n=P_1^{\alpha_1}\times P_2^{\alpha_2}\times\cdots\times P_k^{\alpha_k}$. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs prêt.

- Soit x un entier naturel se décomposant en un produit de facteurs premiers de la forme :

$x=P_1^{\alpha_1}\times P_2^{\alpha_2}\times\cdots\times P_k^{\alpha_k}$. Alors le nombre de diviseur positif de x est $N=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\times\cdots\times(1+\alpha_k)$.

2.3. *PPCM et PGCD de deux entiers relatifs*

2.3.1. *PPCM de deux entiers relatifs*

Définition
Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. L'ensemble des multiples strictement positifs commun à a et b contient ab et est donc non vide : il admet donc un plus petit élément que l'on appelle le plus petit commun multiple de a et b. On le note PPCM (a ; b)
Remarque : Il découle de cette définition que pour tout entier relatifs a et b, on a

- PPCM (a ; b) = PPCM (|a| ; |b|).
- PPCM (a; b) = PPCM(b; a).
- Max (a; b) ≤ PPCM(a; b) ≤ ab

Propriété :

P1) Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Alors b|a ⇔ PPCM (a ; b) = a.

P2) Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Alors pour tout entier relatif c, on a :
(a|c et b|c) ⇔ PPCM(a ; b)|c.

P3) Soit a , b et k trois entiers naturels non nuls. Alors PPCM (ka ; kb) = kPPCM(a ; b)

2.3.2. *PGCD de deux entiers relatifs*

Définition

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. L'ensemble des diviseurs strictement positif commun à a et b noté D(a ; b) contient 1 et est fini : il admet donc un plus grand élément que l'on appelle le plus grand commun diviseur de a et b. On le note PGCD (a ; b)

Exemple : PGCD (24 ; 18)=6, PGCD(60 ; 84)=12, PGCD(150 ; 240)=30

Remarque : Il découle de cette définition qu'on a :

- Pour tous a, b∈Z*, PGCD (a ; b)=PGCD (|a| ; |b|).
- Pour tous a, b∈Z*, PGCD (a ; b)=PGCD (b ; a).
- Si $a = bq + r$ alors PGCD (a ; b)=PGCD(b ; r) avec $0 \leq r < |b|$ (algorithme d'Euclide)

Propriété :

P1) Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Alors b|a ⇔ PGCD (a ; b) =b.

P2) Soit a, b et k trois entiers naturels non nuls. Alors PGCD (ka ; kb) = kPGCD (a ; b).

P3) Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Alors pour tout entier relatif c, on a :
(c|a et c|b) ⇔ c|PGCD(a ; b).

P4) Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Alors PGCD (a ; b) ×PPCM (a ; b) =a×b

Exemple :

- PGCD (75 ; 0) =75.
- PGCD (−36 ; −12) =PGCD (36 ; 12) =3.
- PGCD (72 ; 6) =6 car 6 divise 72.
- PGCD (720 ; 60) =10PGCD (72 ; 6) =60.

MODULE 24 : RELATIONS ET OPÉRATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS

CHAPITRE II : FONCTIONS NUMÉRIQUES D'UNE VARIABLE

Intérêt :

Les fonctions numériques sont d'une très grande importance dans notre vie de tous les jours, Par exemple, nous faisons recours aux fonctions numériques pour décrire une dépendance entre deux quantités ; pour optimiser, pour comparer la des vitesses de croissance, pour décrire un phénomène périodique ; ….

Leçon 1 : FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE : Durée 50 min.

Compétences à acquérir :

∗ Consolider la notion de continuité ;
∗ Déterminer graphiquement ou à partir d'un tableau de variation l'image d'un intervalle par une fonction ;
∗ Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier l'existence des solution dans un intervalle des solutions de l'équation $f(x) = a$.

Pré requis :

une fonction est continue sur un intervalle I lorsque sa restriction à I est continue en tout élément de I.

Motivation :

Les équations en une variable x qu'on sait résoudre explicitement, c'est-à-dire en donnant une formule pour la solution, sont très particulières : par exemple les équations du premier degré $ax + b = 0$, celles du second degré $ax^2 + bx + c = 0$.
Mais pour la plupart des équations, il n'est pas possible de donner une formule pour la ou les solutions. En fait il n'est même pas évident de déterminer seulement le nombre de solutions, ni même s'il en existe. Considérons par exemple l'équation extrêmement simple : $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$
Il n'y a pas de formule explicite (utilisant des sommes, des produits, des fonctions usuelles) pour trouver la solution x. Dans cette leçon nous allons voir que grâce à l'étude de la fonction $(x) = x^3 - 2x^2 - 1$, il est possible d'obtenir beaucoup d'informations sur l'ensemble des solutions de l'équation $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$, et même de l'équation plus générale $x^3 - 2x^2 - 1 = y$ (où $y \in \mathbb{R}$ est fixé).

SITUATION PROBLEME

L'évolution de la température en point de la terre est donnée par la fonction θ définie par :
$\theta(t) = t^3 - 2t^2 - 1$, où t est le temps écoulé en million d'années en ce point de la terre. Les météorologues aimeraient estimer, le nombre de million d'années où la température sera nulle en ce lieu. Aide-les.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE.

Activité

Soit f la fonction dont le tableau de variation est donné ci – dessous.

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{53}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Déterminer les images par f des intervalles suivants : $]-\infty;0[$; $\left]0;\frac{4}{3}\right]$; $\left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

Justifier que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-\infty;0]$.

Justifier que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution sur $\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$.

Justifier que l'équation $f(x) = -2$ a au moins une solution sur $]-\infty;0]$.

Résumé :

Image d'un intervalle par une fonction continue

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Alors f est bornée sur $[a;b]$ et atteint ses bornes.

Plus précisément, il existe deux réels m et M tels que $f([a;b]) = [m;M]$ avec m le minimum de f sur $[a;b]$ et M le maximum de f sur $[a;b]$.

En d'autres termes, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

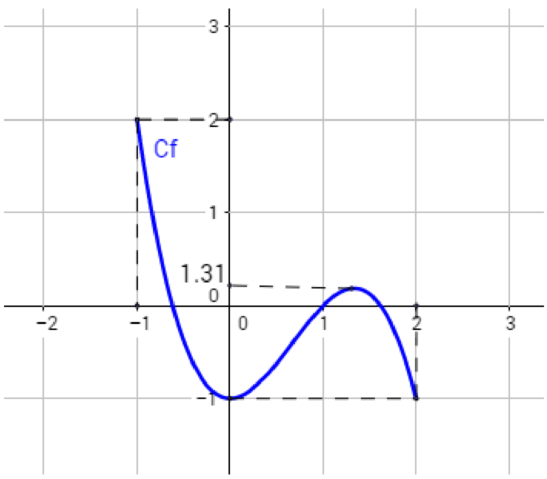
Propriétés : par une fonction continue,

∗ L'image d'un intervalle est un intervalle ou un singleton.

∗ L'image d'un intervalle fermé est un intervalle fermé ou un singleton.

Exemple :

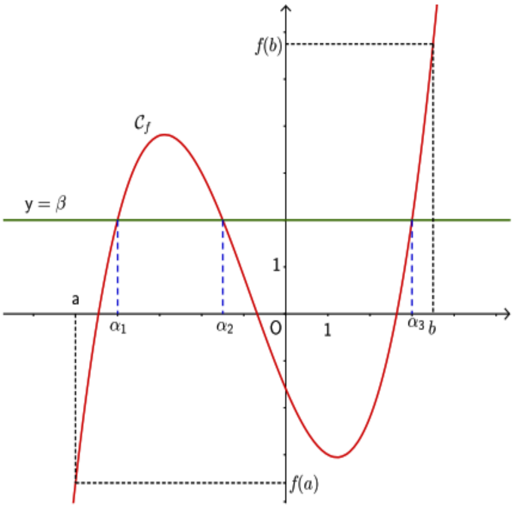
La courbe ci – contre est celle d'une fonction f.



f est continue sur $[-1;0]$
le minimum de f sur $[-1;0]$ est -1
le maximum de f sur $[-1;0]$ est 2
donc $f([-1;0]) = [-1;2]$

f est continue sur $[0;2]$
le minimum de f sur $[0;2]$ est -1
le maximum de f sur $[0;2]$ est 1,31
donc $f([-1;0]) = [-1;1{,}31]$

Théorème des valeurs intermédiaires



Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I tels que $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle I, alors, la fonction f prends toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$, c'est – à – dire pour tout réel β compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $\alpha \in [a; b]$ tel que $f(\alpha) = \beta$. (Ainsi, l'équation $f(x) = \beta$ admet au moins une solution sur l'intervalle I.

Corollaire :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction continue sur l'intervalle I. a et b deux éléments de I, $a < b$, tels que $f(a) \times f(b) < 0$.

L'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a; b[$.

Exercice d'application :

Soit f la fonction définie sur $[-3; 6]$ par $f(x) = x^3 - 12x$

☞ Étudier les variations de f.
☞ Justifier que l'équation $f(x) = 30$ admet une solution α dans l'intervalle $[2; 6]$.
☞ Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

Leçon 2 : Fonction continue et strictement monotone : (100 min)

Compétences à acquérir :

∗ Montrer qu'une fonction réalise une bijection entre deux intervalles de $\mathbb{R}$;

∗ Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour déterminer le nombre de solution dans un intervalle de $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = c$;

∗ Donner un encadrement des solutions de l'équation $f(x) = c$ par la méthode par balayage ou par dichotomie.

∗ Étudier la continuité et construire dans un repère orthonormé les courbes respectives d'une application bijective et de sa bijection réciproque.

Pré – réquis :

Rappel des notions d'injection, de surjection, de bijection et de bijection réciproque.

Motivations :

Sens de variation de la bijection réciproque.

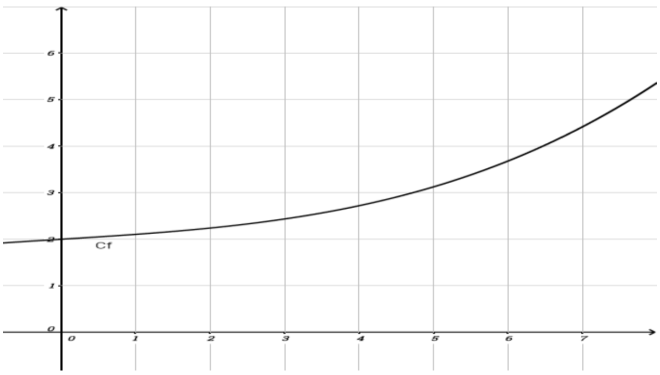
Situation problème :

Une entreprise démarre ses activités au mois de mars 2020 avec un chiffre d'affaire donné en millions de francs CFA par la relation $f(t) = 0{,}005t^3 + 0{,}1t + 2$ où t est exprimer en mois et l'instant initial ($t = 0$) correspondant au mois de mars. Les dirigeants de cette entreprise aimeraient savoir comment évoluera le chiffre d'affaire et en quel période de l'année (mois et semaine) il sera égal à 4 millions de Francs FCFA. Aide – les.

Activité d'apprentissage .

Soit f la fonction définie par : $f(t) = 0{,}005t^3 + 0{,}1t + 2$ et (C_f) sa courbe représentative.

1. Justifier que f est continue et monotone sur $[0; 8]$.
2. L'équation $f(t) = 4$ admet – elle une solution sur l'intervalle$[0; 8]$? Justifier.
3. Si oui, déterminer un encadrement d'ordre 1 de cette solution



Résumé :

1. Théorème de la bijection.

Théorème

Si une fonction f est **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I, alors :

☞ f réalise une bijection de I sur $f(I)$;

☞ de plus, la bijection réciproque $f^{-1}: f(I) \to I$ est continue et strictement monotone et varie dans le même sens que f.

De plus, pour tout $x \in I$, $f^{-1}of(x) = x$ et pour tout $y \in f(I)$, $fof^{-1}(y) = y$

Exemple :

On considère la fonction rationnelle f définie par : $f(x)=\frac{x-1}{2x+3}$. Démontrons que la fonction f détermine une bijection de $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ dans $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ et déterminons sa bijection réciproque f^{-1}.

Etude des variations de f : $f'(x)=\frac{5}{(2x+3)^2}$; pour tout $x\in IR-\left\{-\frac{3}{2}\right\}$, $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $IR-\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↗		$-\infty$ ↗ $\frac{1}{2}$

f étant continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$,
on a : $f\left(\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[\right)=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$.
Conclusion : la fonction f détermine une bijection de $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ dans $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$.

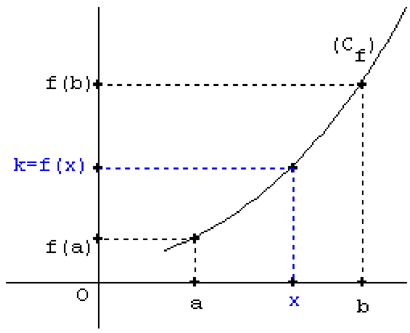
Bijection réciproque :

Résolution de l'équation, $f(x)=y$, $\quad y\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$: $\frac{x-1}{2x+3}=y$ on a : $x=\frac{3y+1}{-2y+1}$ $\quad x\in\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$

$$f^{-1}:\begin{array}{l}\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\to\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[\\ \qquad y\mapsto\frac{3y+1}{-2y+1}\end{array}$$

Corollaire.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction continue et strictement monotone sur I.
Soient $a,b\in I$, $a<b$ alors :
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel c appartenant à $[a,b]$ tel que $f(c)=k$.
l'équation $f(x)=k$ admet une solution unique dans $[a\,;\,b]$.



Exemple :

Démontrons que l'équation $x^3+x+1=0$ admet une unique solution α appartenant à $]-1;0[$ et déterminons un encadrement de cette solution α d'amplitude 10^{-2}.
Résoudre l'équation $x^3+x+1=0$ revvient à chercher les zéros de la fonction $f:x\mapsto x^3+x+1$.

Variation de f :

$f'(x)=3x^2+1$. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

D'après le théorème de la bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Comme l'intervalle image contient 0, l'équation $f(x)=0$ a donc une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Localisation de la solution :

$f(-1)=-1$ et $f(0)=1$ donc α appartient à $]-1;0[$

Encadrement de α par la méthode de balayage.

Encadrement de α par des décimaux consécutifs d'ordre 1

Calculons de proche en proche les images par f des nombres décimaux d'ordre 1 de l'intervalle $]-1;0[$ jusqu'à observer un changement de signe.

x	$-0{,}9$	$-0{,}8$	$-0{,}7$	$-0{,}6$	$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}2$	$-0{,}1$
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

On obtient : $-0{,}7 < \alpha < -0{,}8$

Encadrement de α par des décimaux consécutifs d'ordre 2

Calculons de proche en proche les images par f des nombres décimaux d'ordre 1 de l'intervalle $]-0{,}7;-0{,}6[$ jusqu'à observer un changement de signe.

x	$-0{,}69$	$-0{,}68$	$-0{,}67$	$-0{,}66$	$-0{,}65$	$-0{,}64$	$-0{,}63$	$-0{,}62$	$-0{,}61$
$f(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

On obtient : $-0{,}69 < \alpha < -0{,}68$

2. Continuité, dérivabilité, le sens de variation de l'application réciproque d'une application bijective

Propriété :

Si f est une bijection d'un intervalle I dans un intervalle J.

Si f est continue et strictement sur I, alors sa bijection f^{-1} est également continue et strictement monotone sur J.

De plus f et f^{-1} ont le même sens de variation.

Dérivée :

f est une application bijective, dérivable et strictement monotone sur un intervalle I.

Soit x un élément de l'intervalle I telque $f'(x) \neq 0$

On sait que $(f^{-1}of)(x) = x$ par suite, $(f^{-1}of)'(x) = 1$

La dérivation d'une composée de fonction donne : $(f^{-1})'\big(f(x)\big) \times f'(x) = 1$

D'où , $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$.

Exemple :

On donne un nombre entier naturel non nul n,

Déterminons la dérivée de l'application réciproque de l'application $f : \begin{matrix}]0;+\infty[& \to]0;+\infty[\\ x & \mapsto x^n \end{matrix}$

$f : \begin{matrix}]0;+\infty[& \to]0;+\infty[\\ x & \mapsto x^n \end{matrix}$

f est dérivable et pour tout $x \in]0;+\infty[$

$f'(x) = nx^{n-1}$ et $f'(x) \neq 0$

$f^{-1} : \begin{matrix}]0;+\infty[& \to]0;+\infty[\\ x & \mapsto \sqrt[n]{x} \end{matrix}$

f^{-1} est dérivable et pour tout $x \in]0;+\infty[$

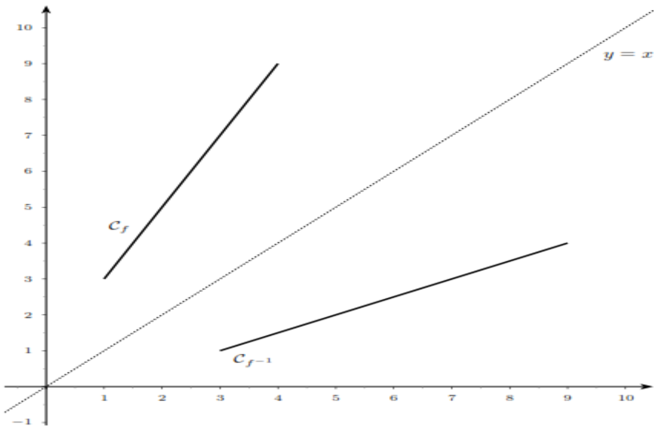
$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$

Représentation graphique des fonctions réciproques :

l'application $f : \begin{matrix} [1\,;\,4] & \to [3\,;\,9] \\ x & \mapsto 2x+1 \end{matrix}$ et son application réciproque $g = f^{-1} : \begin{matrix} [3\,;\,9] & \to [1\,;\,4] \\ y & \mapsto \frac{y-1}{2} \end{matrix}$

x	1	4
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$3 \nearrow$	9

x	3	9
$g'(x)$	$-$	$+$
$g(x)$	$1 \nearrow$	4



Inégalité des accroissements finis :

Propriété 1:

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, a et b deux éléments de I tels que $a < b$. S'il existe des nombres réels M et m tels que : pour tout élément x de $[a;b]$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors $\boldsymbol{m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)}$.

Exemple :

Démontrons que pour tout x élément de $\left[0\ ;\frac{\pi}{4}\right]$, $\frac{\sqrt{2}}{2}x \leq \sin x \leq x$.

La fonction sinus est dérivable sur IR et a pour dérivée la fonction cosinus.

Donc $f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x$ or pour tout t élément de $\left[0\ ;\frac{\pi}{4}\right]$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos t \leq 1$.

En appliquant l'inégalité de accroissements finis sur $[0;x]$,

on a : $\frac{\sqrt{2}}{2}(x-0) \leq \sin x - \sin 0 \leq 1(x-0)$ d'où pour tout x élément de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, $\frac{\sqrt{2}}{2}x \leq \sin x \leq x$

Propriété 2:

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, a et b deux éléments de I tels que $a < b$. S'il existe un nombre réel positif M tel que : pour tout x élément de $[a;b]$, $|f'(x)| \leq M$, alors $\boldsymbol{|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|}$.

Exemple:

Démontrons que pour tout x élément de $[1;2]$, $\left|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}\right| \leq \sqrt{2}(x-1)$.

Considérons la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$. f est dérivable sur $[1;2]$ et pour tout $t \in [1;2]$,

$f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ en encadrant $f'(t)$ sur $[1;2]$, on obtient $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq f'(t) \leq \sqrt{2}$ donc $|f'(t)| \leq \sqrt{2}$

Ainsi en appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[1;x]$

on a : $|f(x) - f(1)| \leq \sqrt{2}|x-1|$ c'est – à – dire : $\left|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}\right| \leq \sqrt{2}(x-1)$.

Leçon 3 : Représentations graphiques: (100 min)

Compétences à acquérir :

∗ Utiliser les résultats sur la notion de continuité pour mieux représenter une fonction et utiliser la fonction dérivée sur un intervalle pour y étudier les variations d'une fonction.

∗ Utiliser les branches infinies pour donner l'allure de la courbe d'une fonction.

Motivation :

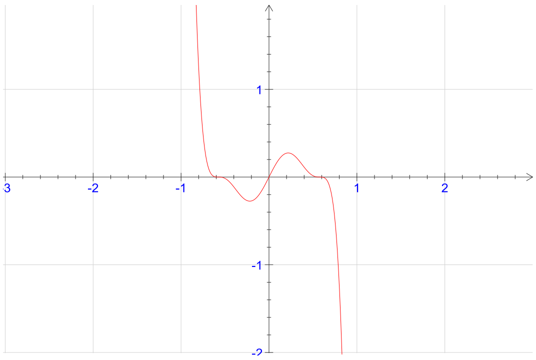
Représentation des variations du budget annuel d'un pays durant les dix dernières années.

Pré – requis :

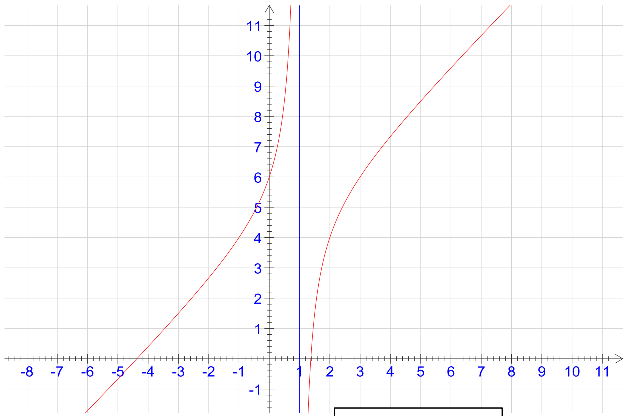
1. Limites
2. Continuité et dérivabilité.
3. Dérivée et sens de variation
4. Points particuliers

Situation problème :

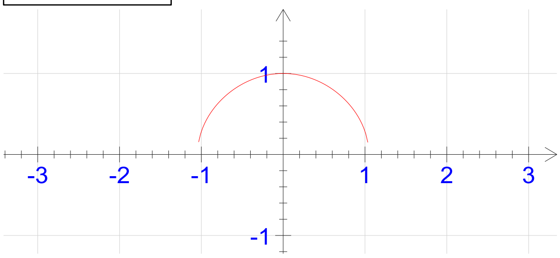
Ali élève en classe de première TI aimerait pour chacune des courbes ci – dessous, faire correspondre sa formule explicite.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

a. $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto f(x)=2x(1-3x^2)^3\end{array}$,

b. $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto f(x)=\dfrac{x^2+3x-6}{x-1}\end{array}$,

c. $\begin{array}{l}[-\pi\,;\,\pi]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto g(x)=\dfrac{x}{2}\sqrt{2\cos x-1}\end{array}$

d. $\begin{array}{l}[-\pi\,;\,\pi]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto h(x)=\sqrt{2\cos x-1}\end{array}$

Activité d'apprentissage :

a. $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = 2x(1-3x^2)^3 \end{array}$

Justifier que continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, montrer
$f'(x) = 2(1-3x^2)^2(1-21x^2) = 2(1-3x^2)^2(1-\sqrt{21}x)(1+\sqrt{21}x)$

Déduire le signe de $f'(x)$ et choisir la courbe de f.

b. $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \dfrac{x^2+3x-6}{x-1} \end{array}$,

Déterminer le domaine de définition de f, montrer que (Cf) admet deux asymptotes puis choisir la courbe de f.

c. Déterminer le domaine de définition et étudier la parité de chacune des fonctions g et h puis choisir celle qui correspond à la courbe restante.

Résumé :

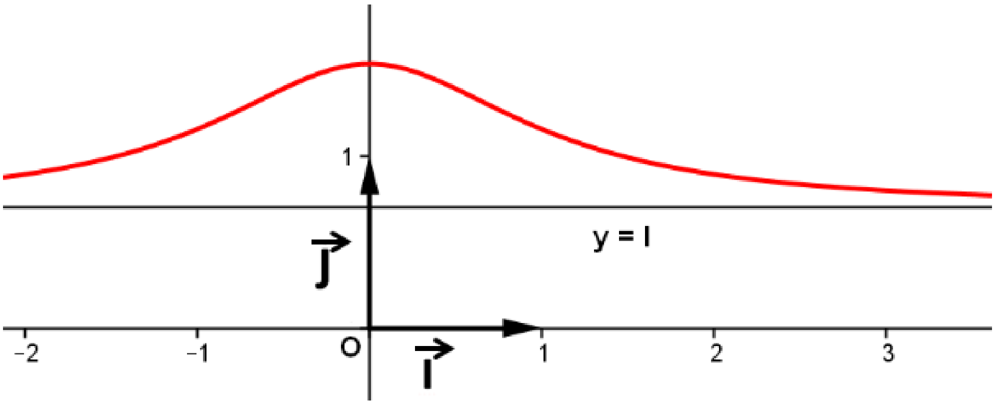
Recherche des branches infinies :

La courbe représentative d'une fonction f admet une branche infinie si l'une des coordonnées d'un point M(x,y) de cette courbe peut tendre vers l'infini. C'est-à-dire si on a l'un des cas suivants :
$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$; $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$; $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Asymptotes :

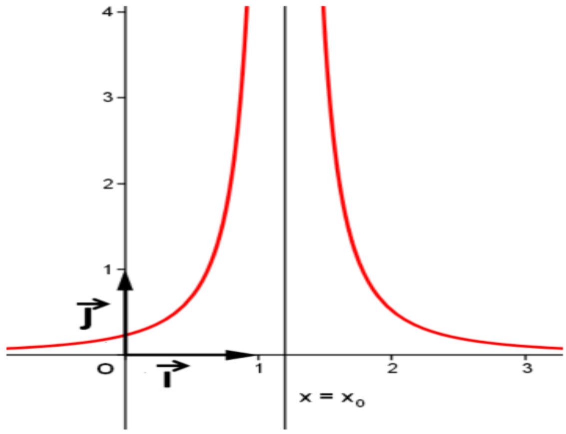
Asymptote horizontale :

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ alors la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f.



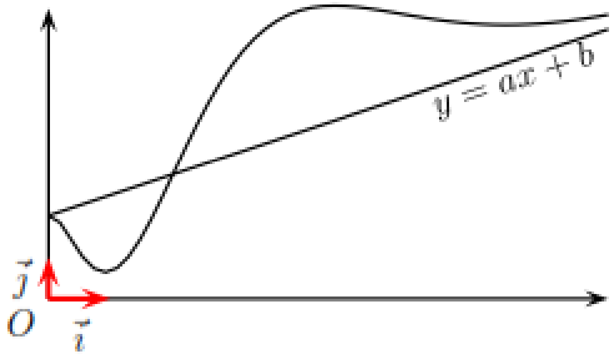
Asymptote verticale :

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, alors droite d'équation $x = x_0$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.



Asymptote oblique :

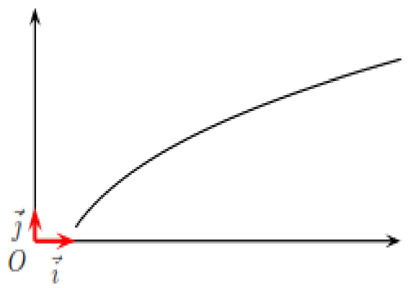
La courbe représentative d'une fonction f admet une asymptote oblique si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ et s'il existe deux réels a et b tels que : $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$. L'équation de l'asymptote est alors $y=ax+b$.



Branches paraboliques :

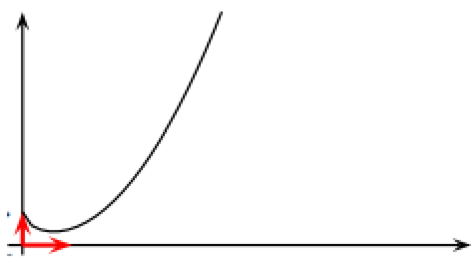
Branche parabolique de direction (Ox)

On dit que (C_f) présente une branche parabolique de direction asymptotique (Ox) en ∞ si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

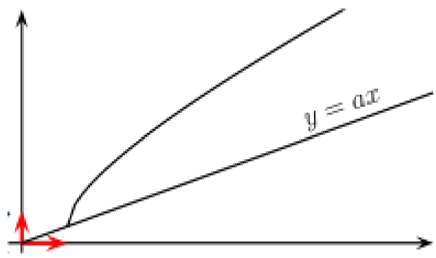


Branche parabolique de direction (Oy)

On dit que (C_f) présente une branche parabolique de direction asymptotique (Ox) en ∞ si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty$ et et $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$



Branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$



On dit que (C_f) présente une branche parabolique de la droite d'équation $y = ax$ en ∞ si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$;

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ et $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(ax)\right] = 0$

Si $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(ax)\right] = b$ avec $b \neq 0$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à (C_f).

Etude de quelques fonctions :

Rat ionnelle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{-2x^2+3x}{x-1}$.

1. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
En déduire que la courbe C représentative de la fonction f admet une asymptote verticale dont on donnera une équation.

2. a. Vérifier que, pour x différent de 1, $f(x) = -3x + \frac{x^2}{x-1}$.
Peut-on en déduire que la droite d'équation $y = 3x$ est asymptote oblique à la courbe C ? Justifier.

b. Trouver les réels a, b et c tels que, pour x différent de 1, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.
En déduire que C admet, au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, une asymptote D dont on donnera une équation.
c. Etudier suivant les valeurs de x la position de C par rapport à D.
3. Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation .
4. Construire la courbe C et ses asymptotes.

Correction

1. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2+3x}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} -2x = \pm\infty$;

$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{0^-} = -\infty$, $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{0^+} = +\infty$: asymptote verticale $x = 1$.

2. a. $-3x + \frac{x^2}{x-1} = \frac{-3x(x-1)+x^2}{x-1} = \frac{-2x^2+3x}{x-1} = f(x)$; on ne tire aucune information de cette écriture car $\frac{x^2}{x-1}$ tend vers l'infini à l'infini.

b. $ax + b + \frac{c}{x-1} = \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1} = \frac{ax^2+(b-a)x-b+c}{x-1} = \frac{-2x^2+3x}{x-1} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b-a = 3 \\ c-b = 0 \end{cases}$

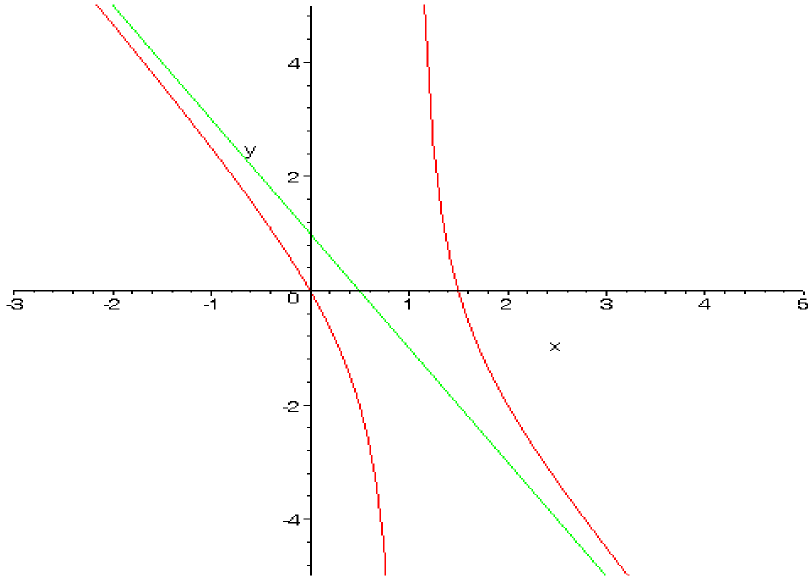
d'où $f(x) = -2x + 1 + \frac{1}{x-1}$.En $+\infty$ et en $-\infty$, $\frac{1}{x-1}$ tend vers 0, on a une asymptote D d'équation $y = -2x+1$

c. Lorsque $x > 1$, $\frac{1}{x-1} > 0$ et C est au-dessus de D. Lorsque $x < 1$, $\frac{1}{x-1} < 0$ et C est en dessous de D.

3. $f'(x) = \frac{(-4x+3)(x-1)-(-2x^2+3x)(1)}{(x-1)^2} = \frac{-4x^2+7x-3+2x^2-3x}{(x-1)^2} = \frac{-2x^2+4x-3}{(x-1)^2}$. Le discriminant est négatif, f' est du signe de −2, soit négative.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
f	$+\infty$ ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

4.



Fonction irrationnelle et trigonométrie

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x\sqrt{1-x}$.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty\,;1[$ et que $f'(x) = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$ pour tout $x<1$.

d. Dresser le tableau de variation de f.

e. Représenter graphiquement la fonction f.

2. a. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{-1}{3\sqrt{3}}$ admet une seule solution x_1 dans $]-\infty\,;0]$ et que $-\dfrac{1}{3} < x_1 < 0$.

b. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ admet exactement deux solutions x_2 et x_3 dans $[0\,;1]$ et que $0 < x_2 < \dfrac{2}{3} < x_3 < 1$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de x_1.

3. a. On pose $u = \dfrac{3}{2}(x - \dfrac{1}{3})$. Montrer que l'équation (E) : $\left|x\sqrt{1-x}\right| = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ est équivalente à (E') :

$$8u^3 - 6u - 1 = 0 .$$

b. Pour i = 1, 2, 3, on pose $u_i = \dfrac{3}{2}(x_i - \dfrac{1}{3})$. Montrer qu'il existe un unique réel θ_i de [0 ; π] tel que $u_i = \cos\theta_i$.

c. Prouver que $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ pour tout θ réel.

(On rappelle que cos(a+b) = cos$a$.cos$b$ – sin$a$.sin$b$ et sin 2a = 2sin$a$.cos$a$)

d. Déduire des questions précédentes que (E') est équivalente à l'équation $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$. Résoudre cette équation dans $[0\,;\pi]$ et en déduire les valeurs exactes de x_1, x_2 et x_3.

Correction

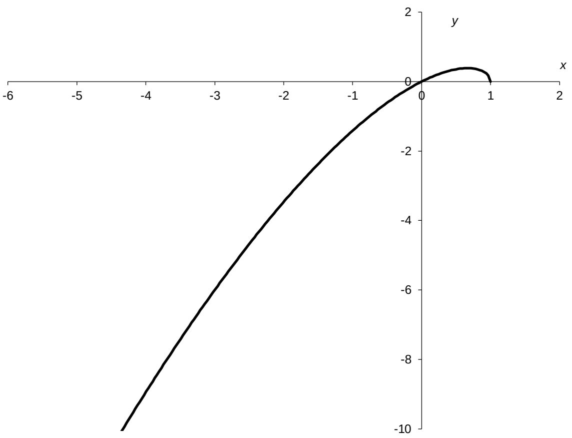
1. a. $f(x) = x\sqrt{1-x}$, $D_f =]-\infty\,;1]$.

b. $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{(1+h)\sqrt{-h}}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{(1+h)(-\cancel{h})}{\cancel{h}\sqrt{-h}} = -\infty$. Donc pas dérivable, tangente verticale en 1.

c. *f* est un produit de fonctions dérivables donc dérivable. $f'(x) = \sqrt{1-x} + x\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$.

x	$-\infty$		$2/3$		1
f'		+	0	−	||
f	$-\infty$	↗	$\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	0

d. $f(2/3) = \dfrac{2}{3}\sqrt{1-\dfrac{2}{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.



La limite en $-\infty$ est évidemment $-\infty$.

2. a. Comme *f* est strictement croissante dans $]-\infty\,;0]$ et que l'ensemble des images est également $]-\infty\,;0]$, on est sûr que l'équation $f(x) = \dfrac{-1}{3\sqrt{3}}$ a une seule solution x_1 dans l'intervalle de départ $]-\infty\,;0]$. Après il faut calculer $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{3}\sqrt{1+\dfrac{1}{3}} = \dfrac{-2}{3\sqrt{3}} < \dfrac{-1}{3\sqrt{3}} = f(x_1) < f(0) = 0$ ce qui justifie l'encadrement de x_1.

b. Entre 0 et 1, *f* est croissante puis décroissante et est toujours positive. Son maximum est $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ qui est supérieur à $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$; il existe donc bien deux valeurs de *x* dans $[0\,;1]$ pour lesquelles $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$; de plus ces deux valeurs encadrent l'abscisse du maximum de *f*, soit 2/3.

A la calculatrice on a $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ = 0,19245009 et *f*(0,217)=0,19201741, *f*(0,218)=0,19277907 ; ces deux valeurs encadrent x_1.

3. a. $u=\frac{3}{2}(x-\frac{1}{3})\Leftrightarrow \frac{2}{3}u+\frac{1}{3}=x$; par ailleurs si on élève au carré :

$$\left|x\sqrt{1-x}\right|=\frac{1}{3\sqrt{3}}\Leftrightarrow x^2(1-x)=\frac{1}{27}\Leftrightarrow\left(\frac{2u+1}{3}\right)^2\left(1-\frac{2u+1}{3}\right)=\frac{1}{27}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow 8u^3-6u-1=0.$$

b. $u_i=\frac{3}{2}(x_i-\frac{1}{3})$. Pour que $u_i=\cos\theta_i$, il faut et il suffit que

$-1\le u_i\le 1\Leftrightarrow -\frac{2}{3}.-1+\frac{1}{3}\ge -\frac{2}{3}u_i+\frac{1}{3}\ge -\frac{2}{3}.1+\frac{1}{3}\Leftrightarrow 1\ge x_i\ge -\frac{1}{3}$.

C'est bien le cas donc il existe un unique réel θ_i de $[0\,;\pi]$ tel que $u_i=\cos\theta_i$.

c. On calcule avec les formules d'addition :

$$\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

d. On pose donc $u=\cos\theta$ dans (E') :

$$8u^3-6u-1=0\Leftrightarrow 8\cos^3\theta-6\cos\theta-1=0\Leftrightarrow 2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)=1\Leftrightarrow\cos 3\theta=\frac{1}{2}.$$

Les solutions de $\cos 3\theta=\frac{1}{2}$ sont $3\theta=\pm\frac{\pi}{3}(2\pi)\Leftrightarrow\theta=\pm\frac{\pi}{9}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. On ne garde que 3 des solutions (par ex. les positives), ce qui donne $\theta_1=\frac{\pi}{9},\theta_2=\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}=\frac{7\pi}{9},\theta_3=\frac{\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}=\frac{13\pi}{9}$ d'où en remontant les solutions exactes : $x_1=\frac{2}{3}\cos\frac{\pi}{9}+\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{2}{3}\cos\frac{7\pi}{9}+\frac{1}{3}$, $x_3=\frac{2}{3}\cos\frac{13\pi}{9}+\frac{1}{3}$.

Arctangente

Soit la fonction $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, (C) sa courbe.

1. Etude de f

a. Quel est l'ensemble de définition de *f* ? Montrez que (C) est symétrique par rapport à l'axe (O*y*). Calculez la dérivée *f'* de *f*.

b. Trouver une équation de la tangente (T) à la courbe (C) de *f* au point d'abscisse 1.

c. Etudier la position de (C) par rapport à (T) .

d. Que peut-on dire de la tangente (T') à (C) au point d'abscisse – 1 ?

2. On considère la fonction *tangente* définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$: $g(x)=\tan x$.

a. Montrez que sa dérivée est $g'(x)=1+\tan^2 x$.

b. Donnez une équation de sa tangente en *O*.

c. On appelle Γ la courbe de tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et γ la courbe symétrique de Γ par rapport à la droite ($y = x$). Tracez Γ et γ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

d. La courbe γ est la courbe représentative d'une fonction appelée *arc tangente* , notée **arctan** ($\tan^{-1}$ sur votre calculatrice) et telle que $\arctan(\tan x)=\tan(\arctan x)=x$.

Indiquer sur la figure les valeurs de $\arctan 0$, $\arctan(1)$, $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)$. Vérifiez avec votre calculatrice.

e. De manière purement graphique, tracez la tangente à γ au point d'abscisse 1 et donnez son équation.

f. On admettra le résultat suivant : la dérivée de $\tan[u(x)]$ où *u* est une fonction à valeurs

dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ est $u'(x)\left[1+\tan^2(u(x))\right]$. Montrez que la dérivée de arctan(x) est $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.
Vérifiez le résultat du 2. e.

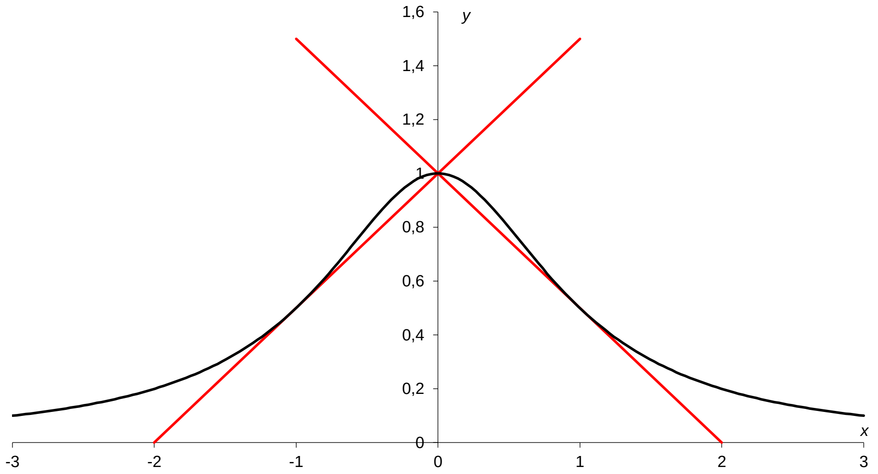
Correction

a. L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$ car $1+x^2$ ne paut jamais être nul. Par ailleurs on a $f(-x)=f(x)$ donc f est paire et (C) est symétrique par rapport à l'axe (Oy). $f'(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

b. (T) $y=f'(1)(x-1)+f(1)=-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}x+1$.

c. $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+1\right)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}x-1=\frac{2+x(1+x^2)-2(1+x^2)}{2(1+x^2)}=\frac{x^3-2x^2+x}{2(1+x^2)}=\frac{x(x-1)^2}{2(1+x^2)}$. Ceci est positif et donc (C) au-dessus de (T) lorsque x est positif, négatif et donc (C) en dessous de (T) lorsque x est négatif.

d. Comme f est paire, c'est la même chose à l'envers en -1.

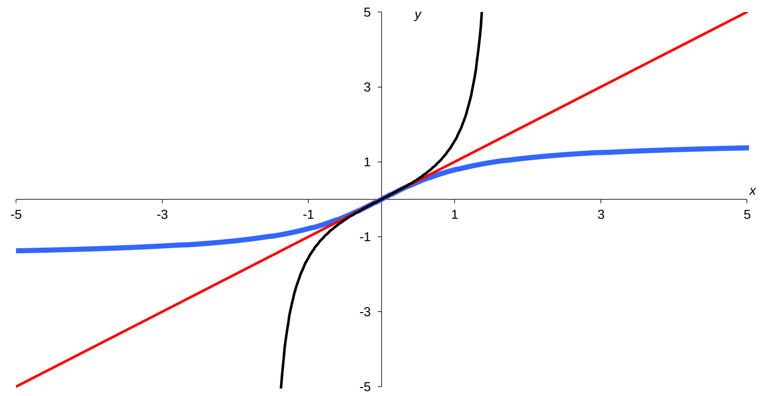


2. On considère la fonction *tangente* définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$: $g(x)=\tan x$.

a. $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ donc $g'(x)=\frac{(\sin x)'(\cos x)-(\cos x)'(\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x-(-\sin^2 x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

b. Tangente en O : $y=1(x-0)+0\Leftrightarrow y=x$.

c.

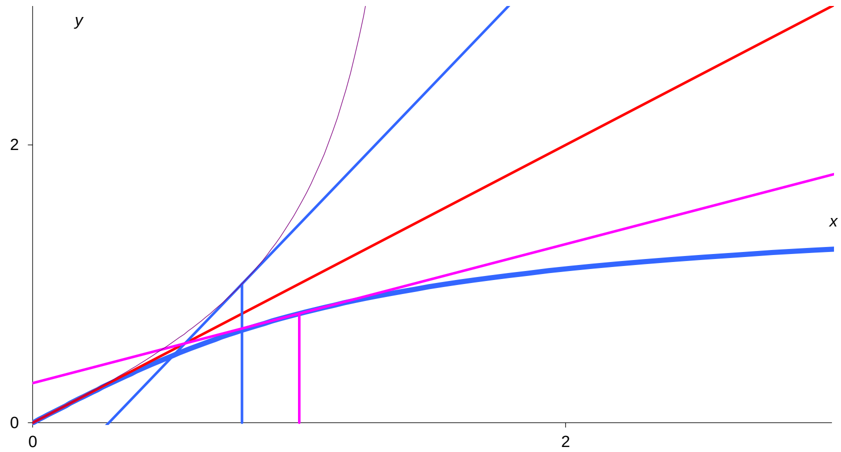


d. Comme on a tan 0 = 0, on a arctan 0 = 0. De même $\tan\frac{\pi}{4}=1\Leftrightarrow \arctan(1)=\frac{\pi}{4}$ et

$\arctan\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$.

e. Comme ($y = x$) est la tangente à Γ en 0 et que c'est l'axe de symétrie entre les deux courbes, c'est la tangente à γ en 0 également.

Pour 1, on fait la tangente symétrique à celle en $\frac{\pi}{4}$ pour tan ; comme cette dernière a pour équation $y=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$, celle en 1 pour arctan a pour équation $x=2\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+1 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}(x-1)+\frac{\pi}{4}$ (on intervertit simplement x et y).



f. Comme on a la dérivée de $\tan\left[u(x)\right]$, appliquons cela à tan[arctan(x)] :

$\left[\tan\left(\arctan x\right)\right]'=\left[\arctan(x)\right]'\left[1+\tan^2(x)\right]$.

Or $\tan\left(\arctan x\right)=x \Rightarrow \left[\tan\left(\arctan x\right)\right]'=1$ d'où

$$\left[\arctan(x)\right]'\left[1+\tan^2(\arctan x)\right]=1 \Rightarrow \left[\arctan(x)\right]'=\frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Devoir

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sin^2 x-\sin x$

1. Prouver que la droite d'équation $x=\frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie de la courbe (C) de f.
2. Justifier que l'intervalle d'étude de f peut se limiter à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
3. Etudier sur cet intervalle les variations de f et construire son tableau de variations.
4. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe au point d'abscisse 0.
5. Construire la courbe de f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ (on utilisera un repère d'unités : 8 cm pour π sur l'axe des abscisses et 2 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées). Faire figurer (T) sur la figure.

Chapitre III : PRIMITIVE D'UNE FONCTION CONTINUESUR UN INTERVALLE - Durée: 100 minutes

Motivation :

L'application des lois de la Physique à un système conduit parfois à une relation liant la dérivée d'une fonction inconnue à une autre fonction bien déterminée : c'est le cas par exemple lors de l'étude du mouvement des fusées et navettes spatiales. Cette leçon aidera les apprenants à comprendre l'évolution de certains phénomènes au cours du temps.

Objectifs pédagogiques

- Définir la notion de primitive
- Déterminer les primitives de fonctions élémentaires
- Opérations et détermination des primitives de fonctions composées
- Donner les méthodes pratiques de détermination des primitives d'une fonction

Dans cette leçon, les fonctions considérées sont des fonctions numériques de la variable réelle.

Pré-requis:

Dériver chacune des fonctions ci-dessous. On précisera l'ensemble de dérivabilité dans chaque cas:
$f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^5$; $p(x)=4$ et $h(x) = -x^4 + 3x + 5$.

Solution

☞ f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et *pour tout* $x\epsilon\ ]0;+\infty[$ donc $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

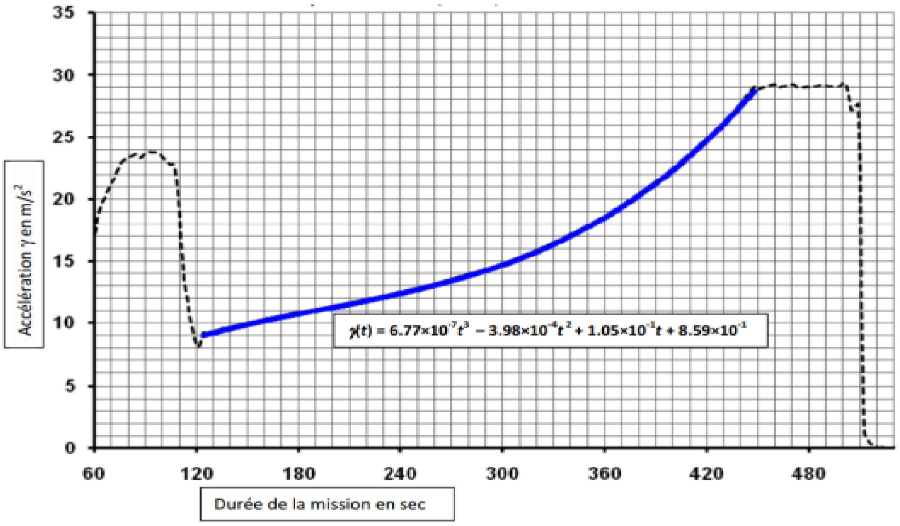
☞ g est dérivable sur IR et *pour tout* $x\epsilon$ IR donc $g'(x) = 5x^4$.

☞ p est dérivable sur IR et *pour tout* $x\epsilon$ IR donc $p'(x) = 4x$.

☞ h est dérivable sur IR et *pour tout* $x\epsilon$donc $h'(x) = -4x^3 + 3$.

Situation d'apprentissage

Pour préparer son exposé en physique, une élève en classe de terminale a trouvé dans un document la figure ci-dessous représentant l'évolution de l'accélération $\gamma(t)$ d'un avion spatiale en fonction du temps. On rappelle que $\gamma(t) = v'(t)$ et $v(t) = x'(t)$. Où γ, v et x désignent respectivement l'accélération, la vitesse et la position de l'avion à un instant t compté à partir de l'instant où l'avion décolle.



Il est précisé dans le document que la vitesse v_0 au décollage de l'avion est de 274m/s. Curieux, elle souhaite déterminer la distance qu'a pu parcourir cet avion 450 secondes après son décollage. Aide l'élève à déterminer cette distance.

Activités d'apprentissage 1

1- On considère les fonctions f, g et h définies par : $f(x) = x^2 + 3x - 2$; $g(x) = -x^2 + 3x + 5$ et $h(x) = 2x + 3$

a) Déterminer la fonction dérivée des fonctions f et g

b) Que constatez-vous ?

2- Dans chacun des cas suivants, déterminer une fonction F dont la fonction dérivée est la fonction f

a) $f(x) = 1$; b) $f(x) = 3x^2$; c) $f(x) = cosx$

Activités d'apprentissage 2

I. Détermine l'expression de la vitesse instantanée v(t) de l'avion spatiale avec $v(0) = 274$.

II. Détermine l'expression de la distance x(t) parcourue par l'avion spatiale à un instant.

III. Détermine alors la distance parcourue par l'avion spatiale 450 secondes après son décollage.

Solution de l'activité d'apprentissage1

1. $a)$ f et g sont dérivables $pour\ tout\ x\epsilon$ IR d'où $f'(x) = 2x + 3$ et $g'(x) = -2x + 3$

$b)$ Nous constatons que $f'(x) = h(x)$

2. $a)$ $F(x) = x + c$, c $\in$ IR

$b)$ $F(x) = x^3 + c$, c $\in$ IR

$c)$ $F(x) = sinx + c$, c $\in$ IR

Solution de la situation d'apprentissage

a- $v(t) = 1{,}6925\times10^{-7}t^4 - 1{,}326\times10^{-4}t^3 + 0{,}525\times10^{-1}t^2 + 8{,}59\times10^{-1}t + c$ avec c=274 car $v(0) = 274$

b- $x(t) = 0{,}3385\times10^{-7}t^5 - 0{,}3315\times10^{-4}t^4 + 0{,}175\times10^{-1}t^3 + 4{,}295\times10^{-1}t^2 + 274t$ car $x(0) = 0$.

La distance parcourue par l'avion 450secondes après son décollage est de $1070232\ m$.

Résumé

I- PRESENTATION

1- Définition

Soit **f** une fonction définie sur un intervalle K. On appelle primitive de **f** sur K toute fonction **F** dérivable sur K et telle que : $\forall\ x \in K,\ \boldsymbol{F'(x) = f(x)}$

Exemple : Une primitive de la fonction $f(x) = sinx$ est la fonction $F(x) = -cosx + 2$.

Remarque : La fonction $F(x) = -cosx$ est une primitive de la fonction $f(x) = sinx$

La fonction $F(x) = -cosx + c, (c\epsilon$ IR) est aussi primitive de la fonction $f(x) = sinx$

Donc une fonction continue admet une infinité de primitives, toutes égales à une constante prêt. Pour cela, on ne dit pas **« la primitive de f »** mais on dit **« une primitive de f ».**

2- Propriétés

P1) Toute fonction continue sur un intervalle K admet **au moins une primitive sur K**.

P2) Si F est une primitive de f sur un intervalle K, alors toute autre primitive de f sur K est de la forme : $\boldsymbol{x \mapsto F(x) + c}$, $(\boldsymbol{c\epsilon}$ IR)

P3) Si f est une fonction admettant une primitive sur un intervalle K, alors il existe **une et une seule primitive** de f qui prend la valeur y_0 en x_0.

Exemple : Déterminer la primitive F de la fonction $f: x \to -\frac{1}{x^2}$ qui prend la valeur $\frac{3}{2}$ en 2.

Solution

La primitive F de la fonction f est $F(x) = \frac{1}{x} + c$, c $\in$ IR. $On\ a\ F(2) = \frac{3}{2}\ donc\ \frac{1}{2} + c = \frac{3}{2}$ d'où $c = 1$

Conclusion $F(x) = \frac{1}{x} + 1$

II- CALCUL DES PRIMITIVES

1- Primitive de fonctions usuelles

fonction f définie par	primitive F de f définie par , $k\in$IR	Sur l'intervalle I
$f(x) = c$ où c est une constante	$F(x) = cx + k$	I = IR
$f(x) = x^n$, $n\in \mathbb{N}^*$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$	I = IR
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, $n\in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$	$F(x) = \dfrac{-1}{n-1}\dfrac{1}{x^{n-1}} + k$	$I =]-\infty;0[$ ou $I =]0;+\infty[$
$f(x)$ = **Erreur !**	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$	$I =]0;+\infty[$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + k$	I = IR
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + k$	I = IR
$f(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$F(x) = \tan(x) + k$	$I =]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi ; \dfrac{\pi}{2} + n\pi[, n\in\zeta$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + k$	$I =]0;+\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$	I = IR

2- Primitives et opérations

u et v sont deux fonctions

fonction f	primitives de f sur I ($k\in$ IR)
Cu' où $C\in$IR	$Cu + k$
$u' + v'$	$u + v + k$
$u'\times u^n$ où $n\in \nu$ et $n \geq 2$	$\dfrac{1}{n+1} u^{n+1} + k$
$\dfrac{u'}{u^n}$ où $n\in \nu$, $n \geq 2$ et u ne s'annule pas sur I	$\dfrac{-1}{n-1}\dfrac{1}{u^{n-1}} + k$
Erreur ! où u est strictement positive sur I	$2\sqrt{u} + k$
$u'\times(v'\circ u)$ où $v\circ u$ est dérivable sur I	$v\circ u + k$
$\dfrac{u'}{u}$ où u strictement positive sur I	$\ln(u(x))$ + k
$\dfrac{u'v - v'u}{v^2}$	$\dfrac{u}{v} + k$
$u'e^u$	$e^u + k$
$u'cosu$	$sinu + k$
$u'sinu$	$-cosu + k$
$\dfrac{u'}{cos^2u} = u'(tan^2u)$	$tanu + k$

Pour tout triplet $(A\ ;\ a\ ;\ b)$ de réels tels que a non nul, une primitive de la fonction $x \mapsto A\cos(ax+b)$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{A}{a}\sin(ax+b)$ et une primitive de la fonction $x \mapsto A\sin(ax+b)$ est la fonction $x \mapsto -\dfrac{A}{a}\cos(ax+b)$

En générale, pour toute fonction u dérivable sur un intervalle I, une primitive de la fonction $u'\cos u$ est la fonction $\sin u$ et une primitive de la fonction $u'\sin u$ est la fonction $-\cos u$.

3- Méthode de détermination d'une primitive de $\cos^n x$ ou $\sin^n x$:

1) Linéariser $\cos^n x$ ou $\sin^n x$.
2) Déterminer une primitive de chacun des termes de la forme $A\cos ax$ ou $A\sin ax$ apparaissant dans le résultat obtenu en 1).
3) Déduire de 1) et 2) une primitive recherchée**.**

Exercices d'applications

Exercice 1 :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes

$f: x \to 2x(x^2+3)^3$

2- $g: x \to \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}$

3- $h: x \to cosxsin^3x$

4- $i: x \to \frac{3x^2}{(x^3+1)^3}$

Exercice 2 :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes

$f: x \to \frac{x^4+2x^2-1}{x^2}$; $g: x \to (x+1)(2x-3)^2$; $h: x \to \sqrt{x+1}$ et $i: x \to \frac{x^2-3x+2}{x-3}$

Exercice 3 :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes

$f: x \to \frac{x}{(x^2+1)^3}$

2- $g: x \to (x^2+1)(x^3+3x-)^4$

3- $h: x \to sinxcos^2x$

4- $i: x \to \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

Exercice 4 :

f est une fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{4x^3-3x}{(2x-1)^2}$

1- Ecrire f sous la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{(2x-1)^2}$

2- Déterminer les primitives de f sur $[1;+\infty[$

3- En déduire la primitive de f qui s'annule en 1

Exercice 5 :

1- Linéariser la fonction $f: x \to sin^2xcos^4x$

2- Déterminer alors toutes les primitives de f sur IR

Exercice 6 :

Soit $f: x \to sin^2xcos^3x$

1- Démontrer que $pour\ tout\ x\epsilon IR,\ f(x) = cosx(sin^2x - sin^4x)$

2- Déterminer alors toutes les primitives de f sur IR

3- En déduire la primitive F de f sur IR qui prend la valeur $-\sqrt{2}$ en $-\pi$

MODULE : 24	RELATIONS ET OPÉRATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS
CHAPITRE : IV	CALCUL INTEGRAL

INTERET :

Le calcul :

1) D'aire sous une courbe ,
2) du volume d'une partie bornée (d'un solide) de l'espace ,
3) du volume d'un solide engendré par la rotation d'une partie du plan autour d'un axe ;
4) de sommes continues.

MOTIVATION :

- Calcul de l'aire d'un domaine du plan délimité par deux courbes dans un intervalle précis ;
- Calcul de la longueur d'un arc de la courbe représentative d'une fonction ;
- Détermination de la valeur moyenne d'une fonction dans un segment donné ;
- Calcul du volume d'un solide dont on connaît la section par un plan ;
- Calcul du volume d'un solide de révolution engendré par une rotation autour de l'un des axes d'un repère ;
- Calcul de la valeur efficace dans un transfert d'énergie ;

PRE REQUIS :

✓ Fonctions – continuité – Dérivation ;
✓ Primitives ; Linéarisation.

LECON 1 :	INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE (100 Minutes)

Objectifs :

À la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Calculer l'intégrale d'une fonction usuelle dont on connait une primitive ;
- Calculer l'intégrale d'une somme de plusieurs fonctions et/ou d'un produit d'une fonction par un réel
- Déterminer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle ;
- Donner le signe de $\int_a^b f(x)\,dx$ sur $[a\,;\,b]$ à partir de celui de f ;
- Maîtriser les propriétés de l'intégral.

Pré-requis :

1°) Calculer la dérivée de chacune des fonctions : $f(x) = x^2$; $g(x) = sin2x$; $u(x) = \sqrt{x}$ $h(x) = \cos(2x+1)$; $v(x) = \frac{1}{2x-1}$; $w(x) = (3x-2)^2$ et $t(x) = \frac{1}{x}$.

2°) Donner une primitive de chacune des fonctions f suivantes : $f : x \mapsto x^2$; $f : x \mapsto cosx$; $f : x \mapsto sinx$; $f : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$; $f : x \mapsto (2x+1)(x^2+x+3)^2$; $f : x \mapsto cosx\, sin^3 x$ et $f : x \mapsto tan^2 x + 1$.

Solution :

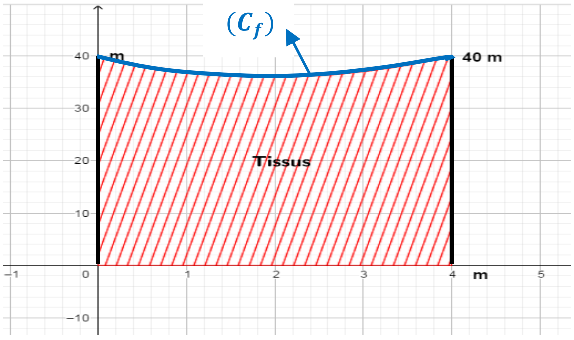
1°) Dérivée de chacune des fonctions : $g'(x) = 2Cos2x$; $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $v'(x) = \frac{-2}{(2x-1)^2}$ $h'(x) = -2\,\mathrm{Sin}(2x+1)$; $f'(x) = 2x$; $v'(x) = \frac{-2}{(2x-1)^2}$; $w'(x) = 6\,(3x-2)$ et $t'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

2°) Une primitive de chacune des fonctions f est : $F : x \mapsto \frac{1}{3}x^3$; $F : x \mapsto Sinx$; $F : x \mapsto tanx$; $F : x \mapsto -Cosx$; $F : x \mapsto \frac{1}{2}ln(x^2+1)$; $F : x \mapsto \frac{1}{3}(x^2+x+3)^3$; $F : x \mapsto \frac{1}{4}\,Sin^4 x$.

Situations de vie :

La partie hachurée sur le dessin ci-dessous représente un morceau de tissus conçu par un couturier et $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^2 - 4x + 40$ dans un plan muni du repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ d'unité graphique $1\ m$ sur les axes. Ce couturier voudrait confectionner la jupe de l'un de ses clients avec ce morceau de tissu et s'est aussitôt rendu compte qu'il en faudra encore un peu plus de tissu pour coudre cette jupe. C'est ainsi qu'il se met à calculer la surface de ce morceau de tissu afin de savoir quelle quantité de tissu il devra encore concevoir pour ce travail. N'ayant pas un bagage intellectuel lui permettant de faire ce calcul, le couturier est bloqué et fait appel à vous pour l'aider à calculer la surface de ce morceau de tissu.

1°) Soit Fune primitive de f sur IR.
Montrer que : $f(4) = f(0) = 40$ et calculer $F(4) - F(0)$.
2°) Calculer $A = \int_0^4 (x^2 - 4x + 40)^2\, dx$ et comparer le résultat obtenu à $F(4) - F(0)$.
3°) Aider ce couturier à calculer la surface de ce morceau de tissu.



Activité d'apprentissage :

$\boldsymbol{A_1}$. Soit f une fonction continue sur un intervalle I de IR
Soient F et G deux primitives de f sur I.
1°) Ecrire pour tout $x \in I$ une relation entre $F(x)$ et $G(x)$.
2°) Soient a et b deux éléments quelconques de I.
Comparer $F(b) - F(a)$ et $G(a) - G(b)$, puis en déduire que le réel $F(b) - F(a)$ est indépendant de la primitive de f considérée.
$\boldsymbol{A_2}$. Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^2$
1. $\boldsymbol{a}$°) Trouver la primitive G de f qui prend la valeur 1 en $x_0 = 2$.
$\boldsymbol{b}$°) Déterminer la primitive H de f s'annule en $x_1 = 5$.
2°) Calculer : $G(1) - G(2)$ et $H(1) - H(2)$, puis comparer les deux quantités.
Quelle conclusion faites-vous ?

Solution :

$\boldsymbol{A_1}$. **1**°) F et G étant deux primitives d'une même fonction f sur I, pour tout $x \in I$, $\exists\, k \in IR$ tel que :
$F(x) = G(x) + k \Leftrightarrow F(x) - G(x) = k.$
2°) On a : $F(a) = G(a) + K$ et $F(b) = G(b) + k$; donc
$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) + k - k = G(b) - G(a)$
Le nombre réel $F(b) - F(a)$ est alors indépendant de la primitive de f choisie. C'est donc une constante.
$\boldsymbol{A_2}$. f est la fonction carrée.
1. $\boldsymbol{a}$°) Les primitives de f sur IR sont les fonctions $F : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + k,\ k \in IR.$
La primitive G de f sur IR qui prend la valeur 1 en $x_0 = 2$ est telle que : $F(2) = 1$ et
$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k,\ k \in IR.$ Or $F(2) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(2)^3 + k = 1 \Leftrightarrow 3k + 8 = 3$

$$\Leftrightarrow 3k = -5 \Leftrightarrow k = -\frac{5}{3}.$$

Ainsi $G(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3} = \frac{x^3 - 5}{3}$ est la primitive de f sur IR qui prend la valeur 1 en $x_0 = 2$.

b°) La primitive H de f sur IR qui s'annule en $x_1 = 5$ est définie par :
$F(5) = 0$ et $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k$, $k \in IR$ or $F(5) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(5)^3 + k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{125}{3}$.
Ainsi, $H(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{125}{3} = \frac{x^3 - 125}{3}$ est la primitive de f sur IR qui s'annule en $x_1 = 5$.

2°) On a : $\begin{cases} G(1) - G(2) = -\frac{4}{3} - 1 = -\frac{7}{3} \\ H(1) - H(2) = -\frac{124}{3} + \frac{117}{3} = -\frac{7}{3} \end{cases}$

Donc $(1) - G(2) = H(1) - H(2) = -\frac{7}{3}$. On conclut que les différences $G(1) - G(2)$ et $H(1) - H(2)$ sont égales quel que soit la primitive de f choisie sur IR. ainsi, le nombre réel $H(1) - H(2) = G(1) - G(2)$ est indépendant du choix de H ou de G.
On remarque bien que : $H(1) - H(2) = G(1) - G(2) = \int_1^2 f(x)dx$.

RESUME :

1.1. Notion d'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

a°) Définition et conséquences

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de IR; F une de ses primitives sur I, a et b deux éléments de I. Le nombre réel $F(b) - F(a)$ est indépendant de la primitive de f considérée. Ce nombre est appelé intégrale de la fonction f entre a et b. On le note $\int_a^b f(x)\,dx$ et on lit :
« Intégrale de a à b de $f(x)$ dérivée de x » ou « intégrale de a à b, $f(x)$ dérivée de x » ou en fin « Somme de a à b, $f(x)$ dérivée de x ».
On écrit souvent : $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Vocabulaire :

- Le réel $\int_a^b f(x)\,dx$ ne dépend pas de la primitive de f choisie pour le calcul ;
- La notation $[F(x)]_a^b$ se lit : « $F(x)$ pris entre a et b ». C'est la variation de F entre a et b ;
- Les nombres réel a et b sont appelés bornes d'intégration ;
- La variable x est appelée variable d'intégration. C'est une variable muette car elle peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre de l'alphabet français. En plus, elle n'intervient pas dans le processus d'intégration. Ainsi, on a : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \cdots = \int_a^b f(u)\,du = \cdots$

Donc, on peut remplacer la variable muette x par n'importe quelle autre lettre de l'alphabet français excepté les bornes d'intégration a et b puis, obtenir le même résultat.

Exemples 1 :

1°) Pour tout nombre réel k, on a : $\int_a^b k\,dx = [k\,x]_a^b = kb - ka = k(b-a)$.

2°) $\boldsymbol{A} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(t)\,dt = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} = sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3°) $\boldsymbol{B} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(t)\,dt = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{3}} = sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4°) Calculer les intégrales suivantes : $\boldsymbol{D} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 t\,dt$; $\boldsymbol{E} = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$ et $\boldsymbol{F} = \int_0^2 \frac{2\,x\,t^2}{5}\,dx$.

$*$ $\boldsymbol{D} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 t\,dt$. On sait que $cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + 2\cos 2t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$.

Donc, $\boldsymbol{D} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right]\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\,t\,\,dt = \left[\frac{1}{2}t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(0-0) = \frac{\pi}{4}$. Ainsi, $\boldsymbol{D} = \frac{\pi}{4}$.

Propriété 1 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de IR, a et b deux éléments de I. On a les propriétés suivantes :

P_1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$;

P_2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$;

b°) Expression d'une primitive au moyen de l'intégrale

Propriété 2 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subseteq IR$ et a un nombre réel appartenant à I. La fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Exemples 2 :

1°) La fonction logarithme népérien est la fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$; $(x > 0)$.

2°) La fonction F définie par : $F(x) = \int_2^x \frac{2\,t^3}{t^2-1} dt$ est la primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{2\,x^3}{x^2-1}$ qui s'annule en 2 sur l'intervalle $K =]1\,;\,+\infty[$. Ainsi, on a : $F'(x) = f(x)$ et $F'(2) = 0$.

c°) Interprétation géométrique de l'intégrale

Propriété 3 :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $I \subseteq IR$, (C_f) sa courbe représentative, a et b deux éléments de I tel que $a < b$. Le réel $\int_a^b f(t)\,dt$ est l'aire en unité d'aire du domaine plan (D) délimité par la courbe (C_f), la droite (OI) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. L'unité d'aire étant l'aire du rectangle $OIKJ$ de côtés OI et OJ (**voir figure 1**).

Figure 1

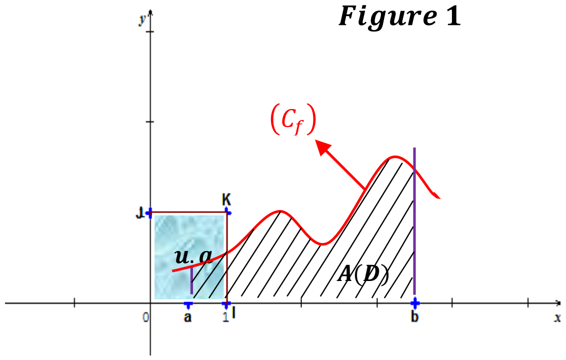
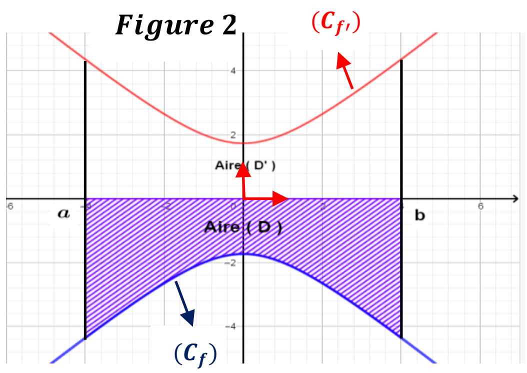


Figure 2



Remarque :

R_1. On dit aussi que $(\boldsymbol{D})$ est le domaine ou la partie du plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$.

R_2. Le domaine $(\boldsymbol{D})$ est aussi l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que : $\begin{cases} 0 \le y \le f(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$.

R_3. Si la fonction f est continue et négative sur $[a\,;\,b]$, la symétrie orthogonale d'axe (OI) transforme la courbe (C_f) en la courbe (C'_f) représentative de la fonction $(-f)$. Le domaine $(\boldsymbol{D})$ est transformé en un domaine $(\boldsymbol{D'})$ de même aire et on a alors :

$\boldsymbol{A}(D) = A(D') = \int_a^b (-f)(t)\,dt$. (**voir figure 2**)

d°) Interprétation cinématique de l'intégrale

Un mobile se déplace sur un axe à la vitesse $V(t)$, t étant la variable temps. Si l'on suppose que V est positive entre les instants t_1 et t_2, alors la distance parcourue par le mobile entre ces deux instants est : $d = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\,dt$.

Exemples 3 :

Un corps est lâché avec une vitesse initiale nulle à l'instant $t_0 = 0$ d'une hauteur $h = 1\,000\ m$ et est soumis à l'accélération de la pesanteur $g = 9{,}8\ m\,/\,s^2$.

1°) Quelle est la distance parcourue par ce corps après 5 secondes de chute ?

2°) À quel instant t (en seconde) touchera-t-il le sol ?

Solution :

1°) On a : $V(t) = gt$. Donc la distance parcourue par ce corps après 5 secondes de chute est donnée par : $d = \int_0^5 g.t\ dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^5 = 122{,}5\ m.$

2°) La relation $\int_0^T g.t\ dt = 1000\ m$ est logiquement équivalente à $\left[\frac{1}{2}\ g.t^2\right]_0^T = 1000\ m.$

Et $\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^T = 1000\ m \Leftrightarrow \frac{1}{2}g.T^2 = 1000\ m \Leftrightarrow g.T^2 = 2\,000\ m \Leftrightarrow \frac{9{,}8\ m}{s^2}.T^2 = 2\,000\ m$

$$\Leftrightarrow T^2 = \frac{2\,000\ m}{9{,}8\ m}\ s^2 \approx 204{,}08\ s^2 \Leftrightarrow T = \sqrt{\frac{2\,000\ m}{9{,}8\ m}\ s^2} \approx \frac{100}{7}\ s$$

$$\Leftrightarrow T \approx 14{,}2857\ s.$$

1.2. *Propriétés algébriques de l'intégrale*

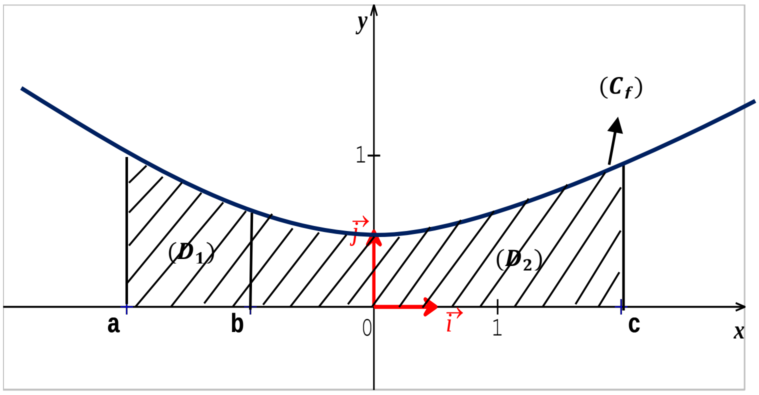
a°) R² de Charles

Propriété 4 :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $I \subseteq IR$. Pour tous nombres réels , b et c pris dans l'intervalle I, on a : $\int_a^c f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx.$

Interprétation graphique

Supposons que f est une fonction positive sur un intervalle $I = [a\ ;\ c]$ avec $a \leq b \leq c$. Désignons par (D) le domaine du plan délimité par la courbe (C_f) de f, la droite (OI) et les droites d'équations $x = a$ et $x = c$. La relation de Charles signifie que : $A(D) = A(D_1) + A(D_2)$



Exemples 4 :

1°) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |sint|\ dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} |sint|\ dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |sint|\ dt = [\ cost\ ]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + [-cost\ ]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + 1 = 2.$

2°) On donne la fonction f défini par : $f(x) = |x-1| + |2x| + |x+1|$.

Calculons l'intégrale $I = \int_{-2}^{2} f(x)\ dx.$

On a : $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1\ ;\ 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ et $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$. Donc

$I = \int_{-2}^{2} f(x)\ dx = \int_{-2}^{-1} f(x)\ dx + \int_{-1}^{0} f(x)\ dx + \int_0^1 f(x)\ dx + \int_1^3 f(x)\ dx.$

Ainsi, $I = \int_{-2}^{-1} (-4x)\ dx + \int_{-1}^{0} (-2x+2)\ dx + \int_0^1 (2x+2)\ dx + \int_1^3 (4x)\ dx$

$I = [-2\,x^2]_{-2}^{-1} + [-\,x^2 + 2x\,]_{-1}^{0} + [x^2 + 2x\,]_0^1 + [2\,x^2]_1^3$

$\quad = (-2+8) + (-(-1)^2 - 2) + [(1)^2 + 2] + (2 \times 3^2 + 2 \times 1^2)\ = 6 - 3 + 3 + 18 + 2 = 28$

x	$-\infty$ $\quad -1$		0 $\quad 1$	$+\infty$
$\lvert x-1\rvert$	$-(x-1)$	$-(x-1)$	$-(x-1)$	$x-1$
$\lvert 2x\rvert$	$-2x$	$-2x$	$2x$	$2x$
$\lvert x+1\rvert$	$-(x+1)$	$x+1$	$x+1$	$x+1$
$f(x)$	$-4x$	$-2x+2$	$2x+2$	$4x$

b°) *Linéarité de l'intégrale*

Propriété 5 :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I \subseteq IR$; a et b deux éléments de I. Pour tous nombres réels α et β, on a les propriétés suivantes :

P_1. $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

P_2. $\int_a^b (\alpha f)(x)\,dx = \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$

P_3. $\int_a^b (\alpha f+\beta g)(x)\,dx = \int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \int_a^b \alpha f(x)\,dx + \int_a^b \beta g(x)\,dx$

$$= \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

Cas particulier :

- Pour $\alpha = 1$ et $\beta = -1$, on a :

$$\int_a^b (f-g)(x)\,dx = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

- Pour $\alpha = 1 = \beta$, on a P_1.

Exemples 5 :

1°) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+cos\,2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+cos\,2t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos\,2t\,dt$

$$= \left[\frac{1}{2}\,t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\,t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2+\pi}{8}.$$

2°) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} tan^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} (-1+1+tan^2 t)\,dt = -\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} dt + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} (1+tan^2 t)\,dt$

$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} tan^2 t\,dt = [-\,t\,]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} + [tant\,]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 1 + tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{7\,\pi}{12} + 1 + \sqrt{3}.$

3°) $\int_{-2}^{1}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)\,dx = \int_{-2}^{1}\frac{2+(x+1)}{x+1}\,dx = \int_{-2}^{1}\frac{2}{x+1}\,dx + \int_{-2}^{1}\frac{(x+1)}{x+1}\,dx = 2ln2 + 3.$

1.3. *Propriétés de comparaison*

a°) *Positivité ou signe de l'intégrale*

Propriété 6 : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I \subseteq IR$; a et b deux éléments de I tel que : $a \leq b$.

P_1. Si f est positive sur I (c'est-à-dire si pour tout $x \in I,\ f(x) \geq 0$), alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$;

P_2. Si f est négative sur I (c'est-à-dire si pour tout $x \in I,\ f(x) \leq 0$), alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$;

P_3. Si pour tout $x \in I,\ f(x) \leq g(x)$,alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$;

P_4. Pour tout $x \in I,\ -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ et on en déduit que :

$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$; c'est-à-dire $-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$; $x \in I$.

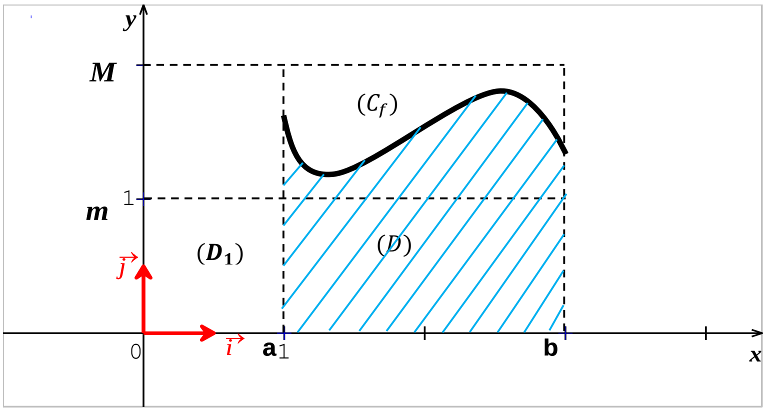
b°) *Inégalité de la moyenne et valeur moyenne d'une fonction*

Propriété 7 : (Inégalité de la moyenne)

Soient a et b deux nombres réels tels que : $a \leq b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $I = [a\,;\,b]$. Si m et M sont deux nombres réels tels que pour tout réel $t \in [a\,;\,b]$, $m \leq f(t) \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$.

Interprétation graphique

Lorsque m est positif, cette propriété signifie que l'aire du domaine colorié sur la figure ci-dessous est comprise entre les aires des rectangles de base commune $(b-a)$ et de hauteurs respectives m et M.



Remarques :

R_1. La fonction f étant continue sur $[a\,;\,b]$, alors elle est bornée sur $[a\,;\,b]$. Ainsi, les nombres m et M existent toujours.

R_2. L'inégalité de la moyenne appliquée à une fonction f sur un intervalle $[a\,;\,b]$ n'est rien d'autre que l'inégalité des accroissements finis appliquée à une primitive F de f sur le même intervalle.

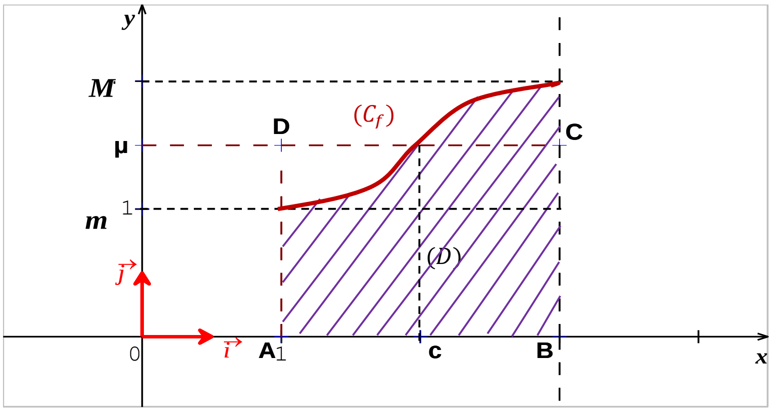
Propriété 8 : (Inégalité de la moyenne - Formule N°2)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $K = \left[a\,;\,b\right] \subseteq IR$; a et b deux éléments de K tel que $a \leq b$. Si m est un nombre réel tel que pour tout $t \in K$, $|f(t)| \leq M$, alors

$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq M|b-a| = M(b-a)$ car $a \leq b$.

Remarque : On a aussi : $|f(t)| \leq M \Rightarrow \int_a^b |f(t)|\,dt \leq \int_a^b M\,dt = M(b-a)$. En effet, $a \leq b$ et donc $0 \leq b-a$. Ainsi, $|b-a| = b-a$ et on a finalement $\int_a^b |f(t)|\,dt \leq M|b-a|$.

Conclusion : Si f est une fonction continue sur l'intervalle $K = \left[a\,;\,b\right] \subseteq IR$ et M un nombre réel strictement positif tel que $|f(t)| \leq M,\ \forall\, t \in [a\,;\,b]$, alors $\int_a^b |f(t)|\,dt \leq M|b-a|$.



Propriété 8 : (Valeur moyenne d'une fonction) – Voir figure ci-dessus.

Soit f une fonction continue sur un segment $K = \left[a\,;\,b\right] \subseteq IR$; a et b 2 éléments de K tel que $a < b$.

On appelle valeur moyenne de f sur K le nombre réel $\boldsymbol{\mu}$ défini par : $\boldsymbol{\mu} = \dfrac{1}{(b-a)} \int_a^b f(t)\,dt$.

Interprétation graphique

Lorsque f est positive sur $\left[a\,;\,b\right]$, $\boldsymbol{\mu}$ est la hauteur du rectangle $ABCD$, de base $b-a$ et dont l'aire est égale à celle du domaine plan $(\boldsymbol{D})$ hachuré sur la figure ci-dessus.

Exemple 6 :

1°) Calculons la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto 1 - x^2$ sur l'intervalle $[a\,;\,b] = [-1\,;\,1]$.

On a : $\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(t)dt = \frac{1}{(1-(-1))}\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx$

$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$

2°) Calculons la valeur moyenne de la fonction $g : x \mapsto x^3 - 1$ sur l'intervalle $K = [-1\,;\,2]$.

On a : $\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(t)dt = \frac{1}{2+1}\int_{-1}^{2}(t^3-1)dt = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}x^4 - x\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{3}\left(\frac{16}{4} - 2 - \left(\frac{1}{4} + 1\right)\right)$

$= \frac{1}{3}\left(4 - 2 - \frac{5}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{5}{4}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$

3°) Calculons la valeur moyenne de la fonction $h : x \mapsto sinx$ sur l'intervalle $K = [0\,;\,\pi]$.

On a : $\int_0^{\pi} sintdt = [-cost]_0^{\pi} = -cos\pi + \cos(0) = -(-1) + 1 = 1 + 1 = 2.$

Donc $\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sint\, dt = \frac{1}{\pi} \times 2 = \frac{2}{\pi}.$

4°) Soient α et β deux nombres réels, f la fonction définie sur $[a\,;\,b]$ par $f(x) = \alpha x + \beta$. Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.

On a : $\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_{-1}^{2}(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{\alpha}{2}x^2 + \beta x\right]_a^b$

$= \frac{1}{b-a}\left[\left(\frac{\alpha}{2}b^2 + \beta b\right) - \left(\frac{\alpha}{2}a^2 + \beta a\right)\right] = \frac{\alpha\,(b^2 - a^2)}{2\,(b-a)} + \frac{\beta\,(b-a)}{(b-a)} = \frac{\alpha\,(b+a)}{2} + \beta$

Donc $\boldsymbol{\mu} = \alpha\left(\frac{b+a}{2}\right) + \beta = f\left(\frac{b+a}{2}\right)$; où $\frac{b+a}{2}$ est le centre de l'intervalle $[a\,;\,b]$.

Interprétation cinématique : (de la valeur moyenne d'une fonction)

Si un mobile M se déplace sur un axe à la vitesse $V(t)$, sa vitesse moyenne entre deux instants t_1 et t_2 est : $V_m = \frac{d}{t_2 - t_1}$; où d est la distance parcourue entre ces deux instants. Lorsque la vitesse V est positive entre les instants t_1 et t_2, on a : $d = \int_{t_1}^{t_2} V(t)dt$; Donc $V_m = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} V(t)dt.$

La vitesse moyenne est alors la valeur moyenne de la vitesse.

Exercices à faire à la maison : N° $1f, 1g$ et $1h$ pages 320 et 323

N° 1 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 et 9 page 334 Excellence en Math Tle C & E.

Dernière mise à jour : 30 Janvier 2021.

LECON 2 :	TECHNIQUES DE CALCUL INTEGRAL Durée : 100 Minutes

Objectifs Pédagogiques de la leçon :

À la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- ✓ Calculer une intégrale par l'utilisation directe des primitives, par une intégration par parties ou par un changement de variable affine ;
- ✓ Donner le signe de $\int_a^b f(x)\,dx$ sur $[a\,;\,b]$ à partir de celui de f ;
- ✓ Déterminer une valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles ;

Pré-requis :

1°) Donner une primitive de chacune des fonctions f suivantes sur un intervalle que l'on précisera.
$f : x \mapsto (3x-2)^2$; $f : x \mapsto \frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$; $f : \mapsto \sqrt{x}$; $f : \mapsto \cos(2x+\pi)$; $f : \mapsto \frac{1}{2x-1}$ et $f : \mapsto \frac{1}{x}$.

2°) Calculer les intégrales suivantes : $\boldsymbol{A} = \int_1^2 \frac{2x+1}{(x^2+x)^2}\,dx$; $\boldsymbol{B} = \int_0^2 x^2\,dx$; $\boldsymbol{C} = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx$

$\boldsymbol{D} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x+\pi)\,dx$; $\boldsymbol{E} = \int_1^2 (3x-2)^2\,dx$; $\boldsymbol{F} = \int_1^2 \frac{1}{2x-1}\,dx$ et $\boldsymbol{G} = \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$.

Solution :

1°) Une primitive de chacune des fonctions f sur un intervalle que l'on précisera :

$F : x \mapsto 3x^3 - 6x^2 + 4x$ sur IR ; $F : x \mapsto -\frac{1}{x^2+x}$ sur $IR\backslash\{-1\,;\,0\}$;

$F : x \mapsto \frac{2\,x\,\sqrt{x}}{3}$ sur IR_+ ; $F : x \mapsto \frac{1}{2}Sin(2x+\pi)$ sur IR ;

$F : x \mapsto \frac{1}{2}ln(2x-1)$ sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ et $F : x \mapsto lnx$ sur $]0\,;+\infty[$.

2°) Calculons les intégrales demandées.

On a : $\boldsymbol{A} = \int_1^2 \frac{2x+1}{(x^2+x)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x^2+x}\right]_1^2 = \frac{1}{3}$; $\boldsymbol{B} = \int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}$;

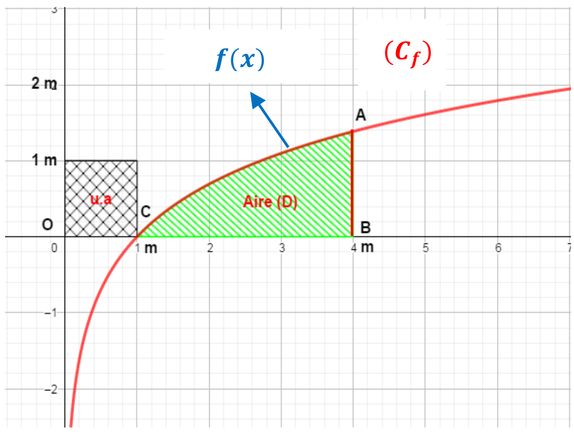
$\boldsymbol{C} = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2\,x\,\sqrt{x}}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$; $\boldsymbol{D} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x+\pi)\,dx = \left[\frac{1}{2}Sin(2x+\pi)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}$;

$\boldsymbol{E} = \int_1^2 (3x-2)^2\,dx = [3x^3 - 6x^2 + 4x]_1^2 = 7$; $\boldsymbol{F} = \int_1^2 \frac{1}{2x-1}\,dx = \left[\frac{1}{2}ln(2x-1)\right]_1^2 = \frac{1}{2}ln3$

et $\boldsymbol{G} = \int_1^3 \frac{dx}{x} = [lnx]_1^3 = ln3$.

Situation problème :

On considère la figure ci-contre où f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = lnx$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O\,;\,I\,;\,J)$. L'unité graphique sur les axes est de $1\,m$. La partie hachurée sous la courbe représente un morceau de tissus conçu par un couturier pour la confection de la culote de votre frère cadet. Quelque temps après, il se rend compte qu'il lui faudrait encore de tissus pour confectionner entièrement cette culote. C'est ainsi que ce couturier décide de calculer la surface de ce morceau de tissu afin de savoir quelle quantité de tissus il devra encore concevoir pour ce travail.

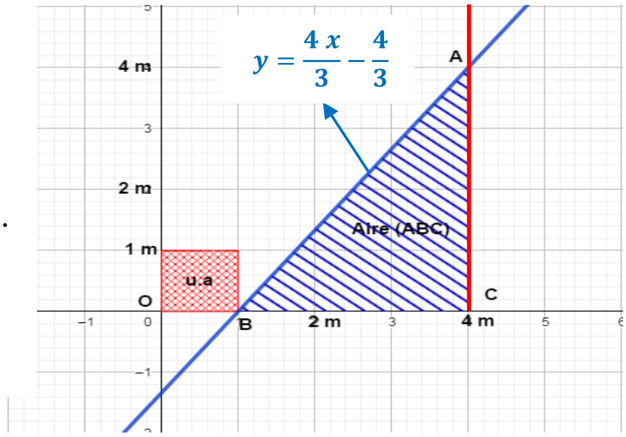


N'ayant pas un bagage intellectuel lui permettant de faire ce calcul, il fait appel à vous pour l'aider à calculer la surface de ce morceau de tissus. Soit F une primitive de la fonction f sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

1°) Calculer $F(4) - F(1)$.
2°) Calculer $A = \int_1^4 lnx\, dx$. Quelle remarque faites-vous ?
3°) Aider ce couturier à calculer la surface de ce morceau de tissus.

Activité d'apprentissage N°1 :

On considère la figure ci-contre.
1°) Calculer l'aire du triangle ABC sachant que l'unité sur les axes est de un m.
2°) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = \frac{4x}{3} - \frac{4}{3}$ et G une primitive de g sur IR.
a°) Calculer $G(4) - G(1)$.
b°) Calculer $A = \int_1^4 \left(\frac{4x}{3} - \frac{4}{3}\right) dx$.
Quelle remarque faites-vous ?



Activité d'apprentissage N°2 :

A − Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de IR. On sait que : $(uv)' = u'v + v'u$.
1°) Que représente la fonction (uv) pour la fonction $u'v + v'u$?
2°) Soient a et b deux éléments de I. Montrer que :
$[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t)\, v(t)\, dt + \int_a^b u(t)\, v'(t)\, dt$ et en déduire que
$\int_a^b u'(t)\, v(t)\, dt = [u(t)\, v(t)]_a^b - \int_a^b v'(t)\, u(t)\, dt$.
B − Soit I un intervalle ouvert de IR ; φ une fonction affine non constante définie sur I et f une fonction continue sur l'intervalle ouvert φ(t). Soit F une primitive de f sur I. On considère la fonction g définie sur I par $G(t) = F(\varphi(t))$.
1°) Donner l'expression de $G'(t)$ pour tout $t \in I$.
2°) Soit la fonction $g : t \mapsto f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)$. Que représente G pour la fonction g ?
3°) Montrer que pour tous a et b éléments de I, $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$
4°) Déduire que $\int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$.

Solutions :

A − U et V' sont deux fonctions dérivables sur $I \in IR$.
1°) On a : $(U\,V)' = U'\,V + U\,V' \Rightarrow (UV)$ est une primitive de la fonction $U'\,V + U\,V'$.
2°) Soient a et b deux éléments de I. Pour tout réel $t \in I$,
$\int_a^b (UV)'(t)dt = \int_a^b (U'V + UV')(t)dt$; c'est-à-dire.
$\int_a^b (U(t)\, V(t))'\, dt = \int_a^b U'(t)\, V(t)dt + \int_a^b U(t)\, V'(t)dt$. C'est-à-dire :
$[U(t)V(t)]_a^b = \int_a^b U'(t)\, V(t)dt + \int_a^b U(t)\, V'(t)dt$; d'où on a :
$\int_a^b U'(t)\, V(t)dt = [U(t)V(t)]_a^b - \int_a^b U(t)\, V'(t)dt$.
B − ***I*** est un intervalle de IR, φ une fonction affine non constante et f une fonction continue sur l'intervalle ouvert $\varphi(I)$. F est une primitive de f sur I et $G : t \mapsto F(\varphi(t))$.
1°) $G(t) = (Fo\varphi)(t)$; donc $G'(t) = \varphi'(t) \times F' o\varphi(t)$. Ainsi,
$G'(t) = \varphi'(t) \times F'o\varphi(t) = \varphi'(t) \times f(\varphi(t)) = f\ o\ \varphi(t) \times \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)$.
2°) La fonction $G : t \rightarrow F(\varphi(t))$ représente une primitive de la fonction

$g : t \to f(\varphi(t)) \times \varphi'(t) = \varphi'(t) \times f \circ \varphi(t)$ car $G'(t) = g(t); \forall t \in I$.

3°) Comme F est une primitive de f sur I, on a :

$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du = [F(u)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$ $\quad(\mathbf{1})$

4°) On a : $\int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)dt = [G(t)]_a^b = [F(\varphi(t))]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$. $(\mathbf{2})$

On remarque bien que les relations $(\mathbf{1})$ et $(\mathbf{2})$ sont identiques ; donc :

$\int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$

RESUME :

2.1. Techniques de base.

a) Utilisation des primitives usuelles.

Propriétés :

Soit I un intervalle de IR et f une fonction définie sur I.

P_1. Si F est une primitive de f sur I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions G définies sur I tels que : $\forall\, x \in I,\ \exists\, k \in IR$ tel que : $G(x) = F(x) + k$.

P_2. Toute fonction continue sur un intervalle I de IR admet une primitive sur I et chacune des primitives de f sur I est déterminée par sa valeur en un point. Le tableau suivant reprend quelques résultats concernant les primitives. Dans ce tableau, u désigne une fonction dérivable sur un intervalle contenant $u(I)$ et α un nombre réel différent de -1.

Fonction	$u.e^u$	$u' \times v' \mathbf{o}\, u$	$u'u^n$	$\frac{u'}{u}$	e^u	$u'\sqrt{u}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$
Primitive	$e^u + k$	$v \mathbf{o}\, u$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + k$	$ln\|u\| + k$	$\frac{1}{u'}e^u + k$	$\frac{2}{3}u\sqrt{u} + k$	$2\sqrt{u} + k$
Intervalle	$-$	I	$u > 0$ sur I	$u \neq 0$ sur I	_	$u > 0$	$u > 0$

Exemples 1 :

1°) $\int_0^1 (t^3 + 2t + 1)\, dt = \left[\frac{1}{4}t^4 + t^2 + t\right]_0^1 = \frac{9}{4}$

2°) $\int_0^{\pi/4} \sin(2t + \frac{\pi}{2})\, dt = \left[-\frac{1}{2}\cos(2t + \frac{\pi}{2})\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}$

3°) $A = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2t}{t^2 - 1} dt = [ln|t^2 - 1|]_0^{\frac{1}{2}} = ln\frac{3}{4} = ln3 - ln4$

4°) $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cost\, e^{sint} dt = \left[e^{sint}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = e - 1$

5°) $\int_{-1}^1 e^{2x+1} dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x+1}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{2}e^3 - \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2}e^3 - \frac{1}{2e}$

6°) $\int_0^2 \frac{2}{\sqrt{t+1}} dt = \left[4\sqrt{t+1}\right]_0^2 = 4\sqrt{3} - 4\sqrt{1} = 4(\sqrt{3} - 1)$

7°) $\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}\, dx = \left[\frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\,(2\sqrt{2} - 1) = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}$.

b) Integration par partie

Propriété:

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle K de IR et admettant des dérivées continues sur K. Pour tous nombres réels a et b de K, on a :

$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)\, v'(t)\, dt.$

Remarque :

R_1. Une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $f : x \to \ln x$ est la fonction $f : x \to x\ln x - x$.

R_2. $\int_a^b f(x)\,dx$ est la somme continue de $f(x)$ sur $[a\,;\,b]$; $a < b$.

C.) Changement de variable affine.

Propriétés :

Soit I un intervalle ouvert de IR, φ une fonction affine non constante définie sur I et f une fonction continue sur l'intervalle ouvert $\varphi(I)$.

P_1. Pour tout couple $(a\,;\,b)$ d'éléments de I, on a : $\int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du$ où $u = \varphi(t)$ et donc $du = \varphi'(t)dt$ c'est-à-dire $\varphi'(t) = \frac{du}{dt}$. L'égalité $du = \varphi'(t)dt$ permet de trouver la formule du changement de variable affine.

P_2. Soit pour tout $t \in I$, $\varphi(t) = \alpha t + \beta$ (α , $\beta \in R$).

i) Si $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$, alors $\varphi(t) = \alpha t$ et on a : $\int_a^b f(\varphi(t))\,dt = \int_a^b f o\varphi(t)\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du$ où $u = \alpha t$ et f dérivable sur $[\alpha a\,;\,\alpha b]$.

ii) Si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, alors $\varphi(t) = \alpha t + \beta$ et on a :

$\int_a^b f(\varphi(t))\,dt = \int_a^b f(\alpha t + \beta)\,dt = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} \frac{1}{\alpha} f(u)\,du = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(u)du$ où $u = \alpha t + \beta$ avec f dérivable sur $[\alpha a + \beta\,;\,\alpha b + \beta]$.

Méthode :

Pour calculer l'intégrale $\int_a^b f(\alpha t + \beta)\,dt$ avec $\alpha \neq 0$, on peut utiliser le procédé suivant :

1) Faire le changement de variable $u = \alpha t + \beta$ et obtenir $du = \alpha\,dt$; c'est-à-dire $dt = \frac{1}{\alpha}du$.

2) Utiliser l'égalité : $\int_a^b f(\alpha t + \beta)\,dt = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} \frac{1}{\alpha} f(u)\,du = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(u)\,du$.

Exemple 2 :

Calculons les intégrales suivantes :

a°) $A = \int_{-2}^{-1} \frac{3}{x^2 + 4x + 5}\,dx$.

On a : $A = \int_{-2}^{-1} \frac{3}{(x+2)^2 - 4 + 5}dx = \int_{-2}^{-1} \frac{3}{(x+2)^2 + 1}dx = 3\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x+2)^2 + 1}$

Posons $u = x + 2$. On a : $du = dx$.

Ainsi, $A = 3\int_0^1 \frac{du}{u^2+1} = 3\,[Arctan\,u]_0^1 = 3\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{3\pi}{4}$

b°) $B = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} \frac{\ln 3x}{3x}\,dx$. Soit $u = 3x$. On a : $du = 3\,dx$.

Quand x tend vers $\frac{1}{3}$; $u \mapsto 3 \times \frac{1}{3} = 1$ et quand $x = \frac{e}{3}$; $u = \frac{3e}{3} = $ e. Ainsi, $dx = \frac{1}{3}du$ et

$B = \int_1^e \frac{\ln u}{u} \times \left(\frac{1}{3}du\right) = \frac{1}{3}\int_1^e \frac{\ln u}{u}du = \frac{1}{3}\int_1^e \left(\frac{1}{u}\right)\ln u\,du = \frac{1}{3}\int_1^e (\ln u)' \times (\ln u)^1\,du$

$= \frac{1}{3}\left[\frac{(\ln u)^2}{2}\right]_1^e = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{6}$.

c°) $E = \int_{-1}^0 \frac{t}{\sqrt{2t+3}}\,dt$. Posons $u = 2t + 3 \Rightarrow du = 2\,dt$. $u \mapsto 3$ quand $t \mapsto 0$;

$u \mapsto 1$ quand $t \mapsto -1$ et $dt = \frac{1}{2}du$. On a alors :

$E = \int_1^3 \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}(u-3)}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{4}\int_1^3 \frac{u-3}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{4}\int_1^3 \left(\sqrt{u} - \frac{3}{\sqrt{u}}\right)du = \frac{1}{4}\int_1^3 \sqrt{u}\,du - \frac{3}{4}\int_1^3 \frac{du}{\sqrt{u}}$

$E = \left[\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_1^3 - \frac{3}{4}[2\sqrt{u}]_1^3 = \left(\frac{1}{6} \times 3\sqrt{3} - \frac{1}{6} \times 1\sqrt{1}\right) - \frac{3}{4}(2\sqrt{3} - 2\sqrt{1}) = \frac{4}{3} - \sqrt{3}$;

2.2. Intégration des fonctions particulières

a) Intégrations des fonctions paires, impaires ou périodiques

Propriétés :

P_1. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[-a\,;\ a]$ avec $a > 0$.

i) Si f est paire, alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$

ii) Si f est impaire, alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$.

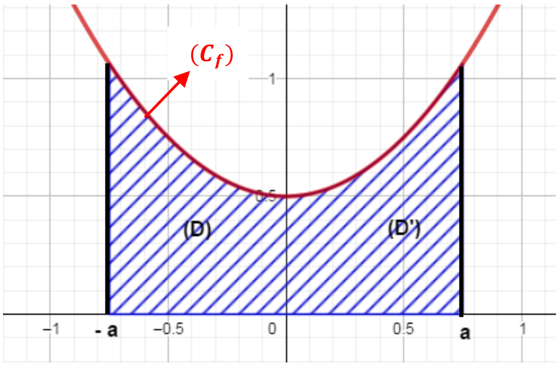
P_2. Soit f une fonction continue sur IR et périodique de période T. Pour tous nombres réels a et b, on a : $\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.

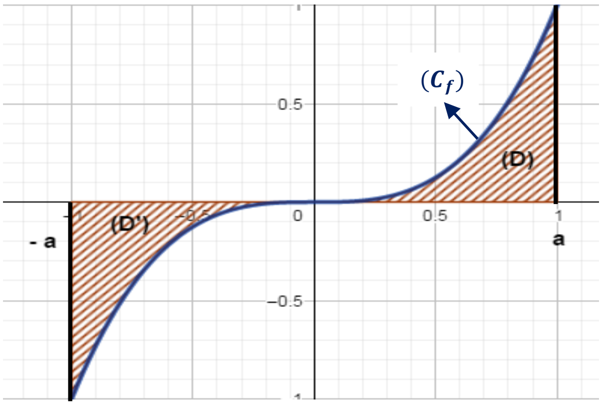
Interprétation graphique :

Supposons que la fonction f soit positive sur $[0\,;\ a]$, $(a > 0)$.

i) Si f est paire, alors les domaines (D) et (D') sont symétriques par rapport à l'axe (OJ) et ont la même aire. Ainsi, $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.

ii) Si f est impaire, alors les domaines (D) et (D') sont symétriques par rapport à l'origine O du repère et ont la même aire. Donc $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.





b) Intégration des polynômes trigonométriques.

Etude sur un exemple 1 :

Calculons les intégrales suivantes :

$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^3t\ sint + 3sin^3t)\,dt$ et $B = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (cos^2t - 2sin^4t)\,dt$.

Solution :

∗ Pour tout $t \in IR$, on a : $cos^3t\ sint + 3sin^3t = sint\,(cos^3t + 3sin^2t)$ c'est-à-dire

$cos^3t\ sint + 3sin^3t = sint\,(cos^3t + 3(1 - cos^2t)) = sint\,(cos^3t - 3\,cos^2t + 3)$. Donc

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sintcos^3t\,dt - 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} sintcos^2t\,dt + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} sint\,dt = \left[-\frac{cos^4t}{4} + cos^3t - 3cost\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{4}$$

∗ On a pour tout $\in IR$, $cos^2t = \frac{1+cos2t}{2}$ et

$sin^4t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{8}\left(\frac{e^{4it}+e^{-4it}}{2} - 4\times\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2} + 3\right) = \frac{1}{8}\,cos4t - \frac{1}{2}cos2t + \frac{3}{8}$. Ainsi,

$cos^2t - 2sin^4t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,cos2t - \frac{1}{4}cos4t + cos2t - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}cos4t + \frac{3}{2}cos2t - \frac{1}{4}$

Donc $B = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-1}{4} cos\ 4t\,dt + \frac{3}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} cos\ 2t\,dt - \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dt = \left[-\frac{sin4t}{16} + \frac{3sin2t}{4} - \frac{t}{4}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{8}$.

c°) *Intégration des fonctions rationnelles.*

Etude sur un exemple 2 :

1. a°) Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $\forall\, t \in IR \setminus \{-1\,;\,2\}$, $\frac{1}{t^2-t-2} = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{t-2}$

b°) Calculer l'intégrale $A = \int_0^1 \frac{1}{t^2-t-2}\,dt$

2. a°) Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que : $\forall\, t \in IR^*$, $f(t) = \frac{1}{t\,(t^2-2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{t^2+1}$

b°) Calculer l'intégrale $B = \int_1^2 f(t)dt$.

Solution :

1. a°) Soit $g : t \mapsto \frac{1}{t^2-t-2}$. On a : $g(t) = \frac{1}{(t+1)(t-2)}$

$*\ g(t)\times(t+1) = \frac{1}{t-2} = a + \frac{b\,(t+1)}{t-2}$

$\lim\limits_{t\mapsto -1} g(t)\times(t+1) = \lim\limits_{t\mapsto -1}\left(\frac{1}{t-2}\right) = \lim\limits_{t\mapsto -1}\left(a + \frac{(t+1)}{t-2}\,b\right)$; c'est à dire

$-\frac{1}{3} = a + \lim\limits_{t\mapsto -1}\frac{b\,(t+1)}{t-2} = a + 0$. Donc $a = -\frac{1}{3}$.

$*\ g(t)\times(t-2) = \frac{1}{t+1} = \frac{a\,(t-2)}{t-1} + 6$.

$\lim\limits_{t\mapsto 2} g(t)\times(t-2) = \lim\limits_{t\mapsto 2}\frac{1}{t+1} = 0 + b$ car $\lim\limits_{t\mapsto 2}\frac{a(t-2)}{t-1} = 0$;

Donc $b = \lim\limits_{t\mapsto 2}\frac{1}{t+1} = \frac{1}{3}$. Ainsi, on trouve finalement $a = -\frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$.

b°) La fonction g est continue sur $[0\,;\,1]$. On a alors :

$A = \int_0^1 g(t)dt = \int_0^1\left(\frac{-1}{3(t+1)} + \frac{1}{3(t-2)}\right)dt = -\frac{1}{3}\int_0^1\frac{1}{t+1}dt + \frac{1}{3}\int_0^1\frac{1}{t-2}dt$

$= \left[-\frac{1}{3}ln|t+1| + \frac{1}{3}ln|t-2|\right]_0^1 = \left[\frac{1}{3}ln\left|\frac{t-2}{t+1}\right|\right]_0^1 = -\frac{2}{3}\,ln2.$

2. a°) Déterminons trois nombres réels a, b et c tels que : $f(t) = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{t^2+1}$

On a pour tout $t \in IR^*$, $f(t) = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}$; Donc $a = 1$; $b = -1$ et $c = 0$.

b°) La fonction f est continue sur $[1\,;\,2]$. On a :

$B = \int_1^2 f(t)dt = \int_1^2\left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\right)dt = \int_1^2\frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int_1^2\frac{2t}{t^2+1}dt = [lnt]_1^2 - \left[\frac{1}{2}ln|t^2+1|\right]_1^2$

$= ln2 - \frac{1}{2}ln5 + \frac{1}{2}ln2 = \frac{3}{2}ln2 - \frac{1}{2}ln5.$

Méthode :

Soit $f : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle où P et Q sont des fonctions polynômes.

$*$ Si $deg(P) < deg(Q)$, alors on met $f(x)$ sous la forme $f(x) = \frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)\ldots}$ avec $a, b, c, \ldots$, deux à deux distincts et on montre par la suite que $f(x)$ peut se mettre sous la forme :

$f(x) = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b} + \frac{\sigma}{x-c} + \ \ldots$

$*$ Si $deg(P) \geq deg(Q)$, alors on fait la division euclidienne et on procède ensuite comme précédemment.

2.3. *Calcul approché d'une intégrale.*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux éléments de I tel que $a < b$ et $A = \int_a^b f(t)\,dt$. Lorsqu'on ne peut pas déterminer une primitive de f sur I, on calcule une valeur approchée A' de A. l'erreur commise en remplaçant A par A' est $e = |A - A'|$. Il existe plusieurs méthodes permettant d'obtenir des valeurs approchées d'une intégrale A. Parmi ces méthodes on peut citer : **La méthode des rectangles**, **la méthode du point médian** et **la méthode des trapèzes**. La méthode qui fera l'objet de ce paragraphe est la *méthode des rectangles.*

a) Valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles.

Propriétés :

Soit f une fonction continue et monotone sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et n un entier naturel non nul. On subdivise l'intervalle $[a\,;\,b]$ en n intervalles $[x_i\,;\,x_{i+1}]$ d'égale amplitude $\frac{b-a}{n}$ tels que :

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

P_1. Si f est croissant sur $[a\,;\,b]$, alors

$$\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \leq \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}).$$

P_2. Si f est décroissante sur $[a\,;\,b]$, alors

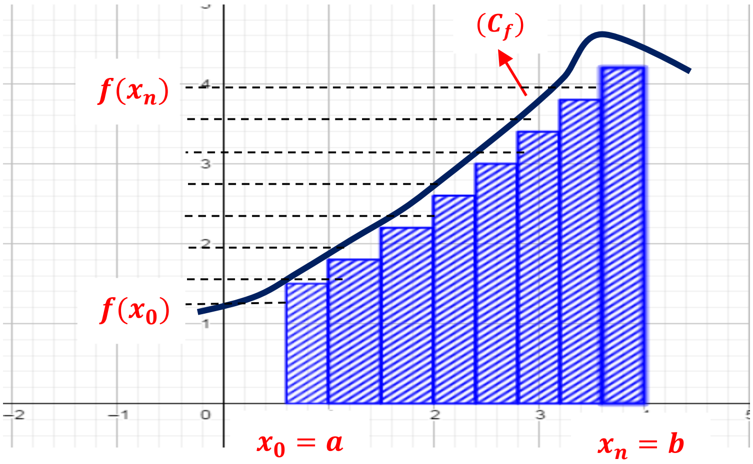
$$\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \leq \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

P_3. La suite $(S_n)_{n\in IN}$ de terme général $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$ converge vers $A = \int_a^b f(t)dt$ et si $|f'|$ admet un majorant M sur $[a\,;\,b]$, alors $\forall\, x \in IN^*$, $|A - S_n| \leq \frac{M}{2n}(b-a)^2$.

De même, la suite $(t_n)_{n\in IN}$ de terme général $t_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})$ converge également vers $A = \int_a^b f(t)dt$.

i) Si f est croissante sur $[a\,;\,b]$, alors $S_n \leq \int_a^b f(t)dt \leq t_n$

ii) Si f est décroissante sur $[a\,;\,b]$, alors $t_n \leq \int_a^b f(t)dt \leq S_n$.



Remarque :

R_1. Soit f une fonction continue sur $[a\,;\,b]$ et $(u_n)_n$ une suite définie sur IN^* par :

$$u_n = \left[f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + 2\times\frac{b-a}{n}\right) + \cdots + f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right)\right].$$

La suite u_n converge vers la valeur moyenne $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$ de f sur $[a\,;\,b]$.

R_2. Les suites $V_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\times\frac{b-a}{n}\right)$ et $W_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\times\frac{b-a}{n}\right)$ pour une fonction f monotone sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ convergent toutes deux vers $A = \int_a^b f(t)dt$.

Exemple 3 :

Déterminons par la méthode des rectangles une valeur approchée de l'intégrale $A = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^6+1}}\,dx$ à 10^{-1}près.

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^6+1}}$

Pour tout réel x, $f'(x) = \frac{-6x^5}{2\sqrt{x^6+1}} = \frac{-3x^5}{\sqrt{x^6+1}}$. $\forall x \in \left]0\ ;\ +\infty\right[$, $f'(x) \leq 0$. Donc f est décroissante sur $\left]0\ ;\ +\infty\right[\supset \left[0\ ;\ 2\right]$. Ainsi, f est décroissante sur $\left[0\ ;\ 2\right]$. Soit $a = 0$ et $b = 2$. Cherchons un entier naturel n tel que $n > \frac{2}{2 \times 10^{-1}}|f(2) - f(0)|$.

Soit $n > 10 \times \left|\frac{1}{\sqrt{2^6+1}} - 1\right| \Rightarrow n > 9{,}84$. On peut alors prendre $n = 10$.

On subdivise alors l'intervalle $[0\ ;\ 2]$ en 10 intervalles d'égale amplitude $0{,}2$.

Ainsi, on a : $x_0 = a = 0$; $x_1 = 0{,}2$; $x_2 = 0{,}4$; $x_3 = 0{,}6$; $x_4 = 0{,}8$; $x_5 = 1$; $x_6 = 1{,}2$;

$x_7 = 1{,}4$; $x_8 = 1{,}6$; $x_9 = 1{,}8$; $x_n = x_{10} = b = 2$. Soient S_{10} et t_{10} les suites définies par :

* $S_{10} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{2}{10}\sum_{i=0}^{9} f(x_i) = \frac{1}{5}\sum_{i=0}^{9} f(x_i) = 0{,}2\ \sum_{i=0}^{9} f(x_i)$.

$= \frac{2-0}{10}[f(0) + f(0{,}2) + f(0{,}4) + \cdots + f(0{,}8) + f(1) + f(1{,}2) + \cdots + f(1{,}8)] \approx 1{,}365$;

* $t_{10} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) = \frac{2}{10}\sum_{i=0}^{9} f(x_{i+1}) = \frac{1}{5}\sum_{i=0}^{9} f(x_{i+1}) = 0{,}2\ \sum_{i=0}^{9} f(x_{i+1})$.

$t_{10} = \frac{1}{5}[f(0{,}2) + g(0{,}4) + \cdots + f(0{,}8) + f(1) + f(1{,}2) + \cdots + f(1{,}8) + f(2)] \approx 1{,}189$.

Comme f est décroissante sur $[0\ ;\ 2]$, on a : $t_{10} < \int_0^2 f(x)\,dx < S_{10}$; soit $1{,}189 < A < 1{,}365$.

Une valeur approchée de $A = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^6+1}}\,dx$ à 10^{-1} près est alors : $\frac{1{,}189 + 1{,}365}{2} \approx 1{,}28$.

b) Intégration des fonctions de type $p_n(t)\,e^{\alpha t}$ où $p_n(t)$ est un polynôme de degré n

* Si p_n est de degré ≤ 2, alors il suffit de faire une ou deux intégrations par parties.

* Si p_n est de degré > 2, ce travail devient fastidieux.

Propriété :

Une primitive de la fonction $t \mapsto p_n(t)e^{\alpha t}$ est la fonction $t \mapsto Q_n(t)e^{\alpha t}$ où Q_n est un polynôme de même degré que p_n.

Exemple 4 :

Calculons l'intégrale $A = \int_0^1 2t^3e^{2t}dt$. Soit $f : t \mapsto 2t^3e^{2t}$. Une primitive de f est de la forme $F(t) = (at^3 + bt^2 + ct + d)e^{2t}$. On a :

$F'(t) = [2at^3 + (3a + 2b)t^2 + (2b + 2c)t + (2d + c)]e^{2t}$ et par identification, on obtient :

$$F'(t) = f(t) \Rightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ 3a + 2b = 0 \\ 2b + 2c = 0 \text{ et } 2d + c = 0 \end{cases}$$

i.e. $a = 1$, $b = -\frac{3}{2}$; $c = \frac{3}{2}$ et $d = -\frac{3}{4}$. Donc $F(t) = \left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}\right)e^{2t}$ est une primitive de f et $A = [F(t)]_0^1 = \frac{1}{4}(3 + e^2)$.

c) *Intégration par parties successives*

Etude sur un exemple 3 :

Calculons l'intégrale $I = \int_0^1 (t^2+1)e^{3t}dt$.

$I = \int_0^1 (t^2+1)e^{3t}dt$. Posons $u(t) = t^2+1$ et $V'(t) = e^{3t}$. On a : $u'(t) = 2t$ et $V(t) = \frac{1}{3}e^{3t}$. Ainsi, $I = \left[\frac{1}{3}(t^2+1)e^{3t}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t}{3}e^{3t}dt = \left[\frac{t^2+1}{3}e^{3t}\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 te^{3t}dt$ en intégrant de nouveau $I_1 = \int_0^1 te^{3t}dt$ par partie, on a :

$$\begin{cases} u(t) = t \text{ et } v'(t) = e^{3t} \\ u'(t) = 1 \ ; \ v(t) = \frac{1}{3}e^{3t} \text{ et } I_1 = \left[\frac{t}{3}e^{3t}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}e^{3t}dt. \end{cases}$$

$I_1 = \left[\frac{t}{3}e^{3t}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}e^{3t}\right]_0^1 = \left[\frac{te^{3t}}{3} - \frac{1}{9}e^{3t}\right]_0^1 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^3 + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$.

Donc $I = \left[\frac{t^2+1}{3}e^{3t}\right]_0^1 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{9}(2e^3+1) = \frac{2}{3}e^3 - \frac{1}{3} - \frac{2}{27}(2e^3+1) = \frac{1}{27}(14e^3-11)$.

<u>Exercices</u> : N° 1q et 1r Page 330.

<u>Exercices</u> : N° 21, 22, 23, 24, 28, 30, 36 et 40 pages 345 à 348.

Dernière mise à jour : 30 Janvier 2021.

LECON 3 :	*APPLICATIONS DU CALCUL INTEGRAL* *Durée : 100 Minutes*

Motivation :

- Calcul du volume d'un solide dont on connaît la section par un plan ;
- Calcul du volume d'un solide de révolution engendré par une rotation autour de l'un des axes d'un repère ;
- Calcul de la valeur efficace dans un transfert d'énergie ;

Objectifs

À la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

✓ Déterminer l'aire d'un domaine compris entre deux courbes dont on connaît les équations

✓ Calculer le volume d'un solide de révolution engendré par une rotation autour de l'un des axes d'un repère ;

✓ Etudier le sens de variation de la fonction $F : x \longmapsto \int_a^x f(x)\,dx$ sur un intervalle contenant a et sur lequel la fonction f est continue, sans utiliser une primitive de f.

Pré-requis :

1°) Calculer les primitives suivantes : $\int \left(\frac{4x+5}{x^2+x-2}\right)dx$ et $\int \left(\frac{6-x}{x^2-4x+4}\right)dx$.

2°) Calculer les primitives $I_k = \int \frac{1}{(x-1)^k}dx$ et $J_k = \int \frac{x}{(x^2+1)^k}dx$ pour tout $k \geq 1$.

3°) Calculer les intégrales $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (Sin^2x\, Cos^3x)dx$ et $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{Cos^2 x}dx$.

Solution :

1°) On a : $\int \left(\frac{4x+5}{x^2+x-2}\right)dx = \int \left(\frac{4x+1}{x^2+x-2} + \frac{4}{x^2+x-2}\right)dx = \int \frac{4x+1}{x^2+x-2}dx + \int \frac{4}{x^2+x-2}dx$

$$= ln(|x^2+x-2|) + \int \frac{4\,dx}{(x+2)(x-1)}$$

$$= ln(|x^2+x-2|) - \frac{4}{3}\int \frac{1}{(x+2)}dx + \frac{4}{3}\int \frac{1}{(x-1)}dx$$

$$= ln|x^2+x-2| - \frac{4}{3}ln|x+2| + \frac{4}{3}ln|x-1|$$

$$\int \left(\frac{6-x}{x^2-4x+4}\right)dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-12}{x^2-4x+4}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-4-8}{x^2-4x+4}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+4}dx + \frac{1}{2}\int \frac{8\,dx}{x^2-4x+4} = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+4}dx + 4\int \frac{dx}{x^2-4x+4}$$

$$= -\frac{1}{2}ln|x^2-4x+4| + \int \frac{4\,dx}{(x-2)^2} = -\frac{1}{2}ln|x^2-4x+4| + 4\int (x-2)^{-2}dx$$

$$= -\frac{1}{2}ln|x^2-4x+4| - \frac{4}{x-2}$$

2°) Primitives de $I_k = \int \frac{1}{(x-1)^k}dx$ et $J_k = \int \frac{x}{(x^2+1)^k}dx$ pour tout $k \geq 1$.

On a : $I_k = \int \frac{dx}{(x-1)^k} = I_k = \int (x-1)^{-k}dx = \frac{1}{(1-k)(x-1)^{k-1}} + \alpha = \frac{(x-1)^{1-k}}{(1-k)} + \alpha$, $\alpha \in IR$.

$J_k = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^k} = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{-k}dx = \frac{1}{2} \times \frac{(x^2+1)^{1-k}}{(1-k)} + \alpha = \frac{(x^2+1)^{1-k}}{2(1-k)} + \alpha$, $\alpha \in IR$.

3°) Calculons les intégrales A et B :

$* \; A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (Sin^2x\, Cos^3x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (Sin^2x\, Cosx\, Cos^2x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\,Cosx\,(1-Sin^2x)\,Sin^2x)dx$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\,Cosx\, Sin^2x - \,Cosx\, Sin^4x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Cosx\, Sin^2x\,dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Cosx\, Sin^4x\,dx$$

$$A = \left[\frac{1}{3}Sin^3x - \frac{1}{5}Sin^5x\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$

$* \ B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{Cos^2 x} dx$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{Cos^2 x}$ est la dérivée de $x \mapsto tan\, x$. En intégrant par parties, on a en posant $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{Cos^2 x}$: $u'(x) = 1$, $v(x) = \tan x$ et

$$I = [x\, tan\, x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{Sin\, x}{Cos\, x} dx = \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-Sin\, x}{Cos\, x} dx = \frac{\pi}{4} + [ln(Cos\, x)]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4} + ln\left(Cos\frac{\pi}{4}\right) - ln(1) = \frac{\pi}{4} + ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + ln\sqrt{2} - \ln 2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} ln\, 2 - \ln 2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} ln 2.$$

Situation Problème :

Considérons la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et sa courbe représentative (C_f) dans le plan muni du repère orthonormé $(O\,;\,I\,;\,J)$. On souhaite calculer :

1°) L'aire A du domaine plan délimité par la courbe (C_f) , les droites d'équation $(x = 1)$, $(x = 4)$ et l'axe (OX).

2°) Le volume V du solide S engendré par la rotation de (C_f) autours de l'axe (OX).

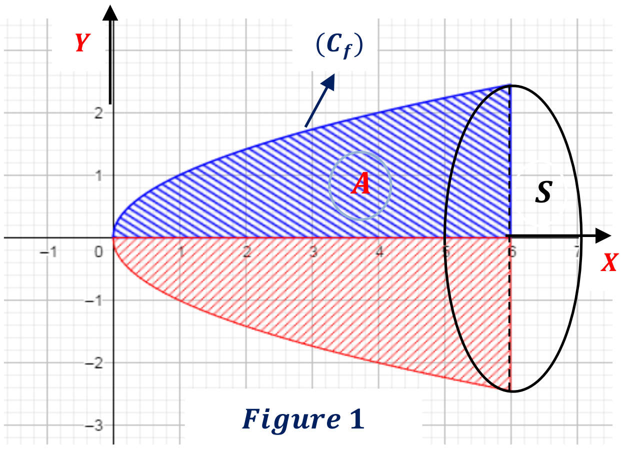


Figure 1

Activité d'apprentissage :

Soit h un réel strictement positif et $0 < x_0 \leq x_1 < a$. On se propose de calculer l'aire du trapèze de sommets $A\,(x_0\,;\,h)$; $B\,(0\,;\;0)$; $C\,(a\,;\;0)$ et $D\,(x_1\,;\;h)$.

1°) Montrer que les droites (AB) ; (AD) et (DC) ont pour équations cartésiennes : $y = \frac{h}{x_0}x$; $y = h$ et $y = \frac{h(x - x_0)}{x_1 - a}$, respectivement.

2°) Calculer $A = \int_0^{x_0} \frac{h}{x_0} x\, dx + \int_{x_0}^{x_1} h\, dx + \int_{x_0}^{a} \frac{h(x - a)}{x_1 - a} dx$.

3°) En remarquant que $AD = x_1 - x_0 = b$ et $BC = a$, vérifier que $A = \frac{a + b}{2} \times h$.

4°) Comparer A à l'aire du trapèze $ABCD$.

5°) Vérifier que si $x_1 = x_0$, alors on obtient un triangle ABC dont l'aire est $Aire(ABC) = \frac{ah}{2}$

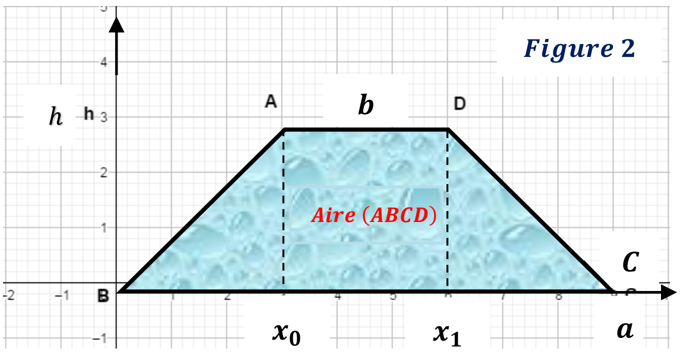


Figure 2

Solution :

1°) On a : $\overrightarrow{AB}(-x_0\,;\,-h)$; $\overrightarrow{AD}(x_1 - x_0\,;\,h - h) \iff \overrightarrow{AD}(x_1 - x_0\,;\,0)$ et $\overrightarrow{DC}(a - x_1\,;\,-h)$.

Soit $M(x\,;\,y)$ un point du plan.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - h \end{pmatrix}$ et $M \in (AB) \iff dét\,(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AM}) = 0 \iff -x_0(y - h) + h(x - x_0) = 0$

$\iff -x_0 y + hx_0 + hx - hx_0 = 0 \iff hx = yx_0 \iff y = \frac{h}{x_0}\,x.$

Donc $(AB) : y = \frac{h}{x_0}\,x$. $M \in (AD) \iff dét\left(\vec{A}\,;\,\overrightarrow{AM}\right) = 0 \iff \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x - x_0 \\ 0 & y - h \end{vmatrix} = 0$

i.e. $(y-h)(x_1-x_0)=0 \Leftrightarrow (y-h)b=0 \Leftrightarrow y-h=0$ car $x_1-x_0 \neq 0$ donc $(AD): y=h$

$\overrightarrow{DM}(x-x_1\,;\, y-h)$ et $M(x\,;y) \in (DC)$ si et seulement si $\text{dét}\left(\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DM}\right)=0$

i.e. $(x_1-a)(y-h)-h(x-x_1)=0 \Leftrightarrow h(a-x_1)-h(x-x_1)+y(x_1-a)=0$

i.e. $h(a-x_1-x+x_1)+y(x_1-a)=0 \Leftrightarrow h(a-x)+y(x_1-a)=0$

i.e. $-h(x-a)+y(x_1-a)=0 \Leftrightarrow y=\frac{h(x-a)}{x_1-a}$. Ainsi, $(DC): y=\frac{h(x-a)}{x_1-a}$

2°) $A=\int_0^{x_0}\frac{h}{x_0}x\,dx+\int_{x_0}^{x_1}h\,dx+\int_{x_0}^{a}\frac{h(x-a)}{x_1-a}dx$

$=\frac{hx_0}{2}+h(x_1-x_0)+\frac{h}{x_1-a}\int_{x_1}^{a}x\,dx-\frac{ha}{x_1-a}\int_{x_1}^{a}dx$

$=\frac{hx_0}{2}+h(x_1-x_0)+\frac{h(a^2-x_1^2)}{2(x_1-a)}-\frac{ha}{x_1-a}(a-x_1)=\frac{hx_0}{2}+h(x_1-x_0)-\frac{h}{2}(x_1+a)+ha$

$=-\frac{hx_0}{2}+\frac{hx_1}{2}+\frac{ha}{2}=\frac{h}{2}(x_1-x_0+a)$. Donc $A=\frac{h}{2}[(x_1-x_0)+a]$

3°) Puisque $AD=b=x_1-x_0$, on a : $A=\frac{h}{2}(a+b)$

4°) $A=Aire\ (ABCD)=\frac{bc+AD}{2}\times h=\frac{a+b}{2}\times h$

5°) Si $x_1=x_0$, alors on a : $A=\frac{h}{2}[a+0]=\frac{1}{2}ah.$

Les points A et D sont confondus et $ABCD$ devient le triangle ABC dont l'aire A est $\frac{1}{2}ah$.

RESUME :

3.1. *Calcul d'aires et de volumes.*

On suppose dans cette partie que le plan est muni d'un repère orthogonal :

a°) Calculs d'aires.

i) Aire du domaine délimité par la courbe d'une fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ où a et b sont des réels.

Définitions :

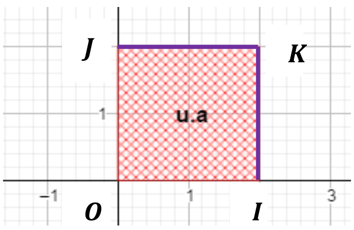
Soit f une fonction continue sur un intervalle I de IR, a et b deux éléments de I tel que $a<b$.

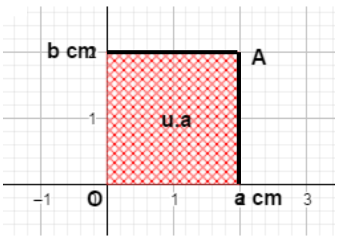
D_1. L'unique primitive de f sur I prenant la valeur zéro en a est la fonction $F: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$.

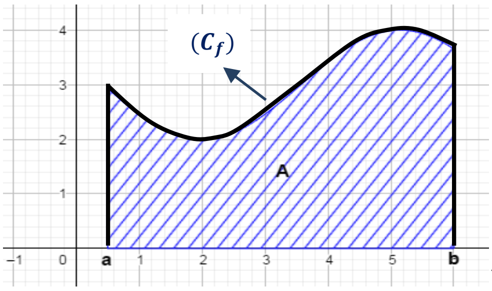
D_2. Si f est en plus positive sur $[a\,;b]$, alors l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe (c_f) de f, les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, exprimée en unité d'aire $(u.a)$ est donnée par la relation : $A=\int_a^b f(x)\,dx\ (u.a)$.

D_3. L'unité d'aire est l'aire du rectangle de côtés OI et OJ engendré par le repère $(O\,;\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ})$ On note $u.a$ = unité graphique sur l'axe (OX) × unité graphique sur l'axe des ordonnées.

Figure 3







Unité d'aire = Aire du rectangle $JOIK$. ; **1** unité d'aire $= a\ cm \times b\ cm = ab\ cm^2$ où a, $b \in IN$.

Exemples 1 :

1°) Si l'unité graphique sur l'axe des abscisses est $2\ cm$ et si l'unité graphique sur l'axe des ordonnées est $3\ cm$, alors l'unité d'aire $(u.a)$ est : $1\ u.a = 3 \times 2\ cm^2 = 6\ cm^2$.

2°) Si $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$ et $\|\vec{\imath}\| = 1\ cm$; $\|\vec{\jmath}\| = 2\ cm$, alors $1\ u.a = 2\ cm^2$.

3°) Si $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$ et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2\ cm$; alors $1\ u.a = 4\ cm^2$.

4°) Si $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$ et $\|\vec{\imath}\| = a\ cm$; $\|\vec{\jmath}\| = b\ cm$, alors l'unité d'aire est égale à $ab\ cm^2$.

Propriétés 1 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a\ ;\ b]$ de IR ; $(a < b)$.

P_1. Si f est négative sur I, alors l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe (c_f) de f, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ exprimée en unité d'aire $(u.a)$ est donnée par la relation : $A(D) = -\int_a^b f(x)dx.\ (u.a)$.

P_2. Si f ne garde pas un signe constant sur $[a\ ;\ b]$, alors, l'aire du domaine plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe (c_f) de f, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aire est égale à la somme des aires des domaines situés au-dessus de l'axes des abscisses, diminuée de la somme des aires des domaines situés en dessous de l'axe des abscisses.

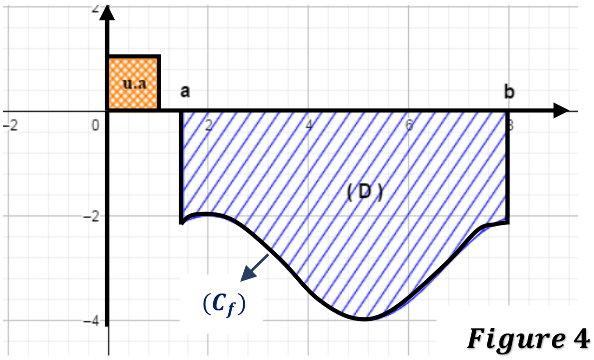


Figure 4

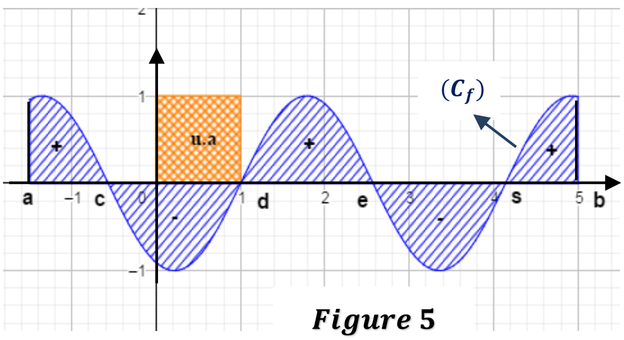


Figure 5

$A(D) = -\int_a^b f(x)dx.\ (u.a) \quad \Rightarrow \quad Fig.1$

$A(D) = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^e f(x)dx - \int_e^s f(x)dx + \int_s^b f(x)dx\ (u.a) \quad \Rightarrow \quad Fig.2$

Exemples 2 :

1°) $\int_0^1 x^2dx$. Représente l'aire du domaine délimité par les droites d'équations respective (C_f) de la fonction $f : x \mapsto x^2$.

2°) Soit g la fonction définie sur $[0\ ;1]$ par $g(x) = \sqrt{1-x^2}$. La courbe (C_g) de g est un quart de cercle de centre O et de rayon $r = 1$. Ainsi, $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{4}\pi r^2$ où $r = 1$. Donc

$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{4}u.a$

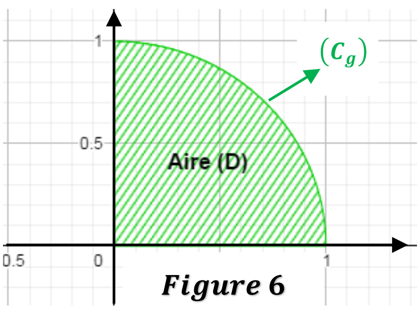


Figure 6

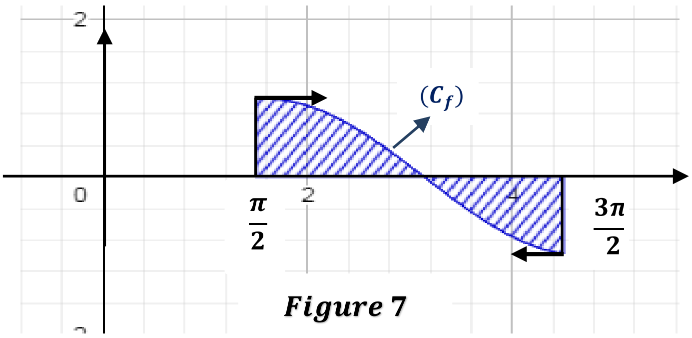


Figure 7

3°) Calculons l'aire du domaine délimité par une sinusoïde, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.

Une sinusoïde (***Figure* 2**) est la courbe de la fonction $x \mapsto sinx$. On a :

$$A = \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sinxdx - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} sinxdx\right) u.a = [-cosx]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - [-cos]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \left(-cos\pi + cos\frac{\pi}{2} + cos\frac{3\pi}{2} - cos\pi\right) u.a = (1+1)\, u.a = 2\, u.a.$$ Donc $A = 2\, u.a.$

Remarque 1 :

L'aire du domaine délimité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$, $x = b$ est $A = \left(\int_a^b |f(t)|dt\right) u.a$

ii) Aire du domaine du plan délimité par plusieurs courbes.

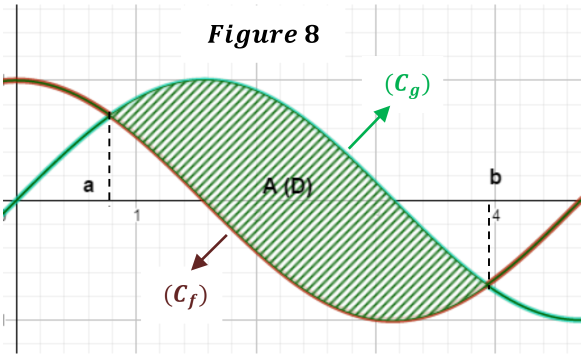
Propriété 2 :

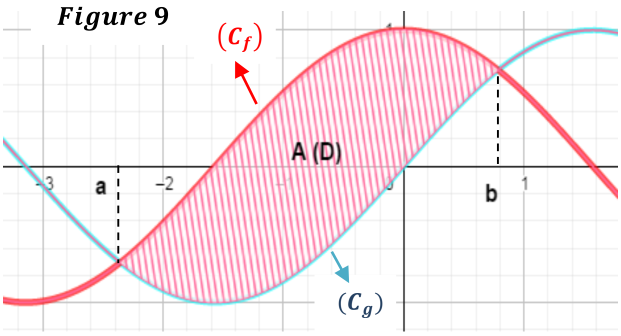
Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle $I = [a\,;b]$. $(a < b)$; (C_f) et (C_g) leurs représentations graphiques respectives.

P_1. Si $f \leq g$ sur $[a\,;b]$, alors (C_g) est au-dessus de (C_f) sur $[a\,;b]$ et l'aire du domaine D délimité par les courbes (C_f) , (C_g) et les droites d'équations $x = a$; $x = b$ est donnée par la relation :

$A(D) = \left(\int_a^b [g(t) - f(t)]\, dt\right) u.a$ (***Voir figure* 8**).

Dans ce cas, $A(D)$ est l'aire du domaine du plan tel que : $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$; $\forall\, x \in I$





P_2. Si $f \geq g$ sur $[a\,;\,b]$, alors (C_g) est en-dessous de (C_f) sur $[a\,;\,b]$ et l'aire du domaine D délimité par les courbes (C_f) , (C_g) et les droites d'équations $x = a$; $x = b$ est donnée par la relation :

$A(D) = \left(\int_a^b [f(t) - g(t)]\, dt\right) u.a$ (***Voir figure* 9**).

Dans ce cas, $A(D)$ est l'aire du domaine du plan tel que : $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases}$; $\forall\, x \in I$.

Remarque 2 :

Plus généralement, on a : $A(D) = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx$

Exemples 3 :

1°) Soient f et g deux fonctions définies respectivement par $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = x$ sur $K = [-1\,;2]$. On définit un domaine E du plan par $E = \{M(x\,;\,y)/-1 \leq x \leq 2\,;\, f(x) \leq y \leq g(x)\}$. Calculons l'aire $A(E)$ du domaine E.

On a : $A(E) = \int_{-1}^{2} (g(x) - f(x))\, dx\, u.a = \int_{-1}^{2} (x - x^2 + 2)\, dx\, u.a$ (voir ***Figure* 10**)

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 2x\right]_{-1}^{2} u.a = \left(2 - \frac{8}{3} + 4\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2\right)$$

$A(E) = \left(6 - \frac{8}{3} + 2 - \frac{5}{6}\right) u.a = \left(8 - \frac{21}{6}\right) u.a = \frac{3(16-7)}{6} u.a = \frac{9}{2} u.a$; Donc $A(E) = \frac{9}{2} u.a$

2°) Soient f et g deux fonctions définies sur $I = \left[\frac{1}{2}\,;\,2\right]$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

Calculons l'aire du domaine D compris entre les courbes (C_f) et (C_g) pour tout x de $\left[\frac{1}{2}\,;\,2\right]$.

On a : $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ et $\forall\, x \in I$, $(C_f) \cap (C_g) = \{A(1\,;\,0)\}$

$*$ Pour $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, $g(x) \geq f(x)$

$*$ Pour $1 \leq x \leq 2$, $g(x) \leq f(x)$

On a alors : $A(D) = \int_{\frac{1}{2}}^{1}(g(t) - f(t))\,dt + \int_{1}^{2}(f(t) - g(t))\,dt$

i.e. $A(D) = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x} - x^2\right)dx + \int_{1}^{2}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)dx = \left[\ln x - \frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[\frac{1}{3}x^3 - \ln x\right]_{1}^{2}$

$A(D) = -\frac{1}{3} + \ln 2 + \frac{1}{24} - \frac{1}{3} + \ln 2 = \frac{6}{3} + \frac{1}{24} = 2 + \frac{1}{24} = \frac{49}{24}.u.a$ (***voir Figure* 11**)

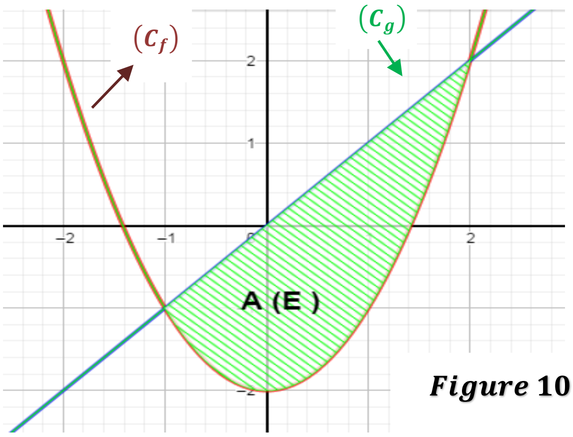


***Figure* 10**

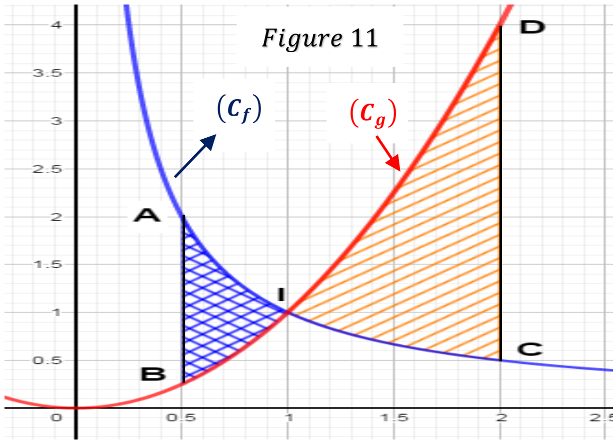


Figure 11

3°) On donne les unités graphiques suivantes : 2 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées. Calculons l'aire $A(D)$ du domaine D du plan défini par :

$D = \{\, M(x\,;\,y)/1 \leq x \leq 24$ et $\ln x \leq y \leq x \,\}$ on sait que D est domaine du plan délimité par les courbes des fonctions $x \mapsto \ln x$; $x \mapsto x$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.

$A(D) = \int_{1}^{4}(x - \ln x)\,dx.\ u.a = \left[\frac{1}{2}x^2 - x\ln x + x\right]_{1}^{4}\ u.a = \left(\frac{21}{2} - 8\ln 2\right) u.a$

Or $1\,u.a = 2cm \times 3cm = 6\,cm^2$. Donc $A(D) = \left(\frac{21}{2} - 8\ln 2\right) \times 6\,cm^2 = (63 - 48\ln 2)\,cm^2$

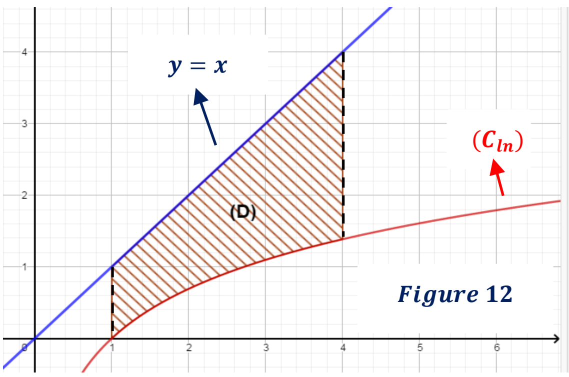


***Figure* 12**

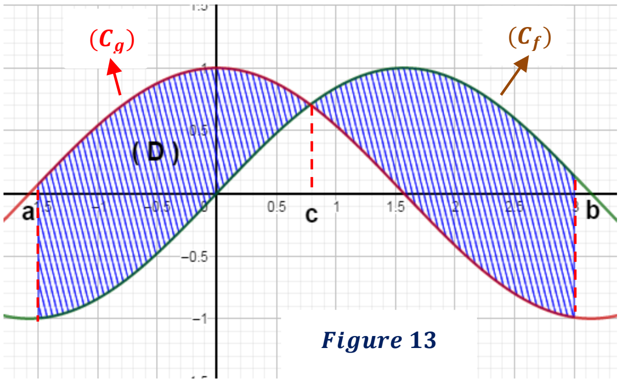


***Figure* 13**

Remarque 3 :

R_1. On a d'après la ***figure* 13** ci-dessus :

i) $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a\,;\,c]$

ii) $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [c\,;\,b]$. Les fonctions f et g coïncident en $x_0 = c$;

3i) $A(D) = \int_{a}^{c}(g(x) - f(x))\,dx + \int_{c}^{b}(f(x) - g(x))\,dx\ u.a$

R_3. L'inégalité de la moyenne appliquée à f sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ est l'inégalité des accroissements finis appliquée à une primitive de f sur $[a\,;\,b]$.

$M(b - a) \leq \int_{a}^{b} f(x)dx \leq M(b - a) \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx \leq M$

R_4. Le réel f_e tel que $f_e = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}[f(x)]^2\,dx}$ est la valeur efficace de f sur $[a\,;\,b]$.

3i) Cas particuliers des courbes et asymptotes obliques

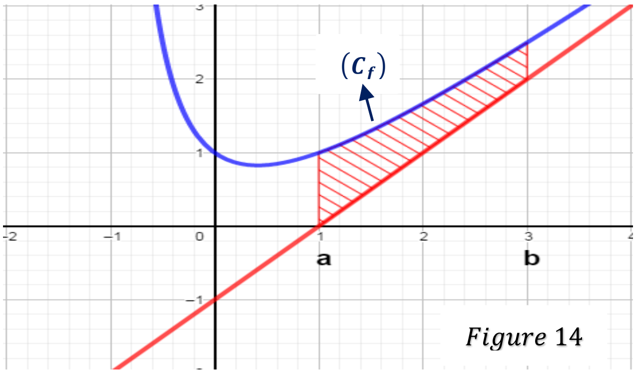


Figure 14

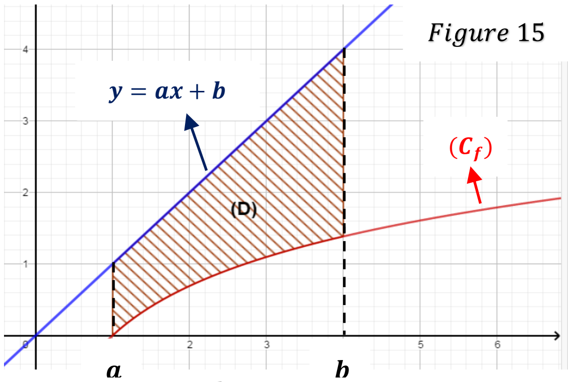


Figure 15

$A(D) = \int_a^b [f(x) - y]\, dx\ u.a$ $\qquad$ $A(D) = \int_a^b [y - f(x)]\, dx\ u.a$

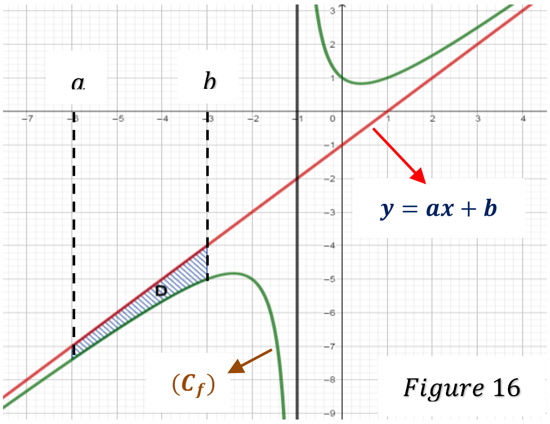


Figure 16

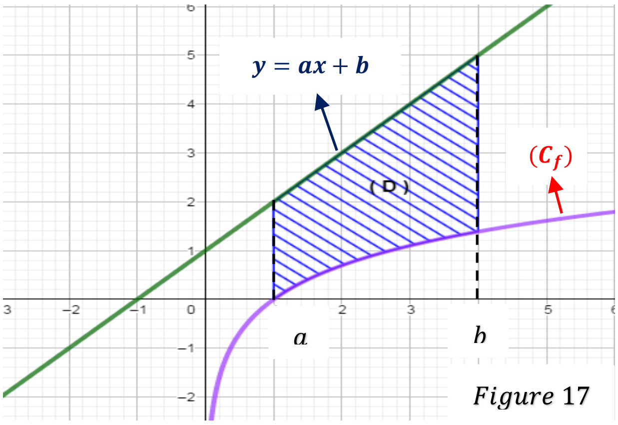


Figure 17

$A(D) = \int_a^b |y - f(x)| dx\ u.a$ $\qquad$ $A(D) = \int_a^b [y - f(x)]\, dx\ u.a$

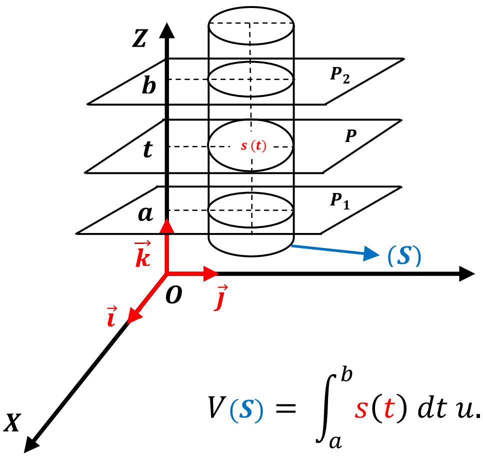
b°) Calcul de volumes.

Dans ce paragraphe, l'espace est muni du repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$. L'unité de volume est le volume du pavé droit (du cube) de dimensions $\|\vec{\imath}\| = \|\overrightarrow{OI}\| = OI$; $\|\vec{\jmath}\| = \|OJ\| = OJ$ et $\|\vec{k}\| = \|\overrightarrow{OK}\|$. Ainsi, une unité de volume notée $u.v$ est définie par :

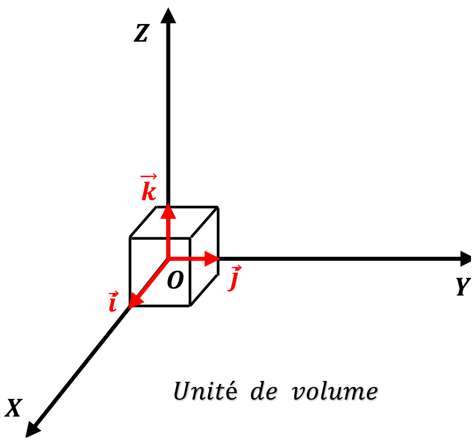
$1\ u.v = \|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\| \times \|\vec{k}\| = OI \times OJ \times OK = \|\overrightarrow{OI}\| \times \|\overrightarrow{OJ}\| \times \|\overrightarrow{OK}\|$.

i) Calcul du volume d'une partie bornée (d'un solide) de l'espace.

Figure 18



$$V(S) = \int_a^b s(t)\, dt\ u.v$$



Unité de volume

Propriété 3 :

L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$. Soit (S) un solide (une partie bornée) de l'espace délimité par une surface δ et par deux plans parallèles d'équation $Z = a$ et $Z = b$ avec $a < b$. Pour tout nombre réel t tel que $a \le t \le b$, on note $s(t)$ l'aire de la section du plan d'équation $Z = t$ avec le solide (S).

Si l'application $s : [a\,;\,b] \mapsto IR$ est continue, alors.
$t \mapsto s(t)$

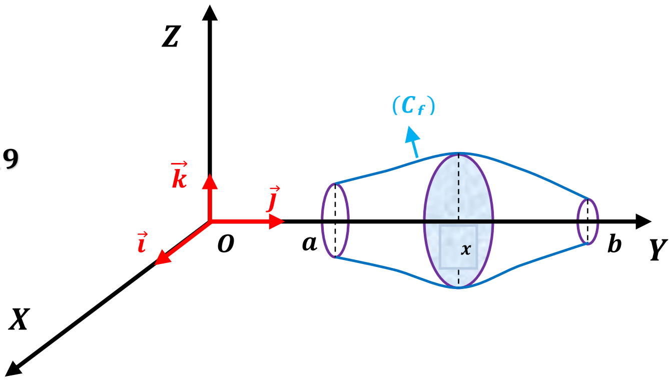
Le volume du solide (S) en unité de volume $(u.v)$ est donné par $V = \int_a^b s(t)\,dt\; u.v$

ii) Volume d'un solide engendré par la rotation d'une partie du plan autour d'un axe.

Propriété 4 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,I\,;\,J)$. Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. Un solide de révolution est engendré par la rotation autour de l'axe $(O\,;\,I)$ d'une courbe simple (C_f) d'équation $y = f(x)$ dans le plan (XOY). La section de ce solide par un plan perpendiculaire à $(O\,;\,I)$ est un disque de rayon $|f(x)|$ et d'aire $S(x) = \pi(f(x))^2$ d'où le volume $V(S)$ du solide de révolution (S) est égal à $\left(\int_a^b S(x)dx\right)\, u.v = \left(\int_a^b \pi(f(x))^2 dx\right)\, u.v$

Figure 19



Conséquence propriété 4 : Si f est une fonction dérivable et positive sur $[a\,;\,b]$ et si D est l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tel que : $\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$, alors le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de D autour de l'axe des abscisses est : $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx\; u.v$.

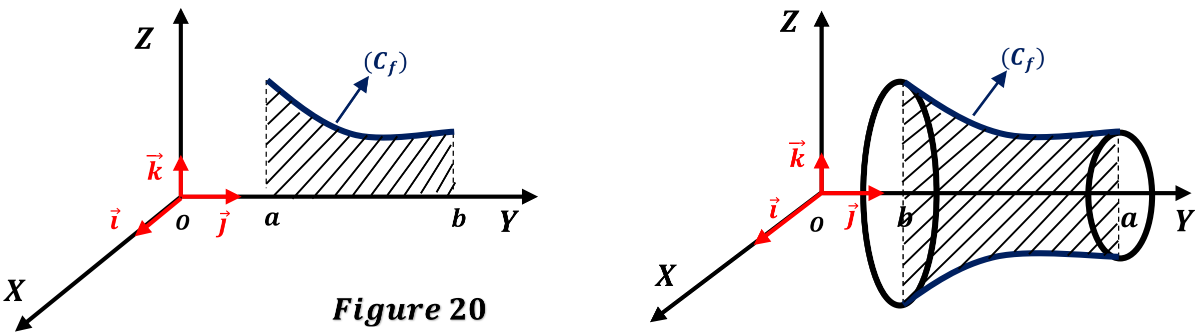


Figure 20

3i) Cas d'un volume de révolution d'axe $Z'OZ$.

Propriété 5 : (Voir figure 23)

Soit (S) une surface de révolution d'axe $Z'OZ$. Supposons que la section de (S) par le demi-plan YOZ, $Y \ge 0$ soit la courbe d'équation $y = r(z)$. On a alors $s(z) = \pi r^2(z)$. Si V est le volume délimité par (S) et les plans d'équations $Z = a$ et $Z = b$ $(a \le b)$, Alors $V = \pi \int_a^b r^2(z)\,dz$.

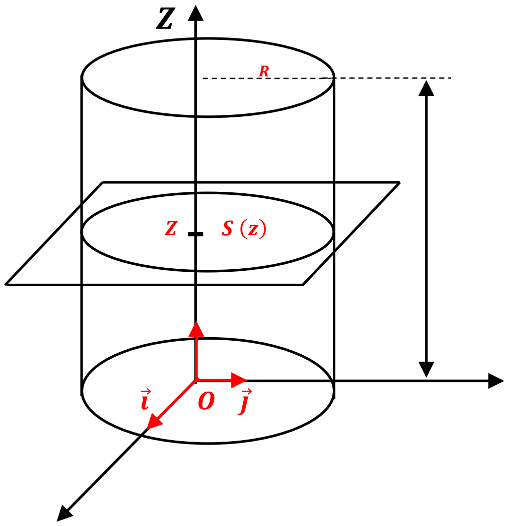
Exemples 4 : (Voir figure 22)

Déterminons le volume V d'un cylindre droit de rayon de base R et de hauteur h.

On a : $S(z) = \pi\, r^2(z) = \pi\, R^2$ et $V = \int_o^h S(z)\,dz = \int_o^h \pi\, r^2(z)\,dz$

$$= \int_o^h \pi\, R^2 dz = \pi R^2 [z]_o^h = \pi R^2 h.$$

Donc $V = \pi R^2 h$. Le disque $S(z)$ intersection de la section du cylindre par un plan parallèle à sa base a pour rayon $r(z) = R$.



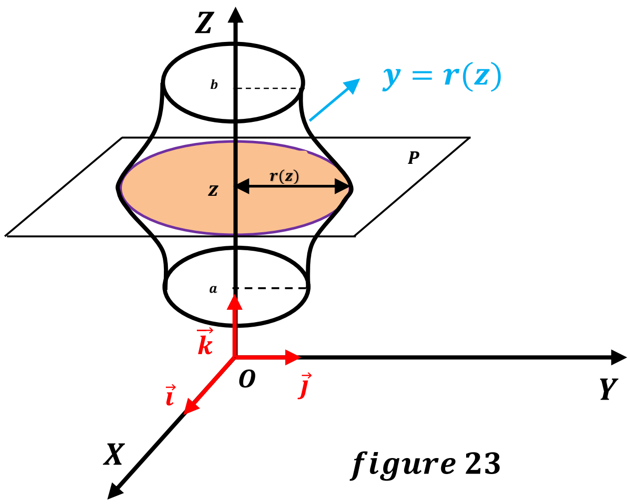


figure 23

Exemples 5 :

Le schéma ci-contre représente un cône de sommet O ayant pour base un disque de rayon R situé dans le plan de côte h. Déterminons le volume V de ce cône. En sectionnant le cône d'axe (OZ) avec un plan perpendiculaire à l'axe (OZ) ; la surface obtenue est un cercle de rayon $R(z)$. Il reste donc à déterminer le rayon $R(z)$ en fonction de z à l'aide du théorème de Thalès dans les triangles OBB' et OAA'. On a : $r(z) = AA'$; $R = BB'$; $OA = z$; $A(0\,;\,0\,;\,z)$ avec

$\frac{OA}{OB} = \frac{AA'}{BB'} \Leftrightarrow \frac{r(z)}{R} \Leftrightarrow r(z) = \frac{Rz}{h}$. Ainsi, le volume V de ce cône est donné par (**voir Figure 24**)

$$V = \int_o^h \pi r^2(z)\, dz = \int_o^h \pi \frac{R^2z^2}{h^2} dz = \pi \times \frac{R^2}{h^2} = \int_o^h z^2 dz = \frac{\pi R^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}z^3\right]_0^h = \frac{\pi R^2}{h^2} \times \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

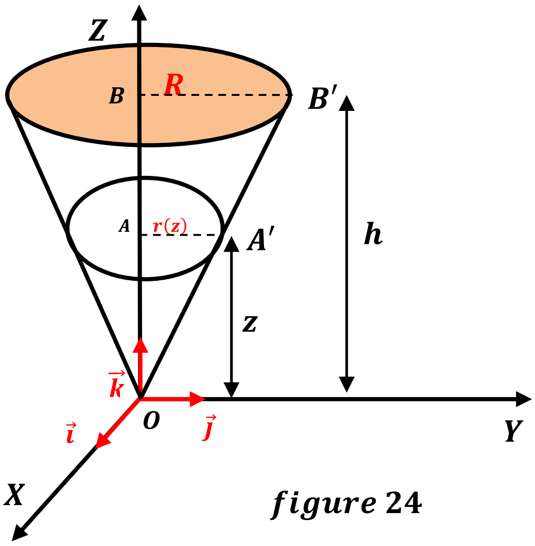


figure 24

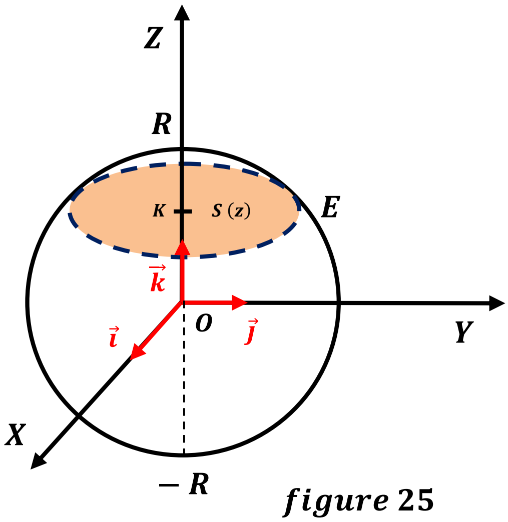


figure 25

Exemples 6 :

Calculons le volume d'une boule sphérique de centre O et de rayon R.

Choisissons comme origine du repère le centre de la boule. La section de la boule par le plan de côté $Z(-R \leq Z \leq R)$ est un disque de rayon $r = \sqrt{R^2 - Z^2}$ (**voir Figure 25**).

En effet, en posant $OK = Z$, le triangle OKE est rectangle en K et on a : $OE^2 = OK^2 + r^2$

C'est-à-dire $r^2 = OE^2 - OK^2$. Or $OE^2 = R^2$ et $OK^2 = Z^2$; donc $r^2 = R^2 - Z^2$. Ainsi, on a :

$S(z) = \pi r^2 = \pi(R^2 - Z^2)$ qui est l'aire du disque intersection du plan de section de la sphère. Le volume de la sphère est alors :

$$V = \int_{-R}^{R} S(z)dz = \int_{-R}^{R}(R^2 - Z^2)dz = \pi \int_{-R}^{R}(R^2 - Z^2)dz = \pi\left[R^2 z - \frac{1}{3}Z^3\right]_{-R}^{R}$$

$$= \pi(R^3 - \frac{1}{3}R^3 + R^3 - \frac{1}{3}R^3) = \pi\left(2R^3 - \frac{2}{3}R^3\right) = \pi \times \frac{6R^3 - 2R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3. \quad \text{Donc } V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Remarque 4 :

$1\ u.v = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|^2$ quand on est dans le plan. Ainsi, si l'unité graphique est ***a cm*** sur l'axe (OX) et ***b cm*** sur l'axe (OY), alors $1\ u.v = a\ cm \times (b\ cm)^2 = a\ cm \times b^2\ cm^2 = ab^2\ cm^3$

3.2) Fonctions définies par une intégrale.

a) Fonctions $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$.

Propriété 6 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et IR. Pour tout élément $a \in I$, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ définie de I vers IR est dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$. En effet, F est l'unique primitive de f qui s'annule en a. Pour étudier le sens de variation de F, il suffit de connaître le signe de f.

Propriété 7 :

Soit I un intervalle de IR, a et b deux éléments de I. Soit $g : I \mapsto IR$
$x \mapsto \int_a^x f(t)dt$.

P_1. $g(a) = 0$ et $g(b) = \int_a^b f(t)\, dt$ est une constate réelle.

P_2. Si f est continue, alors g est continue et dérivable ;
Si f est dérivable, alors f' est continue et dérivable ;

P_3. Si f est positve (respectivement négative) sur un intervalle $[p\ ;\ q]$ contenant a, alors :
i) f et g ont même signe si $x > a$;
ii) f et g sont de signe opposés si $x < a$.

b°) Fonctions $x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$.

Etude sur un exemple :

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x}}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et le signe de f.

2°) Soit F la fonction définie pour tout réel x par : $\int_x^{x^2} f(t)\, dt$.
a°) Déterminer l'ensemble de définition de F.
b°) Etudier le signe de F sur $]0\ ;\ 1[$
c°) En déduire que F est dérivable sur $]0\,;\,1[$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in]0\,;\,1[$.
d°) En déduire le sens de variation de F.

3°) Tracer la courbe représentative (C_f) de f dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,;\,J)$ et donner une interprétation géométrique de $|F(x)|$ pour tout $x \in]0\,;\,1[$.

Solution :

1°) Soit $x \in IR$. $F(x)$ existe si et seulement si $x \neq 0$ et $1 - x > 0$.
C'est-à-dire $x \neq 0$ et $x < 1$. Donc $Dg =]-\infty\,;\,0\,[\,\cup\,]0\,;\,1[$
$*\ \forall\, x \in]-\infty\,;\,0[\,,\ f(x) < 0$
$*\ \forall\, x \in]0\,;\,1[\,,\ f(x) > 0$

2°) $F(x) = \int_x^{x^2} f(t)\, dt$.
a°) Domaine de définition de F.
F est continue sur $]-\infty\,;\,0\,[$ et sur $]0\,;1[$. Mais pour tout $x \in]-\infty\,;\,0[$, x et x^2 sont de signes contraires ; d'où $D_F =]0\,;\,1[$. De plus f est continue et positive sur $]0\,;\,1[$.

b°) Etude du signe de F sur $]0\,;\,1[$.

D'après la 1ère question, $f(x) > 0$, $\forall\, t \in]0\,;\,1[$; Or dans D_F, $x^2 < x$; donc $\int_x^{x^2} f(t)\,dt = F(x) < 0$. Ainsi, $\forall\, x \in D_F$, $F(x) < 0$ et F est négative sur $]0\,;\,1[$.

c°) La fonction f étant continue sur $]0\,;\,1[$, F est dérivable sur $]0\,;\,1[$ et on a pour tout $x \in]0\,;\,1[$:

$$F'(x) = 2x \times f'(x^2) - 1 \times f(x) = 2x\left(\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right) - \left(\frac{1}{x\sqrt{1-x}}\right) = \left(\frac{2}{x\sqrt{(1-x)\,(1+x)}}\right) - \left(\frac{1}{x\sqrt{1-x}}\right)$$

$$F'(x) = \frac{2}{x\sqrt{(1-x)}}\left(\frac{2}{\sqrt{(1+x)}} - 1\right).$$

d°) Sens de variation de F.

$\forall\, x \in]0\,;\,1[$, $\frac{1}{x\sqrt{(1-x)}} > 0$; d'où $F'(x)$ est du signe de $\frac{2}{\sqrt{(1+x)}} - 1$; $\forall\, x \in]0\,;\,1[$. Ainsi, on a :

$F'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{(1+x)}} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq \sqrt{1+x} \Leftrightarrow 4 \geq 1 + x \Leftrightarrow x \leq 3.$

Donc $\forall\, x \in]0\,;\,1[$, $F'(x) \geq 0$ et F est croissante sur $]0\,;\,1[$.

3°) Courbe représentative (C_f) de f et interprétation géométrique de $|F(x)|$ pour tout $x \in]0\,;\,1[$.

$$\lim_{\substack{x \mapsto 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \mapsto 0 \\ >}} \left(\frac{1}{x\sqrt{(1-x)}}\right) = +\infty\,;\quad \lim_{\substack{x \mapsto 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \mapsto 1 \\ <}} \left(\frac{1}{x\sqrt{(1-x)}}\right) = +\infty.$$

La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,1[$ et pour tout $x \in]0\,;\,1[$, $f'(x) = \frac{\sqrt{1-x} + x\left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right)}{x^2(1-x)}$ i.e.

$f'(x) = \frac{3x - 2}{2\,x^2(1-x)\sqrt{1-x}}$. Ainsi, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$ et $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$*$ **Interprétation géométrique de $|F(x)|$ pour tout $x \in]0\,;\,1[$.**

$|F(x)|$ représente l'aire (en unité) d'aire du domaine plan compris entre la droite d'équation $y = x$, la parabole d'équation $y = x^2$, la courbe (C_f) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

$*$ **Tableau de variation et courbe (C_f).**

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$

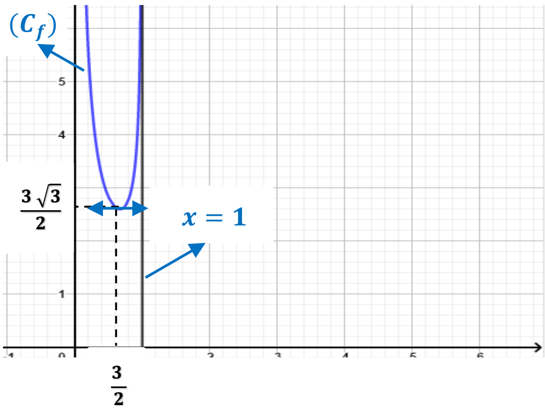


Figure 27

Propriété 8 :

P_1. La fonction $g : x \mapsto \int_0^{u(x)} f(t)dt$ a pour dérivée la fonction $g' : x \mapsto u'(x) \times (f \circ u)(x)$.

P_2. La fonction $g : x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$ a pour dérivée la fonction

$g' : x \mapsto \beta'(x) \times (f o \beta)(x) - \alpha'(x) \times f(\alpha(x))$

Exemples 7 :

1°) $F(x) = \int_0^x lnt\,dt$ a pour dérivée $F'(x) = lnx$.

2°) $g(x) = \int_0^{3x} t^2\,dt$ a pour dérivée $g'(x) = 3 \times (3x)^2 = 27x^2$

3°) $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t\sqrt{2} - t}$ a pour dérivée la fonction H' telle que

$$H'(x) = \frac{2x}{x^2\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{1-x}} = \frac{2}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{1-x}} = \frac{2}{x\sqrt{(1-x)(1+x)}} - \frac{1}{x\sqrt{1-x}}$$
$$= \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\left(\frac{2}{\sqrt{1+x}} - 1\right).$$

3°) $G(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ a pour dérivée $G'(x) = 2f(2x) - f(x)$ où $f: \mapsto t\ \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.
Soit $G'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+16x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$

donc $G'(x) = \frac{\sqrt{4+4x^4} - \sqrt{1+16x^4}}{\sqrt{1+16x^4} \times \sqrt{1+x^4}} = \frac{3(1+2x^2)(1-x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2})}{\sqrt{1+16x^4} \times \sqrt{1+x^4}(\sqrt{4+4x^4}+\sqrt{1+16x^4})}$

3.3) *Exemple d'utilisation du calcul intégral*

a) *Détermination de la longueur d'un arc*

Etude sur un exemple :

Un mobile M se déplace dans le plan. À tout instant t $(t > 0)$ les coordonnées $(x(t)\ ;\ y(t))$ de M sont : $x(t) = t^2$ et $y(t) = t\left(1 - \frac{t^2}{3}\right)$.

1°) Déterminer une équation de la trajectoire (C) de M et tracer (C) dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.

2°) À tout instant t le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ a pour coordonnées $(x'(t)\ ;\ y'(t))$

***a*°)** Calculer $V(t)$.

***b*°)** Déterminer la distance parcourue par M entre les instants $t = 0$ et $t = 3$.

***c*°)** Déterminer la distance parcourue par M entre les points d'abscisses 0 et 3.

Solution :

1°) On a : $t^2 = x \Rightarrow t = \sqrt{x}$ avec $x \in]0\ ;\ +\infty[$; donc $y = \sqrt{x}\left(1 - \frac{x}{3}\right)$, $x \in R_+^*$

(C) est alors la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x}\left(1 - \frac{x}{3}\right)$. La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout $\in]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}$. On en déduit le tableau de variation suivant et la trajectoire.

∗ **Tableau de variation et courbe (C_f).**

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↙	$\frac{2}{3}$	↘	$-\infty$

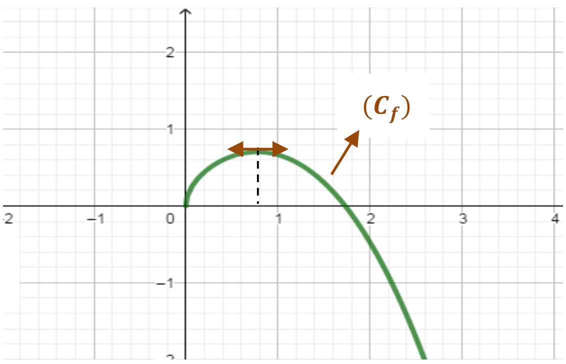


Figure 28

2.*a*°) On a : $x'(t) = 2t$ et $y'(t) = 1 - t^2$.

Donc $V(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = 1 + t^2$

***b*°)** La distance parcourue par M entre les instants $t = 0$ et $t = 3$ est :

$\int_0^3 (1+t^2)\,dt = \left[t + \frac{1}{3}t^3\right]_0^3 = 12$.

L'arc de (C) correspondant à cette distance est colorié sur la figure ci-dessus.

***c*°)** L'arc de (C) compris entre les points d'abscisses 0 et 3 a pour longueur la distance parcourue par M entre les instants $t = 0$ et $t = 3$. Donc $\int_0^{\sqrt{x}} (1+t^2)dt = \left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} = d_M(t = 0\ ;\ t = 3)$

b°) *Détermination du centre d'inertie.*

Propriété 9 :

P_1. Le centre d'inertie $G\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix}$ d'un système de $\boldsymbol{n}$ points matériels $A_k\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ de masses respectives m_k est le barycentre des points A_K affectés des coefficients m_k.

On a : $x_G = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}$ et $y_G = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k}$.

P_2. On admet que le centre d'inertie G d'une plaque homogène délimitée par une courbe (C), (OI) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{\int_a^b x\,f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)dx} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}.$$

Exemples 8 :

1°) Déterminer les coordonnées du centre d'inertie du quart de disque, ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que : $x^2 + y^2 \le R^2$; $0 \le x$ et $0 \le x\ (0 \le R)$

2°) Déterminer les coordonnées du centre d'inertie de la plaque homogène délimitée par la courbe d'équation $y = lnx$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Solution :

1°) La droite d'équation $y = x$ est l'axe de symétrie de la plaque ; donc : $x_G = y_G$. Le quart de cercle a pour équation : $\sqrt{R^2 - x^2}$. Ainsi ; on a : $y_G = \dfrac{\frac{1}{2}\int_0^R (R^2 - x^2)\,dx}{\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}}$.

Or $\frac{1}{2}\int_0^R (R^2 - x^2)\,dx = \frac{1}{2}\left[R^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^R$

∗ Soit $\frac{1}{2}\int_0^R (R^2 - x^2)dx = \frac{R^3}{3}$.

∗ $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}R^2$ (Aire du quart de disque). Donc $x_G = y_G = \frac{4R}{3\pi}$.

2°) On a : $x_G = \dfrac{\int_1^e x\,lnx\,dx}{\int_1^e lnx\,dx}$ et $y_G = \dfrac{\frac{1}{2}\int_1^e ln^2x\,dx}{\int_1^e lnx\,dx} = \dfrac{\frac{1}{2}\int_1^e (ln\,x)^2\,dx}{\int_1^e lnx\,dx}$.

En utilisant la méthode d'intégration par partie, on obtient : $\int_1^e lnx\,dx = 1$; $\int_1^e x\,lnx\,dx = \frac{e^2+1}{4}$ et $\frac{1}{2}\int_1^e ln^2x\,dx = \frac{e-2}{4}$. Ainsi, $x_G = \frac{e^2+1}{4}$ et $y_G = \frac{e-2}{4}$.

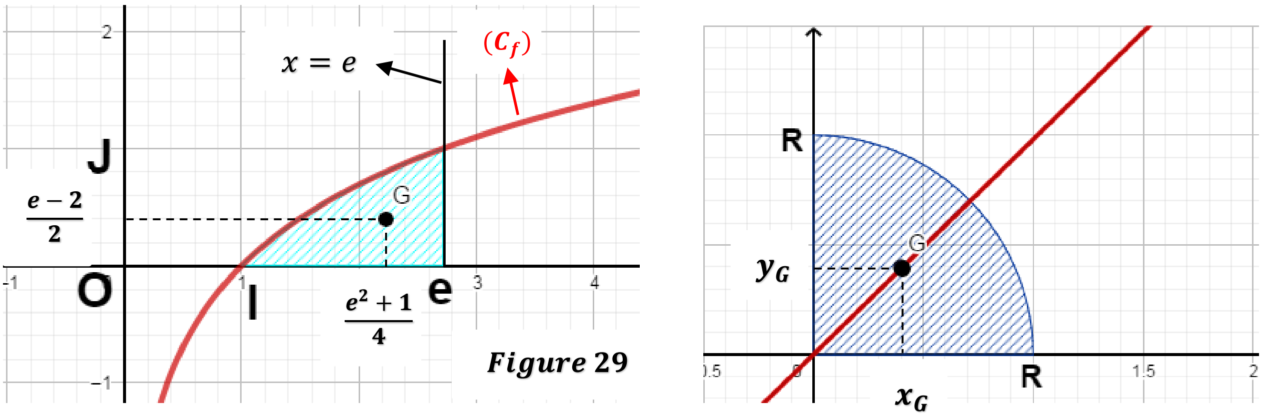


Figure 29

c°) Exercices d'applications.

Exercice d'application 1 :

On considère le paraboloïde construit en faisant tourner la parabole d'équation $y = x^2$ sur l'intervalle $[0\,;1]$ autour de l'axe (OY). Le paraboloïde est un solide compris entre les plans d'équations $y = 0$ et $y = 1$. La section de ce solide par le plan perpendiculaire à $(O\,;\,\vec{j})$ est un disque de rayon x ; donc d'aire $S = \pi x^2 = \pi y$.

Alors le volume de ce paraboloïde en unité de volume est $V = \int_0^1 \pi y\,dy = \left[\frac{\pi y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\ u.v.$

Exercice d'application 2 :

Soit f la fonction définie sur $[-1\,;\,1]$ par $f(x) = e^x$

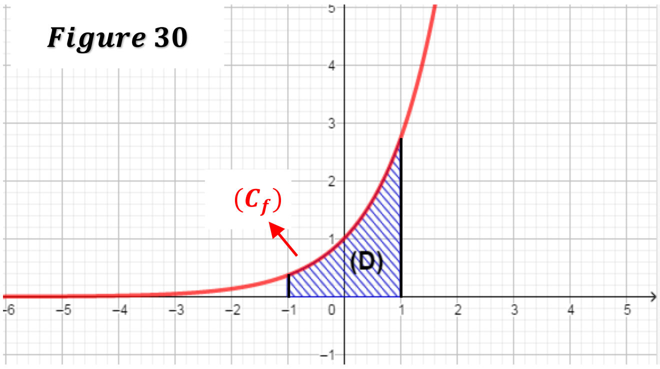
1°) Construire (C_f) dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

2°) Soit D la partie du plan ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que : $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par la rotation de D autour de l'axe des abscisses. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-2} près.

Solution :

1°) Construisons (C_f).



2°) Déterminons en cm^3 le volume du solide engendré par la rotation de D autour de l'axe des abscisses.

On a : $V = \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx = \pi\left[\frac{1}{2}e^x\right]_{-1}^{1} = \pi(e^2 - e^{-2}) = \frac{\pi e^2 - \pi e^{-2}}{2}$.

donc $V(D) = \frac{\pi(e^2 - e^{-2})}{2} \times 2^3\ cm^3$

$V(D) = \pi(e^2 - e^{-2}) \times 4\ cm^3 \approx 91{,}15294412\ cm^3$; Soit $V(D) \approx 91{,}15\ cm^3$ à 10^{-2} près.

Exercice d'application 3 :

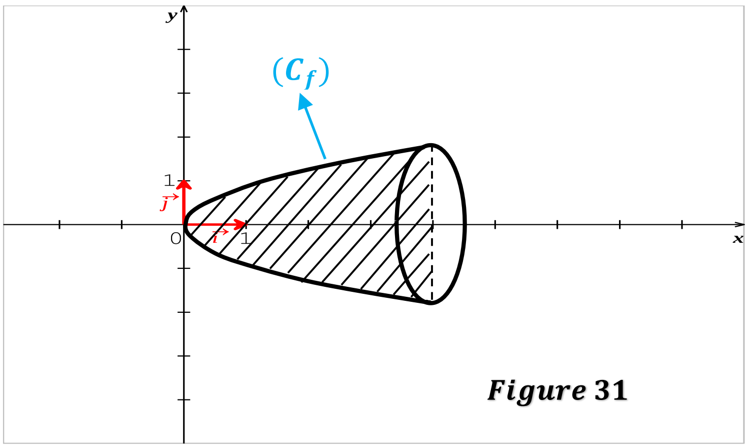
Le plan est muni du repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,4]$ par $f(x) = \sqrt{x}$. On donne pour unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées. Calculer en cm^3 le volume du solide engendré par la révolution de la courbe (C_f) de f autour de l'axe $(O\,;\vec{\imath})$.

Solution :

On a : $V = \int_0^4 \pi[f(x)]^2 dx = \int_0^4 \pi x\,dx = \left[\frac{\pi x^2}{2}\right]_0^4 = 8\,\pi\,u.v$

Or $1\,u.v = 1\,cm \times 2\,cm \times 2\,cm = 4\,cm^2$ donc $V = 32\,\pi\,cm^3$.

La figure ci-dessous représente le solide engendré par la rotation du domaine plan délimité par (C_f) et les droites d'équations : $x = 0$; $x = 4$ au tour de l'axe $(O\,;\vec{\imath})$.



Exercice d'application 4 :

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 + t^4}}$.

1°) Donner le domaine de définition D_g de g.

2°) Déterminer la dérivée de g et donner le sens de variation de g.

Solution :

1°) La fonction $f : \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur IR car pour tout $t \in IR,\ 1 + t^4 > 0$. Donc g est définie et dérivable sur IR. Ainsi, $D_g = IR$

3°) $\forall\, x \in IR,\ g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $g'(x) > 0$, $\forall\, x \in IR$. Donc g est strictement croissante sur IR.

<u>Exercices</u> : **N° $2c$ et $2d$ page 340**
N° $2a$, $2b$, $2C$ page 335 et N° $2a$, $2b$, $2c$ page 337.
N° 42 , 44 , 48 , 49 , 51 , 52 et 53 pages 348 à 351.

Dernière mise à jour : 30 Janvier 2021.

MODULE : 25	ORGANISATION ET GESTION DES DONNEES CREDIT : 1 440 Minutes

CHAPITRE V : STATISTIQUES

Intérêt

Ce chapitre nous permettra de traiter les données relatives sur une enquête. Elle est donc cette branche de la mathématique qui enregistre et traite les données relatives sur une enquête a fin de tirer des informations.

MOTIVATION

A certain moment de notre vie, nous sommes amener à faire des prévisions dans certains domaine pour cela une enquête et étude sera indispensable pour cette prévision.

Contrôle des prérequis

1) Définir repère orthogonal.

2) Placer les points A $(4; 200)$; B $(2; 500)$et C $(-1; -300)$ dans un repère bien définit.

3) Donner la formule de la moyenne dans une série a un seul caractère x a partir du tableau suivant.

modalités	x_1	x_2	x_3	…………..	x_n	Total
effectifs	n_1	n_2	n_3	……………	n_n	N

SITUATION PROBLEME

L'évolution de 2010 à 2016 du salaire horaire moyen d'un ouvrier, dans un pays en voie de développement donné est consignée dans le tableau ci-dessous

Années	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Salaire horaire moyen en fcfa	1650	1760	1930	2020	2220	2450	2530

Il souhaite avoir une estimation de son salaire horaire moyen en 2017. Comment pouvez-vous l'aider

LECON 1 : SÉRIES STATISTIQUES DOUBLES
Durée : 120 minutes

Objectifs pédagogiques

- Utiliser un tableau à double entrées représentant une série statistique double pour reconstituer les séries marginales
- Représenter une série statistique double par un nuage de points
- Déterminer le point moyen d'un nuage.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Dans une maternité de Douala, une enquête statistique a porté sur une population de nouveau-nés. Deux caractères sont étudiés : la masse et la taille.

- Le caractère X est la masse en Kg des nouveau-nés
- le caractère Y est la taille en cm des nouveau-nés

Les effectifs obtenus sont consignés dans le tableau à double entrée suivants.

Taille yi / masse xi	47	48	51	53	TOTAUX
2 ,7	1	4	3	0	
2,9	3	5	4	4	
3,5	1	4	0	1	
3,8	0	2	5	3	
TOTAUX					

1) Combien de nouveau-nés pesant 3,5kg et mesurant 48 cm ont été dénombrés.
2) Combien de nouveau-nés mesurant 47cm ont-ils été dénombrés.
3) Compléter le tableau ci-dessus et les deux tableaux suivants.

Masse (xi)	2,7	2,9	3,5	3,8	Total
Effectifs					

Taille (yi)	47	48	51	53	Total
Effectifs					

4.a) Calculer les moyennes $\bar{x}\ et\ \bar{y}$ des series statistiques X et Y.

b) Construire un repère orthogonal et placer chaque points du tableau de coordonnées $(x_i; y_i)$ en écrivant a coté de chacun de ces points son éffectif et le point G$(\bar{x}; \bar{y})$

RESUME

- La série statistique présenté dans l'activité ci-dessus est une série statistique a deux caractères. A chaque couple $(x_i; y_i)$; on associe un nombre n_i.Dans le cas de l'activité précédente n_i représente le nombre de nouveaux ayant une masse $x_i\ et\ une\ taille\ y_i$: On a donc une série a deux caractères $(x_i; y_i;\ n_i)$.
- Quand tous les points de coordonnées $(x_i; y_i)$ sont représentés dans un repère orthogonal ; on dit qu'on a représenté le nuage des points de la série.
- Le point G de coordonnées $(\bar{x}\ ; \bar{y})$ ou $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont respectivement les moyennes des séries X et Y est le point moyen de la série avec $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$ et $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{N}$
- Les tableaux des effectifs de X et Y sont les tableaux des séries marginaux de cette série.

EXEMPLE

La série double suivante indique la note mensuelle d'une élevé en classe de Tle TI au premiers mois de l'année scolaire en informatique.

Mois (x_i)	1	2	3	4	5
Notes (y_i)	08	09	12	12	09

a) Représenter le nuage des points associé a cette série dans un repère orthogonal.
b) Déterminer les coordonnées du point moyen G de cette série statistique.

LECON 2 : AJUSTEMENT LINEAIRE : Durée : 120 minutes

Objectif

- Déterminer la droite de Mayer d'un nuage de points.
- Calculer la covariance d'une série statistique double.
- Déterminer l'équation d'une droite d'ajustement linéaire par la méthode des Moindres carrées
- Calculer le coefficient de corrélation linéaire.
- Interpréter le coefficient de corrélation linéaire.

ACTIVITE DE MISE EN PLACE.

Le tableau suivant donne le chiffre d'affaire d'une entreprise exprimé en milliers de francs cfa pendant huit années consécutives.

Nombres d'années	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffres d'affaires	41	68	55	80	95	104	100	122

- Représenter le nuage des points associé a cette série statistique dans un repère bien choisit.
- Calculer les coordonnées de G point moyen du nuage
- En partageant le nuage en 2 sous nuages d'effectifs égaux pris dans l'ordre croissant du caractère x

a) Calculer les cordonnées G_1 et G_2 des points moyens respectifs des nuages obtenus.

b) Déterminer une équation de (G_1G_2) et représenter cette droite dans le repère précédent.

c) Démonter que $G\epsilon(G_1G_2)$

- En supposant que l'évolution du chiffre d'affaire de cette entreprise gardera la même tendance. Déterminer le chiffre d'affaire pour la 9^{e} année a laide de la droite (G_1G_2).

RETENONS

- La représentation du nuage de points d'une série a deux caractère peut épouser une forme géométrique particulière.
- Lorsqu'il est possible de construire une courbe qui passe le plus près possible des points d'un nuage : On dit qu'un ajustement est possible.
- La connaissance de cette courbe va permettre d'évaluer par exemple y_i pour une valeur de x_i donnée.
- Lorsque cette courbe est une droite, on parle d'ajustement affine comme entre autre
  - La méthode de Mayer
  - La méthode dite des Moindres carrées.

A) Méthode de Mayer.

Cette méthode consiste a partager le nuage en deux sous nuages d'égal effectifs ou différent de 1 pris dans l'ordre croissant du caractère X. Calculer les coordonnés de G_1 et G_2 des deux sous nuages. En suite déterminer l'équation de la droite (G_1G_2)

NB : $G \in (G_1G_2)$

B) Méthode des Moindres carrées.

ACTIVITE

1) Recopie et complète le tableau suivant qui donne la tension artérielle moyenne y en fonction de l'âge x d'une personne.

Age en année (xi)	36	42	48	54	60	66	Total
Tension artérielle (yi)	11,8	14	12,6	15	15,5	15,1	
${x_i}^2$							
${y_i}^2$							
$(x_i-\bar{x})$							
$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$							
x_iy_i							

2) Calculer $A=\frac{1}{N}\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$ et $B=\frac{1}{N}\sum x_iy_i-\bar{x}\bar{y}$
3) Représenter le nuage des points de cette série statistique.
4) Déterminer la variance et l'écart-type de chacune des séries (x_i) et (y_i).

RETENONS

Soit une série statistique a deux caractères x et y

- La covariance du couple $(x;y)$ est le réel noté $\operatorname{cov}(x;y)$et définie par : $\mathbf{cov}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})=\frac{1}{N}\sum(\boldsymbol{x_i}-\overline{\boldsymbol{x}})(\mathbf{y_i}-\overline{\mathbf{y}})$ ou $\mathbf{cov}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})=\frac{1}{N}\sum\boldsymbol{x_iy_i}-\overline{\boldsymbol{x}}\,\overline{\boldsymbol{y}}$.
- Le coefficient de corrélation linéaire est le réel noté r qui est définie par : $r=\frac{\operatorname{cov}(x;y)}{\sqrt{V(x)\times V(y)}}$ ou $V(x)$et $V(y)$ représentent respectivement les variances de $\boldsymbol{x}$ et de $\boldsymbol{y}$ et mesure le degré de relation qu'il y a entre les variables $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ il est toujours compris entre $-\mathbf{1}$ et $\mathbf{1}$

- Si $\mathbf{0,8}\leq\boldsymbol{r}\leq\mathbf{1}$ alors la liaison est forte et positive.

- Si $\mathbf{0}\leq\boldsymbol{r}\leq\mathbf{0,2}$ alors la liaison est faible et positive.

- Si $-\mathbf{0,8}\leq|\boldsymbol{r}|\leq\mathbf{1}$ alors la liaison est forte et négative.

Lorsque le nuage de points semble suivre une ligne droite, la relation entre les variables x et y est de la forme$y=ax+b$ ou $x=a'y+b'$. La méthode des Moindre carrées permet de trouver les coefficients a , b , a' et b' on a :

- pour la droite de régression de y en x l'équation est :

$$y=ax+b \text{ avec } a=\frac{\operatorname{cov}(x;y)}{V(x)} \text{ et } b=\bar{y}-a\bar{x}.$$

- pour la droite de régression de x en y l'équation est :

$$x=a'y+b' \text{ avec } a'=\frac{\operatorname{cov}(x;y)}{V(y)} \text{ et } b'=\overline{x}-a'\,\overline{y}.$$

REMARQUE : $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{r^2}$.

CHAPITRE VI :	PROBABILITE

INTERET :

Modéliser des phénomènes aléatoires dépendant du hasard, des incertitudes et l'incertitude, faire des prévisions, et décrire des phénomènes physiques, économiques et biologiques.

MOTIVATION :

Décrire ou comprendre le comportement de certains phénomènes aléatoires (loto, pmu, pari foot…), nécessite une maitrise du calcul des probabilités et des lois l'accompagnent.

LECON 1 : EXPERIENCE ALEATOIREDUREE : 50 MINUTES

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES :

L'élève doit être capable de donner à partir des exemples d'expériences aléatoires, tirés de la vie courante des éventualités, l'univers de toutes les possibilités, des évènements, etc…

Prér-equis :

Rappeler les formules suivantes : A_n^p ; A_n^n et C_n^p

Solution

- $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\dots(n-(p-1))$
- $A_n^n = n!$
- $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

SITUATION PROBLEME :

Paul et Rémi sont deux amis de la classe de Terminale. Le weekend pour se distraire, ils jouent du Ludo qui est un jeu qui consiste à lancer un dé parfaitement équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 ; et à obtenir un chiffre pour pouvoir avancer les pions du nombre de cases correspondant au numéro obtenu lorsque le dé est stable. Paul, dans sa stratégie de jeu et dans l'objectif de gagner, dit à Rémi : « je souhaite réaliser un évènement certains et je te souhaite de renvoyer le dé hors de l'aire de jeu afin de réaliser un évènement impossible » :

Interpréter ses propos.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Une expérience consiste à lancer un dé parfaitement équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et à noter le nombre qui apparait sur la face supérieure du dé.

1.a) Peut-on prévoir les résultats à l'avance? Pourquoi ?

b) Comment peut-on appeler une telle expérience ?

2) Déterminer l'ensemble Ω des évènements possibles ? et donner les évènements élémentaires

3) On pose A : "Obtenir un nombre premier"

B : "Obtenir un multiple de 2"

C : "Obtenir un nombre supérieur ou égal à 7"

Donner l'ensemble des résultats favorables pour A, B et C.

Solution

1.a) Non car cela relève du hasard.

b) Une telle expérience est dite aléatoire.
2) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et l'on l'appelle ″Univers des possibilités″ associé à l'expérience aléatoire et les évènements élémentaires sont : $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{4\}$; $\{5\}$; $\{6\}$.
3) $A = \{2, 3, 5\}$; $B = \{2,4\}$ et $C = \{\} = \emptyset$.

RESUME :

1.1. *Définitions :*

D_1. On appelle expérience aléatoire, toute expérience ayant plusieurs éventualités et dont on ne peut pas prévoir avec certitude laquelle de ces éventualités sera réalisée.

Exemple 1 : On lance une pièce de monnaie et on s'intéresse au côté apparu quand la pièce est tombée et est stable. Il y'a 2 possibilité d'apparition : « Face » et « Pile ». L'expérience de la pièce est une expérience aléatoire.

D_2. On appelle univers des possibles d'une expérience aléatoire, l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience on le note généralement Ω.

Exemple 2 : Dans l'exemple 1 : l'univers $\Omega = \{Face\ , Pile\}$

D_3. Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, on appelle ″évènement″, toute partie de Ω.

Exemple 3 : On lance un dé et on observe le numéro de la face supérieure ″obtenir un nombre pair″ est l'évènement. $A = \{2, 4, 6\}$ ie si on obtient 2, 4 ou 6 alors de l'évènement est réalisé.

1.2. *Vocabulaire des probabilités :*

V_1. L'évènement certain d'une expérience aléatoire est un évènement qui est réalisé par toutes les éventualités.

Exemple : Dans l'exemple du dé, on va considérer les évènements :
A : « le chiffre apparut sur la face supérieure du dé est un nombre entier »

On a $A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ et A est l'évènement certain

V_2. L'évènement impossible est l'ensemble des issues qui ne se réalise pas. C'est la partie vide de Ω. On le note $\emptyset$.

Exemple : Dans l'exemple du dé, on va considérer les évènements
B : « le chiffre apparut sur la face supérieure du dé est supérieure à 6 »
On a $B = \emptyset$ et B est l'évènement impossible

V_3. Un évènement élémentaire d'une expérience aléatoire est tout singleton de l'univers des possibles.

Exemple : Ω.= { 1 ;2 ;3 ;4 ;5; 6} ,les évènements élémentaires sont { 1} ; { 2} ;{ 3} ; {4} ;{ 5 } ;{ 6}

V_4. Soient A et B deux évènements : l'ensemble des éventualités qui réalisent à la fois A et B est noté $A \cap B$ et c'est l'évènement formé des éventualités qui sont dans A et dans B.

Exemple : On lance un dé cubique et on considère les évènements suivants :
A : « le chiffre apparut sur la face supérieure du dé est multiple de 3»
B : « le chiffre apparut sur la face supérieure du dé est un nombre pair »
$A = \{3 ; 6\}$; $B = \{2 ; 4 ; 6\}$; $A \cap B = \{6\}$.

V_5. L'ensemble des éventualités qui réalisent A ou B est noté $A \cup B$.

Exemple : On lance un dé cubique et on considère les évènements suivants :
A : « le chiffre apparut sur la face supérieure du dé est multiple de 3»

B : « le chiffre apparut sur la face supérieure du dé est un nombre pair »

A = {3 ; 6} ; B= { 2 ; 4 ; 6} ; $AUB = \{2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 6\}$.

V_6. Les évènements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple : On dispose d'une pièce de monnaie parfaitement équilibrée, on lance 7 fois de suite et on note chaque fois le coté apparu :

A : « il apparait trois fois face au cours des 7 lancés»

B : « il apparait quatre fois face au cours des 7 lancés »

Les évènements A et B sont incompatibles

V_7. Les évènements A et B sont dits contraires si A est l'ensemble des éventualités de l'univers qui ne réalise pas B. on note $A = \bar{B}$ ou $A = C_\Omega^B$.

Exemple : On lance un dé cubique et on considère les évènements suivants :

A : « le chiffre apparut sur la face supérieure du dé est un nombre pair»

B : « le chiffre apparut sur la face supérieure du dé est un nombre impair »

A et B sont contraires

1.3. EXERCICES D'APPLICATIONS :

Exercice 1 :

On lance un dé parfait et on observe le numéro de la face supérieure. L'univers associée à cette expérience est Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. On considère les évènements suivants :

A : "obtenir un nombre pair″

B : "obtenir un nombre premier″

C : "obtenir le nombre 6″

Déterminer les évènements A, B, C, $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cap C$ et $\bar{A}$.

Solution

A = {2, 4, 6} ; B = {2, 3, 5} ; C = {6}

$A \cup B = \{2, 4, 6\} \cup \{2, 3, 5\}$ = {2, 3, 4, 5, 6}

$A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{2, 3, 5\} = \{2\}$

$B \cap C = \emptyset$ et $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$

Exercice 2 :

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher dont 2 boules blanches et 3 boules rouges. Une expérience consiste à tirer de l'urne.

1) Déterminer l'univers Ω.
2) Déterminer les évènements suivants : D : ″obtenir 2 boules de même couleur″ ; E : ″obtenir 2 boules de couleur différentes″.

Solution :

1) L'univers Ω = {B_1B_2;B_1B_3; B_1R_4, B_1R_5; B_2R_3, B_2R_4 ; B_2R_5 ; R_3R_4 ; R_3R_5 ; R_4R_5, R_5R_5}
2) L'évènement D : ″obtenir 2 boules de même couleur″ est :

D = {B_1B_2, R_3R_4, R_3R_5, R_4R_5}

E = {B_1R_3, B_1R_4, B_1R_5, B_2R_3, B_2R_4, B_2R_5}

LECON 2 : PROBABILITE D'UN EVENEMENT ET VARIABLE ALEATOIRE DUREE : 50 MINUTES

Objectifs pédagogiques :

Calculer la probabilité d'un évènement dans une situation d'équiprobabilité d'un évènement élémentaire par la relation

$P(A) = \frac{Nombre\ de\ résultats\ réalisant\ A}{Nombre\ total\ de\ résultats}$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Prérequis:

Soit l'univers associé à une expérience qui consiste à lancer un dé parfait et à observer le numéro de la face supérieure : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

On considère les évènements suivants :

A : ″obtenir un nombre pair″

B : ″Obtenir unmultiple de 3″

Déterminer les évènements A , B, $A \cup B$, $A \cap B$.

Solution :

* $A = \{2 ; 4 ; 6\}$
* $B = \{3 ; 6\}$
* $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
* $A \cap B = \{6\}$

Situation problème :

SIMO lance un dé parfaitement équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et ensuite il relève le nombre sur la face supérieure du dé et aimerait savoir le nombre de résultats possibles.

Activité d'apprentissage :

On lance un dé parfaitement équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on relève le nombre sur la face supérieure du dé.

1°) Déterminer le nombre de résultats possibles avec l'univers Ω lié à cette épreuve, on constitue une population statistique d'effectif total CardΩ et on assimile un évènement à une modalité dont l'effectif est Card A

2.a°) Déterminer la fréquence de réalisation de l'évènement A : ″Obtenir un nombre premier″ ; cette fréquence est la possibilité de l'évènement A. elle est notée P(A).

On considère les évènements B : ″le numéro obtenu est supérieur à 4 ; C : ″le numéro obtenu est un diviseur de 10″.

b) Calculer P(B) ; P(C); $P(B \cap C)$; $P(B \cup C)$; $P(\bar{B})$; $P(\Omega)$ et P(Ø)

Solution :

1°) Puisque le dé est parfaitement équilibré, un résultat peut être soit le chiffre 1, soit 2, soit 3, soit 4, spot 5, soit 6. Nous avons au total 6 résultats possibles. L'univers Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

2.a°) La fréquence de réalisation de l'évènement A est $\frac{Card\ (A)}{Card\ (\Omega)} = \frac{3}{6}$.

b) Puisque les numéros supérieurs à 4 sont 4, 5, 6 alors on a $P(B) = \frac{3}{6}$.

Les diviseurs de 10 sont 1, 2 et 5 $\Rightarrow P(C) = \frac{3}{6}$.

L'évènement $B \cap C$ est l'évènement ″le numéro obtenu est supérieur à 4 et est diviseur de 10″ ;

soit $B \cap C = \{5\} \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{1}{6}$

De même, $P(B \cup C) = \frac{5}{6}$; $P(\bar{B}) = \frac{3}{6}$; $P(\Omega) = 1$ et P(Ø) = 0

Résumé :

Définition 1 :

Soit Ω l'univers des évènements associés à une expérience aléatoire. On appelle probabilité sur Ω toute application de P de l'ensemble des parties de Ω vers l'intervalle [0, 1] vérifiant, $P(\Omega) = 1$

P(Ø) = 0

Définition 2 :

On considères une expérience aléatoire dont l'univers Ω est fini. On suppose que tous les évènements élémentaires ont la même chance d'être réalisés. La fréquence d'un évènement A ne dépend que de l'effectif des éventualités qui le réalisent ; cette fréquence notée P(A) est encore appelée ″Probabilité de la réalisation de A″. on a $P(A) = \frac{Card\ (A)}{Card\ (\Omega)} = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombre\ de\ cas\ possibles}$.

Remarque :

On reconnaît qu'il y a équiprobabilité par l'emploi des expressions telles que : Parfaitement équilibré, non pipé ou non truqué, indiscernable au toucher, au hasard.

Propriétés :

Soit une probabilité définie sur l'ensemble des parties de Ω

- Pour tout événement A de Ω , $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Pour tout évènement A et B de Ω, $P(B \cup C) = P(A) + P(B) - P(A\ \cap B)$ et si $A\ \cap B =\ \emptyset$ alors $P(B \cup C) = P(A) + P(B)$
- La probabilité d'un évènement A notée P(A) : est la somme des probabilités évènements élémentaires contenus dans A.

C'est-à-dire si A = {W_1, W_2, ……Wn} alors P(A) = (P{W1} + P({W2} +………….. + P({Wn})

- Pour tous évènements A et B de Ω si A ≤ B alors P(A) ≤ P(B)
- Pour tous évènements A et B de Ω , A et B sont indépendants si $P(A\ \cap B) = P(A) \times P(B)$. Dans ce cas, la réalisation de l'un ne dépend pas de celle de l'autre.

Exercice d'application

Une urne contient 5 boules rouges, 3 boules blanches et 2 boules vertes.

On tire successivement et avec remise trois boules de cette urne.

- Quel est le nombre de tirages possible ?
- Calculer les probabilités des évènements A, B et C

A : ″Obtenir des boules tricolores″

B : ″Obtenir exactement deux boules blanches″

C : ″Obtenir au moins une boule rouge″

Solution :

a) Le nombre de tirage est 3-uplets d'un ensemble à 10 éléments. Soit $10^3 = 1000$ tirages possibles

b) Calcul des probabilités

$P(A) = \frac{5 \times 3 \times 2}{10^3}$; $P(B) = \frac{3^2 \times 7}{10^3}$; $P(C) = \frac{10^3 - 8^3}{10^3}$.

LECON 3 : EPREUVE DE BERNOULLI - DUREE : 50 MINUTES

Objectifs pédagogiques :

L'élève pourra grâce à deux éventualités qui se répètent, décerner le schéma de Bernoulli afin de résoudre un problème.

Pré-requis :

a) Donner la formule de C_n^p

b) Calculer C_8^3 ; C_5^4

Solution :

- $C_n^p = A_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
- $C_8^3 = \frac{A_8^3}{3!} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$
- $C_5^4 = \frac{A_5^4}{4!} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = 5$

Situation problème :

KENFACK élève au lycée classique de Dschang surnommé 'l'as du lycée' par son dynamisme aimerait faire un petit tour de magie lors des activités culturelles. Il voudrait appeler un élève quelconque et lui demandé de mélanger un jeu de 32 cartes et lui a son tour d'extraire une carte (en particulier l'as) de ce jeu de 32 cartes. Pour éviter de rater son tour de magie, il aimerait savoir la probabilité d'obtenir un as. Que lui conseiller vous ?

Activité d'apprentissage

Les récentes statistiques au Cameroun montrent qu'il nait en moyenne 55 filles sur 48 garçons.

a) Un enfant va naître. Quelle est la probabilité

a) Qu'il soit un garçon ?

b) Qu'il soit une fille ?

b) Dans la famille de 5 enfants, quelle est la probabilité

- Qu'il ait 2 filles et 3 garçons ?
- Qu'il ait 4 garçons ?

Solution :

1.a) La probabilité qu'il soit un garçon est $\frac{48}{103}$

b) La probabilité qu'il soit une fille est $\frac{55}{103}$

2.a) La probabilité qu'il ait 2 filles et 3 garçons est $C_5^2\left(\frac{55}{103}\right)^2\left(\frac{55}{103}\right)^3$

b) La probabilité qu'il ait 4 garçons est $C_5^4\left(\frac{55}{103}\right)^1\left(\frac{55}{103}\right)^4$

Résumé :

- Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux éventualités : le « succès » et « l'échec ». la probabilité de « succès » est notée P et celle de l'échec est notée q = $1 - P$

Exemple : Le lancer d'une pièce de monnaie.

- Un schéma de Bernoulli est une expérience aléatoire qui consiste à répéter plusieurs fois, de façon indépendante une épreuve de Bernoulli.

Propriété :

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves où pour chaque épreuve la probabilité du succès est p. la probabilité d'obtenir exactement k succès $(0 \leq k \leq n)$ au cours de ces n épreuves est :

$P_k = C_n^k p^k q^{(n-k)}$ avec $q = 1 - p$.

Exemple :

On lance trois fois de suite une pièce bien équilibrée quelle est la probabilité d'obtenir une fois « face » et la probabilité d'obtenir au moins une fois « face »

Solution :

La probabilité du succès $P = \frac{1}{2}$ = q

La probabilité d'obtenir une fois face est : $P_1 = C_3^1 \frac{1}{2}\frac{1}{2^2} = \frac{3}{8}$

La probabilité d'obtenir au moins une fois face c'est avoir une fois face ou deux fois face ou trois fois face d'où : $P = C_3^1 \frac{1}{2}\frac{1}{2^2} + C_3^2 \frac{1}{2^2}\frac{1}{2} + C_3^3 \frac{1}{2^3}\frac{1}{2^0} = \frac{7}{8}$

On pouvait aussi remarquer que les évènements obtenir au moins une fois face et n'obtenir aucune fois face sont incompatibles, auquel cas ,$P = 1 - P_0 = 1 - C_3^0 \frac{1}{2^0}\ \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8}$

Exercice d'application :

On lance 8 fois de suite une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir la face « pile » est $P(p) = \frac{3}{4}$ et celle de la face « face » est $P(f) = \frac{1}{4}$.

Déterminer la probabilité d'obtenir 05 fois la face « pile »

Solution :

Lorsqu'on lance une pièce, nous avons 2 éventualités « pile » ou « face » comme nous répétons plusieurs fois l'épreuve, nous avons un schéma de Bernoulli et la probabilité est $C_8^5 \left(\frac{3}{4}\right)^5 \left(\frac{1}{4}\right)^3$

MODULE : 26	CONFIGURATIONS ET TRANSFORMATIONS ÉLÉMENTAIRES DU PLAN

CHAPITRRE VII : SIMILITUDES Directe DU PLAN

MOTIVATION

Dans son livre L'essayeur (1623) Galilée déclare « le monde est écrit en langage mathématiques, et les caractères en sont des triangles, les cercles et d'autres figures géométriques sans lesquelles il est impossible humainement d'en saisir le moindre mot ; sans ses moyens, on risque de s'égarer dans un labyrinthe obscur ».

En effet, depuis l'époque des grecs, l'homme a appris à dompter son environnement. L'utilisation et la rencontre des objets dans lesquels on peut extraire des formes géométriques planes font partie du quotidien : aménagement ou réalisation de son habitat, manipulation ou réalisation de certains objets usuels, appréciation ou production des œuvres d'art.

PRE-REQUIS

- Transformations du plan
- Nombres complexes

Leçon 1 : ECRITURE COMPLEXE ET CARACTERISATION DES SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN - Durée : 100 mns

Objectifs Opérationnels Pédagogiques

- Reconnaitre l'écriture complexe d'une translation, d'une homothétie, d'une rotation et d'une similitude directe du plan de façon générale
- Déterminer les éléments numériques et les éléments géométriques qui caractérisent une similitude directe du plan à partir de son écriture complexe

Contrôle des prérequis

1°) Soit ABC un triangle rectangle isocèle de sens indirect. On note r la rotation de centre A et de d'angle $-\frac{\pi}{2}$ Donner l'image de A, et C par r

2°) Donner les éléments caractéristiques d'une rotation

3°) Soit ABCD un carré de sens direct de centre O. On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$. Déterminer et construire les points I, J, K, L images respectives par hor (composé de r suivie de h) des points A, B, C et D. Quelle est la nature de la figure IJKL.

SITUATION PROBLEME

Un sérigraphe de la ville de DSCHANG vous pose le problème suivant :

« j'ai besoin d'un programme informatique qui prend un objet et le reproduire en un objet semblable, deux fois plus grand et retourné d'un quart de tour indirect par rapport à un point fixe Ω dont l'affixe dans le plan complexe est $\omega = 1 - 2i$ ». Propose une solution à la résolution de ce problème.

Activité d'apprentissage 1

Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe b, Ω un point d'affixe ω et k un nombre réel non nul.
1°) Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$ on note M point d'affixe z et M' d'affixe z' image par t de M. Montrer que $z' = z + b$
2°) On note h l'homothétie de centre Ω et de rapport k. Soit M d'affixe z et M' d'affixe z' image par h de M.
a) Justifier que $\overrightarrow{\Omega M'} = \mathrm{k}\overrightarrow{\Omega M}$
b) En déduire que $z' - \omega = k(z - \omega)$
3°) On note r la rotation d'angle θ et de centre Ω. . Soit M d'affixe z et M' d'affixe z' image par r de M.
a) Justifier que : $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ mes(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$
b) Soit Z= $\frac{z'-\omega}{z-\omega}$. Justifier que $|Z| = \frac{\Omega M\prime}{\Omega M}$
c) En déduire que pour tout M diffèrent de Ω on a : $\begin{cases} \left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta + 2K\pi \end{cases}$
d) En déduire que $\frac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta}$ puis que $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$
4°) Soit $f = roh$. On note M d'affixe z et M' d'affixe z' image par f de M.
Montrer que : $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$. A-t-on $roh = hor$?

Activité d'apprentissage 2

Soit f une transformation du plan complexe dans le plan complexe qui à tout point M D'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = az + b$ où a et b sont des nombres complexes avec a diffèrent de 0
1°) Donner la nature et l'élément caractéristique de f pour $a = 1$
2°) On suppose a différent de 1
a) Démontrer que f admet un seul point invariant Ω dont-on déterminera son affixe noté ω
b) En déduire que $z' - \omega = a(z - \omega)$
c) On pose $k = |a|$ et θ =arg(a). Démontre que $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$

Solution :

1°) Pour $a = 1$, f a pour écriture complexe $z' = z + b$ donc f est une translation
$1.a$°) Démontrons que f admet un point invariant. Soit M un point invariant par f alors z=az +b ⇒ b=z-$az \Rightarrow z = \frac{b}{1-a}$ car $a \neq 1$. D'où $\omega = \frac{b}{1-a}$
b) Déduisons-en que $z' - \omega = a(z - \omega)$. On a $z' = az + b$ et $\omega = a\omega + b$
donc $z' - \omega = az + b - (a\omega + b) = a(z - \omega)$
c) Démontrons que $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$. On a $\begin{cases} \mathrm{k} = |a| \\ \theta = \arg(\mathrm{a}) \end{cases} \Leftrightarrow a = ke^{i\theta}$
Il suit que : $z' - \omega = a(z - \omega) = ke^{i\theta}(z - \omega)$.

Résumé

I. Ecriture complexe des similitudes directes du plan

1. Ecriture complexe d'une translation

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe b. un point M d'affixe z est l'image du point M' d'affixe z' par la translation de vecteur $\vec{u}$ si et seulement si $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z' - z = b \Leftrightarrow z' = z + b$.

Exemple :

L'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1 + 3i$ est : $z' = z + 1 + 3i$.

2. Ecriture complexe d'une homothétie

Définition

Soit Ω un point d'affixe ω et k un nombre réel. un point M d'affixe z est l'image du point M' d'affixe z' par l'homothétie de centre Ω et de rapport k si et seulement si $\overrightarrow{\Omega M'} = \mathrm{k}\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega) \Leftrightarrow$ $z' = kz + \omega(1 - k)$

Exemple :

→ l'écriture complexe de l'homothétie de centre A d'affixe $1 - 2i$ et de rapport 2 est :
$z' = 2z + (1 - 2i)(1 - 2) = 2z - 1 + 2i$

→ L'écriture complexe suivante $z' = -3z + 3i$ est celle de l'homothétie de rapport – 3 et de centre B d'affixe $b = \frac{3i}{4}$.

3. Ecriture complexe d'une rotation

Définition

On note r la rotation d'angle θ et de centre Ω d'affixe ω. Soit M d'affixe z et M' d'affixe z' image par r de M. $M' = r(M)$ si et seulement si $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ mes(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$

Propriété :

Soit M d'affixe z et M' d'affixe z' image par r. L'écriture complexe de la rotation r de centre Ω d'affixeω, d'angle θ est : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

4. Ecriture complexe d'une similitude plane

Définition

Soit θ un nombre réel, Ω un point et k un nombre réel strictement positif. On appelle similitude directe de centre Ω, d'angle θ et de rapport k, la transformation du plan dans le plan qui à tout point M associe le point M' tel que : $\begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ mes(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$.

Remarques

R1. Toute rotation est une similitude directe du plan de rapport 1

R2. Toute homothétie de rapport k est une similitude directe de rapport $|k|$ et d'angle : $\begin{cases} \theta = \pi \text{ si } k < 0 \\ \theta = 0 \text{ si } k > 0 \end{cases}$

R3. Soit r rotation de centre Ω, d'angle θ et h homothétie h de même centre Ω et de rapport k> 0. La composée $s = hor = roh$ est une similitude directe de centre Ω, d'angle θ et de rapport k .

Propriété

L'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω d'affixeω, d'angle θ et de rapport k, est : $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$.

Exemple : (Résolution de la situation problème)

L'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω d'affixe $\omega = 1 - 2i$ de rapport 2 et d'angle -$\frac{\pi}{2}$ est $z' - (1 - 2i) = 2e^{-i}(z - (1 - 2i))$

$\Rightarrow z' = -2i(z - 1 + 2i) + (1 - 2i) = -2iz + 2i + 4 + 1 - 2i \Rightarrow z' = -2iz + 5$

II. Caractérisation d'une similitude directe du plan à partir de son écriture complexe

1°) Propriété caractéristique

Une transformation s du plan dans le plan est une similitude directe du plan si et seulement si son écriture complexe est sous la forme $z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes (a étant non nul)

Propriétés

Soit s une similitude directe d'écriture complexe $z' = az + b$. a et b étant tous non nuls

∗ Si $a = 1$ alors s est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b

∗ Si a diffèrent de 1 alors s admet un seul point invariant Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$. Et dans ce cas, on pose $\theta = \arg(a), k = |a|$:

- S est la similitude directe de centre Ω , d'angle θ et de rapport k
- $S = roh = hor$ où r est la rotation de centre Ω, d'angle θ et h homothétie h de même centre Ω et de rapport k.

Remarques

R1. L'égalité $s = roh = hor$ est appelée écriture réduite de s

R2. Soit s est la similitude directe de centre Ω , d'angle θ et de rapport k et s' la similitude directe de centre Ω' , d'angle θ' et de rapport k' :

- ✓ la bijection réciproque de s est la similitude directe de centre Ω, d'angle $-\theta$ et de rapport $\frac{1}{k}$
- ✓ Si $kk' \neq 1$ alors, la composée s'os est une similitude directe de rapport kk' et de d'angle $\theta + \theta'$

2°) Exemple :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct. f est l'application du plan dont l'écriture complexe est $z' = (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)z$

on a $\left|-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$ et $arg(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}, f(0) = 0$ d'où f est la similitude directe de centre O, d'angle $\frac{2\pi}{3}$, et de rapport 1. De plus f a pour rapport 1 donc la nature exacte de f est : une rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$,

Leçon 2 : ECRITURE ANALYTIQUE DES SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN ET IMAGES DES COFIGURATIONS DU PLAN - 100 Minutes

Objectifs pédagogiques

- Reconnaitre l'écriture analytique d'une similitude directe du plan ;
- Passer de l'écriture analytique à l'écriture complexe d'une similitude directe du plan et réciproquement ;
- Déterminer l'image par une similitude directe d'une droite, d'un cercle, d'une figure géométrique

SITUATION PROBLEME

Votre petit frère en classe de première MEB (métier bois) vous présente la situation suivante : « notre enseignant de mathématiques nous a dit que si nous voulons reproduire notre équerre à l'échelle $\sqrt{2}$, nous pouvons utiliser la transformation du plan dont l'expression analytique est : $\begin{cases} x' = x + y - 2 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}$ » mais je ne comprends pas. Proposer à votre petit frère un algorithme pour la résolution de son problème.

Activité d'apprentissage

f est l'application du plan dans le plan qui à tout point de coordonnées (x,y) associe le point M' de coordonnées (x',y') tel que : $\begin{cases} x' = x + y - 2 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}$

1°) Montrer que $x' + iy' = (x + iy) + (y - ix) + (-2 + i) = (x + iy) - i(x + iy) + (-2 + i)$

2°) Détermine deux nombres complexes a et b tels que $z' = az + b$, où z est l'affixe de M et z' l'affixe de M'

3°) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

4°) Soit (D) la droite d'équation $(D) : y = 2x - 1$.

$a)$ Montrer que $2y = x' + y' + 1$ et $2x = x' - y' + 3$

$b)$ En déduire une équation cartésienne de la droite (D') image de D par f

5°) Soit A et B les points d'affixe respectifs $1 + i$ et 2

$a)$ Quelle est la nature exacte du triangle OAB ?

$b)$ Soit $A' = f(A), B' = f(B)$ et $O' = f(O)$. montrer que $O'A' = \sqrt{2}OA, O'B' = \sqrt{2}OB$ et $A'B' = \sqrt{2}AB$

$c)$ Déterminer la nature exacte de la figure $O'A'B'$.

Résumé

Définition

une application du plan dans le plan est une application affine si pour tout point M de coordonnées $(x\,;y)$ on associe le point M' de coordonnées $(x'\,;\,y')$ tel que :

$(S') : \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$ où $a,\ b,\ c,\ a',\ b'$ et c' sont des nombres réels

Le système (S') est l'expression analytique d'une application affine du plan

Propriété 1 :

Toute similitude plane est une transformation affine du plan

Exemple 1 :

Soit l'application g du plan d'écriture complexe $z' = 2iz + 5 - i\sqrt{2}$. g est une similitude directe du plan car son écriture complexe est sous la forme z'=az+b avec a=2i et b= 5-i$\sqrt{2}$. Soient M et M' deux points du plan d'affixes respectifs $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ tels $g(M) = M'$ alors $z' = 2iz + 5 - i\sqrt{2}$ $\Rightarrow x' + iy' = 2i(x + iy) + 5 - i\sqrt{2} = 2ix - 2y + 5 - i\sqrt{2} = -2y + 5 + i(2x - \sqrt{2}) \Rightarrow$

$x' + iy' = -2y + 5 + i(2x - \sqrt{2}) \Rightarrow \begin{cases} x' = -2y + 5 \\ y' = 2x - \sqrt{2} \end{cases}$. Ainsi g est une application affine.

Propriété 2 :

Toute similitude de rapport k (k étant un réel strictement positif) :

- Multiplie les distances par k, les aires par k^2
- conserve les angles géométriques, donc le parallélisme et l'orthogonalité
- conserve les alignements, les milieux, les contacts
- transforme un cercle de centre A et de rayon r en un cercle de centre A' image de A et de rayon r'= kr
- transforme une droite en une droite, un segment en un segment

Exemple 2 :

Soit f l'application du plan dans le plan qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$

Associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que : $\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + y + \sqrt{3} \end{cases}$

1) Exprime z' en fonction de z
2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f
3) Soit Γ le cercle de centre A(1,1) et de rayon 5. Déterminer Γ' image de Γ par f
4) Soit d la droite d'équation $x + y + 6 = 0$. Donne une équation cartésienne de la droite d' image de d

Solution

1) $f(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} - \sqrt{3}\ (1) \\ y' = -x\sqrt{3} + y + \sqrt{3} (2) \end{cases}$ en multipliant (2) par i on

a : $\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ iy' = -xi\sqrt{3} + iy + i\sqrt{3} \end{cases}$. En additionnant membre à membre on obtient

$x' + iy' = x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} + -xi\sqrt{3} + iy + i\sqrt{3} = (x + iy) + y\sqrt{3} - xi\sqrt{3} + i\sqrt{3}$

$= z + \sqrt{3}\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) - i\sqrt{3}\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) - \sqrt{3} + i\sqrt{3}$

Apres calcul et réduction il suit que : $z' = (1 - i\sqrt{3})z + (-\sqrt{3} + i\sqrt{3})$

2) D'après ce qui précède, l'écriture complexe de f sous la forme : $z' = az + b$ avec $a = 1 - i\sqrt{3}$ *et* $b = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}$. Donc f est une similitude directe de rapport $k = |1 - i\sqrt{3}| = 2$, d'angle $\theta = arg(1 - i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ et de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{-\sqrt{3} + i\sqrt{3}}{1 - (1 - i\sqrt{3})} = 1 + i$

3) Γ le cercle de centre A(1,1) et de rayon 5. Donc Γ' image de Γ par f est un cercle de centre $A' = f(A)$ et de rayon $k \times r = 2 \times 5 = 10$. Or $z_A = 1 + i = \omega$; ainsi Γ' est un cercle de centre A(1 ; 1) et de rayon 10

4) On sait que $f(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} - \sqrt{3}\ (1) \\ y' = -x\sqrt{3} + y + \sqrt{3} (2) \end{cases}$

$(1) - \sqrt{3}\ (2)$ et $\sqrt{3}\,(1) + (2) \Rightarrow \begin{cases} x' - \sqrt{3}y' = 4x - \sqrt{3} - 3\ (\&1') \\ \sqrt{3}x' + y' = 4y + \sqrt{3} + 3\ (2') \end{cases}$

$(1') + (2') \Rightarrow x' + \sqrt{3}x' + y' - \sqrt{3}y' = 4(x + y)$.

M$\binom{x}{y}$ est un point de $d \Leftrightarrow x + y = 6 \Leftrightarrow x' + \sqrt{3}x' + y' - \sqrt{3}y' = 24$

Donc d' image de d par f a pour équation :$(1 + \sqrt{3})x' + (1 - \sqrt{3})y' = 24$

Propriété 3 :

(1) Soit A , B et C trois points tels A $\neq B$ et $A \neq C$ il existe une unique similitude directe de centre A qui transforme B en C.

(2) Soit k un réel strictement positif, α un réel A et A' deux du plan. Il existe une unique similitude de rapport k et d'angle, α qui transforme A en A'.

(3) Soit A, B, A' et B' quatre points tels que A$\neq B$ et $A' \neq B'$ il existe une unique similitude qui transforme A en A' et B en B'.

Remarques

***R*1.** Pour passer de l'écriture analytique à l'écriture complexe d'une application affine, on pose $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$, puis on utilise les relations complexes suivantes $z + \bar{z} = 2x$ et $z - \bar{z} = 2iy$

***R*2.** si le passage de l'expression analytique à l'expression complexe conduit à la forme $z' = az + b$, alors l'application affine est une similitude directe du plan

***R*3.** Pour passer de l'écriture complexe à l'expression analytique on pose $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$, à partir de $z' = x' + iy$, on exprime x' et y' en fonction de x et y.

***R*4.** Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont dits semblables s'il existe une similitude qui transforme l'un à l'autre**.**

Exemple 3

Le plan complexe est rapporté à un repère ortho normal direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) . On considère les points A, B et C d'affixes respectives $i, -\sqrt{2} + i$, $1 + 2i$

1°) Donner la nature exacte et l'écriture complexe de la similitude directe f de centre A qui transforme B en C

2°) On définit g la similitude directe de centre O, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donner l'écriture complexe de g

3°) On pose $h = gof$.

a) Quelle est la nature de h

b) soit M d'affixe z et M' d'affixe z' tel que $h(M) = M'$. Exprimer z' en fonction de z

c) En déduire le point Ω centre de la transformation h.

Solution

1°) Soit $z' = az + b$ l'écriture complexe de f. On f(B)=C alors $z_C = az_B + b \Rightarrow$ $1 + 2i$=a$(-\sqrt{2} + i) + b$. f a pour centre A alors $f(A) = A \Rightarrow z_A = az_A + b$ donc $i = ai + b$, on obtient le système suivant $\begin{cases} ai + b = i & (1) \\ a\left(-\sqrt{2} + i\right) + b = 1 + 2i & (2) \end{cases}$

(1)-(2)$\Rightarrow ai - a\left(-\sqrt{2} + i\right) = i - 1 - 2i \Rightarrow a = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i) = e^{-\frac{3\pi}{4}i}$ (3) . De (1) et (3), on obtient : $b = i - ai = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2}i$. Il suit que $z' = e^{-\frac{3\pi}{4}i}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2}i$. On a $|a| = 1$, arg(a)$= -\frac{3\pi}{4}$ donc f est une rotation de centre A et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$.

2°) Ecriture complexe de g .

g est la similitude directe de centre O, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc l'écriture complexe de g est donnée par $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}z = \frac{\sqrt{2}}{2}iz$

3.a) f est une similitude de rapport 1 et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$ et g est une similitude de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Donc $h = gof$ est une similitude de rapport $k = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$b)$ Exprimons z' en fonction de z

soit M_1 le point d'affixe z_1 tel que $M1 = f(M)$ alors $z_1 = e^{-\frac{3\pi}{4}i}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2}i.$

On a :$M' = h(M) = gof(M) = g[f(M)] = g(M1) \Rightarrow M' = g(M_1) \Rightarrow$ par $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}iz_1 \Rightarrow$

$z'=\frac{\sqrt{2}}{2}i\left(e^{-\frac{3\pi}{4}i}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2}i\right)= \frac{\sqrt{2}}{2}i\, e^{-\frac{3\pi}{4}i}z + \frac{1}{2}i - \frac{2\sqrt{2}-2}{4} \Rightarrow z' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z + \frac{\sqrt{2}-1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$\Rightarrow \quad z' = \frac{1}{2}(1-i)z + \frac{\sqrt{2}-1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$

$c)$ Ω est le centre de la similitude h, soit ω l'affixe de Ω alors

$\omega = \frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}{1-\frac{1-i}{2}} = \frac{\sqrt{2}-1+\sqrt{2}i}{1+i} = \frac{(\sqrt{2}-1+\sqrt{2}i)(1-i)}{2} = \frac{2\sqrt{2}-1}{2} + \frac{1}{2}i$. Donc $\omega = \frac{2\sqrt{2}-1}{2} + \frac{1}{2}i$

Chapitre VIII	MATRICES ET APPLICATIONS LINEAIRES D'UN PLAN VECTORIEL DANS LUI-MEME

Intérêt :

La notion d'espace vectoriel est une structure fondamentale des mathématiques modernes. Il s'agit de dégager les propriétés communes que partagent des ensembles pourtant très différents. Par exemple, on peut additionner deux vecteurs du plan et aussi multiplier un vecteur par un réel (pour l'agrandir ou le rétrécir).

Les applications linéaires sont au cœur des techniques statistiques les plus employées et les techniques d'analyse de données traitant des tableaux utilisant pour la plupart le calcul matriciel.

Leçon 1	APPLICATIONS LINEAIRES ENTRE DEUX ESPACES VECTORIELS (Durée : 100 min)

MOTIVATION :

i) Traitement des tableaux lors de l'analyse des données en statistique ;
ii) Résolution des systèmes linéaires à plusieurs inconnues ;
iii) Optimisation d'une fonction sous certaines contraintes en économie.

COMPETENCES A ACQUERIR PAR L'ELEVE :

iv) Montrer qu'une application définie entre deux espaces vectoriels est stable pour la multiplication et pour l'addition par un réel ;
v) Dire si une application est un endomorphisme.
vi) Calculer les coordonnées de l'image d'un vecteur quelconque, connaissant les images des vecteurs de base par une application linéaire ;
vii) Calculer les coordonnées de l'image d'un vecteur quelconque, connaissant la définition analytique d'une application ;
viii) Déterminer une équation caractéristique, une base du noyau d'une application linéaire ;
ix) Déterminer une équation caractéristique, une base de l'image d'une application linéaire ;
x) Montrer qu'une application linéaire est bijective à partir de l'exploitation de son écriture analytique ; de la détermination de son noyau ou de celle de son image.

PRE – REQUIS :

Soit H l'ensemble défini par : $H = \{\ (x;y) \in \mathbb{R}^2\ \ /\ 3x - 2y = 0\ \}$
Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

SOLUTION PRE – REQUIS :

H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ si :

a) H est non vide ($H \neq \emptyset$) ;
b) H est stable pour l'addition(+) ; c'est-à-dire la somme de deux vecteurs de H est un vecteur de H ;
c) H est stable pour le produit d'un vecteur par un réel, c'est-à-dire le produit d'un vecteur de H par un réel est un vecteur de H.

En effet,

a) $(0;0) \in H \neq \emptyset$; On a : $3(0) - 2\,(0) = 0 - 0 = 0$;
b) H est stable pour l'addition (+) ;

Soient $(x_1\,;y_1)$ et $(x_2\,;y_2) \in H$, montrons que $(x_1\,;y_1) + (x_2\,;y_2) \in H$.

On a: $(x_1\,;y_1)+\ (x_2\,;y_2)=[(x_1\ +x_2)\,;\ (y_1\ +y_2)]\in\mathbb{R}^2$
Par suite on écrit : $3(x_1\ +x_2)-2(y_1\ +y_2)=\ 3(x_1\,)+3(x_2)-2(y_1\,)-2(y_2)$
$3(x_1\ +x_2)-2(y_1\ +y_2)=(3x_1\ -2y_1)+\ (3x_2\ -2y_2)$
$=0+0$ car $\left(x_1\,;y_1\right)$ et $\left(x_2\,;y_2\right)\in H$.

Donc $(x_1\,;y_1)+\ (x_2\,;y_2)\in H$.

a) H est stable pour la multiplication (.) externe ;
Soient $(x_1\,;y_1)\in H$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, montrons que $\alpha.(x_1\,;y_1)\in H$

On a : $\alpha.(x_1\,;y_1)=(\alpha.x_1\,;\alpha.y_1\,)\in\mathbb{R}^2$ car $\in\mathbb{R}$, $x_1\ \in\mathbb{R}\ et\ y_1\in\mathbb{R}$. De plus, (.) est une loi de composition interne donc $\alpha.x_1\ \in\mathbb{R}\ et\ \alpha.y_1\ \in\mathbb{R}$.
Par suite, on a : $3(\alpha.x_1\,)-2(\alpha.y_1\,)=3\alpha.x_1\ -2\alpha.y_1\ =\alpha.(3x_1\ -2y_1\,)=\alpha.0$ car $(x_1\,;y_1)\in H$
Donc $\alpha.(x_1\,;y_1)\in H$; H est alors stable pour la multiplication externe(.).
En conclusion, H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1) On considère l'application f définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x;y)=3x+3y$
a) Montrer que pour tous vecteurs $\vec{u}=(x_1\,;y_1)\ et\ \vec{v}=(x_2\,;y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, $f(\vec{u}+\vec{v})=f(\vec{u})+f(\vec{v})$.
b) Montrer que pour tout réel λ et tout vecteur $\vec{u}=\left(x_1\,;y_1\right)$ de $\mathbb{R}^2$, $f(\lambda.\vec{u})=\lambda.f(\vec{u})$

2) On considère l'application g de E1 dans E1 définie par : $g(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath})=(x-2y)\vec{\imath}+(2x-3y)\vec{\jmath}$
- ✓ Déterminer l'image des vecteurs $(3\vec{\imath}-5\vec{\jmath})$ et $(2\vec{\imath}+6\vec{\jmath})$ par g.
- ✓ Déterminer l'antécédent du vecteur $7\vec{\imath}-4\vec{\jmath}$

3) On considère l'application $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$
$\vec{u}(x;y)\ \longmapsto\vec{u}'(x';y')$ Telle que $\begin{cases}x'=2x-y\\ y'=-4x+2y\end{cases}$

- Déterminer et caractériser l'ensemble $N\ =\{\,\vec{u}(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ f(\vec{u})=\overrightarrow{0_{\mathbb{R}^2}}\}$
- Déterminer et caractériser l'ensemble $I\ =\{\vec{u}'(x'\,;y')\in\mathbb{R}^2\ /\ \exists\,\vec{u}(x\,;y)\ \in\mathbb{R}^2,\ \vec{u}'=f(\vec{u})\}$

SOLUTION DE L'ACTIVITE D'APPRENTISSAGE:

1) Soit l'application f définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x;y)=3x+3y$
1. Montrons que pour tous vecteurs $\vec{u}=(x_1\,;y_1)\ et\ \vec{v}=(x_2\,;y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, $f(\vec{u}+\vec{v})=\boldsymbol{f(\vec{u})+f(\vec{v})}$.

On a : $f(\vec{u}+\vec{v})=\ f\big((x_1\,;y_1)\ +(x_2\,;y_2)\big)=f\big((x_1\ +x_2)\,;(y_1\ +y_2)\big)$
$=\ 3(x_1\ +x_2)+3(y_1\ +y_2)=\ 3(x_1)+3(x_2)+3(y_1\,)+3(y_2)$
$=\ (3x_1+3y_1)+(3x_2\ +3y_2)\ =\ f(x_1\,;y_1)\ +f(x_2\,;y_2)\ =f(\vec{u})+f(\vec{v})$

b) Montrons que pour tout réel λ et tout vecteur $\vec{u}=\left(x_1\,;y_1\right)$ de $\mathbb{R}^2$, $f(\lambda.\vec{u})=\lambda.f(\vec{u})$

On a : $f(\lambda.\vec{u})=f\left(\lambda.\left(x_1\,;y_1\right)\right)=f\left(\lambda.x_1\,;\lambda.y_1\right)=3(\lambda.x_1\,)+3(\lambda.y_1\,)=3\lambda.x_1\ +3\lambda.y_1$
$=\lambda.(3\,x_1\ +3y_1\,)=\lambda.f\left(x_1\,;y_1\right)=\lambda.f(\vec{u})$

2) Soit l'application g de E1 dans E1 définie par : $g(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath})=(x-2y)\vec{\imath}+(2x-3y)\vec{\jmath}$
a) Déterminons l'image des vecteurs $(3\vec{\imath}-5\vec{\jmath})$ et $(2\vec{\imath}+6\vec{\jmath})$ par g ; c'est-à-dire $g(3\vec{\imath}-5\vec{\jmath})$ et $g(2\vec{\imath}+6\vec{\jmath})$.
On a :
- ➢ $g(3\vec{\imath}-5\vec{\jmath})=((3)-2(-5))\vec{\imath}+(2(3)-3(-5))\vec{\jmath}$ car $x=3$ et $y=-5$.
$=13\,\vec{\imath}+21\,\vec{\jmath}$
- ➢ $g(2\vec{\imath}+6\vec{\jmath})=((2)-2(6))\vec{\imath}+(2(2)-3(6))\vec{\jmath}$ car $x=2$ et $y=6$.
$=-10\,\vec{\imath}-14\,\vec{\jmath}$

b) Déterminons l'antécédent de $7\vec{\imath}-4\vec{\jmath}$

Il s'agit de chercher le couple $(x;y)$ tel que $g(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath})=7\vec{\imath}-4\vec{\jmath}$

On a: $g(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath})=7\vec{\imath}-4\vec{\jmath} \iff (x-2y)\vec{\imath}+(2x-3y)\vec{\jmath}=7\vec{\imath}-4\vec{\jmath}$

Par identification, on obtient le système : $\begin{cases} x-2y=7 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$

Après résolution, on obtient $(x;y)=(-29;-18)$.

Donc l'antécédent de $7\vec{\imath}-4\vec{\jmath}$ par g est $-29\vec{\imath}-18\vec{\jmath}$.

3) Soit l'application $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\vec{u}(x;y) \longmapsto \vec{u}'(x';y') \text{ Telle que } \begin{cases} x'=2x-y \\ y'=-4x+2y \end{cases}$$

1. Déterminons et caractérisons l'ensemble

N = $\{\vec{u}(x\,;y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; f(\vec{u})=\overrightarrow{0_{\mathbb{R}^2}}\}$

On a : $f(\vec{u})=\overrightarrow{0_{\mathbb{R}^2}} \iff (x';y')=(0;0) \iff \begin{cases} 2x-y=0 \\ -4x+2y=0 \end{cases} \iff 2x-y=0$

On obtient l'équation d'une droite donc N est une droite vectorielle d'équation $2x-y=0$.

Caractérisation : $(x;y)=(x;2x)=x(1;2)$; Donc une base de N est : $\vec{e_1}=\vec{\imath}+2\,\vec{\jmath}$

2. Déterminons et caractérisons l'ensemble I = $\{\vec{u}'(x'\,;y')\in\mathbb{R}^2 \;/\; \exists\,\vec{u}(x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ \vec{u}'=f(\vec{u})\}$

On a : $\vec{u}'=f(\vec{u}) \iff (x';y')=(2x-y\,;\,-4x+2y) \iff \begin{cases} x'=2x-y \\ y'=-4x+2y \end{cases} \iff 2x'+y'=0$

On obtient l'équation d'une droite donc I est une droite vectorielle d'équation $2x'+y'=0$.

Caractérisation : $(x';y')=(x';-2x')=x'(1;-2)$; Donc une base de I est : $\vec{e_2}=\vec{\imath}-2\,\vec{\jmath}$

RESUME

1. APPLICATIONS LINEAIRES ENTRE DEUX ESPACES VECTORIELS

1.1. DEFINITIONS :

a) Définition d'un espace vectoriel

Un *espace vectoriel* est un ensemble sur lequel sont définies :

a) Une **addition interne** (on peut ajouter entre eux deux éléments de l'ensemble et cela donne un élément de l'ensemble)

b) Une **multiplication externe** (on peut multiplier un élément de l'ensemble par un nombre réel et cela donne un élément de l'ensemble).

b) Définition d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels réels.

Une application f de E vers F est une application linéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ de E ; f $(\vec{u}+\vec{v})$ = f $(\vec{u})$ + f $(\vec{v})$ (Stabilité pour l'addition (+))
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de E et tout réel λ ; f $(\lambda.\vec{u})$ = λ. f $(\vec{u})$ (stabilité pour la multiplication par un réel)

Définition équivalente,

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ de E, pout tous réels α et β, f$(\alpha.\vec{u}+\beta.\vec{v})$ = α.f$(\vec{u})$ + β.f$(\vec{v})$

NOTATION : L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté : $\mathcal{L}(E,F)$.

1.2. VOCABULAIRE

Soient E et F deux espaces vectoriels réels.

- Toute application linéaire de E dans ℝ est appelée **forme linéaire** de E ;
- Toute application linéaire de E dans E est appelée **endomorphisme** de E ;
- Toute application linéaire de E dans F est aussi appelée **morphisme** ou **homomorphisme** ;
- Toute application linéaire bijective de E dans F(morphisme bijectif) est un **isomorphisme** de E dans F
- Toute application linéaire bijective de E dans E (endomorphisme bijectif) est un **automorphisme** de E

EXEMPLE 1 :

a) L'application Id_E est une application linéaire.

b) L'application f définie de E dans E par :

$f(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) = (x - 2y)\vec{\imath} + (3x - 5y)\vec{\jmath}$ est une application linéaire. (preuve : Exercice)

2. EXPRESSION D'UNE APPLICATION LINEAIRE DANS UNE BASE

Soient E et F deux sous-espaces vectoriels réels de dimensions finies.

Une application linéaire f de E vers F est entièrement déterminée par la donnée des images des vecteurs d'une base E ; c'est-à-dire lorsqu'on connait les images par f des éléments d'une base de E, on dit que l'application f existe et est unique.

Par conséquent, on peut calculer les coordonnées de l'image d'un vecteur quelconque par f.

EXEMPLE 2.1 (voir exercice d'application)

3. NOYAU ET IMAGE D'UNE APPLICATION LINEAIRE

3.1 NOYAU D'UNE APPLICATION LINEAIRE

Définition :

Soient E et F deux espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F.

Le noyau de f noté Ker f ou N (f) est l'ensemble des vecteurs de E ayant pour image le vecteur nul de F.

Ker f = $\{\vec{u} \in E \ \ / \ f(\vec{u}) = \overrightarrow{0_F}\}$

3.2 IMAGE D'UNE APPLICATION LINEAIRE

Définition :

Soient E et F deux espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F.

L'image de f noté Im(f) ou f(E) est l'ensemble des vecteurs de F admettant chacun au moins un antécédent dans E ou encore l'ensemble des images respectives de tous les vecteurs de E par f.

Im (f) = $\{\ \vec{u}' \in F \ / \ \exists\, \vec{u} \ \in E, \overrightarrow{u}' = f(\vec{u})\}$

Remarque :

- Ker(f) est un sous-espace vectoriel de E ;

-Im (f) est un sous-espace vectoriel de F ;

-Si E est de dimension finie, alors dim Ker(f) + dim Im(f) = dim(E).

PROPRIETES :

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

P1) f est injective ⟺ Ker(f) = $\{\ \overrightarrow{0_F}\}$

P2) f est surjective ⟺ Im(f) = F

P3) Si f est injective, alors l'image d'une famille libre de E est une famille libre de F.

P4) Si f est surjective, alors l'image d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.

P5) Si f est une application linéaire de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F, et $dim(E) = dim\ (F)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est injective
- f est surjective
- f est bijective

EXERCICE D'APPLICATION

a) Soit l'application f définie de E dans E par : $f(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) = (x - 2y)\vec{\imath} + (3x - 5y)\vec{\jmath}$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Montrer f est un automorphisme de E.

b) Soit E un espace vectoriel réel, muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et g une application linéaire telle que :

$g(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}$ et $g(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}$

1. Déterminer les images de $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$ par g.
2. Déterminer les coordonnées de $\vec{\imath}$ *et* $\vec{\jmath}$ dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$.

c) Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On considère $f : E \longrightarrow E$

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \longmapsto f(\vec{u}) = (2x - y)\vec{\imath} + (4x - 2y)\vec{\jmath}$$

1. Déterminer les coordonnées de l'image de $\vec{w}(-1, 2)$ par f.
2. Déterminer Ker(f) et une base de Ker(f).
3. Déterminer Im(f) et une base de Im(f).

SOLUTION DE L'EXERCICE D'APPLICATION

1) Soit l'application f définie de E dans E par : $f(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) = (x - 2y)\vec{\imath} + (3x - 5y)\vec{\jmath}$

1. Montrons que f est une application linéaire.

Soient $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$; soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

- Cheminement 1 : Il suffit de montrer que la loi (+) est stable par f i.e. $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ et que la loi (.) stable en multipliant un vecteur quelconque par un réel c'est-à-dire $f(\lambda_1.\vec{u}) = \lambda_1.f(\vec{u})$.

∗ Stabilité pour l'addition (+)

On a: $f(\vec{u} + \vec{v}) = f((x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) + (x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath})) = f[(x + x')\vec{\imath} + (y + y')\vec{\jmath}]$

$$= [(x + x') - 2(y + y')]\,\vec{\imath} + [3(x + x') - 5(y + y')]\,\vec{\jmath}$$
$$= (x + x')\,\vec{\imath} - 2(y + y')\,\vec{\imath} + 3(x + x')\vec{\jmath} - 5(y + y')\,\vec{\jmath}$$
$$= [\,(x - 2y)\vec{\imath} + (3x - 5y)\vec{\jmath}\,] + [\,(x' - 2y')\vec{\imath} + (3x' - 5y')\vec{\jmath}\,]$$
$$= f(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) + f(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath})$$
$$= f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

∗ Stabilité pour la multiplication (.) par un réel

On a : $f(\lambda_1.\vec{u}) = f(\lambda_1.(\,x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}\,)) \;= f[(\lambda_1.x)\vec{\imath} + (\lambda_1.y)\vec{\jmath}]$

$$= [(\lambda_1.x) - 2(\lambda_1.y)]\,\vec{\imath} + [3(\lambda_1.x) - 5(\lambda_1.y)]\,\vec{\jmath}$$
$$= \lambda_1.[x - 2y]\,\vec{\imath} + \lambda_1.[3x - 5y]\,\vec{\jmath} = \lambda_1.[(x - 2y)\vec{\imath} + (3x - 5y)\vec{\jmath}\,] = \lambda_1.f(\vec{u}).$$

- Cheminement 2 : En utilisant la définition équivalente, il suffit de montrer que :

$f(\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v}) = \lambda_1 f(\vec{u}) + \lambda_2 f(\vec{v})$. On a :

$$f(\lambda_1.\vec{u} + \lambda_2.\vec{v}) = f(\lambda_1.(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) + \lambda_2.(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath})) = f(\lambda_1.x\vec{\imath} + \lambda_1.y\vec{\jmath} + \lambda_2.x'\vec{\imath} + \lambda_2.y'\vec{\jmath})$$
$$= f(\lambda_1.x\vec{\imath} + \lambda_1.y\vec{\jmath} + \lambda_2.x'\vec{\imath} + \lambda_2.y'\vec{\jmath}) = f[(\lambda_1.x + \lambda_2.x')\vec{\imath} + (\lambda_1.y + \lambda_2.y')\,\vec{\jmath}]$$
$$= ((\lambda_1.x + \lambda_2.x') - 2(\lambda_1.y + \lambda_2.y'))\vec{\imath} + (3(\lambda_1.x + \lambda_2.x') - 5(\lambda_1.y + \lambda_2.y'))\vec{\jmath}$$
$$= (\lambda_1.x + \lambda_2.x')\,\vec{\imath} - 2(\lambda_1.y + \lambda_2.y')\vec{\imath} + 3(\lambda_1.x + \lambda_2.x')\vec{\jmath} - 5(\lambda_1.y + \lambda_2.y')\,\vec{\jmath}$$
$$= (\lambda_1.x + \lambda_2.x')\,\vec{\imath} - 2(\lambda_1.y + \lambda_2.y')\vec{\imath} + 3(\lambda_1.x + \lambda_2.x')\vec{\jmath} - 5(\lambda_1.y + \lambda_2.y')\,\vec{\jmath}$$
$$= \lambda_1.(x - 2y)\vec{\imath} + \lambda_1.(3x - 5y)\vec{\jmath} + \lambda_2.(x' - 2y')\vec{\imath} + \lambda_2.(3x' - 5y')\vec{\jmath}$$
$$= \lambda_1.[(x - 2y)\vec{\imath} + (3x - 5y)\vec{\jmath}] + \lambda_2.[(x' - 2y')\vec{\imath} + (3x' - 5y')\vec{\jmath}\,]$$
$$= \lambda_1.[f(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})] + \lambda_2.[f(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath})\,] = \boldsymbol{\lambda_1 f(\vec{u}) + \lambda_2 f(\vec{v})}.$$

b) Montrons que f est un automorphisme de E.

Il suffit de montrer que f est un endomorphisme bijectif.

Or f est un endomorphisme si f est une application linéaire dont l'ensemble de départ est égal à l'ensemble d'arrivé.

D'après la question a) ci-dessus (f est une application linéaire), et par définition (f : E⟶E), f est un endomorphisme.

Il reste à montrer que f est **bijective**.

Soit $a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ un vecteur de E. Cherchons $(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) \in$ E tel que : $f(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$.

x et y vérifient $(x-2y)\vec{\imath}+(3x-5y)\vec{\jmath}=a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}$.
De l'unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base, on a :

(S) : $\begin{cases} x-2y=a \\ 3x-5y=b \end{cases}$ (qui est l'expression analytique de f)

Montrons que det (S) $\neq 0$

On a : det(S) = $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=-5-(-6)=1\neq 0$.

Donc (S) admet un unique couple solution, par suite un unique vecteur $(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath})$ de E. D'où **f est bijective**.

On conclut que **f est un automorphisme**.

2) Soit E un espace vectoriel réel, muni de la base $\mathcal{B}=(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et g une application linéaire telle que : $g(\vec{\imath})=2\vec{\imath}+\frac{1}{2}\vec{\jmath}$ et $g(\vec{\jmath})=\vec{\imath}+\frac{1}{2}\vec{\jmath}$

1. Déterminer les images de $\vec{u}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ et $\vec{v}=2\vec{\imath}-4\vec{\jmath}$ par g.

On a : $g(\vec{u})=g(\vec{\imath}-\vec{\jmath})=g(\vec{\imath})-g(\vec{\jmath})=2\vec{\imath}+\frac{1}{2}\vec{\jmath}-(\vec{\imath}+\frac{1}{2}\vec{\jmath})=2\vec{\imath}+\frac{1}{2}\vec{\jmath}-\vec{\imath}-\frac{1}{2}\vec{\jmath}=\vec{\imath}$

$g(\vec{v})=g(2\vec{\imath}-4\vec{\jmath})=g(2\vec{\imath})+g(-4\vec{\jmath})$ car g est linéaire.

$=2g(\vec{\imath})-4g(\vec{\jmath})=2\left(2\vec{\imath}+\frac{1}{2}\vec{\jmath}\right)-4(\vec{\imath}+\frac{1}{2}\vec{\jmath})=4\,\vec{\imath}+\vec{\jmath}-4\,\vec{\imath}-2\,\vec{\jmath}=-\vec{\jmath}$

Donc $g(\vec{u})=\vec{\imath}$ et $g(\vec{v})=-\vec{\jmath}$

Les coordonnées des images de $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ par g sont respectivement $\mathbf{(1,0)}$ ***et*** $\mathbf{(0,-1)}$.

2. Déterminons les coordonnées de $\vec{\imath}$ *et* $\vec{\jmath}$ dans la base $\mathcal{B}'=(\vec{u},\vec{v})$.

Il suffit d'exprimer $\vec{\imath}$ *et* $\vec{\jmath}$ en fonction de $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.

On a : $\vec{u}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ et $\vec{v}=2\vec{\imath}-4\vec{\jmath}$ i.e. $\vec{\imath}=\vec{u}+\vec{\jmath}$. En remplaçant $\vec{\imath}$ par son expression dans $\vec{v}$, on obtient :
$\vec{v}=2(\vec{u}+\vec{\jmath})-4\vec{\jmath}=2\vec{u}+2\vec{\jmath}-4\vec{\jmath}=2\vec{u}-2\vec{\jmath}$

Par suite, on a : $2\vec{\jmath}=2\vec{u}-\vec{v}$ donc $\vec{\jmath}=\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$. Or $\vec{\imath}=\vec{u}+\vec{\jmath}$ donc $\vec{\imath}=\vec{u}+\left(\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}\right)=2\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$

Donc $\vec{\imath}=2\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$ et $\vec{\jmath}=\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$.

3) Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B}=(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère

$$\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & E \\ & \vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath} & \longmapsto & f(\vec{u})=(2x-y)\vec{\imath}+(4x-2y)\vec{\jmath} \end{array}$$

1. Déterminons les coordonnées de l'image de $\vec{w}(-1,2)$ par f.

$\vec{w}(-1,2)=-\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$

$f(\vec{w})=(2(-1)-(2))\vec{\imath}+(4(-1)-2(2))\vec{\jmath}$

$f(\vec{w})=-4\,\vec{\imath}-8\,\vec{\jmath}$. Donc les coordonnées de l'image de $\vec{w}(-1,2)$ par f sont : $\boldsymbol{f(\vec{w})=(-4,-8)}$.

2. Déterminons Ker(f) et une base de Ker(f).

Par definition, Ker(f) = $\{\vec{u}(x\,;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ f(\vec{u})=\overrightarrow{0_{\mathbb{R}^2}}\}$

On a : $f(\vec{u})=\overrightarrow{0_{\mathbb{R}^2}}\Leftrightarrow(2x-y)\vec{\imath}+(4x-2y)\vec{\jmath}=0\,\vec{\imath}+0\,\vec{\jmath}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=0\\4x-2y=0\end{cases}\Leftrightarrow 2x-y=0$

On obtient l'équation d'une droite donc **N est une droite vectorielle** d'équation $\boldsymbol{2x-y=0}$.

Caractérisation : $(x;y)=(x;2x)=x(1;2)$; Donc **une base de N** est : $\boldsymbol{\vec{e_1}=\vec{\imath}+2\,\vec{\jmath}}$

3. Déterminons Im(f) et une base de Im(f).

I = $\{\vec{u}'(x'\,;y')\in\mathbb{R}^2\ /\ \exists\ \vec{u}(x\,;y)\in\mathbb{R}^2,\ \vec{u}'=f(\vec{u})\}$

On a : $\vec{u}'=f(\vec{u})\Leftrightarrow(x';y')=(2x-y\,;\ 4x-2y)\Leftrightarrow\begin{cases}x'=2x-y\\y'=4x-2y\end{cases}\Leftrightarrow -2x'+y'=0$

On obtient l'équation d'une droite donc **I est une droite vectorielle** d'équation $\boldsymbol{-2x'+y'=0}$.

Caractérisation : $(x';y')=(x';2x')=x'(1;2)$; Donc **une base de I** est : $\boldsymbol{\vec{e_2}=\vec{\imath}-2\,\vec{\jmath}}$

LECON 2	MATRICES ET APPLICATIONS LINEAIRES D'UN PLAN VECTORIEL DANS LUI-MÊME (Durée : 100 min)

MOTIVATION :

∗ Traitement des tableaux lors de l'analyse des données en statistique ;

∗ Résolution des systèmes linéaires à plusieurs inconnues ;

∗ Optimisation d'une fonction sous certaines contraintes en économie.

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

∗ Traduire la présentation des données par une matrice ;

∗ Calculer la somme de deux matrices, le produit d'une matrice par un réel, le produit de deux matrices (on pourra ici faire le lien avec les systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^2$);

∗ Calculer le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 ;

∗ Montrer qu'une matrice carrée d'ordre 2 est inversible ;

∗ Déterminer l'inverse d'une matrice carrée inversible ;

∗ Résoudre d'autres problèmes tels que les systèmes de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

∗ Ecrire la matrice d'une application linéaire dans une base donnée ;

∗ Calculer les coordonnées de l'image d'un vecteur en utilisant un produit de deux matrices ;

∗ Déterminer la matrice : de la somme de deux applications linéaires ; du produit d'une application linéaire par un réel ; de la composée de deux applications linéaires ;

∗ Donner la matrice de l'automorphisme réciproque d'un automorphisme du plan.

PRE – REQUIS :

Soit f une application linéaire définie dans un plan vectoriel E.
On pose $\vec{e} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et $\vec{e}\,' = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

1. Calculer le déterminant de $\vec{e}$ et $\vec{e}\,'$ $(det(\vec{e};\vec{e}\,'))$
2. Déterminer $f(\vec{e})$ et $f(\vec{e}\,')$ tel que $f(\vec{\imath}) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

SOLUTION DES PRE-REQUIS :

Soit f une application linéaire définie dans un plan vectoriel E.
On pose $\vec{e} = \vec{\imath} + 7\vec{\jmath}$ et $\vec{e}\,' = -11\,\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

1. Calculons $\det(\vec{e}\,;\vec{e}\,')$

On a : $\det(\vec{e}\,;\vec{e}\,') = \begin{vmatrix} 1 & -11 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - (-11) \times 7 = 1 + 77 = \mathbf{78}$

2. Déterminons $f(\vec{e})$ et $f(\vec{e}\,')$ tel que $f(\vec{\imath}) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

$f(\vec{e}) = f(\vec{\imath} + 7\vec{\jmath}) = f(\vec{\imath}) + 7f(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 7(\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = \mathbf{8\,\vec{\imath} + 9\,\vec{\jmath}}$

$f(\vec{e}\,') = f(-11\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = -11f(\vec{\imath}) + f(\vec{\jmath}) = -11(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}) + \vec{\imath} + \vec{\jmath} = \mathbf{-10\,\vec{\imath} - 21\,\vec{\jmath}}$

SITUATION PROBLEME :

Mbongue élève en classe de Terminale TI aimerait trouver une méthode de calcul des masses à l'unité de deux gâteaux A et B. Pour la confection de ces gâteaux, on utilise deux ingrédients X et Y. Le prémier gâteau A utilise pour sa confection 12 grammes de X et 32 grammes de Y ; tandis que Le deuxième gâteau B utilise pour sa confection 23 grammes de X et 5 grammes de Y. Comment trouver une sorte de produit, proche du produit scalaire tel que les quatre données (masse des ingrédients) puissent être simultanément appliquées si nous avons 50 gâteaux de type A et 60 de gâteaux de type B afin de déterminer les quantités en grammes de X et Y ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

On considère les tableaux suivants : $M=\begin{bmatrix}12 & 23\\35 & 5\end{bmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ et $M''=\begin{pmatrix}50\\60\end{pmatrix}$

1) Pose l'opération $M\times M'$

2) Recopie le tableau suivant $M\times M'=\begin{pmatrix}\dots+\dots\\\dots+\dots\end{pmatrix}$

a) Complète les pointillés de la première ligne de $M\times M'$ en multipliant le premier élément de la première ligne de M par l'élément de la première ligne de M' additionné à ce résultat celui de la multiplication du deuxième élément de la première ligne de M par l'élément de la deuxième ligne de M'.

b) Complète les pointillés de la deuxième ligne de $M\times M'$ en multipliant le premier élément de la deuxième ligne de M par l'élément de la première ligne de M' additionné à ce résultat celui de la multiplication du deuxième élément de la deuxième ligne de M par l'élément de la deuxième ligne de M'.

3) Egalise les tableaux $M\times M'\ et\ M''$ et écrire le système qui en découle de cette égalité.

4) Déterminer les valeurs de $X\ et\ Y$ correspondantes aux masses respectives des gâteaux $A\ et\ B$.

SOLUTION DE L'ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

On considère les tableaux suivants : $M=\begin{bmatrix}12 & 23\\35 & 5\end{bmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ et $M''=\begin{pmatrix}50\\60\end{pmatrix}$

1) Posons l'opération $\boldsymbol{M\times M'}$

Il suffit de remplacer $M\ et\ M'$ par leur valeur, on a : $\boldsymbol{M\times M'}=\begin{bmatrix}12 & 23\\35 & 5\end{bmatrix}\times\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$

2. a) Complétons les pointillés de la première et la deuxième ligne de $\boldsymbol{M\times M'}$

On a : $\boldsymbol{M\times M'}=\begin{pmatrix}12X + 23Y\\32X+5Y\end{pmatrix}$

b) Egalisons les tableaux $\boldsymbol{M\times M'\ et\ M''}$ et écrivons le système qui en découle de cette égalité

$$M\times M'=M'' \Leftrightarrow \begin{pmatrix}12X + 23Y\\32X+5Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50\\60\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}12X + 23Y = 50\\32X+5Y = 60\end{cases}$$

c) Déterminer les valeurs de $\boldsymbol{X\ et\ Y}$ correspondantes aux masses respectives des gâteaux $\boldsymbol{A\ et\ B}$.

Il suffit de résoudre le système : $\begin{cases}12X + 23Y = 50\\32X+5Y = 60\end{cases}$. En utilisant l'une des méthodes vues dans les classes antérieures, on obtient les différentes valeurs de X et Y

RESUME

2.1. MATRICES : PRESENTATION ET EXEMPLE

Présentation :

Soit E un plan vectoriel de base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. Soit f un endomorphisme de E tel $f(\vec{\imath}) = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = c\vec{\imath} + d\vec{\jmath}$ avec $a, b, c\ et\ d$ des nombres réels.

On appelle ***matrice*** de f dans la base $\mathcal{B}$ le tableau noté $\mathcal{M}_{(f,\mathcal{B})}$ ou bien $\mathcal{M}_f$ tel que $\mathcal{M}_f = \begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}$

1. On dit que $(a \quad c)$ est la première ligne et $(b \quad d)$ la deuxième ligne de la matrice $\mathcal{M}_f$.
2. On dit que $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est la première colonne et $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ la deuxième colonne de la matrice $\mathcal{M}_f$.

Le tableau $\begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}$ comporte donc deux lignes et deux colonnes.

1. ***Une matrice est dite carrée*** si elle comporte autant de lignes que de colonnes ; Dans ce cas, le nombre de lignes est appelé ordre de la matrice.

Remarques :

(1) L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
(2) Toute matrice est entièrement déterminée par la donnée des images des vecteurs de base disposés en colonnes.

EXEMPLE : Soit f et h deux endomorphismes d'un plan vectoriel E de base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$

2. Si $f(\vec{\imath}) = -5\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$ alors la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$ est :
$\mathcal{M}_{(f,B)} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

3. *Si* $\mathcal{M}_{(h,B)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *alors* $h(\vec{\imath}) = 4\vec{\imath}$ *et* $h(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$

2.2. OPERATIONS SUR LES MATRICES

Soient $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ deux matrices et $k \in \mathbb{R}$.

a) SOMME DE DEUX MATRICES

La somme des matrices A et B est la matrice notée $A + B$ et définie par : $\boldsymbol{A + B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a + a'} & \boldsymbol{c + c'} \\ \boldsymbol{b + b'} & \boldsymbol{d + d'} \end{pmatrix}$

<u>NB</u> : La somme de deux matrices est possible si elles ont le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes.

b) PRODUIT D'UNE MATRICE PAR UN REEL

Le produit de la matrice A par le nombre réel k est la matrice notée kA définie par $\boldsymbol{kA} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{ka} & \boldsymbol{kc} \\ \boldsymbol{kb} & \boldsymbol{kd} \end{pmatrix}$

c) PRODUIT DE DEUX MATRICES

Le produit de la matrice B par la matrice A, est la matrice notée $A \times B$ et définie par
$\boldsymbol{A \times B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{aa' + cb'} & \boldsymbol{ac' + cd'} \\ \boldsymbol{ba' + db'} & \boldsymbol{bc' + dd'} \end{pmatrix}$

PRINCIPE : $\begin{pmatrix} 1^{ère}\ ligne\ 1^{ère}\ colonne : aa' + cb' & 1^{ère}\ ligne\ 2^{ème}\ colonne : ac' + cd' \\ 2^{ème}\ ligne\ 1^{ère}\ colonne : ba' + db' & 2^{ème}\ ligne\ 2^{ème}\ colonne : bc' + dd' \end{pmatrix}$

REMARQUE : Le produit de deux matrices est possible si le nombre de lignes de la première matrice est égal au nombre de colonnes de la deuxième.

MATRICE ET SYSTEME LINEAIRE D'EQUATIONS

Soit le système linéaire suivant : $(S) : \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est une matrice ayant deux lignes et une colonne. En considérant la multiplication de deux matrices, on a : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$

Ainsi, $(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ ou encore $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

Si $\boldsymbol{A}$ est inversible, alors $(S) \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow I_2X = A^{-1}B$
$\Leftrightarrow X = A^{-1}B$ car $I_2X = X$. On a donc $\boldsymbol{X = A^{-1}B}$

d) DETERMINANT D'UNE MATRICE CARREE D'ORDRE DEUX

Le déterminant de la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est le nombre réel noté, $\det(A)$ et défini par :
$\det(A) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

e) INVERSION ET INVERSE D'UNE MATRICE CARREE D'ORDRE DEUX.

Définition :

On dit qu'une matrice A carrée d'ordre 2 est inversible lorsqu'il existe une autre matrice B telle que :
$\boldsymbol{A \times B = B \times A = I_2}$ Avec $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La *matrice B* est appelée *inverse de A* et est notée A^{-1}.

On peut alors écrire $\boldsymbol{A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_2}$.

Propriété : Une matrice carré $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ d'ordre deux est *inversible* si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et l'inverse A^{-1} de A est défini par : $\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\det(A)}\begin{pmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{-c} \\ \boldsymbol{-b} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$.

2.3. MATRICE D'UNE APPLICATION LINEAIRE DANS UNE BASE DONNEE

a) ECRITURE DE LA MATRICE D'UNE APPLICATION LINEAIRE DANS UNE BASE DONNEE

Soit E un plan vectoriel de base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. On donne $\vec{e_1}(2;-1)$ et $\vec{e_2}(3;-1)$ deux vecteurs de E et $\mathcal{M}_{(f,\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec f une application linéaire.

1. Vérifions que $\mathcal{B}' = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$ est une base de E.

On a : $\det(\vec{e_1}\,;\vec{e_2}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - (-1) \times 3 = -2 + 3 = 1 \neq 0.$

Donc $(\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$ est une base.

2. Déterminons la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$

Il suffit d'écrire $f(\vec{e_1})$ et $f(\vec{e_2})$ en fonction de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$.

Dans la base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. $\quad \vec{e_1}(2\,;-1) \Rightarrow \quad \vec{e_1} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} \quad (*)$

$et \quad \vec{e_2}(3;-1) \Rightarrow \vec{e_2} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} \quad (**)$

On a (S) : $\begin{cases} f(\vec{e_1}) = f(2\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = 2f(\vec{\imath}) - f(\vec{\jmath}) \\ f(\vec{e_2}) = f(3\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = 3f(\vec{\imath}) - f(\vec{\jmath}) \end{cases}$ car f est une application linéaire

Déterminons $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$

On sait que $\mathcal{M}_{(f,\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $f(\vec{\imath}) = \vec{\imath} \quad et \quad f(\vec{\jmath}) = -2\,\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

Par suite, on a : $\begin{cases} f(\vec{e_1}) = 2f(\vec{\imath}) - f(\vec{\jmath}) = 2\vec{\imath} + 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} = 4\,\vec{\imath} - \vec{\jmath} \\ f(\vec{e_2}) = 3f(\vec{\imath}) - f(\vec{\jmath}) = 3\vec{\imath} + 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} = 5\,\vec{\imath} - \vec{\jmath} \end{cases}$

Donc on obtient le système (S3) : $\begin{cases} f(\vec{e_1}) = 4\,\vec{\imath} - \vec{\jmath} \\ f(\vec{e_2}) = 5\,\vec{\imath} - \vec{\jmath} \end{cases}$

Ecrivons $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ en fonction de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$

$(*)$ et $(**)$ donnent le système suivant : $\begin{cases} \vec{e_1} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} \\ \vec{e_2} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} \end{cases}$

Par combinaison, $\vec{\imath} = -\vec{e_1} + \vec{e_2}$; or $\vec{\jmath} = 2\vec{\imath} - \vec{e_1} = 2(-\vec{e_1} + \vec{e_2}) - \vec{e_1} = -3\,\vec{e_1} + 2\,\vec{e_2}$

On obtient donc $\begin{cases} \vec{\imath} = -\vec{e_1} + \vec{e_2} \\ \vec{\jmath} = -3\,\vec{e_1} + 2\vec{e_2} \end{cases}$

En remplaçant $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ par leurs valeurs dans (S3), on obtient :

$\begin{cases} f(\vec{e_1}) = 4(-\vec{e_1} + \vec{e_2}) - (-3\,\vec{e_1} + 2\vec{e_2}) \\ f(\vec{e_2}) = 5(-\vec{e_1} + \vec{e_2}) - (-3\,\vec{e_1} + 2\vec{e_2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\vec{e_1}) = -\vec{e_1} + 2\vec{e_2} \\ f(\vec{e_2}) = -2\,\vec{e_1} + 3\vec{e_2} \end{cases}$

Donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$ est : $\mathcal{M}_{(f,\mathcal{B}')} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) MATRICE ET COORDONNEES DE L'IMAGE D'UN VECTEUR PAR UNE APPLICATION LINEAIRE

Soit E un plan vectoriel de base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. Soit f un endomorphisme de E tel que : $\begin{cases} f(\vec{\imath}) = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} \\ f(\vec{\jmath}) = c\vec{\imath} + d\vec{\jmath} \end{cases}$

Soit $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \in E$ et $\vec{u}' = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} \in E$ son image par f

C'est-à-dire $\vec{u}' = f(\vec{u})$

On a : $\vec{u}' = f(\vec{u}) \quad \Rightarrow \begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases}$ (Expression analytique de f).

On écrit encore $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

c) MATRICE D'UNE SOMME DE DEUX APPLICATIONS LINEAIRES

Soit E un plan vectoriel de base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. Soient f et g deux endomorphismes de E tel que $\mathcal{M}_f = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $\mathcal{M}_g = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$.

La matrice de la somme de f et g est notée $\mathcal{M}_{f+g}$ et définie par : $\boldsymbol{\mathcal{M}_{f+g} = \mathcal{M}_f + \mathcal{M}_g}$

d) MATRICE DE LA COMPOSEE DE DEUX APPLICATIONS LINEAIRES

Soit E un espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. Soient f et g deux endomorphismes de E tel que $\mathcal{M}_f = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $\mathcal{M}_g = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$. La matrice de la composée $g \circ f$ des endomorphismes f et g est notée $\mathcal{M}_{g\circ f}$ et définie par $\boldsymbol{\mathcal{M}_{g\circ f} = \mathcal{M}_g \times \mathcal{M}_f}$

2.4. MATRICE DE LA RECIPROQUE D'UN AUTOMORPHISME

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension 2.

f est un automorphisme si et seulement si elle est bijective.

f est bijective $\Leftrightarrow$ il existe une application linéaire g telle que : $g \circ f = f \circ g = id_E$

$\Leftrightarrow$ $g = f^{-1}$

Par suite, $g \circ f = id_E \implies \mathcal{M}_{g\circ f} = \mathcal{M}_{id_E} \implies \mathcal{M}_g \times \mathcal{M}_f = I_2$

$\implies \mathcal{M}_f$ est inversible et $(\mathcal{M}_f)^{-1} = \mathcal{M}_g = \mathcal{M}_{f^{-1}}$.

Propriété :

Soit E un espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. Soit $\mathcal{M}_f = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice d'une application linéaire f. L'application linéaire f est un automorphisme $\Leftrightarrow$ $\det(\mathcal{M}_f) \neq 0$

La matrice réciproque est définie par : $\mathcal{M}_{f^{-1}} = \frac{1}{\det(\mathcal{M}_f)}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

EXERCICE D'APPLICATION

Soient f et g deux endomorphismes d'un plan vectoriel d'un plan vectoriel E de base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

On pose $f(\vec{\imath}) = -2\,\vec{\imath} + \vec{\jmath}$; $f(\vec{\jmath}) = 3\,\vec{\imath} - 4\,\vec{\jmath}$ et $M_g = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Ecrire la matrice M_f de f.
2. Effectuer les opérations suivantes : $-5 \times M_g$, $4Id_E - 2M_f$ et $M_f \times M_g$.
3. Calculer les matrices de la somme $f + g$ et de la composée $f \circ g$
4. Déterminer les matrices inverses M_f^{-1} de f et M_g^{-1} de g.
5. On considère le vecteur $\overrightarrow{e_1}(-1;-2)$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

Calculer les coordonnées de l'image de $\overrightarrow{e_1}$ par g.

6. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ par la méthode de substitution puis en utilisant les matrices le système suivant : $(S)\!:\begin{cases} 5x - 8y = 8 \\ -2x + 3y = 3 \end{cases}$
7. a) Montrer que f est un automorphisme de E.

   b) Déduire la matrice réciproque de l'automorphisme f.

SOLUTION DE L'EXERCICE D'APPLICATION

Soient f et g deux endomorphismes d'un plan vectoriel d'un plan vectoriel E de base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

On pose $f(\vec{\imath}) = -2\,\vec{\imath} + \vec{\jmath}$; $f(\vec{\jmath}) = 3\,\vec{\imath} - 4\,\vec{\jmath}$ et $M_g = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Ecrivons la matrice M_f de f

Il suffit de disposer les images des vecteurs de base suivant les colonnes, c'est-à-dire disposer $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ en colonnes. On a : $M_f = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

2. Effectuons les opérations suivantes : $-5 \times M_g$, $4I_2 - 2M_f$ et $M_f \times M_g$.

1. $-5 \times M_g = -5\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-5)\times 2 & (-5)\times 7 \\ (-5)\times(-5) & (-5)\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -35 \\ 25 & -5 \end{bmatrix}$

2. $4I_2 - 2M_f = 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (-2)\times(-2) & (-2)\times 3 \\ (-2)\times 1 & (-2)\times(-4) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+4 & 0-6 \\ 0-2 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -2 & 12 \end{bmatrix}$$

3. $M_f \times M_g = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (-2)\times(2)+(3)\times(-5) & (-2)\times(7)+(3)\times(1) \\ (1)\times(2)+(-4)\times(-5) & (1)\times(7)+(-4)\times(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4-15 & -14+3 \\ 2+20 & 7-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & -11 \\ 22 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Calculons les matrices de la somme $f+g$ et de la composée $f \circ g$.

On a :

5. $M_{f+g} = M_f + M_g = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+2 & 3+7 \\ 1-5 & -4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$

6. $M_{f\circ g} = M_f \times M_g$ or d'après la question 2., $M_f \times M_g = \begin{bmatrix} -19 & -11 \\ 22 & 3 \end{bmatrix}$

Donc $M_{f\circ g} = \begin{bmatrix} -19 & -11 \\ 22 & 3 \end{bmatrix}$

7. Déterminer les matrices inverses M_f^{-1} de f et M_g^{-1} de g.

1. $M_f^{-1} = \frac{1}{\det(M_f)}\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ or $\det(M_f) = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = (-2)(-4) - (1)\times(3) = 8 - 3 = 5$

On obtient $\det(M_f) = 5 \neq 0$ et par suite, on a :

$$M_f^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\times(-4) & \frac{1}{5}\times(-3) \\ \frac{1}{5}\times(-1) & \frac{1}{5}\times(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix}$$

2. $M_g^{-1} = \frac{1}{\det(M_g)}\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ or $\det(M_g) = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = (2)\times(1) - (-5)\times(7) = 2 + 35 = 37$

On obtient $\det(M_g) = 37 \neq 0$ et par suite, on a :

$$M_g^{-1} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{37}\times 1 & \frac{1}{37}\times(-7) \\ \frac{1}{37}\times 5 & \frac{1}{37}\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{37} & \frac{-7}{37} \\ \frac{5}{37} & \frac{2}{37} \end{pmatrix}$$

8. On considère le vecteur $\vec{e_1}(-1;-2)$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

Calculons les coordonnées de l'image de $\vec{e_1}$ par g.

Première méthode : (Utilisation des images des vecteurs)

Calculons $g(\vec{e_1})$; dans la base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, $\vec{e_1} = -\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$

On a : $g(\vec{e_1}) = g(-\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}) = -g(\vec{\imath}) - 2g(\vec{\jmath})$ car g est une application linéaire.

Or $g(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$ *et* $g(\vec{\jmath}) = 7\vec{\imath} + \vec{\jmath}$. Car $M_g = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

Par suite, on a : $g(\vec{e_1}) = -g(\vec{\imath}) - 2g(\vec{\jmath}) = -(2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}) - 2(7\vec{\imath} + \vec{\jmath})$

$= -16\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ donc $g(\vec{e_1}) = -16\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$

Deuxième méthode : (Multiplication des matrices – expression analytique)

Soit $\vec{u}' = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$. Posons $X' = g(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $X = \vec{e_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $M_g = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

On a : $X' = M_g \times X \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times(-1) + 7\times(-2) \\ (-5)\times(-1) + 1\times(-2) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -2-14 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On a : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 3 \end{pmatrix}$ Donc $g(\overrightarrow{e_1}) = -16\,\vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath}$

9. a) Montrer que f est un automorphisme de E.

Par définition f est un endomorphisme. Il reste donc à montrer que f est bijective.

Pour cela, montrons que $\det(M_f) \neq 0$; or $\det(M_f) = 5 \neq 0$ donc f est un automorphisme.

b) Déduire la matrice réciproque de l'automorphisme f.

f est un automorphisme donc f est bijective par conséquent admet une bijection réciproque f^{-1} dont la matrice est définie par : $\mathcal{M}_{f^{-1}}$

On sait que $(\mathcal{M}_f)^{-1} = \mathcal{M}_{f^{-1}}$ or $(\mathcal{M}_f)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix}$ donc $\mathcal{M}_{f^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix}$

10. Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ par la méthode de combinaison puis en utilisant les matrices le système suivant :

$(S) : \begin{cases} 5x - 8y = 8 \\ -2x + 3y = 3 \end{cases}$

3. Par la méthode de combinaison

En éliminant x, on a : $y = -31$ Or $5x - 8y = 8 \Longrightarrow 5x - 8(-31) = 8 \Longrightarrow 5x = 8(-31) + 8$

Ce qui implique : $5x = -240 \Longrightarrow x = -\frac{240}{5} = -48.$ Donc $S_{\mathbb{R}^2} = \{(-48; -31)\}$

4. Par l'utilisation des matrices (S) : $\begin{cases} 5x - 8y = 8 \\ -2x + 3y = 3 \end{cases}$

Posons $= \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

On a : $X = A^{-1}B$ or $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ et $\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 16 = -1$

$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -8 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$. Par suite, on a :

$X = A^{-1}B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -8 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3) \times 8 - (8) \times 3 \\ (-2) \times 8 + 3 \times (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 - 24 \\ -16 - 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 \\ -31 \end{pmatrix}$

On obtient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 \\ -31 \end{pmatrix}$ donc $x = -48$ et $y = -31$

L'ensemble solution du système (S) est : $S_{\mathbb{R}^2} = \{(-48; -31)\}$

SITUATION PROBNLEME (À ajouter à la page 82) :

Un boutiquier souhaite programmer une correspondance entre le prix d'un paquet de fruits constitué uniformément de trois mangues et de trois bananes connaissant que les prix fixes des différents fruits constituant un paquet sont distincts ou non et que ces prix sont fixés en fonction des saisons.

Conseiller une formule au boutiquier en lui montrant que la dite formule définissant la correspondance prix unitaire banane, prix unitaire mangue et prix d'un paquet de fruits est tel qu'en doublant, triplant ou en multipliant par un entier le nombre de fruits de chaque type présent dans un paquet de fruit, le prix d'un paquet suit la même tendance (c'est-à-dire soit aussi multiplié par le même nombre entier).

NB : Cette situation problème reste à reformuler et à murir par le lecteur !

CHAPITRE IX : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Durée : 200 minutes

INTERET :

Résolution explicite et complète des modèles mathématiques de processus d'évolution physiques et biologiques.

MOTIVATION :

De nombreux problèmes de la vie font appels aux équations différentielles et dans plusieurs domaines. Notamment en physique à l'exemple du problème de l'étude de mouvements de corps « élastiques » (tiges, ressorts, cordes vibrantes), en biologie à l'exemple de la croissance d'une population et la décroissance radioactive.

Leçon 1 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU PREMIER ORDRE - Durée: 100 minutes

PRE-REQUIS :

1. Calculer la dérivée des fonctions continues
2. Déterminer la primitive d'une fonction vérifiant une condition initiale
3. Etudier les fonctions exponentielle et logarithme népérienne.

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

1. Reconnaître une équation différentielle du premier ordre.
2. Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle du premier ordre.
3. Résoudre une équation différentielle du premier ordre.

SITUATION PROBLEME : Croissance d'une population

Un professeur d'Histoire-Géographie a donné l'exercice suivant à ses élèves de Terminale TI.

« En l'an 2005, la population du Cameroun était environ 18 millions d'habitants. Cette population était d'environ 19,9 millions d'habitants en 2010. On désigne par $P(t)$ le nombre d'habitants du Cameroun en l'an t. Des études ont montré que la vitesse d'accroissement $P'(t)$ de cette population, où P' désigne la dérivée de la fonction, est proportionnelle à $P(t)$. En vue de faire des prévisions d'investissements, il vous est demandé de déterminer en quelle année la population du Cameroun sera de 30 millions d'habitants ».

Activité d'apprentissage :

Ne sachant comment faire, ces élèves de terminale TI s'adressent à leur professeur de mathématique qui leur donne les indications.

Il s'agit de :

1. Justifier que : $P'(t) = aP(t),\ k \in \mathbb{R}$, puis que $\frac{P\prime(t)}{P(t)} = a$, $P(t) \neq 0$.
2. En intégrant la deuxième égalité, déterminer $P(t)$.
3. Déduire alors a, puis répondre à votre professeur d'Histoire-Géographie.

Solution :

1. La vitesse d'accroissement de la population $P(t)$ est encore le taux d'accroissement de cette fonction donnée par $T = \frac{P(t+h)-P(t)}{h}$. T étant proportionnel à $P(t)$, alors
$T = aP(t), a \in \mathbb{R}$. Ainsi $\lim\limits_{h\to 0} T = \lim\limits_{h\to 0} aP(t)$ c'est-à-dire $P'(t) = ap(t)$. En divisant membre à membre cette dernière égalité par $P(t)$, on obtient $\frac{P\prime(t)}{P(t)} = a$.

2. Déterminons $P(t)$

Puisque $\frac{P\prime(t)}{P(t)} = a$, alors en intégrant membre à membre on a :$\ln|P(t)| = at + c, c \in \mathbb{R}$

Ainsi $P(t) = e^{at+c} = e^{at}e^{c}$. C'est-à-dire $P(t) = ke^{at}, k \in \mathbb{R}$.

3. Déduisons-en a

Puisque $P(t) = ke^{at}$, alors $\begin{cases} ke^{2005a} = 18\,000\,000 \\ ke^{2010a} = 19\,900\,000 \end{cases}$. D'où $\frac{ke^{2010a}}{ke^{2005a}} = \frac{19\,900\,000}{18\,000\,000}$, c'est-à-dire $e^{5a} = \frac{199}{180}$.

Donc $5a = \ln\frac{199}{180}$, soit $a = 0{,}02$.

Réponse à la demande du professeur d'histoire-géographie :

Comme $ke^{2005a} = 18\,000\,000$ et $a = 0{,}02$, alors $k = 18\,000\,000e^{-2005\times 0{,}02}$ et $P(t) = 18\,000\,000e^{0{,}02(t-2005)}$. Ainsi, $30\,000\,000 = 18\,000\,000e^{0{,}02(t-2005)}$. D'où : $0{,}02(t-2005) = \ln\frac{30}{18}$. C'est-à-dire $t - 2005 \cong 26$. Et par la suite $t = 2031$.

C'est donc en 2031 que la population du Cameroun sera de 30 millions d'habitants.

Résumé :

1.1. *Définitions et vocabulaires*

1. Une équation différentielle est une équation liant une fonction inconnue (généralement notée y ou z ou autres lettres), sa variable x et ses dérivées successives y', y'' ...
2. L'ordre d'une équation différentielle est le plus grand ordre de la dérivée intervenant dans cette équation.
3. Les coefficients d'une équation différentielle sont ceux de la fonction et de ses dérivées successives contenus dans cette équation. Lorsqu'un coefficient d'une équation différentielle est indépendant de la variable on dit qu'il est constant.
4. Une équation différentielle dont le second membre est non nul est appelée équation non-homogène (équation avec second membre) et lorsque le second membre est nul on l'appelle équation homogène (ou sans second membre) associée.

Exemple :

L'équation différentielle $y' - 4y = 7$ est une équation différentielle non-homogène, d'ordre 1, à coefficients constants et l'équation $y' - 4y = 0$ est son équation homogène associée.

1.2. *Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1*

a) *Forme générale*

Toute équation différentielle de la forme $ay' + by = 0$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants et sans second membre, avec $a \in \mathbb{R}^* et\ b \in \mathbb{R}$.

b) *Résolution*

Il s'agit de déterminer la fonction inconnue y.

1. La fonction nulle est solution
2. Si $y \neq 0$, alors on a : $ay' + by = 0 \Leftrightarrow \frac{y\prime}{y} = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow \int \frac{y\prime}{y}dx = \int -\frac{b}{a}dx$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = -\frac{b}{a}x + c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{-\frac{b}{a}x+c} = e^{-\frac{b}{a}x}e^{c} \Leftrightarrow y = \pm e^{c}e^{-\frac{b}{a}x}$$

En posant $k = \pm e^{c}$, les solutions sont donc : $y = ke^{-\frac{b}{a}x},\ k \in \mathbb{R}$.

Exemple :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' - \frac{1}{4}y = 0 \quad (E)$; $b)\ 3y' + 2y = 0 \quad (E')$ et c) $y\ln 5 - y' = 0 \ (E'')$

Solution :

1. La forme générale de (E) est $ay' + by = 0$ avec $a = 1\ et\ b = -\frac{1}{4}$. La solutions de (E) sont : est de la forme $y = ke^{-\frac{b}{a}x}$ c'est à dire $y = ke^{\frac{1}{4}x}$, $k \in \mathbb{R}$.
2. La forme générale de (E') est $ay' + by = 0$ avec $a = 3\ et\ b = 2$. Les solutions de (E') sont : est de la forme $y = ke^{-\frac{b}{a}x}$ c'est à dire $y = ke^{-\frac{2}{3}x}$, $k \in \mathbb{R}$.
3. La forme générale de (E'') est $ay' + by = 0$ avec $a = -1\ et\ b = \ln 5$. Les solutions de (E) sont : est de la forme $y = ke^{-\frac{b}{a}x}$ c'est à dire $y = ke^{x\ln 5}$, $k \in \mathbb{R}$.

Remarque :

La constante k peut-être déterminée lorsqu'une condition initiale est donnée. Par exemple $y(0) = 1$.

Exercice à faire à la maison :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = x^2 + e^{-2x}$ avec la condition initiale $y(0) = 4$
2. $y' + y = 0$ avec la condition $y(0) = 1$
3. $y' = y\ln 2$
4. $-3y' + \frac{4}{5}y = 0$

Leçon 2 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU SECOND ORDRE - Durée: 100 minutes

PRE-REQUIS :

1. Résoudre une équation du second degré dans l'ensemble des nombres complexes
2. Déterminer les dérivées successives d'une fonction infiniment dérivable

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES

1. Reconnaitre une équation différentielle d'ordre 2
2. Résoudre une équation différentielle d'ordre 2
3. Déterminer les solutions d'une équation différentielle d'ordre 2 non-homogène.

SITUATION PROBLEME : Mouvement d'un parachutiste

Un parachutiste effectue une chute libre dans l'air. On considère que l'ensemble parachute-parachutiste est un corps de masse m. Le mouvement du vent dans cette chute est équivalent à une force de frottements proportionnelle à la vitesse du corps. Si $z(t)$ désigne l'altitude du centre d'inertie du corps à l'instant t, montrer que la fonction z vérifie alors l'équation différentielle $z'' = g - \frac{k}{m}z'$. Puis la résoudre (on supposera que à l'instant $t = 0$, la vitesse est nulle et l'altitude est $z(0) = h$).

Activité d'apprentissage :

Le principe fondamental de la dynamique de Newton dit que le centre d'inertie d'un corps de masse m subit une accélération $\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F_e}$ où $\vec{F_e}$ est la somme des forces extérieures exercées sur le corps.

On choisit un axe vertical repéré par le vecteur $\vec{j}$ orienté vers le bas et d'origine 0 d'altitude zéro. Ainsi le champs de pesanteur $\vec{g} = g\vec{j}$ et le vecteur accélération $\vec{a} = a(t)\vec{j}$.

1. Si $z(t)$ désigne l'altitude du centre d'inertie du corps à l'instant t, exprimer $a(t)$ en fonction de $z(t)$.
2. Montrer que la vitesse $v(t)$ du corps à l'instant t vérifie l'équation différentielle $z' + \frac{k}{m}z = g$, puis déterminer $v(t)$ sachant que la vitesse initiale est nulle.

3. Déduire de la question n°2 que l'altitude $z(t)$ du centre d'inertie du corps vérifie l'équation différentielle $z'' + \frac{k}{m}z' = g$. Puis la résoudre.

Solution :

1. L'accélération instantanée $a(t)$ est par définition la dérivée seconde de la distance instantanée $z(t)$. C'est-à-dire $a(t) = z''(t)$.

La force de frottements $\vec{f}$ étant proportionnelle à la vitesse $\vec{v}$, on a : $\vec{f} = -k\vec{v}$ où k est la constante de proportionnalité.

La relation fondamentale de la dynamique devient : $\vec{a} = \frac{1}{m}(m\vec{g} + \vec{f}) = \frac{1}{m}(m\vec{g} - k\vec{v})$

En projetant cette dernière relation sur l'axe $(O, \vec{j})$, on a : $v' = \frac{1}{m}(mg - kv)$. Ainsi $v' + \frac{k}{m}v = g$.

D'où v est solution de l'équation différentielle $z' + \frac{k}{m}z = g$.

Résolution de cette équation

L'équation homogène $z' + \frac{k}{m}z = 0$ a pour solution $z = \lambda e^{-\frac{k}{m}t}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Posons $z_p = \mu$ une solution particulière de $z' + \frac{k}{m}z = g$, alors $z'_p = 0$ et on a $\frac{k}{m}\mu = g$ i.e. $\mu = \frac{mg}{k}$.

Donc $z = \lambda e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}, \lambda \in \mathbb{R}$ est la solution générale de $z' + \frac{k}{m}z = g$.

2. De l'équation $v' + \frac{k}{m}v = g$ on obtient $z'' + \frac{k}{m}z' = g$ en posant $v = z'$.

Pour résoudre cette équation, posons $v = z'$. Alors, $v' = z''$ et cette équation devient :

$v' + \frac{k}{m}v = g$ et d'après la question précédente, on a $v = z' = \lambda e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$ i.e.

$z(t) = -\lambda \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}t + \beta\ ,\ \lambda\ ,\ \beta \in \mathbb{R}$

Comme $\begin{cases} z(0) = h \\ z'(0) = 0 \end{cases}$, alors $\begin{cases} -\lambda \frac{m}{k} + \beta = h \\ \lambda + \frac{mg}{k} = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} \beta = h + \lambda \frac{m}{k} = h + \frac{m^2 g}{k} \\ \lambda = -\frac{mg}{k} \end{cases}$.

D'où $z(t) = \frac{m^2 g}{k^2} e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}t + h + \frac{m^2 g}{k}$.

Résumé :

2.1. *Equation du type $y'' = f(x)$*

Exemple :

Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' - e^x = -\sin x + x$

Solution :

$$y'' - e^x = -\sin x + x \Leftrightarrow y'' = e^x - \sin x + x \Leftrightarrow y' = e^x + \cos x + \frac{1}{2}x^2 + c,\ c \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow y = e^x + \sin x + \frac{1}{6}x^3 + cx + k,\ k \in \mathbb{R}$$

2.2. *Equation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants et sans second membre (homogène)*

Forme générale :

C'est une équation de la forme $ay'' + by' + cy = 0$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b, c) \in \mathbb{R}^2$

Résolution

Considérons l'équation $(E): ay'' + by' + cy = 0$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b, c) \in \mathbb{R}^2$. L'équation $a\,r^2 + br + c = 0$ est appelée équation caractéristique associé à (E). Pour résoudre (E), on résout son équation caractéristique associée en calculant le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et toutes les solutions de (E) sont résumées dans le tableau suivant :

	Racines de l'équation caractéristique	Solution de (E)
$\Delta > 0$	$r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}, A, B \in \mathbb{R}$
$\Delta = 0$	$r = \frac{-b}{2a}$	$(Ax+B)e^{rx}, A, B \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0$	$r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$	$(A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}, A, B \in \mathbb{R}$

Exercices d'applications :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. (E_1): $y'' - 2y' + 5y = 0$
2. (E_2): $3y'' + 2y' - y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$
3. (E_3): $2y'' + 4y' + 2y = 0$

Solution :

1. L'équation caractéristique associée à (E_1) est : $r^2 - 2r + 5 = 0$

Son discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 = 16i^2$. Posons $\sqrt{\Delta} = 4i$.

On a : $r_1 = \frac{2-4i}{2} = 1 - 2i$ et $r_2 = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i$. Les solutions de (E_1) sont les fonctions $f_{A,B}$ définies par : $f_{A,B}(x) = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^x$ où $A, B \in \mathbb{R}$.

2. L'équation caractéristique associée à (E_2) est : $3r^2 + 2r - 1 = 0$

Son discriminant est $\Delta = (2)^2 - 4 \times 3(-1) = 16 > 0$.

On a : $r_1 = \frac{-2-4}{6} = -1$ et $r_2 = \frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3}$. Les solutions de (E_2) sont les fonctions $g_{A,B}$ définies par : $g_{A,B}(x) = Ae^{-x} + Be^{\frac{1}{3}x}$ où $A, B \in \mathbb{R}$. De plus comme $g_{A,B}(0) = 1$, alors $A + B = 1$ (1).

De même , $g'_{A,B}(x) = -Ae^{-x} + \frac{1}{3}Be^{\frac{1}{3}x}$. Ainsi $g'_{A,B}(0) = 1$ implique $-A + \frac{1}{3}B = 1$ (2)

En additionnant (1) et (2) on obtient $\frac{4}{3}B = 2$ c'est-à-dire $B = \frac{3}{2}$ et par conséquent $A = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$.

D'où la solution de (E_2) vérifiant les conditions initiales est la fonction $g : x \mapsto g(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}e^{\frac{1}{3}x}$

3. L'équation caractéristique associée à (E_3) est : $2r^2 + 4r + 2 = 0$

Son discriminant est $\Delta = (4)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 0$.

On a : $r = \frac{-4}{4} = -1$. Les solutions de (E_3) sont les fonctions $h_{A,B}$ définies par : $h_{A,B}(x) = (Ax + B)e^{-x}$ où A , $B \in \mathbb{R}$.

2.2. *Equation différentielle avec second linéaire d'ordre 2 avec second membre*

Pour résoudre une équation différentielle non-homogène (E) (le second membre est non nul), on procède comme suit :

1. On détermine une solution particulière y_p
2. On détermine la solution y_0 de l'équation homogène
3. Les solutions générales de (E) sont les fonctions $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$.

Exemple :

Résoudre l'équation différentielle suivante : (E): $y'' + 2y' + 4y = 5$

Solution :

L'équation homogène associée à (E) est (E_0): $y'' + 2y' + 4y = 0$. L'équation caractéristique de (E_0) est : $r^2 + 2r + 4 = 0$. Son discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 = 12i^2$. Posons $\sqrt{\Delta} = 2i\sqrt{3}$. On a : $r_1 = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3}$ et $r_2 = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$. Les solutions de (E_0) sont les fonctions $f_{A,B}$ définies par : $\boldsymbol{f_{A,B}}(x) = (A\cos x\sqrt{3} + B\sin x\sqrt{3})e^{-x}$ avec A, $B \in \mathbb{R}$.

Posons $g(x) = p, p \in \mathbb{R}$ la solution particulière de l'équation (E).

On a $g'(x) = 0$ et $g''(x) = 0$. En remplaçant g, g' et g'' dans (E), on a : $4p = 5$ i.e. $p = \frac{5}{4}$.

D'où les solutions de (E) sont les fonctions $x \longmapsto \left(A\cos x\sqrt{3} + B\sin x\sqrt{3}\right)e^{-x} + \frac{5}{4}$, A, $B \in \mathbb{R}$.

Exercice à faire à la maison :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$
2. $6y'' + y' - y = 0$
3. $y'' + 2y = -13$ avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = \sqrt{2}$

Chapitre X : FONCTION LOGARITHME NEPERIEN.
Durée : 100 mns

MOTIVATION :

Les fonctions logarithmes népériens sont des fonctions utilisées pour faciliter les calculs astronomiques en transformant par exemple les opérations telles que les multiplications en additions, les divisions en soustractions etc., Donc ces fonctions jouent un rôle capital dans l'étude astronomique.

Leçon 1 : Présentation et propriétés - Durée : 100 minutes

Objectifs pédagogiques :

- Découvrir la fonction logarithme népérien.
- Exploiter les propriétés de la fonction logarithme népérien pour résoudre des équations et inéquations comportant la fonction logarithme népérien

Prérequis:

- Déterminer les primitives de la fonction f: $x \longmapsto \frac{1}{x^3}\, sur\ \ ]0;\ +\infty[$
- Déterminer une primitive de la fonction f : $x \longmapsto \frac{1}{x^2}\, sur\ \ ]0;\ +\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1

Solution

∗ Les primitives de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ sont les fonctions

F : $x \mapsto -\frac{1}{2x^2} + k,\ k \in \mathbb{Z}\ sur\ \ ]0;\ +\infty[$

∗ La primitive de la fonction f : $x \longmapsto \frac{1}{x^2}\, sur\ \ ]0;\ +\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1 est :

F : $x \mapsto -\frac{1}{x} + k,\ k \in \mathbb{Z}\ sur\ \ ]0;\ +\infty[$ or F(1)=0 équivaut à k=1 d'où $F(x) = -\frac{1}{x} + 1$

Situation problème:

Les fonctions du type : $x \longmapsto \frac{1}{x^n}$ tel que $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ ont pour primitives les fonctions de la forme :

$x \longmapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$ +k ($k \in \mathbb{R}$), par exemples la fonction f : $x \longmapsto \frac{1}{x^3}$ a pour primitive la fonction

F: $x \longmapsto \frac{-1}{2x^2} + k\ (k \in \mathbb{R})$, celle définie par f : $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ a pour primitive la fonction

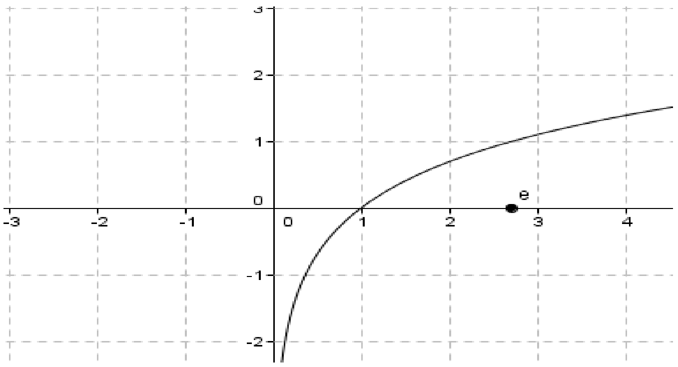
F: $x \longmapsto \frac{-1}{x} + k\ (k \in \mathbb{R})$, quelle est la primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}\ sur\ \ ]0;\ +\infty[$ qui s'annule en 1?

Activités d'apprentissages:

Soit la fonction f: $x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie sur$]0;\ +\infty[$.

1) Justifier que la fonction f admet des primitives sur $]0;\ +\infty[$,

2) On note ln une primitive de f sur$]0;\ +\infty[$, (C_{ln}) sa courbe représentative ci-dessous et e un nombre tel que $e = 2{,}71828$ ... (voir calculatrice)



a. Par lecture graphique quelle est l'image de 1 par ln ? de e par ln?
b. Déterminer graphiquement les limites ln quand x tend vers 0^+, puis quand x tend vers $+\infty$
c. Dresser le tableau de variation de la fonction ln.

Solution

1) La fonction f: $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est définie et continue sur $]0;\ +\infty[$ donc elle admet des primitives sur$]0;\ +\infty[$.

2-a) par lecture graphique $ln1 = 0$ et $lne = 1$.

b) Graphiquement $\lim\limits_{x\to 0^+} lnx = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} lnx = +\infty$.

c) Tableau de variation

x	0	+∞
$\ln'(x)$	‖	+
$\ln(x)$	‖	-∞ ↗ +∞

Résume

1. Définition

On appelle fonction logarithme népérien la primitive sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$ de la fonction f: $x \longmapsto \frac{1}{x}$ notée ln et prenant la valeur 0 en 1.

Conséquence :

- Pour tout x appartenant à $]0;\ +\infty[$, $(lnx)' = \frac{1}{x}$,
- $ln1 = 0$,
- ln : $]0;\ +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ qui à $x \longmapsto lnx$ et $lne = 1$ avec e la base du logarithme népérien.

Remarque :

Pour tout $x \in]0; 1[, lnx < 0$ et pour tout $x \in]1;\ +\infty[, lnx > 0$.

2. Propriétés

i) Soit u une fonction définie sur un intervalle donné, $\ln(u(x))$ existe si $u(x) > 0$, $ln|u(x)|$ existe si $u(x) \neq 0$.

ii) Pour tous nombres réels a et b strictement positifs et pour tout rationnel r, on a:

$lnab = lna + lnb,\ ln\frac{1}{a} = -lna,\ ln\frac{a}{b} = lna - lnb,\ lna^r = rlna,\ lna = lnb \Leftrightarrow a = b,$

$lna \leq lnb \Leftrightarrow a \leq b,\ lna = b \Leftrightarrow a = e^b,\ lne^a = a = e^{lna}$.

Exercice d'application

1- Donner le domaine de définition des fonctions suivantes:

a) $f(x) = \ln(x+4)$, b) $g(x) = \ln(\frac{x+1}{x-3})$, c) $h(x) = \ln(x^2-9)$, d) $t(x) = \frac{-3x+1}{x+2} - \ln(x+1)$

2- Ecrire plus simplement : $A = 2ln3 - ln5 + \frac{1}{2}ln9$, $B = \ln(0{,}01) + \ln(100) - \ln(0{,}0001)$ et

$C = 3ln2 - ln16 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)^5 + ln32$.

3- Déterminer le plus petit entier n tel que $2^n \geq 10^9$.

3 Equations et inéquations comportant ln

a- Méthode

Pour résoudre les équations (resp. Les inéquations) comportant ln, on procède comme suite :

- On détermine l'ensemble de validité (contrainte sur l'inconnue),

- On transforme l'équation (resp. l'inéquation) sous la forme $lna = lnb \Leftrightarrow a = b$, (resp. $lna \leq lnb \Leftrightarrow a \leq b$) ;
- On résous l'équation (resp. l'inéquation) et on détermine l'ensemble solution en tenant compte de l'ensemble de validité.

NB : On pourra faire de changement de variable dans certains cas par exemple en posant X=lnx.

6- Application

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$

a) $\ln(x-3) + \ln(x-1) = 3ln2$

b) $\ln\big((x-3)(x-1)\big) = 3ln2$

c) $\ln(2x^2 + 5x - 2) \leq 0$

d) $(\ln(x+1))^2 + \ln(x+1) - 6 > 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant : (S): $\begin{cases} lnx + lny = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \\ x + y = \frac{7}{3} \end{cases}$

Devoir : Exercices 5, 8, 11 Page 102 (CIAM)

Leçon 2 : Etude d'une fonction comportant ln - Durée : 100 mins

Objectifs pédagogiques :

- Etudier la dérivabilité, le sens des variations, connaitre les limites de réferences, déterminer les primitives des fonctions comportant ln.
- Exploiter les propriétés de la fonction logarithme népérien pour résoudre des équations et inéquations comportant la fonction ln.

Prérequis:

- Déterminer la dérivée de la fonction qui à$x \longmapsto lnx$,
- Déterminer les limites aux bornes de domaine de définition de la fonction qui à $x \longmapsto lnx$

Situation problème:

Nous avons appris comment étudier les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, les fonctions irrationnelles et bien d'autres. Comment étudier les fonctions comportant ln par exemple la fonction f définie par $f: x \longmapsto x + lnx$?

Activités d'apprentissages:

Soit la fonction f définie par $f(x) = x + lnx$

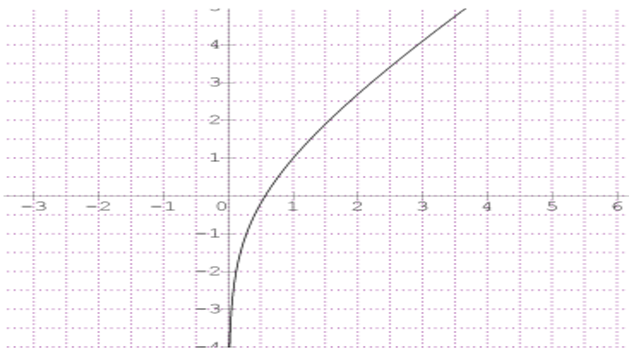
1. Déterminer le domaine de définition Df de la fonction f,
2. Calculer les limites de f aux bornes de Df et en déduire les branches infinies de$f$,
3. Calculer la dérivée f' de f et en déduire les variations de$f$,
4. Dresser le tableau de variation de f
5. Construire (Cf), courbe représentative de la fonction f.

Solution

1. $Df =]0; +\infty[$
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} (x + lnx) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + lnx) = +\infty$. Nous avons l'axe des ordonnées comme asymptote verticale et (Cf) admet une branche parabolique en $+\infty$.
3. On $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ pour tout x dans $]0; +\infty[$ et $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
4. Tableau de variations de f

x	0	$+\infty$
f'(x)	‖	+
f(x)	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$

5. Construction de (Cf)



Résume

1. Limites de références

Les limites classiques ou limites de références sont admises et sont les suivantes:

$\lim\limits_{x\to 0^+} lnx = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} lnx = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{lnx}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} xlnx = 0$, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{lnx}{x-1} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$. Pour tout nombre réel α strictement positif, on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha lnx = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{lnx}{x^\alpha} = 0$.

Exercice d'application

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} (lnx + \frac{1}{x})$, 2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x - lnx)$, 3. $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x^2 + 2lnx - 3)$, 4.. $\lim\limits_{x\to 0^+} (lnx - \frac{1}{x})$

2. Dérivée et primitive

a) Dérivée

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I. La fonction lnu est dérivable sur I et on a: $(lnu)' = \frac{u'}{u}$, **NB:** $\ln|u| = \frac{u'}{u}$.

b) Primitive

Propriété

Soit u une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur un intervalle I. La fonction $\frac{u'}{u}$ admet pour primitive sur I la fonction $ln|u| + k$, k étant un nombre réel.

Exercice d'application

1. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = lnx + \ln(x-4)$, b) $g(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$, c) $h(x) = ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|$, d) $k(x) = \frac{xlnx}{x+2}$.

2. Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{1}{2x-1}$, b) $g(x) = \frac{cosx}{-sinx}$, c) $h(x) = \frac{x+3}{X+2}$, d) $k(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

3. Exemple d'étude d'une fonction comportant ln

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}\ vers\ \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x+ln|1-x|}{1-x}$.

1. Etudier les variations de f,
2. On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Démontrer que (C) admet un centre de symétrie dont-on précisera les coordonnées.
3. Construire (C).

Solution

1. Etudions les variations de f.

- Domaine de définition de f

f existe ssi $1 - x \neq 0 \Longrightarrow x \neq 1$ donc $Df = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

- Limites aux bornes de Df

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x+ln|1-x|}{1-x} = \lim\limits_{x\to -\infty} (\frac{x}{1-x} + \frac{ln|1-x|}{1-x}) = -1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+ln|1-x|}{1-x} =$ $\lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{x}{1-x} + \frac{ln|1-x|}{1-x}) = -1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x+ln|1-x|}{1-x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x+ln|1-x|}{1-x} = +\infty$.

- Dérivée et sens de variations

$$f'(x) = \left(\frac{x+ln|1-x|}{1-x}\right)' = \frac{\left(1+\frac{-1}{1-x}\right)(1-x)-(-1)(x+ln|1-x|)}{(1-x)^2} = \frac{1-x-1+(x+ln|1-x|)}{(1-x)^2} = \frac{ln|1-x|}{(1-x)^2}$$

$(1-x)^2 > 0$ donc le signe de f'(x) dépend de celui de $ln|1-x|$,

or $ln|1-x| \geq 0 \Longrightarrow |1-x| \geq 1 \Longrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 1 \\ 1-x \leq -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$

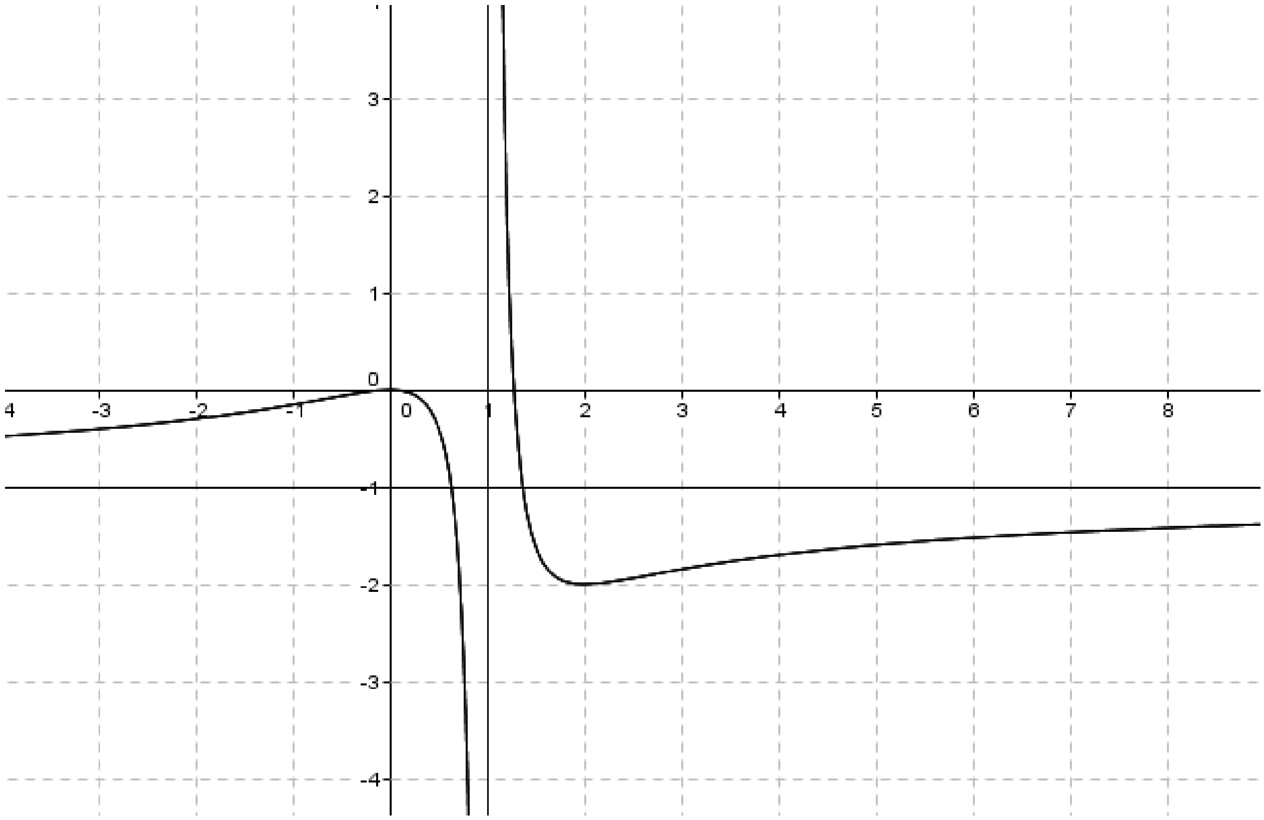
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	||	$-$		$+$	
$f(x)$	-1		0	$-\infty$	||	$+\infty$	-2		-1

2. Démontrons que (C) admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées.

Les droites d'équations $x = 1$ et $y = -1$ sont asymptote à (C) et leur intersection est le point $A(1;\,-1)$.
Vérifions que A est le centre de symétrie.

Pour tout nombre réel x du Df, $1 - x \in Df$, $1 + x \in Df$ et $f(1-x) + f(1+x) = \frac{1-x+ln|x|}{x} + \frac{1+x+ln|x|}{-x} = -2 + 2(-1)$ donc le point $A(1;\,-1)$ est centre de symétrie de (C).

3. Construction de (C)



Devoir : 34, 35 et 36 page 104

Chapitre XI : Fonction exponentielle népérienne
Durée : 100 minutes

MOTIVATION :

C'est en recherchant des fonctions dérivables sur ℝ dont la dérivée est proportionnelle à la fonction que l'on est conduit à l'étude de la fonction exponentielle. Celle-ci joue un rôle capital en mathématiques car c'est une fonction de référence qui intervient dans de nombreuses lois de probabilité.

Leçon 1 : Présentation et propriétés - Durée : 100 minutes

Objectifs pédagogiques :

- Découvrir la fonction exponentielle.
- Exploiter les propriétés de la fonction exponentielle pour résoudre des équations et inéquations comportant la fonction exponentielle

PRE-REQUIS

- Résolution des équations et inéquations comportant ln
- Propriétés des fonctions logarithme népérienne.
- Propriétés sur le calcul de puissances

SITUATION PROBLEME :

Pour une multitude de raisons, les lignes d'assemblage en industrie ont tendance à avoir un roulement important d'ouvriers. Les compagnies doivent dépenser beaucoup d'argent à entraîner de nouveaux effectifs. On a trouvé que le niveau de production d'un nouvel employé d'une chaîne de montage est décrit par la fonction $P(t) = 25 - 25e^{-0,3t}$ où $P(t)$ représente le nombre d'unités fabriquées par l'employé t jours après son entrée en fonction. Abdoulaye est nouvellement recruté dans une chaîne de montage. Déterminer le nombre de jours minimal qu'il faut à un nouvel employé pour pouvoir produire plus de 23 unités.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1. Soit l'inéquation $(I): 25 - 25e^{-0,3t} \geq 23$.
   a. En utilisant les propriétés de la fonction logarithme, montrer que (I) est équivalante à $-0.3t \leq ln2 - ln5$.
   b. Résoudre (I)
2. Soit la fonction définie par $P(t) = 25 - 25e^{-0,3t}$. Compléter le tableau suivant

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(t)$									

3. Déterminer le nombre de jours minimal qu'il faut à un nouvel employé pour pouvoir produire plus de 23 unités.

Solution :

1. a. En utilisant les propriétés de la fonction logarithme, montrons que (I) est équivalant à $-0.3t \leq ln2 - ln5$.

$$25 - 25e^{-0,3t} \geq 23 \iff 25e^{-0,3t} \leq 2$$
$$\iff e^{-0,3t} \leq \frac{2}{25}$$
$$\iff lne^{-0,3t} \leq ln\frac{2}{25}$$
$$\iff -0,3t \times lne \leq ln2 - ln25$$

b. Résolvons (I). D'après la question précédente, on a : $t \geq \frac{ln25-ln2}{0,3}$. On obtient : $t \geq 8.419$

2. Complétons le tableau suivant

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(t)$	0	6.5	11.3	14.8	17.5	19.4	20.9	21.9	22.7

3. Donc l'ouvrier produira 23 unités à partir du 9ème jour de travail.

RESUME :

1. Définition et premières propriétés

a) Définition

L'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ s'appelle la fonction exponentielle.
L'exponentielle d'un réel x est notée $exp\ (x)$; $\forall\, x \in\ \mathbb{R},\ exp\ (x)\ > 0$.

Notation :

- L'exponentielle d'un réel x sera generalement notée e^x.
- Soit x un nombre réel. On a $lne^x = x$
- $\forall\, x \in\ ]0; +\infty[\ ,\ e^{lnx} = x$

2. Propriétés

Pour tous réels a et b et pour tout nombre rationnel r, on a :

P1) $e^{a+b} = e^a \times e^b$ P2) $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$ P3) $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ P4) $e^{ra} = (e^a)^r$

Exemple 1 :

Ecrire plus simplement les expressions suivantes :

a) $\frac{e^{-3x} \times e^{3x+1}}{e^{2x}}$ b) $\left(\frac{1}{e^{3x}}\right)^5$ c) $e^{\ln(x+1)} \times e^{-\ln(x^2-1)}$

Solution 1:

a) $\frac{e^{-3x} \times e^{3x+1}}{e^{2x}} = \frac{e^{-3x+3x+1}}{e^{2x}} = \frac{e^1}{e^{2x}} = e^{1-2x}$

b) $\left(\frac{1}{e^{3x}}\right)^5 = (e^{-3x})^5 = e^{-15x}$

c) $e^{\ln(x+1)} \times e^{-\ln(x^2-1)} = e^{\ln(x+1)-\ln(x^2-1)} = \frac{e^{\ln(x+1)}}{e^{\ln(x^2-1)}} = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1}$

3. Equations et inéquations comportant exponentielle

a. Equations du type $e^x = e^a$

Propriété : a étant un réel fixé, on a l'équivalence suivante : $e^x = e^a \Leftrightarrow x = a$

Remarque :

- L'équation $e^x = a$, où $a \leq 0$, n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$
- L'équation $e^x = a$, où $a > 0$ a pour solution dans $\mathbb{R}$ $x = lna$

Propriété : u et v étant deux fonctions, o a l'équivalence suivante : $e^{u(x)} = e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = v(x)$

Exemple 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes

a) $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$ b) $4e^{-x} = e^x$

Solution 2:

a) $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 + 3(e^x) - 4 \Leftrightarrow X^2 + 3X - 4 = 0$ avec $X = e^x$

Le discriminant est $\Delta = 25$. On a donc $X = -4$ ou $X = 1$ d'ou $e^x = -4$ ou $e^x = 1$. Or exponentielle est strictement positive. Donc on retient $e^x = 1$ soit $e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0$ donc $x = 0$

b) $4e^{-x} = e^x \Leftrightarrow e^x \times 4e^{-x} = e^x \times e^x \Leftrightarrow 4 = e^{2x} \Leftrightarrow 2x = ln4 \Leftrightarrow 2x = ln2^2 \Leftrightarrow 2x = 2ln2$. Donc $x = ln2$

b.Inéquations du type $e^x < e^a$. (ou $e^x \leq e^a$, ou $e^x > e^a$, ou $e^x \geq e^a$)

Propriété : a étant un réel fixé, on a l'équivalence suivante : $e^x < e^a \Leftrightarrow x < a$

Remarques :

- L'équation $e^x < a$, où $a \leq 0$, n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$
- L'équation $e^x > 0$, admet tous les réels comme solutions.

Propriété : u et v étant deux fonctions, o a l'équivalence suivante :
$e^{u(x)} < e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) < v(x)$

Exemple 3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes

a) $e^{x^2-x} - e^{5-x} < 0$ b) $(-2e^x - 6)(5e^x - 5e) \geq 0$

Solution 3 :

a) $e^{x^2-x} - e^{5-x} < 0 \Leftrightarrow e^{x^2-x} < e^{5-x} \Leftrightarrow x^2 - x < 5 - x \Leftrightarrow x^2 < 5$. L'ensemble des solutions de l'inéquation de départ est: $]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[$.

b) $(-2e^x - 6)(5e^x - 5e) \geq 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}, -2e^x - 6 < 0$. De plus $5e^x - 5e \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. En dressant un tableau de signe, on obtient comme ensemble solutions : $]-\infty; 1]$

3. Systèmes d'équations comportant exponentielles.

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 4e^x - 3e^y = 9 \\ 2e^x + e^y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} e^x + 2e^y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} e^x e^y = 10 \\ e^{x-y} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

EXERCICES D'APPLICATIONS :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$

   a) $e^{2x+5} = e^{\frac{3}{x}}$ b) $e^{2x-\ln 5} \leq 5$

2. Soit le l'expression $A(x) = (x-1)(x+2)(x+\frac{1}{2})$

a. Développer et réduire A

b. Résoudre l'équation : $2e^{3x} + 3e^{2x} - 3e^x - 2 = 0$

3. Une compagnie désire accroître sa part du marché pour un de ses produits. Elle entreprend une campagne publicitaire. Le volume des ventes mensuelles de ce produit t mois après le début de la campagne est donné par l'équation V(t) = 800 - 500 exp$(-0,2t)$. Au bout de combien de temps le volume des ventes mensuelles sera-t-il le double de ce qu'il était au tout début de la campagne ?

Solution

1. a) $e^{2x+5} = e^{\frac{3}{x}}$. l'équation est définie si $x \neq 0$. Donc on résoud l'équation sur $\Psi/\{0\}$. L'équation équivaut à $2x + 5 = \frac{3}{x} \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0$. Cette equation a pour solution $x = -3$ *ou* $x = \frac{1}{2}$. D'ou ensemble solution $S = \left\{-3; \frac{1}{2}.\right\}$

b) $e^{2x-\ln 5} \leq 5 \Leftrightarrow e^{2x-\ln 5} \leq e^{\ln 5} \Leftrightarrow 2x - \ln 5 \leq \ln 5 \Leftrightarrow x \leq \ln 5$ $S =]-\infty; \ln 5[$

2. a) Développement $A(x) = (x-1)(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

   b) Résolution de l'équation : $2e^{3x} + 3e^{2x} - 3e^x - 2 = 0$

   Posons $t = e^x$ avec $t > 0$. L'équation devient $2t^3 + 3t^2 - 3t - 2 = 0$. Comme $t > 0$, la solution à retenir est $t = 1$. Ce qui implique $1 = e^x$. donc $x = 0$. ensemble solution $S = \{0\}$

Leçon 2 : Fonction exponentielle népérienne - Durée : 100 mns

Objectifs pédagogiques:

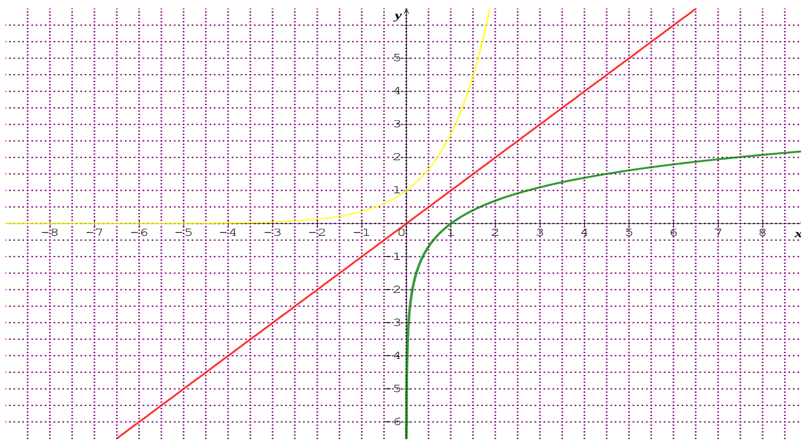
- Etudier la dérivabilité, le sens des variations, connaitre les limites classiques, déterminer les primitives des fonctions comportant exp.
- Exploiter les propriétés de la fonction exponentielle pour résoudre des équations et inéquations comportant la fonction exponentielle

PRE-REQUIS

1. Construire dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction $h: x \mapsto lnx$. Et la droite d'équation $y = x$.
2. On note f la fonction réciproque de h. Dresser le tableau des variations de f et construire la courbe de f dans le même repère. f est appelé la fonction exponentielle. Et définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.
3. Observer la courbe de f et faire une conjecture des limites suivantes. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} e^x$ $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^x$ $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{e^x}{x}$

Solution :

1. Graphe : ci-contre
2. f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Donc réalise une bijection de $]0; +\infty[\ vers\ \mathbb{R}$. Sa bijection réciproque f^{-1} croit strictement de $\mathbb{R}$ vers $]0; +\infty[$.
3. Conjecture des limites. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} e^x = 0$ $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$



SITUATION PROBLEME :

On admet que la fonction f définie sur $I = [\mathbf{0}\ ;\ \mathbf{4}]$ $\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{t}) = 3te^{-1.25t}$ modélise le taux d'alcoolémie (en grammes par litre de sang) en fonction du temps t en heures. Le taux maximum toléré est 0,5 g/L. Un homme de 70 kg après absorption de deux verres d'alcool à l'instant t = 0 souhaite connaitre son taux d'alcoolémie maximum et l'instant où il a lieu ainsi que l'intervalle de temps pendant lequel il ne doit pas conduire.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Soit la fonction définie sur l'intervalle I = [0 ; 4] par : $\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{t}) = 3te^{-1.25t}$

1. On admet que la dérivée dela fonctio $h: t \longmapsto e^{-1.25t}$est $h': t \longmapsto -1.25e^{-1.25t}$.
Montrer que $\boldsymbol{f}\,'(\boldsymbol{t}) = \mathbf{3}(\mathbf{1} - \mathbf{1{,}25}\boldsymbol{t})\, e^{-1.25t}$.

2. Etudier les variations de f sur I.

3. Faire un tableau de valeurs de $\boldsymbol{f}\ (t)$ arrondies à 0,01 près avec un pas de 0,25.

4. Représenter f dans un repère orthogonal (prendre l'unité à 3 cm en abscisses et à 10 cm en ordonnées).

5. Déterminer graphiquement le maximum de cette fonction. En quelle valeur est-il atteint

6. Déterminer graphiquement l'intervalle solution de l'inéquation $\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{t}) \leq 0{,}5$

7. Résoudre la situation problème

SOLUTION

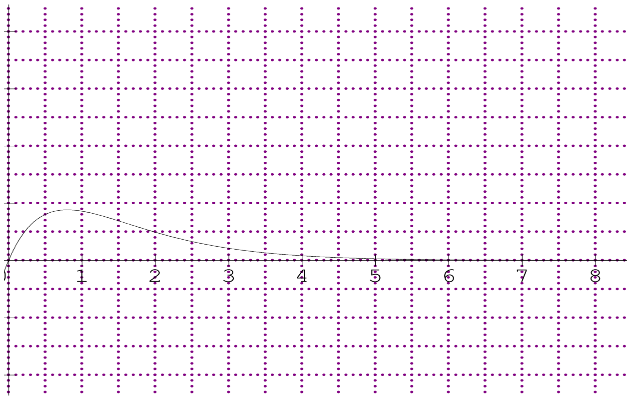
1. Montrons $\boldsymbol{f}\ '(\boldsymbol{t}) = 3e^{-1.25t} - 1.25te^{-1.25t} = \mathbf{3(1 - 1{,}25}\boldsymbol{t}\mathbf{)}\ e^{-1.25t}$.

2. Etudier les variations de f sur I. $\boldsymbol{f}\ '(\boldsymbol{t}) = 0 \Rightarrow t = 0.8$. donc la fonction f est croissant sur [0 ; 0.8] et décroissante sur [0.8 ; 4].

3. Tableau de valeurs de $\boldsymbol{f}\ (t)$ arrondies à 0,01 près avec un pas de 0,25.

<u>*t*</u>	<u>0</u>	0,25	0,50	0,75	<u>1</u>	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3	3,25	3,5	3,75	4
$\boldsymbol{f}\ (t)$	<u>0</u>	**<u>0.54</u>**	**<u>0.80</u>**	**<u>0.88</u>**	**<u>0.85</u>**	**<u>0.78</u>**	**<u>0.69</u>**	**<u>0.58</u>**	**<u>0.49</u>**	**<u>0.40</u>**	**<u>0.32</u>**	**<u>0.26</u>**	**<u>0.21</u>**	**<u>0.16</u>**	**<u>0.13</u>**	**<u>0.10</u>**	**<u>0.08</u>**

4. Représentation graphique de f



5. Déterminons graphiquement : le maximum de cette fonction 0.8829.

En quelle valeur est-il atteint : 0.8

6. Déterminons graphiquement l'intervalle solution de l'inéquation $\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{t}) \leq 0{,}5$

réponse : [0 ; 0.20] ∪ [2 ; 4]

7. Résolution de situation problème : son taux d'alcoolémie maximum 0.8829g/L. L'instant où il a lieu 48 minutes après la consommation. L'intervalle de temps pendant lequel il ne doit pas conduire : 12 minutes après il ne pourra plus conduire et il devra prendre le volant 2 heures de temps après la consommation.

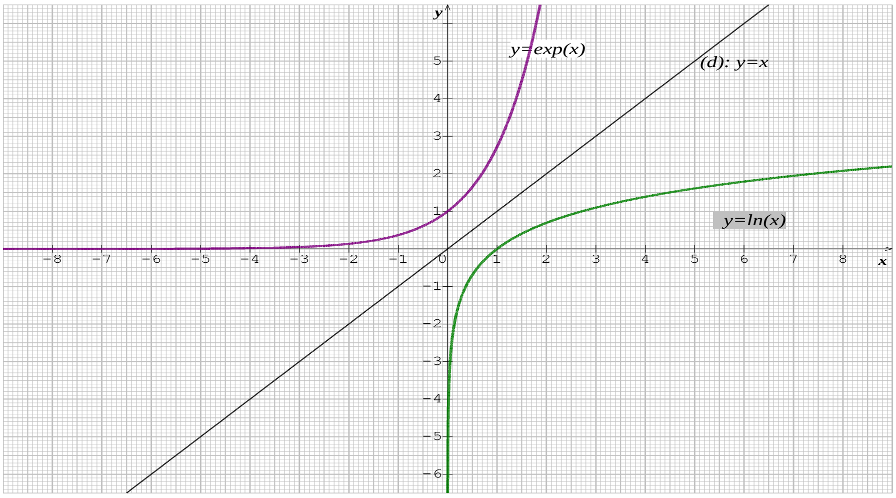
RESUME :

1. Etude de la fonction exponentielle.

Définition : L'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ s'appelle la fonction exponentielle népérienne.

Propriétés :

- $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} e^x = 0$ $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\mapsto0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$ $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} xe^x = 0$
- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto e^x$. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- L'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de la fonction exponentielle en $-\infty$
- La courbe représentative de la fonction exponentielle admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.



Exemple : Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^{-x+1} = 0 \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{x+1}{e^x} = 0 \quad \lim\limits_{x\mapsto 0}\frac{e^{3x}-1}{x} = 3\,. \quad \lim\limits_{x\mapsto-\infty}(x+1)e^x = 0$

2. Fonction du type $x \mapsto e^{u(x)}$

- ***Propriété :*** Dérivée de e^u

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et soit g la fonction définie par $g(x) = e^{u(x)}$. g est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, $g'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Exemple : Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes

$a)\ e^{-x^2+1}$; $b)\ \frac{x-1}{e^x}$; . $c)\ \frac{e^x-1}{e^x+1}$ $\quad d)(x^2+3)e^{-x^2+1}$

$solution$: $a)\ -2xe^{-x^2+1}$ b) $\frac{e^x-(x-1)e^x}{e^{2x}}$ c) $\frac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}$

$d)\ 2xe^{-x^2+1} - 2x(x^2+3)e^{-x^2+1}$

- ***Propriété :*** Primitive de e^u

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Les primitives sur I de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$, sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

EXERCICES D'APPLICATIONS :

1. Calculer les limites suivantes $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}(-5\,e^x + 2x)$ $\quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty}(\,e^{2x} - xe^x)$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x(\,e^{\frac{1}{x}} - 1) \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^{-x+1} \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{x+1}{e^x} \quad \lim\limits_{x\mapsto 0}\frac{e^{3x}-1}{x}. \quad \lim\limits_{x\mapsto-\infty}(x+1)e^x \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x(\,e^{\frac{1}{x}} - 1) \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^{-x+1} \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{x+1}{e^x} \quad \lim\limits_{x\mapsto 0}\frac{e^{3x}-1}{x}. \quad \lim\limits_{x\mapsto-\infty}(x+1)e^x \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}$

2. Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes xe^{x^2+1} ; $\quad (x+1)(x+1)e^{-x}$
3. Déterminer les primitives sur R.de chacune des fonctions suivantes : $f(x) = (-2x+1)e^{-x^2+x}$; $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \sin(x) \times e^{\cos(x)}$, $h(x) = e^{-3x+1} + xe^{x^2}$

Solution :

1. Calcule des limites

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}(-5\,e^x + 2x) = -\infty \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty}(\,e^{2x} - xe^x) = +\infty$

2. Calcule de la dérivée.

$\left(xe^{x^2+1}\right)' = 1 \times e^{x^2+1} + (2xe^{x^2+1})x$

$((x+1)(x+1)e^{-x})' = 2(x+1)e^{-x}$-$(x+1)^2e^{-x} = (1-x)(x+1)e^{-x}$

3. Déterminons les primitives sur R.de chacune des fonctions suivantes :

$F(x) = e^{-x^2+x} + K \quad \mathrm{G}(\mathrm{x}) = -e^{\cos(x)} + K \quad H(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x+1} + \frac{1}{2}e^{x^2} + K$

Leçon 3 : Etude d'une fonction comportant exp -Durée : 100 mns

Objectifs pédagogiques:

- Etudier et représenter graphiquement les fonctions comportant exp.

PRE-REQUIS

1. Calculer la dérivé de : $x - \ln(1 + e^x)$ Solution : $1 - \frac{e^x}{e^x+1}$
2. Rappeler les différentes étapes de l'étude d'une fonction.

Solution :

a) Ensemble de définition
b) Limites aux bornes de l'ensemble de définition
c) Branches parabolique et asymptotes éventuelles
d) Dérivation, étude des variations et tableau des variations
e) Positions relatives de la courbe avec son asymptote oblique
f) Points de rencontre éventuels avec les axes.
g) Construction de la courbe

TP : Etude de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$.

Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$.

Partie A h est la fraction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = xe^x - 2e^x + 2$.

1- Etudier le sens de variation de h. On précisera h(0) .

2-a) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [\frac{3}{2} ; 2]$.

b) En déduire le signe de h sur $[0, +\infty[$.

Partie B

1-a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Vérifier que $f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$; puis calculer la limite de f en 0.

2-a) Montrer que pour tout $x > 0$ $'(x) = \frac{1}{x^3} h(x)$.

b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation .

3- Montrer que $f(\alpha) = \frac{-1}{\alpha(\alpha-2)}$ et en déduire le signe de f(α).

4- Tracer la courbe C_f de f dans un repère orthonormé : prendre $\alpha \approx 1{,}6$.

Solution

Partie A

h est la fraction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = xe^x - 2e^x + 2$.

1- Sens de variation de h. La fonction h est dérivable sur $[0, +\infty[$ de dérivée $h'(x) = xe^x - e^x$.
h est strictement décroissante sur $]0 ; 1[$ strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$. $h(0) = 0$

3. Démontrons que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [\frac{3}{2} ; 2]$.

h est continue et strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$ donc sur $[\frac{3}{2} ; 2]$.

De plus $h(1.5) \times h(2) = -0.240 \times 2 < 0$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [\frac{3}{2} ; 2]$.

En déduire le signe de h sur $[0, +\infty[$. pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; \alpha[$, $h(x) < 0$ et pour tout x appartenant à l'intervalle $]\alpha\,;\,+\infty[$, $h(x) > 0$

Partie B

1-a) la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.

b) $f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$. La limite de f à droite en 0 est $+\infty$

2-a) Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x^3}\, h(x)$.

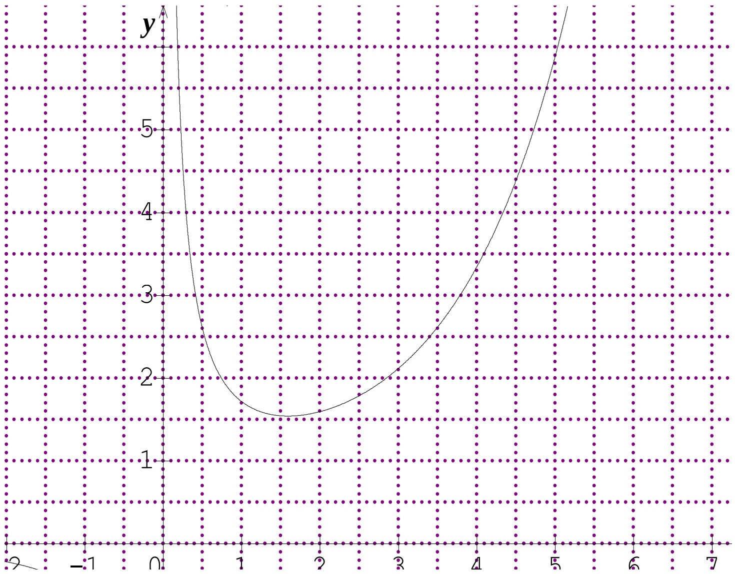
b) Sens de variation de f et dresser son tableau de variation. Le signe f' sur $]0, +\infty[$ est celui de h. Ainsi pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,\alpha[$, $f^{'}(x) < 0$ et pour tout x appartenant à l'intervalle $]\alpha; +\infty[$, $f'(x) > 0$. Donc f est strictement décroissante sur $]0\,;\,\alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$.

3. Montrons que $f(\alpha) = \dfrac{-1}{\alpha(\alpha-2)}$ et déduisons-en le signe de f(α).

$f(\alpha) = \frac{e^{\alpha}-1}{\alpha^2}$. Or $h(\alpha) = 0 \Rightarrow e^{\alpha} = \frac{-2}{\alpha-2}$. en remplaçant dans l'expression de f(α), on obtient

$f(\alpha) = \dfrac{-1}{\alpha(\alpha-2)}$. $1.5 < \alpha < 2$. Ainsi $\alpha - 2 < 0$. Donc $f(\alpha) > 0$

4. Traçons la courbe C_f de f dans un repère orthonormé : prendre $\alpha \approx 1{,}6$.



CHAPITRE 12 : THEORIE DES GRAPHES ET QUELQUES OUTILS D'OPTIMISATION

INTERET GLOBAL :

Reconnaitre l'efficacité de l'outil « Graphe » pour modéliser les problèmes de gestion d'objets interconnectés dont on veut améliorer l'interaction en termes de configuration ou de proximité en un sens à préciser.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES GLOBAUX :

Trouver un court chemin entre deux localités reliées par les routes intercalées d'autres villes ou alors déterminer dans un réseau routier, le coût minimum, pour la réhabilitation de certaines voies de façon à désenclaver toutes les localités. Trouver aussi le chemin le plus cours pour un transfert d'information ou de données dans un grand réseau informatique.

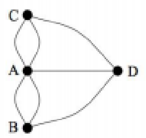
LECON 1: GRAPHES, SOUS-GRAPHES (100 min)

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES :

- Déterminer une chaîne d'un graphe ;
- Reconnaitre le sous-graphe d'un graphe ;
- Déterminer la longueur d'une chaîne d'un graphe ;
- Justifier qu'une chaîne est un cycle ;
- Justifier qu'un graphe est connexe.

TEST DE PRÉREQUIS :

Donner l'ensemble E des sommets et l'ensemble G des arêtes du graphe



Solution :

$E = \{A\ ;\ B\ ;\ C\ ;\ D\}$ et $G = \{A - Bgauche; A - Bdroite; A - Cgauche; A - Cdroite; A - D; C - D; B - D\}$.

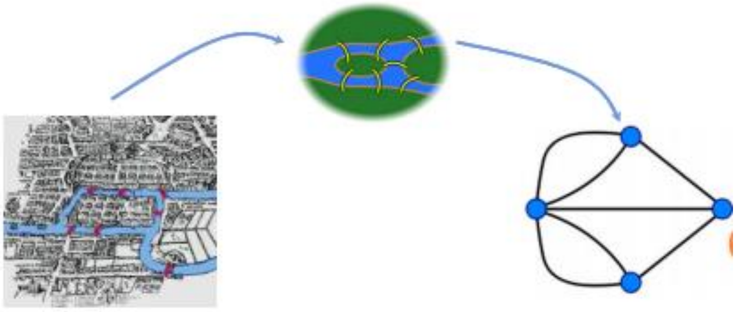
SITUATION PROBLEME:

Dès 1736, le mathématicien allemand et père de la théorie des graphes L. Euler observe la ville de Köenigsberg avec ses sept ponts en rouge (1ère image) aussi visualisés en jaune sur la 2ème image:

Figure 1: les 7 ponts en rouge

Expliquer mathématiquement que l'on peut aller de part et d'autre des cours d'eau sans limitation (c'est-à-dire que d'une zone verte, on peut toujours arriver à une autre).

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Observer la transformation suivante : 

1- Expliquer comment transformer la figure 1 par un graphe où les ponts et les zones à atteindre sont des sommets ou des arrêtes.
2- Expliquer alors mathématiquement que l'on peut aller de part et d'autre des cours d'eau sans limitation (c'est-à-dire que d'une zone verte, on arrive toute autre).

SOLUTION :

1- Prendre les ponts comme des arêtes et les zones à atteindre comme des sommets :

2- On peut voir que chaque couple de sommets est relié par au moins une arrête.

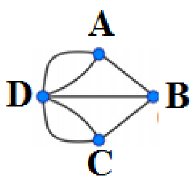
RESUME :

Définitions, notations et vocabulaire

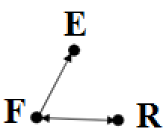
Nous allons commencer par parler des graphes, des notions d'adjacence et degré.

a) Graphes, adjacence, degré, sous graphe et graphe partiel

Un graphe non orienté est un ensemble de points (appelés sommets ou **nœuds**) reliés ou pas par des segments ou lignes courbes (appelés arrêtes).

Exemple de graphe non orienté: 

- **Un graphe orienté** désigne un graphe dans lequel chaque arrête est orientée par une flèche appelée **arc**.

Exemple de graphe orienté: 

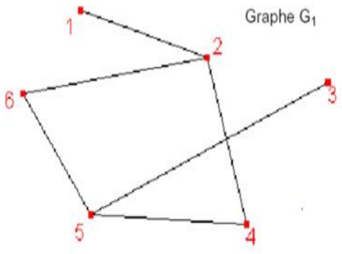
<u>**NB**</u> : Un graphe peut être représenté par $(E\ ,\ G)$ où E désigne l'ensemble des sommets ou nœuds et G l'ensemble des arrêtes ou des arcs.

- **Une boucle** est un arc reliant un sommet à lui-même.

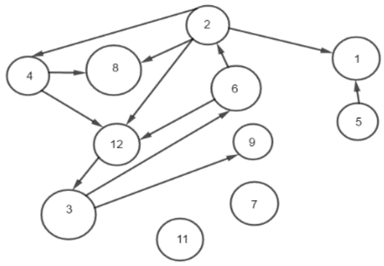
Exemple de boucle: 

- **Un graphe simple** désigne un graphe n'ayant pas de boucle ni plus d'une arête reliant deux sommets. Sur le dessin le représentant, on ne parle alors plus d'arcs mais d'arêtes.
- Tout graphe orienté, sans boucle, peut donc être transformé en graphe simple, en remplaçant chaque paire d'arcs « aller-retour » par une arête.

Exemple B :



graphes non orienté



Graphe orienté (H)

(2 ; 8) est un arc du graphe orienté (H) tandis qu'il n'y a pas d'arc (8 ; 2).
Dans le graphe non orienté G_1, $\{1\ ;\ 2\}$ est une arête. Il n'y a pas d'arête $\{2\ ;5\}$ sur G_1.

- **Adjacence** : deux arcs ou arêtes sont adjacents s'ils ont une extrémité commune; deux sommets sont adjacents s'il existe un arc, ou une arête, les reliant.

Exemple C : Les arêtes $\{2\ ;6\}$ et $\{5\ ;6\}$ sont adjacents sur G_1, les sommets 1 et 2 aussi.

- Le **degré** (ou **nombre d'arcs/arêtes incidents à un sommet**) d'un sommet x est le nombre d'arcs/d'arêtes dont x est origine ou extrémité.

o **le demi-degré extérieur** (ou **nombre d'arcs incidents à un sommet vers l'extérieur**) est le nombre d'arcs dont x est origine ;

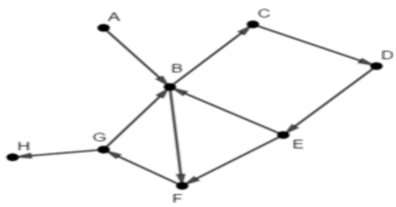
o **le demi-degré intérieur** (ou **nombre d'arcs incidents à un sommet vers l'intérieur**) est le nombre d'arcs dont x est extrémité.

- **Le degré d'un graphe** est le degré maximum de tous ses sommets.

Exemple D : Dans le graphe orienté (H) précédent pour le sommet 6:

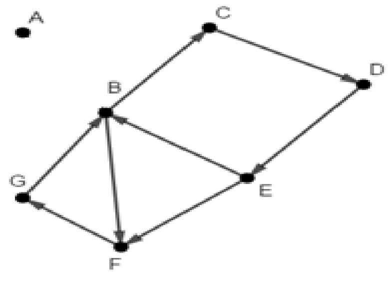
- Le degré de 6 est 3, mais le demi-degré extérieur du sommet 6 est 2;
- le demi-degré intérieur du sommet 6 est **1**.
- Le degré du graphe est **5** (merci d'observer tous les sommets dont 2).

- **Sous graphe :** Si on considère un graphe (E, G) alors **un sous-graphe** (E', G') est un graphe tel que $E' \subset E$ et $G' \subset G$ avec G' qui est un ensemble des arcs de G dont les deux sommets sont dans E'. Ainsi, un sous-graphe est obtenu par suppression de sommets et/ou arêtes du graphe initial (E, G).
- **Graphe partiel :** Si on considère un graphe (E, G) alors un graphe partiel (E', G') est **un sous-graphe** de (E, G) si $E = E'$ et $G' \subset G$ avec G' qui est l'ensemble des arcs de G dont les deux sommets sont dans E'. Ainsi, tous les sommets sont conservés et seuls des arrêtes ou arc sont supprimés.

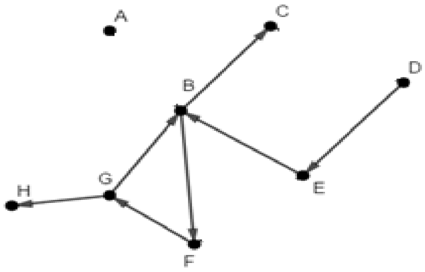


graphe

Exemple E: Considérons ce graphe. On a alors :



Sous graphe



Graphe partiel

Les notions de Chemin, chaine, circuit, cycle sont utiles pour comprendre les graphes.

b) Chemin, chaine, circuit, cycle

- **Un chemin** est une suite d'arcs dont l'extrémité de l'un est l'origine de son successeur. Sa longueur correspond à son nombre d'arcs. Si aucun arc n'est répété, on dit que le chemin est simple. Il est en plus élémentaire s'il ne rencontre au plus qu'une fois chaque sommet.

Exemple F :

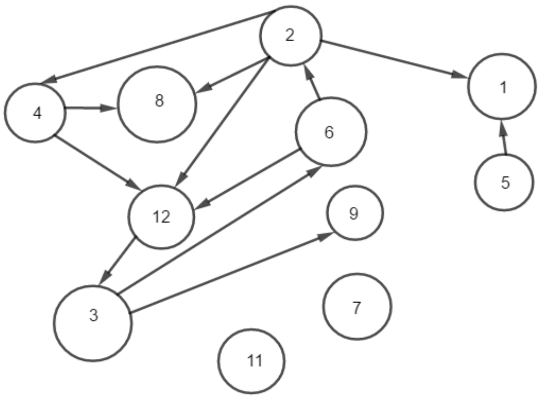
Sur le graphe orienté (H) ci-dessus, (3;6)-(6;12) est un chemin reliant **3** à **12**; on le note (3 ;6 ;12).

- **Une chaîne** est une suite dont les éléments sont alternativement des sommets et des arêtes de G d'extrémités successivement communes. Sa longueur correspond à son nombre d'arêtes. Si aucune arête n'est répétée, on dit que la chaine est simple.

Exemple H : Sur le graphe G_1 (de l'exemple B), 2-4-5 est une chaîne.

- **La longueur d'un chemin (ou d'une chaîne)** est le nombre d'arcs du chemin (ou d'arêtes de la chaîne).

NB : Pour les exemples I et J, nous utiliserons ce schéma (H) :



Graphe orienté (H)

Exemple I : La longueur du chemin (2 ;4 ;12 ;3 ;6 ;2) est 5 dans le graphe orienté (H).

- **Un circuit** est un chemin dont l'origine et l'extrémité sont identiques.

Exemple J : (2 ;4 ;12 ;3 ;6 ;2) est un circuit du graphe orienté (H).

- **Un cycle** [ou chemin fermé] (désigne un circuit dans un graphe non orienté) est une chaîne dont l'extrémité initiale coïncide avec l'extrémité finale. S'il n'a pas réplication d'arêtes entre les extrémités du cycle, on dit que le cycle est simple.

Exemple K : sur le graphe G_1 (de l'exemple B) de l'exemple A, $2-6-5-4-2$ est un cycle.

• **Le diamètre** d'un graphe est la longueur de la plus grande chaîne (respectivement chemin) de toutes (respectivement. tous) reliant deux sommets quelconques du graphe sans répétition d'arête (respectivement arc).

Exemple L : Le diamètre du graphe G_1 (de l'exemple B), de l'exemple A, est **5.**

Il est intéressant de voir si le graphe est d'un « seul tenant » par la notion de connexité :

c) Ordre, taille, connexité d'un graphe

• **L'ordre d'un graphe** est le nombre de sommets du graphe.

• **La taille d'un graphe** est le nombre d'arêtes du graphe.

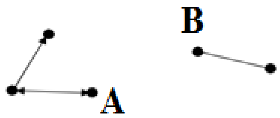
Exemple M :

L'ordre de G_1 (de l'exemple B), de l'exemple A, est **6**. La taille de G_1, de l'exemple A, est **6**.

• **Un graphe connexe** est un graphe dans lequel deux sommets quelconques peuvent être reliés par une chaine (graphe non orienté) ou un chemin (graphe orienté).

Exemple N :

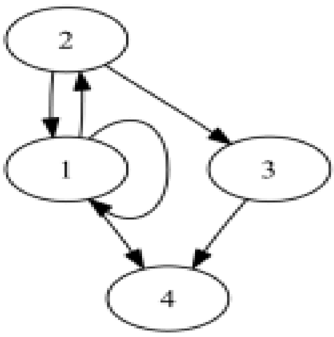
- le graphe G_1 (de l'exemple B), est connexe.
- le plan d'une ville doit être idéalement connexe (**expliquer [**pour pouvoir aller "partout"**]**).

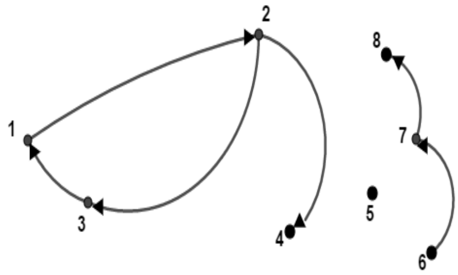


- Ce graphe n'est pas connexe puisqu'on ne peut aller de A à B.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

Exercice 1 : Considérons deux graphes





2 – Graphe B

2- Graphe A

1- Donner l'ordre, le degré, le diamètre, un circuit/cycle de chacun de ces graphes.

2- Entre le graphe A et le graphe B, lequel est connexe ?

Exercice 2 :

1- Montrez que la somme des degrés de tous les sommets d'un graphe quelconque est paire.

2- Peut-on tracer dans le plan cinq droites distinctes, telles que chacune d'entre elles ait exactement trois points d'intersection avec les autres? En modélisant ce problème par un graphe, démontrez que cela n'est pas possible.

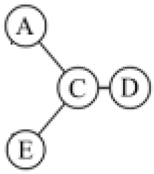
LECON 2 : GRAPHES ET ARBRES (100 min)

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES :

- Reconnaitre un arbre, ses arbres couvrants ou sous-graphes valués (pondérés) ;
- Calculer le poids d'un sous-graphe ;
- Déterminer la matrice d'adjacence d'un graphe.

TEST DE PRÉREQUIS :

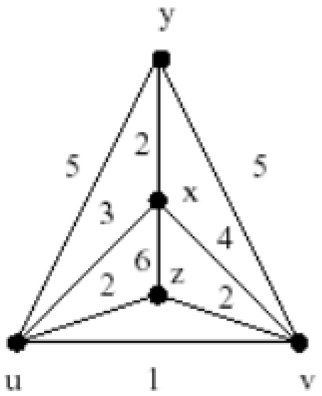
Dessiner un arbre de choix autour d'une situation concrète de la vie.



Solution : Routes (arrête) et carrefour (sommets).

SITUATION PROBLEME :

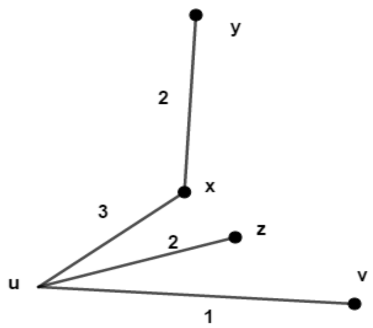
Un réseau d'ordinateurs de caractéristiques identiques est relié comme visualisé sur ce graphe avec les distances représentées entre les machines :



Peux-tu trouver un réseau (graphe partiel) permettant de relier les ordinateurs entre eux sous la configuration d'un arbre de choix avec quatre arêtes ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1- Expliquer pourquoi cette proposition répond à la question:



2- Pouvez-vous proposer un autre graphe partiel répondant à la question?

RESUME :

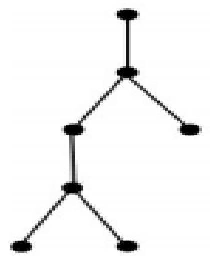
Soit le graphe $(E,\ R)$ où E désigne l'ensemble des sommets et R celui des arêtes.

a) Nous définirons ce qu'est un arbre, un arbre couvrant ou un arbre pondéré :

• **Complet** : un graphe est complet si quels que soient deux sommets distincts, il existe un arc (ou une arête) les reliant dans un sens ou dans l'autre.

• **Arbres**

- Un arbre est un graphe connexe ne contenant aucun cycle.
- Un arbre dit fini ou infini selon que le nombre de sommets l'est.



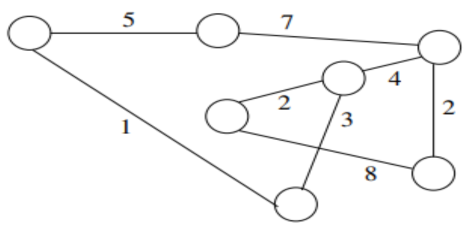
3- Exemple d'arbre

• **Arbre couvrant d'un arbre** $(E,\ R)$: c'est un arbre contenant tous les sommets de E.

Dans un graphe il est possible d'étiqueter les sommets et / ou les arêtes au moyen d'une fonction de E (respectivement de R) dans un ensemble d'étiquettes donné. Si les étiquettes sont à valeur numérique (entier, réel...) elles peuvent représenter un poids (coût, valeur...) pour les sommets ou les arêtes : on parle alors de graphe pondéré.

Nous nous concentrons dans ce cours au cas de la pondération des arêtes.

• **Graphes valués (pondérés)** : Un graphe (E, R, f)aux arêtes pondérées est un graphe muni d'une fonction de poids $f : \mathbb{R} \longrightarrow H$ avec $H \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}\}$.

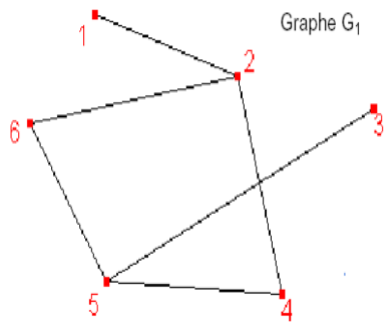


• **Poids d'un sous-graphe** : Le poids d'un sous-graphe est la somme des poids de ses arêtes.

b) A présent, regardons ce qu'est une matrice d'adjacence :

• **Matrice d'adjacence d'un graphe orienté ou non**: On utilise un tableau de booléens, dite matrice d'adjacence, de dimension n x n où n = ordre du graphe, qui se construit ainsi : l'élément d'indice i et j vaut 1 si et seulement si il existe un arc $i \mapsto j$ (ou arête) entre les sommets i et j (et 0 sinon).

Exemple 1: la matrice d'adjacence du graphe G_1

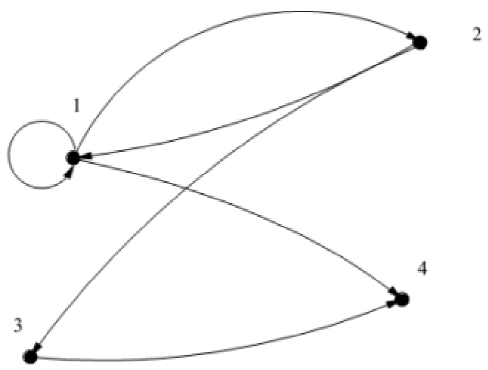


est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
⇒ type graphe = array [1..n, 1..n] of boolean;
```

Exemple 2 : Considérons cette matrice



et sa matrice d'adjacence est

	1	2	3	4
1	1	1	0	1
2	1	0	1	0
3	0	0	0	1
4	0	0	0	0

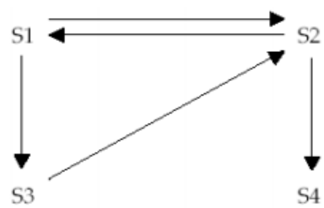
NB : Dans le cas où les sommets du graphe ne sont pas numérotés consécutivement de 1 à n (n étant l'ordre du graphe étudié), il faut donc numéroter arbitrairement le graphe de 1 à n.

Avantages de la **matrice d'adjacence d'un graphe** : rapidité des recherches, compacité de la représentation, simplicité des algorithmes de calcul. Inconvénients : représentation ne convenant qu'aux graphes simples; redondance des informations pour les graphes non orientés; stockage inutile de cas inintéressants (les zéros de la matrice), à examiner quand on parcourt le graphe (pour la complexité des algorithmes, le nombre d'arêtes E est à remplacer par l'ordre au carré).
La propriété qui suit permet de voir le lien entre connexité et arbre couvrant :

c) Propriété : Un graphe est connexe si et seulement si il contient un arbre couvrant.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

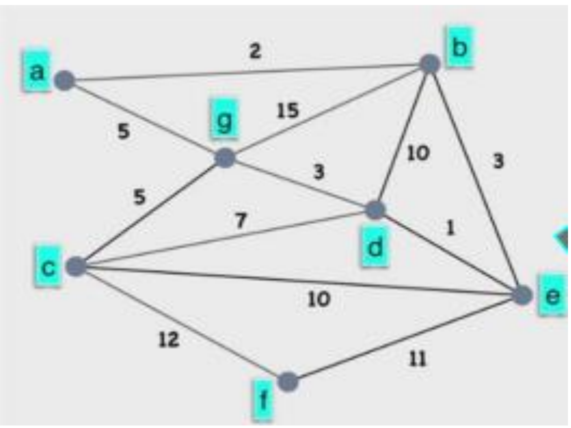
Exercice 1 :



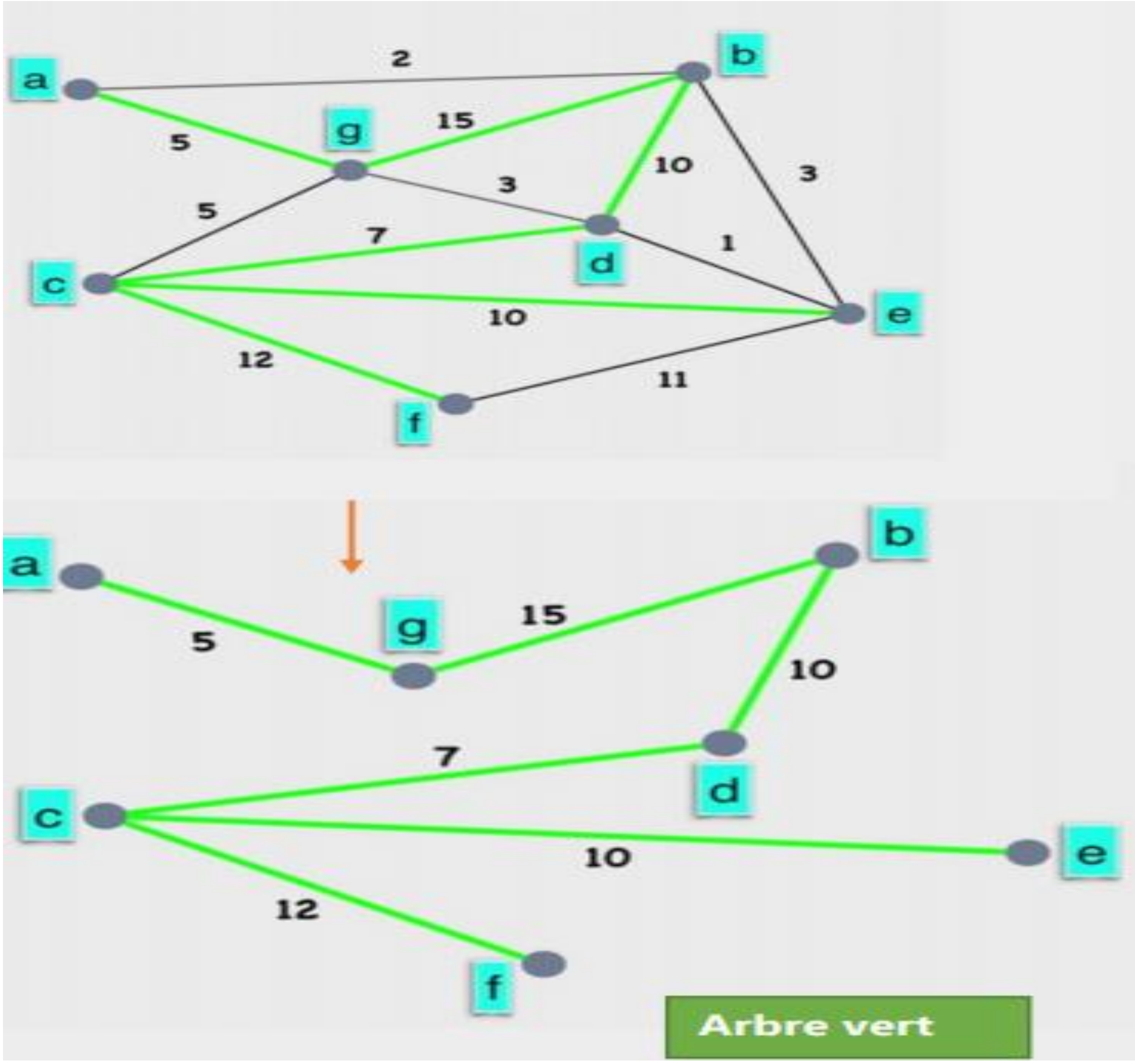
a) Quelle est la matrice d'adjacence du graphe suivant?
b) Que se passe-t-il si le graphe est simple (non orienté)?

Exercice 2 : (sur la Propriété c.)

Trouver un arbre couvrant pour ce graphe en précisant le poids :



<u>**Une solution possible de poids 59**</u>:



LECON 3 : GRAPHES ET ALGORITHMES D'EFFICACITE (100 min)

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES:

- Identifier / Déterminer un arbre couvrant d'un graphe connexe (**BFS**) ;
- Identifier / Déterminer un arbre couvrant de poids minimum d'un graphe pondéré (**Kruskal, Prim**) ;
- Déterminer un chemin de poids minimum (plus court chemin) entre deux sommets d'un graphe pondéré (**Dijkstra**).

TEST DE PRÉREQUIS :

1- Qu'est-ce qu'un algorithme ?

2- Donner un algorithme permettant de résoudre l'équation $Ax^2+Bx+C=0$ dans $\mathbb{R}$, (A,B, C réels).

Solution:

1- Un algorithme de façon générale, n'est rien de plus qu'une suite finie d'instructions, à appliquer, dans un ordre déterminé, à un nombre fini de données, pour produire un résultat.

2- Notation: sqrt = racine carrée.

(Déclarer A, B, C, D, x, y comme des variables à valeurs réelles)

- Initialisation:

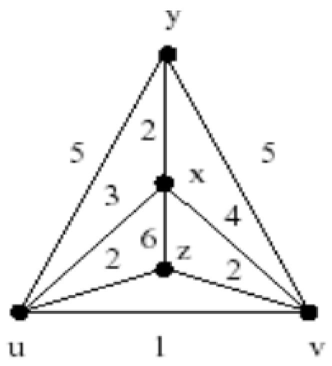
A? (entrer la valeur de A)
B? (entrer la valeur de B)
C? (entrer la valeur de C)

- Traitement:

```
D = B² - 4AC (calcul du discriminant)
si D > 0 alors
        afficher «Le discriminant est positif et on a deux racines»
        x = (-B - sqrt(D))/(2*A)
        y = (-B + sqrt(D))/(2*A)
        afficher x et y
sinon
    si D =0 alors
        afficher «Le discriminant est nul et on a une racine»
            x = -B/(2*A)
        afficher x
    sinon
            afficher «Le discriminant est négatif et on a aucune racine»
    fin du si
fin du si
```

SITUATION PROBLEME :

Un réseau comporte des machines u, v et y qui doivent pouvoir communiquer entre elles. Les liaisons envisagées sont représentées par le graphe suivant (les arêtes sont étiquetées par la distance entre les machines):



Proposer une idée pouvant guider l'élaboration du câblage du réseau à moindre coût.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1- Pourquoi le réseau final répondant à la question doit être un graphe partiel connexe ?

2- Pourquoi ce graphe partiel doit être sans cycle ?

3- Donner un pseudo-algorithme permettant de déterminer un graphe partiel répondant à la question.

SOLUTION :

1- La connexité permet aux « machines u, v et y [de] communiquer entre elles ».

2- Remarquons que le graphe partiel recherché est sans cycle pour ne pas augmenter inutilement le coût global.

3- Il s'agit d'enlever des arêtes au graphe de façon qu'il reste connexe, et que la somme des pondérations des arêtes soit la plus petite possible.

Ce problème se pose ainsi lorsqu'on désire relier n villes par un réseau routier de coût minimum. Les sommets du graphe représentent les villes, les arêtes, les tronçons qu'il est possible de construire et les poids des arêtes correspondent aux coûts de construction du tronçon correspondant. Le problème est ramené au problème suivant :

RESUME : Soit le graphe G = (E, R) où E est l'ensemble des sommets et R celui des arêtes.

Définition 1 :

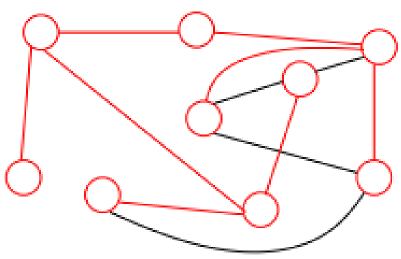
Le problème de l'arbre couvrant de poids minimal est celui qui consiste à déterminer un arbre qui soit un graphe partiel d'un graphe G simple connexe et dont le poids total est minimal.

1. Remarque : Ce problème de l'arbre couvrant de poids minimal a été proposé (et résolu) en 1926 par Otakar Borůvka pour la construction de réseaux électriques efficaces.

- Les sommets du graphe G représentent des lieux à connecter : villes, ordinateurs, composants électroniques, etc.
- Les arêtes du graphe G représentent les liens (routes, câbles, tuyaux...) potentiels entre ces lieux, avec les coûts effectifs de création (ou d'activation) de ces liens.
- L'arbre couvrant minimal du graphe G est le réseau le moins coûteux ne laissant aucun lieu isolé.

Méthode et Théorème :

D'après la **Propriété *** de la leçon 2, **tout graphe connexe admet un arbre couvrant.**



Si A est un sous-graphe couvrant d'un graphe G ayant V sommets, les caractérisations suivantes sont équivalentes :

- A est un arbre couvrant de G ;
- A est sans cycle et possède V − 1 arêtes ;
- A est connexe et possède V − 1 arêtes ;
- On ne peut pas ajouter une arête à A sans créer un cycle ;
- On ne peut pas retirer une arête à A sans briser sa connexité.

Caractérisations particulièrement utiles pour l'écriture d'algorithmes :

- le nombre d'arêtes est un bon critère d'arrêt ;
- l'absence de cycle (respectivement la connexité) est un invariant à maintenir.

Quelques stratégies pour identifier/déterminer un arbre couvrant de poids minimum d'un graphe pondéré):

Algorithmes de détermination d'un arbre couvrant

Deux idées duales :

$A := (X, \emptyset)$ (le graphe vide)
tant que $nbAretes(A) < V - 1$
faire
  Choisir une arête de G qui ne crée pas de cycle.
  Ajouter cette arête à A.

$A := (X, R)$ (le graphe G)
tant que $nbAretes(A) > V - 1$
faire
  Choisir une arête de A qui n'est pas indispensable à la connexité.
  Retirer cette arête à A.

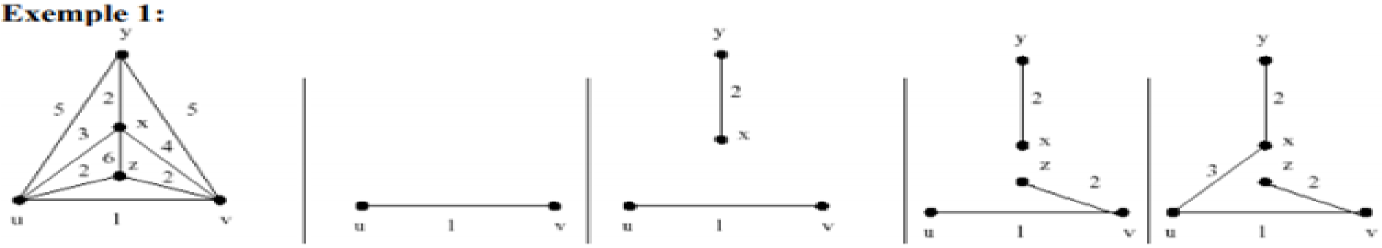
Par construction le graphe A obtenu est un arbre couvrant du graphe G (pour peu que G soit connexe). On considère donc le graphe G = (X, R) où R est l'ensemble des couple de sommets aussi noté E l'ensemble des arêtes.

• **Algorithme de Kruskal** (Identifier/Déterminer un arbre couvrant de poids minimum d'un graphe pondéré): La stratégie de cet algorithme consiste à construire l'arbre en question comme suit : on part d'une solution vide. On choisit, à chaque fois, une arête de G de poids minimum et qui ne crée pas de cycle. Soit X l'ensemble des sommets de G avec cardinal(X)=V et E l'ensemble des arêtes. On utilisera un ensemble d'arêtes T qui sera en sortie l'arbre couvrant minimal et un ensemble d'arêtes F qui représentera les arêtes qui peuvent être choisies.

Algorithme:

```
T = { };
F = E ;
tant que |T| < V - 1 faire
  trouver une arête e de F de poids minimal
  F = F - e
    si T + e est acyclique
     alors T = T + e
   finsi
fin tant que
```

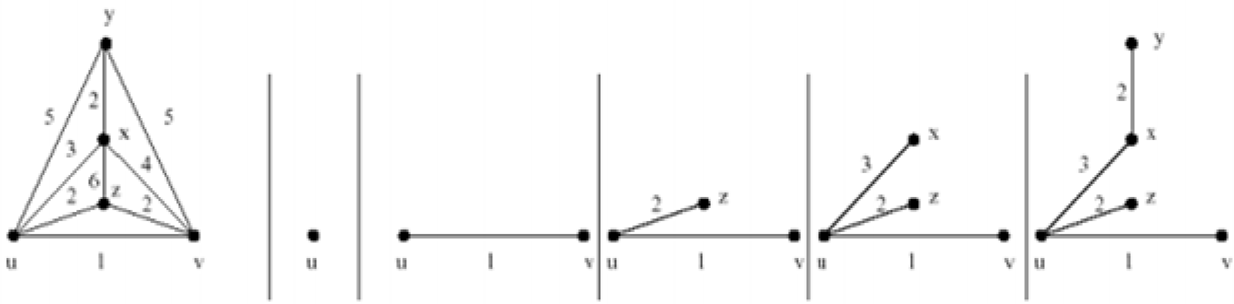
Exemple 1:



Les différentes étapes pour construire l'arbre T

• **Algorithme de Prim** (Identifier/Déterminer un arbre couvrant de poids minimum d'un graphe pondéré): L'algorithme de Kruskal veille à maintenir la propriété d'acyclicité (c'est-à-dire « sans cycle ») d'un arbre alors que l'algorithme de Prim se base sur la connexité d'un arbre. L'algorithme de Prim fait pousser un arbre couvrant minimal en ajoutant au sous-arbre T déjà construit une nouvelle branche parmi les arêtes de poids minimal joignant un sommet de T à un sommet qui n'est pas dans ce dernier. L'algorithme s'arrête lorsque tous les sommets du graphe sont dans T. Soit X l'ensemble de sommets du graphe de départ G. On utilisera un ensemble d'arêtes qui sera en sortie l'arbre recouvrant en question, et S un ensemble qui contiendra les sommets de T.

$T = \emptyset$
$S = S \cup x$
tant que $S \neq X$ faire
  trouver une arête $e = \{y,s\}$ de poids minimal tel que $y \in X\text{-}S$ et $s \in S$
  $T = T \cup \{y,s\}$
  $S = S \cup y$
findutantque

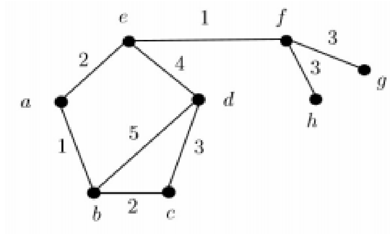


Les différentes étapes pour construire l'arbre T

Les Pr Andjiga et Dr Loumnga, présentent plus simplement cet algorithme de Prim ainsi:

1. Trouvez l'arête avec les plus petits poids dans le graphe. L'assombrir et encerclez ses deux sommets. Les liens sont rompus arbitrairement.
2. Trouvez l'arête avec le plus petit poids parmi les arêtes non assombris restants ayant un sommet encerclé et un sommet non encerclé. Assombrir cette arête et son sommet non encerclé.
3. Répétez l'étape 2 jusqu'à ce que tous les sommets soient encerclés.

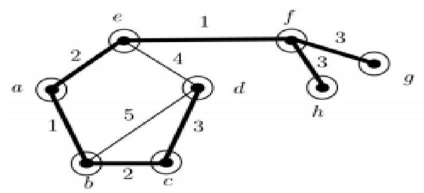
Application: Nous allons utiliser **l'Algorithme de Prim** pour construire un arbre couvrant de poids minimum pour le graphe pondéré de la figure reproduite ci-dessous :



À l'étape 1, nous pouvons voir qu'il y a deux arêtes de poids minimal; l'arête e-f et l'arête a-b ont un poids de 1. Nous choisissons l'arête e-f que nous assombrissons, puis nous encerclons les sommets f et e.

À l'étape 2, nous pouvons voir que l'arête a-e de poids 2, est le plus petit poids parmi les arêtes non assombris restants dont un sommet est encerclé et l'autre pas. Par conséquent, nous pouvons assombrir l'arête a-e et encercler le sommet a.

L'étape 3 indique que nous devons répéter l'étape 2, ainsi nous pouvons assombrir l'arête ab de poids 1 et encercler le sommet b. Ensuite, nous assombrissons l'arête b-c de poids 2 et encerclons le sommet c. Notez que nous avons maintenant le choix, l'arête f-g de poids 3, l'arête f-h de poids 3 et l'arête c-d de poids 3 sont tous des choix possibles. Assombrissons l'arête c-d et encerclons le sommet d par exemple, puis assombrissons l'arête f-g et encerclons g, puis faisons de même pour l'arête f-h et le sommet h. Tous les sommets ont été encerclés et sont connecté, nous avons donc un arbre couvrant minimum avec un poids minimal de 3 + 3 + 1 + 2 + 1 + 2 + 3 = 15. (Voire figure suivante).

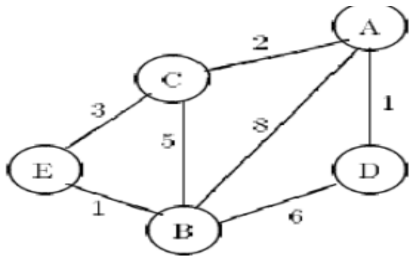


• **Algorithme de Dijkstra** (Déterminer un chemin de poids minimum, plus court chemin, entre deux sommets d'un graphe pondéré): Soit un graphe (orienté ou non) pondéré, c'est-à-dire chaque arc de ce graphe est muni d'un poids (nombre réel). Le poids d'un chemin est défini comme étant la somme des poids des arcs qui le constituent. Le problème du plus court chemin, dans ce chapitre, consiste à déterminer le poids minimal d'un chemin d'un sommet à tous les autres, en supposant des poids positifs.

L'algorithme de **Dijkstra** est présenté ci-après :

```
POUR tout sommet t
    d(s; t) := +infini
FINPOUR;
T[s] = 0;
TANT QU'il reste des sommets non fixés
     choisir un sommet w non fixé tel que T[t] soit minimal;
     supprimer  w des sommets non fixés
     POUR tout (w,x) dans E
          SI T[x] > T[w] + poids (w,x)
              ALORS
                T[x] = T[w] + poids (w,x)
                Si  x n'est pas membre de frontiere
                     Alors ajouter x à frontiere
           FIN SI
      FIN POUR
FIN TANT QUE
```

Exemple : Soit à chercher les plus courts chemins depuis le sommet A vers tous les autres sommets dans le graphe suivant



Le tableau suivant donne les distances depuis A et les arcs marqués au cours des différentes étapes de l'algorithme :

Permanent	frontiere	poids temporaire du chemin	poids fixe du chemin
{}	{A}	Ta = 0	Ta =0
{A}	{B,C,D}	Tb =8 ;Tc=2 ;Td=1	Td=1
{A,D}	{B,C}	Tb = 7, Tc = 2	Tc =2
{A,D,C}	{E,B}	Te = 5, Tb =7	Te = 5
{A,D,C,E}	{B}	Tb = 6	Tb =6
{A,D,C,E,B}	{}		

sommets	A	B	C	D	E
initialement	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
on fixe A		$8\ (AB)$	$2\ (AC)$	$1\ (AD)$	$+\infty$
on fixe D		$7\ (DB)$	2		$+\infty$
on fixe C		7			$5\ (CE)$
on fixe E		$6\ (EB)$			
valeurs finales	0	$6\ (EB)$	$2\ (AC)$	$1\ (AD)$	$5\ (CE)$

Pr Andjiga et Dr Loumnga, présentent plus simplement cet algorithme de Dijkstra ainsi :

1. Sélectionner le sommet de départ u et fixer son poids à 0.
2. Attribuer provisoirement un poids ∞ aux autres sommets.
3. Tant qu'il reste des sommets dont les poids ne sont pas définitivement fixés, répéter les instructions suivantes :
- **3.1.** Parmi les sommets dont le poids n'est pas définitivement fixé, choisir un sommet X dont le poids p est minimal, puis fixer définitivement p comme poids de X.
- **3.2.** Pour tous les sommets Y dont le poids n'est pas définitivement fixé et qui sont adjacents au dernier sommet fixé X, calculer la somme s du poids de X et du poids de l'arête reliant X à Y.

• Si la somme s est inférieure au poids provisoirement affecté au sommet Y, affecter provisoirement à Y le nouveau poids s et indiquer en indice le sommet X pour se souvenir de sa provenance.

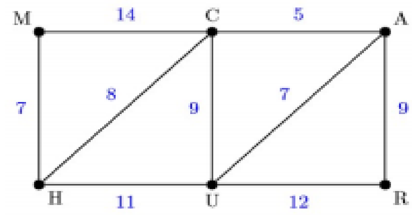
• Si la somme s est supérieure au poids provisoirement affecté au sommet Y, on ne change rien.

4. Quand le sommet d'arrivé v est définitivement fixé : Le chemin de poids minimum se lit « à l'envers », de v à chacun de ses prédécesseurs successifs.

Application : Sur le tableau suivant sont indiqués les temps moyens (en minutes) mis par un automobiliste pour relier deux lieux de la ville de Yaoundé. On souhaite aller d'un point R au point M. Déterminons un chemin qui soit le plus rapide à l'aide de l'algorithme de **Dijkstra**.

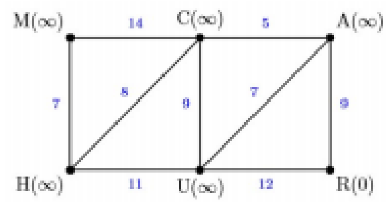
	R (Rond-point Express)	A (Assemblé nationale)	C (Carrefour ENAM)	U (Université Yaoundé I)	H (Hilton Hotel)	M (Marché central)
R		9		12		
A			5	7		
C				9	8	14
U					11	
H						7
M						

Construisons un graphe pondéré représentant cette situation, les sommets représentant les lieux. Deux sommets sont adjacents s'il existe une voie



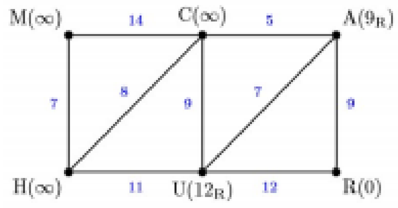
automobile entre les lieux qu'ils représentent. Les poids sur les arêtes représentent la durée moyenne.

Etapes 1 & 2 : Le sommet de départ R est affecté de 0, tous les autres sont ∞.

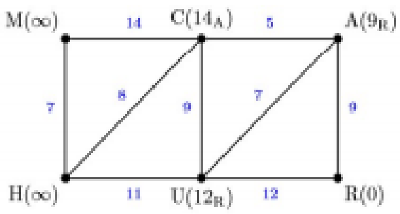


Etapes 3 : Depuis R, on peut aller en A (poids de 9) ou U (poids de 12). Les autres sommets restent inchangés.

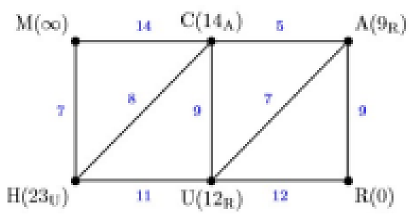
- La valeur minimale est 9 lorsque l'on vient de R. On sélectionne A.



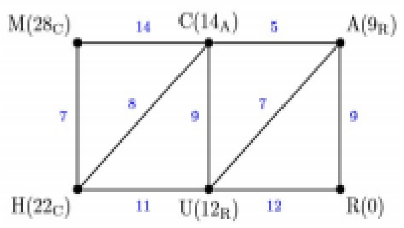
- Depuis A, on peut aller en C (poids de 9+5 = 14) ou en U (poids de 9+7 = 16 > 12). Le poids en arrivant à U étant supérieur à celui obtenu en passant de R à U, on ne le garde pas. La valeur minimale est 12 lorsque l'on vient de R. On sélectionne U.



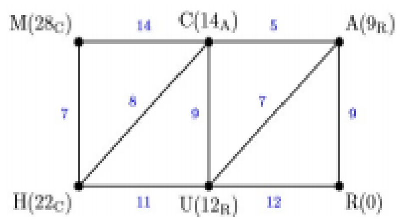
- Depuis U, on peut aller en C (poids de 12+9 = 21 > 14) ou en H (poids de 12+11 = 23). La valeur minimale est 14 lorsque l'on vient de A. On sélectionne C.



- Depuis C, on peut aller en H (poids de 14+8 = 22) ou en M (poids de 14+14 = 28). La valeur minimale est 22 lorsque l'on vient de C. On sélectionne H.



- Depuis H, on peut aller en M (poids de 22+7 = 29 > 28). La valeur minimale est 28 lorsque l'on vient de C. On sélectionne M.



Etape 4 : Tous les sommets ayant été fixés, on lit « à l'envers » la solution : M, qui vient de C, qui vient de A, qui vient de R. D'où le trajet de le plus rapide est celui de Rond-point Express –> Assemblée nationale –> Carrefour ENAM -> Marché central.

Définition 2 : (Parcours dans les graphes) Étant donnée la racine d'un arbre, l'une des tâches les plus communes est la traversée de ce dernier en visitant tous ses nœuds, dans un ordre bien défini.

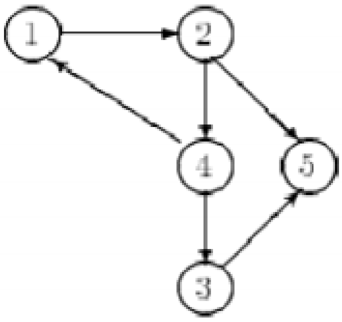
• **Parcours en largeur (BFS)** : Parcours en largeur d'abord (Breadth First Search, BFS)

But : Cet algorithme permet d'identifier un arbre couvrant d'un graphe connexe.

La stratégie de cette exploration est comme suit: on commence au sommet v et le marquer comme étant visité. L'ensemble des sommets adjacents à v sont visités. Ensuite, les sommets non visités de ces éléments sont à leur tour visités, et ainsi de suite, jusqu'à visiter tous les sommets.

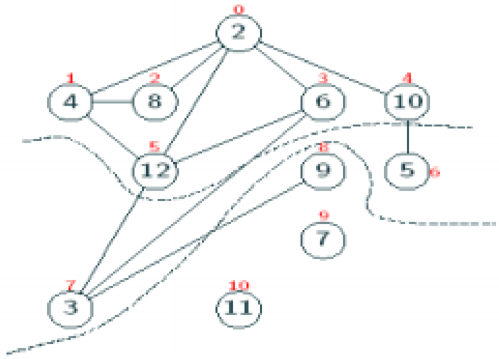
```
BFS // « debut » étant le sommet de départ
{enfiler (debut) ;
   marquer[debut] = 1;
   tant que (file non vide)
   { s = defiler () ; // traitement nécessaire sur le sommet s
   pour tout w adjacent à s faire
   si (Marque[w] == 0 )
{ Marquer[w] = 1;
  enfiler (w); } }}
```

Exemple sur un graphe



Ordre de parcours : 1, 2, 4, 5, 3

Un autre exemple: le parcours en BFS est indiqué par les numéros rouges.



Les Pr Andjiga et Dr Loumngam expliquent littéralement l'algorithme de Parcours en Largeur (BFS) pour la détermination d'un arbre couvrant :

1. Choisissez un sommet de départ, S, et étiquetez-le 0.

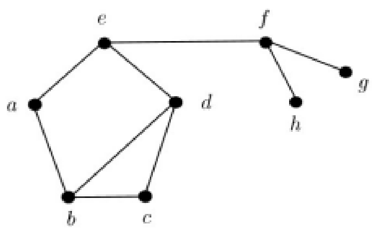
2. Trouvez tous les sommets adjacents à S et étiquetez-les 1.

3. Pour chaque sommet marqué d'un 1, trouvez une arête qui le relie au sommet étiqueté 0. Assombrir ces arêtes.

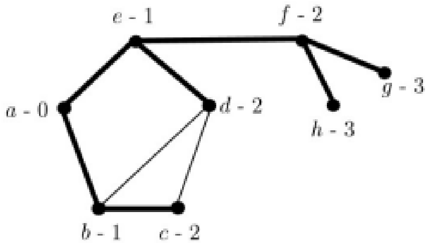
4. Recherchez les sommets non étiquetés adjacents à ceux avec l'étiquette 1 et étiquetez-les 2. Pour chaque sommet étiqueté 2, trouvez une arête qui le relie à un sommet étiqueté 1. Assombrissez cette arête. S'il existe plus d'une arête, choisissez-en une arbitrairement.

5. Continuez ce processus jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de sommets sans étiquette adjacents à ceux étiquetés. Si tous les sommets du graphe ne sont pas étiquetés, alors il n'existe pas d'arbre couvrant pour le graphe. Si tous les sommets sont étiquetés, alors les sommets et les arêtes assombries forment un arbre couvrant du graphe.

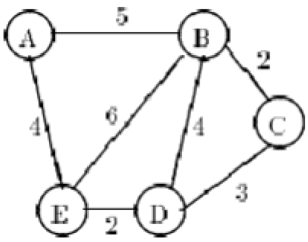
Application :



Revenons au graphe de la figure reproduite ci-dessus et appliquons l'algorithme BFS.
À l'étape 1, nous choisissons le sommet a pour être notre sommet de départ, étiquetons-le 0.
Pour l'étape 2, nous pouvons voir que les seuls sommets adjacents à a sont e et b, nous pouvons donc les étiqueter 1.
L'étape 3 nous instruit d'assombrir les arêtes a-e et a-b.
À l'étape 4, nous étiquetons 2 les sommets d, c et f, car ils sont adjacents à des sommets étiquetés 1, notamment e et b. Nous pouvons donc assombrir les arêtes e-f et b-c. Pour d, nous avons le choix car d est adjacent à e et à b, qui sont tous deux étiquetés 1 ; nous pouvons donc soit assombrir l'arête e-d ou l'arête b-d. Nous choisissons l'arête e-d.
À l'étape 5, étiquetons 3 les sommets g et h et assombrissons les arêtes f-g et f-h. Nous achevons ainsi la construction de l'arbre couvrant. On peut remarquer que cet arbre couvrant apparaît comme l'un des 11 arbres couvrant que vous avez préalablement construit.
Remarque : Si vous appliquez les mêmes étapes avec un sommet différent, ou choisissez une arête différente lorsque vous avez le choix, vous construirez un arbre couvrant différent.

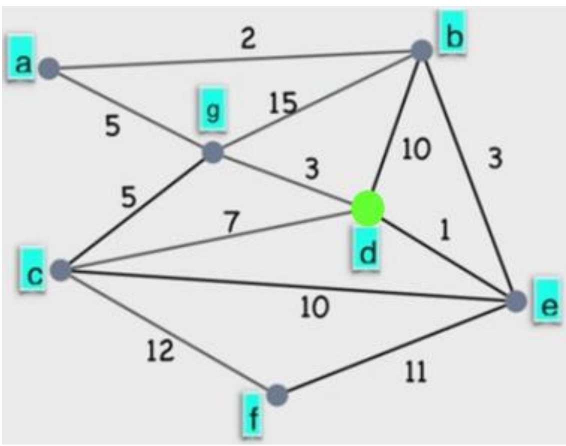


Exercice 1 : Un réseau comporte des machines A, B, C, D, et E qui doivent pouvoir communiquer entre elles. Les liaisons envisagées sont représentées par le graphe suivant (les arêtes sont étiquetées par la distance entre les machines):

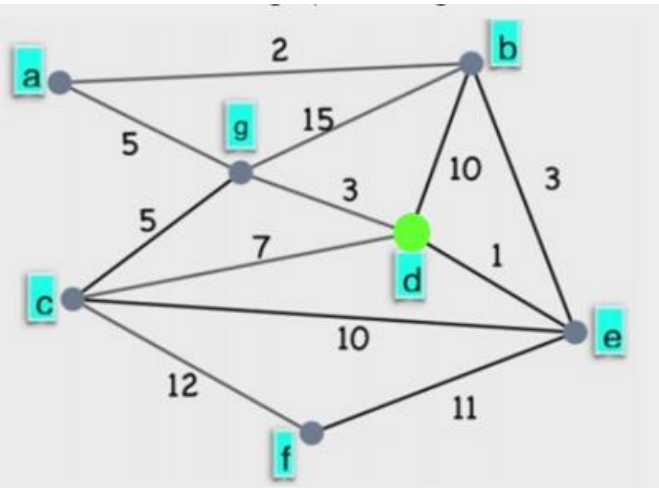


Question : Comment câbler le réseau à moindre coût ?

Exercice 2 : (**Emprunté à M. Waffo Lele Rostand**)
Utiliser **l'algorithme de Prim** pour déterminer l'arbre de poids minimal de ce graphe partant du sommet **d.**

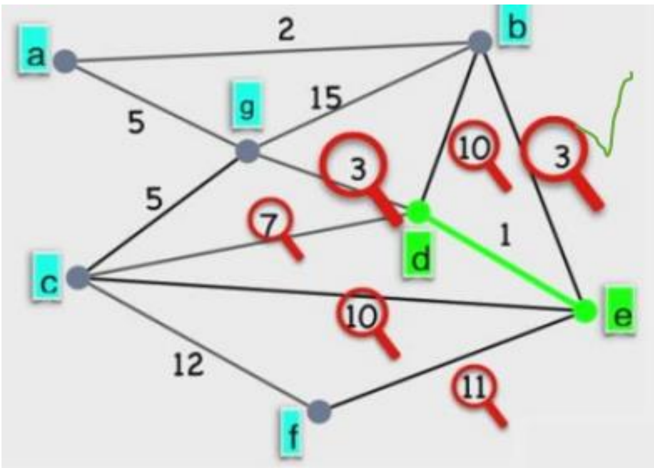


Solution proposée par M. Waffo :



L'algorithme de Prim, il dit :

1er étape : Considéré n'importe quel sommet de départ. Pour ce graphe, je pars du sommet d et ce sommet il peut être vu comme une sorte d'arbre partiel, qui ne couvre pas encore tous le graphe mais cet arbre on doit le faire grossir. À chaque étape on doit lui ajouter un sommet une arête, l'arête qui va être choisir serais celle qui est de poids minimal qui sort de l'arbre.

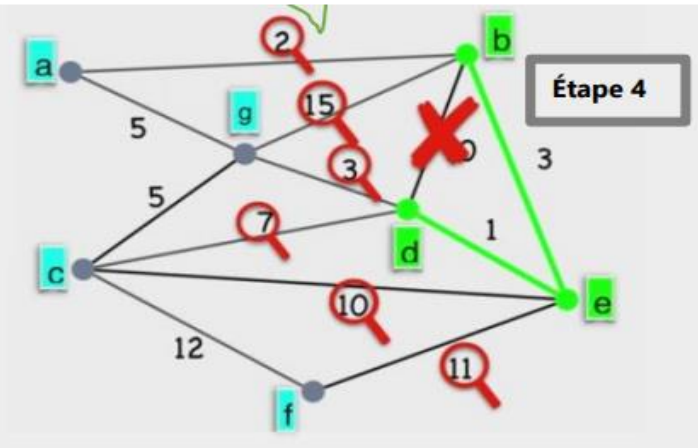


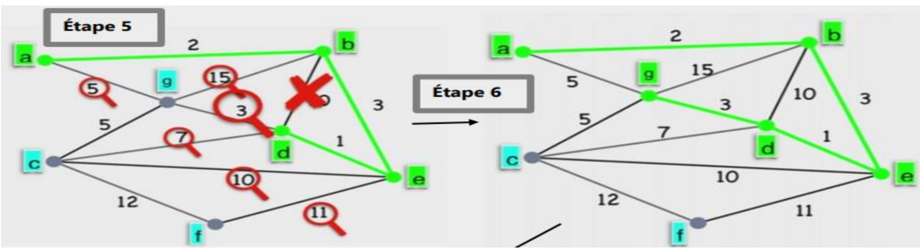
L'algorithme de Prim, il dit :

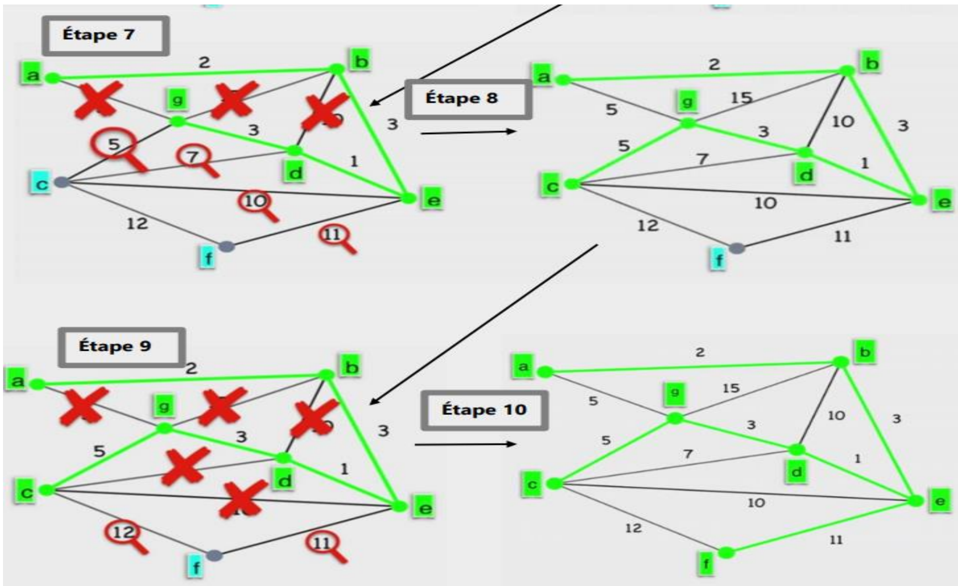
2ième étape : choisir l'arête de poids minimale qui sort de l'arbre, dont l'arête d-e de poids 1, et appliquons la même règle qu'à la 1er étape i.e on choisir les arêtes hors de l'arbre (les poids 3, 10, 3, 7, 10 et 11) et nous avons deux poids minimal identique, la loi de Prim dit : choisir, soit l'arête e-b ou d-g. Choisir e-b

Continuions sur les mêmes règles ou les poids d'arête candidate sont : 2, 15, 3, 7, 10 et 11.

Attention **l'arête entre d et b n'est pas une arrête candidate, puisqu'elle a ses deux extrémités dans l'arbre vert.**



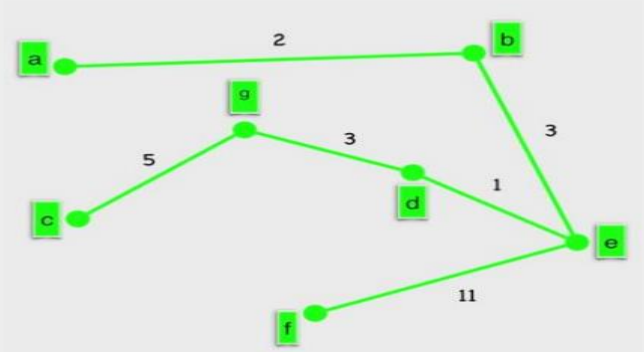




En fin, nous avons un arbre contenant tous les sommets du graphe d'origine

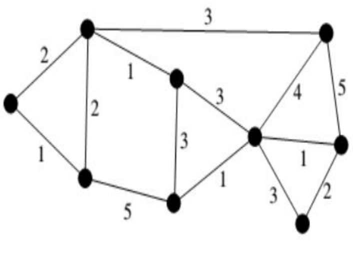
Poids(T) = 2+3+4+3+3+11

Poids(T) = 25. Donc on a la garantie que cet arbre est de **poids minimal**.



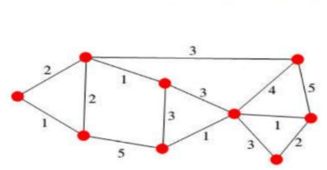
Exercice 3 :

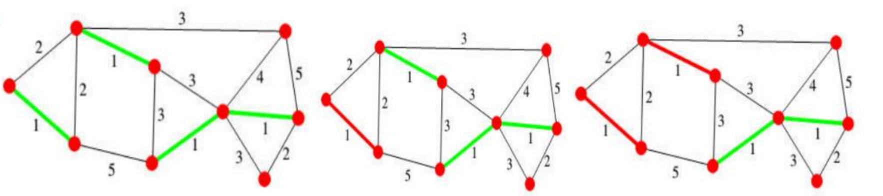
- Appliquer l'algorithme de Kruskal au graphe suivant

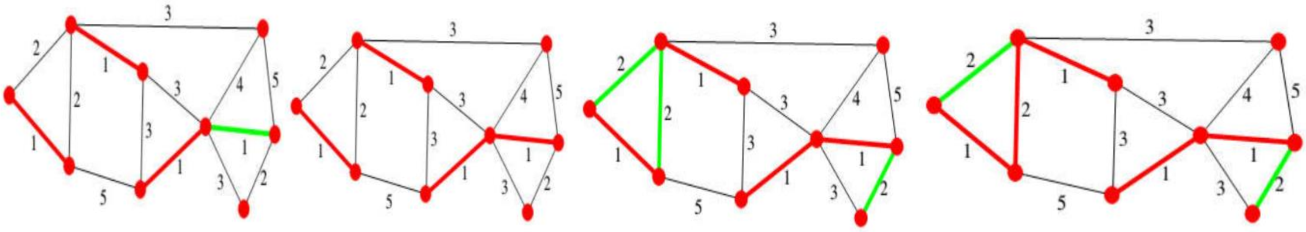


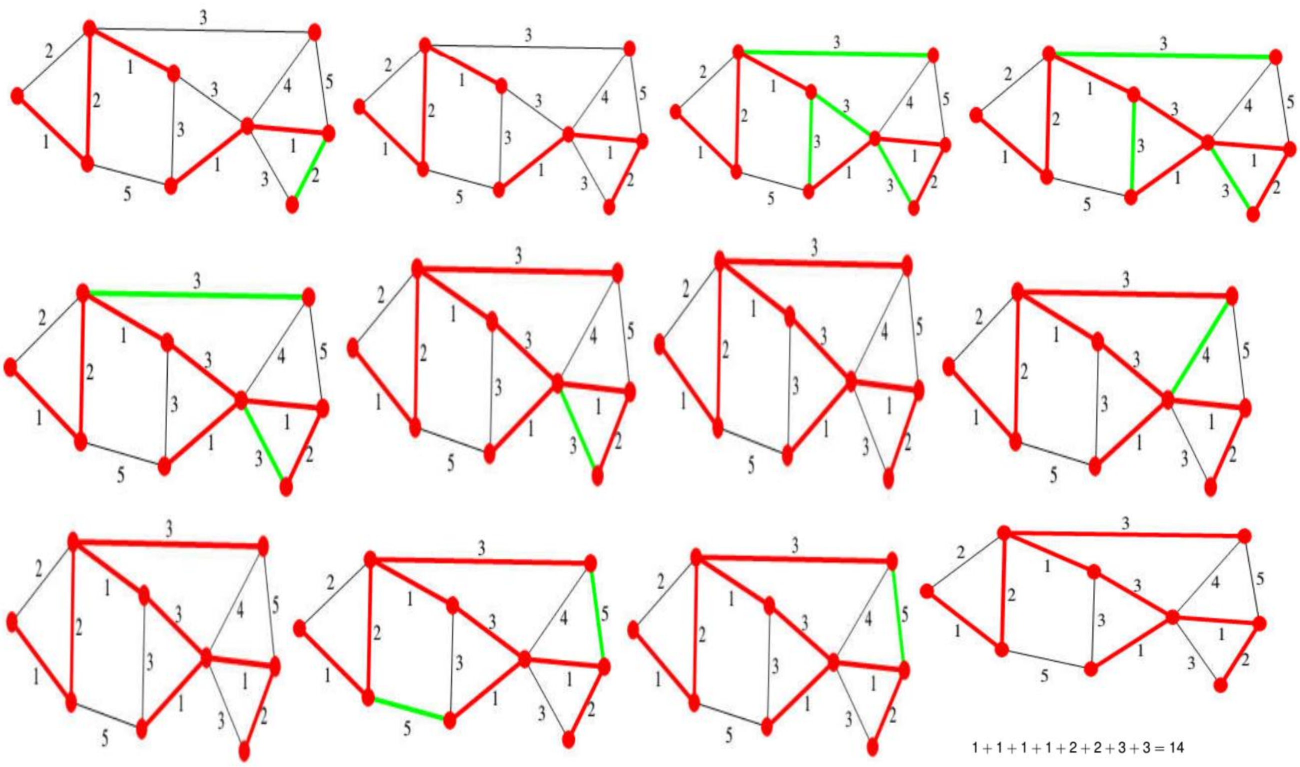
Proposition de solution :

ARBRE COUVRANT DE POIDS MINIMUM





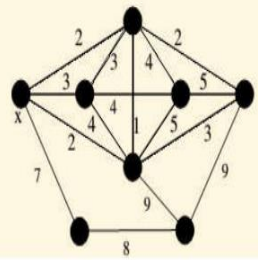




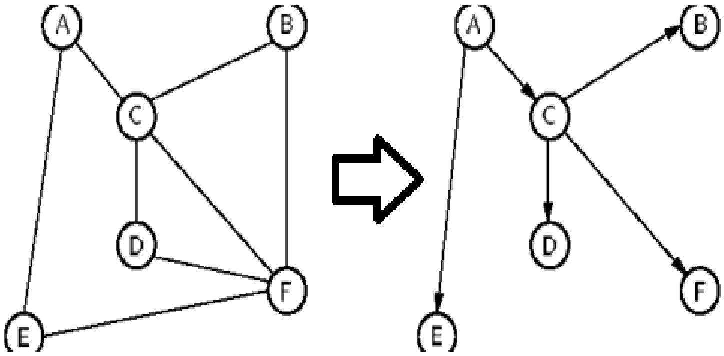
Exercice 4: Applications des algorithmes Kruskal et de parcours BFS.

ARBRE COUVRANT DE POIDS MINIMUM

Appliquer l'algorithme de KRUSKAL au graphe G suivant.



Expliquer l'application du parcours BFS dans cet exemple :



Ordre de parcours : A,C,E,D,F,B

MODULE :26	CONFIGURATION ET TRANSFORMATIONS ELEMENTAIRES DU PLAN

CHAPITRE 2 : NOMBRES COMPLEXES

INTÉRÊTS :

Les nombres complexes sont d'une grande utilité tant en mathématiques qu'en sciences physiques. Ils permettent en particulier l'étude de circuits électroniques en régime sinusoïdal et ils jouèrent un rôle déterminant dans la théorie de diffusion de la chaleur, de l'électricité et de la lumière développée par Maxwell. Dans ce chapitre, on reprend et approfondit les notions apprises en première quant aux nombres complexes. On verra en particulier comment on peut les utiliser pour trouver les racines de certains polynômes à coefficients réels ou complexes, comment ils servent à résoudre des problèmes de géométrie plane ainsi que des problèmes d'analyse réelle comme celui de la primitivation de produits de fonctions trigonométriques ou la résolution d'équations trigonométriques.

MOTIVATIONS :

Considérons l'équation $x^2 - 2x + 2 = 0$.
Le discriminant de cette équation est $\Delta = -4$. Ainsi, nous savons depuis la classe de première que cette équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$. Dans ce chapitre, nous allons introduire un ensemble dans lequel cette équation, bien qu'ayant un discriminant négatif, a des solutions.
Cet ensemble est : **l'ensemble des nombres complexes**.

PRÉ REQUIS :

- Fonction racine carré, valeur absolue.
- Equations du second degré.
- Trigonométrie.
- Vecteur, distance.

LEÇON N° 1 : FORME ALGÉBRIQUE, OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES ET REPRÉSENTATION GRAPHIQURE

DURÉE : 100 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES :

✓ Donner la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe à partir de son écriture algébrique ou cartésienne.
✓ Reconnaitre un nombre complexe réel et imaginaire pur.
✓ Représenter dans le plan complexe le point image et le vecteur image d'un nombre complexe.
✓ Déterminer l'écriture algébrique d'un quotient, d'une somme ou d'un produit de deux nombres complexes.

✓ Déterminer l'écriture algébrique du conjugué d'un nombre complexe donné.

✓ Ecrire le quotient $\frac{z}{z'}$ sous la forme $\frac{z"}{a}$ où a est un nombre réel.

SITUATION PROBLÈME :

EWANE, élève en classe de Première TI et ayant obtenu son probatoire tombe par curiosité pendant les vacances sur l'équation $x^3 + 4x = 0$. Son frère KAMGA lui dit que cette équation à trois solutions. EWANE semble ne pas le comprendre.

A votre avis, comment KAMGA a-t-il fait pour obtenir les trois solutions ?

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE :

1. On désigne par i, un nombre tel que $i^2 = -1$.
   Soit le polynôme P défini par $P(x) = (x + 1)^2 + 1$.
   a) Donner l'expression factoriser de P en fonction de i.
   $(P(x) = (x + 1)^2 + 1 = (x + 1)^2 - (-1) = (x + 1)^2 - i^2 = (x + 1)^2 - i^2 = (x + 1 + i)(x + 1 - i)$
   b) Résoudre l'équation $P(x) = 0$.
   (Les solutions sont : $-1 - i$ et $-1 + i$. Les nombres ayant cette forme sont les nombres complexes.
   Question : qu'appalle-t-on nombres complexe ?)
2. Qui peut nous dire comment KAMGA a-t-il fait pour obtenir les trois solutions de la situation problème ?

BON A SAVOIR

a) Quel nom peut-on donner au nombre i ? **(nombre imaginaire)**
b) Pourquoi la notation i ? **(initial du mot "imaginaire")**
c) A quel mathématicien devons-nous cette notation ? **(Au mathématicien Suisse Leonhard EULER en 1777)**

RÉSUMÉ :

1 Forme algébrique

Définition 1.1

On appelle nombre complexe tout nombre pouvant s'écrire sous la forme $a+ib$ où a et b **sont des nombres réels** et $i^2 = -1$
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Soit z un nombre complexe tel que : $z = a + ib$ où a et b sont des nombres réels .
L'écriture $a + ib$ est appelée **forme algébrique** de z.
1) Le nombre réel a est appelé **partie réelle** de z et noté $Re(z)$
2) Le nombre réel b est appelé **partie imaginaire** de z et noté $Im(z)$
Si $b = 0$, alors $z = a$; z est de ce fait un nombre réel. Donc tout nombre réel est un nombre complexe **c'est-à-dire** $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $z = ib$; le nombre z est dit **imaginaire pur**.

Exemple 1.1 (Ici, nous devons amener l'apprenant à reconnaitre un nombre complexe).

$z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = -6$ *et* $z_4 = 3i$ *sont des nombres complexes*

et on a : $Re(z_1) = 4$, $Im(z_1) = 5$; $Re(z_2) = 1$, $Im(z_2) = -1$; $Re(z_3) = -6$, $Im(z_1) = 0$

et $Re(z_4) = 0$, $Im(z_4) = 3$

Théorème 1.2 (Unicité de l'écriture algébrique)

Soient $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ deux nombres complexes :

$$\left(z_1 = z_2\right) \text{ si, et seulement si } \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

L'écriture algébrique d'un nombre complexe est unique.

NB : Comme $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, 0 est un nombre complexe appelé nombre complexe nul.

2 représentation d'un nombre complexe

Le plan est muni d'un repère **orthonormé direct** : $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Définition 2.1

Tout nombre complexe z = a+ib avec $a, b \in \mathbb{R}$ peut être représenté dans ce repère par :

1. un unique point : $M(a; b)$, appelé **image ponctuelle** de $z = a + ib$.
2. un unique vecteur : $\overrightarrow{OM}(a; b)$ appelé **image vectorielle** de $z = a + ib$.

On dit que z=a+ib est l'affixe du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

On note souvent $M(z)$ ou $M(a + ib)$ et $\overrightarrow{OM}(z)$ ou $\overrightarrow{OM}(a + ib)$.

Vous êtes priés de matérialiser cela dans ce repère.

Remarque 2.1.

1. *Les complexes* $z = a \in \mathbb{R}$ *sont les nombres réels et sont représentés sur* ***l'axe des abscisses***.
2. *Les complexes* $z = ib, b \in \mathbb{R}$ *sont les imaginaires purs et sont représentés sur* ***l'axe des ordonnées***.
3. *Le plan est alors appelé* ***plan complexe***.

3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 3.1

1. Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + ib$, est le complexe $a - ib$, noté $\overline{z}$.
2. Si z est l'affixe de M, $\overline{z}$ est l'affixe du symétrique de M par rapport à l'axe des réels.

Vous êtes priés de matérialiser cela par des figures

Théorème 3.2

1. Soit z un nombre complexe :
   a) $z + \overline{z} = 2Re(z)$, $z - \overline{z} = 2iIm(z)$.
   b) z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
   c) z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.
   d) $\overline{\overline{z}} = z$;

4 Règle de calculs dans l'ensemble des nombres complexes

Théorème 4.1

1. Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ alors : $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$ et $z_1z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$.
2. Si z_1 est l'affixe d'un vecteur $\vec{w_1}$ et z_2 l'affixe d'un vecteur $\vec{w_2}$ alors $z_1 + z_2$ est l'affixe du vecteur $\vec{w_1} + \vec{w_2}$.

NB : ***Dans la pratique, on peut se passe aisément de la formule en calculant avec les règles habituelles en ce qui concerne le produit de deux nombres complexes.***

Exemple 4.1. *Soient $z = -3 + 2i$ et $z' = 4 + 7i$ deux nombres complexes. Calculer $z + z'$ et zz'.*

Théorème 4.2

1. L'opposé du nombre complexe $z = a + ib$ noté $-z$ est : $-z := (-a) + i(-b) = -a - ib$.
2. z est l'affixe du point M. L'opposé de z est l'affixe du **symétrique** de M par rapport à **l'origine**.
3. Si z est l'affixe de $\vec{w}$ alors $-z$ est l'affixe de $-\vec{w}$.

Vous êtes priés de matérialiser cela dans une figure

Théorème 4.3

1. Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ alors : $z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2) := (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$.
2. Si z_1 est l'affixe d'un vecteur $\vec{w_1}$ et z_2 l'affixe d'un vecteur $\vec{w_2}$ alors $z_1 - z_2$ est l'affixe du vecteur $\vec{w_1} - \vec{w_2}$.
3. Soient A, B deux points d'affixes respectifs z_A, z_B. le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

Exemple 4.2. *On considère trois points A, B, C d'affixes respectifs :* $z_A = -3 + 2i$, $z_B = 1 + i$ *et* $z_c = 3 - 4i$.

1) *Déterminer l'affixe du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.*

2) *Déterminer les coordonnées du centre de ce parallélogramme.*

Correction

1) *ABCD est un parallélogramme si et seulement si* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ***ie*** $z_B - z_A = z_C - z_D$.

Ainsi $z_D = z_C - z_B + z_A$. *Par suite,* $z_D = -1 - 3i$

2) *I est le centre du parallélogramme équivaut à* $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$ ***ie*** $z_I - z_A = z_C - z_I$.

D'où, $z_I = \dfrac{z_A + z_C}{2}$, *par suite* $z_I = -\text{i}$.

Méthode : Transformer les données géométriques de l'exercice en terme de vecteurs puis, se ramener en écriture complexe.

Théorème 4.4 (Inverse et quotient de nombres complexes)

(Il faudra montrer aux apprenants comment on obtient ces résultats. Ne vous contentez pas de donner cela comme des résultats à retenir, mais à bien les expliquer ces calculs de façon générale comme je l'ai fait ci-dessous.)

Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un nombre complexe z' tel que $zz' = 1$.

1. Ce nombre s'appelle l'inverse de z, noté $\dfrac{1}{z}$ et il est tel que : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z \times \overline{z}}$.
2. Si $z = a+ib$ alors la forme algébrique de $\dfrac{1}{z}$ est : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + i\dfrac{-b}{a^2 + b^2}$.
3. Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ alors la forme algébrique de

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}} = \frac{(a + ib)(a' - ib')}{(a' + ib')(a' - ib')} = \frac{(aa' + bb') + i(-ab' + a'b)}{a'^2 + b'^2} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + i\frac{-ab' + a'b}{a'^2 + b'^2}$$

Exemple 4.3. *Dans la pratique, on effectue une multiplication du numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur pour se ramener à un dénominateur réel :*

1) $z = 2i$, *on a :* $\dfrac{1}{z} = \dfrac{-2i}{2i \times -2i} = \dfrac{-2i}{4} = -\dfrac{1}{2}i$

2) $z = 2 + 3i$, *on a :* $\dfrac{1}{z} = \dfrac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \dfrac{2-3i}{2^2+3^2} = \dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13}i.$

3) $Z = \dfrac{1+3i}{2-5i} = \dfrac{(1+3i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \dfrac{-13+11i}{29} = \dfrac{-13}{29} + i\dfrac{11}{29}$

Théorème 4.5

Soient z, z_1 et z_2 trois nombres complexes. Soient m et n deux entiers naturels.

1. Par convention, $z^0 = 1$.
2. $\left(\dfrac{1}{z}\right)^n = \dfrac{1}{z^n}$.
3. $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n = \dfrac{z_1^n}{z_2^n}$.
4. $z^n z^m = z^{n+m}$ et $(z^n)^m = z^{nm}$.
5. $(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n$
6. **Formule du binôme de NEWOTON.**

   $(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k$ où $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
   (Il faudra montrer aux apprenants comment utiliser le TRIANGLE DE PASCAL pour déterminer $\binom{n}{k}$.)

Conséquence :

Soit P un polynôme en z à **cœfficients réels** :

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres complexes et z complexe avec n impaire et $a_{n_0-k} = a_{n_0+k}$, a_{n_0} est le cœfficient du terme de symétrie. Alors :

$$P\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^n} P(z)$$

Dans ce cas, on retiendra :

"si un nombre complexe z_0 est une racine non nul de ce type de polynôme P, son inverse $\dfrac{1}{z_0}$ en est aussi une racine de P "

Exemple 4.4. *On considère le polynôme P défini dans $\mathbb{C}$ par* $P(x) = z^4 + 3z^3 + \dfrac{9}{2}z^2 + 3z + 1$.

Ici $a_{n_0} = \dfrac{9}{2}$ *et* $P\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{z^4}P(z)$

Théorème 4.6

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes :

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
2. $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$;
3. $\overline{(z_1)^n} = (\overline{z_1})^n$;
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $(z_2 \neq 0)$.

Conséquence :
Soit P un polynôme en z à **cœfficients réels** :

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels et z complexe. On a :

$$\overline{P(z)} = \overline{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \ldots \overline{a_n z^n}$$

(car $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$**)**
Comme $\overline{z^k} = \overline{z}^k$ et $\overline{a_k} = a_k$, on obtient : $\overline{P(z)} = a_0 + a_1\overline{z} + \ldots a_n\overline{z}^n$, d'où $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.
Si z_0 est un nombre complexe tel que $P(z_0) = 0$, il s'ensuit que $0 = \overline{P(z)} = P(\overline{z})$
On retiendra :
si un nombre complexe z_0 est une racine d'un polynôme P à cœfficients réels, son conjugué z_0 est aussi une racine de P

5 Multiplication d'un complexe par un réel

Théorème 5.1

Soit $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{w}$ le vecteur d'affixe z. Le complexe λz est l'affixe du vecteur $\lambda\vec{w}$.

Exemple 5.1. *Soit A, B deux points du plan d'affixe $z_A = 3 - i$, $z_B = -2 + 3i$.*
L'affixe du vecteur $2\overrightarrow{AB}$ est : $2(z_B - z_A) = 2(-5 + 4i) = -10 + 8i$.

Conséquence : Deux vecteurs $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ sont colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $z = \lambda z'$.

6 Puissance de i

Théorème 6.1

1. $i^2 = -1$; $i^3 = i^2 \times i = -i$; $i^4 = i^2 \times i^2 = 1$.
2. De manières générales, $i^n = \begin{cases} 1 & \text{si n=4k} \\ i & \text{si n=4k+1} \\ -1 & \text{si n=4k+2} \\ -i & \text{si n=4k+3} \end{cases}$

Exemple 6.1. *Calculer i^{343}, i^{662} et i^{541}.*

$343 = 85 \times 4 + 3$, $541 = 135 \times 4 + 1$ *et* $662 = 164 \times 4 + 2$

EXERCICE D'APPLICATION :

1. Montrer que $i^{2017} + i^{2018} + i^{2019} + i^{2020} = 0$.
   $(2017 = 504 \times 1$**,** $2018 = 504 \times 4 + 2$**,** $2019 = 504 \times 4 + 3$**,** $2020 = 504 \times 4 + 4)$
2. Mettre sous forme algébrique les nombres $(1 + i)(1 - 2i)(1 - 3i)$, $(2 - 7i)^2$ et $\frac{1-2i}{1-3i}$.
3. Résoudre l'équation : $(1 + i)z - 2 = 3 + 2i$.
4. Démontrons que : $S = (1 + i)^5 + (1 - i)^5$ est un nombre réel.
   (On montre que $\overline{S} = S$.)
5. On donne $W = \dfrac{iz \cdot \overline{z}}{z - \overline{z}}$. Justifier que $W \in \mathbb{R}$.
   (Il suffira de montrer que $\overline{W} = W$)
6. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On pose $Z = \dfrac{z - 1}{z + 1}$
   a) Écrire Z sous forme algébrique.
   $\left(Z = \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{(x + 1)^2 + y^2} + i\dfrac{2y}{(x + 1)^2 + y^2}\right)$

   b) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que :
      i. Z soit un nombre imaginaire pur.
         (Le cercle unité.)
      ii. Z soit un nombre réel.
         (La droite d'équation $y = 0$)

LEÇON N° 2 : MODULE ET ARGUMENT D'UN NOMBRE COMPLEXE

DURÉE : 100 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES :

- ✓ Calculer le module d'un nombre complexe.
- ✓ Utiliser la relation $AB = |z_B - z_A|$ pour résoudre certains problèmes de géométrie plane en utilisant les nombres complexes.
- ✓ Déterminer des arguments des nombres complexes.
- ✓ Écrire un nombre complexe sous la forme trigonométrique.
- ✓ Écrire un nombre complexe sous la forme exponentielle

PRÉ REQUIS :

1. Calculer la norme de vecteurs dans le plan.
2. Cosinus et sinus des angles particuliers :$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$.
3. Signe du cosinus et du sinus.**(Matérialiser cela dans un cercle trigonométrique)**
4. Angles associés : si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est un angle, ces angles associés sont x, $\pi - x$,

   $\pi + x$ et $2\pi - x \equiv -x[2\pi]$.**(Matérialiser cela dans un cercle trigonométrique)**
5. Trouver x dans chaque cas
   $\begin{cases} \cos(x) = -\frac{1}{2} \\ \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, $\begin{cases} \cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(x) = -\frac{1}{2} \end{cases}$

SITUATION PROBLÈME :

Un jour après le début du chapitre sur les nombres complexes, ATANGANA élève en classe de TI, se précipite sur les exercices et tombe sur cette question : **Calculer** $\left|1 + i\sqrt{3}\right|$. Ayant vue les deux barres, il applique toutes les propriétés qu'il connait sur la valeur absolue d'un nombre mais ne parvient pas à la réponse.
Que doit-il faire pour trouver ?

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE :

Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$ un nombre complexe .

1. Calculer la quantité $r = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$.
2. Mettre z sous la forme $z = r(a + ib)$.
3. Déterminer un angle θ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = a \\ \sin(\theta) = b \end{cases}$.

Commentaire : la quantité trouvée à la question 1. est applelée module du nombre complexs z et l'angle θ est un argument de z
Par la suite, traiter la **Situation problème**.

RÉSUMÉ :

1 Définition géométrique

Le plan est muni d'un repère **orthonormé direct** : $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Définition 1.1

Soit z un nombre complexe.
Soit M (respectivement $\vec{W}$) un point (respectivement un vecteur) d'affixe z.

1. On appelle **module** de z la distance OM (ou la norme $||\vec{W}||$). Le module de z est noté $|z|$.
2. Si $z \neq 0$ alors on appelle **argument** de z une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}})$ ou de $(\vec{u};\vec{W})$. L'ensemble des arguments de z est noté $arg(z)$.
3. Si $z \neq 0$ alors on appelle **argument principal** de z la mesure principale de l'angle $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}})$ ou de $(\vec{u};\vec{W})$. L'argument principale de z est noté $Arg(z)$ et est unique.
4. Le complexe nul n'a pas d'argument, ni d'argument principal mais a pour module 0

(Vous êtes priés de matérialiser cela par des figures)

Remarque 1.1.
$arg(z)$ est un ensemble infini d'arguments : si θ est élément de $arg(z)$ alors $\theta + k2\pi$ est une autre mesure de $arg(z)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}$ est un ensemble infini. On notera : $arg(z) \equiv \theta[2\pi]$, ce qui rappelle que tout argument de z est congrus à θ modulo 2π ou encore tout argument de z s'écrit sous la forme $\theta + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 1.1. *On a : $|i| = 1$ et $\text{mes}(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \frac{\pi}{2}$, donc $arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.*
Soit M_1 d'affixe -4 on a ; $|-4| = OM_1 = 4$ et $\text{mes}(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM_1}}) = \pi$, donc $arg(-4) \equiv \pi[2\pi]$.
Soit M_2 d'affixe $1+i$.
On a $|1+i| = OM_2 = \sqrt{1^2+1^2} = 2$ ***(d'après la formule de des distances)***
et $\text{mes}(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM_2}}) = \frac{\pi}{4}$, donc $arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$
(Vous êtes priés de matérialiser cela par des figures dans le but d'apprendre à l'élève a repésenté un nombre complexe connaissant son module et un de ses arguments.)

Définition 1.2

Soient A et B deux points d'affixes respectifs z_A et z_B. Alors $|z_A - z_B| = AB$.

2 Calcul algébrique du module et d'un argument

Théorème 2.1

Soit $z = a + ib$ un complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $|z| = \sqrt{z \times \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

2. Si $z \neq 0$, un argument θ de z peut être déterminé par : $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$

Exemple 2.1. *Détermination du module et d'un argument du complexe $z = -1 + i\sqrt{3}$.*

On a $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$.

On cherche à présent $\theta \in arg(z)$ tel que :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{-1}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Or :

$$\cos(\theta) = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \equiv \dfrac{2\pi}{3}[2\pi] \\ \theta \equiv -\dfrac{2\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

Comme, $\sin(\theta) > 0$ *il s'ensuit que* $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ *et* $arg(z) \equiv \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$.

3 Egalité de deux nombres complexes par module et argument

Théorème 3.1

Pour que deux nombres complexes z et z' soient égaux, il faut et il suffit que :
$|z| = |z'| = 0$ ou ($|z| = |z'|$ et $arg(z) \equiv arg(z')[2\pi]$)

NB : $arg(z) \equiv arg(z')[2\pi]$ signifie que pour tous $\theta \in arg(z)$ et $\lambda \in arg(z')$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \lambda + 2k\pi$.

Remarque 3.1.

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. *$z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $arg(z) = 0[2\pi]$ ou $arg(z) \equiv \pi[2\pi]$ ou $z = 0$.*
3. *z est imaginaire pur si et seulement si $arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $arg(z) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $z = 0$.*
4. *Attention, pour l'égalité des arguments, il faut la penser au* **NB** *ci-dessus.*

4 Module, argument et opérations avec les nombres complexes

Dans les deux théorèmes qui suivent z et z' sont des nombres complexes.

1. $z \times \overline{z} = |z|^2$ **(corrélation module-conjugué d'un nombre complexe)**
2. $|-z| = |z|$ $arg(-z) \equiv arg(z) + \pi[2\pi]$ pour $z \neq 0$
3. $|z| = |\overline{z}|$ $arg(\overline{z}) \equiv -arg(z)[2\pi]$ pour $z \neq 0$
4. $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ $arg(z \times z') \equiv arg(z) + arg(z')[2\pi]$ pour $z \neq 0$ et $z' \neq 0$
5. $|z^n| = |z|^n$ $arg(z^n) \equiv n \times arg(z)[2\pi]$ si $z \neq 0$
6. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (**Inégalité triangulaire ou inégalité de Minkowski**)
7. $z \neq 0 : \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ $arg(\frac{1}{z}) \equiv -arg(z)[2\pi]$
8. $z' \neq 0 : \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ $arg(\frac{z}{z'}) \equiv arg(z) - arg(z')[2\pi]$ pour $z \neq 0$

Exemple 4.1.

1) Soient $z_1 = -\sqrt{3} + i$ *et* $z_2 = \frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{6}$ *deux nombres complexes.*
Déterminer le module et un argument de $z_1 z_2$.

2) Déterminer la forme algébrique de $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2016}$.

Correction

1. On a : $|z_1| = 2$ et $|z_2| = \frac{1}{3}$.
   Or : $|z_1 z_2| = |z_1|.|z_2|$, donc : $|z_1 z_2| = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
   On a : $arg(z_1) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$ et $arg(z_2) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.
   Dès lors, comme $arg(z_1 z_2) \equiv arg(z_1) + arg(z_2)[2\pi]$, on obtient :
   $arg(z_1 z_2) \equiv \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}[2\pi]$, soit $arg(z_1 z_2) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
2. Posons : $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
   Il est trivial que : $z = -3z_2$ donc $|z| = |-3 \times z_2| = |-3| \times |z_2| = 3 \times \frac{1}{3} = 1$
   $arg(z) \equiv arg(z_2) + \pi[2\pi]$
   $arg(z) \equiv \frac{4\pi}{3}[2\pi]$
   $arg(z) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$
   En fin, $|z^{2016}| = |z|^{2016} = 1^{2016} = 1$ et $arg(z^{2016}) \equiv 2016 \times arg(z)[2\pi]$ ou encore
   $arg(z^{2016}) \equiv 2016 \times -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$, donc $arg(z^{2016}) \equiv -672 \times 2\pi[2\pi]$. Ainsi, $arg(z^{2016}) \equiv 0[2\pi]$ et par conséquent $z^{2016} = 1$

5 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

5.1 Définition

Définition 5.1

Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous la forme $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, avec $r = |z|$ et θ est un élément de $arg(z)$. Cette forme s'appelle **forme trigonométrique** de z et on note $z = [r, \theta]$.

Exemple 5.1. *Soit $z_1 = 1 - i$ un nombre complexe.*
$|z| = \sqrt{2}$ *et* $arg(z) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$. *Alors,* $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$

Remarque 5.1.

1. *Dans l'écriture sous forme trigonométrique, on peut remplacer θ par n'importe quelle valeur $\theta + k2\pi$ où k est un entier relatif.*
2. *Dans l'écriture $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, il est **crucial** que $r > 0$.*
   Par exemple : $z = -2\left(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})\right)$, *n'est pas une forme trigonométrique car -2 n'est pas strictement positif.*

Théorème 5.2

Soient $z = [r, \theta]$ et $z' = \left[r', \theta'\right]$ deux nombres complexes. Alors :

1. $z \times z' = [r, \theta] \times \left[r', \theta'\right] = \left[r \times r', \theta + \theta'\right]$.
2. $\frac{z}{z'} = \frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right] (z' \neq 0)$.
3. $\bar{z} = \overline{[r, \theta]} = [r, -\theta]$.
4. $z^n = [r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$ où $n \in \mathbb{N}$.
5. $-z = -[r, \theta] = [r, \theta + \pi]$.

Exemple 5.2. *On donne $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$*
Mettre sous la forme trigonométrique les complexes suivants : $z_1 \times z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\overline{z_1}$, $\frac{z_2}{z_1}$ *et* $-z_2$.
$\left(z_1 = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]\right.$ ***et*** $\left.z_2 = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]\right)$

5.2 Passage d'une forme à l'autre

Théorème 5.3

Soit z un complexe non nul. $z = a + ib = r\,(cos(\theta) + i\sin(\theta))$

$$\begin{cases} |z| = r = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{|z|} \end{cases} \iff \begin{cases} a = r\cos(\theta) \\ b = r\sin(\theta) \end{cases}$$

6 Forme exponentielle

6.1 Écriture exponentielle des complexes de module 1

Définition 6.1

Tout nombre complexe de module 1 et d'argument θ ($z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ ***sa forme trigonométrique***) peut s'écrire sous la forme :

$$z = \cos(\theta) + i\sin(\theta) := e^{i\theta}$$

Exemple 6.1.

La forme algébrique des nombres complexes $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $z_2 = e^{i\pi}$ *et* $z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$ *est :*

$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$

et $z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i.$

6.2 Cas général

Définition 6.2

Tout nombre complexe $z \neq 0$ s'écrit sous la forme $z := re^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et θ est un élément de $arg(z)$. Cette écriture est appelée « **forme exponentielle du complexe** z ».

Réciproquement Si $z \in \mathbb{C}^*$ et $z := re^{i\theta}$ avec $r > 0$ alors : $r = |z|$ et θ est un élément de $arg(z)$.

Exemple 6.2.

La forme exponentielle des nombres : $z_1 = 1 + i$ *et* $z_2 = -2i$ *est :*

On a $|z_1| = \sqrt{2}$ *et* $arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ *donc :* $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

De même, $|z_2| = 2$ *et* $arg(z_2) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ *donc :* $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

6.3 Calculs avec la notation exponentielle

Théorème 6.3

Pour tous nombres réels θ_1, θ_2 on a :

1. $e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
2. $\left(e^{i\theta_1}\right)^n = e^{i.n\theta_1}$ où $n \in \mathbb{Z}$. (**Formule de Moivre**)
3. $\dfrac{1}{e^{i\theta_1}} = e^{-i\theta_1} = \overline{e^{i\theta_1}}$
4. $\dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

EXERCICE D'APPLICATION :

1. Trouver un argument des complexes suivants : $z_1 = -1 - i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$
   (Ici, on utilisera le Théorème 2.1)
2. Mettre sous la forme trigonométrique les complexes suivants : $z_3 = -\sqrt{12} - 6i$, $z_4 = -3\sqrt{2} + i\sqrt{6}$ et $z_5 = \dfrac{\sqrt{7}}{3}(1 - i)$. **(Voir Définition 5.1)**
3. Soient $z_6 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_7 = 1 - i$ deux nombres complexes.
   a) Déterminer le module et un argument de z_6 et z_7.
   b) Ecrire sous forme algébrique et trigonométrique le nombre $\dfrac{z_6}{z_7}$.**(voir le Théorème 5.3)**
   c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.**(voir le Théorème 5.4)**
4. Soient $z_8 = 1 + i$ et $z_9 = 1 + i\sqrt{3}$ deux nombres complexes.
   a) Déterminer le module et un argument de z_8 et z_9.
   b) Ecrire sous forme algébrique et sous forme trigonométrique $z_8 \times z_9$.**(voir le Théorème 5.3)**
   c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.**(voir le Théorème 5.4)**
5. Le plan est muni d'un repère **orthonormé direct** : $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
   Déterminer l'ensemble des points $M(x, y)$ d'affixe z tels que :
   a) $|z - 4 + i| = |z - 3 + i|$.
   Méthode géométrique
   Soient A et B deux points d'affixes respectifs $z_A = 4 - i$ et $z_B = 3 - i$.
   On a : $|z - 4 + i| = |z - 3 + i| \iff |z - z_A| = |z - z_B| = \iff AM = BM$. Donc, l'ensemble des points $M(z)$ est la médiatrice du segment $[AB]$.
   b) $|z - 4 + i| = 5$.
   Méthode géométrique
   Posons $z = x + iy$.
   $|z - 4 + i| = 5 \iff |x + iy - 4 + i| = 5 \iff |x - 4 + i(y + 1)| = 5 \iff \sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2} = 5$.

Donc, $|z-4+i| = 5 \iff (x-4)^2+(y+1)^2 = 25$ Ainsi, l'ensemble de ces points $M(x,y)$ est un cercle de centre $I(4,-1)$ et de rayon $r = 5$.

c) $|\overline{z} - 1 + 3i| = 4$.

d) $|z + 3 + i| = |\overline{z} - i|$.

(Il est conseillé d'utiliser la méthode algébrique lorsque dans la relation définissant cette ensembles des points $M(z)$, intervient le conjugué $\overline{z}$ de z (comme exemple, nous avons c) et d)).

Par ailleurs, nous pouvons toujours utiliser la méthode géométrique en exploitant le fait que "un nombre complexe et son conjugué" ont la même norme pour éliminer le conjugué de $\overline{z}$ de z. Par exemple en c), $|\overline{z} - 1 + 3i| = |\overline{\overline{z} - 1 + 3i}| = |z - 1 - 3i|$ **et en d)** $|\overline{z} - i| = |\overline{\overline{z} - i}| = |z + i|$)

LEÇON N° 3 : APPLICATIONS DES NOMBRES COMPLEXES AUX ÉQUATIONS

DURÉE : 100 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES :

- ✓ Déterminer la racine carré d'un nombre complexe non nul.
- ✓ Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$.
- ✓ Reconnaître une racine d'un polynôme de degré 3 et à variable complexe.
- ✓ Factoriser un polynôme de degré 3 soit par division euclidienne soit par la méthode des cœfficients indéterminés.

SITUATION PROBLÈME :

DOUDOU dès son passage en terminal TI, regroupait les épreuves de son grand-frère matière par matière. Il découvre sur une épreuve de mathématiques :" déterminer les racines cubiques de $-8i$." Il est confus.
Aidez DOUDOU a trouvé ces racines.

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE :

Soit $W = \alpha e^{i\phi}$ où r et θ sont respectivement le module et un argument de W.

1. Soit $z = re^{i\theta}$ un nombre tel que $z^n = W$ où n est un entier naturel.
   a) Exprime le module et l'argument de z en fonction du module et argument de W.
   b) Sachant que deux nombres complexes $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ sont égaux si, et seulement si $r_1 = r_2 = 0$ ou ($r_1 = r_2$ et $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$), déduis-en les différentes valeurs que peut prendre z. **(Ces valeurs sont appelés les racines n^{ime} de z.)**
2. Détermine les nombres complexes z tels que $z^3 = -8i$.

RÉSUMÉ :

1 Racines n-ièmes de l'unité

Dans tout ce paragraphe n désigne un entier naturel non nul.

Définition 1.1

Soit $z \in \mathbb{C}$

1. On appelle racine n-ième du nombre complexe z tout nombre complexe ω tel que : $\omega^n = z$
2. On appelle racine n-ième de l'unité une racine n-ième de 1 c'est à dire tout nombre complexe ω tel que : $\omega^n = 1$

Exemple 1.1.

i est une racine deuxième de -1 ; $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est une racine cubique de 1.

NB : On note par $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ième de l'unité

Théorème 1.2

Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Il y a exactement n racines n-ièmes de l'unité, elles sont données par les puissances de ω : ω^k avec $k = 0, 1, 2, 3, ..., n-1$

c'est-à-dire $\mathbb{U}_n = \{\omega^0, \omega^1, \omega^2, ..., \omega^{n-1}\} := \{1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}}, e^{i\frac{6\pi}{n}}, ..., e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\}$

Exemple 1.2. *Trouver les racines cubiques de l'unité*

Solution

Il s'agit de trouver les racines cubiques de 1.

$1 = [1, 0]$.

Soit $z = [r, \theta]$ *un nombre complexe tel que* $z^3 = [1, 0]$.

$z^3 = [1,0] \iff \left[r^3, 3\theta\right] = [1,0] \iff \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = 0 + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}$ *avec* $k \in 0, 1, 2$. *D'où*

$z_k = \left[1, \dfrac{2k\pi}{3}\right]$ *est racine cubique de l'unité avec* $k \in \{0, 1, 2\}$.

Les racines cubiques de l'unité sont :

$z_0 = [1, 0] = 1$, $z_1 = \left[1, \dfrac{2\pi}{3}\right] = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \left[1, \dfrac{4\pi}{3}\right] = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Théorème 1.3

La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle :

c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{U}_n} z = 1 + \omega^1 + \omega^2 + ... + \omega^{n-1} = 0$

Exemple 1.3. $z_0 + z_1 + z_2 = 1 + -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} + -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$ ***(Ce sont les solutions de l'Exemple 1.3.)***

Théorème 1.4 (Expression des racines n-ièmes d'un nombre complexe)

Un complexe non nul $re^{i\theta}$ admet n racines n-ièmes données par :

$$Z_k = (\sqrt[n]{r})e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \left[(\sqrt[n]{r}), \tfrac{\theta+2k\pi}{n}\right], \text{ avec } k = 0, 1, 2, 3, ..., n-1$$

Exemple 1.4. *Trouver les racines* 4*-ièmes de* $1 - i\sqrt{3}$.

Solution

$1 - i\sqrt{3} = \left[2, -\frac{\pi}{3}\right]$.

Soit $z = [r, \theta]$ un nombre complexe tel que $z^4 = \left[2, -\frac{\pi}{3}\right]$.

$$z^4 = \left[2, -\frac{\pi}{3}\right] \iff [r,\theta]^4 = \left[2, -\frac{\pi}{3}\right] \iff \left[r^4, 4\theta\right] = \left[2, -\frac{\pi}{3}\right] \iff \begin{cases} r^4 = 2 \\ 4\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} r = \sqrt[4]{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad \text{avec } k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

les racines 4-ièmes de $1 - i\sqrt{3}$ sont les $z_k = \left[(\sqrt[4]{2}), -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right]$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

2 Équations du second degré

2.1 Équations du second degré à coefficient réel

Théorème 2.1

Pour tout nombre réel non nul a, l'équation $z^2 = a$ admet deux racines dans $\mathbb{C}$:

1. Si $a > 0$ alors les racines sont $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$
2. Si $a < 0$ alors les racines sont $-i\sqrt{|a|}$ et $i\sqrt{|a|}$.

Exemple 2.1. *Les solutions de $z^2 = 16$ sont 4 et -4. Les solutions de $z^2 = -5$ dans $\mathbb{C}$ sont : $-i\sqrt{5}$ et $i\sqrt{5}$.*

Théorème 2.2

Soit, $az^2 + bz + c = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de cette équation.

1. Si $\Delta = 0$ alors l'équation a une unique solution dans $\mathbb{R}$, $z_0 = \frac{-b}{2a}$.
2. Si $\Delta > 0$ alors l'équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$, $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
3. Si $\Delta < 0$ alors l'équation a deux solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont **conjuguées l'un de l'autre.**

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exemple 2.2. *Résoudre l'équation : $z^2 - 2z = -3$*

Solution

On ramène à un second membre nul : $z^2 - 2z + 3 = 0$. On a $\Delta = -8$, le discriminant est strictement négatif, il y a donc deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z_1 = \frac{2 - i\sqrt{8}}{2} = 1 - i\sqrt{2} \text{ et } z_2 = \frac{2 + i\sqrt{8}}{2} = 1 + i\sqrt{2}$$

qui sont bien complexes conjuguées l'un de l'autre.
NB : Tout expression $Q(z) = az^2 + bz + c$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ se factorise dans $\mathbb{C}$ et on a :
$Q(z) = az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ où z_1, z_2 sont les racines de Q.

2.2 Équations du second degré à coefficient dans $\mathbb{C}$

Définition 2.3

Soit un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$. On appelle racine carrée de z une racine deuxième de z, c'est-à-dire un complexe Z vérifiant $Z^2 = z$

Proposition 2.1

Tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines carrées. De plus, ces deux racines carrées sont opposées l'une de l'autre.

Remarque 2.1. *La notation* $\sqrt{z}$ *n'a de sens que pour* $z \in \mathbb{R}_+$. *Si on l'utilise à mauvais escient, on aboutit vite à des absurdités.* ***Par exemple*** *:* $-1 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-1 \times -1} = \sqrt{1} = 1$

Pour calculer en pratique les racines carrées d'un nombre complexe z, le plus simple consiste souvent à mettre z sous forme trigonométrique et à appliquer les formules précédentes. On dispose également d'une méthode permettant de calculer les parties réelles et imaginaires des racines carrées de z.
Il est judicieux d'utiliser cette méthode lorsque l'argument principal de z n'est pas un angle remarquable.

Méthode **(Calcul des racines carrées d'un nombre complexe)**

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Soit $Z = X + iY$ une des deux racines carrées de z : $Z^2 = z$. On a :

$$\begin{cases} |Z|^2 = |z| \\ Re(Z^2) = Re(z) \\ Im(Z^2) = Im(z) \end{cases} \quad \text{On en déduit :} \begin{cases} X^2 + Y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ X^2 - Y^2 = a \\ 2XY = Im(z) \end{cases}$$

La résolution de ce système permet d'obtenir les racines carrées de z.

Exemple 2.3. *Calculons les racines carrées de* $z = 8 - 6i$.

Solution

Soit $Z = X + iY$ une des deux racines carrées de z. Les réels X et Y satisfont :

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = \sqrt{100} = 10 \\ X^2 - Y^2 = 8 \\ 2XY = -6 \end{cases}$$

Par addition des deux premières équations, on obtient :
$X = 3$ ou $X = -3$. Par soustraction de ces deux mêmes équations, on obtient : $Y = 1$ ou $Y = -1$. Comme le produit XY est négatif, les seules possibilités sont $X = 3$ et $Y = -1$ ou alors $X = -3$ et $Y = 1$. En conclusion, $Z = 3 - i$ ou $Z = -3 + i$.
On vérifie au brouillon que ces deux complexes vérifient bien $Z^2 = 8 - 6i$.

Théorème 2.4 (Résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes)

Soient a, b, c trois nombres complexes avec $a \neq 0$.
Considérons l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, $az^2 + bz + c = 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta = 0$ l'équation admet une racine double z_0 donnée par $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
2. Si $\Delta \neq 0$ et si δ désigne une des deux racines carrées de Δ alors l'équation admet deux racines distinctes z_1 et z_2 données par : $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$.

Exemple 2.4. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2 + z - 3 + i = 0$.*

Solution

On a $\Delta = 1^2 - 4(i)(-3+i) = 5 + 12i$ et par suite, on détermine les racines carrés de Δ qui sont : $\delta_1 = 3 + 2i$ et $\delta_2 = -3 - 2i$. Sans nuire à la généralité, prenons $\delta = 3 + 2i$. Ainsi, on trouve : $z_1 = -1 + 2i$ et $z_2 = 1 - i$.

EXERCICE D'APPLICATION :

(Il est tres important de faire ces exercices avec les apprenants pour leurs apprendre a rédigé et a traité les équations de dégré $n \geq 3$.)

1. Soit P un polynôme défini par $P(z) = z^3 + (-4+2i)z^2 - 7iz + 9 + 3i$.
   a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet un solution réelle z_0 que l'on déterminera.
   ($z_0 = 3$)
   b) Trouver trois complexes a, b et c tel que $P(z)\,(z - z_0)\left(az^2 + bz + c\right)$.
   ($a = 1$, $b = -1 + 2i$, $c = -3 - i$. **Ici, nous devons utiliser les méthodes :"division euclidienne" et "méthode des cœfficients indéterminés ≡ par identification des cœfficients comme le dit en langage courant".**)
   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
   (Les solutions de cette équations sont : 3, $-1 - i$, **et** $2 - i$.**)**
2. On donne le polynôme $P(z) = -z^3 + (4+i)z^2 + (8+6i)z + 4 + 28i$.
   a) P admet une racine z_0 imaginaire pur que l'on déterminera.
   ($z_0 = -2i$)
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
   (Nous avons $P(z) = (z+2i)\left(-z^2 + (4+3i)z + 14 - 2i\right)$
3. Soit Q le polynôme défini par $Q(z) = 2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2$
   (Rappeler les conséquences des Théorème 4.6 de la leçon 1)
   a) Comparer $Q(\overline{z})$ et $\overline{Q(z)}$.
   ($\overline{Q(z)} = Q(\overline{z})$)
   b) En déduire que si z_0 est racine de Q alors il en est de même de $\overline{z_0}$.
   (Nous avons $\overline{Q(z_0)} = Q(\overline{z_0})$ **et comme** $Q(z_0 = 0$**, il en résulte que** $Q(\overline{z_0})$**. D'où le résultat.)**

c) Démontrer que si z_0 est une racine de Q alors $\frac{1}{z_0}$ est aussi une racine de Q.($z_0 \neq 0$)

(On montre que $Q\left(\frac{1}{z_0}\right) = \frac{1}{z_0^4}Q(z)$ **et on déduire par la suite le résultat.)**

d) Calculer $Q(1 + i)$.

(on trouve $Q(1 + i) = 0$**)**

e) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Q(z) = 0$.

(En prenant $z_0 = 1 + i$ **on déduit de b) et c) que** $\overline{z_0}$**,** $\frac{1}{z_0}$ **et** $\overline{\left(\frac{1}{z_0}\right)} = \frac{1}{\overline{z_0}}$ **sont les autres solutions de** Q).

LEÇON N° 4 : Applications trigonométriques et géométriques des nombres complexes

DURÉE : 100 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES :

✓ Utiliser la formule de MOIVRE pour linéariser une puissance entière de cosinus et de sinus.

✓ Utiliser les nombres complexes pour répondre a certains problèmes de géométrique.

PRÉ REQUIS :

Demandez aux apprenants bien avant la leçon de réviser la trigonométrie vue en classe de $2^{nd}C$ et de Première et de revoir l'application du binôme de NEWTON.
Par la suite, le jour de la leçon vérifiez ces pré requis avec les apprenants.

SITUATION PROBLÈME :

BITA, ayant eu son Probatoire avec mention, se met à jouer au savant devant son grand-frère. Celui-ci, voulant le mettre au pas, lui demande d'exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ de deux manières. Pour la première manière, BITA utilise les formules vu en Première ($\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et d'autres formules). Aidez le a trouvé la deuxième manière.

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE :

1. On pose : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
   a) Exprime $e^{-i\theta}$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
   b) Démontre que $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$ et $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$.
   c) Exprimer $e^{in\theta}$ en fonction de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$.
   d) En déduire que $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$. **(On dit que** $\cos(n\theta)$ **et** $\sin(n\theta)$ **sont respectivement partie réelle et partie imaginaire de** $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$**.**
2. a) Développe $(\cos(x) + i\sin(x))^3$.
   b) Déduis-en $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$.

RÉSUMÉ :

1 Applications trigonométrique des nombres complexes

Théorème 1.1 (Formule de MOIVRE)

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $(e^{i\theta})^n = e^{i.n\theta}$ c'est à dire $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Le mathématicien français **Abraham De Moivre** (XVII ième siècle) est l'auteur de cette formule souvent attribuée injustement à **Stirling**.

MÉTHODE 1 (Application de la formule de MOIVRE)

Pour exprimer $cosn\theta$ ou $sinn\theta$ en fonction de $cos\theta$ et de $sin\theta$.

1. On remarque que $\cos(n\theta) = Re[(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n]$ et que $\sin(n\theta) = Im[(\cos()\theta) + i\sin(\theta))^n]$.
2. Puis on utilise la formule du binôme pour développer $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$.
3. On en extrait alors la partie réelle et la partie imaginaire pour obtenir $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$.

Exemple 1.1.

Exprimons $\cos(3\theta)$ *en fonctions de* $\sin(\theta)$ *et* $\cos(\theta)$ *:*

D'après la formule de De MOIVRE on a : $\cos(3\theta) = Re[(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3]$.

Or : *d'après la formule du binôme de Newton on a :*

$(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^3 = C_3^0(\cos(\theta))^3(i.\sin(\theta))^0+C_3^1(\cos(\theta))^2(i.\sin(\theta))^1+C_3^2(\cos(\theta))^1(i.\sin(\theta))^2+C_3^3(\cos(\theta))^0(i.\sin(\theta))^3$

D'après le triangle de Pascal on a :

$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 = \cos^3(\theta) + 3\cos^2(\theta)i.\sin(\theta) + 3(\cos(\theta))(-\sin^2(\theta)) - i.\sin^3(\theta)$

$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 = (\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta).\sin^2(\theta)) + i(3\cos^2(\theta).\sin(\theta) - \sin^3(\theta))$

Ainsi, on a : $\cos(3\theta) = Re[(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3] = Re[(\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta).\sin^2(\theta)) + i(3\cos^2(\theta).\sin(\theta) - \sin^3(\theta))]$

D'où $\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta).\sin^2(\theta)$

Théorème 1.2 (Formule d'EULER)

Soit θ un réel quelconque. Alors :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

(Il faudra montrer aux apprenants comment retrouver ces formules)

BON À SAVOIR

Leonhard EULER (1707-1783), de nationalité suisse, est l'un des plus talentueux mathématiciens. Il a découvert un nombre incroyable de formules.

Ces formules permettent de linéariser (transformer des produits en sommes) des expressions trigonométriques. Cette transformation est particulièrement utile lors du calcul d'intégrales.

MÉTHODE 2 (Application de la formule de EULER)

Pour linéariser un produit de sinus et de cosinus :

1. On remplace les $cos^n(\theta)$ et les $sin^n(\theta)$ à l'aide des formules d'Euler.
2. On développe l'expression obtenue à l'aide de la formule du binôme.
3. On regroupe les termes conjugués entre eux.
4. On réutilise les formules d'Euler pour retrouver des cosinus et des sinus.

Exemple 1.2. *Linéarisons* $cos^2\theta$.

On a : $cos^2\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[e^{i2\theta} + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-i2\theta}\right] = \frac{1}{4}\left[e^{i2\theta} + e^{-i2\theta} + 2\right] = \frac{1}{4}\left[2cos2\theta + 2\right]$

$$\textbf{D'où } cos^2\theta = \frac{1}{4}\left[2cos2\theta + 2\right] = \frac{cos2\theta + 1}{2}$$

MÉTHODE 3 (Factorisation par l'angle moitié)

Cette technique est TRÈS utilisée (ex : recherche de la forme trigonométrique d'un complexe).

Remarquons que :

$$\begin{cases} e^{ix} + e^{iy} = e^{i\frac{x+y}{2}}\left(e^{i\frac{x-y}{2}} + e^{-i\frac{x-y}{2}}\right) = 2e^{i\frac{x+y}{2}}cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ e^{ix} - e^{iy} = e^{i\frac{x+y}{2}}\left(e^{i\frac{x-y}{2}} - e^{-i\frac{x-y}{2}}\right) = 2i.e^{i\frac{x+y}{2}}sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{cases} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on obtient :

$$e^{ix} + 1 = e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}}\right) = 2e^{i\frac{x}{2}}cos\frac{x}{2}$$

$$e^{ix} - 1 = e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right) = 2ie^{i\frac{x}{2}}sin\frac{x}{2}$$

2 Application géométrique des nombres complexes

(Cette partie ne fait pas partir du programme. Mais, elle est importante pour la culture des apprenants.)

Propriétés 1

Soient A, B et C trois points distincts d'affixes respectives a, b et c.

1 $arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = mes(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}})$

2 $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \frac{AC}{AB}$

Propriétés 2

Soit A, B et C les points distincts d'affixe $a, b, c \in \mathbb{C}$ on a :

1 (A, B et C alignés) $\Leftrightarrow \frac{c-a}{c-b} \in \mathbb{R}$

2 $(\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}) \Leftrightarrow \frac{c-a}{c-b} \in i\mathbb{R}$

3 (ABC est isocèle en A) $\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = e^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$

4 (ABC est rectangle isocèle en A) $\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = \pm i$

5 (ABC est rectangle en A) $\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = ib$ $(b \in \mathbb{R})$

6 (ABC est équilatéral) $\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$

Propriété 3

soit $A_1, A_2, ..., A_n$ n points d'affixes respectives $z_{A_1}, z_{A_2}, ..., z_{A_n}$ et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, n nombres réels dont la somme est non nulle.

L'affixe du barycentre G du système de points $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), ..., (A_n, \alpha_n)\}$ est :

$$z_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_{A_k}}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$$

Exemple 2.1.

L'affixe du milieux d'un segment $[AB]$ *est :* $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.

L'affixe du centre de gravité d'un triangle ABC est : $\dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

Dans le plan complexe, on considère les points A, B *et* C *respectivement d'affixe* $z_A = 2i$, $z_B = -2 - i$ *et* $z_C = 2 - i$. *ABC est isocèle en A.*

En effet, $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{5}{13} + \dfrac{12}{13}i$. *Comme* $\left|\dfrac{5}{13} + \dfrac{12}{13}i\right| = 1$,

il s'ensuit que : $\dfrac{5}{13} + \dfrac{12}{13}i = e^{i\theta}$ *où* $\theta := arg\left(\dfrac{5}{13} + \dfrac{12}{13}i\right)[2\pi]$. *D'où, ABC est isocèle en A*

EXERCICE D'APPLICATION :

1. Écrire $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

   (Ici, nous appliquons la formule de MOVRE pour obtenir $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$)

2. Linéariser $\cos^3(x)$, $\sin^2(x)$ et $\cos(x)\sin^4(x)$.

   Indication de solutions :

$$\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}\right) = \frac{1}{4}(\cos(3x) + 3\cos(x))$$

$$\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}\left(e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-i3x}\right) = -\frac{1}{4}(\sin(3x) - 3\sin(x))$$

$$\cos(x)\sin^4(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^5}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\left(e^{i4x} - 4e^{i2x} + 6 - 4e^{-i2x} + e^{-4ix}\right)$$

$$\cos(x)\sin^4(x) = \frac{1}{16}(\cos(5x) - 3\cos(3x) + 4\cos(x))$$

3. On donne $A(3 + i)$, $B(2i)$ et $C(2 - 2i)$. Démontrer que le triangle est rectangle isocèle.

   Indication de solutions :

$\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \dfrac{-1 - 3i}{-3 + 3i} = i$, donc le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

CHAPITRE : Suites numériques

MODULE 24 : Relations et opérations fondamentales dans l'ensemble des nombres réels.

Motivation : L'étude des suites numériques permet d'expliquer l'évolution des séquences des nombres et de beaucoup de phénomènes naturels.

Leçon 1 : Raisonnement par récurrence

Objectif :
∘ Utiliser le raisonnement par récurrence pour démontrer certaines propriétés sur $\mathbb{N}$.

Pré-requis : Manipulation du symbole $\sum$

1. On pose $T_n = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)$.
   a) Calculer T_n pour $n = 5$
   b) Ecrire la somme T_n sans le symbole $\sum$ et déterminer en fonction de n le nombre de termes de la somme T_n.
   c) Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n et de n.
2. Utiliser le symbole $\sum$ pour écrire chacune des sommes suivantes :

∘ $S_n = 1 + x + ... + x^n$

∘ $R_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + ... + n(n+1)$.

Situation de vie

Dans un parc à voitures d'un constructeur automobile, des voitures sont rangées en files et à perte de vue suivant la règle suivante :
≪ Si une voiture d'une file est d'une couleur donnée, alors celle qui suit est de la même couleur.≫

Sur l'une des files, on constate que la première voiture est rouge. Quelle est la couleur de la 100^{eme} ou de la 1000^{eme} voiture ? Justifier votre réponse.

Activité d'apprentissage :

On souhaite démontrer pour tout entier naturel non nul n que la propriété P suivante est vérifiée.

$$P(n) : \ll \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \gg$$

1. Montrer que P(n) est vérifiée pour $n = 1$.
2. On suppose à présent que P(n) est vraie pour un $n \geq 1$ quelconque. Montrer que $P(n+1)$ est aussi vraie puis conclure.
3. En utilisant le même raisonnement, peut-on dire que toutes les voitures de la file considérée sont rouges ?

Principe du raisonnement par récurrence

Soient n_0 un entier naturel et P(n), $n \geq n_0$, une famille de propositions mathématiques portant sur des entiers naturels n.
Pour démontrer P(n) par récurrence sur n, on procède comme suit :

- On vérifie que $P(n_0)$ est vraie : c'est l'**initialisation**.
- On fixe arbitrairement un entier naturel $n \geq n_0$ et on suppose que $P(n)$ est vrai (c'est l'hypothèse de récurrence) et on montre à l'aide de cette hypothèse que $P(n+1)$ est vraie. Cette étape est souvent appelée **hérédité**.
- On conclut que P(n) est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Exemple 1. *Démontrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n+1$.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons P la propriété définie par P(n) : $\ll \sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1. \gg$

-*<u>Initialisation</u> : pour $n = 1$, on a : $\sum_{k=1}^{1} k2^{k-1} = 1 \times 2^0 = 1$ et $(1-1)2^1 + 1 = 0 + 1 = 1$. D'où $P(1)$ est vérifiée.*

-*<u>Hérédité</u> : Pour $n \geq 1$, supposons que $P(n)$ est vraie c'est-à-dire que $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$ et montrons que $P(n+1)$ est aussi vraie c'est-à-dire que $\sum_{k=1}^{n+1} k2^{k-1} = n2^{n+1} + 1$.*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k2^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} + (n+1)2^n, \\
&= (n-1)2^n + 1 + (n+1)2^n, \quad \textit{par hypothèse de récurrence} \\
&= (n-1+n+1)2^n + 1, \\
&= n2^{n+1} + 1.
\end{aligned}$$

D'où P(n+1) est vraie.

- *Conclusion : pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.

Exercice d'application 1. *Démonter par récurrence sur n chacune des propositions suivantes.*

a) Pour tout entier naturel non nul n, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) Pour tout entier naturel n, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ *est un multiple de 7.*

c) f^n *désigne la dérivée d'ordre n de la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n(x) = \dfrac{(-1)^n\, n!}{(x-1)^{n+1}}$.

d) Pour tout réel $x > -1$ *et pour tout entier naturel n,* $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

CHAPITRE : Suites numériques

Leçon 2 : Généralités sur les suites numériques

Objectif :

○ Etudier la monotonie d'une suite.

○ Justifier qu'une suite numérique est convergente sans calculer sa limite.

○ Justifier qu'une suite numérique est majorée ou minorée.

○ Etudier la convergence de certaines suites numériques et approcher la limite par un réel en utilisant les inégalités des accroissements finis.

Situation de vie

L'évolution de la concentration en bactérie d'une goûte de sang après n jours de prise d'un médicament par un patient contre une certaine maladie est donnée par la suite $V_n = \dfrac{1}{n+2}$, où $n \in \mathbb{N}$. Le technicien de laboratoire aimerait savoir entre quelles valeurs réelles cette concentration varie. Aidez-le.

2.1 Etude d'une suite numérique

Activité d'apprentissage :

1. Calculer les quatres premiers termes de (V_n).
2. Donner une conjecture sur le sens de variation de la suite (V_n) et la démontrer.
3. Montrer que la suite (V_n) est minorée et majorée.
4. Donner alors un encadrement de la suite (V_n).
5. Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+2}$ et conclure.

2.1.1 Suite minorée, suite majorée et suite bornée.

Définition 1. *On appelle suite numérique toute fonction définie d'une partie non vide I de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.*

En général, il existe deux manières de définir une suite :

- une **formule explicite** permettant d'exprimer le terme général u_n de la suite (u_n) en fonction de n.

Exemple : $u_n = \dfrac{3n-1}{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- une **formule de récurrence** où le premier terme est donnée et chaque terme est fonction du précédent.

Exemple : $(u_n) : \begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= 2u_n - 3 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Définition 2. *Soit $(u_n)_{n\in I\subset\mathbb{N}}$ une suite numérique.*

- *La suite $(u_n)_{n\in I}$ est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout $n \in I$, $u_n \geq m$.*
  On dit que m est un minorant de $(u_n)_{n\in I}$.
- *La suite $(u_n)_{n\in I}$ est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in I$, $u_n \leq M$.*
  On dit que M est un majorant de $(u_n)_{n\in I}$.
- *La suite $(u_n)_{n\in I}$ est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée. C'est-à-dire qu'il existe des réels m et M tels que pour tout $n \in I$, $m \leq u_n \leq M$.*

Remarque 2.1. - *La suite $(u_n)_{n\in I}$ est bornée lorsqu'il existe un réel k tel que pour tout $n \in I$, $|U_n| \leq k$.*

- *Une suite $(u_n)_{n\in I}$ est positive si elle est minorée par 0 et négative si elle est majorée par 0.*

Exemple : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $(u_n) : \begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \dfrac{3u_n+1}{u_n+4} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrons par que la suite (u_n) est à termes positifs.

Posons P la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\mathrm{P}(n)$: $\ll u_n \geq 0 \gg$

- Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \geq 0$. D'où $\mathrm{P}(0)$ est vérifiée.

- Hérédité : pour $n \geq 0$, supposons $P(n)$ vraie c'est-à-dire $u_n \geq 0$ et montrons que $P(n+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{n+1} \geq 0$.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ par hypothèse de récurrence, alors $3u_n + 1 \geq 0$ et $u_n + 4 > 0$.

Ainsi $u_{n+1} = \dfrac{3u_n+1}{u_n+4} \geq 0$ et par suite, $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et (u_n) est une suite à termes positifs.

b) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$.

Posons Q la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par P(n) : $\ll u_n \leq 2 \gg$

- Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \leq 2$. D'où Q(0) est vérifiée.

- Hérédité : pour $n \geq 0$, supposons $Q(n)$ vraie c'est-à-dire $u_n \leq 2$ et montrons que $Q(n+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 2$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{u_n + 4} = 3 - \dfrac{6}{u_n + 4}$, or par hypothèse de récurrence, $u_n \leq 2$.

Comme $u_n \leq 2$, alors $u_n + 4 \leq 6$; c'est-à-dire que $\dfrac{1}{u_n + 4} \geq \dfrac{1}{6}$.

Il vient que $-\dfrac{6}{u_n + 4} \leq -1$.

D'où $3 - \dfrac{6}{u_n + 4} \leq 2$, et on a alors $u_{n+1} \leq 2$ c'est-à-dire que Q$(n+1)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$.

Conclusion : la suite (u_n) est minorée par 0 d'après a) et majorée par 2 d'après b) donc elle est bornée.

2.1.2 Sens de variation d'une suite numérique

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique.

- La suite (u_n) est dite **croissante** si pour tout $n \in I$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite (u_n) est dite **décroissante** si pour tout $n \in I$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- Si pour tout $n \in I$, $u_{n+1} = u_n$, alors la suite (U_n) est dite **constante** ou **stationnaire**.

Remarque 2.2. *Pour étudier le sens de variation d'une suite numérique* $(u_n)_{n \in I}$*, on peut :*

- *étudier le signe de la différence* $u_{n+1} - u_n$*,*
- *si la suite* (u_n) *est à termes strictement positifs, on peut comparer le quotient* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *à 1.*
- *si la suite* (u_n) *est définie par une formule explicite* $u_n = f(n)$ *où* f *est une fonction numérique,* f *et* (u_n) *ont le même sens de variation sur* $[0, +\infty[$.

Exemple : Etudions les variations des suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$u_n = \dfrac{3n - 2}{n + 1}$ et $(v_n) = -\dfrac{n}{n + 1}$.

Solution : - Pour la suite (u_n), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3(n+1)-2}{n+2} - \frac{3n-2}{n+1} \\ &= \frac{3n+1}{n+2} - \frac{3n-2}{n+1} \\ &= \frac{(3n+1)(n+1)-(n+2)(3n-2)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{5}{(n+2)(n+1)} > 0 \end{aligned}$$

Comme $u_{n+1} - u_n > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Pour la suite (v_n), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = f(n)$ où f est la fonction numérique définie par $f(x) = -\frac{x}{x+1}$.
Comme $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$<0 alors f est décroissante sur $[0; +\infty[$ et donc (v_n) est une suite décroissante.

2.1.3 Convergence d'une suite numérique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
On dit que (u_n) admet le réel "l" pour limite lorsque $u_n - l$ tant vers 0 lorsque n croit. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ce qui équivaut encore à $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0$

Définition 3. *La suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente** si elle admet une **limite finie**. Dans le cas contraire, on dit que la suite est **divergente**.*

Propriété 2.1. .

P_1) *Toute suite croissante et majorèe est convergente.*

P_2) *Toute suite décroissante et minorèe est convergente.*

P_3) *Toute suite monotone et bornèe est convergente.*

P_4) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique définie par une formule explicite $u_n = f(n)$ où f est une fonction numérique d'une variable réelle x.*
Si f a une limite en $+\infty$, alors u_n a une limite en $+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

P_5) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique définie par une formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction numérique d'une variable réelle x.*
Si la fonction f est continue et la suite (u_n) converge, alors la limite l de la suite est solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(l) = l$.

Théorème 2.1. *(Théorèmes de comparaison)*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *trois suites numériques.*

$T_1)$ *Si* $u_n \leq v_n$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

$T_2)$ *Si* $u_n \leq v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

$T_3)$ *Si* $u_n \leq v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

$T_4)$ *Si* $v_n \leq u_n \leq w_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ *où* l *est un réel pouvant être* $-\infty$ *ou* $+\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Remarque 2.3. $T_4)$ *est encore connu sous le nom du théorème des gendarmes.*

Exercice d'application 2. *On considère la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \dfrac{4u_n}{1+u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. *Calculer les quatres premiers termes de* (u_n).
2. *Construire dans un même repère la représentation graphique de la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{4x}{1+x}$ *et la droite (D) d'équation* $y = x$ *puis représenter sur l'axe des abscisses* u_0, u_1, u_2 *et* u_3.
3. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 3$
4. *On suppose que la suite* (u_n) *converge vers* l. *Montrer que* $l = 3$

Exercice d'application 3. .

1. *Soit la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} u_1 &= -2 \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{2}u_n + 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$
   a) *Calculer les quatre premiers termes de la suite* (u_n).
   b) *Montrer par récurrence que la suite* (u_n) *est croissante et majorée par 6 puis conclure.*
   c) *Déterminer la limite de la suite* (u_n).
2. *On considère la suite* (V_n) *définie par :* $\begin{cases} V_1 &= 1 \\ V_{n+1} &= \dfrac{3V_n+4}{V_n+3} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$
   a) *Montrer que pour tout entier naturel* n, (V_n) *est à termes positifs.*
   b) *Montrer que si la suite* (V_n) *admet une limite* l, *alors* $l = 2$.

2.2 Suites arithmétiques et suites géométriques

2.2.1 Suites arithmétiques

Définition 4. *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in I}$ *est arithmétique s'il existe un nombre réel* r *tel que pour tout* $n \in I$, $u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r *est alors appelé raison de la suite* (u_n).

La propriété suivante donne l'expression en fonction de n du terme général d'une suite arithmétique.

Propriété 2.2. *Soit* $(u_n)_{n\in I}$ *une suite arithmétique de premier terme* u_p *et de raison* r. *Alors pour tout* $n \in I$, $u_n = u_p + (n-p)r$.

Remarque 2.4. *Pour une suite arithmétique* (u_n) *de raison* r, *on a :*

- *Si* $r > 0$, *alors la suite* (u_n) *est croissante et non majorée donc elle est divergente.*
- *Si* $r < 0$, *alors la suite* (u_n) *est décroissante et non minorée donc elle est divergente.*
- *Si* $r = 0$, *alors la suite* (u_n) *est constante et converge vers* u_p *où* p *est l'indice du premier terme de* (u_n).

On considère la somme $S_n = u_p + u_{p+1} + ... + u_n$ des termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_p. Le nombre de termes de cette somme est donné par l'expression $n - p + 1$ et on a $S_n = \dfrac{(u_p + u_n)(n-p+1)}{2}$.

Trois nombres a, b et c pris dans cet ordre sont dits en progression arithmétique lorsqu'il sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique et dans ce cas, $b = \dfrac{a+c}{2}$.

Exercice d'application 4. .

1. *Soit* (U_n) *une suite numérique définie par* $U_n = -2n + 2$ *pour tout entier naturel* n.
   a) *Montrer que* (U_n) *est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.*
   b) *Etudier la monotonie de la suite* (U_n).
   c) *On pose* $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$. *Déterminer l'expression de* S_n *en fonction de* n.
2. *Soient* x, y *et* z *trois nombres en progression arithmétique. Calculer ses trois nombres sachant que leur somme est 9, leur produit 15 et* $x < z$.

2.3 Suites géométriques

Définition 5. *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in I}$ est géométique s'il existe un nombre réel q tel que pour tout $n \in I$, $u_{n+1} = qu_n$.*
Le réel q est alors appelé raison de la suite (u_n).

La propriété suivante donne l'expression en fonction de n du terme général d'une suite géométique.

Propriété 2.3. *Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite géométique de premier terme u_p et de raison q.*
Alors pour tout $n \in I$, $u_n = u_p(p)^{n-p}$.

Remarque 2.5. *Pour une suite géométique (u_n) de raison q, on a :*

- *Si $|q| > 1$, alors la suite (u_n) est divergente.*
- *Si $|q| < 1$, alors la suite (u_n) est convergente.*
- *Si $q = 1$, alors la suite (u_n) converge vers u_p où p est l'indice du premier terme de (u_n).*

On considère la somme $S_n = u_p + u_{p+1} + ... + u_n$ des termes d'une suite géométique (u_n) de raison q et de premier terme u_p. Le nombre de termes de cette somme est donné par l'expression $n - p + 1$ et on a $S_n = u_p \dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$.

Trois nombres a, b et c pris dans cet ordre sont dits en progression géométique lorsqu'il sont des termes consécutifs d'une suite géométique et dans ce cas, $b^2 = ac$.

Exercice d'application 5. .

1. *Soient x, y et z trois nombres en progression géométique.*
   a) *Montrer que $(x + y + z)(x - y + z) = x^2 + y^2 + z^2$.*
   b) *Déterminer x, y et z sachant que leur somme est 91 et la somme de leurs carrés est 4459.*
2. *Soit (U_n) une suite numérique définie pour tout entier naturel n par :*

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 3}{U_n + 4} \end{cases}$$

   a) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < U_n < 1$.*
   b) *Montrer que la suite (U_n) est croissante puis conclure.*
   On pose $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 3}$.

c) *Montrer que* (V_n) *est une suite géométique dont on précisera la raison et le premier terme.*

d) *Exprimer* V_n *puis* U_n *en fonction de* n.

e) *Etudier la convergence de* (V_n) *puis celle de* (U_n).

f) *Calculer* $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_n$ *et* $S'_n = \sum_{k=0}^{n} U_n$ *puis* $\lim_{n \to +\infty} S_n$ *et* $\lim_{n \to +\infty} S'_n$.