## Sommaire

**Sommaire**

## Avant-Propos

« De toute façon, la probabilité, ça ne tombera pas»

Et pourtant elle tombe, pas toujours mais elle tombe quand même....

Vous aimeriez comprendre les probabilités, mais vous ne savez pas par où commencer ? Vous en avez marre des cours trop compliqués que vous ne comprenez pas ?

C'est votre jour de chance !

Vous venez de tomber sur un cours de probabilité pour débutant, vraiment pour débutant!

Il n'y a aucune honte à être débutant, tout le monde est passé par là, moi y compris.

Ce qu'il vous faut est pourtant simple. Il faut qu'on vous explique tout, progressivement, depuis le début....

**Fulgence Mandeci**

## Remerciement

La création d’un ouvrage est un processus de longue haleine. Un cheminement fait de recherches et de réponses toutes plus ou moins partielles.

Sur un sujet comme " les probabilités " l’aventure réclame encore plus d’énergie.

Merci donc à ceux qui nous ont apporté leur enthousiasme sans compter :

Yode Armel, Maître de Conférences en Probabilité Statistique à l’Université Félix Houphouët Boigny.

Boua Philippe, Enseignant de mathématique de Lycée et Collège

Koné Osama, Enseignant de mathématique de Lycée et Collège

Sery Gnoleba, Etudiant à Waterloo University (Canada)

Stéphane N’da, Etudiant à l’Institut de Science Financière et d’Assurance de Lyon (ISFA)

Offoumou Ansah, Etudiant en Science Actuarielle à l’Université Catholique de Louvain(UCL).

**A**

**Léontine Akissi**

Eternelle fuyarde des  cours de probabilités.

A tous ceux qui n’ont jamais lu l’exercice de probabilités au BAC.

# PARTIE I

Eléments de  Cours

# Chapitre 1
# Dénombrement

Le dénombrement n'est une partie de plaisir pour personne. Pourtant, il nous faut bien nous résoudre – vous et moi – à nous atteler à cette question.
Dans notre malheur, nous avons quand même une chance : les méthodes pour dénombrer sont en nombre finie, et on attendra jamais de vous de trouver l'astuce qui ridiculisera l'exercice : elle n'existe pas. Ayez-donc le courage d'apprendre complètement les méthodes que nous vous proposons et de vous entraîner sur les exemples et les exercices que nous vous donnons : vous devriez être armé pour le cas où vous auriez à en découdre avec ces bêtes-là.

## A. p-liste ou p-uplet : Tirage successif avec remise.

Chacun sait à peu près ce qu'est une liste.
Une **p-liste** est une liste à **p** éléments distincts ou non.
Elle est le résultat d'un tirage **successif** avec **remise**.
Le tirage ''**successif ''** implique **l'ordre** tandis que **''la remise** '' signifie qu'un élément peut apparaître plusieurs fois ou ne pas apparaître du tout.

### ■ Définition fondamentale à retenir.

> Une **p-liste d'éléments** d'un ensemble **E** est une liste ordonnée de **p éléments distincts ou non de l'ensemble E.**

■ Exemple 1 : Reconnaître une p-liste.

On considère l'ensemble E des cinq lettres de l'alphabet. On a E = {a; b; c; d; e}.
Comme dans une p-liste un élément peut apparaître plusieurs fois alors **abc** et **aee** sont **deux 3-listes** de l'ensemble **E.**
De plus, l'on tient compte de **l'ordre** donc **abc, bac**, **acb, bca** sont quatre **3- listes différents** même si elles sont constituées des mêmes lettres.

REMARQUE IMPORTANTE .

**Une p-liste** peut avoir **autant d'éléments** que l'on veut.
En particulier avec notre ensemble $E$ qui a au départ **5** éléments**,** nous pouvons constituer des **6-listes** comme **abcdea** ou même des **5676-listes.** Même si cela n'a aucun intérêt !

■ Exemple 2: Dénombrer le nombre de p-liste d'un ensemble.

Considérons une urne qui contient les cinq premières lettres de l'alphabet. En tirant successivement à trois reprises une lettre qui est ensuite remise dans l'urne, on constitue des 3-listes comme **abb.**

La question qui se pose à présent est : Combien y a-t-il de 3-listes possibles ? Ou bien combien y a- t-il de tirages possibles ?
Dans une 3-liste nous avons 3 positions à remplir.

| Position 1 | Position 2 | Position 3 |
|---|---|---|
| Une lettre à choisir parmi | Une lettre à choisir parmi | Une lettre à choisir parmi |
| **a, b, c, d, e.** | **a, b, c, d, e.** | **a, b, c, d, e.** |
| **5 possibilités** | **5 possibilités** | **5 possibilités** |

Il y a donc en tout $5\times5\times5=5^3$ choix possibles**. 5 lettres par position**.
Vous vous demandez certainement : ''pourquoi multiplie-t-on ? '' Après tout, pourquoi n'additionnerons nous pas ? La réponse tient dans le principe suivant:

■ **Principe multiplicatif**.

> Si une situation correspond à **p choix successifs** ayant chacun respectivement $n_1, n_2,..., n_p$ possibilités alors le nombre total de possibilités est $n_1 \times n_2 \times .... \times n_p$.

■**Formule fondamentale à retenir** :

> Dans un ensemble à **n éléments, il y a en tout $n^p$ p-listes possibles.**

## B. Arrangement et permutation : Tirage successif sans remise.

---

### 1. Arrangement.

Un arrangement est **une p-liste** particulière dans laquelle un même élément ne peut **apparaitre qu'une seule fois**.
Concrètement un arrangement est le résultat d'un tirage **successif** et sans **remise**.

■ **Définition fondamentale à retenir :**

> Un arrangement à $p$ éléments d'un ensemble E est une liste ordonnée de p éléments deux à deux distincts de l'ensemble E.

■ Exemple 1**:** Reconnaître un arrangement.

Considérons l'ensemble **E={a; b; c; d; e}** .

**dbe** est un arrangement à trois éléments ou un **3-arrangement**.

Par contre **efe** n'est pas un arrangement car l'élément **e** apparaît à deux reprises : c'est juste **une p-liste**.

■ REMARQUE IMPORTANTE.

Un arrangement est avant tout une p-liste : **l'ordre y es**t donc **important**. Ainsi les

**3-arrangements afe** et **fea** sont différents.

Comme dans un arrangement **un même élément ne peut apparaitre qu'une seule fois** au plus alors il y a au plus autant d'élément que le nombre d'élément de E.

Ainsi **dans notre ensemble E = {a; b; c; d; e} un arrangement a au plus 5 éléments**.

Les arrangements de E à 6 éléments n'existent pas, E étant un ensemble à 5 éléments.

■ **Exemple 2 :** Dénombrer le nombre de p-arrangements d'un ensemble.

Considérons à nouveau notre urne qui contient les cinq premières lettres de l'alphabet. En tirant successivement à trois reprises une lettre qui n'est pas remise dans l'urne, on constitue des 3-arrangements comme **abc.**

Combien y a-t-il de 3-arrangements possibles ? Combien y a- t-il de tirages possibles ?

Dans un 3-arrangements il y a trois positions à remplir. Par rapport aux p-listes, la seule chose à ne pas oublier est **qu'un élément ne peut se répéter : il n'y a pas de remise**.

| **Position 1** | **Position 2** | **Position 3** |
|---|---|---|
| Une lettre à choisir parmi **a, b, c, d, e.** | Une lettre à choisir parmi les quatre restantes | Une lettre à choisir parmi Les trois restantes |
| **5 possibilités** | **4 possibilités** | **3 possibilités** |

**D'après le principe multiplicatif**, il y a au total: 5×4×3 choix possibles.

Le nombre de 3-arrangements dans un ensemble contenant 5 éléments est noté $\boldsymbol{A_5^3}$ (Prononcé «''A cinq trois''). Nous savons désormais que $\boldsymbol{A_5^3}$ = **5** × **4** × **3**.

## 2. Permutation.

> Une permutation est un arrangement particulier à $n$ éléments. C'est donc un **n-arrangement !**

■ **Exemple 1 :** A la conquête d'une permutation.

Supposons maintenant que dans notre urne qui contient les cinq lettres de l'alphabet, on tire successivement les cinq lettres sans remise. On constitue des 5-arrangements comme abcde. On a en tout 5! « Lire factoriel 5 » choix possibles.

■ Autres solution.

Je sais que vous vous demandez naturellement : ''mais était-il bien nécessaire de passer par la formule sauce factoriel pour obtenir le nombre de choix possibles? ''

C'est une bonne question, cela prouve que vous n'êtes pas en train de dormir.

La réponse est non.

Voici comment on pourrait procéder. Ici il s'agira de remplir cinq positions.

| Position 1 | Position 2 | Position 3 | Position 4 | Position 5 |
|---|---|---|---|---|
| Une lettre à choisir parmi **a, b, c, d, e.** | Une lettre à choisir parmi les quatre restantes | Une lettre à choisir parmi les trois restantes | Une lettre à choisir parmi les deux restantes | La seule lettre restante |
| **5 possibilités** | **4 possibilités** | **3 possibilités** | **2 possibilités** | **1 possibilité** |

Il y a donc d'après le principe multiplicatif **: 5 × 4 × 3 × 2 × 1** choix possibles.

Donc le nombre de 5-arrangement dans un ensemble contenant 5 éléments est :

$\boldsymbol{A_5^5}$ **= 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 5!** (on lit factoriel 5).

■ **Constat**.

**C'est une permutation car l'ensemble contient 5 éléments et on a tiré ces cinq éléments sans remise (**On a tiré **TOUS** les cinq éléments sans en remettre dans l'urne**)**

■ **Formules fondamentales à retenir**:

> Si un ensemble contient **n** éléments et qu'on en tire **p (p < n) sans remise** alors le nombre de **p-arrangement** à constituer est : $\boldsymbol{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$ .

> **Si** un ensemble contient $\boldsymbol{n}$ éléments et qu'on en tire $\boldsymbol{n}$ **sans remise** alors le nombre de $\boldsymbol{n}$**-arrangement** à constituer est une permutation notée :
> **n! = n × (n – 1) × (n-2) ×…× 1 = n × (n – 1) !**

■ **Exemple 2:** Calcul du factoriel d'un nombre.

3! = 3 × 2 × 1 ; 7! = 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1

. n! = n × (n – 1) × (n – 2) × (n – 3) = n × (n – 1)! = n × (n – 2) × (n – 2)!

■ Convention

0! = 1

## C. Combinaison : Tirage Simultané.

---

■ **Mise en garde**

Avant de foncer tête baissée sur cette partie, assurez-vous que ce qui précède a été entièrement compris. Si ce n'est pas le cas, je vous invite à revenir sur vos pas. Rien ne presse !...

Enfin ! Nous y voilà !

Contrairement à  nos croyances, une combinaison en mathématiques n'est pas un vêtement que l'on porte pour avoir moins froid.
Il s'agit  d'**une partie** ou d'**un sous-ensemble** d'un ensemble **plus gros**.

> **Une combinaison est le résultat d'un tirage simultané de p éléments parmi n autres.**
> Le tirage **simultané** implique **qu'il n'y a pas d'ordre**.

### ■ Définition fondamentale à retenir:

> Une combinaison à **p** éléments de l'ensemble **E** est une partie de ce dernier Contenant  **p**  éléments distincts.

### ■ Constat.

Vous le constatez déjà,  il existe de grandes différences avec les **p-listes** et **les arrangements:**

> ■ **Contrairement aux  p-listes et aux arrangements, l'ordre ne compte pas dans une  combinaison** car ce sont des sous-ensembles.
> Par exemple dans notre ensemble  E = {a; b; c; d; e}  les combinaisons à trois éléments **abe** et **bae** sont les mêmes, ce sont des partie identique de  E puisqu'elles sont formée des mêmes lettres.
> ■ **Toute partie d'un ensemble $E$ a nécessairement moins d'éléments que celui-ci.**  Ainsi comme pour les arrangements, une combinaison d'un ensemble à $n$ éléments aura au plus $n$ éléments.
> Avec notre exemple **E = {a; b; c; d; e}**  une combinaison aura au plus 5 éléments.
> Inutile donc de compter des combinaisons à 7 éléments.

### ■ Formule  fondamentales à retenir :

> Le nombre de combinaisons de n éléments pris p à p   est **:** $\boldsymbol{C_n^p} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{p}!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p})!}$

### ■ Exemple :

Supposons que dans notre urne adorée on tire simultanément trois lettres. Combien existe-il de tirages possibles ?  Nous avons  $\boldsymbol{C_5^3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\times 2!}$ **=** 10.

Nous devons nous arrêter là. Mais comme vous êtes des gens biens(le simple fait que vous lisiez ces lignes en constitue un début de preuve), vous vous devez d'impressionner  votre examinateur(!). Et nous nous devons de vous dire comment : en montrant que vous savez manier les outils de dénombrement. Les examinateurs adorent ça. Je vous propose donc un résumé (je devrais dire des astuces) de cette passionnante discussion.

## ■ ASTUCES.

Les p-listes, les arrangements et les combinaisons sont des notions de dénombrements que nous avons abordées.

Ce qu'il importe de retenir, c'est dans quelles situations elles doivent être utilisées.

Chaque situation de dénombrement est assimilable à un tirage.

Deux critères permettent de caractériser un tirage : **la remise et l'ordre**.

Suivant ceux-ci il faut utiliser une notion particulière :

- **Tirage Successif avec remise :** le résultat de **ce type de tirage est une p-liste**.
- **Tirage successif et sans remise :** le résultat de **ce type de tirage est un arrangement**.
- **Tirages simultanés** : le résultat de **ce type de tirage est une combinaison**

## ■ APPLICATIONS

### Application 1

Un code antivol d'un autoradio est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffre pouvant prendre l'une des dix valeurs suivantes : 0, 1,..., 8, 9.

**1°.**

**(a)** Quel est le nombre de code possibles ?

**(b)** Quel est le nombre de codes formés de quatre chiffres distincts deux à deux ?

**2°** Après une coupure d'alimentation électrique, le propriétaire doit réintroduire le code pour pouvoir écouter son autoradio. Il sait que les quatre chiffres de son code sont : 1, 9, 9 et 5, mais il a oublié l'ordre de ces chiffres

**(a)** Combien de codes différents peut-il composer avec ces 4 chiffres ?

**(b)** Si le premier code introduit n'est pas le bon, le propriétaire doit attendre deux minutes avant de pouvoir tenter un second essai ; le délai d'attente entre le second et le troisième essai est de 4 minutes, entre le troisième et le quatrième essai, il est de 8 minutes...( le délai d'attente double entre deux essais successifs).

Combien de codes le propriétaire peut-il introduire au maximum en 24 heures ?

### Application 2

La carte de séjour d'étranger est caractérisée par un numéro à 10 chiffres.

Exemples :

n° 3711102869

n° 0962758314

Toutes les cartes ont des numéros distincts.

**1°)** Combien de carte peut-on établir ?

**2°)** Parmi ces cartes, combien y en a-t-il dont le numéro :

**(a)** Soit composé de 10 chiffres distincts.

**(b)** Contienne au moins une fois le chiffre « 5 ».

**(c)** Contienne aucun chiffre pair.

**3°)** **(a)** Un numéro à 7 chiffres aurait été suffisant pour établir une carte à chacun des 4 millions d'étrangers. Pourquoi ?

**(b)** Un numéro à 7 chiffres aurait-il été suffisant pour identifier tous les 4 millions d'étranger ? Pourquoi ?

**4°)** On suppose maintenant que chaque carte à un numéro à 7 chiffres.

Déterminer le nombre de cartes dont le numéro comporte uniquement des chiffres inférieurs ou égaux à 6.

**Solution de l'application 1**

**1°**

**(a)** Pas de panique ! Ne jetez pas le bébé avec l'eau du bain !

La bonne stratégie consiste à se demander si l'ordre et la répétition sont autorisés.

Vous constatez avec moi que les codes 1234 et 4321 sont distincts alors même qu'ils sont formés de chiffres identiques. Il est donc clair que les choix sont ordonnés.

En plus (c'est notre jour...), La répétition est admise de telle sorte qu'on est en présence d'une situation de p-liste.

Pourtant, dans un ensemble à 10 éléments, il y a en tout $10^4$ 4-listes.

Donc on a en tout 10000 codes possibles.

**(b)** Si vous avez consenti à nous lire jusqu'ici (ce qui ne fera aucun mal) vous êtes évidemment informé qu'on joue en terrain connu.

En effet, des gens brillants comme vous, n'ont plus besoin qu'on leur rappelle qu'on est en présence d'un flagrant cas de tirage ordonné.

De plus, les quatre chiffres du code sont distincts deux à deux de façon que la répétition ne soit pas autorisée.

On est donc en présence d'un tirage **successif et sans remise.** Nos lecteurs (que nous saluons au passage) savent déjà que dans une telle situation on peut former $A_{10}^4$ = 5040 codes.

**2°)**

**'(a)** Il s'agit ici de faire un choix ordonné de 4 chiffres dans un ensemble qui en contient 4.

Ainsi, à moins d'être mal réveillé, vous aurez donc sans doute remarqué que sous cette hypothèse, l'on peut former $A_4^4$ = 4! = 24 codes.

> **Non ! Et non** ! **Je ne suis pas d'accord avec votre affaire d'arrangement**! **Pour moi il s'agit clairement d'un tirage avec remise, puisque le chiffre 9 apparaît 2 fois !**
> Vous êtes incroyablement vigilant. Mais malheureusement vous avez tort de penser au p-liste. Sûrement vous avez trouvé $4^4$ = 256 codes.
> Cette brillante démarche est incorrecte.
> Il est vrai que le chiffre 9 apparaît deux fois mais votre démarche autorise le propriétaire à entrer les codes tels que 1111 ou 2222.

Pourtant vous constatez avec moi que le code **contient uniquement** et forcément les chiffres 1,9, 9 et 5 donc la meilleure stratégie consistera à exclure de tels codes des choix du propriétaire et partant à faire un tirage successif et sans remise de 4 chiffres parmi les 4 proposés.
On agit un peu comme si les 4 chiffres étaient inscrits sur 4 cartons différents puis jetés dans une urne où l'on effectue ensuite les tirages successifs et sans remises de 4 cartons en notant à chaque fois le numéro inscrit sur le carton tiré.

**(b)** Le propriétaire pourra introduire 11 codes en 24 heures.

## Chapitre 2 :
## Probabilités

Nous ne sommes pas absolument certains que l'ensemble des possesseurs de ce livre (que nous saluons au passage) auront le courage de lire ce chapitre, répugnés qu'ils sont par ce phénomène étrange appelé probabilités.
Et c'est fort dommage.
En effet, nous pourrions répéter ici ce que nous avons déjà écrit là, en d'autre occasions, à propos du dénombrement, faire une impasse sur la probabilité est un mauvais calcul, car ce n'est pas si compliqué que cela à comprendre. D'autant que personne n'y comprend rien, et qu'au royaume des aveugles les borgnes sont rois.
Tout cela pour vous encourager à vous prendre un petit peu la tête sur ce chapitre.

### I. Expérience aléatoire

Une expérience **est aléatoire si :**

- Son résultat dépend du hasard, c'est à dire que l'on ne peut pas prédire avec Certitude le résultat de l'expérience.
- On peut décrire, avant l'expérience, l'ensemble de tous les résultats possibles.

■ **Idée à retenir**.

Ces résultants sont appelés **éventualités** ou **issues**. L'ensemble de ces issues s'appelle univers associé à l'expérience. Cet ensemble se note Ω **« lire oméga ».**

■ Exemple : A la rencontre de l'univers d'une expérience aléatoire.

**1°** On lance un dé à six faces, et l'on observe le résultat obtenu sur la face supérieure.
On a six issues possibles donc l'univers des résultats possibles est **Ω = {1; 2; 3; 4; 5; 6}.**
**2°** On tire une bille d'un sac contenant trois billes bleues, deux billes rouges et une bille verte**,** et on observe la couleur de la bille tirée**.**
**Ω = {bleue, rouge, verte}.**

### II. Evénement.

■ **Définition**

> **Un événement** est un **sous-ensemble ou une partie** de l'univers. C'est un regroupement d'issues ou d'éventualités résultant de l'expérience aléatoire.

■ **Événement élémentaire**

> On dit qu'un **événement est élémentaire** s'il contient **une seule éventualité ou un seul élément de l'univers.**

■ Exemple : reconnaître un événement.

1° Lors du lancer d'un dé à six faces**, « obtenir un nombre pair »** est un événement et correspond à **{2 ; 4 ; 6}.**

2° Lors du lancer d'un dé à six faces **«obtenir 3 »** est un événement élémentaire, car il représente un seul résultat ou une seule éventualité de l'univers des issues possibles : **{3}**

■ **Intersection et Réunion d'événements**

Soient deux événements A et B.

> **La Réunion** de **A** et de **B** est l'événement, noté A∪B « Prononcer **A** union **B**», formé des issues qui réalisent à la fois l'événement **A** ou l'événement **B**.
> La réunion des événements A et B est formé en fait des issues qui réalisent au moins l'un des deux événements.
> Il suffit alors que l'un des deux événements se réalise pour satisfaire l'événement **A∪B.**

■ Exemple : Reconnaître la réunion de deux événements.

On tire deux cartes dans un jeu de 52 cartes.

L'événement « obtenir l'as de pique **OU** l'as de cœur » est la réunion des deux événements élémentaires « Obtenir l'as de pique » et « Obtenir l'as de cœur ».

> **L'intersection** de **A** et de **B** est l'événement, noté **A∩B** « Prononcer **A** inter **B**», formé des issues qui réalisent à la fois l'événement **A** et l'événement **B**
> Il faut que les deux événements A et B se réalisent pour que l'événement **A∩B** soit satisfait.

■ Exemple : Reconnaître l'intersection de deux événements

On tire deux cartes dans un jeu de 52 cartes.

L'événement « obtenir l'as de pique **ET** l'as de cœur » est l'intersection des deux événements élémentaires « Obtenir l'as de pique » et « Obtenir l'as de cœur ».

■ **Événements incompatibles.**

> Deux événements sont incompatibles ou disjoints s'ils n'ont aucun élément en commun. Ils ne peuvent se produire en même temps.

■ **REMARQUE IMPORTANTE.**

Si deux événements A et B sont incompatibles, alors **A∩B** = ∅ « lisez ensemble vide».

■ **Exemple :** Reconnaître deux événements incompatibles.

On lance un dé. Imaginons les événements A « Obtenir 1, 2 ou 6 » et B «Obtenir 3 ou 5 ». On voit aisément que les événements $A$ et $B$ n'ont aucun élément en commun. Ils sont bien incompatibles. On a donc **A∩B** = ∅.

■ **Evénements indépendants.**

> Deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un n'influence pas le résultat de l'autre.

■ **Mise en garde.**

> Ne confondez pas événements indépendants et événements incompatibles.
> - Si deux événements n'ont aucun élément en commun: ils sont incompatibles.
> - Si deux événements sont tels que la réalisation de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre alors ils sont indépendants.

■ **Evénements contraires**

> Soit A un événement.
> L'événement contraire de A noté $\overline{A}$, « lire **A barre »,** est l'ensemble de tous les événements élémentaires qui ne sont pas dans A.
> C'est l'événement qui se réalise lorsque l'événement A ne se produit pas.

■ **Exemple 0** : Reconnaître l'événement contraire d'un événement donné.

On lance un dé.

Soit l'événement **Q «** Obtenir 1, 2 ou 6 **»**.

L'événement **«** Obtenir 3, 4 ou 5 **»** est comme vous l'avez surement deviné, l'événement contraire de l'événement A.

■ **Exemple 1** : Reconnaître l'événement contraire d'un événement donné

Dans chacune des situations décrites ci-dessous, énoncer l'événement contraire de l'événement donné :

1° Dans une classe, on choisit deux élèves au hasard.

**A** : « Les deux élèves sont des filles »

2° A une loterie, Elise achète trois billets.

**D** : « L'un des billets au moins est gagnant »

**E** : «Au plus deux billets sont gagnants »

2° Dans un groupe d'Ivoirien et de Français, on discute avec une personne.

**B** : « La personne est un homme et française »

## ■Solution

**1°** L'événement $\bar{A}$ est : « Au moins un des deux élèves est un garçon»

**2°** L'événement $\bar{D}$ est « aucun billet n'est gagnant »

l'événement $\bar{E}$ est « les trois billets sont gagnants »

**3°** l'événement $\bar{B}$ est « la personne est soit Femme, soit ivoirienne »

## ■ Exemple 2 : Reconnaître des événements incompatibles.

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. On tire une boule d l'urne.

On note :

**A** L'événement « tirer une boule blanche »

**B** L'événement « tirer une boule ni blanche, ni rouge »

**C** L'événement « tirer une boule noire ou boule rouge »

1° A et B sont-ils incompatibles ?

2° B et C sont-ils incompatibles ?

3° Traduire par une phrase ne comportant pas de négation $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

## ■ Solution

1° A et B sont incompatibles car une boule ne peut être simultanément blanche et non blanche

2° B et C ne sont pas incompatibles car le tirage d'une boule noire les réalise simultanément.

## ■ Cardinal d'un événement

> Soit un événement A.
> Le nombre d'éventualités qui réalisent l'événement $A$ est appelé cardinal de l'événement A**.** On le note **Card(A) (**lire **"cardinal de A").**

## ■ Exemple : Déterminer le cardinal d'un événement.

On lance un dé. Soit l'événement A **« obtenir 2, 4 ou 6 ».**

Seules trois éventualités réalisent l'événement A. On a donc **Card(A) = 3.**

Quel est le cardinal de l'univers Ω? On sait que Ω={1;2;3;4;5;6}. Donc card(Ω) = 6.

### ■ Formule fondamentale à retenir

Considérons deux événements A et B.

**Card(A∪B) = card(A) + card(B) - card(A∩B).**

### ■ REMARQUE IMPORTANTE

Je parie que vous l'avez deviné ! Si les événements A et B sont incompatibles alors:

**Card(A∪B) = card(A) + card(B)** car dans ce cas **card(A∩B) = ∅**

## III. Probabilité

Enfin on y est ! Ce mot qui fait peur, on vient de le prononcer ! Cette partie que vous détestez tant, on l'entame maintenant. Ne paniquez surtout pas. Je vous tiens. Je serai votre guide jusqu'à la fin. Je répondrai à toutes vos questions.

### ■ Définition fondamentale à retenir.

Une probabilité en mathématiques est un chiffre compris entre 0 et 1.
Ce chiffre représente ou mesure les chances de réalisation d'un événement.

### ■ Mise en garde

La probabilité d'un événement **n'est jamais supérieure à 1 et jamais inférieure** à **0**.
**Si un de vos amis en trouve, Assommez-le et conduisez-le moi !**

## A- Types d'événements

### ■ Evènement impossible

On dit qu'un événement est **impossible** si la **probabilité** de l'obtenir est **0 :**
**On n'a aucune chance qu'un tel événement se produise. Il ne se réalisera jamais.**

### ■ Exemple : Reconnaître un événement impossible.

L'événement « tirer une bille rouge» d'un sac **qui ne contient que des billes bleues** est un événement impossible.

## ■ Evénement probable

On dit qu'un événement est **probable** si la probabilité de l'obtenir est entre **0 et 1** c'est-à-dire qu'**on a des chances** qu'il se produise.

## ■ Exemple :

L'événement **« tirer une bille rouge»** d'un sac **qui contient des billes rouges** et des billes bleues est un événement probable.

## ■ Evénement certain

On dit qu'**un événement est certain** si la probabilité de l'obtenir est 1 :
On a toutes les chances de l'obtenir. Un tel événement se produit forcement.

## ■ Exemple

L'événement « tirer une bille rouge» d'un sac qui ne **contient que des billes rouges** est un événement certain.

## ■ Mise en garde

Nous espérons que la probabilité que vous ayez votre BAC est 1!
(Invitez-moi surtout à la fête ! j'ai repassé mon costume pour l'occasion).

# B- Notion d'équiprobabilité

## ■ Définition à retenir

Lors d'une expérience aléatoire chaque événement élémentaire a une probabilité ou une chance de se réaliser.
**Si cette probabilité est la même** pour chacun de ces événements élémentaires alors on dit qu'on est en situation **d'équiprobabilité.**

## ■ Constat

Vous devez déjà l'imaginé, en situation d'équiprobabilité aucun événement élémentaire n'a pas plus de chance de se produire que les autres événements : **aucun événement élémentaire n'est favorisé.**

## ■ Cas d'emploi

Le lancer d'un dé « parfait », « équilibré », « non pipé »ou « non truqué ».
Le tirage au **« hasard »** de boules dans une urne.
Le tirage « de boules indiscernables ».

■ **A retenir**

En cas d'équiprobabilité**, et seulement dans ce cas,** la probabilité d'un événement $\boldsymbol{A}$ est **:**

**P(A)=** $\dfrac{\boldsymbol{Nombres\ d'issues\ favorable}\ \text{à}\ \boldsymbol{A}}{\boldsymbol{nombres\ d'issues\ possibles}} = \dfrac{\boldsymbol{Card}(A)}{\boldsymbol{Card}(\boldsymbol{\Omega})}$

■ **Exemple :** Calcul de la probabilité d'un événement en situation d'équiprobabilité.

Considérons à nouveau notre expérience de lancer de dé.

Appelons $A$ l'événement : « obtenir un chiffre pair ».

A = {2 ; 4 ; 6} donc card(A) = 3.

De plus on a déjà vu que pour cette expérience card(Ω) = 6

D'où la probabilité de l'événement A vaut : P(A) = $\frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

## C- Probabilité de la réunion d'événements

■ **Formule importante à retenir**

**Si A et B sont deux événements alors On a :**

**P(A∪B) = P(A) + P (B) – P (A∩B).**

■ **Mise en garde**

Et si **A** et **B** sont incompatibles a-t-on toujours cette formule sauce? Vous faites bien de me le demander car je n'allais pas en parler, soyez vigilant !

On sait que si **A** et **B** sont incompatibles on a **A∩B = ∅** et comme **card(∅) = 0** alors : Si **A** et **B** sont incompatibles la formule devient :

**P(A∪B) = P(A) + P(B)**

## D- Probabilité d'événement contraire

■ **Formule important à retenir**

La probabilité de $\overline{A}$ l'événement contraire de A est : $\boldsymbol{P(\overline{A})}$ **= 1 – P (A)**

■ **Exemple:** Déterminer la probabilité d'un événement en situation d'équiprobabilité

Parmi 48 élèves de terminal C du lycée scientifique de Yamoussoukro, 30 élèves pensent poursuivent leurs études en Côte d'Ivoire, 25 souhaitent partir à l'étranger dont 10 désirent partager leurs études entre la Côte d'Ivoire et l'étranger. Les autres pensent ne pas poursuivre d'études.

On interroge un élève, au hasard, au sujet de ces projets.

On note :

**F** L'événement « Etudier en Côte d'Ivoire ».

**G** L'événement « Etudier à l'étranger ».

**I** L'événement « Etudier en Côte d'Ivoire **OU** à l'étranger ».

**J** L'événement « Interrompre les études »

Déterminer les probabilités des événements C, G, I et J.

## ■ Solution

**REMARQUE IMPORTANTE.**

> Penser déjà qu'un élève peut faire plusieurs choix

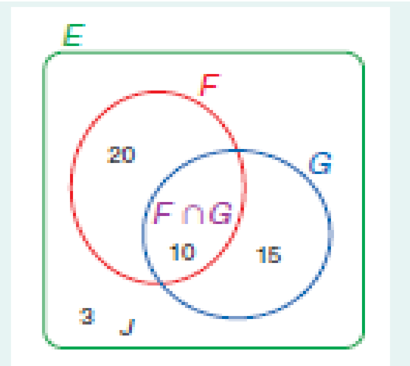
D'après l'énoncé : vous devinez aisément que **card(Ω) = 48**

Seulement 30 élèves pensent **« continuer leur études en côte d'ivoire »** de façon que **card(F) = 30**

Seulement **25** élèves envisagent des études à l'étranger donc **card(G) = 25**

Seulement **10** souhaitent partager leurs études entre la **«côte d'ivoire» ET «l'étranger»**.

Donc **card(F∩G) = 10**




On choisit un élève **au hasard,** on est donc en **situation d'équiprobabilité :**

**P (F)** $= \frac{Card(F)}{Card(\Omega)} = \frac{30}{48} = \frac{5}{8}$.

P(G) = $\frac{Card(G)}{Card(\Omega)} = \frac{25}{48}$  P(F∩G) = $\frac{Card(F\cap G)}{Card(\Omega)} = \frac{10}{48} = \frac{5}{24}$

Vous constatez certainement que l'événement $I$ est la réunion des événements **F** et **G**.

On a donc : **P**(I) = P(F∪G) = P(F) + P(G) - P(F∩G) $= \frac{30}{48} + \frac{25}{48} - \frac{10}{48} = \frac{15}{16}$

Vous l'avez bien devinez, $J$ est l'événement contraire de $I$.

D'où P(J) = $P(\bar{I})$ = 1 – P (I) = 1 - $\frac{15}{16} = \frac{1}{16}$.

## ■ Autre regard sur cette solution

Etais-je obligé de remarqué que J est l'événement contraire de **I** pour calculer la probabilité de l'événement J?!

La réponse est non. Voici comment on aurait pu procéder autrement.

On sait que **P(J) =** $\frac{Card(J)}{Card(\Omega)}$. Calculons **Card(J).**

Le cardinal de l'événement J est le nombre d'élèves qui souhaitent interrompre les études.

On a donc **Card**(**F**) = total d'élèves **-** nombre d'élèves souhaitant continués les études c'est-à-dire **Card**(**F**) = **Card**(**Ω**) - **Card**(**F**∪**G**)

Or **Card (F∪G) = Card (F) + Card (G) - Card (F∩G)**

**card (F∪G) = 30 + 25 - 10 = 45**

Donc card **(J) = 48 – 45 = 3**

Ainsi **P(J) =** $\frac{Card(J)}{Card(\Omega)} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$

On aurait pu procéder ainsi pour trouver le même résultat, mais vous l'avez devinez vous-même, la première méthode a l'avantage d'être plus court.

## E- Probabilité d'événements indépendants

### ■ Formule importante à retenir.

Considérons deux événements **A** et **B** de probabilités non nulles.
**A** et **B** sont indépendants si et seulement si:
**P**(**A ∩ B**) **= P(A) × P(B)**

### ■ Astuce

Comment pus-je montrer que deux événements A et B sont indépendants?
Il faut surtout se méfier de son intuition! Il faut répondre à la question par calcul.
On calcul la probabilité de chacun des deux événements A et B, puis le produit de ces deux probabilités.
Si ce produit est égal à la probabilité de leur intersection **A∩ B,** alors les événements A et B sont indépendants

**■ Exemple :** Montrer que deux événements sont indépendants.

On interroge les parents d'une famille pour connaître le rhésus sanguin de leurs enfants : positif + ou négatif **-** .

On considère les événements suivants :

A : « Les enfants n'ont pas tous le même rhésus »

B : « au plus un enfant est de rhésus négatif »

**1°)** Les parents ont deux enfants.

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

**2°)** Les parents ont trois enfants.

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

## ■ Solution:

**1°)** L'ensemble des issues possibles est : **Ω** = {(+;+);(+;-);(-;+);(-;-)}.

Donc **card(Ω) = 4**

Imaginons qu'on est en situation d'équiprobabilité.

On a : A**={(+;-);(-;+)}** donc **P(A) =** $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

B = { (+;+);(+;-);(-;+)} donc **P(B) =** $\frac{3}{4}$

Ainsi **P(A) × P(B) =** $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

Or **A ∩ B = {(+;-);(-;+)}** donc **P(A∩B) =** $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Les événements A et B ne sont donc pas indépendants.

**2°**) L'ensemble des issues est :

**Ω = {(+;+;+);(+;+;-);(+;-;+);(-;+;+);(-;-;+);(-;+;-);(+;-;-);(-;-;-)}**

Supposons de même qu'on est en situation d'équiprobabilité.

On a donc :

**P**(**A**) = $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ et **P**(**B**) = $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

D'où **P**(**A**) × **P**(**B**) = $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

Or **A**∩**B** = {(-;+;+); (+;+;-); (+;-;+} donc **P** (**A** ∩ **B**) = $\frac{3}{8}$

Les événements **A** et **B** sont donc indépendants.

## ■ Autre regard sur la solution

Je sais ! Vous vous demandez naturellement : « comment avons-nous fait pour savoir qu'on avait 8 issues ».

Vous vous souvenez des p-listes ? Et bien elles ont servi a trouvé le nombre d'issues possibles. N'oublions pas qu'on avait à choisir successivement 3 rhésus parmi les deux rhésus (on a 3 enfants).

Vous l'avez deviné, cette situation ne peut se produire que si on a le droit de tirer plusieurs fois le même rhésus. Il s'agissait donc de former des 3- listes.

Pourtant Il y a $\mathbf{2^3}$ **3-listes** possibles dans un ensemble à **2** éléments.

D'où les 8 issues.

Pour **4** enfants on aurait eu : $\mathbf{2^4}$ issues.

Pour **n** enfants on aurait eu....je vous laisse deviner ! Vous devenez grand maintenant!

**Nous, on est fatigué et on a une petite faim( pour tout vous avouer c'est l'heure du goûter) et un bon plat d'aloco ne me serait pas totalement insupportable.**

**Qu'en dites-vous....** ?

# Chapitre 3
# Probabilités conditionnelles

Il est difficile, si l'on veut présenter un ouvrage de probabilités digne de ce nom– ce qui reste malgré tout notre ambition affichée– de prendre à la légère le chapitre concernant les probabilités conditionnelles.
En effet, pour une expérience aléatoire donnée, la probabilité d'un événement dépend de tous les renseignements dont on dispose sur cette expérience. Par exemple si on donne un renseignement supplémentaire, la probabilité de l'événement s'en trouve modifiée comme on va le voir dans l'exemple suivant.
Envisageons les deux problèmes suivants :

**1**°) On lance un dé. Quelle est la probabilité pour obtenir 3 ?

**2**°) On lance un dé, on obtient un nombre impair.
Quelle est la probabilité pour que ce soit 3 ?

Dans le premier cas, si on suppose que le dé est non truqué, on répond immédiatement $\frac{1}{6}$.
Dans le second cas, il s'agit de calculer la probabilité d'obtenir trois sachant que le nombre obtenu est impair. Félicitation ! Vous tenez la réponse, on obtient $\frac{1}{3}$ .
En fait dans ce cas, on peut prendre $\Omega = \{1;3;5\}$ et si on suppose qu'on est situation d'équiprobabilité alors $\mathbf{P(1)} = \mathbf{P(3)} = \mathbf{P(5)} = \frac{1}{3}$

## ■ Mise en garde.

Il faut prendre conscience de la difficulté qu'il y a à probabiliser un ensemble.
La locution « **sachant qu'un événement est réalisé** » peut entraîner de graves confusions si l'on n'y prend garde.

## A- Formule des probabilités Conditionnelles

## ■ Formule importante à retenir : Probabilité conditionnelle.

Soient deux événements **A** et **B** tels que **P(A) ≠ 0**.
La probabilité que **B** se réalise sachant que **A** est réalisé est le nombre noté $\mathbf{P_A(B)}$ (lire P de **B** sachant **A**) défini par :

$\mathbf{P_A(B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ on en déduit que $\mathbf{P(A\cap B) = P_A(B) \times P(A)}$

■ **REMARQUE IMPORTANTE 1:**

A et B sont deux événements indépendants si et seulement si :

$\mathbf{P_A (B) = P(B)}$ **ou** $\mathbf{P_B (A) = P(A)}$ **ou** $\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$

■ **REMARQUE IMPORTANTE 2 :**

Naturellement si l'une des égalités ci-dessous n'est pas vérifiée alors les événements A et B sont liés ou dépendants.

■ **Exemple 1:** Calcul de la probabilité conditionnelle d'un événement.

A la récréation, en salle des professeurs, 2 femmes sur 15 et 3 hommes sur 12 sont des professeurs de mathématiques. On prend un de ces 27 professeurs aux hasards. On note :

**F** l'événement « le professeur choisi est une femme »

**M** l'événement « le professeur enseigne les mathématiques »

Calculer $\mathbf{P_M (F)}$.

■**Solution**

Le choix du professeur se faisant au hasard on est en situation d'équiprobabilité.

On peut donc utilisé la formule : $\mathbf{P_M (F)} = \frac{Card(F \cap M)}{Card(M)} = \frac{2}{5}$.

En effet, on a 5 enseignants de mathématiques et parmi ces 5 enseignants on a seulement deux femmes.

Et la première formule de la définition ?

Voici comment on aurait pu s'en servir !

On sait que $\mathbf{P_M (F)} = \frac{P(F \cap M)}{P(M)}$.

Soit **Ω** l'ensemble des professeurs. On a donc **card**(**Ω**) = **27**

On a 5 enseignants de mathématiques donc **card**(**M**) = **5**

Parmi les enseignants de mathématiques il y a seulement 2 femmes donc **card**(**F∩ M**) = **2**

Par conséquent :

$$\mathbf{P (M)} = \frac{5}{27} \qquad \mathbf{P (F \cap M)} = \frac{2}{27}$$

$$\mathbf{P_M (F)} = \frac{P(F \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{2}{27}}{\frac{5}{27}} = \frac{2}{27} \times \frac{27}{5} = \frac{2}{5}.$$

■ **Exemple 2 :** Calcul de (A ∩ B)

La boite à craies contient « trois craies rouges » et « deux craies blanches ». On prend à la suite, au hasard, deux craies dans la boite. Quelle est la probabilité de tirer d'abord une craie blanche puis une craie rouge ?

## ■ Solution

Appelons :

A l'événement «  prendre une craie blanche en premier »

B l'événement «  prendre une craie rouge en second »

Il s'agit donc de calculer **P**(**A**∩**B**).

> On est en situation d'équiprobabilité.
> **Je ne comprends pas pourquoi nous sommes en situation d'équiprobabilité ?**
> **Parce que le choix de la craie se fait au hasard (aucune craie n'est favorisée, elles ont toutes les mêmes chances d'être tirées)**
> A et B sont dépendants car il s'agit d'un tirage sans remise.
> En effet, la réalisation de A influence B puisque si l'on tire une craie blanche en premier les chances de tirer une craie rouge en second s'en trouve modifier car il ne reste désormais que 4 craies dans la boîte.

**P**(**A**) = $\frac{2}{5}$ et **P**$_A$ (**B**) est la probabilité de prendre en second une craie rouge sachant qu'une craie blanche a été prise en premier, c'est-à-dire prendre une craie rouge dans la boite qui ne contient plus qu'une craie blanche et trois craies rouges.

Au final, on a **P**$_A$ (**B**) =$\frac{3}{4}$.

Ce qui entraîne, puisque les événements A et B sont indépendants,

**P** (**A** ∩ **B**) = **P**$_A$ (**B**) × **P** (**A**) = $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$

## B- Formule des probabilités Totales

---

## ■ Définition importante à retenir:

> On considère une expérience aléatoire d'univers Ω **et** $A_1, A_2... A_n$ des événements de cette expérience.
> Dire que $A_1, A_2... A_n$ forment une partition de $\Omega$ signifie que les événements $A_1$, $A_2... A_n$ **sont deux à deux disjoints et que** $A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n$ **= Ω.**

## ■ Intérêt

> L'intérêt de cette définition réside dans l'utilisation de la formule des probabilités totales.

## ■ Exemple : **A la conquête d'événements formant une partition de l'univers**.

On lance un dé.

On considère les événements suivants:

A : « On obtient un nombre pair »
B : « On obtient 1 ou 3 »
C : « On obtient 4 ou 2 »
D : « On obtient 5 ou 6 »
Les événements B, C et D forment-ils une partition de l'univers $\Omega$ de cette expérience ?

## ■ REMARQUE.

Il faut d'abord remarquer que $A = \{2, 4, 6\}$ ; $B = \{1, 3\}$ ; $C = \{2; 4\}$ ; $D=\{5 ; 6\}$

## ■ Solution

On doit d'abord vérifier que les événements B , C et D sont deux à deux disjoints c'est-à-dire $B \cap C = \emptyset$, $B \cap D=\emptyset$, $C \cap D = \emptyset$,

Le résultat est immédiat.

On a $B \cap C = \{1 ; 3\} \cap \{4 ; 2\}=\emptyset$ (Même un aveugle aurait vu que ces deux ensembles n'ont aucun élément en commun)

De même $B \cap D= C\cap D = \emptyset$

On vérifie ensuite que $A \cup B= \Omega$

On a $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

Or $B\cup C\cup D= \{1; 3\} \cup \{ 2; 4\}\cup\{ 5 ; 6\}=\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Donc $B\cup C\cup D= \Omega$

## ■ Conclusion :

B, C et D sont deux à deux disjoints et on a $B \cup C \cup D = \Omega$ donc B, C et D forment une partition de $\Omega$ .

On voit aisément que les événements A, B, C et D ne forment pas une partition de $\Omega$.

En effet, $A \cap C = \{2 ; 4 ; 6\} \cap \{2; 4\} = \{2 ; 4\} \neq \emptyset$ $A \cap D = \{2; 4 ; 6\} \cap \{5 ; 6\} = \{6\} \neq \emptyset$

Donc A, B, C et D ne sont pas deux à deux disjoints.

Il suffit que deux des événements considérés ne soient pas disjoints pour que ces événements ne forment plus une partition de $\Omega$

## ■ Formule des Probabilités totales :

Si les événements $A_1$, $A_2$... $A_n$ forment une partition de l'univers $\Omega$, alors la probabilité d'un événement B est donnée par :

$$\mathbf{P(B) = P(A_1\cap B) + P(A_2\cap B) +\ldots+ P(A_n\cap B)}$$

C'est-à-dire

$$\boldsymbol{P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B).}$$

## ■ Intérêt

> La deuxième formule permet de calculer la probabilité d'un événement B dans le cas (fréquent) où l'on connaît les probabilités $P(A_i)$ d'une famille d'événement $A_i$ constituant une partition de de l'univers Ω, ainsi que les probabilités conditionnelles de l'événement B sachant chacun des événements $A_i$ est réalisé.

## ■ Mise en garde

> Pour appliquer la formule des probabilités totales
> $\boldsymbol{P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)}$ il faut d'abord s'assurer que les événements $A_1$, $A_2$... $A_n$ forment une partition de l'univers Ω.

## ■ Exemple : Utilisation de la formule des probabilités totales.

Le test d'une maladie est effectué sur la totalité d'une population. Une étude établit que 70% de la population réagit négativement au test (événement N), 20% réagit faiblement au test (événement F) et 10% réagit fortement au test (événement R).
La probabilité pour une personne de cette population d'être atteinte de la maladie (événement M) est :

- 0,9 lorsque le test est fortement positif.
- 0,6 lorsque le test est faiblement positif.
- 0,05 lorsque le test est négatif.

On choisit une personne au hasard dans cette population.
Quelle est la probabilité que cette personne soit malade ?

## ■ Solution

D'après l'énoncé 70% de la population réagit négativement au test.

Donc : $P(N)=\frac{70}{100} = 0,7$

De même :

- $P(F)=0,2$ et $P(R)=0,1$
- $P_R(M)=0,9$ $P_F(M)=0,6$ $P_N(M)=0,05$

Les événements F, N et R forment une partition de Ω On déduit de la formule des probabilités totales le résultat suivant :

$P(M) = P_R(M) \times P(R) + P_F(M) \times P(F) + P_N(M) \times P(N) = 0,245$

La probabilité pour qu'une personne de cette population soit atteinte de la maladie est donc 0,245

**Je crois qu'on peut faire une pause, après un tel chapitre... Histoire de laisser les neurones se relaxer comme disent les gens qui comprennent quelque chose à la SVT.**

Chapitre 4

# Variable Aléatoire

Nous voilà arrivés au cœur de choses plus sérieuses. Nous allons essayer de vous montrer que tout cela n'est quand même pas si compliqué que l'on veut bien le dire. Plus que jamais attardez-vous sur les exemples simples que nous proposons pour bien comprendre.

## ■ Préliminaires:

Considérons l'épreuve « lancer deux fois une pièce de monnaie ».

L'univers sera alors **Ω** = {**PP** ; **FP** ; **PF** ; **FF**} où P représente ''Pile'' et F ''Face''

Donc **card**(**Ω**) = **4**

Intéressons-nous au nombre de fois ou « face est apparue » au cours de ces deux lancers.

On obtient le tableau suivant :

| Ω | PP | PF | FP | FF |
|---|---|---|---|---|
| Nombre de fois ou face est apparue | 0 | 1 | 1 | 2 |

Vous l'avez sûrement remarqué, à chaque événement élémentaire on fait correspondre un nombre réel.

On vient ainsi de définir une variable aléatoire notée **X** ; elle prend les valeurs : 0 ; 1 ; 2.

Par exemple (X=2) désigne l'événement « face est apparue deux fois » (jusque-là tout le monde suit)

## A- Définition d'une variable aléatoire

## ■ Définition importante à retenir.

> Lorsqu'à chaque événement élémentaire d'une expérience aléatoire on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une variable aléatoire.
>
> On la note généralement par une lettre majuscule **X**, **Y**, **Z**.
>
> Si la variable aléatoire **X** prend la valeur « **a** » on notera (**X** = **a**).

## ■ Exemple : Déterminer une loi de probabilité.

On a vu que la variable **X** qui à chaque événement élémentaire fait correspondre le nombre de «face» définit de nouveaux événements :

(**X**=**0**) est l'événement "aucune face n'a été tirée" : P(**X**= **0**) $=\frac{1}{4}$

(**X**=**1**) est l'événement "une face a été tirée" : **P**(**X** = **1**) $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(**X**=**2**) est l'événement "deux faces ont été tirée" : **P**(**X** = **2**) $= \frac{1}{4}$

- En résumé on a :

| X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| P(X = x) | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

On vient ainsi de définir la loi de probabilité de la variable aléatoire **X**

## B- Loi de probabilité

### ■ Définition à retenir :

Lorsqu'à chaque valeur $x_i$ prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité $p_i$ de l'événement ($X = x_i$), on dit que l'on définit la loi de probabilité de X.

### ■ REMARQUE IMPORTANTE.

Je sais vous vous dites naturellement " que dois-je faire concrètement lorsqu'on me demande de donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire X ?"

Rien de plus simple !

Il suffit de fournir un tableau qui récapitule les valeurs prises par **X** ainsi que les probabilités associées.

Si la variable **X** prend **n** valeurs, Ce tableau aura le format suivant :

| Valeur de X : $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | .... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| Probabilité **p**(X : $x_i$) | $\mathbf{p_1}$ | $p_2$ | .... | $\mathbf{p_n}$ |

### ■Mise en garde

La somme des différentes probabilités est égale à 1 c'est-à-dire $\mathbf{p_1 + p_2 + .. + p_n = 1}$

Et si je ne trouve pas 1 ?

Ne paniquez surtout pas, il y a certainement eu une erreur lors du calcul des différentes probabilités, revenez sur vos pas et revoyez vos calcul.

## C- Espérance mathématique

### ■ Définition Importante à Retenir.

Soit une variable aléatoire **X**.

L'espérance mathématique de la variable **X** est le nombre **E(X)**, et défini par :

$$\boldsymbol{E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i}$$

### ■ REMARQUE IMPORTANTE

Votre formule est bien belle, mais pourquoi l'avoir appelé espérance mathématique ? Vous faites bien de poser la question.

Lorsque les valeurs prises par **X** sont des gains algébriques à un jeu de hasard, alors E(X) traduit l'espoir de gain moyen par partie, lorsqu'on joue un grand nombre de fois. Ainsi lorsque :

E(X) > 0 **le jeu est avantageux (je vous l'aurais conseillé)**

E(X) < 0 **le jeu est désavantageux (Ne vous risquez pas)**

E(X) = 0 **Le jeu est équitable (Mais le choix vous appartient)**

## D- Variance et Ecart Type.

### ■ Définition fondamentale à retenir :Variance

Soit une variable aléatoire **X** d'espérance **E(X)**.

La variance de **X** est le nombre noté **V(X)** et défini par :

**V(X)** = $\sum_{i=1}^{n} p_i[x_i - E(X)]^2$

**V(X)** = $p_1\,[x_1 - E(X)]^2 + \ldots + p_n\,[x_n - E(X)]^2$

### ■ Formule fondamentale à retenir :

L'écart type de **X** est le nombre noté **σ(X),** et défini par :

**σ(X)** = $\sqrt{V(X)}$

**■ Exemple :** Calcul de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire.

Considérons à nouveau notre épreuve « lancer deux fois une pièce de monnaie ».

On a déjà vu que la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ qui compte le nombre de fois ou "face est apparue" était définie par le tableau suivant :

| X :x | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| P(X = x) | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

Par conséquent :

$E(X) = \left(0 \times \frac{1}{4}\right) + \left(1 \times \frac{1}{2}\right) + \left(2 \times \frac{1}{4}\right) = \mathbf{1}$ (C'est un jeu avantageux pour vous)

$V(X) = (0-1)^2 \times \frac{1}{4} + (1-1)^2 \times \frac{1}{2} + (2-1)^2 \times \frac{1}{4} = \mathbf{0{,}5}$

**σ(X)** = $\sqrt{0{,}5} \approx$

## Chapitre 5

# Epreuve de Bernoulli - loi de Bernoulli

Il est conseillé de lire ce chapitre après avoir travaillé le précédent car cette dernière constitue une sorte de préambule à celui-ci. Une façon de dire qu'il faut impérativement maîtriser les variables aléatoires si l'on veut naviguer tranquillement dans les eaux de l'épreuve de Bernoulli.

## A- Epreuve de Bernoulli

### ■Définition Fondamentale à retenir.

> Une épreuve de Bernoulli est une épreuve aléatoire ne comportant que deux issues : Mourir ou guérir, Pile ou Face**,** aimer ou détester la probabilité, avoir ou échouer à son Bac...

### ■ REMARQUE IMPORTANT

> **L'une de ces issues sera appelé succès et se réalise avec la probabilité p et l'autre échec de probabilité q = 1 – p.**

### ■ REMARQUE

> Le succès est la réalisation de l'événement que vous voulez voir se réaliser tandis que l'échec est sa non réalisation.

**■ Exemple 1:** A la rencontre d'une épreuve de Bernoulli.

Un jeu de dé est tel que le joueur gagne lorsqu'on obtient 6 et perd dans le cas contraire.
A moins d'être mal réveillé, vous aurez sans doute remarqué que notre épreuve a deux issues. C'est bien une épreuve de Bernoulli.
Notre succès est lié à l'obtention de la face 6.
Appelons donc « Succès » l'événement S « Sortie de la face 6 ». L'échec $\bar{S}$ est ainsi l'événement « On n'obtient pas la face 6 ».
Si le dé est non pipé on est en situation d'équiprobabilité
et on a P(S) = $\frac{1}{6}$ d'où $P(\bar{S}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

**■ Exemple 2 :** A la conquête d'une autre épreuve de Bernoulli.

Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à se présenter devant un feu tricolore dont le rouge dure 30 secondes, l'orange 5 secondes et le vert 25 secondes.

C'est une épreuve de Bernoulli toute crachée.

> **Mais moi je n'arrive pas à comprendre pourquoi c'est une épreuve de Bernoulli ?**
> Parce qu'on a deux issues.
> En effet, sur son trajet, lorsqu'il arrive à un feu soit l'automobiliste s'arrête (parce que le feu est au rouge ou à l'orange, l'orange invitant à ralentir)
> soit il continue de circuler (parce que le feu est au vert) **Notre raisonnement concernent uniquement les automobilistes qui respectent le code de la route et non les gbakas.**

Appelons succès l'événement S « le feu est vert » (de toute façon le feu vert est celui qui autorise pleinement la circulation des véhicules » ; l'échec $\bar{S}$ est alors l'événement « le feu n'est pas vert ».

**P(S) =** $\frac{25}{60} = \frac{5}{12}$ $\quad P(\bar{S}) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$

## B- Loi de Bernoulli

### ■ Idée Fondamentale à retenir :

**Définir une loi de Bernoulli de paramètre p**, c'est associé à l'expérience aléatoire une loi de probabilité défini par :

| Valeur de **X** : $x_i$ | succès | Echec |
|---|---|---|
| **P(X = xi)** | **p** | **q = 1 - p** |

## C- Schéma de Bernoulli

### ■ Définition Fondamentale à retenir.

Si on répète n (n≥2)f ois une épreuve de Bernoulli de paramètre p, **les épreuves étant indépendantes les unes des autres**, on dit que l'on a réalisé un schéma de Bernoulli.

### ■ Constat

On déduit aisément de cette définition qu'un schéma de Bernoulli est une répétition indépendante d'une même épreuve aléatoire ayant chacune deux issues.

### ■ REMARQUE.

La condition « les épreuves étant indépendantes les unes des autres » garantit que le paramètre p ne chance pas lors des répétitions. Dans les énoncés, c'est ce type d'expression « répétées de façon indépendante » qui nous ouvre les portes du schéma de Bernoulli (Ouvrez donc vos yeux).

## ■ REMARQUE IMPORTANTE.

Comme j'ai un peu de place je vais vous faire une confidence.
Le schéma de Bernoulli intervient bien souvent lorsqu'on effectue des **tirages successifs avec remises** (encore une affaire de tirage !)
Généralement les questions qui nous font penser au schéma de Bernoulli sont posées sous ce Format :
Quelle est la probabilité de gagner au moins.... ?
Quelle est la probabilité de gagner exactement... ?

## ■ Exemple : A la découverte d'une épreuve de Bernoulli.

Considérons l'épreuve de Bernoulli suivante : on lance un dé pipé. On appelle succès l'événement S « Sortie du 6 » ; et on sait que p(S) = $\frac{2}{9}$.
Lançons ce dé trois fois de suite, le résultat de chaque lancer ne dépendant pas des lancers précédents. On décrit ainsi un schéma de Bernoulli.
Demandons-nous « Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux succès c'est-à-dire deux fois 6 ? »
Encore un mot qui nous fait penser au schéma de Bernoulli « exactement deux succès ».
Deux succès correspond à l'événement « SS ».
Or p(S) = $\frac{2}{9}$ donc d'après le fameux principe multiplicatif on a p(SS) = $\frac{2}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{4}{81}$.

# D- Variable aléatoire associée à un schéma de Bernoulli - Loi Binomiale

## ■ Définition

A un schéma de Bernoulli donné, correspond la variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenu lors des n épreuves de Bernoulli.

## ■ REMARQUE 1

La variable aléatoire X suit une loi Binomiale de paramètre n et p que l'on note parfois **B (n, p).**

## ■ REMARQUE 2

Si une variable aléatoire **X** suit une loi binomiale de paramètre **n** et **p.**
La probabilité d'obtenir **k** succès est : **P(X=k)** = $\boldsymbol{C_n^k \times p^k \times q^{n-k}}$ $\boldsymbol{(0 \leq k \leq n)}$

# E- Espérance mathématique et Variance d'une loi Binomiale

## ■ Formule à Retenir.

**E(X) = n × p**
**V(X) = n × p × q = n × p × (1 - p) = E(X) × (1 - p).**

## ■ Application

Un autobus rencontre sur son trajet **7** feux tricolores de circulation. Pour chacun de ces feux, le rouge dure **30** secondes, l'orange **10** et le vert **20**. Les **7** feux ne sont pas synchronisés et les aléas de la circulation font que l'état d'un feu devant lequel se présente l'autobus ne dépend pas de l'état des feux précédents.

**(a)** Calculez la probabilité pour que sur son trajet l'autobus ait exactement trois feux Verts.

**(b)** Calculez la probabilité pour que sur son trajet l'autobus rencontre au moins un feu Vert.

**Bravo ! Votre constat est élégant !**

Au cours du trajet de cet autobus

Soit il s'arrête à un feu tricolore (parce que le feu est au rouge ou à l'orange, l'orange invitant à ralentir)

Soit il ne s'arrête pas à un feu tricolore (parce que le feu est au vert).

Il y a donc deux éventualités : s'arrêter à un feu tricolore ou ne pas s'arrêter à un feu tricolore.

On peut donc Appelons succès $S$ le fait que le feu soit au vert et échec $\bar{S}$ le fait qu'il soit au rouge ou à l'orange. Considérer le trajet de cet autobus comme une expérience, au cours de laquelle est répétée **7** fois l'épreuve de Bernoulli **« se présenter devant un feu tricolore »**.

De plus, les feux ne sont pas synchronisés et l'état d'un feu ne dépend pas de l'état d'un autre de telle sorte que les **7** épreuves sont indépendantes l'une de l'autre.

On donc p = p(S) = $\frac{20}{30+20+10} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ et $q = p(\bar{S}) = 1 - p = \frac{2}{3}$.

Désignons par **X** la variable aléatoire qui indique le nombre de feux verts rencontrés par l'autobus au cours de Son trajet.

On devine sans aucune difficulté que la variable **X** suit une loi binomiale de paramètre **7** et $\mathbf{\frac{1}{3}}$.

**(a)** La probabilité $P_3$ pour que sur son trajet l'autobus rencontre exactement trois feux verts est donc : $P_3$ = P(X = 3) = $C_7^3 \times (\frac{1}{3})^3 \times (\frac{2}{3})^4 = \frac{560}{2187}$ ≈ 0,256

C'est en fait la probabilité d'obtenir trois succès.

**(b)** La probabilité d'obtenir au moins un feu vert.

Nous avons déjà insisté sur l'avantage de passer par le calcul de la probabilité de l'événement contraire lorsqu'on désire estimer les chances de réalisation d'un événement contenant la restriction **« au moins »** de peur de se lancer dans de longs calculs qui bien souvent aboutissent difficilement.

En fait, on peut effectuer le calcul de la probabilité de l'événement **Q** « **l'autobus rencontre au moins un feu vert** » en calculant

$P$(Q) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) +…. + P(X = 7).

On a P(X=1) = $C_7^1 \times (\frac{1}{3})^1 \times (\frac{2}{3})^6 = \frac{448}{2187}$

P(X = 2) = $C_7^2 \times (\frac{1}{3})^2 \times (\frac{2}{3})^5 = \frac{672}{2187}$ $P$(X = 3) = $\frac{560}{2187}$

$P(X = 4) = C_7^4 \times (\frac{1}{3})^4 \times (\frac{2}{3})^3 = \frac{280}{2187}$

$P(X = 5) = C_7^5 \times (\frac{1}{3})^5 \times (\frac{2}{3})^2 = \frac{84}{2187}$

$P(X = 6) = C_7^6 \times (\frac{1}{3})^6 \times (\frac{2}{3})^1 = \frac{14}{2187}$

$P(X = 7) = C_7^7 \times (\frac{1}{3})^7 \times (\frac{2}{3})^0 = \frac{1}{2187}$

On obtient donc  par sommation de ces différentes probabilités **P(Q) =** $\mathbf{\frac{2059}{2187}}$

ouf ! Que de calculs alors qu'il suffisait simplement de remarquer que $\bar{Q}$ est l'événement **« l'autobus ne rencontre aucun feu vert ».**

$\bar{Q}$ Correspond donc à l'événement  $(\boldsymbol{X = 0})$

D'où  **P(Q) = 1 -** $\boldsymbol{P(\bar{Q})}$ **= 1 – P(X = 0) = 1**$-C_7^0 \times (\frac{1}{3})^0 \times (\frac{2}{3})^7 = \mathbf{\frac{2059}{2187}}$

Rien de plus rapide ! Je l'avais déjà annoncé.

## Chapitre 6

## L'Essentiel Des Probabilités...

## ... EN CINQ PAGES

Enfoncer des portes ouvertes n'est pas un exercice qui brille par sa dimension intellectuelle, certes. Mais nous cherchons d'abord et avant tout à rendre service aux élèves et futurs candidats. Aussi nous n'avons pas peur des banalités...
Alors que vous venez à peine de terminer d'ingérer six chapitres de Probabilité, nous voudrions vous montrer les grandes idées des probabilités, autrement dit « ce qu'il doit vous rester lorsque vous aurez tout perdu »
Il nous semble important que vous gardez à l'esprit ces quelques idées très simples, auxquelles vous pourrez vous accrochez si par malheur vous étiez complètement perdu et que vous venez à oublier le contenu de ces cinq chapitres (ce que nous ne vous souhaitons pas).

### A- Dénombrement

| Type de tirages | Ordre | Répétition d'éléments | Technique de Dénombrement | Nombre de Tirage |
|---|---|---|---|---|
| Tirage Successifs avec Remise | | Un élément peut apparaître plusieurs fois | P-Uplet ou P-liste | $n^p$ |
| Tirage Successif sans Remise | L'ordre intervient | Un élément ne peut apparaître qu'au plus une fois. | Arrangement | $A_n^p$ |
| Tirage Simultanés | L'ordre n'intervient pas | | Combinaison | $C_n^p$ |

## ■ Cohérence de résultat.

La probabilité d'un événement **n'est jamais supérieure à 1 et jamais inférieure** à **0**.

## ■ REMARQUE IMPORTANTE.

Nous n'insisterons jamais assez sur le fait que :

**Si la probabilité d'un événement est 0 il ne se réalise Jamais c'est un événement impossible.**

**Si la probabilité d'un événement est 1 il se produira absolument à l'issue de l'expérience : c'est un événement certains.**

**FAITES ATTENTION A DE TELS RESULTATS QUI SONT UN PEU EXTRÊME, soyez vraiment certains avant de les poser sur votre de copie.**

## ■ A la conquête d'événements contraires.

Le Contraire de la locution **au moins $n$** est **au plus n-1.**

En particulier le contraire de la locution **au moins un** est **au plus 1 - 1 =0 donc aucun.**

## ■ Evènements incompatibles.

Deux événements A et B sont incompatibles si et seulement si $A \cap B = \emptyset$

## ■ Probabilité d'un événement en situation d'équiprobabilité.

**En cas d'équiprobabilité**, et seulement dans ce cas, **la probabilité d'un événement** A **est** : $P(A) = \frac{Nombres\ d'issues\ \ favorable \text{ à } A}{nombres\ d'issues\ possibles} = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

## ■ Evènements indépendants.

Deux événements **A** et **B** de probabilités non nulles sont indépendants si et seulement si: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

## ■ Probabilité de la réunion de deux événements.

Si A et B sont deux événements alors

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

## C- Probabilités Conditionnelles

### ■ Formule des Probabilités conditionnelles.

Soient deux événements **A** et **B** tels que **P(A) ≠ 0**.
La probabilité que **B** se réalise sachant que **A** est réalisé est le nombre noté $\mathbf{P_A}$ **(B)**(lire P de **B** sachant **A**) défini par :

$\boldsymbol{P_A(B)} = \frac{\boldsymbol{P(A\cap B)}}{\boldsymbol{P(A)}}$ on en déduit que **P(A∩B)=** $\mathbf{P_A}$ **(B) × P(A)**

### ■ Formule des Probabilités totales :

Si les événements $A_1$, $A_2$... $A_n$ forment une partition de l'univers Ω, alors la probabilité d'un événement B est donnée par :

$$\mathbf{P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_1 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)}$$

C'est-à-dire

$$\boldsymbol{P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B).}$$

### ■ Intérêt

La deuxième formule permet de calculer la probabilité d'un événement B dans le cas (fréquent) où l'on connaît les probabilités $P(A_i)$ d'une famille d'événement $A_i$ constituant une partition de de l'univers Ω, ainsi que les probabilités conditionnelles de l'événement B sachant chacun des événements $A_i$ est réalisé.

## D- Variables Aléatoires

### ■ Définition d'une Variable Aléatoire.

Lorsqu'à chaque événement élémentaire d'une expérience aléatoire on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une variable aléatoire.
On la note généralement par une lettre majuscule **X**, **Y**, **Z**.
Si la variable aléatoire **X** prend la valeur « **a** » on notera (**X** = **a**).

### ■ Définition d'une Loi de Probabilité :

Lorsqu'à chaque valeur $x_i$ prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité $p_i$ de l'événement ($X = x_i$), on dit que l'on définit la loi de probabilité de X.

### ■ Définition de l'Espérance mathématiques d'une variable aléatoire.

Soit une variable aléatoire **X**.
L'espérance mathématique de la variable $\boldsymbol{X}$ est le nombre **E(X)**, et défini par :
$\mathbf{E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p_i x_i}$

## ■ REMARQUE IMPORTANTE

E(X) > 0 **le jeu est avantageux (je vous l'aurais conseillé)**

E(X) < 0 **le jeu est désavantageux (Ne vous risquez pas)**

E(X) = 0 **Le jeu est équitable (A vous de voir s'il faut jouer)**

## ■ Formule de la Variance

Soit une variable aléatoire $X$ d'espérance **E(X).**

La variance de **X** est le nombre noté $V(X)$ et défini par :

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i[x_i - E(X)]^2$$

$$V(X)=p_1\,[x_1 - E(X)]^2+\ldots+p_n\,[x_n - E(X)]^2$$

## ■ Formule de l'Ecart Type

L'écart type de **X** est le nombre noté **σ(X),** et défini par :

$$\sigma(X)= \sqrt{V(X)}$$

## E- Epreuve de Bernoulli – Loi de Bernoulli.

---

## ■Définition d'une épreuve de Bernoulli.

Une épreuve de Bernoulli est une épreuve aléatoire ne comportant que deux issues : Mourir ou guérir, Pile ou Face**,** aimer ou détester la probabilité, avoir ou échouer à son Bac...

## ■ REMARQUE 1

**L'une de ces issues sera appelé succès et se réalise avec la probabilité p et l'autre échec de probabilité q = 1 – p.**

## ■ REMARQUE 2

Le succès est la réalisation de l'événement que vous voulez voir se réaliser tandis que l'échec est sa non réalisation.

## ■ Idée d'une loi de Bernoulli

**Définir une loi de Bernoulli de paramètre p**, c'est associé à l'expérience aléatoire une loi de probabilité défini par :

| Valeur de **X** : $x_i$ | succès | Echec |
|---|---|---|
| **P** (**X** = $x_i$) | **p** | **q** = **1 – p** |

## ■ Reconnaître un schéma de Bernoulli

Si on répète n (n ≥ 2) fois une épreuve de Bernoulli de paramètre p, **les épreuves étant indépendantes les unes des autres**, on dit que l'on a réalisé un schéma de Bernoulli.

## ■ Constat

On déduit aisément de cette définition qu'un schéma de Bernoulli est une répétition indépendante d'une même épreuve aléatoire ayant chacune deux issues.

## ■ REMARQUE 3

La condition « les épreuves étant indépendantes les unes des autres » garantit que le paramètre p ne chance pas lors des répétitions. Dans les énoncés, c'est ce type d'expression « répétées de façon indépendante » qui nous ouvre les portes du schéma de Bernoulli (Ouvrez donc vos yeux).

## ■ REMARQUE 4

Le schéma de Bernoulli intervient bien souvent lorsqu'on effectue des **tirages successifs avec remises** (encore une affaire de tirage !)

Généralement les questions qui nous font penser au schéma de Bernoulli sont posées sous ce Format :

Quelle est la probabilité de gagner au moins.... ?

Quelle est la probabilité de gagner exactement... ?

## ■ Définition Variable aléatoire associée à un schéma de Bernoulli

A un schéma de Bernoulli donné, correspond la variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenu lors des n épreuves de Bernoulli.

## ■ REMARQUE 5

La variable aléatoire X suit une loi Binomiale de paramètre n et p que l'on note parfois **B (n, p).**

## ■ REMARQUE 6

Si une variable aléatoire **X** suit une loi binomiale de paramètre **n** et **p.**

La probabilité d'obtenir **k** succès est : **P(X = k)** = $C_n^k \times p^k \times q^{n-k}$ **(0 ≤ k ≤ n)**

## ■ Espérance mathématique et Variance d'une loi Binomiale

E(X) = n × p

V(X) = n × p × q = n × p × (1 - p) = E(X) × (1 - p).

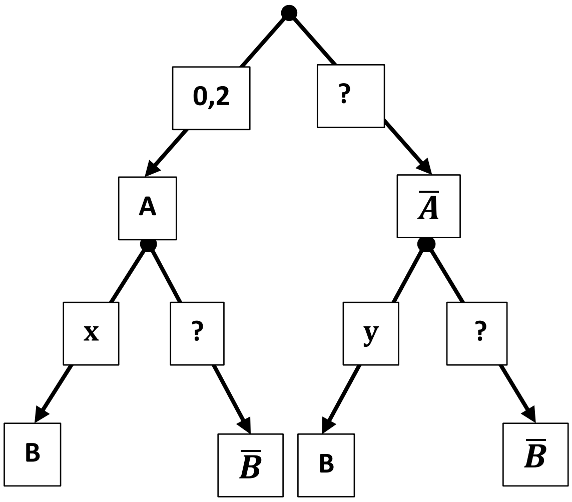
# PARTIE II

ENONCE DES EXERCICES

## Applications Directes de Cours

### ■ EXERCICE 1

A et B sont deux événements associés à une épreuve aléatoire d'univers Ω. $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont leurs événements contraires. On considère l'arbre de probabilité ci-dessous.




**1°)**

**(a)** Que représentent les nombres $x$ et $y$?

**(b)** Compléter cet arbre.

**2°)** Exprimer $P(B)$ en fonction de x et y.

**3°)** Quelle relation doivent vérifier x et y pour que $A$ et B soient Indépendants ?

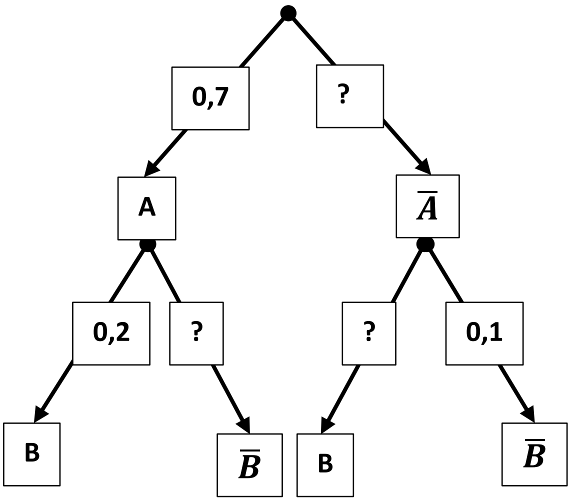
**4°)** Exprimer $P_B(A)$ en fonction de x et $y$

**5°)** On suppose que y = 0,6.

Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles $P_A(B)=P_B(A)$?

### ■ EXERCICE 2

Une situation de probabilités est représentée par l'arbre ci-dessous :

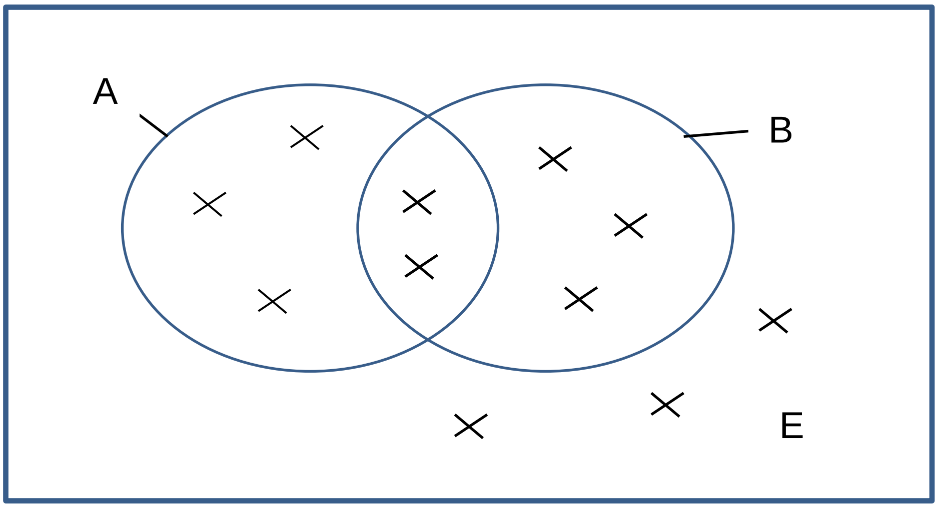


Compléter cet arbre et donner les probabilités suivantes :

$P_A$ (B); $P(A \cap \bar{B})$; P(B∩A); $P(\bar{A} \cap \bar{B})$; P(B); P(A∪B); $P_B$ (A) .

## ■ EXERCICE 3

On représente sur le diagramme ci-dessous un ensemble E et deux de ses sous-ensembles A et B (chaque élément de E est représenté par une croix)




1°) Calculer card (A), card (B), card (A∩B), card (A∪B), card (E).

2°) Quelle égalité lie les quatre premiers nombres?

## ■ Exercice 4: Tirage successif avec remise

Une urne contient trois boules marquées L, A et C. On tire successivement avec remise trois boules. On obtient ainsi un mot qui a un sens ou non.

**1°)** Combien de mots peut-on former ?

**2°)** Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « le mot ne contient que des consonnes »

B : « le mot se terminent par une voyelle »

## ■ EXERCICE 5

Dans une classe de 24 élèves comprenant autant de garçon que de filles ont veut former, au hasard, des groupes de 4 élèves. Plusieurs méthodes de tirages simultanés sont explorées. On s'intéresse à un groupe particulier de quatre amis formé de 2 filles et de 2 garçons. Le but est de connaître la probabilité pour que ce groupe soit choisi à la fin d'une épreuve. Les noms de tous les élèves sons inscrit sur des cartons indiscernables au toucher. Dans la classe, les élèves sont disposés en 6 rangées de 4 élèves. Chaque rangée est unisexe. Les rangées sont numérotées de 1 à 6 et les numéros sont inscrits sur des cartons indiscernables. Tous les tirages lors des épreuves sont simultanés.

**1°)** Dans cette question, Les 24 cartons portant les noms de tous les élèves sont mis dans une urne. L'expérience aléatoire consiste à tirer 4 cartons de l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : « Le groupe formé contient exactement l'un des 4 amis »
- B : « Le groupe formé contient au moins l'un des 4 amis »
- C : « Le groupe des amis a été choisi »

**2°)** On change la méthode pour composer les groupes. On procède par étape.
Lors de la première étape on sélectionne deux rangées par tirage dans une urne comportant les numéros des rangées. Ensuite on tire le numéro de deux élèves dans les rangées choisies. Les cartons portant les noms des élèves ont été au préalable, regroupés par rangées dans des urnes différentes.

**(a)** Calculer la probabilité d'obtenir un groupe formé de deux filles et de deux garçons.

**(b)** Calculer la probabilité pour que le groupe des 4 amis soit choisi si les filles se trouvent sur la rangée portant le numéro 2 et les garçons sur celle portant le numéro 5.

**(c)** X est la variable aléatoire égale au nombre de fille contenu dans le groupe choisi. Indiquer les valeurs que X peut prendre et déterminer sa loi de probabilité.

## ■ EXERCICE 6 : Mot de passe.

A l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de douze touches : trois lettres (A, B, C) et neuf chiffres non nuls (1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9). Le code déclenchant l'ouverture de la porte peut être changé par le régisseur. Ce code est toujours formé d'une lettre et suivie d'un nombre de trois chiffres.

**1°)** Dans cette question on suppose que les trois chiffres sont distincts ou non.

**(a)** Combien de codes commençant par la lettre A le régisseur peut-il proposer ?

**(b)** Combien de codes peut-il proposer ?

**2°)** Dans cette question on sait que la lettre du code est B et que les chiffres du code sont tous distincts.

**(a)** Combien de code le régisseur peut-il proposer ?

**(b)** Combien de codes comportant au moins l'un des chiffres 7, 8 ou 9 peut-il proposer ?

## ■ EXERCICES 7

Chaque année, deux villages Gbôssôkro et Klodan organisent un concours sportif. Les concurrents tirent au sort un moyen de transport puis doivent relier Gbôssôkro à Klodan le plus rapidement possible en utilisant ce moyen de transport et un parcours adapté. Pour le tirage, on utilise une urne contenant 4 jetons indiscernable au toucher. Sur un premier jeton figure la lettre V, sur le second la lettre R, sur le troisième la lettre P et sur le dernier la lettre L.

Un concurrent tire au hasard un jeton :

- S'il tire le jeton sur lequel figure la lettre V il effectuera le trajet à vélo.
- S'il tire le jeton sur lequel figure la lettre R il effectuera le trajet à Roller.
- S'il tire le jeton sur lequel figure la lettre P il effectuera le trajet à pied.
- S'il tire le jeton sur lequel figure la lettre L il choisira librement son mode de transport parmi les trois précédents.

On observe que lorsqu'un concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisit le vélo dans 70% des cas, il choisit le roller dans 20% des cas et il décide de faire le parcourt à pied dans 10% des cas.

**1°)** Construit un arbre pondéré correspondant à la situation.

**2°)** Calculer la probabilité qu'un concurrent effectue le trajet à vélo.

**3°)** Sachant qu'un concurrent a effectué le trajet à vélo, quelle est la probabilité qu'il ait tiré le jeton sur lequel figure la lettre L

**4°)** On admet que les résultats des différentes années sont indépendantes les unes des autres. L'expérience de l'année précédente permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur, d'avoir effectué le trajet à vélo est $\frac{2}{3}$

Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remporté au moins une fois par un « concurrent non cycliste »

## ■ EXERCICE 8

Une urne contient une boule blanche, n boules noires et deux boules vertes (n entier naturel non nul). Le jeu consiste à tirer une boule au hasard (chaque boule a la même probabilité d'être tirée) :

- S'il elle est blanche, le joueur gagne.
- Si elle noire, il perd.
- Si elle est verte, il la remet dans l'urne et tire une boule au hasard : il gagne si celle-ci est blanche, sinon il perd.

**A. Dans cette partie on suppose que n est un entier naturel quelconque**.

**1°) (a)** Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.

**(b)** Démontrer que la probabilité p que le joueur gagne est : p = $\frac{n+5}{(n+3)^2}$

**(c)** En déduire la probabilité q pour que le joueur perde.

**2°)** Lorsque le joueur gagne il reçoit 500 F. Lorsqu'il perd, il donne 100 F.

On note X la variable aléatoire de gain financier du joueur.

**(a)** Déterminer la loi de probabilité de X

**(b)** Démontrer que l'espérance mathématique de X est E(X) = $\frac{2100-100n^2}{(n+3)^2}$

**B. Dans cette partie on suppose que n= 3**

**1.** Vérifier que la probabilité p que le joueur gagne est : p = $\frac{2}{9}$

**2.** Un joueur décide d'effectuer successivement cinq jeux de manière indépendante dans les mêmes conditions définies ci-dessus. On note Y la variable aléatoire désignant le nombre de jeux gagnés et Z le gain financier du joueur au cours des cinq jeux.

**(a)** Déterminer la loi de probabilité de Y, son espérance mathématique et sa variance.

**(b)** Calculer la probabilité pour que le joueur gagne au moins une fois.

**(c)** Quelles sont les valeurs prises par Z ?

## ■ EXERCICE 9

Une urne contient six boules blanches et sept boules noires.

On tire simultanément trois boules dans le sac.

**1°)** Quelle est la probabilité d'obtenir :

**(a)** Trois boules blanches ?

**(b)** Trois boules noires ?

**(c)** Une boule blanche et deux noires ?

**(d)** Une boule noire et deux boules blanches ?

**2°)** Vérifier les résultats précédents en calculant la somme des probabilités obtenues.

## ■ EXERCICE 10

Un grossiste en appareil électro ménagers est approvisionnés par trois marques notées respectivement, $M_1$, $M_2$ et $M_3$ La moitié des appareils de son stock proviennent de $M_1$, un huitième de $M_2$ et trois huitième de $M_3$. Ce grossiste sait que dans son stock, 13% des appareils de la marque $M_1$ sont rouges, 5% des appareils de la marque $M_2$ sont rouges et

10% des appareils de la marque $M_3$ le sont aussi. On choisit au hasard un appareil emballé dans le stock de ce grossiste :

**1°)** Quelle est la probabilité qu'il vienne de $M_3$ ?

**2°)** Quelle est la probabilité qu'il soit rouge sachant qu'il vient de $M_2$ ?

**3°)** Quelle est la probabilité que l'appareil choisi ne soit pas rouge ?

**4°)** Après un examen, on s'aperçoit que l'appareil choisi est rouge. Quelle est la probabilité qu'il soit de marque $M_1$ ?

## ■ EXERCICES 11

On dispose de 4 billes numérotées 1, 2, 3, 4 qu'on veut lancer en direction de 3 trous marqués A, B et C creusés dans le sol. Chaque bille entre nécessairement dans un trou et chaque trou peu recevoir jusqu'à quatre billes.

**1°)**

**(a**) Justifier qu'il y a 81 dispositions différentes des quatre billes dans les trois trous.

**(b**) Soit A l'événement « le trou A reçoit exactement deux billes et les autres trous une bille chacune » Démontrer que P(A) = $\frac{4}{27}$ .

**(c)** Soit B l'événement « chaque trou reçoit au moins une bille » Démontrer que la probabilité de l'événement B est égale à $\frac{4}{9}$.

**(d)** Calculer la probabilité de l'événement C « un trou au moins est vide ».

**2°** Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de billes tombées dans le trou A.

**(a)** Déterminer la loi de probabilité de X

**(b)** Démontrer que l'espérance mathématique de X est $\frac{4}{3}$ .

**3°)** Une partie est dite « gagnée » si chaque trou reçoit au moins une bille.

**(a)** Calculer la probabilité pour qu'en jouant cinq parties (Indépendantes), on en gagne exactement trois.

**(b)** Déterminer le nombre minimum n de parties à jouer pour que la probabilité d'avoir au moins une partie gagnée soit supérieure à 0,99

**Extrait du test de Sélection MIAGE**

## ■ EXERCICES 12

Dans une urne il y a n boules rouges et 2n boules blanches. On tire au hasard et simultanément p boules.

**1°)** n = 5, p = 4, quelle est la probabilité :

**(a)** D'obtenir deux boules rouges et deux boules blanches ?

**(b)** D'obtenir au moins une boule blanche ?

**2°)** Si n est un entier quelconque et p = 2 :

**(a)** Quelle est la probabilité $P_n$ d'obtenir deux boules de couleurs Différentes ?

**(b)** Quel est le sens de variation de la suite ($P_n$) ?

**(c)** Déterminer la limite de cette suite.

## ■ EXERCICE 13

Chacun des mots de l'expression **« par le plus grand des hasards »** est inscrit sur un carton et ces six cartons sont disposés dans une urne.

On tire au hasard l'un des cartons de cette urne, et on considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de lettres du mot tiré.

**1°)** Donnez la loi de probabilité de X.

**2°)** Calculer E(X).

## ■ EXERCICE 14

Une entreprise a lancé un avis de recrutement de cadres supérieurs. Elle a réceptionné 12 dossiers. Kedjebo et Awa ont postulé. Les dossiers ont été rangés dans des chemises indiscernables.

A la demande du directeur qui veut apporter un premier regard sur les dossiers des postulants la secrétaire dépose sur son bureau 5 chemises qu'elle a choisies au hasard dans le lot.

Calculer la probabilité des événements A, B et C décrits ci-dessous :

- A : « Les dossiers de Awa et de Kedjebo ne figurent pas parmi les chemises qui se trouvent sur la table du directeur »
- B : « Les dossiers de Awa et de Kedjebo figurent parmi les chemises qui se trouvent sur la table du directeur »

## ■ EXERCICES 15

Dans une rue, un panneau publicitaire du groupe **ASTERIS** est remarqué par un passant sur quatre.

**1°)** Sachant que l'on dispose de deux panneaux dans la même rue,
calculer la probabilité qu'un passant remarque la publicité.

**2°)** Même question si l'on dispose de trois panneaux

**3°)** Combien doit-il avoir de panneaux pour que plus de 99% des Passants aient remarqué cette publicité ?

REMARQUE

On supposera que, pour un passant, l'événement : « remarquer le panneau n° i » est indépendant de l'événement : « remarquer le panneau n° j ».

## ■ EXERCICE 16

Dans tout l'exercice, les probabilités seront données au centième près par défaut. Une laiterie fabrique des fromages dont la masse théorique est 250 g.

On note X la variable aléatoire ayant pour valeur les masses possibles du produit exprimées en grammes.

$p_i$ est la probabilité qu'un fromage soit de masse $x_i$.

On donne :

| $X = x_i$ | 220 | 230 | 240 | 250 | 260 | 270 | 280 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | 0,08 | 0,10 | 0,15 | 0,32 | 0,16 | 0,15 | 0,04 |

**1°)** Calculez l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

**2°)** On prélève au hasard un fromage. Quelle est la probabilité que sa masse soit au moins de 250 g ?

**3°)** On prélève au hasard dix fromages (On admettra que les tirages Sont avec remises et indépendants). Quelle est la probabilité d'avoir :

**(a)** au moins un fromage de 220 g ?

**(b)** Au plus 220 g ?

## ■ EXERCICE 17

Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants : Chez les individus malades, 95% des tests sont positifs et 5% négatifs.

Chez les individus non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs.

On choisit un individu au hasard.

**1°)** Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.

**2°)** Quelle est la probabilité :

**(a)** Qu'il soit malade et qu'il ait un test positif ?

**(b)** Qu'il ne soit pas malade et qu'il ait un test positif ?

**(c)** Qu'il ait un test positif ?

**(d)** Qu'il ait un test négatif ?

**3°)** Calculer la probabilité :

**(a)** Qu'il ne soit pas malade, sachant que le test est positif.

**(b)** Qu'il soit malade, sachant que le test est négatif

**4°)** Déterminer le taux d'erreur de ce test.

## ■ EXERCICE 18

Une entreprise fabrique des appareils électroniques. La probabilité qu'un appareil ainsi fabriqué fonctionne parfaitement est $\frac{9}{10}$ .

**1°)** On note F l'événement « l'appareil fonctionne parfaitement ». Calculer la probabilité de l'événement contraire $\overline{F}$.

**2°)** On fait subir à chaque appareil un test avant sa livraison.

On constate que : quand un appareil est en parfait état de fonctionnement, il est toujours accepté à l'issue du test ; quand un appareil n'est pas en parfait état de fonctionnement, il peut être néanmoins accepté, avec une probabilité égale $\frac{1}{11}$ .

On note T l'événement « l'appareil est accepté à l'issue du test ».

**(a)** Vérifier que P(T ∩ F)= $\frac{9}{10}$ . Calculer P(T∩$\bar{F}$)

**(b)** Déduisez-en la probabilité de T

**(c)** Calculer la probabilité conditionnelle de F par rapport à T.

## ■ EXERCICE 19

Dans une population donnée, 15% des individus ont une maladie $M_a$. Parmi les individus atteints par la maladie $M_a$, 20% ont une maladie $M_b$ et parmi les individus non atteints par la maladie $M_a$, 4% ont la maladie $M_b$. On choisit un individu au hasard : et on considère les événements suivants :

A : « l'individu est atteint par la maladie $M_a$ »

B « l'individu est atteint par la maladie $M_b$»

**(a)** Donnez les valeurs de p(A), p(B\A) ,p(B$|\bar{A}$),

**(b)** Calculer p(B), puis p(A\B)

## ■ EXERCICE 20

Un sac contient trois boules indiscernables au toucher numérotées 0, 1 et 2. On tire une boule du sac, on note son numéro x et on la remet dans le sac. Ensuite, on tire une seconde boule, on note son numéro y et on la remet dans le sac. A chaque tirage de deux boules on associe le nombre complexe z = x + iy.

**1°)** Calculer la probabilité des événements suivants :

**(a)** A : « z est un nombre réel »

**(b)** B : « z est un nombre imaginaire pur »

**(c)** C : « z est solution de l'équation $|z -1|=|\bar{z} + 1|$ »

**(d)** D : « z est solution de l'équation $\frac{z-1}{z+1}$ = i »

**2°)** Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules associe la somme $x^2 + y^2$
Détermine la loi de la probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

## ■ EXERCICE 21

Une urne contient cinq boules noires et quinze boules rouges. On suppose que toutes les boules on la même chance d'être tirées.

**1°)** Le jeu se déroule de la façon suivante : un joueur tir simultanément trois boules de l'urne.

**(a)** Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « le joueur a tiré exactement une boule noire »

B : « le joueur a tiré exactement deux boules noires »

C : « le joueur a tiré exactement trois boules noires »

**(b)** Le joueur gagne 5 F pour chaque boules noire obtenue.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme gagnée.

Etablissez la loi de probabilité de X et calculez son espérance mathématique.

**2°)** Le contenu de l'urne étant inchangé, le jeu se déroule maintenant

De la façon suivante. Le joueur tire une boule : Si elle est noire, il Gagne 5 F et la partie est terminée. Si elle est rouge, il la remet dans L'urne et procède à un nouveau tirage dans les mêmes conditions.

**(a)** Quelle est la probabilité que le joueur gagne au $1^{er}$ tirage ?

**(b)** Quelle est la probabilité que le joueur gagne au $2^{ème}$ tirage ?

**(c)** Quelle est la probabilité que le joueur gagne au $3^{ème}$ tirage ?

**(d)** Quelle est la probabilité que le joueur que le joueur n'ait rien gagné à la fin de la partie ?

## ■ EXERCICE 22

Un voyageur insouciant prend toujours le bus sans payer. A chaque voyage, il a une probabilité $p = \frac{1}{6}$ de se faire contrôler. Le prix du ticket de son trajet habituel est de 3000 F, celui de l'amende est de 4000 F. Les contrôles sont indépendants d'un voyage à un autre.

**1°)** On suppose que le voyageur effectue trois fois son trajet.

**(a)** Déterminer la probabilité pour que le joueur ait exactement deux fois une amende.

**(b)** Déterminer la probabilité pour que la somme totale des amendes Soit inférieure au coût des trois tickets.

**2°)** On suppose que le voyageur effectue n trajets.

Pour quelle valeur minimale de n la probabilité qu'il y ait au moins une amende est supérieure ou égale à 0,5 ?

**A tous nos fraudeurs de …**

## ■ EXERCICE 23

Un sac contient n billes rouges et 2n billes bleues ($n \geq 1$), indiscernable au toucher et ayant la même probabilité d'être tiré.

**1°)** On tire simultanément trois billes du sac.

**(a)** Quelle est la probabilité $P_n$ que parmi les trois billes il y ait exactement une bille rouge ?

**(b)** Calculer la limite de $P_n$ en $+\infty$

**(c)** Calculer la probabilité $q_n$ d'obtenir au moins une bille rouge.

**(d)** Calculer la limite de $q_n$ en $+\infty$.

**2°** Soit X la variable aléatoire qui à un tirage associe le nombre de billes rouge obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X et calculez son espérance mathématique.

## ■ EXERCICE 24

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres**.** Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désigné par a et b. 2% des montres fabriquées présentent le défaut $a$ et 10% le défaut b. Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les événements suivants :

A : « la montre tirée présente le défaut a »

B : « la montre tirée présente le défaut b »

C : « la montre tirée ne présente aucun des deux défauts »

D : « la montre tirée présente un et un seul des deux défauts »

On suppose que les événements $\mathrm{A}$ et $\mathrm{B}$ sont indépendants.

**1°)** Montrer que la probabilité de l'événement $C$ est égale à 0,882.

**2°)** Calculer la probabilité de l'événement D.

**3°)** Au cours de la fabrication on prélève au hasard successivement cinq montres. On considère que le nombre de montres fabriqués est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants.

Soit X la variable aléatoire, qui a chaque prélèvement de cinq montres associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts a et b**.**

On définit l'événement E « Quatre montres au moins n'ont aucun des deux défauts ».

Calculer la probabilité de l'événement E **.**On donnera une valeur approché à $10^{-3}$ près.

## ■ EXERCICE 25

On utilise un test pour diagnostiquer une maladie qui touche 6% de la population. Lorsqu'un individu est malade, le test est positif dans 95% des cas. Lorsqu'un individu n'est pas malade le test est positif dans 3% des cas.

**1°)** On choisit au hasard une personne dans la population.

**(a)** Quelle est la probabilité pour que la personne soit malade et que le test soit positif ?

**(b)** Sachant qu'une personne a un test positif, quelle est la probabilité pour qu'il soit malade ?

**2°)** On choisit 8 personnes qui ont un test positif.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes effectivement malades parmi les huit.

**(a)** Calculez p(x = 2). Quelle est la loi de X ?

**(b)** Déterminer E(X)

## ■ EXERCICE 26

Une urne contient quatre boules bleues, deux boules vertes, et n boules rouges, indiscernable au toucher. On tire au hasard deux boules simultanément. On désigne par X la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de boules rouges tirées.

**1°)** Déterminer la loi de probabilité de X lorsque n = 0, puis lorsque n = 1.

**2°)** On suppose désormais que n ≥ 2. Déterminer la loi de X.

**3°)** Montrer que E(X) = $\frac{2n}{n+6}$.

**4°)** Déterminer n de façon à obtenir E(X) = 1, et expliquer le résultat.

## ■ EXERCICE 27

Une boîte contient 6 boules vertes et n boules blanches. Un jeu consiste à tirer simultanément deux boules de la boîte. Si les deux sont de même couleur, le joueur gagne 1 F ; Si elles sont de couleurs différentes, le joueur perd 1 F.

**1°)** Dans cette question, on suppose n = 3.

Calculer les probabilités d'obtenir **:**

**(a)** Deux boules de même couleur.

**(b)** Deux boules de couleurs différentes.

**2°)** Dans cette question, n ≥ 2, et on note $X$ la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe le gain du joueur.

**(a)** Exprimer en fonction de n les probabilités des événements $(X = 1)$ et $(X = -1)$

**(b)** Montrer que E(X) = $\frac{n^2-13n+30}{(n+6)(n+5)}$ .

Pour quelle valeurs de n a-t-on $E(X) = 0$, $E(X) < 0$ ?

## ■ EXERCICE 28

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre un ballon afin de le crever. A chacun de ces tirs, il a la probabilité $0{,}2$ de crever le ballon.

Le tireur s'arrête quand le ballon est crevé.

Les tirs successifs sont supposés indépendants.

**(a)** Quelle est la probabilité qu'au bout de 2 tirs le ballon soit intact.

**(b)** Quelle est la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon.

**(c)** Quelle est la probabilité $P_n$ que n tirs suffisent pour crever le ballon

**(d)** Pour quelle valeur de n a-t-on $P_n \geq 0{,}99$ ?

**2°)** Ce tireur participe au jeu suivant : Dans un premier temps il lance un dé tétraédrique régulier dont les faces sont numérotées de un à quatre. Soit k le numéro de la face obtenue. Le tireur se rend alors au stand de tir et il a droit a k tirs pour crever le ballon.

Démontrer que si le dé est bien équilibré, la probabilité de crever le ballon est égale à 0,4096 (On pourra utiliser un arbre pondéré).

**A nos tireurs d'élite**

## ■ EXERCICE 29

Dans une fête foraine, Julie décide de jouer à un jeu dont chaque partie se déroule de la façon suivante : elle tire un jeton dans une urne contenant 7 jetons rouges et 2 bleus. Si le jeton tiré est bleu elle gagne. Sinon sans remettre le jeton tiré dans l'urne elle en tire un deuxième. S'il est bleu elle gagne sinon sans remettre les deux précédents, elle en tire un troisième. S'il est bleu elle gagne, sinon elle a perdu la partie.

**1°)**

**(a)** Déterminer la probabilité des événements suivants :

**A** : « Julie gagne en un tirage exactement »

**B** : « Julie gagne en deux tirage exactement »

**C** : « Julie gagne en trois tirage exactement »

**(b)** Calculer la probabilité de gagner a une partie de ce jeu

**2°)** A chaque partie gagnée, Julie gagne 1 ticket. Elle a remarqué une jolie poupée qu'elle peut obtenir avec au moins trois tickets. Elle décide donc d'effectuer 4 parties consécutives et indépendantes. Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre de tickets gagnés par Julie à l'issue des quatre parties.

**(a)** Donner la loi de probabilité de X.

**(b)** Déterminer la probabilité pour que Julie reparte avec la poupée à l'issue des quatre parties

**(c)** Calculer $E(X)$ et $V(X)$

**3°)** La mise pour quatre partie est 500 F. Les gains sont des poupées dont la valeur, en fonction du nombre de tickets gagnés, est dans le tableau ci-dessous :

| Nombre de tickets | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Valeur de gains en F | 0 | 75 | 75 | 600 | 1000 |

On appelle Y le gain de Julie.

**(a)** Quelles sont les différentes valeurs prises par Y.

**(b)** Déterminer la loi de probabilité de Y.

**(c)** Calculer E(Y) et commenter le résultat obtenu.

## ■ EXERCICE 30

Deux chasseurs Zamlé et Toro aperçoivent ensemble un lièvre et tire simultanément.

**1°)** Sachant que Zamlé atteint et tue d'habitude cinq lièvre sur six et Toro quatre lièvre sur cinq. Quelle est la probabilité pour que le lièvre soit tué.

**2°**) En fait Toro a tiré.

**(a)** Quelle est la probabilité que Zamlé tue le lièvre sachant que si Toro tire et manque les chances de Zamlé d'atteindre le lièvre se trouve réduites de moitié ?

**(b)** Dans ces conditions Toro a tiré le premier puis Zamlé, quelle est la probabilité pour le lièvre d'en réchapper ?

**A Yve Kouadio, Illustre chasseur.**

## ■ EXERCICE 31

Une urne contient 6 boules blanches et 5 boules rouges. On en extrait successivement les boules sans remettre dans le sac les boules sorties.

On appelle $p_x$ la probabilité qu'à l'$i^{ème}$ tirage la boule rouge apparaît pour la première fois. Calculer $p_x$ pour tout entier x avec $1 \leq x \leq 11$.

## ■ EXERCICE 32

**1°**) On considère une roue de loterie divisée en six secteur égaux. Un secteur est rouge, 3 sont blancs et 2 sont bleus. Un joueur fait tourner cette roue et regarde la couleur obtenue. Si elle est rouge il gagne ; si elle est blanche il perd ; si elle est bleu il doit refaire tourner la

roue. Si à l'issue de cette deuxième épreuve, la couleur obtenue est rouge, le joueur gagne ; si elle est blanche ou bleu il perd.
Calculer les probabilité suivantes :

**(a)** Probabilité $p_1$ de gagner dès la première épreuve

**(b)** Probabilité $p_2$ de gagner à l'issue de la deuxième épreuve

**(c)** Probabilité $p_3$ de gagner la partie

**2°)** La roue possède maintenant $x$ secteurs égaux $(x \geq 4)$ ; un secteur est rouge, trois sont blancs et les autres sont bleus. Le principe du jeu reste le même que précédemment. Si le joueur gagne à la première épreuve il reçoit 4 F ; s'il perd à cette première épreuve il verse 2 F, s'il obtient un secteur rouge à la seconde épreuve il reçoit 6 F, s'il obtient un secteur blanc il verse 1 F et s'il obtient un secteur bleu, il ne reçoit ni ne verse rien. On appelle X la variable aléatoire qui associe le gain du joueur à l'issue du jeu.

**(a)** Etablir la loi de X en fonction de x.

**(b)** Déterminer en fonction de x, E(X).

**(c)** Quelle doit être le nombre total de secteur de la roue pour que le jeu soit équitable ?

**(d)** Quelle doit être le nombre total de secteurs pour que E(X) soit maximale ?

## ■ EXERCICE 33

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et des pertes occasionnées par cette pratique.
Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total 40 trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôler est égale à p.
Le prix de chaque trajet est égale à 10 F, en cas de fraude l'amende est de 100 F.
Zahoro fraude lors des 40 trajets soumis à cette étude. Soit $X_i$ la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Zahoro est contrôlé au $i^{ème}$ trajet et la valeur 0 sinon.
Soit X la variable aléatoire définie par $X = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_{40}$

**(1°)** Déterminer la loi de probabilité de X**.**

**2°)** Dans cette partie on suppose que $p = \frac{1}{20}$.

**(a)** Calculer l'espérance mathématique de X.

**(b)** Calculer les probabilités de P(X=0), P(X=1) et P(X=0)**.**

**(c)** Calculer à $10^{-4}$ près la probabilité que Zahoro soit contrôlé au plus deux fois.

**3°)** Soit Z la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur.

Justifier que Z = 400 - 100X puis calculer l'espérance mathématique de Z pour $p = \mathbf{\frac{1}{5}}$**.**

**4°)** On désire maintenant déterminer $p$ afin que la probabilité que Zahoro subisse au moins trois contrôles soit supérieure à 99%.

**(a)** Démontrer que $P(X \leq 2) = (1-p)^{38}(741p^2 + 38p + 1)$

**(b)** soit $f$ la fonction définie sur $[\![0;1]\!]$ par $f(x) = (1-x)^{38}(741x^2+38x+1)$.

Montrer que f est strictement décroissante sur $[\![0;1]\!]$ et qu'il existe un unique réel $x_0$ appartenant à l'intervalle $[\![0;1]\!]$ tel que $f(x_0) = 0{,}01$.

Déterminer l'entier naturel $n$ tel que $\frac{n}{100} \leq x_0 \leq \frac{n+1}{100}$

**(c)** En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité que Zahoro subisse au moins trois contrôles soit supérieur ou égale 99%. (On exprimera p en fonction de $x_0$).

## ■ EXERCICE 34

Parmi les stands de jeux d'une fête de village, les organisateurs ont installé une machine qui lance automatiquement une bille lorsque le joueur actionne un bouton. Cette bille roule sur un plan comportant une cible circulaire évidée en son centre. Lorsque la bille atteint la cible, soit elle est avalée, soit elle reste sur la cible. Lorsque la bille n'atteint pas la cible, elle revient à son point de départ. Dans la suite de l'exercice on notera :

C L'événement « la cible est atteinte »

B L'événement « la cible est avalée ».

Une étude préliminaire a démontré que : la probabilité d'atteindre la cible lors d'un lancer est 0,3. Lorsque la cible a été atteinte, la probabilité que la bille soit avalée est égale à 0,2.

**1°)** Traduire la situation par un arbre de probabilité.

**2°)** On actionne le bouton.

**(a)** Calculer la probabilité $P_1$ que la bille soit avalée.

**(b)** Calculer la probabilité $P_2$ qu'elle reste sur la cible.

Une partie se déroule selon la règle ci-dessous **:**

Pour jouer on paie 0,5 F et on actionne le bouton qui lance la bille.

Si la bille est avalée on gagne un lot d'une valeur de g F.

Si la bille reste sur la cible sans être avaler, on est remboursé.

Si la bille rate, on perd la mise.

**3°)** Déterminer la loi de probabilité de gain d'un joueur.

**4°)**

**(a)** Déterminer en fonction de g l'espérance de gain d'un joueur.

**(c)** On prévoit qu'un grand nombre de parties sera joué. Pour quelles valeurs de g, les organisateurs peuvent-ils espérer un bénéfice ?

## ■ Exercice 35

AllaCenter, une entreprise, confie à une société de sondage par téléphonie une étude sur la qualité de ses produits. Lors du premier appel téléphonique, la probabilité que le correspondant ne décroche pas est 0,4. S'il décroche la probabilité qu'il réponde aux questionnaires est de 0,3.

**1°)** Calculer la probabilité qu'un correspondant choisi au hasard réponde aux questionnaires lors du premier appel.

**2°)** Lorsqu'une personne ne décroche pas au premier appel, on la contacte une seconde fois. La probabilité que le correspondant ne décroche pas le second appel est 0,3 et s'il décroche la probabilité qu'il réponde aux questionnaires est 0,2. Si la personne ne décroche pas lors du second appel on ne la recontacte plus.
Montrer que la probabilité de l'événement « la personne répond aux questionnaires » est 0,236.
**3°)** Sachant qu'une personne a répondu aux questionnaires, Calculer la probabilité que la réponse ait été donnée lors du premier appel.
**4°)** Un enquêteur a une liste de 28 personnes à contacter. Les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Calculer la probabilité la probabilité que 20% des personnes répondent aux questionnaires.

## ■ Exercice 36

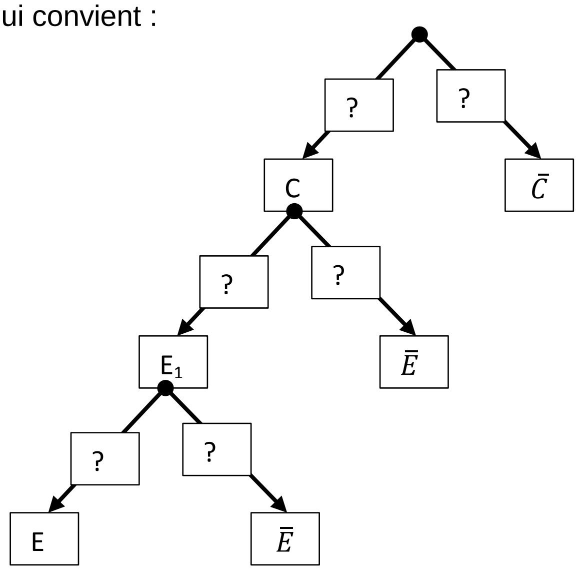
Un fabricant d'ordinateurs teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaine de fabrication. Si le teste est positif (c'est-à-dire l'ordinateur fonctionne correctement), l'ordinateur est acheminé chez le client. Dans le cas contraire, l'ordinateur retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si ce deuxième test est positif l'ordinateur est acheminé chez le client, sinon il est détruit. Le test est positif pour 70% des ordinateurs neufs sortis directement des chaînes de fabrication. Mais parmi les ordinateurs réparés, seulement 65% passent le test avec succès.
On note $T_1$ l'événement « le premier test est positif » et C l'événement « l'ordinateur est acheminé chez le client ».
**1°)** On choisit un ordinateur au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication. Calculer la probabilité des événements $T_1$ et C.
**2°)** La fabrication d'un ordinateur revient à 300.000 F CFA au fabricant si l'ordinateur n'est testé qu'une seule fois. Cela lui coûte lui 30.000 FCFA de plus si l'ordinateur est testé une seconde fois. Un ordinateur coûte t FCFA (t étant un réel positif) au client.
On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque ordinateur fabriqué, associe le gain réalisé par le fabricant.
**(a)** Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de t.
**(b)** Exprimer l'espérance de X en fonction de t.
**(c)** A partir de quelle valeur de t, le fabricant peut-il espérer réaliser un bénéfice ?

## ■ Exercice 37

Cuil, une entreprise, fait appel au cabinet de recrutement MériteCenter pour embaucher ses cadres. MériteCenter fait une première sélection de candidats sur dossier. 40% des dossiers retenus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70% sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25% des candidats rencontrés.
**1°)** On choisit au hasard le dossier d'un candidat. On considère les événements suivants :
- C : « le candidat est retenu sur dossier »
- E : « le candidat est recruté »

- $E_1$ : « le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »

**(a)** reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous en remplaçant le point d'interrogation par la valeur qui convient :




**(b)** Calculer la probabilité de l'événement $E_1$**.**

**(c)** On appelle F l'événement « le candidat n'est pas recruté »

Calculer la probabilité de l'événement F.

**2°.** Dix personnes du même village postulent à un emploi dans cette entreprise. Les études de leurs dossiers sont faites indépendamment les unes des autres. Les chances de chacun d'eux d'être recruté est 0,07. On appellera X la variable aléatoire qui indique le nombre de personnes recruté parmi ces dix candidats.

**(a)** Prouver que X suit une loi Binomiale dont on précisera les paramètres

**(b)** Quelle est la probabilité que exactement deux de ces dix candidats soit Recrutés ?

**(c)** Déterminer le nombre minimum de dossier que le cabinet MériteCenter doit Traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit Supérieure à 0,999.

**A nos illustres cabinets de recrutement.**

## ■ EXERCICE 38

On dispose d'une grille à trois lignes et trois colonnes (voir figure ci-dessous). Une machine $M_1$ place au hasard un jeton dans une case de la grille, puis une machine $M_2$ place de même un jeton sur la grille dans une case libre et enfin une troisième machine $M_3$ place un jeton dans une case libre de la grille.

On considère les événements suivants :

- H : « les trois jetons sont alignés horizontalement »
- V : « les trois jetons sont alignés verticalement »
- D : « les trois jetons sont alignés en diagonales »
- N : « les trois jetons ne sont pas alignés »

**1°)** Calculer la probabilité des événements H, V et D.

En déduire la probabilité de l'événement N.

**2°)** On considère la variable aléatoire définie par :

- $X=20$, lorsque H ou V est réalisé.
- $X = \alpha$, lorsque D est réalisé.
- $X = -20$ lorsque N est réalisé.

Déterminer $\alpha$ pour que l'espérance de X soit nulle.

**3°)** On suppose maintenant que la machine $M_1$ est déréglée. Elle place alors le premier jeton dans l'un des coins de la grille.

On note $\Delta$ l'événement « la machine $M_1$ est déréglée »

Calculer la probabilité d'avoir un alignement horizontal, vertical puis diagonal.

En déduire que la probabilité d'avoir un alignement horizontal ou vertical ou diagonal est égale à $\frac{3}{28}$.

**4°)** On appelle A l'événement « les trois jetons sont alignés horizontalement ou verticalement ou en diagonale ». On admet que $p(\Delta) = \frac{1}{5}$.

Déterminer $p_{\Delta}(A)$, $p_{\Delta}(\overline{A})$, $p_{\overline{\Delta}}(A)$, $p_{\overline{\Delta}}(\overline{A})$,

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

## ■ EXERCICE 39

N'gowaLoto une société qui fabrique des jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée. On a constaté après un grand nombre de vérification que :

- 92% des jouets sont sans défaut de finition.
- Parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95% réussissent au test de solidité.
- 2% des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'événement « le jouet est sans défaut de finition »
- S l'événement « le jouet réussit le test de solidité »

**1°)** Construction d'un arbre pondéré associé à la situation :

**(a)** Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations de probabilités.

**(b)** Démontrer que $p_{\overline{F}}(\overline{S}) = \frac{1}{4}$.

**(c)** Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

**2°)** Calcul de probabilités.

**(a)** Démontrer que $p(S) = 0,934$

**(b)** Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition.

**3°)** Etude d'une variable aléatoire B.

Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 6500 FCFA, ceux qui n'ont pas satisfait au teste de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un

bénéfice de 3250.
On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.
**(a)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B.
**(b)** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B.
**4°)** Etude d'une nouvelle variable aléatoire.
On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 jouets.
On note X la variable aléatoire indiquant le nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité. On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.
Calculer la probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité.

## ■ EXERCICE 40

Avant le début des travaux de construction de l'autoroute reliant l'axe Abidjan-Bassam, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain. Lorsque le $n^{ième}$ sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.
L'événement : « le $n^{ième}$ sondage est positif » est noté $V_n$, on note $p_n$ la probabilité de l'événement $V_n$. On admet que :

- Si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif.
- Si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire $p_1$=1.
**1°)** Calculer la probabilité des événements suivants :
**(a)** A : « les $2^{ème}$ et $3^{ème}$ sondages sont positifs ».
**(b)** B : « les $2^{ème}$ et $3^{ème}$ sondages sont négatifs »
**2°)** Calculer la probabilité $p_3$ pour que le $3^{ème}$ sondage soit positif.

**A nos éminents archéologues.**

## ■ EXERCICE 41

Un jeu consiste à lancer une bille dans un circuit comportant cinq butoirs désignés par les lettres A, B, C, D, E. Les butoirs A, B, C, D, E sont marqués respectivement par les numéros 1, 2, 1, 2, 3. Au début du lancer, la bille frappe au hasard un des butoirs A ou B ou C.
Ensuite,
- de A elle frappe au hasard B ou D ou E.
– de B elle frappe au hasard D ou E.
– de C elle frappe E
- de D ou E elle sort du circuit.

**1°)** A l'aide d'un arbre de choix,
**(a)** présenter tous les trajets possibles de la bille au cours d'un lancer
**(b)** Démontrer que la probabilité du trajet (A, B, E) est égale à $\frac{1}{18}$
**(c)** Calculer la probabilité pour que la bille frappe le buttoir B au cour de son trajet

**2°)** Le joueur gagne en franc CFA, 100 fois le nombre égal au total de chiffres marqués sur les butoirs heurtés par la bille au cours d'un trajet. On note G ce gain.

**(a)** Etablir la loi de probabilité de G.

**(b)** Calculer l'espérance mathématique de G.

**3°)** Une partie consiste en n lancers indépendants de la bille ; n étant un entier naturel non nul.

**(a)** Déterminer la probabilité $p_n$ pour que le joueur réalise au cours d'une partie, au moins un lancer dont le gain est strictement supérieur à 400 F CFA.

**(b)** Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle $p_n$ est supérieure à 0,99.

## ■ EXERCICE 42

Chaque crocodile qui traverse la clairière qui sépare Belemoin, une île à crocodiles, du fleuve Bandama a une probabilité $\frac{1}{3}$ de périr écrasé par un éléphant. Un matin, 32 crocodiles quittent Belemoin pour rejoindre le fleuve. On note X, le nombre de Victimes des éléphants parmi ces crocodiles. Les survivants reviennent le soir par le même chemin. On note Y le nombre total de victimes.

**1°)** Calculez la probabilité que 22 crocodiles se baignent dans le fleuve et la probabilité que 7 crocodiles retournent sains et saufs le soir à Belemoin.

**2°)** Calculer E(Y). Commentez le résultat.

## ■ EXERCICE 43

Des robots se trouvent au centre de gravité O d'un triangle de sommets S, I et X. Chacun se déplacent en trois étapes successives de la manière suivantes :

- A chaque étape, il passe par l'un des trois sommets S, I et X puis il rejoint le point O.
- Les robots sont programmés de telle sorte que, lors d'une étape, la probabilité de passer par le sommet S est égale à celle de passer le sommet X et la probabilité de passer par le sommet S est le double de passer par le sommet I ;
- Les différentes étapes sont indépendantes les unes des autres ;
- On ne tient pas compte des passages par O.

### PARTIE A : Un seul robot

Un seul robot se trouve au point O.

**1°)** Démontrer qu'à chaque étape, la probabilité que le robot passe par le point I est égale à $\frac{1}{5}$.

**2°)** On note E, l'événement : « au cours des trois étapes, le robot passe successivement par les trois sommets S, I et X dans cet ordre»

Démontrer que la probabilité de E est égale à $\frac{4}{125}$.

**3°)** On note F l'événement « au cours des trois étapes, le robot passe exactement par les trois sommets S, I et X dans un ordre quelconque »

Déterminer la probabilité de F.

## PARTIE B : Plusieurs robots.

Des robots se trouvent au point O, leurs déplacements étant indépendants les uns des autres.

Quel nombre minimal n de robots doit-il y avoir pour que la probabilité de l'événement : « au moins l'un des robots passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre » soit supérieure ou égale à 0,99 ?

## ■ EXERCICE 44

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{4}$.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$.

Ce jardinier choisit au hasard et plante 50 bulbes de tulipes.

Soit n un entier naturel vérifiant $0 \leq n \leq 50$.

On définit les événements suivants :

- A « le jardinier a choisi le lot 1 »
- B « le jardinier a choisi le lot 2 »
- $J_n$ : « le jardinier obtient n tulipes jaunes »

**1°) Dans cette question, on suppose que le jardinier choisit le lot 1.**

**(a)** Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1 ?

**(b)** Quelle est l'espérance mathématique de cette loi ?

**(c)** Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes Jaunes,

**(d)** Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes Jaunes.

**2°) Probabilité conditionnelle.**

**(a)** Montrer que :$P_B(J_n) = C_{50}^{n} \times 2^{-50}$

**(b)** En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

**(c)** Etablir que $P_{J_n}(A) = P_n = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}}$

**(d)** Pour quelles valeurs de n a-t-on $P_n \geq 0,9$ ? Interpréter le résultat.

## ■ EXERCICE 45

Un appareil électrique envoie à une imprimante un code qui est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffre ne pouvant prendre que les valeurs 0 ou 1 (par exemple 0101).

**1 °)** On suppose dans ce qui suit que tous les codes ont la même probabilité d'être produit.

**(a)** Combien l'appareil peut-il fabriqué de codes distincts ?

**(b)** Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de 1 figurant dans le code. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

**2°)** Une imprimante a été choisie au hasard dans un série. A la suite d'étude antérieure, on a observé cinq cas possibles. Dans le cas $E_0$, l'imprimante n'écrit que des 0 quel que soit le code émis par l'appareil.

Pour chaque élément n de l'ensemble {1 ; 2 ; 3}, dans le cas $E_n$ l'imprimante écrite correctement les n premiers caractères du code écrit et n'écrit ensuite que des 0.
Par exemple, lorsque $E_2$ survient, tous les codes commençant par 01 sont imprimés 0100.
Dans le cas $E_4$ l'imprimante fonctionne correctement.
L'état de l'imprimante sera donc considéré comme le résultat d'une épreuve aléatoire ayant cinq issues possibles $E_0$, $E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$.
On admet que pour chaque élément n de l'ensemble {0 ; 1 ; 2 ; 3} $P(E_n) = 32\times10^{-3}$
Le code émis par l'appareil est indépendant de l'état de l'imprimante.
**(a)** Calculer $P(E_4)$. Pour la suite, C désigne l'événement : « le code imprimé est identique à celui émis par l'appareil ».
**(b)** On suppose que $E_0$ se produit. Quelle est la probabilité $P(C/E_0)$ que le code imprimé soit quand même celui que l'appareil a envoyé ? En déduire la probabilité $P(C\cap E_0)$.
**(c)** Déterminer de même $P(C/E_n)$ puis $P(C\cap E_n)$ pour tout n de l'ensemble {1; 2; 3; 4}
En déduire P(C).
**(d)** Si le code imprimé est exactement celui émis par l'appareil, quelle est la probabilité que $E_2$ se soit produit ?

## ■ EXERCICE 46

Un taxi doit conduire un client dont la résidence se trouve à 6 km. Ce client exige d'arriver à la maison à 20 h 00 précisément pour dîner avec sa famille. Le taxi roule constamment à 36km/h. (On négligera les phases d'accélération et de décélération). Sur son trajet il va rencontrer deux feux tricolores non synchronisés et indépendants.

- S'il arrive à un feu orange: il s'arrête 30 Secondes et repart.
- S'il arrive à un feu rouge: il s'arrête 60 Secondes et repart.

Pour chaque feu :

- La probabilité d'être vert à l'arrivée du livreur est $\frac{1}{2}$.
- La probabilité d'être orange à l'arrivée du livreur est $\frac{1}{4}$.

Soit T la variable aléatoire ‘’ Temps en minutes mis par le taxi pour arriver à destination’’.

**1°).**
**(a)** Calculer P(T=11).
**(b)** Donner la loi de probabilité de T.

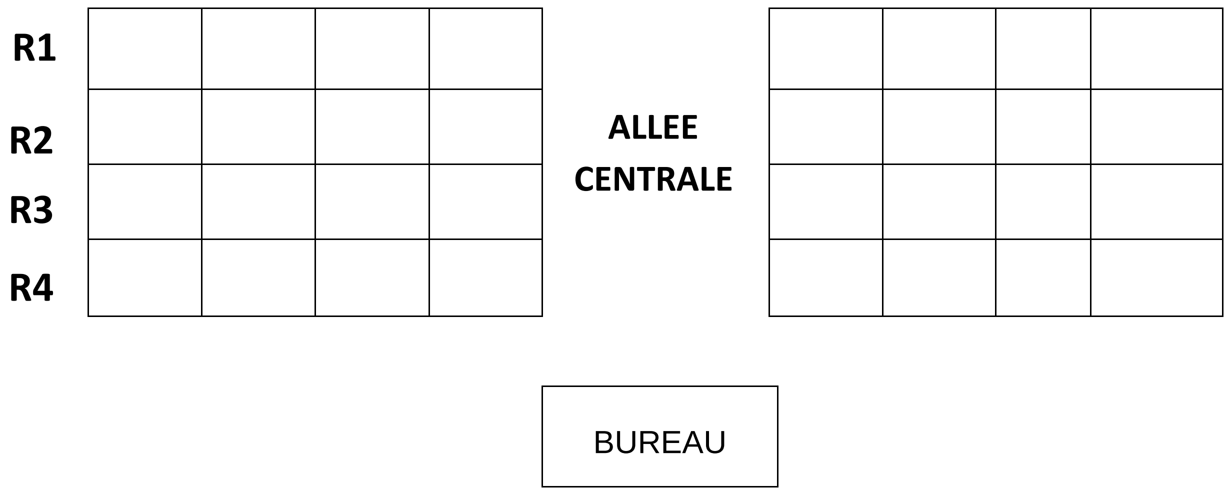
**2°)** Calculer l'espérance mathématique de T.

**3°)** Le taxi part à 19h49.
**(a)** Quelle est la probabilité pour le client d'arriver en retard au dîner?
**(b)** Quelle est la probabilité pour le client d'arriver en avance au dîner ?

**A Isidore Kouamé qui tient toujours à dîner en famille.**

## ■ EXERCICE 47

Voici le plan de la salle 202 du Groupe Scolaire **Astéris**




Le premier jour de l'année scolaire, les élèves de la $TC_1$ sont invités par leur professeur principal à occuper au hasard les places disponibles dans cette salle. La classe de $TC_1$ comporte 28 élèves.

**1°)**
**(a)** Quel est le nombre de répartitions possibles des places inoccupées ?
**(b)** Calculer à $10^{-1}$ près, les probabilités des événements suivants :
- A : « les huit places de la rangée R4 sont toutes occupées »
- B : « il y a autant d'élèves à gauches et à droite de l'allée centrale ».

**2°)** On donnera les résultats sous forme de fraction. Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de places inoccupées à la rangé R4.
**(a)** Donner la loi de probabilité de X.
**(b)** Calculer l'espérance mathématique de X.

**(A la prestigieuse $TC_1$ du lycée Scientifique de Yamoussoukro)**

## ■ EXERCICE 48

Dans tout l'exercice, A et B étant deux événements, P(A) désigne la probabilité de A, p(A/B) la probabilité de A sachant que B est réalisé.
**1°)** Le nombre de client se présentant en cinq minutes à la station totale du Corridor Nord à l'entrée d'Abidjan est une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est fournie par le tableau suivant :

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | 0,1 | 0,5 | 0,4 |

**(a)** Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
**(b)** Calculer l'espérance mathématique de X.
**2°)** Dans cette station la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7 ; celle qu'il achète du gazole est 0,3. Son choix est indépendant de celui des autres clients. On considère les événements suivants :
- $C_1$ : « En cinq minutes un seul client se présente ».
- $C_2$ « En cinq minutes deux client se présentent ».
- E : « En cinq minutes un seul client achète de l'essence ».

**(a)** Calculer $P(C_1 \cap E)$.
**(b)** Montrer que $P(E/C_2) = 0{,}42$ et Calculer $P(C_2 \cap E)$.
**(c)** En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.

**3°)** Soit Y la variable aléatoire égale au nombre au nombre de personne achetant de l'essence en cinq minutes ; Déterminer la loi de probabilité de Y.

## ■ EXERCICE 49

Monsieur JoliCravate a 17 cravates : 12 cravates à motifs et 5 cravates unies. Il range toujours 10 cravates (7 à motifs et 3 unies) du côté gauche de son armoire et 7 cravates (5 à motifs et 2 unies) de l'autre côté.

**1°).** Monsieur JoliCravate devant partir en voyage pendant 3 jours a besoin de 3 cravates. Pour cela, il choisit 3 cravates simultanément et au hasard du côté gauche de son armoire. Soit X le nombre de cravate à motif qu'il choisit.

**(a)** Donner la loi de probabilité de X.

**(b)** Calculer E(X).

**2°)** Lorsqu'il ne voyage pas, pour déterminer la cravate qu'il portera la journée, Monsieur JoliCravate utilise la méthode suivante : il choisit un côté de l'armoire au hasard, de façon équiprobable, et il prend ensuite une cravate, toujours au hasard, sur le côté choisit.

On considère les événements suivants :

G : « Monsieur JoliCravate choisit le côté gauche de l'armoire ».

D : « Monsieur JoliCravate choisit le côté droit de l'armoire ».

M : « Monsieur JoliCravate tire une cravate à motif ».

U : « Monsieur JoliCravate tire une cravate unie ».

**(a)** Calculer p(M).

**(b)** Calculer p (G/M), probabilité conditionnelle de G sachant que M est réalisé.

**3°)** Tous les jours, pendant n jours, Monsieur JoliCravate effectue son choix suivant la méthode indiquée en 2. Chaque soir, il remet la cravate utilisée pendant la journée à sa place.

**(a)** Calculer en fonction de n la probabilité $p_n$ pour qu'il est pris au moins une cravate à motifs.

**(b)** Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0,99$.

**A ces jeunes sapeurs du pays**

## ■ EXERCICE 50

Soit une population constituée à 10% de gauchers et 90% de droitiers.

**1°)** Calculer la probabilité qu'un groupe de 8 personnes de cette population contiennent :

**(a)** un seul gaucher.

**(b)** au moins un gaucher.

**(c)** exactement trois gauchers.

**2°)** Un atelier de couture est équipé de 7 paires de ciseaux pour droitiers et 3 pairs de ciseaux pour gauchers.

Quelle est la probabilité que les 8 membres du personnel trouve chacun une paire de ciseau lui convenant ?

**3°)** Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant trouvé une paire de ciseau leur convenant

**(a)** Dresser le tableau donnant X en fonction du nombre G de gauchers parmi les huit membres du personnel

**(b)** Etablir la loi de X et calculer E(X)

## ■ EXERCICE 51

Lors d'une kermesse on organise un jeu d'adresse dénommé ''jeu du triangle'' qui a pour support trois petits trous $T_1$, $T_2$ et $T_3$ creusé dans le sol et formant un triangle

équilatéral.
Pour engager une partie, le joueur achète trois billes à l'organisateur.
Il prend position au trou $T_1$ et lance la bille en vue de la loger dans le trou $T_2$
Il fait ensuite un deuxième lancer à partir du trou $T_2$ en visant le trou $T_3$ puis un troisième et dernier lancer à partir du trou $T_3$ en visant $T_1$.
A chacun de ces trois lancers, si le joueur réussit à loger la bille dans le trou visé, il la reprend et reçoit une bille supplémentaire, s'il ne réussit pas à loger la bille dans le trou visé, il la perd.
Konaté est un inconditionnel du jeu du triangle. La probabilité pour qu'il réussisse un lancer donné est égale à $\frac{2}{3}$. On suppose que les trois lancers sont indépendants.

**1°)** Démontrer que la probabilité pour que Konaté rate le premier lancer et qu'il réussisse les deux derniers est égale à $\frac{4}{27}$.

**2°)** Calculer la probabilité pour que Konaté réussisse deux lancers sur trois.

**3°)** Soit X la variable aléatoire égale au nombre de billes que Konaté a à la fin de la partie.

**(a)** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.

**(b)** Déterminer la loi de probabilité de X.

**(c)** Démontrer que l'espérance mathématique de X est égale à 4.

**Extrait du test de sélection MIAGE**

## ■ EXERCICE 52

Une urne contient une boule blanche et **n** boule rouges **(n ≥ 2).** On tire une boule au hasard de l'urne.

**1°.)** Calculer la probabilité $P_1$ (n) de tirer une boule rouge.

**2°)** On tire au hasard deux boules de l'urne.

Calculer

**(a)** La probabilité $P_2(n)$ de tirer deux boules rouges.

**(b)** La probabilité $P'_2(n)$ de tirer une boule de chaque couleur.

**(c)** Calculer la limite de $P_2(n)$ et de $P'_2(n)$ lorsque $n$ tend vers l'infini

**3°)** Comparer $P_1(n)$ et $P_2(n)$ .

Déterminer les valeurs de $n$ pour lesquelles $P_1(n) - P_2(n) < \frac{1}{8}$

## ■ EXERCICE 53

Une étude statistique sur la surdité fait chez les individus possédant deux oreilles révèle que :

- la surdité peut être unilatérale (à droite ou à gauche) ou bilatérale(à droite et à gauche).

– 4 sur 100 sont atteintes de surdité à droite.

On note D : l'événement : « l'individu est atteint de la surdité à droite ».
G l'événement : « l'individu est atteint de la surdité à gauche ».
S l'événement : « l'individu a une oreille au moins atteinte de surdité ».
On admet que D et G sont des événements indépendants et équiprobables.

**1°) (a)** Calculer P(D) et P(G).

**(b)** Calculer P(S)

**2°)** Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'oreilles atteinte de surdité chez un individu.

**(a)** Déterminer la loi de la variable X.

**(b)** Calculer l'espérance mathématique E(X) et la variance V(X) de X.

## ■ EXERCICE 54

La caravane OMO est de passage à Yamoussoukro. Elle organise deux jeux qui consistent à faire monter des concurrents sur un podium et d'en primer deux. Dix concurrents dont quatre hommes et six femmes s'installent sur le podium.

### A- PREMIER JEU

Les deux prix attribués étant identiques, on choisit au hasard deux vainqueurs parmi nos concurrents.

Calculer la probabilité de :

**1°)** L'événement : « les deux vainqueurs sont des femmes »

**2°)** L'événement : « les deux vainqueurs sont de même sexe»

### B- DEUXIEME JEU

Les deux prix attribués n'étant pas identiques, on choisit parmi nos dix concurrents un vainqueur qui obtient le premier prix. Il descend du podium puis deux autres personnes de même sexe que lui rejoignent les autres sur le podium. Le jeu continu, on choisit parmi les concurrents un autre vainqueur qui obtient le deuxième prix.

On note :

$H_1$ L'événement « le premier prix revient à un homme ».

$H_2$ L'événement « le deuxième prix revient à un homme ».

On représente la situation par l'arbre de probabilité ci-après :

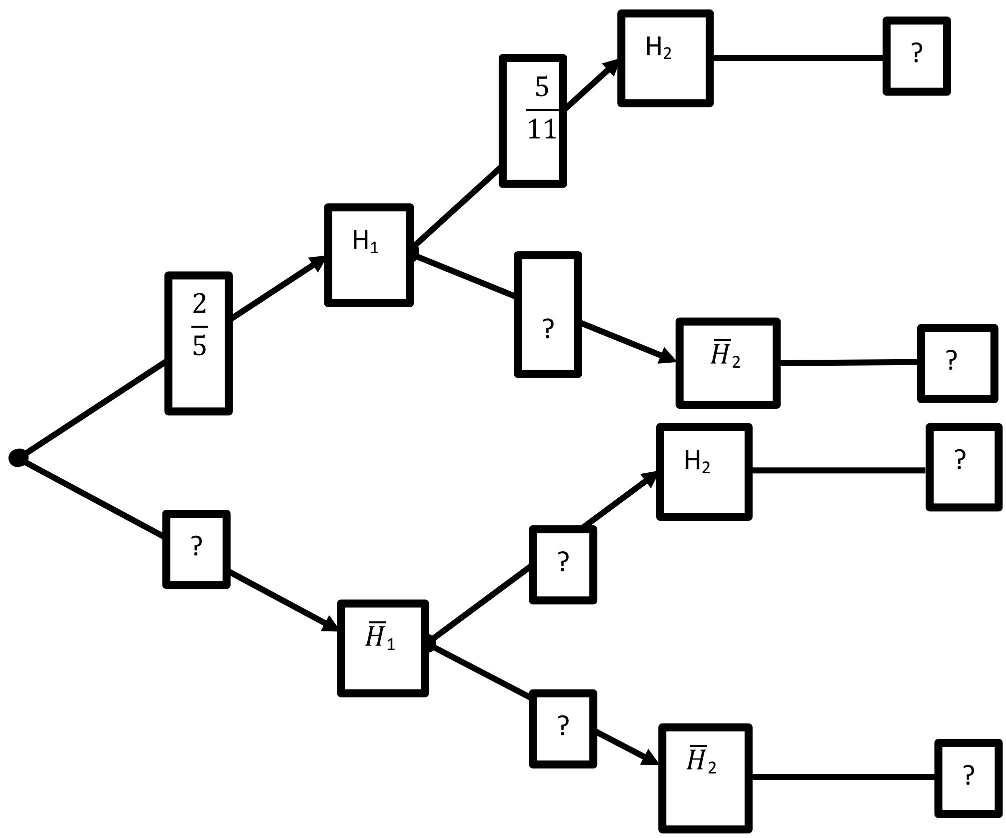
**1°) (a)** Justifier les probabilités figurant sur l'arbre de probabilité.

**(b)** Reproduire et compléter l'arbre de probabilité en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante.

**2°) (a)** Calculer la probabilité que les deux prix reviennent aux hommes.

**(b)** Démontrer que la probabilité de l'événement : « le deuxième prix revient à un homme » est $\frac{2}{5}$ .

**3°)** Un homme a obtenu le deuxième prix, calculer la probabilité qu'on ait attribué le deuxième prix à un homme.



## ■ EXERCICE 55

A golikro, un village de la côte d'ivoire, 60% des naissances sont des filles. On sait de plus que 70% des filles et 40% des garçons sont des analphabètes.

On considère les événements suivants :

F « naissance d'une fille »

G « Naissance d'un garçon »

A « être analphabète »

**1°)** Déterminer la probabilité de « A sachant F » et de « A sachant G ».

**2°)** Calculer la probabilité des événements « être fille et être analphabète » et « être garçon et être analphabète ». En déduire ensuite la probabilité de A.

**3°)** Quelle est la probabilité qu'un enfant analphabète soit une fille ?

**4°)** Monsieur Lokosssoue, un Habitant de Golikro, a vingt enfants.

**(a)** Quelle est la probabilité qu'aucun des enfants de Monsieur Lokosssoue, ne soient analphabètes ?

**(b)** Quelle est la probabilité qu'au moins un de ces enfants soient analphabètes ?

## ■ EXERCICE 56

Lors d'un test, un candidat doit subir trois épreuves indépendantes.

La probabilité qu'il réussissent chacune des épreuves est la même et est égale à $\frac{3}{4}$.

**1°)** Justifier que la probabilité qu'il échoue à une épreuve est $\frac{1}{4}$.

**2°)** Déterminer la probabilité qu'il réussisse exactement à deux épreuves.

**3°)** Le candidat gagne 2 points pour chaque épreuve réussie et perd un point pour chaque épreuve non réussie.

Soit X la variable aléatoire qui est égale au gain algébrique des points du candidat à l'issue du test.

**(a)** Justifier que les valeurs prises par X sont : -3 ; 0 ; 3 et 6.

**(b)** Déterminer la loi de probabilité de X.

**(c)** Calculer l'espérance mathématique E(X) et la variance V(X) de X.

**(d)** Interpréter l'espérance mathématique E(X).

## ■ EXERCICE 57

Soit le nombre 1234. En utilisant les quatre chiffres de ce nombre et en les permutant au hasard on obtient un nombre de quatre chiffres. Tous les chiffres ont la même chance d'occuper une place quelconque.

**1°) (a)** Justifier que l'on peut écrire ainsi 24 nombres.

**(b)** En utilisant un arbre de choix déterminer l'ensemble Ω de ces nombres. On dit qu'il y a coïncidence chaque fois qu'un chiffre retrouve sa place initiale dans le nombre 1234.

Par exemple pour le nombre 4213, il y a une coïncidence car le chiffre 2 a retrouvé sa place initiale. Pour le nombre 2134 il y a deux coïncidences car les chiffres 3 et 4 ont retrouvé leur place initiale.

**2°)** Existe-il des nombres de Ω présentant exactement trois coïncidences ?

**3°)** Soit les événements suivants :

A « Le nombre composé présente exactement trois coïncidences »

B « Le nombre composé présente exactement deux coïncidences »

C « Le nombre composé présente exactement une coïncidence »

**(a)** Déterminer les événements A, B et C.
**(b)** Calculer les probabilités de A, de B et de C.
**4°)** Soit D l'événement « Le nombre composé présente au moins une coïncidence »
Justifier que P(D)= $\frac{5}{8}$ et Calculer P($\overline{D}$).
**5°)** Soit E l'événement « Le nombre composé commence par 2 »
**(a)** Justifier que P(E)= $\frac{1}{4}$
**(b)** En déduire la probabilité de composer un nombre présentant exactement une coïncidence sachant qu'il commence par 2.

## ■ EXERCICE 58

IvoirBank dispose de guichets automatiques où certains clients peuvent faire des retraits d'argent à l'aide d'une carte magnétique. Cette carte magnétique a un code secret connu seulement du titulaire de la carte. Ce code secret est une suite de quatre chiffres du système décimal.
**1°)** Combien de carte magnétique IvoirBank peut-elle distribuée à ces clients ?
**2°)** Démontrer que la probabilité que le code d'une carte magnétique commence par 0 est $\frac{1}{10}$
**3°)** Calculer la probabilité que le code d'une carte magnétique soit composé des chiffres 2 ; 4 ; 5 et 7.
**4°)** Zahoro, client détenteur d'une carte magnétique de IvoirBank a oublié son code. Il se souvient cependant que son code est composé des chiffres 2 ; 4 ; 5 et 7. Pour la protection des comptes clients les guichets automatiques sont équipés de mémoire leur permettant bloquer un compte après trois essais infructueux.
**(a)** Calculer la probabilité des événements suivants :
A « Zahoro a retiré de l'argent au premier essai »
B « Zahoro échoue au premier essai et réussi le second »
**(b)** Soit C l'événement « Zahoro retire de l'argent ».
Calculer la probabilité de l'événement C.
**5°)** Zahoro a réussi a retiré de l'argent.
Calculer la probabilité qu'il est effectué le retrait au premier essai.
**6°)** IvoirBank prélève une taxe pour chaque tentative de retrait au guichet automatique. Cette taxe s'élève à 50 FCFA par essai fructueux et à 60 FCFA par essai infructueux. On note X la variable aléatoire qui détermine la taxe totale à payer sur le retrait effectué par Zahoro.
**(a)** Déterminer la loi de probabilité de X
**(b)** Déterminer l'espérance mathématique E(X) de la variable X.

## ■ EXERCICE 59

Le parc des compteurs d'eau des abonnés de la Riviera Golf d'Abidjan Cocody se répartit de la façon suivante :
- 10% des compteurs ont moins de deux ans et se trouvent de ce fait encore sous garantie
- 60% des compteurs ont entre deux et vingt ans
- 30% des compteurs ont plus de 20 ans

Lors du passage de l'agent chargé de relever les compteurs, la probabilité de trouver le compteur défectueux est la suivante :

- $\frac{1}{100}$ s'il s'agit d'un compteur sous garantie
- $\frac{1}{20}$ s'il s'agit d'un compteur âgé de deux à vingt ans
- $\frac{1}{10}$ s'il s'agit d'un compteur de plus de vingt ans

On désignera par :
- A l'événement « le compteur est sous garantie »
- B l'événement « le compteur a entre deux ans et vingt ans»
- C l'événement « le compteur a plus de vingt ans»
- D l'événement « le compteur est défectueux»

On choisit au hasard un compteur de l'ensemble des compteurs de la Riviera Golf
**1°)** Précisez chacune des probabilités suivantes :
**(a)** La probabilité P(A), P(B) et P(C) des événements A, B et C
**(b)** La probabilité PA(D) de D sachant que A est réalisé
**(c)** La probabilité PB(D) de D sachant que B est réalisé
**(d)** La probabilité PC(D) de D sachant que C est réalisé
**2°)** Calculer la probabilité des événements suivants :
**(a)** « le compteur se trouve encore sous garantie et il est défectueux »
**(b)** « le compteur est défectueux »
**3°)** Déduire des question précédente que les événements A et D ne sont pas indépendants
**4°)** L'agent constate qu'un compteur est défectueux.
Calculer la probabilité qu'il soit encore sous garantie.
On choisit au hasard dix compteurs de l'ensemble des compteurs de la Riviera Golf
**5°)** L'agent trouve huit compteurs défectueux.
Quelle est la probabilité pour que l'un au moins d'entre eux soit encore sous garantie

## ■ EXERCICE 60

On dispose de 4 urnes contenant chacune 2 boules noires et une boule blanche indiscernable au toucher. Toutes les 12 boules ont la même probabilité.
Le jeu consiste à tirer quatre boules mais le joueur ne peut tirer qu'une boule par urne. Chaque boule blanche permet au joueur de gagner 1000 F.
**1°)** Démontrer qu'on a 81 possibilités de tirer les 4 boules.
**2°)** Justifier le nombre de tirage amenant une seule boule blanche est 32.
**3°)** Soit X la variable aléatoire qui a chaque tirage associe la somme obtenue par le joueur.
**(a)** Calculer P(X = 1000) et P(X = 4000)
**(b)** Justifier que $P(X = 2000) = \frac{8}{27}$ et que $P(X = 3000) = \frac{8}{81}$
**4°) (a)** Dresser le tableau de la loi de probabilité de X.
**(b)** Calculer E(X)
**5°)** Calculer la probabilité pour que un joueur obtienne au moins 1000 F.
**6°)** Cinq personnes participent au jeu précédent. On admet que les résultats obtenus par chacun des joueurs sont indépendants.
Quelles est la probabilité qu'un joueur au moins gagne 1000 F.

# Partie III

# Correction des exercices

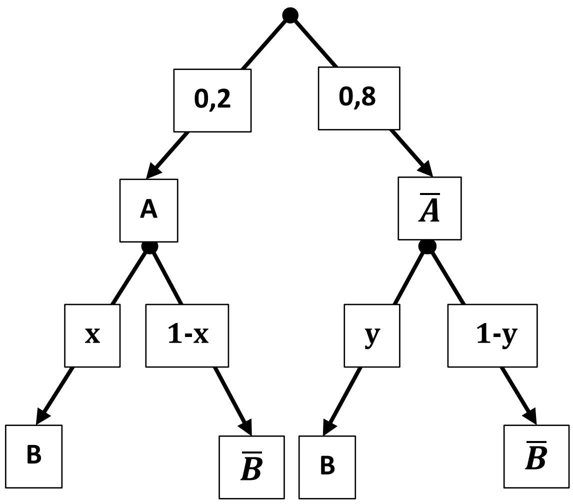
# Correction
# Applications Directes de cours

## ■ EXERCICE 1

**1°)**

**(a)** x est la probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé : $x = P_A(B)$
y est la probabilité de l'événement B sachant que l'événement $\bar{A}$ est réalisé.
$Y = P_{\bar{A}}(B)$

**(b)** On complète l'arbre en notant que la somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.




**2°)** $A$ et $\bar{A}$ étant une partition, la formule des probabilités totale permet d'écrire :
$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$
On a donc $P(B) = 0,2 \times x + 0,8 \times y$

**3°)** A et B sont indépendants à condition que l'on ait $P_A(B) = P(B)$
c'est-à-dire $x = 0,2 \times x + 0,8 \times y \Leftrightarrow x = y$ $A$ et B son indépendants si et seulement **$x = y$**.

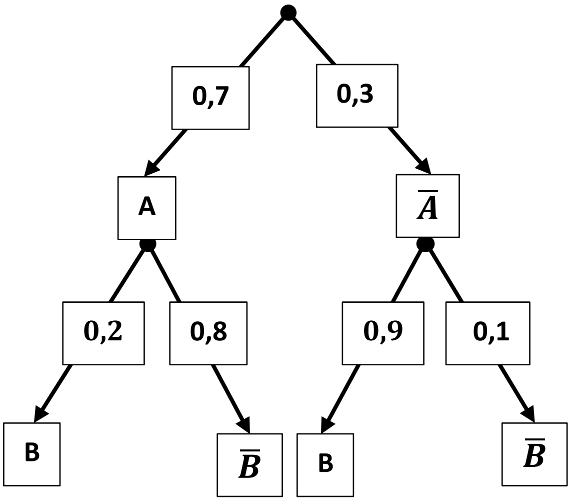
**4°)** On a $P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ donc $P_B(A) = \frac{0,2x}{0,2x+0,8y}$

**5°)** Avec y = 0,6 on peut écrire $P_B(A) = \frac{0.2x}{0.2x+0.48}$

Ainsi $P_B(A) = P_A(B) \Leftrightarrow \frac{0.2x}{0.2x+0.48} = x \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -1,4$ Comme x est une probabilité alors $x \in [\![0;1]\!]$ de telle sorte que $P_B(A) = P_A(B)$ si et seulement si $x = 0$

## ■ EXERCICE 2

On complète l'arbre en notant que la somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.




D'après l'arbre on a $P_A(B) = 0{,}2$

- On a $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P_A(\bar{B}) = 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56$
- On a $P(B \cap A) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}14$.
- On a $P(\bar{B} \cap \bar{A}) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0{,}3 \times 0{,}1 = 0{,}03$

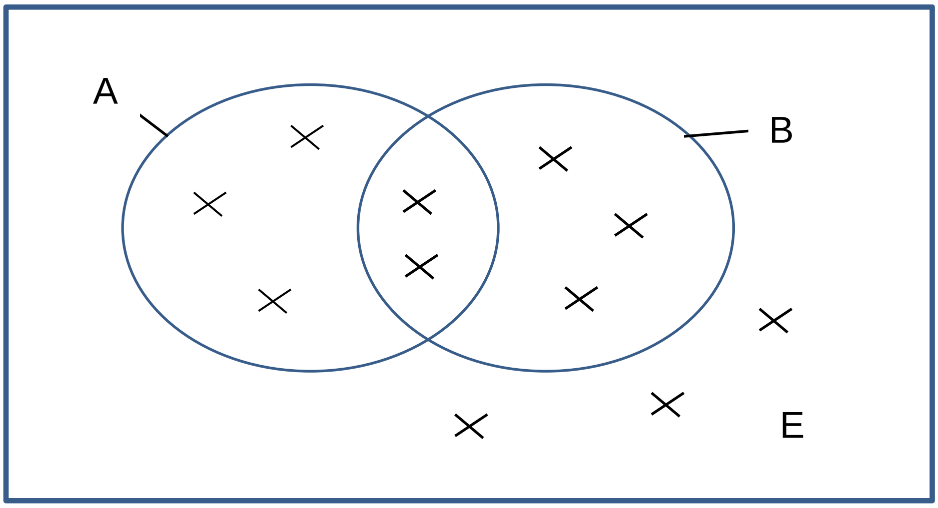
A et $\bar{A}$ fore une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales on a

**P(B)** $= P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = 0{,}7 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}9 =$ **0, 41**

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}7 + 0{,}41 - 0{,}14 = 0{,}97$.

(On pourrait aussi remarquer que $(A \cup B)$ est l'événement contraire de $\bar{A} \cap \bar{B}$ et retrouver P(A∪B) en calculant 1 – 0, 03) $P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{0.14}{0.41} \approx 0{,}$**34**

## ■ EXERCICE 3




**1°)** Vous et moi savons que le cardinal d'un ensemble est le nombre d''élément de cet ensemble. Il s'agit alors de compter comme on a bien appris à le faire à l'école primaire.

De plus, j'ai un peu de temps donc je vous invite à compter avec moi le nombre d'éléments de l'ensemble A...... (Top c'est parti) : un, deux, trois, quatre et cinq. Bravo ! On a bien card(A) = 5

De même card(B) = 5.

Vous l'avez deviné : le card (A∩B) est le nombre d'élément commun à A et à B.

Des gens brillants comme vous ont sûrement trouvé card (A∩B) = 2.

Je parie que vous avez trouvé card $(A \cup B) = 8$ et card$(E) = 11$

**2°) Y-a-t-il vraiment une relation entre les quatre premiers nombres ?**

Voyons ça ensemble de plus près.

On a card $(A) = 5$, card $(B) = 5$, card $(A \cap B) = 2$ ET card $(A \cup B) = 8$

Or $8 = 5 + 5 - 2$

Donc **card $(A \cup B)$ = card $(A)$ + card $(B)$ - card $(A \cap B)$** (ça on le savait déjà vous et moi).

## ■ EXERCICE 4

**1°)** Voici une excellente occasion de parler encore des p-listes.

Former un mot de trois lettres revient à faire un choix **ordonné** de trois lettres parmi les trois lettres proposées. Le tirage des lettres étant fait avec remise, **les lettres** des mots formées ne sont **pas forcément distinctes**. On est ainsi en présence d'un flagrant cas de 3-listes.

On a donc au total $3^3 = 27$ mots possibles.

De telle sorte que card $(\Omega)=27$

**2°)**

- Une affaire de 3-listes.

Former un mot ne contenant que des consonnes revient à faire un choix ordonné et avec répétition possibles de 3 lettres parmi les deux consonnes proposées.

On a card(A) = $2^3 = 8$ mots contenant uniquement des consonnes.

D'où P(A) = $\frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{8}{27}$.

- Une affaire de principe multiplicatif.

Former un mot se terminant par une voyelle revient à faire d'abord un choix ordonné et avec répétition possible de deux lettres parmi les trois lettres proposées puis ensuite à faire le choix de la voyelle (la lettre A bien sûr, c'est tout de même seule voyelle).

On a donc d'après le principe multiplicatif : card(B) = $3^2 \times 1 = 9$.

D'où P(B) = $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

## ■ EXERCICE 6

**1°)**

**(a)** Evidemment on choisira d'abord la lettre A et ensuite on effectuera un choix ordonnée avec répétitions possibles (les chiffres étant distincts ou non) de trois chiffres parmi les neuf chiffres proposés.

On a donc $1 \times 9^3 = 729$ codes commençant par A.

**(b**) Il est immédiat qu'On choisit d'abord la lettre du code. On a trois choix possibles (puisqu'il y a 3 lettres). Ensuite on effectue un choix ordonnée avec répétitions possibles de 3 chiffres parmi les 9 proposés. On a ainsi d'après le principe multiplicatif : $3 \times 9^3 = 2\,187$ codes possibles.

**2°) (a)**

On a une seule éventualité pour le choix de la lettre du code (c'est évidemment la lettre B). En plus, choisir les trois chiffres du code revient à faire un choix ordonné sans répétitions possibles(les chiffres étant tous distincts) de trois chiffres parmi les neuf chiffres proposés de telle sorte qu'on a $A_9^3$ = 504 façons de choisir les trois chiffres du code.

Au total on a : 1× 504= 504 codes commençant par la lette B et dont les chiffres sont tous distincts.

**(b)**

Si vous avez consenti à lire le chapitre 6 vous êtes au courant qu'il serait prudent de passer par l'événement contraire de peur d'entamer de longs calculs(le temps nous est compté).

Soit Q l'événement : « le codes comporte l'un au moins des chiffres 7, 8 et 9 ».

$\bar{Q}$ est donc l'événement : « le code ne comporte aucun de ces chiffres »

Calculons le nombre de codes ne comportant aucun de ces chiffre :

On choisit la lettre B du code et ensuite on effectue un choix ordonné sans répétitions possibles, bien sûr, de trois chiffres parmi les six chiffres restant (les chiffres 7, 8 et 9 étant exclus des choix... naturel tout de même).

On a donc $A_6^3$ = 120 façons de choisir les chiffres du code.

Ainsi on a 1 × 120 = 120 codes ne contenant pas les chiffres 7, 8 et 9.

Or card (Q) = card (Ω) - card($\bar{A}$)

Donc card (A) = 504 – 120 = 384.

Finalement on a 384 codes qui comportent au moins l'un des chiffres 7 ; 8 et 9.

## ■ EXERCICE 7

1°) Soients :

**L** l'événement « le concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre L»

**V** l'événement « le concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre V»

**R** l'événement « le concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre R»

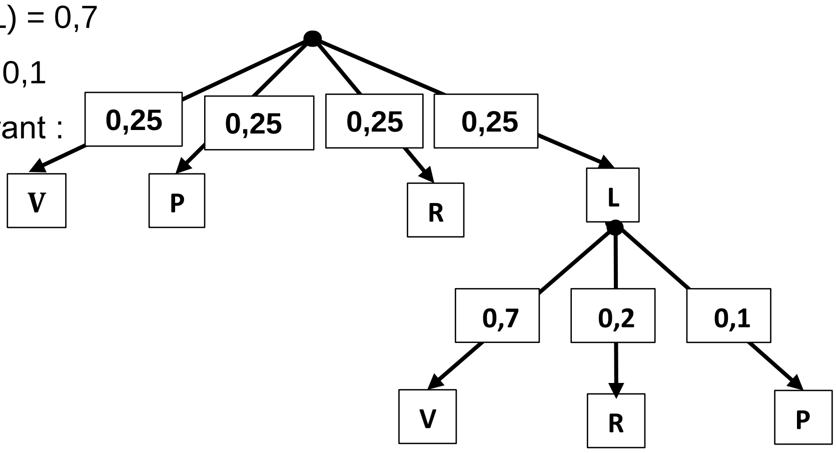
**P** l'événement « le concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre P»

On devine aisément que P(V) = P(R) = P(L) = P(P) = $\frac{1}{4}$ = 0,25.

Vous l'avez deviné, la probabilité que le concurrent choisisse le vélo sachant qu'il a tiré le jeton marqué L est de 0,7 puisque lorsqu'il choisit le jeton marqué L, il choisit le vélo dans 70% des cas. D'où $P_V(L)$ = 0,7

De même $P_L(R)$ = 0,2 et $P_L(P)$ = 0,1

L'arbre recherché est donc le suivant :



**2°) A quelle moment un concurrent effectue-t-il le trajet à vélo ?**

**Félicitation ! Vous tenez le bon réflexe.**

Le concurrent effectue le trajet à vélo s'il tire immédiatement le jeton marqué V événement V

**Ou** s'il tire d'abord le jeton marqué L, puis le jeton marqué V événement ($L \cap V$)

La probabilité cherchée est donc celle de l'événement ($V \cup (L \cap V)$)

De plus, nos aimables lecteurs savent que les événements V et $L \cap V$ sont incompatibles c'est-à-dire qu'ils ne peuvent se produire en même temps.

Donc $P(V \cup (L \cap V)) = P(V) + P(L \cap V)$

Et comme les événements L et V sont liés alors $P(L \cap V) = P(L) \times P_V(L)$

De telle sorte que : $P(V \cup (L \cap V)) = P(V) + P(L) \times P_V(L) = 0{,}25 + 0{,}25 \times 0{,}7 = 0{,}425$

**Conclusion**

**La probabilité qu'un concurrent effectue le trajet à vélo est donc 0,425**

**3°) Il s'agit ici de calculer la probabilité de l'événement L sachant V.**

$P_V(L) = \frac{P(L \cap V)}{P(V)} = \frac{\mathrm{P(L)} \times \mathrm{P}_L\mathrm{(V)}}{P(V)} = \frac{0{,}25 \times 0{,}7}{0{,}425} = 0{,}41$

**4°)** Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre de fois qu'un concurrent non cycliste remporte l'épreuve au cours des six prochaines années.

Chaque épreuve est une épreuve de Bernoulli.

En effet, de deux choses l'une :

**ou** l'épreuve est remportée par un concurrent non cycliste

**ou** l'épreuve est remportée par un cycliste

Donc notre adorable variable aléatoire X suit une loi Binomiale de paramètres 6 et $\frac{1}{3}$.

> **Monsieur, d'où vient-le** $\frac{1}{3}$ ?
>
> La probabilité qu'un vainqueur soit un cycliste est $\frac{2}{3}$
>
> Quelle est alors la probabilité que le vainqueur ne soit pas cycliste ?
>
> Vous l'avez deviné, la probabilité que le vainqueur soit non cycliste est bien $\mathbf{1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}}$

**Encore un autre au moins !**

A ce niveau du livre vous savez déjà que nous passerons par l'événement contraire. Laissons le soin à ceux qui n'ont pas lu affaire classée d'emprunter des sentiers tortueux qui aboutiront au prix d'une longue marche.

Il s'agit en bref de calculer la probabilité de l'événement $X \geq 1$

**P(**X≥1) = 1 – P(X = 0) =1 - $C_6^0 \times (\frac{1}{3})^0 \times (\frac{2}{3})^6$ **= 0,91**

**On a 91% de chance que l'épreuve soit remportés au moins une fois par un concurrent non cycliste au cours des six années à venir.**

## ■ EXERCICE 8

**A.**

**1°) Soient :**

B l'événement le tirage amène une boule Blanche »

N l'événement « le tirage amène une boule Noire »

V l'événement « le tirage amène une boule Verte »

**Combien de boule avons-nous dans l'urne ?**

Des gens brillants comme vous, ont sûrement trouvé 1+ n + 2 = n + 3.

**Combien de choix possibles avons-nous au tirage d'une boule ?**

Vous l'avez trouvé : on a n + 3 choix possibles donc card(Ω) **= n + 3**

**(a)** Il s'agit là de calculer la probabilité de l'événement B.

On a P(B)= $\frac{card(B)}{card(\Omega)}$

**Combien de choix de boule blanche avons-nous au tirage de la boule dans l'urne ?**

Comme on a une seule boule blanche dans l'urne alors on a un seul choix possible si bien que card(A) = 1

**Finalement P(B) =** $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n+3}}$

**(b) Quand le joueur est-il déclaré vainqueur ?**

Le joueur gagne le jeu lorsqu'il tire immédiatement une boule blanche (événement B) **OU** lorsqu'il tire une boule verte puis une boule blanche (événement B∩V)

Le **''OU''** traduisant la réunion d'événements la probabilité cherchée est alors celle de l'événement (B∪(B∩V))

De plus les événement B et B∩V sont incompatibles

Donc P(B∪(B∩V)) = P(B) + P(B∩V)

OR les événements B et V sont indépendants donc P(B∩V) = P(B)×P(V)

Par conséquent :

P(B∪(B∩V)) = P(B) + P(B)×P(V) = $\frac{1}{n+3}$ **+** $\frac{1}{n+3} \times \frac{2}{n+3} = \frac{1}{n+3} + \frac{2}{(n+3)^2} = \frac{n+5}{(n+3)^2}$

**Deux événements B et V sont incompatibles lorsqu'ils** ne peuvent se produire en même temps et dans ce cas on a B∩V = ∅ ce qui entraîne

P (B∩V) = 0

**Deux événements B et V sont indépendants** lorsque la réalisation de l'un n'influence pas le résultat de l'autre et on a P (B∩V) = P(B)×P(V)

**La probabilité p pour que le joueur perde est bien p** $= \frac{\boldsymbol{n+5}}{\boldsymbol{(n+3)^2}}$

**(c)** La probabilité q que le joueur perde est q= 1 - p = 1 - $\frac{n+5}{(n+3)^2} = \frac{\boldsymbol{n^2+5n+4}}{\boldsymbol{(n+3)^2}}$

**2°) (a) Quelles sont les valeurs prises par la variable X ?**

**Vous posez de bonnes questions !**

A la fin du jeu le verdict est connu : Ou le joueur a gagné ou il a perdu.

Ainsi, à terme, le joueur empochera la somme de 500 FCA ou perdra 100 FCFA.

Comme X indique le gain du joueur alors il est clair qu'elle prend les valeurs + 500 (Le joueur a gagné) et – 100 (Il a malheureusement perdu).

La loi de la variable X est donc fournie par le tableau suivant :

| $(X = x_i)$ | 500 | -100 |
|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{\boldsymbol{n+5}}{\boldsymbol{(n+3)^2}}$ | $\frac{\boldsymbol{n^2+5n+4}}{\boldsymbol{(n+3)^2}}$ |

**(b)** E(X) = 500× $\frac{n+5}{(n+3)^2}$ + (-100)× $\frac{\boldsymbol{n^2+5n+4}}{\boldsymbol{(n+3)^2}} = \frac{500n+2500}{(n+3)^2} + \frac{\boldsymbol{-100n^2-500n-400}}{\boldsymbol{(n+3)^2}}$

**E(X) =** $\frac{\boldsymbol{2100-100n^2}}{\boldsymbol{(n+3)^2}}$

**B.**

**1°) Pour n = 3 on a bien p =** $\frac{3+5}{(3+3)^2} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

**2°) (a)** Chaque jeu est une épreuve de Bernoulli.

En effet, de deux choses l'une :

Ou le joueur gagne le jeu

ou il perd le jeu.

Donc la variable Y qui indique le nombre de victoire du joueur suit une loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{2}{9}$

**(b)** Non ! Nous ne changerons pas de méthode. Nous passerons encore par l'événement contraire. Laissons le soin à ceux qui pensent qu'il reste encore beaucoup de temps, d'emprunter ce long chemin qui aboutira au prix d'une longue marche.

Vous le savez, il s'agit de calculer la probabilité de l'événement Y≥1

**P (**Y≥1) = 1 – P(Y = 0) =1 - $C_5^0 \times (\frac{2}{9})^0 \times (\frac{7}{9})^5$ **= 0,715**

**On a 71,5% de chance que l'épreuve soit remportés au moins une fois par le joueur sur les cinq jeu.**

(c) Rien de plus facile ! Pour vous prouver que la question est vraiment facile raisonnons à travers un tableau.

| **Nombre de jeu gagné par le joueur** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Gain financier du joueur** | -500 | 100 | 800 | 1300 | 1900 | 2500 |

**Les valeurs prises par la variables Z sont : -500 ; 100 ; 800 ; 1300 ; 1900 ; 2500.**

## ■ EXERCICE 9

En aucun cas, vous et moi, nous ne reculerons face à un exercice sur les tirages simultanés. (Nous jouons, bien en terrain connu).

Il est immédiat que l'univers Ω est l'ensemble des combinaisons de 3 boules parmi 13.

On a donc $C_{13}^3$ éléments.

**1°) (a)**

On a $C_6^3$ façons de choisir les 3 boules blanches. D'où $P_1 = \frac{C_6^3}{C_{13}^3} \approx 0,07$

**(b)** On a $C_7^3$ façons de choisir les 3 boules noires. D'où $P_2 = \frac{C_7^3}{C_{13}^3} = 0,12$.

**(c)** On a 6 façons de choisir la boule blanche et $C_7^2$ façons de choisir les boules noires.

D'où $P_3 = \frac{6 \times C_7^2}{C_{13}^3} \approx 0,44$.

**(d)** On a 7 façons de choisir la boule noire et $C_6^2$ façons de choisir les boules blanches.

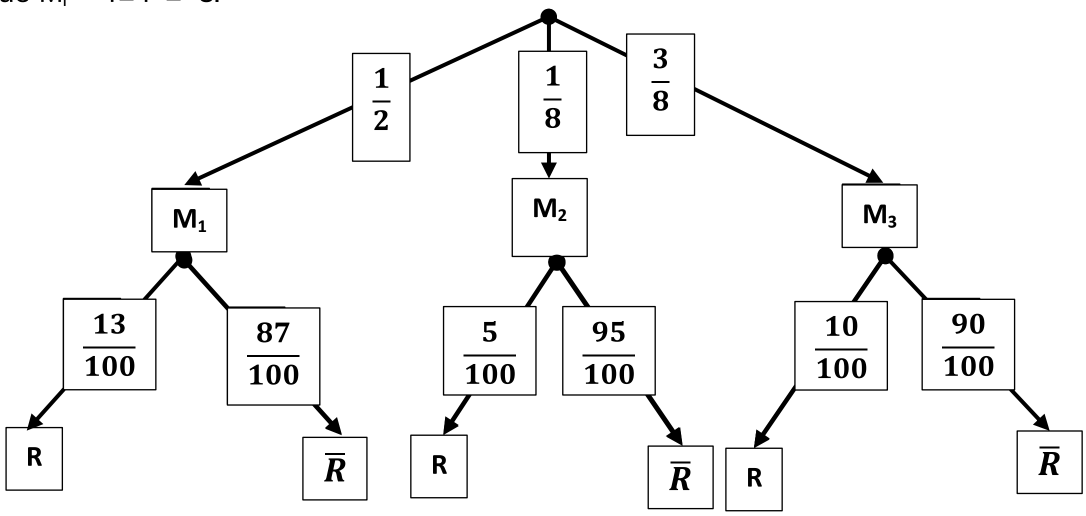
D'où $P_4 = \frac{7 \times C_6^2}{C_{13}^3} \approx 0,37$

**2°)** Il est clair que les quatre événements sont incompatibles deux à deux et leur réunion est l'univers. La somme des probabilités est donc 1.

## EXECICE 10

Comme j'ai un peu de place je vais d'abord vous proposer l'arbre associé à la situation.

Notons : R l'événement « l'appareil choisi est rouge » et $M_i$ "l'appareil choisi est de la marque $M_i$ " $1 \leq i \leq 3$.



**1°)** La probabilité que l'appareil vienne de $M_3$ est $P(M_3)=\frac{3}{8}$,

(On a de même $P(M_1) = \frac{1}{2}$ et $P(M_2) = \frac{1}{8}$ )

**2°)** La probabilité que l'appareil soit rouge sachant qu'il vienne de $P(M_2)$ est :

$$P_{M_2}(R) = \frac{5}{100}=\frac{1}{20}.$$

On a de même $P_{M_1}(R) = \frac{13}{100}$ et $P_{M_3}(R) = \frac{10}{100}=\frac{1}{100}$

**3°)**

Si vous avez consenti à lire la partie du cours sur les partitions de l'univers (ce qui vous fera plus de bien que de mal) alors vous êtes informé que les événements $M_1$, $M_2$ et $M_3$ Constituent une partition de l'univers. Ainsi d'après la formule des probabilités totales on a :

$P(\bar{R})= P_{M_1}(\bar{R}) \times P(M_1) + P_{M_2}(\bar{R}) \times P(M_2) + P_{M_3}(\bar{R}) \times P(M_3)$

$P(\bar{R})= \frac{87}{100} \times \frac{1}{2} + \frac{95}{100} \times \frac{1}{8} + \frac{90}{100} \times \frac{3}{8} = \frac{713}{800}$

**4°)** Il s'agit de calculer $P_R(M_1)$ :

Or $P_R(M_1) = \frac{P(M_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P_{M_1}(R) \times P(M_1)}{1-P(\bar{R})} = \frac{52}{87}$

La probabilité que l'appareil soit de marque $M_1$ sachant qu'il est rouge est donc 0,60.

**REMARQUE.**

Lorsqu'on connaît deux des événements $\boldsymbol{P(A), P(A \cap B) et\ P_A(B)}$,

On peut calculer le troisième à l'aide de la formule $\boldsymbol{P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$

## ■ EXERCICE 12

**1°)** Il est évidemment encore question de tirage simultané.

**(a)** Calculons la probabilité $P_1$ de l'événement A : « Obtenir deux boules rouges et deux boules blanches ».

L'univers Ω est l'ensemble des parties de 4 boules prises parmi les 15.

On a donc **Card(Ω) = $\boldsymbol{C_{15}^4}$ = 1365**.

On a $C_5^2$ façons de choisir les **2** boules rouges et $C_{10}^2$ façons de choisir les deux boules blanches.

D'où $P_1 = \frac{C_5^2 \times C_{10}^2}{C_{15}^4} = 0,33$

**(b)**

Calculons la probabilité $P_2$ de l'événement B : « Obtenir au moins une blanche ».

On devine aisément que $\bar{B}$ est l'événement : « obtenir uniquement des boules rouge ».

Or on a $C_5^4$ façons de choisir simultanément 4 boules rouges parmi les 5 proposées.

Donc $P(\bar{B}) = \frac{C_5^4}{C_{15}^4}$. Ainsi $P_2 = 1 - P(\bar{B}) = 0,996$

**2°)**

Ici l'univers Ω est l'ensemble des parties de 2 boules prises parmi

n + 2n = 3n. On a donc $Card(\Omega)=C_{3n}^2 = \frac{3n(3n-1)}{2}$

**(a)** Calculons la probabilité $P_n$ de l'événement **C** : « Obtenir deux boules de couleurs différentes » :

On obtient deux de couleurs différentes si le tirage amène une boule blanche et une boule rouge.

D'où $P_n = \frac{C_n^1 \times C_{2n}^1}{C_{3n}^2} = \frac{4n}{9n-3}$

**(b)** On a $P_{n+1} - P_n = \frac{4n+4}{9n+6} - \frac{4n}{9n-3} = \frac{-12}{(9n+6)(9n-3)} < 0$, $P_n$ est donc une suite décroissante.

**(c)** $\lim_{n->+\infty} P_n = \frac{4}{9}$

## ■ EXERCICE 13

Ici, l'univers Ω est l'ensemble des six mots.

**1°**) Pour chacun des mots tirés, déterminons la valeur prise par **X**.

| Mot tiré | par | le | plus | grand | des | hasards |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Valeur de X | 3 | 2 | 4 | 5 | 3 | 7 |

Chaque mot a la même probabilité d'être tiré donc les événements élémentaires sont équiprobables. Pour détermine la probabilité de chaque événement ($X = x_i$), on applique donc la formule « nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles ».

D'où la loi probabilité de X :

| **($X = x_i$)** | **2** | **3** | **4** | **5** | **7** |
|---|---|---|---|---|---|
| **P ($X = x_i$)** | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

**2°)** $E(X) = 2\times\frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 5\times \frac{1}{6} = \frac{24}{6} = 4$

## ■ EXERCICE 14

Le choix des cinq dossiers est fait dans un ordre quelconque.

L'univers des possibles Ω est donc celui des quintuples formés avec 5 chemises prises parmi les 12 chemises et ceci dans n'importe quel ordre.

Il s'agit donc de l'ensemble des combinaisons de 5 chemises prises parmi 12.

Par conséquent : card(Ω) = $C_{12}^5$ = 792.

Pour être certains que les chemises d'Awa et de Kedjebo ne figurent pas parmi les 5 chemises choisies, je vous prie d'exclure celles d'Awa et de Kedjebo des chemises à choisir.

Ce qui signifie de fait, que le choix des cinq chemises portera uniquement sur 10 chemises.

Par conséquent, card(A) = $C_{10}^5$ = 252 de telle sorte que, **P(A) =** $\frac{Card(A)}{card(\Omega)} = \frac{252}{792} = \frac{7}{22}$

Choisissons d'abord les chemises de Awa et de Kedjebo puis 3 chemises parmi les 10 chemises restantes. On a $C_2^2$ façon de choisir les chemises d'Awa et de Kedjebo et $C_{10}^3$ façons de choisir les 3 autres chemises.

Par conséquent, **P(B) =** $\frac{Card(B)}{card(\Omega)} = \frac{C_2^2 \times C_{10}^3}{792} = \frac{5}{33}$

## ■ EXERCICE 15

Appelons $A_i$ l'événement « le passant remarque le $i^{ème}$ panneau », $1 \le i \le 2$.

**1°)** Calculons la probabilité qu'un passant remarque une publicité.

Il s'agit ici de calculer la probabilité de l'événement $A_1 \cup A_2$.

On a $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$.

Or $P(A_1 \cap A_2) \neq \phi$ car le passant peut remarquer les deux panneaux.

Les événements $A_1$ et $A_2$ sont donc compatibles.

De plus les panneaux sont remarqués indépendamment les uns des autres,

d'où **$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2)$.**

Ainsi, **$P(A_1 \cup A_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \approx 0,438$.**

**2°) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) -$**
**$P(A_2 \cap A3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = \frac{37}{64} = 0,578$**

**Autre méthode :**

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3})$.

Or les événements $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ sont indépendants.

Donc $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A_1}) \times P(\overline{A_2}) \times P(\overline{A_3}) = 1 - \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{37}{64}$.

Remarque **:**

$\overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$ $\qquad$ $\overline{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}}$

**3°)** Soit $n$ le nombre de panneaux nécessaires pour qu'une publicité soit remarquée par au moins 99% des passants. Il s'agit de déterminer n telle que $P(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) \ge 0,99$.

**Or P** $(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n})$

Mais les événements $A_i$ sont indépendants, les $\overline{A_i}$ le sont aussi.

Donc **P** $(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \ldots \cap \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) \times P(\overline{A_2}) \ldots \times P(\overline{A_n})$.

Pourtant $\forall$ i, $P(A_i) = \frac{1}{4}$ donc $P(\overline{A_i}) = \frac{3}{4}$,

D'où $P(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = 1 - (\frac{3}{4})^n$.

Il s'agit donc de calculer $n$ telle que :

$1 - (\frac{3}{4})^n \ge 0.99 \iff (\frac{3}{4})^n \ge 0.01 \iff \ln(\frac{3}{4})^n \le \ln(0.01)$ (Car ln est une fonction croissante)

Donc on a **n**$\ln(0,75) \le \ln(0,01)$

et comme $\ln(0,75) \le 0$ **alors** **n** $\ge \frac{\ln(0.01)}{\ln(0.75)} = \frac{-4.605}{-0.288} = 16,008$.

D'où n=17

## ■ EXERCICE 16

**1°)** Calculons l'expérience mathématique et l'écart type de X :

E(X) = 220 × 0,08 + 230 × 0,10 + 240 × 0,15 + 250 × 0,32 + 260 × 0,16 + 270 × 0,15 + 280 × 0,04 = 249,9

**2°)** Calculons la probabilité $P_1$ que la masse d'un fromage pris au hasard soit d'au moins 250 g :    $P_1$ = 0,32 + 0,16 + 0,15 + 0,04 = 0,67

**3°)** Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre de fromages de 220 g obtenus lors des dix prélèvements.

Il est immédiat qu'un prélèvement est une épreuve de Bernoulli.

En effet, de deux choses l'une :

- Ou on obtient un fromage de 220 g lors du prélèvement.
- Ou on n'obtient pas un fromage de 220 g.

En plus, on effectue dix prélèvements de manières identiques et indépendants. On est donc en face d'un (illustre) schéma de Bernoulli et par suite la variable X suit une loi Binomiale de paramètres 10 et 0,08.

On a donc pour tout entier $k$ ($k$ étant le nombre de fromages de 220 g) compris entre $0$ et 10 : P(X = k) = $C_{10}^{k}(0.08)^{k} \times (0{,}92)^{n-k}$.

**(a)** Calculons la probabilité $P_0$ d'avoir **au moins** un fromage de 220 g :

On a P(X = 0) = $C_{10}^{0}(0{,}08)^{0} \times (0{,}92)^{10}$ = 0,43.

Donc $P_0$ = 1 - P (X = 0) = 0,57 (Vous êtes habitué à la locution « au moins » tout de même).

**(b)** Calculons la probabilité $P_1$ d'obtenir au plus un fromage de 220 g :

**$P_1$ = P(X = 0) + P(X = 1) = P(X = 0) = $\boldsymbol{C_{10}^{0}(0,08)^{0}} \times \boldsymbol{(0,92)^{10}}$ + P(X = 1) = $\boldsymbol{C_{10}^{1}(0,08)^{1}}$ ×( 0,92)$^9$ = 0,37.**

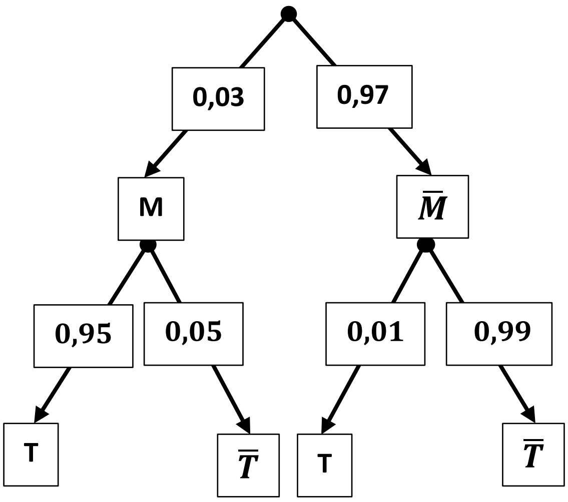
## ■ EXERCICE 17

**1°)** Notons :

M l'événement « l'individu est malade »

T l'événement « le test est positif »

on obtient alors l'arbre de probabilité suivant




**2°)**

**(a)** P (M ∩ T) = P(M) × $P_M$ (T) = 0,03 × 0,95 = 0,0285.

**(b)** $P(\overline{M} \cap \overline{T}) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(\overline{T})$ = 0, 97 × 0, 99 = 0, 9603

**(c)** P(T) = P(M∩T) + $P(\overline{M} \cap T)$ = 0, 0285 + 0, 97 × 0, 01 = 0, 0382

**(d)** $P(\bar{T}) = P(\bar{M} \cap \bar{T}) + P(M \cap \bar{T})$ = 0, 9603 + 0, 03 × 0, 05 = 0, 9618

**3°)**

**(a)** $P_T(\bar{M}) = \frac{P(T\cap\bar{M})}{P(T)} = \frac{0.0097}{0.0382}$ ≈ 0, 25 : C'est énorme…

**(b)** $P_{\bar{T}}(M) = \frac{P(M\cap\bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{0.0015}{0.9618}$ = 0, 00155: Ouf… On a très peu de chance d'être malade sachant que le test est négatif, c'est rassurant mais méfiez-vous tout de même.

## ■ EXRCICE 18

**1°)** Calculons la probabilité de $\bar{F}$:

**O**n a P(F) = $\frac{9}{10}$ donc $P(\bar{F}$ ) = 1 - P(F) = $\frac{1}{10}$**.**

**2°**

**(a)** Vérifions que P(T∩ F) = $\frac{9}{10}$

On constate aisément que les événements P et T sont dépendants de telle manière qu'on a :

P(T ∩ F) = P(F) × $P_F$ (T) = $\frac{9}{10} \times 1 = \frac{9}{10}$ **.**

En fait $P_F$ (T) = 1 car un appareil qui est en parfait état est toujours accepté à l'issue du test.
Cet événement se réalisant toujours, il est un événement certains. D' où le résultat.
Calculons $P(T \cap \bar{F})$:

On a $P(T \cap \bar{F}) = P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(T) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{110}$

**(b)** Déduisons-en la probabilité de $T$ : $\boldsymbol{P(T) = P(F) \times P_F(T) + P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(T) = \frac{10}{11}}$

**(c)** Calculons la probabilité conditionnelle de $F$ par rapport à $T$ :

On a $P_T$ (F)=$\frac{P(T\cap F)}{P(T)} = \frac{9}{10} \times \frac{11}{10} = \frac{99}{100}$

## ■ EXERCICE 19

**(a)** Donnons les valeurs de p(A)**,** p(B❘A) , $\mathbb{p}(B|\bar{\boldsymbol{A}})$.

**O**n a p(A) **= 0,15** $\mathbb{p}(B|A)$ = 0,2 $\mathbb{p}(B|\bar{\boldsymbol{A}})$ = 0,04

**(b) C**alculons p(B) et p(A|B) :

$\mathbb{p}(B) = \mathbb{p}\big((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)\big) = \mathbb{p}(A \cap B) + \mathbb{p}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{p}(A) \times$

$\mathbb{p}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{B}) + \mathbb{p}(\bar{A}) \times \mathbb{p}_{\bar{A}}(B) = 0{,}15 \times 0{,}2 + 0{,}85 \times 0{,}04 = 0{,}064$

$\mathbb{p}(A|B) = \frac{\mathbb{p}(A\cap B)}{\mathbb{p}(B)} = \frac{0{,}15\times 0{,}2}{0{,}064} = 0{,}469$

## EXERCICE 20

**1°)** Ne vous alarmez surtout pas si vous êtes déjà perdu dans ce mélange amer de nombre complexe et de probabilité. J'ai promis qu'on classerait pour de bon cette affaire, et je tiendrai cette promesse.

**(a)** Pour un début vous êtes à féliciter, effectivement z est un réel lorsque sa partie imaginaire est nulle c'est-à-dire lorsque y = 0.

Il s'agit ici d'un tirage successif avec remise de 2 boules dans un ensemble qui contient 3 boules.

Vous êtes donc informé que **card( $\Omega$) = $3^2$ = 9.**

| |
|---|
| Moi je ne suis pas informé qu'on devait faire $3^2$ ?<br>Vous posez de bonnes questions.<br>Le sac contient 3 boules numérotées 0 ; 1 ; 2.<br>A chaque tirage d'une boule on a 3 possibilités c'est-à-dire 3 choix possibles.<br>Ainsi au premier tirage on a 3 choix possibles.<br>De même, au choix de la seconde boule on a 3 possibilités puisque la première boule tirée a été remise dans le sac.<br>Ainsi d'après le principe multiplicatif on a $3\times3 = 3^2$ |

Par ailleurs, appelons $A_0$ l'événement « obtenir la boule numéroté 0 au second tirage ».

Si z est un réel alors x est quelconque  et y = 0.

Ainsi au choix de la première boule on a 3 possibilités tandis que le second tirage  est effectué uniquement sur  la boule numérotée 0  puisque y=0 (y étant le numéro de la boule du second tirage)

On peut donc écrire card ($A_0$) = 3×1 = 3

Par conséquent  **P(A) = P($A_0$) =** $\frac{card(A_0)}{card(\Omega)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

**(b)** Vous avez dit imaginaire pur ? .... Rien de plus simple. Il faut qu'on ait  x=0 et y ≠ 0.

Si x= 0 alors on a un seul choix possible pour le tirage de la première boule (On doit choisir uniquement la boule numérotée 0)

Vous l'avez deviné, le second tirage concerne uniquement les boules numérotées 1 et 2 puisque la boule numérotée 0 est exclu du tirage(y, le numéro de ce second tirage  étant non nul)

Par conséquent,  la probabilité cherchée est p(B) = $\frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{1\times2}{9} = \frac{2}{9}$

**(c)** Cette équation a pour solution x = 0. Hé oui.... pour la résolution de l'équation voir Nombres complexes : 60 affaires classées.

Ainsi le premier tirage concerne l'unique boule numérotée 0 tandis le second tirage est effectué sur les trois boules du sac (puisque y est quelconque) de telle sorte que

**P(C) =** $\frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{1\times3}{9} = \frac{1}{3}$

**(d)** Je sais que comme moi vous avez obtenu x = 0 et y = 1

Donc le premier tirage concerne uniquement la boule numérotée 0, x étant nul (On a donc un seul choix possible)

De même, au second tirage on a un seule choix possible puisque y ne peut prendre que la valeur 1

Au total on a $1 \times 1 = 1$ seul cas favorable à l'événement D

D'où **P(C) =** $\frac{\boldsymbol{card(B)}}{\boldsymbol{card(\Omega)}} = \frac{\mathbf{1\times1}}{\mathbf{9}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}$

## ■ EXERCICE 21

**1°)** L'univers des possibles Ω est celui des triplets formés avec 3 boules prises parmi les 20 boules et ceci dans n'importe quel ordre, il s'agit donc de l'ensemble des combinaisons de 3 boules prises parmi 20 : card(Ω) = $C_{20}^3$ = 1140.

**(a)** Calculons la probabilité des événements A, B, C

A est l'événement « le joueur a tiré exactement une boule noire » :

P(A) = $\frac{C_5^1 \times C_{15}^2}{C_{20}^3} = \frac{35}{76}$ = 0,46

B est l'événement « le joueur a tiré exactement 2 boules noires » :

P(B) = $\frac{C_5^2 \times C_{15}^1}{C_{20}^3} = \frac{5}{38}$ = 0,13.

C est l'événement « le joueur tire exactement 3 boule noires » :

P(A) = $\frac{C_5^3 \times C_{15}^0}{C_{20}^3} = \frac{1}{114}$

**(b)** Etablissons la loi de probabilité de X et calculons E(X) :

Le joueur gagne 5 $F$ pour chaque boule noire tirée. On devine donc aisément que la variable aléatoire $X$ prend les valeurs : **0 F** (aucune boule noire tirée) ; **5 F** (il a tiré une noire) ; **10 F** (il a tiré deux boules noires) ; **15 F** (il a tiré trois boules noires).

On obtient ainsi le tableau de loi de probabilité suivant :

| X=k | 0 | 5 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| P(X = k) | $\frac{91}{228}$ | $\frac{35}{76}$ | $\frac{5}{38}$ | $\frac{1}{114}$ |

E(X) = $0 \times \frac{91}{228} + 5 \times \frac{35}{76} + 10 \times \frac{5}{38} + 15 \times \frac{1}{114} = \frac{15}{4}$ = 3,75. E(X)>0, le jeu est donc avantageux pour le joueur. (Je pourrais vous le conseiller).

**2°)** Notons :

$A$ l'événement « le joueur obtient une boule noire à l'issue du tirage »

B l'événement « le joueur obtient une boule rouge à l'issue du tirage »

**(a)** Calculons la probabilité $P_1$ que le joueur gagne au premier tirage : Le joueur gagne au premier tirage si le joueur tire une boule rouge. On a $P_1$ =P(A) = $\frac{5}{20}$ = 0,25

**(b)** Calculons la probabilité $P_2$ que le joueur gagne au deuxième tirage :

Il gagne au deuxième tirage s'il tire une boule rouge au premier tirage et obtient une boule noire à l'issue du deuxième tirage : on a $P_2 = P(\bar{A} \cap A) = P(\bar{A}) \times$ P(A) = P(B) × P(A) = $\frac{15}{20} \times \frac{5}{20} = \frac{3}{16}$ = 0,19

**(c)** Calculons la probabilité $P_3$ de gagner au troisième tirage :

Il s'agit ici pour le joueur de ne pas obtenir de boule noire à l'issue des deux premiers tirages puis de tirer une boule noire au troisième tirage. On doit donc évaluer la probabilité

de l'événement $\bar{A} \cap \bar{A} \cap A$ . Or les événements $\bar{A}$ et B sont identiques.
En fait, ne pas tirer de boule noire c'est obtenir une boule rouge.
De plus les événements $A$ et $B$ sont indépendants car le tirage est effectué avec remise.
On a donc :
$P_3 = P(\bar{A} \cap \bar{A} \cap A) = P(B \cap B \cap A) = P(B) \times P(B) \times P(A) = \frac{15}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{5}{20} = \frac{9}{64} = 0.14$ .
**(d)** Déterminons la probabilité que le joueur n'ait rien gagné à la fin de la partie :
il s'agit de la probabilité de l'événement $\bar{A} \cap \bar{A} \cap \bar{A}$.
On a $P(\bar{A} \cap \bar{A} \cap \bar{A}) = P(B \cap B \cap B) = (\frac{15}{20})^3 = \frac{27}{64}$ =0,42.

## ■ EXERCICE 22

**1°)** Appelons X la variable aléatoire qui compte le nombre d'amendes payé par le voyageur au cours des trois trajets.
Lors d'un voyage le voyageur a deux éventualités :
soit il paie une amende (échec pour le voyageur mais succès pour les contrôleurs) avec une probabilité p = $\frac{1}{6}$
Soit il ne paie pas d'amende (succès pour le voyageur mais échec pour les contrôleurs) avec une probabilité q = 1 - p = $\frac{5}{6}$.
Un voyage est donc une épreuve de Bernoulli de paramètre p = $\frac{1}{6}$ .
Le voyageur répète de manière indépendante $n = 3$ fois cette épreuve de Bernoulli. La variable aléatoire $X$ suit donc une loi binomiale de paramètre n = 3 et $p = \frac{1}{6}$ de telle sorte qu'on a P(X = k) = $C_3^k(\frac{1}{6})^k \times (\frac{5}{6})^{3-k}$.
**(a)** Déterminons la probabilité pour que le voyageur ait exactement deux fois une amende :
P(X = 2) = $C_3^2(\frac{1}{6})^2 \times (\frac{5}{6})^1 = \frac{5}{72}$ .
**(b)** Déterminons la probabilité pour que la somme totale des amendes soit inférieure au coût des trois tickets :

### Méthode 1

L'événement contraire est (X > 2) qui est égale à X=3. On a alors
P(X ≤ 2) = 1 – P (X > 2) = 1 – P (X = 3) = 1 - $C_3^2(\frac{1}{6})^3 \times (\frac{5}{6})^0$ = 1 - $\frac{1}{216} = \frac{215}{216}$.

### Méthode 2

La somme des trois tickets s'élève à 9000 F. Le montant total est inférieur au coût des trois tickets si le voyageur paie 0 amende ou s'il paie 1 amende ou s'il paie 2 amendes.
$P(X \leq 2) = C_3^0(\frac{1}{6})^0 \times (\frac{5}{6})^3 + C_3^1(\frac{1}{6})^1 \times (\frac{5}{6})^2 + C_3^2(\frac{1}{6})^2 \times (\frac{5}{6})^1 = \frac{215}{216}$
**2°)** La valeur minimale de $n$ pour que la probabilité qu'il ait une amende soit supérieur à 0,5 : l'événement contraire de l'événement « le voyageur paie au moins une amende » est : « le voyageur ne paie aucune amende » **(X=0).**
**P (X ≥ 1) = 1 - P (X = 0) =** $\boldsymbol{C_n^0} \times (\boldsymbol{\frac{1}{6}})^{\boldsymbol{0}} \times (\boldsymbol{\frac{5}{6}})^{\boldsymbol{n}}$ )

**Donc** $P(X \geq 1) \geq 0{,}5$ équivaut à

**$1 - P(X \geq 1) \geq 0{,}5 \iff 1 - (\frac{5}{6})^n \geq 0{,}5 \iff n\ln(\frac{5}{6}) \leq \ln(0{,}5)$**

Tout calcul fait on obtient : $n \geq 3{,}80$.

Le voyageur doit donc effectuer au moins 4 trajets.

## ■ EXERCICE 23

L'univers Ω est constitué de toutes les parties de trois billes prises parmi les 3n = (n + 2n).

On a donc **card(Ω) =** $\mathbf{C_{3n}^3 = \frac{(3n)!}{3!(3n-3)!} = \frac{3n(3n-1)(3n-2)(3n-3)!}{3!(3n-3)!}}$

$$= \mathbf{\frac{n(3n-1)(3n-2)}{2}}.$$

**1°**

**(a)** Calculons la probabilité $P_n$ d'obtenir exactement une bille rouge :

Sous cette hypothèse le tirage amènera une bille rouge et deux billes bleues. On a $C_n^1$ façons de choisir la bille rouge et $C_{2n}^2$ façons de choisir les deux billes bleues.

Ainsi $P_n = \frac{C_n^1 \times C_{2n}^2}{C_{3n}^3} = \frac{n^2(2n-1)}{C_{3n}^3} = \frac{2n(2n-1)}{(3n-1)(3n-2)}$ .

**(b)** Calculons $\lim_{n->+\infty} P_n$ . On obtient $\frac{2}{9}$ .

On remarque alors que quand le nombre de billes est suffisamment élevé les chances que l'on a d'obtenir exactement une bille rouge sont voisines de $\frac{2}{9}$.

**(c)** Calculons la probabilité $q_n$ d'obtenir au moins une bille rouge.

soit A : « le tirage n'amène aucune bille rouge ». Le tirage n'amène aucune bille rouge suppose que l'on a obtenu à l'issue du tirage uniquement des billes bleues.

On a $C_{2n}^3$ façons de choisir les trois billes bleues.

Donc **P(B) =** $\mathbf{\frac{C_{2n}^3}{C_{3n}^3} = \frac{4(n-1)(2n-1)}{3(3n-1)(3n-2)}}$

Finalement **$q_n$ = 1 – P (B)=**$\mathbf{\frac{3(3n-1n)(3n-2)+4(n-1)(2n-1)}{3(3n-1)(3n-2)}}$

**(d)** Calculons $\lim_{n->+\infty} q_n$. On obtient $\frac{19}{27}$ .

**2°)** Déterminons la loi de probabilité de $X$:

| X=k | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P(X=k) | $\frac{4(n-1)(2n-1)}{3(3n-1)(3n-2)}$ | $\frac{2n(2n-1)}{(3n-2)}$ | $\frac{2n(n-1)}{(3n-1)(3n-2)}$ | $\frac{(n-1)(n-2)}{3(3n-1)(3n-2)}$ |

Déterminons l'espérance mathématique de E(X) :

$E(X) = \frac{12n^3-5n^2-5n+2}{(3n-1)(3n-2)}$

## ■ EXERCICE 24

**1°)** Comme A et B sont indépendants alors

P (A ∩ B) = P(A) × P(B) = 0, 02 × 0,1. On en déduit ainsi que :

P(C) = 1 – P (A ∪ B) = 1 - [P(A) + P (B) – P (A ∩ B)]

=1 – 0,02 – 0,1 + 0,02 × 0,1 = 0,882.

**2°)** Il y a **0,02 – 0, 002 = 0,018** chances de tomber sur une montre n'ayant que le défaut a.

De même il y a **0,1 – 0,002 = 0,098** chances de tomber sur une montre ne présentant que le défaut b.

On a donc **P(D) = 0,018 + 0,098 = 0,116.**

**3°)** X suit une loi binomiale de paramètre 5 et 0,882.D'où

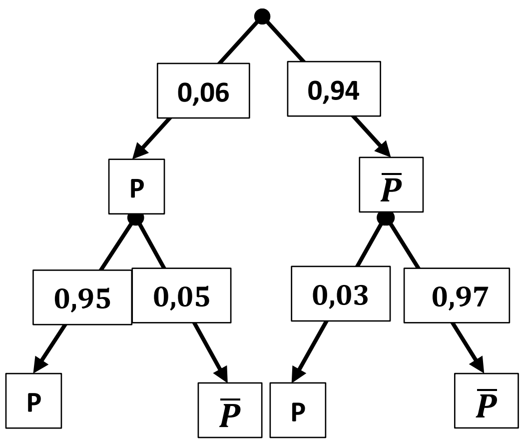
P(E) = P(X ≥ 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = $C_5^4 \times (0{,}882)^4 \times (0{,}118)^1 + C_5^5 \times (0{,}882)^5 \times (0{,}118)^0$ ≈ 0,891

## ■ EXERCICE 25

**1°) (a)** On appellera :

M L'événement « la personne est malade »

P L'événement « le test est positif ». Voici l'arbre qui en découle




On obtient alors P (M ∩ P) = 0,06 × 0,95 = 0,057

**(b)** Dressons le tableau récapitulatif des résultats :

| | P | $\bar{P}$ | Total |
|---|---|---|---|
| M | P (M∩P) = 0,057 | $P\ (M \cap \bar{P})$ = 0,003 | P (M)=0,06 |
| $\bar{M}$ | $P\ (\bar{M} \cap P)$ = 0,0282 | $P\ (\bar{M} \cap \bar{P})$ = 0,9148 | $P(\bar{M})$ = 0,94 |
| Total | P(P)=0,0852 | $P\ (\bar{P})$ = 0,9148 | 1 |

Calculons $P_P$ (M).

Le test est positif on parcourt donc uniquement la colonne P et comme P(P)=0,0852 alors on obtient $P_P$ (M)=$\frac{\mathrm{P}\ (M \cap P)}{P(P)} = \frac{0{,}057}{0{,}0852}$=0,669.

**2°)**

**(a)** Calculons P(X=2)

Avoir exactement deux personnes malades, c'est ou bien les 2 premières personnes sont effectivement malades, ou bien la première et la troisième personne sont effectivement malades et ainsi de suite. Le nombre de possibilité correspond au nombre de manière de placer 2 objet « M sachant P » dans 8 cases c'est-à-dire $C_8^2$.

On a donc P(X = 2) = $C_8^2\left(\frac{95}{142}\right)^2 \times (\frac{47}{142})^6$ = 0,0165.

De façon général on a : P(X = k) = $C_8^k\left(\frac{95}{142}\right)^k \times (\frac{47}{142})^{8-k}$

**(b)** X suit une loi binomiale de paramètre n = 8 et p = $\frac{95}{142}$

Donc E(X) = np =$\frac{380}{71}$ = 5,35

## ■ EXERCICE 26

**1°)** Déterminons la loi de X lorsque n = 0.

Le nombre total de boules dans l'urne est n + 4 + 2 = n + 6

Ainsi pour n = 0 le nombre total de boule est 6.

Par conséquent l'univers Ω est constitué de toutes les parties de 2 boules prises parmi les 6.

On a donc card(Ω) = $C_6^2$ = 15.

Il est évident que la variable aléatoire X prend la valeur : 0. En effet l'on ne peut à l'issue du tirage avoir de boules rouges puisque n=0 (n étant le nombre de boule rouge tiré). On a P(X=0)=1, c'est, comme vous le voyez, un événement certains. En fait, cet événement se réalise toujours à l'issue du tirage car on n'a aucune chance de tirer des boules rouges dans une urne qui n'en contient pas. La loi de probabilité de X est donc fournie par le tableau suivant :

| X=k | 0 |
|---|---|
| P(X=k) | 1 |

La loi de probabilité de X pour n=1

On devine aisément que les valeurs prises par X sont : 0 ; 1.

Par ailleurs, le nombre de boule dans l'urne est 7

Donc card(Ω)=$C_7^2$ = 21 ;

P(X = 0) = $\frac{C_1^0 \times C_6^1}{C_7^2} = \frac{5}{7}$ , P(X = 1) = $\frac{C_1^1 \times C_6^1}{C_7^2} = \frac{2}{7}$ .

D'où le tableau de la loi probabilité la variable X est:

| X=k | 0 | 1 |
|---|---|---|
| P(X=k) | $\frac{5}{7}$ | $\frac{2}{7}$ |

**2°)** Montrons que l'espérance E(X) = $\frac{2n}{(n+n)}$ .

Etablissons d'abord la loi de probabilité de X pour n ≥ 2

Pour n ≥ 2, l'univers Ω est constitué de toutes les parties de 2 boules prises parmi les n + 6.

On a donc card(Ω) = $C_{n+6}^2 = \frac{(n+6)!}{2!(n+6)!} = \frac{(n+6)(n+5)(n+4)!}{2!(n+4)!} = \frac{(n+6)(n+5)}{2}$ .

Ici les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0;1;2.

On a $P(X = 0) = \frac{C_n^0 \times C_6^2}{C_{n+6}^2} = \frac{30}{(n+5)(n+6)}$,

$P(X = 1) = \frac{C_n^1 \times C_6^1}{C_{n+6}^2} = \frac{12n}{(n+5)(n+6)}$

$P(X = 2) = \frac{C_n^2 \times C_6^0}{C_{n+6}^2} = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+6)}$,

d'où la loi de probabilité de X :

| $X=x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{30}{(n+5)(n+6)}$ | $\frac{12n}{(n+5)(n+6)}$ | $\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+6)}$ |

On a alors :

$E(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2)$

$= 0 \times \frac{30}{(n+5)(n+6)} + 1 \times \frac{12n}{(n+5)(n+6)} + 2 \times \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+6)}$

$= \frac{12n+2n(n-1)}{(n+5)(n+6)} \frac{2n(12+n-1)}{(n+5)(n+6)} = \frac{2n}{n+6}$

**4°)** $E(X) = 1$, si $n = 6$.

## ■ EXERCICE 27

**1°)** On a $n = 3$. L'univers $\Omega$ est l'ensemble des parties de 2 boules prises parmi les 9 boules. Donc $\text{card}(\Omega) = C_9^2 = 36$

**(a)** Calculons la probabilité $P_1$ de l'événement :

**A** : « Obtenir deux boules de même couleur » :

Si les deux boules sont de même couleur alors elles sont :

Soit uniquement de couleur verte.

Soit uniquement de couleur blanche.

On a $C_6^2$ façons de choisir les boules vertes et $C_2^2$ façons de choisir les boules blanches.

Ainsi $P_1 = P(A) = \frac{C_6^2 + C_2^2}{C_9^2} = \frac{1}{2}$

**(b)** Calculons la probabilité $P_2$ de l'événement B : « obtenir deux boules de couleurs différentes » :

Les boules sont de couleurs différentes si le tirage amène une boule verte et une boule blanche. On a $C_2^1$ façons de choisir la boule blanche et $C_6^1$ façons de choisir les boules vertes. D'où $P_2 = P(B) = \frac{C_6^1 \times C_2^1}{C_9^2} = \frac{1}{2}$.

On aurait pu remarquer aussi que $P(B) = 1 - P(A)$, car A et B sont deux événements contraires.

**2°)** $n \geq 2$.

**(a)** Exprimons en fonction de n les probabilités des événements $(X=1)$ et $(X = -1)$ : $X=1$, si le gain du joueur s'élève à 1F et dans ce cas le tirage aura amené des boules de même couleur.

D'où $P(X = 1)= \frac{C_6^2+C_n^2}{C_{n+6}^2}=\frac{n^2-n+30}{(n+5)(n+6)}$.

De la même façon on obtient

$P(X = -1) = \frac{C_6^1\times C_n^1}{C_{n+6}^2}=\frac{12n}{(n+5)(n+6)}$.

**(b)** Montrons que $E(X) = \frac{n^2-13n+30}{(n+5)(n+6)}$ .

La loi de X est donc le suivant :

| | | |
|---|---|---|
| $X=x_i$ | 1 | -1 |
| $P(X=x_i)$ | $\frac{n^2-n+30}{(n+5)(n+6)}$. | $\frac{12n}{(n+5)(n+6)}$ |

Donc $E(X)= 1 \times P(X = 1) + (-1) \times P(X = -1)$

$$= \frac{n^2-n+30}{(n+5)(n+6)} - \frac{12n}{(n+5)(n+6)} = \frac{n^2-13n+30}{(n+5)(n+6)}$$

**(c)** Déterminons la valeur de $n$ pour laquelle $E(X) = 0$

$E(X) = 0$ si $\frac{n^2-13n+30}{(n+5)(n+6)} = 0$ c'est-à-dire si $n^2 - 13n + 30 = 0$.

On obtient n = 10 ou n = 3 .

Le jeu est donc équitable pour n = 10 ou n = 3.

$E(X) <0$ si $\frac{n^2-13n+30}{(n+5)(n+6)} < 0$.

L'étude du signe de ce quotient permet de dire que l'espérances est négative lorsque $n \in ]3 ; 10[$.

## ■ EXERCICE 28

**1°)**

**(a)** Notons $C$ l'événement « le ballon est crevé »

La probabilité qu'au bout de **2** tirs le ballon soit intact est donc

$P(\bar{C}\cap\bar{C}) = P(\bar{C})\times P(\bar{C}) = 0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}64$

***b***) La probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon est :

$1 - P(\bar{C}\cap\bar{C}) = 0{,}36$

**(c)** La probabilité que n tirs suffisent pour crever le ballon est :

$\boldsymbol{P_n} = 1 - P(\bar{C}\cap\bar{C}\cap\dots\cap\bar{C}) = 1 - (0{,}8)^n$

***d***) La valeur de n pour laquelle $\mathbf{P_n \geq 0{,}99}$ est telle que :

$1 - (0{,}8)^n \geq 0{,}99$ On obtient $n \geq 21$.

**2°)** En fait il vaut mieux éviter de faire un arbre :

avec k = 1, on a $P_1 = P(C) = 0{,}2$ ;

avec k = 2, on a $P_2 = P(C) + P(\bar{C}\cap C) = 0{,}2 + 0{,}2\times 0{,}8$ ;

avec k = 3, on a $P_3 = P(C) + P(\bar{C}\cap C) + P(\bar{C}\cap\bar{C}\cap C)$

$$= 0{,}2 + 0{,}2\times 0{,}8 + 0{,}2\times(0{,}8)^2$$

avec k = 4, on a $P_4 = P(C) + P(\bar{C}\cap C) + P(\bar{C}\cap\bar{C}\cap C) + P(\bar{C}\cap\bar{C}\cap\bar{C}\cap C) = 0{,}2 + 0{,}2\times 0{,}8 +$

$0{,}2 \times (0{,}8)^2 + 0{,}2(0{,}8)^3$ .

La probabilité totale est donc P $= \frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{4}P_2 + \frac{1}{4}P_3 + \frac{1}{4}P_4$ = 0,4096

## ■ EXERCICE 29

**1°)** Appelons :

**M** l'événement « tirer une boule rouge au premier tirage »

**Q** l'événement « tirer une boule bleue au deuxième tirage »

**K** l'événement « tirer une boule rouge au deuxième tirage »

**R** l'événement « tirer une boule bleue au troisième tirage »

**(a)** La probabilité de gagner exactement en un tirage est donc

P(A) = P(M) = $\frac{2}{9}$

La probabilité de gagner exactement en deux tirage est : P(B) = P(M ∩ Q) Or M et Q sont deux événement dépendants puisque le jeton tiré n'est pas remis dans l'urne.

Ainsi P(B) = P(M) × $P_M$ (Q) = $\frac{7}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{7}{36}$.

La probabilité de gagner exactement en trois tirage est :

P(C) = P(M ∩ K ∩ Q)= P(M )× $P_M$ (K) × $P_K$ (R) = $\frac{7}{9} \times \frac{6}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{6}$ .

**(b)**

Calculons la probabilité $P_G$ de gagner à une partie de ce jeu :

$P_G$ =P(A ∪ B ∪ C) = P(A) + P(B) + P(C)=$\frac{7}{12}$.

Car $A, B\ et\ C$ sont trois événement sont incompatibles.

| |
|---|
| P(A ∪ B ∪ C) = P((A ∪ B) ∪ C) = P(A ∪ B) + P(C) – P ((A ∪ B) ∩ C)<br>= P(A) + P(B) – P (A ∩ B) + P(C) + P((A ∩ C) ∪ (B ∩ C))<br>P (A ∪ B ∪ C) = P (A) + P (B) + P(C) - P (A ∩ B) – P (A ∩ C) – P (B ∩ C) – P (A ∩ B ∩ C). |

**2°)**

**(a)** Etablissons la loi de probabilité de X :

Il est immédiat que chaque partie est une épreuve de Bernoulli.

Les quatre parties se déroulant de manières identiques et indépendantes, on est en présence d'un schéma de Bernoulli de telle sorte que La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre **4 et $\frac{7}{12}$**.

On a donc ∀ k ∈ IN, (0 ≤ k ≤ 4), P(X = k) = $C_4^k (\frac{7}{12})^k \times (\frac{5}{12})^{4-k}$ .

**(b)** Déterminons la probabilité $P_J$ pour que Julie reparte avec la poupée :

Julie repart avec la poupée si elle gagne au moins trois ticket :

Ainsi $P_J$ = P(X = 3) + P(X = 4) = $C_4^3(\frac{7}{12})^3 \times (\frac{5}{12}) + C_4^4(\frac{7}{12})^4(\frac{5}{12})^0$ = 0,447 .

**(c)** L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale est de paramètre n et p donnée par **E(X) = np** = 4 × $\frac{7}{12}$ = 2,33 et la variance est donnée par :

$V(X) = npq = 4 \times \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} = 0,97$

**3°**

**(a)** Les différentes valeurs prises par Y sont : - 500; - 425; 100; 500.

**(b)** Déterminons la loi de probabilité de Y :

$P(Y = -500) = P(X = 0) = C_4^0 (\frac{7}{12})^0 \times (\frac{5}{12})^4 = 0,03$

$P(Y = -425) = P(X = 1) + P(X = 2) = C_4^1 (\frac{7}{12})^1 \times (\frac{5}{12})^3 + C_4^2 (\frac{7}{12})^2 \times (\frac{5}{12})^2 = 0,52$

$P(Y = 100) = P(X = 3) + C_4^3 (\frac{7}{12})^3 \times (\frac{5}{12})^1 = 0,33$

$P(Y = 500) = P(X = 4) = 0,12$

On obtient alors le tableau de loi de probabilité suivant :

| X=k | -500 | -425 | 100 | 500 |
|---|---|---|---|---|
| P(X=k) | 0,03 | 0,52 | 0,33 | 0,12 |

.

**(c)** E(X) = - 143, Le jeu n'est donc pas à l'avantage de Julie.

## ■ EXERCICE 30

**1°)**

Soit Z l'événement « Zamlé tue le lièvre » et T l'événement « Toro tue le lièvre »

Z∪T est donc l'événement « le lièvre est tué ».

Supposons que les événements Z et T sont indépendants.

De plus ils sont compatibles car ils peuvent se réaliser en même temps,

donc $P(Z \cup T)=P(Z)+P(T)-P(Z \cap T)$ $P(Z)=\frac{5}{6}$ ; $P(T) = \frac{4}{5}$

D'où $P(Z \cup T) = \frac{5}{6} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{29}{30} = 0,97$

**2°)**

**(a)** Quand Toro tire et manque (événement $\bar{T}$ ) les chances de Zamlé de tuer le lièvre sont réduit de moitié, donc $P_{\bar{T}}(Z) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{5}{12}$.

Calculons la probabilité pour que $Z$amlé tue le lièvre si $T$oro le manque (événement $Z \cap \bar{T}$)

$P(Z \cap \bar{T}) = P(\bar{T}) \times P_{\bar{T}}(Z) = \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \frac{5}{12} = \frac{1}{12} = 0,08.$

**(b)** Toro tire le premier, puis Zamlé : l'événement le lièvre en réchappe est alors $\bar{Z} \cap \bar{T}$ :

$P(\bar{Z} \cap \bar{T}) = P(\bar{T}) \times P_{\bar{T}}(\bar{Z}) = [1 - P(T)][1 - P_{\bar{T}}(Z)] = \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \left(1 - \frac{5}{12}\right) = \frac{7}{60} \simeq 0,117$

## ■ EXERCICE 31

Appelons $A_x$ l'événement la $x^{ième}$ boule tirée est rouge :

* La première boule tirée est rouge est l'événement $A_1$ : $P_1 = P(A_1) = \frac{5}{11}$

* La deuxième boule tirée est la première boule rouge est l'événement $\overline{A_1} \cap A_2$

$\boldsymbol{P_2} = \boldsymbol{P}(\overline{A_1} \cap A_2) = P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(A_2)$ puisque Les événements $\overline{A_1}$ et $A_2$ sont dépendants car on ne remet pas les boules tirées dans le sac.

Or $P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = \frac{6}{11}$ et $P_{\overline{A_1}}(A_2) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ car il reste dans l'urne après le premier tirage 10 boules dont 5 rouges. $\boldsymbol{P_2} = \boldsymbol{P}(\overline{A_1} \cap A_2) = \frac{6}{11} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{11}$.

***** La troisième boule tirée est la première boule rouge est l'événement:

$\overline{A_1} \cap \overline{A_2}A_3$:

$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}A_3) = P(\overline{A_1}) \times \mathrm{P}(\overline{A_2}/\overline{A_1}) \times P(A_3/\overline{A_1} \cap \overline{A_2})$.

Or $P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = \frac{6}{11}$ ; $\mathrm{P}(\overline{A_2}/\overline{A_1}) = 1 - P_{\overline{A_1}}(A_2) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ;

$P_3 = P(A_3/\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \frac{5}{9}$. Car il reste dans l'urne après les deux premiers tirages 9 boules dont 5 rouges.

Ainsi $P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) = \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{33}$.

On obtiendra de même $P_4 = \frac{5}{66}$ ; $P_5 = \frac{5}{154}$; $P_6 = \frac{5}{462}$ ; $P_7 = \frac{1}{462}$.

Et $\sum_{x=1}^{7} P_x = 0$, d'où pour $x \geq 8$, $P_x = 0$; puisque l'on a déjà tiré une boule rouge avant le $x^{\text{ième}}$ tirage.

## ■ EXERCICE 32

**1°)**

**(a)** Calculons la probabilité $\mathbf{P_1}$ de gagner dès la première épreuve :

L'univers $\Omega$ est l'ensemble des secteurs de la roue : card($\Omega$) = 6.

Soit $A$ l'événement « obtenir la couleur rouge à la première épreuve »

On a : $\mathbf{P_1 = P(A) = \frac{1}{6}}$

**(b)** Calculons la probabilité $\mathbf{P_2}$ de gagner à l'issue de la seconde épreuve.

Soit $B$ l'événement « obtenir la couleur bleue à la première épreuve »

C l'événement « obtenir la couleur rouge à la seconde épreuve ».

$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $\quad$ $P(C) = \frac{1}{6}$

Gagner à l'issue de la seconde épreuve est la réalisation de l'événement $B \cap C$ et comme les événements A et B sont indépendants alors

$P_2 = P(B \cap C) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$.

**(c)** Calculons la probabilité $P'$ de gagner la partie :

Gagner la partie est la réalisation de l'événement $A \cup (B \cap C)$, A et $B \cap C$ sont incompatibles.

D'où $P' = P(A \cup (B \cap C)) = P(A) + P(B \cap C) = \frac{2}{9}$.

**2°)**

**(a)** Loi de probabilité de X :

La variable aléatoire $X$ prend les valeurs : -2,; -1; 0; 4; 6.

Remarquons que la roue possède $\boldsymbol{x}$ secteurs, un rouge, trois blanc et $x-4$ bleus.

$P(X=4)=\frac{1}{x}$ ; $P(X=-2)=\frac{3}{x}$ ; $P(X=0)=\left(\frac{x-4}{x}\right)^2$ ; $P(X=6)=(\frac{x-4}{x})\times\frac{1}{x}$ ;

$P(X=-1)=(\frac{x-4}{x})\times\frac{3}{x}$

D'où le tableau de la loi de probabilité :

| $X=x_i$ | -2 | -1 | 0 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{3}{x}$ | $(\frac{x-4}{x})\times\frac{3}{x}$ | $(\frac{x-4}{x})^2$ | $\frac{1}{x}$ | $(\frac{x-4}{x})\times\frac{1}{x}$ |

**(b)** On obtient

**E(X )= - 2 ×** $\boldsymbol{\frac{3}{x}+(-1)\times\left(\frac{x-4}{x}\right)\times\frac{3}{x}+4\times\frac{1}{x}+0\times\left(\frac{x-4}{x}\right)^2+6\times\left(\frac{x-4}{x}\right)\times\frac{1}{x}=\frac{x-12}{x^2}}$

**(c)** Le jeu est équitable lorsque E(X) = 0, d'où x = 12.

**(d)** E(X) est maximum si $\frac{x-4}{x^2}$ est maximum. En calculant le dérivé, on obtient x = 24

## ■ EXERCICE 33

**1°) Zahoro est contrôlé**.

On a P ($X_i$ = 1) = P(A) = p. et P ($X_i$ = 0) = $P(\bar{A})$ = 1-p.

La somme de toutes ces variables donnent une loi binomiale de paramètre 40 et p.

**2°)** p = $\frac{1}{20}$

**(a)** D'après les formules de la loi binomiale fourni dans le cours on a E(X) = np = 2

**(b)** P(X = k) $= C_n^k\times\left(\frac{1}{20^k}\right)\times(\frac{19}{20})^{n-k}$ d'où P(X = 0) = $(\frac{19}{20})^{40}$

P(X = 1) = 2× $(\frac{19}{20})^{39}$ ; P(X = 2)= $\left(\frac{39}{20}\right)\times(\frac{19}{20})^{38}$

**(c)** On cherche P(X ≤ 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,6767.

**3°)** Z représente le gain algébrique réalisé par le fraudeur Zahoro. Zahoro fraude 40 fois un ticket à 10 F, il gagne donc 400 F. S'il est contrôlé X fois, il paie 100X, d'où son gain est Z = 400 - 100X.

$Z$ suit évidemment la même loi que $X$. Pour p = $\frac{1}{5}$ et n = 40

on a E(X) = np = 8 D'où E(Z) = 400 – 100 × 8 = - 400.

**4°)**

**a)** On reprend ce qui a été fait précédemment.

P(X ≤ 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = $(1-p)^{40}+40p(1-p)^{39}+\frac{40\times39}{2}p^2(1-p)^{38}$ et en mettant $(1-p)^{38}$ en facteur on obtient

P(X ≤ 2) = $(1-p)^{38}(1+38p+741p^2)$

**(b)** Il suffit de chercher la dérivée. Tout calcul fait on obtient :

$f'(x)=-29640x^2(1-x)^{37}$ f' est donc bien négatif sur **[0;1].**

Comme f(0) = 1 et f(1) = 0 alors il existe un unique réel $x_0$ appartenant à l'intervalle **[0;1].** tel

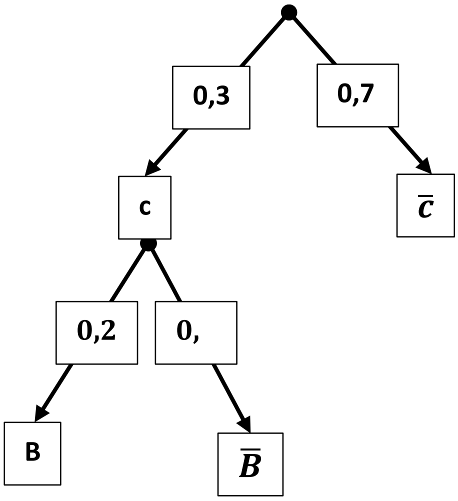
que $f(x_0)=0{,}01$. De plus on obtient à la calculatrice $f(0{,}19)=0{,}0116$ et
$f(0{,}20) = 0{,}0079$

d'où $\frac{19}{100} \leq x_0 \leq \frac{20}{100}$ et $n = 19$.

**(c)** En fait on cherche $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2)$.Et l'on veut que cette probabilité soit supérieur à 0.99. Soit que
$1 - P(X \leq 2) \geq 0.99 <=> -P(X \leq 2) \geq -0.01 <=> \ P(X \leq 2) \leq 0.01$ ce qui conduit d'après les résultats précédents à $p \geq 0.19$. Pratiquement cela signifie qu'il faut contrôler un passager sur $5$ environ ( et dans ce cas le « gain » de Zahoro est de $-400\ F$)

## ■ EXERCICE 34

**1°)**




**2°)**

**(a)** Pour que la bille soit avalée il faut qu'elle ait d'abord atteint la cible.
On a donc **$P_1$ = P(B) = P(B∩C) = P(C) × $P_C$ (B) = 0,3 × 0,2 = 0,06**

**(b)**

Pour que la bille reste sur la cible il faut que la cible soit atteinte et que la bille ne soit pas avalée.
On a donc **$P_2$ =** $\boldsymbol{P(\overline{B} \cap C)} = P(C) \times P_C(\overline{\boldsymbol{B}})$ = 0,3 × 0,8 = **0,24**

**3°)**

Notons **X** la variable aléatoire qui a chaque partie associe le gain du joueur.
D'après l'énoncé, on devine aisément que la variable aléatoire **X** prend les valeurs **-0,5; 0 ; g-0,5**.

Le gain est de **-0,5 F** lorsque la bille rate la cible et qu'on perd la mise. Le gain de - 0,5 F a donc pour probabilité $\boldsymbol{P(\overline{C})}$ **= 0,7**.
Le gain est **nul** lorsque la bille reste sur la cible sans être avaler.
D'après la question précédente le gain nul a pour probabilité **$P_2$ = 0,24.**
Le gain est **g - 0,5** lorsque la bille est avalée. On déduit alors de la question précédente que le gain **g - 0,5** a pour probabilité
**$P_2$ = 0,06**.

La loi de probabilité du gain est donc donnée par le tableau suivant :

| gain | -0.5 | 0 | g-0.5 |
|---|---|---|---|
| probabilité | **$0,7$** | **0,24** | **0,06** |

**4°)**

**(a)** L'espérance de gain est donné par **:**

$\boldsymbol{E(X)} = -0.5 \times 0.7 + 0 \times 0.24 + (\mathrm{g} - 0.5) \times 0.06 = 0.66\mathbf{g} - \mathbf{0.38}$

**(b)** L'espérance mathématique $\boldsymbol{E(X)}$ correspond au gain moyen du joueur par partie, c'est le gain moyen que le joueur peut espérer gagner à l'issue d'une partie du jeu.

Les organisateurs peuvent donc espérer un bénéfice si le gain moyen du joueur est négatif.

Or $\boldsymbol{E(X)} < 0 \Leftrightarrow 0{,}66\mathbf{g} - \mathbf{0{,}38} < 0 \Leftrightarrow g < \frac{0.38}{0.06} \Longleftrightarrow \mathrm{g} < \frac{19}{3}$

Ainsi les organisateurs peuvent espérer un bénéfice lorsque $\mathrm{g} < \frac{19}{3}$ (C'est-à-dire environ $\mathbf{6{,}33}\ \boldsymbol{F}$)

## ■ EXERCICE 35

**1°)** Appelons :

$R$ l'événement « le correspondant répond aux questionnaires »

$D_1$ l'événement « le correspondant décroche le premier appel »

$R_1$ l'événement « le correspondant répond aux questionnaires lors du premier appel »

La probabilité cherchée est celle de l'événement $R_1$ et est égale à $P(D_1) \times P_{D_1}(R_1) = 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$

**2°)** Soient :

$D_2$ l'événement « le correspondant décroche le second appel »

$R_2$ l'événement « le correspondant répond aux questionnaires lors du second appel».

La probabilité de $R_2$ est donc $P(\overline{D}_1) \times P_{\overline{D}_1}(D_1) \times P_{D_2}(R_2) = 0{,}4 \times 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}056$

d'où $P(R) = P(R_1 \cup R_2) = P(R_2) + P(R_1) = 0{,}236$

**3°)** $P_R(R_1) = \frac{P(R_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}18}{0{,}236} \approx 0{,}763$

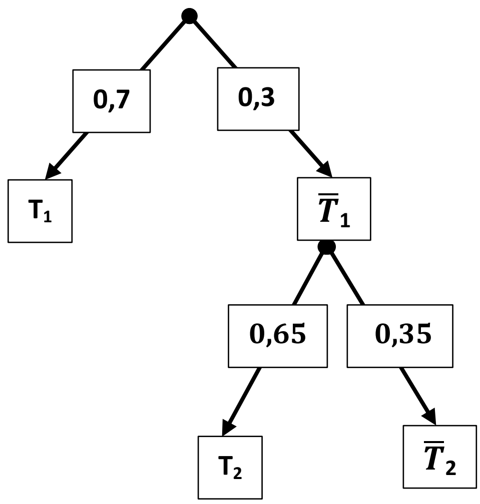
**4°)** Soit X la variable qui indique le nombre de personnes qui répondent aux questionnaires.

Il est immédiat que X suit une loi binomiale de paramètres n=25 et p=0,236

Il s'agit donc de calculer P(X=5). On obtient 0,179 (Vous êtes grands maintenant... !)

## ■ EXERCICE 36

Appelons $T_2$ l'événement : « Le second test est positif ». L'arbre correspondant à la situation proposée est donc :



**1.** Déterminons la probabilité des événements $T_1$ et C.

■ Le test est positif pour 70% des ordinateurs sortis directement des chaînes de fabrication donc : $P(T_1) = 0{,}7$.

| |
|---|
| L'ordinateur est acheminé chez le client s'il passe le premier test **ou** s'il échoue au premier test et réussi au second.<br>L'événement C est donc la réunion des événements $T_1$ et $\bar{T}_1 \cap T_2$ c'est-à-dire<br>C= $T_1 \cup (\bar{T}_1 \cap T_2)$.<br>Or les événements $T_1$ et $\bar{T}_1 \cap T_2$ sont incompatibles donc :<br>$T_1 \cap (\bar{T}_1 \cap T_2) = \emptyset$ de telle sorte que : $P(C) = P(T_1 \cup (\bar{T}_1 \cap T_2)) = P(T_1) + P(\bar{T}_1 \cap T_2)$.<br>De plus, les événements $\bar{T}_1$ et $T_2$ sont dépendants donc la formule $P(\bar{T}_1 \cap T_2) = \bar{T}_1 \times T_2$ ne fonctionne pas ici. Seule la formule $P(\bar{T}_1 \cap T_2) = P_{\bar{T}_1}(T_2) \times \bar{T}_1$ convient.<br>Par conséquent : $P(C) = P(T_1 \cup (\bar{T}_1 \cap T_2)) = P(T_1) + P(\bar{T}_1 \cap T_2) = P(T_1) + P_{\bar{T}_1}(T_2) \times \bar{T}_1 = 0{,}895$. |

**2°)**
**(a)** Déterminons la loi de probabilité du gain X réalisé par le fabricant :

Les valeurs prises par la variable X sont consignées dans le tableau suivant :

| Événement | L'ordinateur passe le premier test avec succès. | L'ordinateur échoue au premier test mais réussi le second | L'ordinateur échoue aux deux tests (Il n'est pas vendu) |
|---|---|---|---|
| Gain X | t - 300000 | t - 330000 | - 330000 |

La loi de la variable X est donc :

| $X = x_i$ | t – 300000 | t – 330000 | – 330000 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $P(T_1) = 0{,}7$ | $P(\bar{T}_1 \cap T_2) = 0{,}65 \times 0{,}3 = 0{,}195$ | $P(\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2) = 0{,}35 \times 0{,}3 = 0{,}105$ |

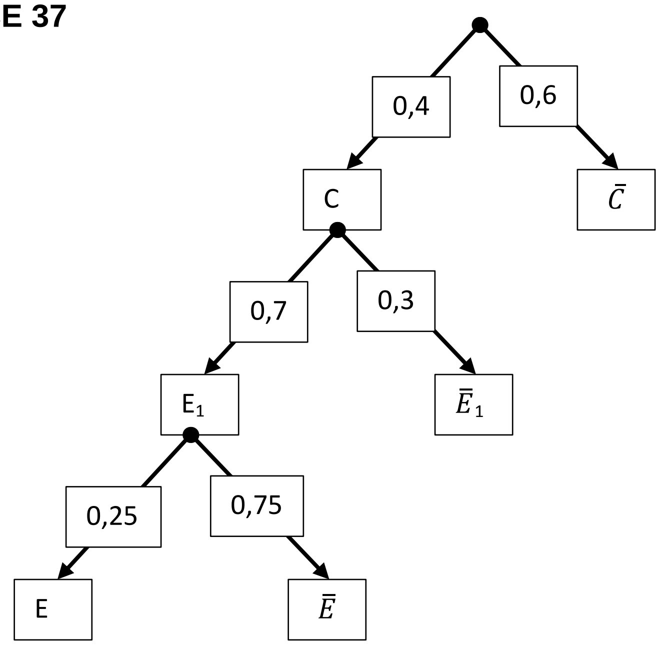
REMARQUE IMPORTANTE : $0{,}7 + 0{,}195 + 0{,}105 = 1$.

**(b)** L'espérance E(X) de la variable X est donnée par :
$E(X) = 0{,}7 \times (t - 300000) + 0{,}195 \times (t - 330000) + 0{,}105 \times (-330000) = 0{,}895t - 309000$.

c) L'entreprise peut espérer réaliser un bénéfice lorsque $E(X) > 0$ c'est-à-dire dès que $0{,}895t - 309000 > 0$.
L'entreprise réalise donc un bénéfice lorsque $t > 345255$

■ **EXERCICE 37**

**1°) (a)**




**(b)** $P(E_1) = P(C) \times P_C(E_1) = 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28$

**(c)** L'événement F correspond à l'événement :$C \cap E_1 \cap E$.
Donc $P(F) = P(C \cap E_1 \cap E) = P(C) \times P_C(E_1) \times P_{E_1}(E) = 0{,}4 \times 0{,}7 \times 0{,}25 = 0{,}07$

**2°)**

**(a)** Chaque postulant est soit recruté ou non. L'épreuve de candidature est bien une épreuve de Bernoulli.
En plus, cette épreuve se répète de manière identique et indépendante dix fois. On est donc en présence d'un schéma de Bernoulli si bien que la variable X qui indique le nombre de candidats recruté suit une loi Binomiale de paramètres n=10 et p=0,07

**(b)** Il s'agit de calculer la probabilité de l'événement X=2.
A ce niveau du livre vous devez être tout de même capable de prouver que :
P(X=2)=0,123

**(c)** Si vous avez consenti à nous suivre le long de cet ouvrage, vous êtes évidemment au courant qu'il suffit de constater qu'ici la variable X suit une loi Binomiale de paramètre n et p=0,07.
Il saute ensuite aux yeux qu'il faille passer par l'événement contraire.
Si vous avez lu le chapitre 6 (ce qui ne vous fera aucun mal) vous aurez déjà compris que la probabilité de l'événement « au moins un des n candidats est recruté » est égale à $1 - (0{,}93)^n$ .
On résout ensuite l'inéquation $1 - (0{,}93)^n \geq 0{,}999$.
Pour obtenir n=95,1.
MériteCenter devra donc traiter au moins 96 dossiers pour que les chances d'être recruté de chaque candidat soient estimées à 99,9%.

■ **EXERCICE 38**

**1°)** Voici une excellence occasion de revenir sur le chapitre 1.

Pour remplir trois cases la machine $M_1$ a 9 possibilités la machine $M_2$ a 8 possibilités tandis que la machine $M_3$ en a 7.
D'après le principe multiplicatif on a au total $card(\Omega) = 9 \times 8 \times 7 = 504$ possibilités.

Pour remplir 3 cases verticalement :
$M_1$ a 9 possibilités de placer le $1^{er}$ jéton, $M_2$ a 2 possibilités de placer le $2^{ème}$ jeton et $M_3$ ne dispose que d'une possibilité de placer le $3^{ème}$ jeton.
On a donc $9 \times 2 \times 1 = 18$ possibilités.
On démontre de la même façon qu'on a 18 possibilités de remplir 3 cases horizontalement.
Par conséquent $p(H) = \frac{9\times2\times1}{9\times8\times7} = \frac{18}{504} = \frac{1}{28} = p(V)$

Pour remplir trois cases en diagonal :
- Ou la machine $M_1$ place le premier jeton à un coin et alors $M_1$ a 4 possibilités, la machine $M_2$ a 2 possibilités de placer le $2^{ème}$ jeton tandis la machine $M_3$ ne dispose que d'une possibilité de placer le $3^{ème}$ jeton.
- Ou la machine $M_1$ place le premier jeton au centre du carré et dans ce cas la machine $M_2$ a 4 possibilités de placer le $2^{ème}$ jeton et alors la machine $M_3$ n'a qu'une possibilité de placer le $3^{ème}$ jeton.
Finalement : $p(D) = \frac{4\times2\times1}{9\times8\times7} + \frac{1\times4\times1}{9\times8\times7} = \frac{1}{42}$
En plus : $p(\overline{N}) = p(H \cup V \cup D) = p(H) + p(V) + p(D) = \frac{2}{21}$
donc $\boldsymbol{p(N) = 1 - p(\overline{N}) = \frac{19}{21}}$ **.**

**2°)** Il est évidemment question de fournir d'abord la loi de probabilité de la variable X:

| $X = x_i$ | 20 | $\alpha$ | -20 |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{1}{28}+\frac{1}{28}=\frac{2}{28}=\frac{1}{14}$ | $\frac{1}{42}$ | $\frac{19}{21}$ |

On a $E(X) = 20 \times \frac{1}{14} + \alpha \times \frac{1}{42} - 20 \times \frac{19}{21} = -\frac{50}{3} + \frac{\alpha}{14}$
Donc l'espérance est nulle lorsque : $\alpha = 700$

**3°)** Pour remplir 3 cases sous cette hypothèse, la machine $M_1$ a 4 possibilités, la machine $M_2$ a 8 possibilités tandis que la machine $M_3$ a 7 possibilités. On a donc $card(\Omega) = 4 \times 8 \times 7 = 224$

Pour remplir 3 cases verticalement la machine $M_1$ a 4 possibilités machine $M_2$ a 2 possibilités machine $M_3$ n'a alors qu'une possibilité. D'où :$P_\Delta(H) = P_\Delta(V) = \frac{4\times2\times1}{4\times8\times7} = \frac{1}{28}$

Pour remplir 3 cases en diagonal la machine $M_1$ place le premier jeton à un coin du carré et dans cas elle a 4 possibilités, la machine $M_2$ a 2 possibilités et la machine $M_3$ n'a qu'une possibilité. Par conséquent $P_\Delta(D) = \frac{4\times2\times1}{4\times8\times7} = \frac{1}{28}$

On obtient alors $P_\Delta(H \cup V \cup D) = \frac{1}{28} + \frac{1}{28} + \frac{1}{28} = \frac{3}{28}$ Car $H \cap V \cap D = \emptyset$ les événements H, V et D étant incompatibles.

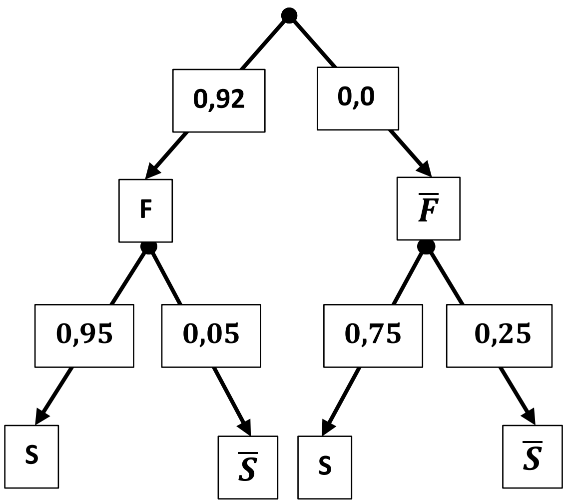
**4°)** Il n'est évidemment pas question de se lancer dans de longs calculs. On l'a déjà fait.
En effet,
on a $P_\Delta(A) = P_\Delta(H \cup V \cup D) = \frac{3}{28}$ d'où $P_\Delta(\bar{A}) = 1 - P_\Delta(A) = \frac{25}{28}$.
$P_{\bar{\Delta}}(A) = P(N) = \frac{19}{21}$. Et par conséquent $P_{\bar{\Delta}}(\bar{A}) = \frac{2}{21}$

## ■ EXERCICE 39

**1°)** Construction de l'arbre pondéré associé à la situation :
**(a)** Traduisons les données de la situation proposée en langage de probabilité :
$P(F) = 0{,}92$ ; $P_F(S) = 0{,}95$ ; $P(\bar{F} \cap \bar{S}) = 0{,}2$

**(b)** Démontrons que $P_{\bar{F}}(\bar{S}) = 0{,}25$ :
$$\boldsymbol{P_{\bar{F}}(\bar{S}) = \frac{P(\bar{F}\cap\bar{S})}{P(\bar{F})} = \frac{0{,}2}{0{,}08} = 0{,}25}$$

**(c)** Arbre pondéré :




**2°) Calcul de probabilité :**

**(a)** Démontrons que P(S) = 0,934 :
On sait que les événements F et $\bar{F}$ forment une partition de l'univers Ω .
On peut donc écrire, d'après la fameuse formule des probabilités totales, :
$\boldsymbol{P(S) = P(F \cap S) + P(\bar{F} \cap S) = P(F) \times P_F(S) + P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(S)}$ **= 0,92 × 0,95 + 0,08 × 0,75 = 0,934**

**(b)** Il est immédiat de constater qu'il s'agit ici de trouver la probabilité de l'événement F sachant que l'événement $S$ est réalisé :
Si vous avez lu le chapitre sur les probabilités conditionnelles, vous devez avoir du reflexe.
$$\boldsymbol{P_S(F) = \frac{P(F\cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}92\times 0{,}95}{0{,}934} = 0{,}936.}$$
**C'est donc ça la réponse à la question du Monsieur.**

**3°)** Etude du bénéfice B de N'gowaLoto.

**(a)** Déterminons la loi de probabilité du bénéfice B :
Si à ce stade du livre, vous ne savez pas faire ce genre de question alors de deux choses l'une :

- ou vous avez emprunté ce livre (et donc vous ne l'avez jamais entièrement lu)
- ou vous arrêter de fumer définitivement des cigarettes.

Plus sérieusement, N'gowaLoto pourrait réaliser les bénéfices suivants sur chaque jouet fabriqué : 6500F (l'objet satisfait au deux contrôle) ; 0F (l'objet est mis au rebut) ; 3250F(les autres).
La variable aléatoire B prend donc les valeurs 6500 ; 3250 ; 0.
En plus, l'événement « $B$ =6500 » correspond à l'événement $\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{S}$ tandis que l'événement « B = 3250 » correspond à $\overline{\boldsymbol{F}} \cap \boldsymbol{S}$ de telle sorte que la loi de B est :

| $B = b_i$ | 6500 | 3250 | 0 |
|---|---|---|---|
| $P(B = b_i)$ | 0,874 | 0,06 | 0,066 |

**(b)** L'espérance de B est égale à E(B) = 5882,5 Le bénéfice moyen par jouet est donc 5880 FCFA.

**4°)** Il est immédiat que la variable $X$ suit une loi Binomiale de paramètres 10 et 0,874.
La probabilité cherchée est la réunion des événements P(X = 8) ; P(X = 9) et P(X = 10).
(Il ne serait pas malin d'envisager la technique du calcul d'un événement par son événement contraire, si vous avez entièrement lu ce livre vous saurez les raisons de cette mise en garde).
Et chance suprême, les événements concernés sont incompatibles
donc : P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = 0,976
(Ne me demandez surtout pas comment j'ai obtenu ce résultat, vous me décevrez énormément)

### ■ EXERCICE 40

> Si vous avez lu le chapitre sur les probabilités conditionnelles (si ce n'est pas le cas on vous conseille de le faire ou d'arrêter cet exercice qui risque de vous énerver) vous serez vraiment à votre aise. (Ah ben oui encore .....Lui !)

**1°)**
**(a)** Il est claire que $V_2$ est l'événement « le deuxième sondage est positif »
tandis que $V_3$ est l'événement « le troisième sondage est positif »
L'événement A correspond donc à l'intersection de $V_2$ et $V_3$ .
Or $V_2$ et $V_3$ sont liés.
D'où $p(V_2 \cap V_3) = p(V_2) \times P_{V_2}(V_3)$
De plus, par hypothèse le premier sondage est positif.
Il s'ensuit alors que $V_2$ est positif avec la probabilité $p(V_2) = 0{,}6$ et $p_{V_2}(V_3) = 0{,}6$.
Par conséquent $p(A) = p(V_2 \cap V_3) = 0{,}36$.

**(b)** On sait déjà que le premier sondage est positif donc $p(V_2) = 0{,}6$ de telle sorte que $p(\bar{V}_2) = 0{,}4$ et d'après l'énoncé on a $P_{\bar{V}_2}(V_3) = 0{,}9$.
On obtient ainsi $p(B) = p(\bar{V}_2 \cap \bar{V}_3) = 0{,}36$.

**2°)** $\boldsymbol{p_3} = p(V_3) = p(V_2 \cap V_3) + p(\bar{V}_2 \cap V_3) = p(V_2) \times P_{V_2}(V_3) + p(\bar{V}_2) \times P_{\bar{V}_2}(V_3)$
(encore une affaire de formule des probabilités totales, revoyez le cours pour les conditions d'utilisation de cette formule)
Or $p(\bar{V}_2) \times P_{\bar{V}_2}(V_3) = 0{,}4 \times (1 - 0{,}9) = 0{,}04$
d' où $\boldsymbol{p_3 = 0{,}4}$

Nous nous excusons d'insister ainsi lourdement sur la formule des probabilités totales. Mais on entend tellement d'inepties (je viens de découvrir le mot, permettez-moi son usage) sur cette formule qu'il nous semblait utile d'enfoncer le clou.

## ■ EXERCICE 42

Voici un exercice qui nous permettra d'insister encore sur chapitre 5 de ce livre.

**1°)** L'épreuve qui consiste à traverser la clairière est une épreuve de Bernoulli.
De plus, les traversées sont indépendantes les unes des autres avec les mêmes probabilités de finir tragiquement. On est donc en face d'un schéma de Bernoulli de telle sorte que la variable X qui indique le nombre de victimes parmi ces malheureux crocodiles suit une loi Binomiale de paramtres 32 et $\frac{1}{3}$ .
La probabilité que 22 crocodiles se baignent dans le fleuve vaut donc :
P(X = 10) = $C_{32}^{10} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10} (\frac{2}{3})^{22}$ = 0,146

**2°)**
- On vérifie aisément que la probabilité pour un crocodile de sortir indemne de l'aller-retour est $(\frac{2}{3})^2$, et donc que la probabilité d'être écrasé est 1 - $(\frac{2}{3})^2 = \frac{5}{9}$. Comme il y a 32 crocodiles indépendants, $Y$ suit la loi Binomiale de paramtres 32 et $\frac{5}{9}$. Donc la probabilité que 7 crocodiles retourne sains et saufs le soir à Bélémoin est égale à P(Y = 25) = 0,0048 .

- E(Y) = 32 × $\frac{5}{9}$ ≈ 17,8

- 0n peut espérer que en moyenne 17,8 crocodiles survivent aux éléphants.

## ■ EXERCICE 43

**PARTIE A : Un seul robot.**

**1°)** C'est pas ce genre d'exercercice qui va nous boulverser. (On commence en douceur)

Soit p la probabilité que le robot passe par le sommet I.
On a p(S) + p(I) + p(X) = 2p + p + 2p = 1
donc la probabilité que le robot passe par le sommet est $\frac{1}{5}$

**2°)** Appelons S l'événement «le robot passe par le sommet S » X l'événement « le robot passe par le sommet X » et I l'événement « le robot passe par le sommet I ».
Donc l'événement E correspond à S ∩ I ∩ X.
Or les événements S ; I et X ne sont pas liés puisque les étapes sont indépendantes les unes des autres
par conséquent p(E) = p(S) × p(I) × p(X) = $\frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{125}$

**3°)** Ceux qui ont lu le chapitre sur les dénombrements comprendrons immédiatement qu'il n'y a rien de mystérieux ici.
En effet, on a trois sommets. Notre robot doit passer par ces trois sommets dans un ordre quelconque. Il s'agit alors pour lui d'effectuer un choix ordonné de chacun de ces sommets.
La situation s'apparente alors à un tirage successif et sans remise de trois sommets dans un ensemble qui contient les trois sommets. (C'est bien une affaire de permutation d'où l'inévitable factoriel).
Il y a donc 3 ! = 6 trajets passant par les sommets S, I et X. Comme j'ai un peu de place, je

vais même vous les citer : XSI ; XIS ; SIX ; SXI ; ISX ; IXS.
Pour chacun de ces chemins on a déjà montré que, la probabilité de l'emprunte est $\frac{4}{125}$.
Il suffit alors de calculer la réunion des six événements correspondant aux six trajets pour en déduire la probabilité du fameux événement F.
En plus (c'est notre jour...) ces événements sont deux à deux disjoints de telle sorte que la probabilité de la réunion est la somme des probabilités associés à chacun des six événements.
Finalement **p(F) = 6 ×** $\mathbf{\frac{4}{125}}$ **=** $\mathbf{\frac{24}{125}}$ (Nous nous excusons d'enfoncer encore le clou).

**PARTIE B : Plusieurs Robots.**

Soit Y la variable aléatoire qui indique le nombre de robots passant successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre.

| |
|---|
| Le déplacement de chaque robot est une épreuve de Bernoulli**.**<br>En effet, de deux choses l'une :<br>- Ou le robot passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre.<br>- Ou le robot ne passe pas successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre.<br>En plus, on a plusieurs robots dont les déplacements sont identiques et indépendants les uns des autres. On est donc en face d'un schéma de Bernoulli. |

La variable $Y$ suit donc une loi Binomiale de paramètres $n$ et p = $\frac{4}{125}$.
Il s'agit ici de calculer la probabilité de l'événement $(Y \geq 1)$.
D'après le chapitre 6, le contraire de cet événement est $(Y = 0)$.
On a donc p (Y ≥ 1) = 1 – p (Y = 0) = $1 - C_n^0 \times \left(\frac{4}{125}\right)^0 \times (\frac{121}{125})^n = 1 - (\frac{121}{125})^n$..
Le nombre de robots cherché est donc tel que : 1 - $(\frac{121}{125})^n$ ≥ 0,99.
Il serait curieux, voir inquiétant, de la part de gens aussi brillants que vous, de ne pas réussir à prouver que le nombre minimal de robots cherché est 142.

## ■ EXERCICE 44

On a déjà croisé ce genre d'exercice quelque part dans ce livre. Nous n'insisterons donc pas sur le détail des réponses de peur de trop nous répéter et de perdre, ensuite, votre sympathie (qui nous va si bien...).

**1°)** Soit X le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1

**(a)** X suit évidemment une loi de Bernoulli de paramètres n = 50 et p = $\frac{1}{4}$. (De toute façon c'est la seul loi de probabilité au programme).

**(b)** E(X) = n × p = 50 × $\frac{1}{4}$ = 12,5 (tulipes jaunes en moyenne).

**(c)** $p(X = n) = C_{50}^n \times (\frac{1}{4})^n \times (\frac{3}{4})^{50-n} = \frac{50!}{n! \times (50-n)!} \times \frac{3^{50-n}}{4^{50}}$

**(d)** Il suffit de remplacer $n$ par 15 dans l'égalité précédente. On obtient p(X = 15) = 0,089.

**2°)** Soit Y le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 2
Naturellement Y suit une loi Binomiale de paramètres n = 50 et = $\frac{1}{2}$ .

**(a)** La probabilité d'obtenir n tulipes jaunes est donc égale à :
$p_B(J_n) = C_{50}^n \times (\frac{1}{2})^n \times (\frac{1}{2})^{50-n}. = C_{50}^n \times (\frac{1}{2})^{50} = C_{50}^n \times 2^{-n}$
**(b)** A et B forment une partition de l'univers Ω.
Donc d'après la formule des probabilités totales on a $p(J_n) = p(B) \times p_B(J_n) + p(A) \times p_A(J_n)$.
Or d'après 1.a) $p_A(J_n)p(X = n) = C_{50}^n \times \frac{3^{50-n}}{4^{50}}$
En plus, $p(B) = p(A) = \frac{1}{2}$ on a autant de chance choisir le lot 1 que le lot 2. .
Par conséquent $p(J_n) = \frac{1}{2} \times C_{50}^n \times \frac{3^{50-n}}{4^{50}} + \frac{1}{2} \times C_{50}^n \times (\frac{1}{2})^{50} = \frac{1}{2} \times C_{50}^n (\frac{3^{50-n}}{4^{50}} + (\frac{1}{2})^{50})$.

**(c)** $p_{J_n}(A) = p_n = \frac{p(A \cap J_n)}{p(J_n)} = \frac{p(A) \times p_A(J_n).}{p(J_n)} = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n}+2^{50}}$

**(d)** $p_n \geq 0{,}99$ équivaut à $\frac{3^{50-n}}{3^{50-n}+2^{50}} \geq 0{,}99$ . Il faut alors que $n < 17$.

## ■ EXERCICE 45

**1°)** Ce n'est pas ce genre d'exercice qui nous fera reculer. Vous et moi sommes en terrain connu.

**(a)** C'est une affaire de p-liste (je parie même que vous l'avez deviné avant....moi).
En effet, à chaque choix de chacun des quatre chiffres du code on a deux possibilités : 0 ou 1. La situation s'apparente alors à un tirage successif avec remise de 4 chiffres dans un ensemble qui contient 2 chiffres. Il s'agit donc de former des 4-listes.
On obtient donc $2^4 = 16$ codes distincts.

**(b)** Le choix d'un chiffre du code est une épreuve de Bernoulli puisque de deux choses l'une :
- Ou le choix est porté sur le 1.
- Ou le choix n'est pas porté sur le 1.
En plus, on effectue 4 choix identiques et indépendants les uns des autres.
On est donc en présence d'un flagrant schéma de Bernoulli.
Aussi Si on suppose qu'on a autant de chances de choisir le 1 que le 0 lors du choix du chiffre alors la variable X suit une loi Binomiale de paramètres 4 et $\frac{1}{2}$.
L'espérance du nombre X de 1 dans le code est donc égale à $E(X) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$.

**2°)** $P(E_n) = 32 \times 10^{-3}$
**(a)** Vous conviendrez avec moi que $P(E_4) = 1 - P(\bar{E}_4)$ (jusque là tout va bien).
Donc $P(E_4) = 1 - \big(P(E_0) + P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)\big) = 1 - 4 \times 32 \times 10^{-3} \approx 0{,}872$.

**(b)** $E_0$ s'est produit. Dans ces conditions la machine n'a marqué que des 0. L'appareil a donc transmi la sequence 0000.
Pourtant Cette sequence correspond seulement à une des seize sequences (codes) distincts que l'appareil peut transmettre. Nos lecteurs devinent alors sans aucune difficulté que $P_{E_0}(C) = \frac{1}{16}$.
De plus, d'après la formule des probabilités conditionnelles on a $P_{E_0}(C) = \frac{P(E_0 \cap C)}{P(E_0)}$.
Donc $P(E_0 \cap C) = P_{E_0}(C) \times P(E_0) = \frac{1}{16} \times 0{,}032 = 0{,}002$.

**(c)** Pour cette questions, nous pousserons notre infinie bonté jusqu'à fournir même un tableau dans l'espoir de conquerir à nouveau votre noble sympathie(qui nous a conduit jusqu'ici....)

| n | Sequences correctes | $P_{E_n}$(C) | P($E_n$∩C) |
|---|---|---|---|
| **0** | 0000 | $\frac{1}{16}$ | 0,002 |
| **1** | 0000, 1000 | $\frac{2}{16}$ | 0,004 |
| **2** | 0000, 1000, 0100, 1100 | $\frac{4}{16}$ | 0,008 |
| **3** | 0000, 1000, 0100, 1100, 0010, 0110, 1010, 1110 | $\frac{8}{16}$ | 0,0016 |
| **4** | 0000, …., 1111 | $\frac{16}{16}$ | 0,872 |

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}) = \sum_{n=0}^{4} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{E_n} \cap \boldsymbol{C})$ =0,002 + 0,004 + 0,008 + 0,016 + 0,872 = 0,902.

(d) Pas de panique !! Il s'agit simplement de calculer $P_C(E_0)$ (Ce que vous savez faire Maintenant). $P_C(E_0) = \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E_2} \cap \boldsymbol{C})}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{C})} = \frac{0{,}008}{0{,}902} \approx 0{,}0089$.

## ■ EXERCICE 46

Appelons :

O l'événement « le taxi rencontre un feu Orange **»**

R l'événement « le taxi rencontre un feu Rouge **»**

V l'événement « le taxi rencontre un feu Vert **»**

On a donc : **P(V)=$\frac{1}{2}$ ; P(O)=$\frac{1}{4}$**

Par ailleurs, les événements O ; V et R forment une partition de l'univers donc P(V) + P(O) + P(R) = 1

ce qui entraîne P(R) = 1 - P(O) - P(V) c'est-à-dire **P(R)= $\frac{1}{4}$**

Enfin, si le taxi roule à une vitesse constante sans aucun arrêt sur le trajet alors il fera le trajet en $\frac{6\times 60}{36}$ = 10 min( c'est tout de même simple pour un brillant physicien comme vous)

1°)

Il s'agit ici de calculer la probabilité que le taxi parcourt le trajet en 11 min.

Si taxi parcourt le trajet en 11 min :

c'est soit qu'il a rencontré deux feux orange (événement $O \cap O$)

Soit le premier feu était au vert et le second au rouge (événement $V \cap R$)

soit le premier était au rouge et le second au vert (événement $R \cap V$)

**Mais pas les trois à la fois**.

La probabilité cherchée est donc celle de la réunion de ces trois événements.

Ainsi P(T=11)=P($(O\cap O)\cup(V\cap R)\cup(R\cap V)$) = $P(O\cap O)+P(V\cap R)+P(R\cap V)$ les trois événements étant incompatibles.

De plus, les feux sont indépendants donc :

$P(O\cap O)=P(O)\times P(O)$

$P(V\cap R)=P(V)\times P(R)$

$P(R\cap V)=P(R)\times P(V)$

Par conséquent **P(T=11)=**$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$

**(b)**

Il est clair que la variable aléatoire T peut prendre les valeurs : 10 ; 10,5 ; 11 ; 11,5 12.

L'événement X=10 correspond à l'éventualité « le taxi ne s'arrête pas du tout sur le trajet, tous les feux étaient au vert ».

Ainsi P(X=10)=P ($V\cap V$)=P(V)×P(V)=$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

L'événement X=10,5 correspond aux éventualités :

« le premier feu était à l'orange et le second au vert »

« le premier feu était au vert et le second à l'orange »

Donc P(X=10,5)=P ($(O\cap V)\cup(V\cap O)$) =P(O) × P(V) + P(V) × P(O) = $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

L'événement X=10,5 correspond aux éventualité « le premier feu était à l'orange et le second au vert ou le premier feu était au vert et le second à l'orange »

L'événement X=11,5 correspond aux éventualités :

« le premier feu est à l'orange et le second au rouge »

« le premier feu est au rouge et le second à l'orange »

Donc P(X=11,5)=P ($(O\cap R)\cup(R\cap V)$) =P(O) × P(R) + P(R) × P(O) = $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

L'événement X=12 correspond a l'éventualité : « les deux feux étaient au rouge »

On a donc P(X=12)=P($R\cap R$)=P(R)×P(R)= = $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

La loi de probabilité de la variable X est donc fournie par le tableau suivant :

| **X=$x_i$** | **10** | **10,5** | **11** | **11,5** | **12** |
|---|---|---|---|---|---|
| **P(X=$x_i$)** | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{5}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |

**2°)** E(X)= 10,75 Le taxi pourrait parcourir en moyenne le trajet en 10 min 45 s.

**3°) (a)**

La probabilité cherchée est celle de l'événement $X>11$.

Donc la probabilité que le client arrive en retard au dîner est égale à :

**P($X>11$) = P(X=11,5) + P(X=12) = $\frac{3}{16}$**

**(b)**

La probabilité cherchée est celle de l'événement X < 11

Donc la probabilité que le client arrive en avance au dîner est égale à :

**P($X < 11$) = P(X=10) + P(X=10,5) = $\frac{1}{2}$**

## ■ EXERCICE 47

**1°)**

**(a)** On doit repartir les 4 places inoccupées sur les 32 places.
La situation s'apparente alors à un tirage simultané de 4 places dans un ensemble qui en contient 32. On obtient donc $C_{32}^{4} = 35960$ répartitions possibles.
C'est absolument transparent vu que vous avez lu le chapitre 1.

**(b)** $\boldsymbol{p(A) = \frac{C_{24}^{20}}{C_{32}^{28}} \approx 0,3}$ $\boldsymbol{p(B)} = \frac{C_{16}^{14} \times C_{16}^{14}}{C_{32}^{28}} \approx 0,4$ **(enfin naturel, c'est peut être exagéré....)**

**2°)** Honte à vous (!!) si vous n'avez pas vu que la variable $X$ prend les valeurs 0 ; 1 ; 2 ; 3 ou 4 puisqu'il y a au plus quatre places inoccupées au rang R4.

**(a)** La loi de X est :

| **X = $x_i$** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|---|
| **P(X = $x_i$)** | **0,296** | **0,450** | **0,215** | **0,03** | **0,0020** |

**(b)** L'espérance de X vaut E(X) ≈ 1

## ■ EXERCICE 48

**1°)** On a la chance de tomber sur une question trop facile. On a immédiatement $E(X) = 1,3$

**2°)**

**(a)** Les événements $E_1$ et $C$ sont liés c'est à dire dépendant (ne nous dites pas que vous n'y avez pas pensé, vous ne serez pas crédible)
Donc $P(E_1 \cap C) = P(C_1) \times P(E/C_1)= 0,5 \times 0,7 = 0,35$.

**(b)** Appelons G l'événement « Le client achète du Gazole »
$P(E/C_2)= C_2^1 \times P(E) \times P(G) = 2 \times 0,7 \times 0,3 = 0,42$
$P(E \cap C_2)= P(C_2)\times P(E/C_2)= 0,4 \times 0,42 = 0,168$

**(c)** En utilisant la formule des probabilités totales on obtient :
$P(E) = P(E_1 \cap C) + P(E \cap C_2)= 0,518$

**3°)**
Y peut prendre les valeurs 0 ; 1 ou 2.
La loi de probabilité de Y est fournie par le tableau suivant :

| **Y = $y_i$** | **0** | **1** | **2** |
|---|---|---|---|
| **P(Y=$y_i$)** | **0,286** | **0,518** | **0,196** |

## ■ EXERCICE 49

**1°)** Si vous avez consenti à lire le point sur les combinaisons du chapitre 1 (ce qui ne vous fera aucun mal) vous êtes évidemment au courant que nous sommes en terrain connu.

**(a)** La variable X peut prendre les valeurs 0 ; 1 ; 2 ou 3.
L'événement (X = 0) correspond à l'événement « choisir trois cravates unies et zéro cravates à motif ».
on a $C_3^3$ façons de choisir 3 cravates unies parmi les cravates unies $C_7^0$ façons de zéro cravates à motif parmi les 7 cravates à motif de l'armoire gauche.
Donc card(X = 0) = $C_7^0 \times C_3^3$ .
En plus, Card(Ω) = $C_{10}^3$
D'où P(X = 0) = $\frac{C_7^0 \times C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$
En raisonnant de la même façon, on obtient la loi de probabilité de X :

| **X=x$_i$** | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| **P(X=x$_i$)** | $\frac{1}{120}$ | $\frac{7}{40}$ | $\frac{21}{40}$ | $\frac{7}{24}$ |

**(b)** E(X) = $\frac{21}{10}$

**2°)**
**(a)** Si vous avez consenti à lire la partie du cours sur les partitions, vous êtes naturellement au courant que les événements G et D forment une partition de l'univers Ω.
Ainsi d'après la formule des probabilités totales on a
$P(M) = P(M \cap D) + P(M \cap G) = P(D) \times P_D(M) + P(G)P_G(M)$

> Il choisit le côté de l'armoire de façon équiprobable donc $P(D) = P(G) = \frac{1}{2}$
> $P_G(M) = \frac{7}{10}$ Il s'agit de choisir une cravate à motif parmi les 7 à motifs de l'armoire de gauche qui contient, de fait, 10 cravates
> $P_D(M) = \frac{5}{7}$ Il doit choisir une des 5 cravates à motifs dans l'armoire de droite qui contient 7 cravates.

De ce constat, on obtient que $P(M) = \frac{99}{140} = 0{,}707$.

**(b)** $P_M(G) = \frac{P(M\cap G)}{P(M)} = \frac{P(G)P_G(M)}{P(M)} = \frac{49}{99} = 0{,}495$

**3°)** Encore une affaire de Bernoulli.... !

**(a)** Soit X la variable qui indique le nombre de cravates à motifs prises par Monsieur JoliCravate pendant n jours.
Il est clair que X suit une loi Binomiale de paramètres $n$ et $p = (\frac{99}{140})^n$.
En effet, il est immédiat que l'épreuve qui consiste pour Monsieur JoliCravate de faire le choix de la cravate de la journée est une épreuve de Bernoulli car ayant deux issues puisque de deux choses l'une :
- ou il choisit une cravate à motif
- ou il choisit une cravate unie

En plus, (c'est encore notre jour ...) il répète cette épreuve sur les n jours de manière identique et indépendante d'où le schéma de Bernoulli.

> Nous n'insisterons jamais assez sur le fait que lors du calcul de la probabilité d'un événement contenant la locution « au moins un » il est très recommandé de passer par le calcul de la probabilité de l'événement contraire. Cette démarche vous évitera de vous lancer dans de longs et interminables calculs.

La probabilité cherchée est donc $p_n = P(X = n) = 1 - (\frac{41}{140})^n$ (Vous êtes grands maintenant, vous n'avez pas besoin d'aide de ma part).

## ■ EXERCICE 51

Nous vous félicitons d'avoir osé attaquer un exercice qui a sûrement fait transpirer beaucoup de candidats au test de sélection de la prestigieuse **MIAGE**.

**1°)** Appelons :
$T_1$ l'événement « Konaté loge la bille dans le trou $T_1$ »
$T_2$ l'événement « Konaté loge la bille dans le trou $T_2$ »
$T_3$ l'événement « Konaté loge la bille dans le trou $T_3$ »
Vous avez comme moi, aisément deviné que $\overline{T}_1$ correspond à l'événement « Konaté rate le premier lancer ».
Il s'ensuit alors que la probabilité cherchée est celle de l'événement $\overline{T}_1 \cap T_2 \cap T_3$.
De plus, les événements $\overline{T}_1$ ; $T_2$ et $T_3$ sont indépendants (Ne me dites pas que vous l'avez pas deviné, même mon chat ne vous croirait pas)
De sorte que $P(\overline{T}_1 \cap T_2 \cap T_3) = P(\overline{T}_1) \times P(T_2) \times P(T_3)$ (Revoyez le cours si ce résultat vous surprend).
$P(\overline{T}_1 \cap T_2 \cap T_3) = (1 - P(T_1)) \times P(T_2) \times P(T_3)$ $(P(\overline{T}_1) = 1 - P(T_1))$
$\boldsymbol{P(\overline{T}_1 \cap T_2 \cap T_3)} = (1 - \frac{2}{3}) \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{4}{27}}$

**2°)** Il s'agit ici de calculer la probabilité de la réunion des événements $\boldsymbol{\overline{T}_1 \cap T_2 \cap T_3}$ ; $\boldsymbol{T_1 \cap \overline{T}_2 \cap T_3}$ et $\boldsymbol{T_1 \cap T_2 \cap \overline{T}_3}$.
Dans notre infinie bonté nous vous proposons même une signification de ces différents événements
$\boldsymbol{\overline{T}_1 \cap T_2 \cap T_3}$ Correspond à l'événement « Konaté rate le premier lancer et réussit les deux derniers »
$\boldsymbol{T_1 \cap \overline{T}_2 \cap T_3}$ Correspond à l'événement « Konaté réussit le premier lancer rate le second et réussit le troisième »
$\boldsymbol{T_1 \cap T_2 \cap \overline{T}_3}$ Correspond à l'événement « Konaté réussit les deux premiers lancers et rate le dernier »
Si vous avez consenti à lire la partie du cours sur la réunion d'événements alors vous êtes au courant que la probabilité cherchée est
$\boldsymbol{P((\overline{T}_1 \cap T_2 \cap T_3) \cup (T_1 \cap \overline{T}_2 \cap T_3) \cup (T_1 \cap T_2 \cap \overline{T}_3)) = P(\overline{T}_1 \cap T_2 \cap T_3) + P(T_1 \cap \overline{T}_2 \cap T_3) +}$
$\boldsymbol{P(T_1 \cap T_2 \cap \overline{T}_3) - P((\overline{T}_1 \cap T_2 \cap T_3) \cap (T_1 \cap \overline{T}_2 \cap T_3) \cap (T_1 \cap T_2 \cap \overline{T}_3))}$
De plus, les événements $(\overline{T}_1 \cap T_2 \cap T_3) \cap (T_1 \cap \overline{T}_2 \cap T_3) \cap (T_1 \cap T_2 \cap \overline{T}_3)$ sont incompatibles.
Savez-vous pourquoi ?
Parce qu'ils ne peuvent se réaliser en même temps.
En effet, au cours d'une même partie où Konaté réussit deux lancers :
Soit '' il rate le premier lancer et réussit les deux derniers''
Soit ''il réussit le premier lancer rate le second et réussit le troisième''
Soit ''il réussit les deux premiers lancers et rate le dernier »
Mais il ne peut réaliser à la fois ces trois événements au cours cette même partie.
Ainsi $\boldsymbol{P((\overline{T}_1 \cap T_2 \cap T_3) \cap (T_1 \cap \overline{T}_2 \cap T_3) \cap (T_1 \cap T_2 \cap \overline{T}_3)) = 0}$
Donc
$\boldsymbol{P((\overline{T}_1 \cap T_2 \cap T_3) \cup (T_1 \cap \overline{T}_2 \cap T_3) \cup (T_1 \cap T_2 \cap \overline{T}_3)) = P(\overline{T}_1 \cap T_2 \cap T_3) + P(T_1 \cap \overline{T}_2 \cap T_3) +}$

$\boldsymbol{P(T_1 \cap T_2 \cap \overline{T}_3)}$.

$\boldsymbol{P((\overline{T}_1 \cap T_2 \cap T_3) \cup (T_1 \cap \overline{T}_2 \cap T_3) \cup (T_1 \cap T_2 \cap \overline{T}_3))} = [(1-\frac{2}{3}) \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}] + [\frac{2}{3} \times (1-\frac{2}{3}) \times \frac{2}{3}] + [\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \left(1-\frac{2}{3}\right)]$

$$\boxed{\boldsymbol{P((\overline{T}_1 \cap T_2 \cap T_3) \cup (T_1 \cap \overline{T}_2 \cap T_3) \cup (T_1 \cap T_2 \cap \overline{T}_3)) = \frac{4}{9}}}$$

**La probabilité cherchée est donc $\boldsymbol{\frac{4}{9}}$.**

On aurait pu dans la résolution de cette question faire appel aux mannes de Bernoulli et comme j'ai un peu de place je vais le faire pour des gens bien comme vous (que ne ferai-je pas pour vous contenter).
Appelons Y la variable qui indique le nombre de lancer réussit par Konaté.
Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli.
En effet, de deux choses l'une :
- Soit Konaté réussit le lancer.
- Soit il rate le lancer.
De plus, Konaté répète cette épreuve trois fois de manières identiques et indépendantes.
On est donc en face d'un schéma de Bernoulli si bien que la variable Y suit une loi Binomiale de paramètre 3 et $\frac{2}{3}$

Et la probabilité cherchée vaut : **P (Y=2)=**$\boldsymbol{C_3^2} \times (\frac{2}{3})^{\boldsymbol{2}} \times (\frac{1}{3}) = \boldsymbol{3} \times \boldsymbol{\frac{4}{9}} \times \boldsymbol{\frac{1}{3}} = \boldsymbol{\frac{4}{9}}$

**3°)**

L'ensemble des valeurs prises par X est : **0 ; 2 ; 4 et 6**

**X=0** correspond à l'événement « Konaté ne réussit aucun lancer » (Il perd donc toute ses billes puisqu'à chaque lancer non réussi il perd une bille : **3 - 3 = 0** )

**X=2** correspond à l'événement « Konaté réussit seulement un lancer » (Il reçoit une bille en récompense du lancer réussit et cède deux billes pour les lancers non réussit : **3 + 1 – 2 = 2**)

**X=4** correspond à l'événement « Konaté réussit uniquement deux lancers » (il reçoit deux billes et cède une bille pour le lancer non réussit : **3 + 2 -1 = 4**)

**X=6** correspond à l'événement « Konaté réussit tous les lancers » (Il reçoit trois billes en plus des trois billes déjà en sa possession : **3 + 3 = 6**)

**4°)** Il existe une relation étroite entre la variable aléatoire Y qui indique le nombre de lancer réussit par Konaté et la variable X qui compte le nombre de bille que détient Konaté à l'issue de la partie.

En particulier, l'événement X=6 est engendré par la réussite des trois lancers de telle sorte que P(X=6)=P(Y=3)= $\boldsymbol{C_3^3} \times (\frac{2}{3})^{\boldsymbol{3}} \times (\frac{1}{3})^{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{\frac{8}{27}}$

Ainsi au lieu de se lancer comme en 2) dans le calcul de la probabilité de réunion d'intersection de trois événements (ce qui de mon point de vu est lourd et difficile à manipuler) on se servira de notre aimable variable Y avec son puisant arsenal de Bernoulli pour fournir la loi de notre variable X (Et laissons le soin à ceux qui n'ont pas lu affaires classées de faire ces longs calculs car pour nous le temps est la ressource la plus rare)

De même :

P(X=4)=P(Y=2)= $\boldsymbol{C_3^2} \times (\frac{2}{3})^{\boldsymbol{2}} \times (\frac{1}{3})^{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{\frac{4}{9}}$

P(X=2)=P(Y=1)= $\boldsymbol{C_3^1} \times (\frac{2}{3})^{\boldsymbol{1}} \times (\frac{1}{3})^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{\frac{2}{9}}$

P(X=0)=P(Y=0)= $\boldsymbol{C_3^0} \times (\frac{2}{3})^{\mathbf{0}} \times (\frac{1}{3})^{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{27}}$

Finalement, La loi de la variable X est fournie par le tableau suivant :

| $X=x_i$ | 0 | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{8}{27}$ |

**5°)** E(X )= $0 \times \frac{1}{27} + \mathbf{2}\times \frac{2}{9} + \mathbf{4}\times \frac{4}{9} + \mathbf{6} \times \frac{8}{27}$ **= 4**

## ■ EXERCICE 52

**1°)**

Calculons la probabilité $P_1(n)$ de tirer une boule rouge :

L'expérience consiste à tirer une boule dans une urne qui en contient n+1**.**

On a donc n + 1 choix possibles de telle sorte card(Ω) = n+1 et comme on a $n$ boules rouges dans l'urne alors $P_1(n) = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n+1}}$

**2°**

**(a)** Calculons la probabilité $P_2$ (n) de tirer deux boules rouges :

Le tirage est sans ordre. Il s'agit par conséquent de former des parties à deux éléments.

On a donc card(Ω) = $C_{n+1}^2 = \frac{(n+1)!}{2!\times(n+1-2)!} = \frac{(n+1)!}{2!\times(n-1)!} = \frac{(n+1)\times n\times(n-1)!}{2!\times(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2}$

De plus on a $C_n^2$ façons de choisir 2 boules rouges dans une urne qui en contient n.

Or $C_n^2 = \frac{n!}{2!\times(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!\times(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$

Donc $P_2$ (n) **=** $\frac{C_n^2}{C_{n+1}^2} = \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{2}{n(n+1)} = \frac{n-1}{n+1}$

**(b)** Calculons la probabilité $P'_2$ (n) de tirer une boule de chaque couleur :

On voit aisément que tirer une boule de chaque couleur c'est tirer une boule rouge et une boule blanche.

On a un seul choix possible pour la boule blanche et n choix possible pour la boule rouge.

On obtient donc $P'_2(n) = \frac{1\times n}{C_{n+1}^2} = n \times \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n+1}$

**(c)** Calcul de limite au voisinage de l'infini :

$\lim_{n\to+\infty} P_2(n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$

$$\lim_{n\to+\infty} P'_2(n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

Et les limites en -∞ ? Moi aussi j'y ai songé, mais hélas n ≥ 2, on ne peut pas avoir un nombre négatif de boule dans l'urne. C'est évident tout de même !

- **Interprétation des limites** :

$\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{P_2(n)} = 1$

Lorsqu'on a un nombre suffisamment élevé de boules rouges dans l'urne, la probabilité d'en tirer 2 est égale à 1 : C'est un événement certains. On a toutes les chances de tirer deux boules rouges dans une urne qui contient presque uniquement des boules rouges la seule boule blanche étant presque négligeable.

$\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{P'_2(n)} = 0.$

Ce résultat était prévisible. En effet, face à un grand nombre de boules rouges dans l'urne, on n'a presque pas de chance de tirer la seule boule blanche.

- **Etude de la suite $P_1$ (n)** :

On a $P_1(n+1) - P_1(n) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$

(voir **Suite : 60 affaires classées**)

Donc la suite $P_1(n)$ est croissante. Ce résultat signifie que les chances de tirer une boule rouge dans le tirage au hasard d'une boule de l'urne s'augmentent lorsque le nombre de boule rouge devient important. C'est tout de même prévisible.

**3°)**

Comparons $P_1(n)$et $P_2(n)$

On a $P_1(n) - P_2(n) = \frac{1}{n+1} > 0$

Donc $P_1(n) > P_2(n)$ , On a donc plus de chance de tirer une boule rouge dans le tirage d'une boule au hasard que de tirer deux boules rouges dans le tirage au hasard de deux boules. Ce résultat était tout de même prévisible.

Déterminons les valeurs de **n** vérifiant $P_1(n) - P_2(n) = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{8}$.

On obtient aisément que **n** est l'ensemble des entiers qui appartiennent à l'intervalle$]7; +\infty[$ .

Si vous trouvez que ce qu'on vous a raconté jusque-là n'est pas trop clair, c'est soit qu'il est trop tard et que vous feriez mieux d'aller dormir soit que vous voulez des explications un peu plus concret. Ne reculant devant aucun sacrifice, nous vous proposons donc une série d'explication encore.

## ■ EXERCICE 53

**1°) (a)**

Il est immédiat que **P(D)=** $\mathbf{\frac{4}{100}}$ **=0,04** (puisque 4 personnes sur 100 sont atteintes de surdité à droite).

De plus, les événements D et G sont équiprobables Donc **P(D)= P(G)=0,04.**

**(b)**

S est la réunion des événements D et G

donc **P(S)=P (D∪G)= P(D) + P(G) - P (D∩G)**

Comme les événements D et G sont indépendants alors **P (D∩G) = P(D)×P(G)** par conséquent : **P(S)= P(D) + P(G) - P(D)×P(G) = 0,04 + 0,04 - 0,04 × 0,04 = 0,0784**

$$\boxed{P(S)= 0,0784}$$

**2°)** Pour un individu pris au hasard

soit **aucune oreille** n'est atteinte de surdité

soit **une oreille** est atteinte de surdité

soit **les deux** oreilles sont atteintes

La variable aléatoire X peut donc prendre les valeurs : 0 ; 1 ; 2

**(a)**

Déterminer la loi de X consistera donc à déterminer la probabilité de chacun des événement X=0 ; X=1 et X=2. (N'invoquez pas Bernoulli ici, il ne vous sera d'aucun secours).

L'événement X=0 est le contraire de l'événement « au moins une oreille est atteinte ». Donc **P(X = 0) = P ($\bar{S}$) = 1 - P(S) = 1 - 0,784 = 0,9216**

**X=2** est l'événement les deux oreilles sont atteintes. Donc il est réalisé par $\boldsymbol{D \cap G}$

Ainsi P(X=2) = P(D∩G) = P(D)×P(G) = 0,0016

Par ailleurs, P(X=1) = P(S) - P(X=2) =0,0768 (Vous êtes grands maintenant, vous êtes suffisamment outillé pour comprendre de tels résultats).

La loi de probabilité de la variable X est donc :

| $X=x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | 0,9216 | 0,0768 | 0,0016 |

**(b**) E(X) = 0,08   V(x) = 0,064.

## ■ EXERCICE 54

### A – PREMIER JEU

Les deux prix sont identiques. L'ordre dans lequel sont choisis les vainqueurs n'a donc aucune importance. Il ne s'agit pas ici de choix ordonnés.
**Mais à quoi sert ce constat ?**
**Ce constat a le mérite de nous renseigner sur la technique de dénombrement à utiliser pour former l'univers des vainqueurs possibles**.
En effet, le choix des vainqueurs n'étant pas ordonné, il s'apparente à un tirage simultané de deux concurrents parmi les dix en compétition. Ce sont donc des parties à 2 concurrents de l'ensemble des 10 concurrents qu'il s'agit de former.
Ainsi on a **card(Ω) =** $\boldsymbol{C_{10}^{2}}$ **= 45**

**1°)**

Soit F l'événement « les deux vainqueurs sont des femmes »
On doit calculer les chances de choisir 2 filles parmi les 10 candidats en compétition avec la contrainte qu'on a 6 six filles parmi les concurrents.
On a donc **card(F)=**$\boldsymbol{C_{6}^{2}}$ **= 15**
par conséquent **P(F)**$= \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{45}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

**2°)**

Les deux vainqueurs sont de même sexe signifie qu'ils sont :
soit de sexe masculin
soit de sexe féminin.
Appelons :
H l'événement« les deux vainqueurs sont des hommes »
M l'événement «les deux vainqueurs sont de même sexe »
La probabilité cherchée est donc celle de l'événement M qui correspond à l'éventualité F∪H.
Ainsi P(M) = P (F∪H) = P(F) + P(H) - P (F∩H).

Mais les événements F et H sont incompatibles : ils ne peuvent se réaliser en même temps.
En effet, on ne peut pas avoir à la fois deux vainqueurs de sexe féminin et de sexe masculin.
Si une telle situation se produisait, on aurait 4 vainqueurs alors même que le jeu ne récompense que 2 candidats (ne créer pas encore des charges à OMO).
Il reste alors à calculer P(H) pour en découdre avec cette fâcheuse question.

On a $C_4^2 = 6$ façon de choisir 2 vainqueurs de sexe masculin.

Donc P(H) = $\frac{6}{45} = \frac{2}{15}$

Par conséquent : P(M) =$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{15}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{15}}$

La probabilité de choisir deux vainqueurs de même sexe est donc égale à $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{15}}$

**B – Deuxième jeu.**

**1°) (a)**

$\mathbf{H_1}$ étant l'événement « le premier vainqueur est un homme », on a évidemment P($H_1$) =$\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{10}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$

En effet, on a card($H_1$) = $A_4^1 = 4$ et card$(\Omega) = A_{10}^1 = 10$ et

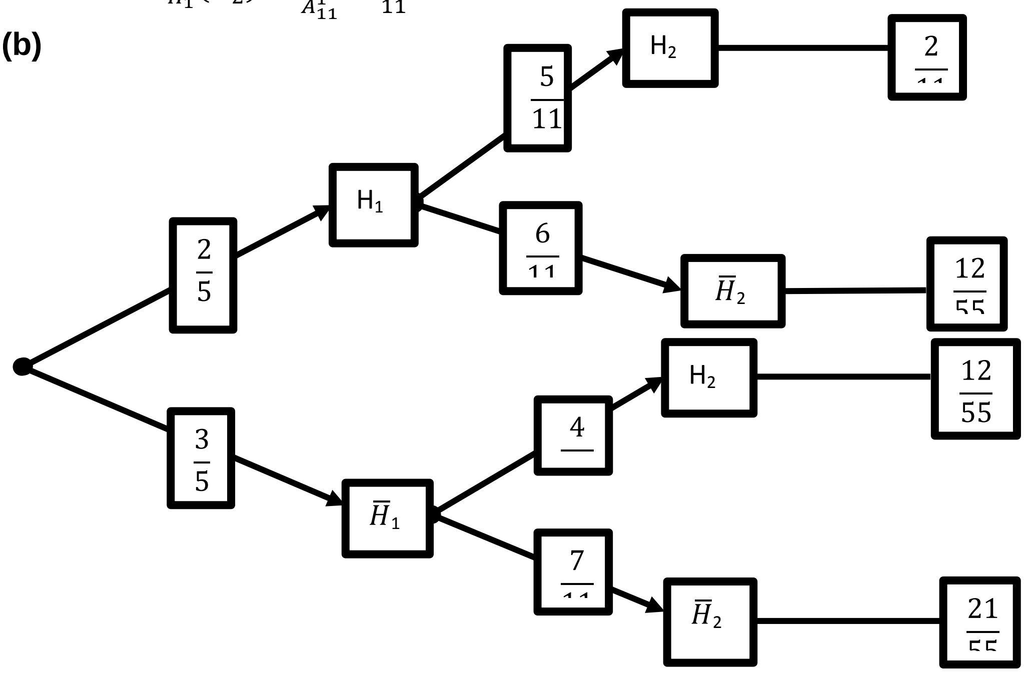
de plus, P($H_1$)= $\frac{card(H_1)}{\text{card}(\Omega)}$ .

> Je ne comprends plus rien ! Les combinaisons que je comprenais si bien ont disparues !
> Vous n'avez aucune raison de paniquer.
> Les combinaisons conviennent uniquement à des choix non ordonnées tandis que les arrangements sont recommandés en situation de choix ordonnés.
> Ici les choix des vainqueurs sont clairement ordonnés puisque les prix ne sont pas identiques. La situation s'apparente donc à tirage successif et sans remise (puisque le premier vainqueur descend du podium).

La deuxième probabilité figurant sur l'arbre représente la probabilité de l'événement « $H_2$ sachant que $H_1$ est réalisé ». Il s'agit alors de calculer la probabilité que le deuxième vainqueur soit un homme sachant que le premier est de ce noble sexe. Pourtant lorsque le premier vainqueur est un homme alors ce dernier descend et, grâce à lui, deux hommes se joignent aux concurrents pour conquérir le second prix. Sous cette hypothèse, on aura 11 concurrents sur le podium parmi lesquels se trouvent désormais 5 hommes.

Ainsi on a $P_{H_1}(H_2) = \frac{A_5^1}{A_{11}^1} = \frac{5}{11}$. D'où le résultat fourni sur l'arbre.

**(b)**



**2°) (a)** Il s'agit ici de calculer P $(H_1 \cap H_2)$.
Les événements $H_1$ et $H_2$ sont liés puisque le résultat de $H_2$ est influencé par la réalisation $H_1$.

> En effet, lorsque le premier prix est décroché par un homme alors les chances que le second revienne à un homme s'en trouvent modifier puisqu'on passe de 4 hommes à 5 hommes.
> On ne peut donc pas utiliser la formule
> **P** $(\boldsymbol{H_1} \cap \boldsymbol{H_2}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{H_1}) \times \boldsymbol{P}(\boldsymbol{H_1})$ (que nous aimons tant)

**Donc** P $(H_1 \cap H_2) = P(H_1) \times P_{H_1}(H_2) = \frac{2}{5} \times \frac{5}{11} = \frac{2}{11}$

**(b)**
Le deuxième prix revient à un homme, c'est soit que le premier a été destiné à une femme ou à un homme. La probabilité cherchée est donc celle de la réunion des événements $F_1 \cap H_2$ et $H_1 \cap H_2$ où $F_1$ l'événement est « le premier prix revient à une femme ».
D'ailleurs, les événements $H_1 \cap H_2$ et $F_1 \cap H_2$ sont incompatibles
donc P$((F_1 \cap H_2) \cup (H_1 \cap H_2)) = P(F_1 \cap H_2) + P(H_1 \cap H_2)$

> De plus, les événements $F_1$ et $H_2$ sont liés car quand une femme gagne le premier prix, le nombre de personne de sexe féminin sur le podium pour la conquête du second prix se trouve augmenté de 1 (on passe de 6 à 7 femmes : la gagnante descend et, grâce à elle, deux montent sur le podium) améliorant ainsi les chances des filles de rentrer en possession du second prix et réduisant à l'opposé les chances des hommes de le gagner.
> La réalisation de $F_1$ influence donc le résultat de $H_2$.
> On doit donc éviter la formule, $P(F_1 \cap H_2) = P(F_1) \times P(H_2)$ et utiliser plutôt $P(F_1 \cap H_2) = P(F_1) \times P_{F_1}(H_2) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{11} = \frac{12}{55}$

Ainsi
**P** $((\boldsymbol{F_1} \cap \boldsymbol{H_2}) \cup (\boldsymbol{H_1} \cap \boldsymbol{H_2})) = \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{11}} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{11}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$
Par conséquent la probabilité de l'événement H2 est égale à $\frac{2}{5}$**.**

**3°)**
Il s'agit ici de calculer la probabilité de l'événement « $H_1$ sachant que $H_2$ est réalisé »
La formule des probabilités conditionnelles permet d'écrire

$$\boldsymbol{P_{H_2}(H_1)} = \frac{\boldsymbol{P(H_1 \cap H_2)}}{\boldsymbol{P(H_2)}} = \frac{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{11}}}{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{11}}$$

## ■ EXERCICE 55

Voici un exercice vraiment facile (bien sûr pour nos lecteurs... mais pas pour ceux qui n'ont pas lu affaires classées.)

**1°)**
On sait que 70% des filles de Golikro sont analphabètes et 40% des garçons le sont de même.
Donc $\boldsymbol{P_F(A)} = \frac{\mathbf{70}}{\mathbf{100}} = \mathbf{0,7}$ et $\boldsymbol{P_G(A)} = \frac{\mathbf{40}}{\mathbf{100}} = \mathbf{0,4}$

**2°)**

L’événement **«** être fille **ET** être analphabète **»** correspond à l’intersection des événements F et A. Il s’agit donc de calculer P (A∩F).
Les événements A et F sont liés ou dépendants donc nos lecteurs (que nous saluons encore au passage) sont déjà informés qu’on ne fera pas usage de la formule
P (A∩F)=P(A)×P(F) (Cette formule n’ayant de mérite que pour des événements indépendants)

On se précipite alors sur la seule formule de P (A∩F) qui nous reste (par chance).
En effet, $\boldsymbol{P_F(A)} = \frac{\mathbf{P\ (A\cap F)}}{\boldsymbol{P(F)}}$
Donc **P (A∩F)=** $\boldsymbol{P_F(A) \times P(F) = 0,7 \times 0,6 = 0,42}$
De même, **P (A∩G)=** $\boldsymbol{P_G(A) \times P(G) = 0,4 \times 0,4 = 0,16}$
Nous déduisons alors que **P(A)=** $\mathbf{P\ (A \cap F) + P\ (A \cap G) = 0,58}$ **(**Ne faites cette mine).
**3°)**
Il s’agit ici de calculer la probabilité de l’événement « F sachant A »
Cette probabilité est fournie par la formule $\boldsymbol{P_A(F)} = \frac{\mathbf{P\ (A\cap F)}}{\boldsymbol{P(A)}} = \frac{\mathbf{0,42}}{\mathbf{0,58}} = \mathbf{0,724.}$
Naturellement, $\boldsymbol{P_A(G)} = \frac{\mathbf{P\ (A\cap G)}}{\boldsymbol{P(A)}} = \frac{\mathbf{0,16}}{\mathbf{0,58}} = \mathbf{0,276}$ (C’est la probabilité qu’un analphabète soit un garçon).
**4°) (a)**
Invoquons encore les mannes de Bernoulli (Que deviendrait affaires classées sans Bernoulli...)
Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre d’enfants analphabètes de Monsieur Lokossoue.
Il est clair que la variable aléatoire X suit une loi Binomiale de paramètres 20 et P(A)=0,58.
En effet, de deux choses l’une.
Chacun des enfants de Lokosssoue est :
soit un analphabète
soit alphabète.
Le choix de l’un de ses enfants est donc une épreuve de Bernoulli de telle sorte que chacun des 20 choix indépendants et identiques décrit un schéma de Bernoulli.
D’où résultat annoncé.
La probabilité cherchée correspond donc à celle l’événement X=0,
Et on a **P(X=0)=** $\boldsymbol{C_{20}^{0} \times (0,58)^{0} \times (1-0,58)^{20} = 2,92 \times 10^{-8}}$
**(b)**
Nous sommes ici en terrain connu.
L’événement « au moins un enfant est analphabète » est le contraire de l’événement « aucun enfant n’est analphabète »
De plus, la probabilité cherchée est celle de l’événement $X \geq 1$ dont le contraire est comme déjà annoncé X=0
Chance suprême on a déjà calculé P(X=0) !
Donc P($X \geq 1$) = 1 - P(X=0) =1 - $\mathbf{2,92 \times 10^{-8}}$ **= 0,99.**
**On n’est presque certains qu’au moins un enfant est analphabète chez Monsieur Lokossoue.**

## ■ EXERCICE 56

**1°)**

L'événement « le candidat échoue à une épreuve quelconque » est le contraire de l'événement « le candidat réussi une épreuve quelconque »

De plus, les chances de notre candidat pour réussir une épreuve s'élève à $\frac{3}{4}$ de façon qu'il échoue à une épreuve quelconque avec une probabilité égale à :

$\mathbf{1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}}$

**2°)**

Soit Y la variable qui indique le nombre d'épreuves réussie par notre candidat à l'issue du test. Comme vous l'avez aisément deviné Y suit une loi Binomiale de paramètres 3 et $\frac{3}{4}$ .

Sous cette hypothèse la probabilité cherchée correspond à celle de l'événement Y=2 et on obtient P(X=2)=$C_3^2 \times (\frac{3}{4})^2 \times \mathbf{\frac{1}{4}} = \mathbf{\frac{27}{64}}$

> Ceux d'entre nous qui aiment les longs calculs et qui préfèrent se lancer sur les voix difficile d'accès ont sans doute emprunté le chemin du calcul de :
> $\mathbf{P}(\overline{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{1}} \cap \boldsymbol{E}_{\mathbf{2}} \cap \boldsymbol{E}_{\mathbf{3}}) + \mathbf{P}(\boldsymbol{E}_{\mathbf{1}} \cap \overline{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{2}} \cap \boldsymbol{E}_{\mathbf{3}}) + \mathbf{P}(\boldsymbol{E}_{\mathbf{1}} \cap \boldsymbol{E}_{\mathbf{2}} \cap \overline{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{3}})$ où $E_i$ est l'événement « le candidat réussit l'épreuve i » .
> On a trouvé les mêmes résultats mais pas sûrement au même prix.

**3°) (a)**

L'événement **X=-3** correspond à l'éventualité « le candidat ne réussit aucune épreuve : il perd donc trois points »**. Il est réalisé lorsque Y=0**

L'événement **X=0** correspond à l'éventualité « le candidat réussit une seule épreuve à l'issue du test : il perd et gagne deux points »**. Il est réalisé lorsque Y=1**

L'événement **X=3** correspond à l'éventualité « le candidat réussit deux épreuve : il perd donc 1 points et gagne 4 points»**. Il est réalisé lorsque Y=2**

L'événement **X=6** correspond à l'éventualité « le candidat réussit les trois épreuves : il gagne donc 6 points »**. Il est réalisé lorsque Y=3**

**(b)**

Il reste à calculer les probabilités associées aux événements X=-3 ; X=0 ; X=3 et X=6 Pour fournir la fameuse loi de la variable X.

OR, On a P(X=-3)=P (Y=0)= $C_3^0 \times (\frac{3}{4})^0 \times (\mathbf{\frac{1}{4}})^3 = \frac{1}{64}$

P(X=0)=P (Y=1)= $C_3^1 \times (\frac{3}{4})^1 \times (\mathbf{\frac{1}{4}})^2 = \frac{9}{64}$

P(X=3)= P(X=2)=$C_3^2 \times (\frac{3}{4})^2 \times \mathbf{\frac{1}{4}} = \mathbf{\frac{27}{64}}$

P(X=6)=P (Y=3)= $C_3^3 \times (\frac{3}{4})^3 \times (\mathbf{\frac{1}{4}})^0 = \frac{27}{64}$

Donc, la loi de probabilité de X est fourni par le tableau suivant :

| $X=x_i$ | -3 | 0 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{9}{64}$ | $\frac{27}{64}$ | $\frac{27}{64}$ |

**(c)** E(X)=3,75 et V(X)=-23,0625

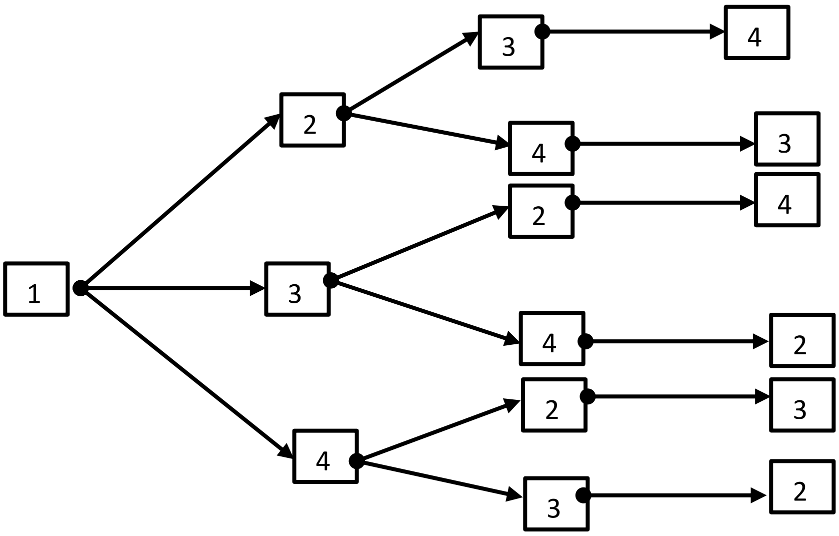
**(d)** L'interprétation de l'espérance mathématique est immédiate.
Le test est à l'avantage du candidat puisqu'il peut espérer gagner en moyenne 3,75 points alors même que le maximum de points espérer est 6.

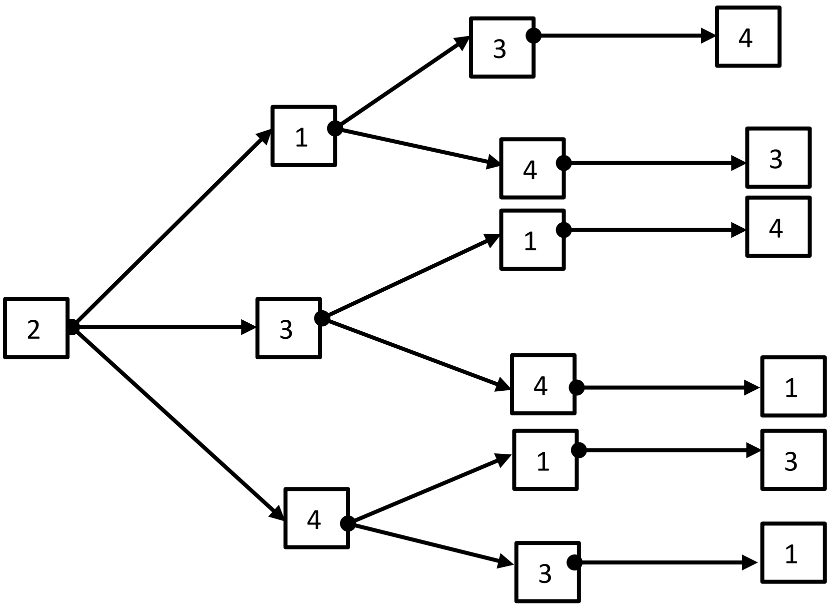
## ■ EXERCICE 57

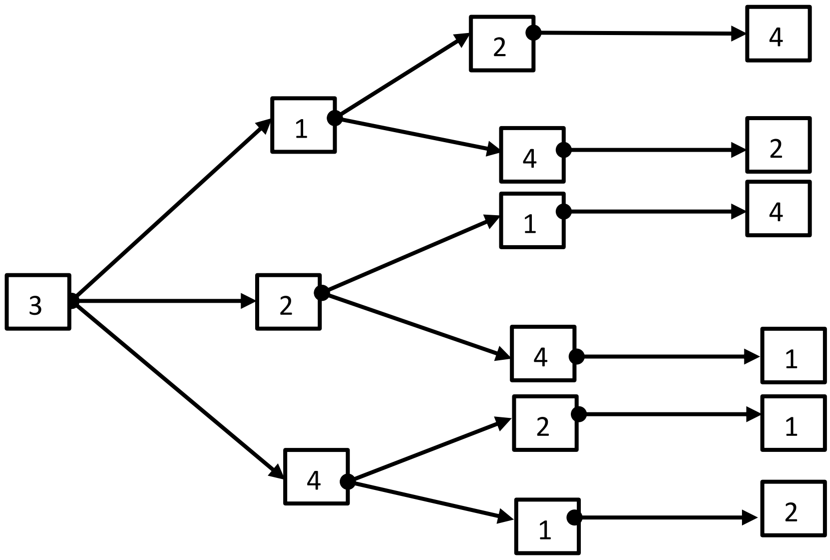
**1°) (a)**

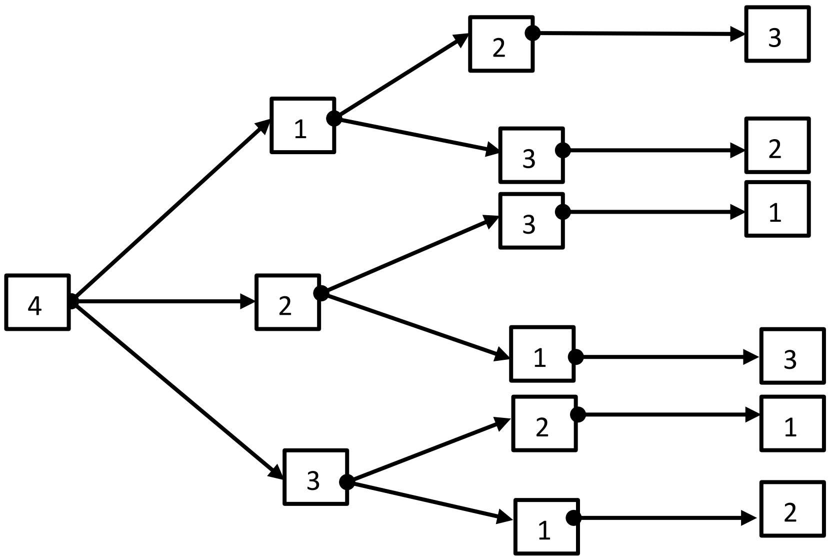
Il s'agit ici de faire des choix ordonnés et sans remises de 4 chiffres dans un ensemble qui contient seulement quatre chiffres. On est donc en face d'un arrangement particulier que nos lecteurs appelleront permutation.
Or dans un ensemble à 4 éléments on a 4 ! Permutations possibles.
L'on peut donc effectivement écrire 24 nombres avec ces quatre chiffres.

**(b)**






L'ensemble Ω de ces nombres est donc Ω = {1234 ; 1243 ; 1324 ; 1342 ; 1423 ; 1432 ; 2134 ; 2143 ; 2314 ; 2341 ; 2413 ;  2431 ; 3124 ; 3142 ; 3214 ; 3241 ; 3421 ; 3412 ; 4123 ; 4132 ; 4231 ; 4213 ; 4321 ; 4312}.

**2°)**

Si vous avez réussi les arbres de choix alors vous savez avec moi qu'il n'existe pas de nombre présentant exactement trois coïncidences.

**3°) (a)**

L'événement A correspond à l'éventualité 1234.

L'événement B correspond aux éventualités : 1243 ; 1324 ; 1432 ; 2134 ; 3214 ; 4231.

L'événement C correspond aux éventualités : 1342 ; 1423 ; 2314 ; 2431 ; 3124 ; 3241 ; 4132 ; 4231.

**(b)**

Un seule éventualité réalise l'événement A sur les 24 éventualités donc card(A)=1 de telle sorte que P(A)= $\frac{1}{24}$

De même on a :

Card(B)=6 donc P(B)= $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

Card(C)=8 donc P(C)= $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

**4°)**

Il s'agit ici de calculer la probabilité de la réunion des événements A ; B et C.
De plus, un nombre ne peut présenter à la fois une coïncidence, deux coïncidences et trois coïncidences de telle sorte que $A \cap B \cap C = \emptyset$ (A ; B et C sont des événements incompatibles, ils ne peuvent se réaliser en même temps).

Par conséquent : P (A∪B∪C) = P(A) + P(B) + P(C) = $\frac{15}{24} = \frac{5}{8}$

Evidemment, P ($\overline{D}$)= $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

**5°) (a)**

Il suffit de considérer l'arbre d'origine 2 pour se rendre compte qu'on a six nombres qui commencent par 2. Le cardinal de l'événement E est donc égal à 6 de façon que P(E)= $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

**(b)**

Il s'agit ici de calculer la probabilité de l'événement « C sachant E » c'est-à-dire
$P_E(C) = \frac{P(C \cap E)}{P(E)}$

On a déjà évalué P(E). Donc il reste à calculer P(C∩E) pour se frotter les mains.
Or C∩E correspond aux éventualités 2314 ; 2431 (Il s'agit des nombres qui commencent par 2 et présentent exactement une coïncidence)
Donc Card (C∩E) = 2

par conséquent, P(C∩E) = $\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

ET Finalement il vient, $\boldsymbol{P_E(C) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}}$

Après un tel exercice un bon bain froid nous ferait du bien. A dire vrai..... Je suis déjà dans sous la douche et l'eau du robinet coule à flot...... la facture aussi.

## ■ EXERCICE 58

**1°)**

Félicitation ! Vous tenez la bonne réponse, le système décimal comporte 10 chiffres : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.
Former un code signifie pour IvoirBank de faire des choix ordonnés de 4 chiffres non forcement dans un ensemble qui contient 10 chiffres.
Il s'agit alors de former des 4-listes.
Or dans un ensemble à 10 éléments on a $10^4$=10000 4-listes possibles.
Donc IvoirBank peut proposer 10000 codes à ces clients.

> En effet :
> Au choix du premier chiffre du code on a 10 possibilités (il s'agit de choisir un chiffre parmi les 10 proposés).
> Au choix du second chiffre IvoirBank a de même 10 possibilités (puisque les chiffres du code ne sont pas forcément distinct : c'est un tirage successif avec remise)
> IvoirBank a de même 10 choix possibles pour chacun des deux derniers chiffres (c'est un tirage successif avec remise)
> D'où d'après le principe multiplicatif on a $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10000$ codes.

**Pourquoi vous parlez de tirage avec Remise alors même que le sujet ne l'a pas mentionné ?**
Parce qu'à ce niveau de l'exercice, l'énoncé n'exige pas que les chiffres du code soient distincts. Ainsi un code tel que 1111 est valide.
Et des gens brillants comme vous savent qu'un tel code ne peut être obtenu que si le chiffre 1 est encore reconduit parmi les autres chiffres où s'effectue le choix du prochain chiffre du code.
**Je ne comprends pas pourquoi il s'agit d'un tirage successif** ?
Parce que l'ordre des chiffres est fondamental.
En effet, les codes 1234 et 4321 ne sont pas identiques alors même qu'ils sont formés des mêmes chiffres. Il suffit de changer la position d'un chiffre pour obtenir un nouveau code.

**2°)**
Le code commençant par 0, il est clair qu'on a un seul choix possible pour le premier chiffre du code (On a seul 0 dans la liste de chiffres proposés).
Ensuite on a, 10 choix possibles pour chacun des 3 derniers chiffres du code (le 0 pouvant encore être choisi puisque les chiffres ne sont pas forcément distincts).
Ainsi d'après le principe multiplicatif on a $1\times10\times10\times10 = 10^3 = 1000$ codes qui commencent par 0.
Par conséquent, la probabilité cherchée est donc égale à $\frac{10^3}{10^4} = \frac{1}{10}$

**3°)**
Nos lecteurs (que nous félicitons d'être arrivé à la fin de cet ouvrage) savent que former un code composé uniquement des chiffres 2 ; 4 ; 5 et 7 revient à faire une permutation des quatre chiffres proposés.
On a donc en tout $4\,! = 24$ codes composés des chiffres 2 ; 4 ; 5 et 7.
**Par conséquent, la probabilité cherchée vaut donc** $\frac{24}{10^4} = \frac{3}{1250}$

**4°) (a)**
Il est clair que le code de Zahoro est l'un des 24 codes formés des chiffres 2 ; 4 ; 5 et 7.
Il a donc une chance sur 24 de composer le vrai code.
Par conséquent, **P(E)=** $\frac{1}{24}$**.**
Appelons A l'événement « le second essai est fructueux »
Sous cette hypothèse, l'événement F correspond à l'éventualité $\bar{E} \cap A$
De plus, les événements $\bar{E}$ et A sont liés (la réalisation de l'un influence la réalisation de l'autre car c'est l'échec de la première tentative qui conduit Zahoro à un second essai. Mieux, la réalisation de l'un autorise la tentative de l'autre)
Donc $P(F)=P(\bar{E} \cap A) = P(\bar{E}) \times P_{\bar{E}}(A)$
Or $P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}$
Par ailleurs, Si la première tentative de Zahoro est infructueuse alors son code est parmi les 23 codes restants. Ainsi s'il échoue au premier essai ses chances de composer le vrai code à la prochaine tentative sont portées à un sur 23 C'est-à-dire
$P_{\bar{E}}(A) = \frac{1}{23}$
Et finalement on obtient, $P(F)=\frac{23}{24} \times \frac{1}{23} = \frac{1}{24}$

**(b)**
Appelons M l'événement « la troisième tentative a été un succès ».
Si Zahoro a réussi à faire un retrait c'est soit qu'il a réussi le premier essai ou que la seconde tentative a été fructueuse soit que la troisième et dernière tentative a été un succès. (Mais pas les trois en même temps).

G est donc la réunion des événements E ; F et $\bar{A} \cap \bar{E} \cap M$ .
De plus, les événements E ; F et $\bar{A} \cap \bar{E} \cap M$ sont incompatibles
Donc E ∩ F ∩ $(\bar{A} \cap \bar{E} \cap M) = \emptyset$
De telle sorte que :
P(G)= P (E ∪ F ∪ $(\bar{A} \cap \bar{E} \cap M)) =$ P(F) + P(E) + $P(\bar{A} \cap \bar{E} \cap M) = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}$

$$\boxed{\boldsymbol{P(\bar{A} \cap \bar{E} \cap M) = P(\bar{E}) \times P_{\bar{E}}(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(M) = \frac{23}{24} \times \frac{22}{23} \times \frac{1}{22} = \frac{1}{24}}}$$

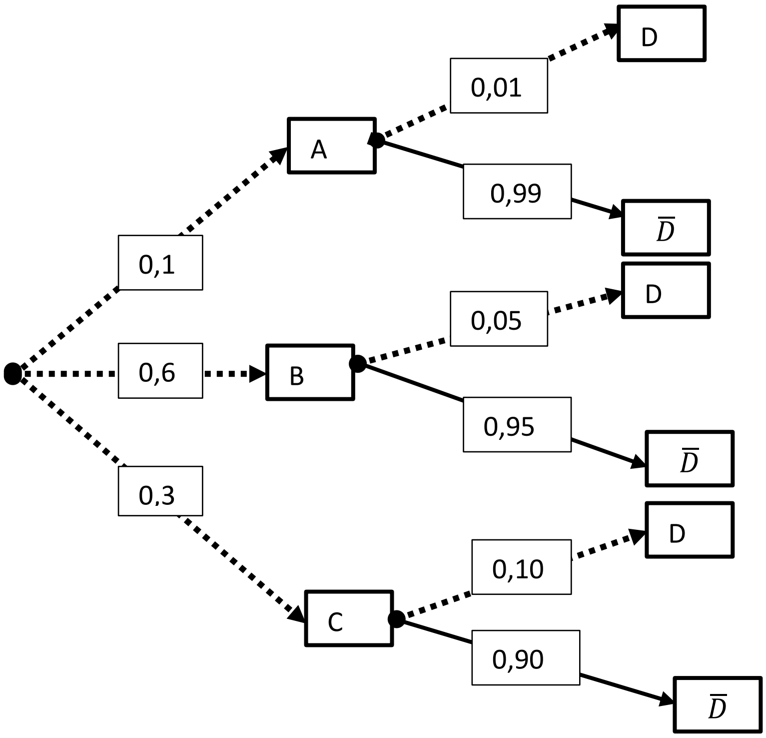
**5°)**
Il s'agit ici de calculer la probabilité de l'événement « E sachant G »
$\boldsymbol{P_G(E) = \frac{P(G \cap E)}{P(G)} = \frac{P(E)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{3}}$
Les chances que le retrait se soit effectué à la deuxième tentative et à la troisième tentative sont de même égale à $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$
C'était tout de même prévisible puisque P(F)=P(E)= $P(\bar{A} \cap \bar{E} \cap M)$
(On a autant de chance de faire un retrait au premier essai, à la seconde tentative qu'au troisième essai).
**6°) (a)**
Les valeurs prises par la variable X sont : 50 ; 110 ; 170 et 180
L'événement X=50 correspond à l'éventualité « Zahoro effectue le retrait au premier essai », c'est l'événement E.
On a donc P(X=50)=P(E)= $\boldsymbol{\frac{1}{24}}$
L'événement X=110 correspond à l'éventualité « Zahoro effectue le retrait au second essai », c'est l'événement F.
On a alors P(X=110)=P(F)= $\boldsymbol{\frac{1}{24}}$
L'événement X=170 correspond à l'éventualité « seule la troisième tentative a été fructueuse», C'est l'événement $\bar{A} \cap \bar{E} \cap M$
On a alors P(X=170)= $P(\bar{A} \cap \bar{E} \cap M)$= $\boldsymbol{\frac{1}{24}}$.
L'événement X=180 correspond à l'éventualité « aucune tentative n'a été fructueuse», c'est l'événement $\bar{A} \cap \bar{E} \cap \bar{M}$.
On a alors P(X=180)= $P(\bar{A} \cap \bar{E} \cap \bar{M})$= $\boldsymbol{P(\bar{E}) \times P_{\bar{E}}(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{M}) = \frac{23}{24} \times \frac{22}{23} \times \frac{21}{22} = \frac{21}{24}}$
La loi de X est donc fournie par le tableau suivant :

| $X=x_i$ | 50 | 110 | 170 | 180 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{21}{24}$ |

**(b)** E(X) = $\frac{645}{4}$ = 161,25.
Il paye en moyenne une taxe de 160 FCFA pour chaque tentative de retrait.

## ■ EXERCICE 59

Je  parie que vous avez déjà dressé un gigantesque arbre de probabilité. Eh bien vous avez raison. C'est le bon réflexe. Moi en tout cas, je suis au sommet de  mon arbre.



**1°) (a)**
On n’a pas le choix.... Les résultats sont trop clairs et même trop visibles.
En effet, 10% des compteurs ont moins de deux ans et sont donc sous garantie.
Par conséquent la probabilité de l’événement ‘’ Le compteur est sous garantie ‘’ est
$P(A) = \frac{10}{100} = 0{,}1$.
De même :
$P(B) = \frac{60}{100} = 0{,}6$
$P(C) = \frac{30}{100} = 0{,}3$
De toutes façon vous les aviez déjà trouvés puisque vous avez réussi l’arbre.
**(b)**
La probabilité que le compteur soit défectueux alors qu’il est sous garantie est $\frac{1}{100}$
donc on a **$P_A(D) = \frac{1}{100} = 0{,}01$.**
**(c)** $P_B(D) = \frac{1}{20} = 0{,}05$
**(d) $P_C(D) = \frac{1}{10} = 0{,}1$**
**2°) (a)**
**Il est immédiat que la probabilité cherchée est celle de l’événement** $A \cap D$.
**On a $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0{,}1 \times 0{,}01 = 0{,}001$.**

**Moi je ne comprends pas ce résultat !**
Pour bien me suivre, oublier un instant votre arbre puis jeter un coup d’œil au mien. Parcourez le premier chemin en pointiller.
Félicitation !
Vous venez de réaliser l’événement le compteur est sous garantie et est défectueux. C’est l’événement $A \cap D$.
Sa PROBABILITE est le produit des probabilités rencontrées sur ce chemin.
Donc $P(A \cap D) = \mathbf{0{,}1 \times 0{,}01}$
**OR $0{,}1 = P(A)$ et $0{,}01 = P_A(D)$**
**Comment avez-vous su qu’il s’agissait de la probabilité de l’événement $A \cap D$ ?**
Parce que le **ET** qui réunit les événements ‘’le compteur se trouve sous garantie’’, ‘’le compteur est défectueux’’ **traduit l’intersection de ces deux événements.**

**(b)** Vous avez dit la probabilité de l’événement « le compteur soit défectueux » ?
Rien de plus simple.
Cette fois-ci fermez votre cahier. Ne faites plus de frontière entre mon arbre et vous.
Quels sont les chemins qui conduisent à D ?
Vous l’avez deviné : ce sont les chemins en pointillées.
Chacun de ces trois chemins conduit à D.
Le premier chemin en pointillé est l’événement $A \cap D$
Le second est l’événement $B \cap D$
Le troisième représente l’événement $C \cap D$
On sait déjà calculer chacun de ces événements.
Voulez-vous atteindre D ? Vous n’avez pas le choix.
**OU** vous parcourez le premier chemin en pointillé (événement $A \cap D$)

**OU** vous parcourez le deuxième chemin en pointillé (événement $B \cap D$)
**OU** vous parcourez le troisième chemin en pointillé (événement $C \cap D$)
**Le Ou** traduisant la réunion d'événement on obtient
$P(D) = P((A \cap D) \cup (A \cap D) \cup (A \cap D))$
Pourtant vous ne pouvez pas parcourir ces trois chemins en même temps : On dit alors que les événements $A \cap D$, $B \cap D$ et $C \cap D$ sont incompatibles
Donc $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$
$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D)$
$P(D) = 0,1 \times 0,01 + 0,6 \times 0,05 + 0,3 \times 0,1$
**$P(D) = 0,061$**
**Voilà la réponse à la question du MONSIEUR**
**3°)**
Si vous ne savez pas QUE FAIRE face à une telle question c'est
soit que ce livre ne vous appartient pas
Soit que vous n'êtes pas en train de lire une version original
En tout cas, nos lecteurs savent qu'il s'agit de calculer $P(A) \times P(D)$ et $P(A \cap D)$ puis de comparer ces deux résultats.
Moi j'ai trouvé $P(A) \times P(D) = 0,0061$ et $P(A \cap D) = 0,001$
Or, Même mon chat ''kabableke'' sait que, $0,0061 \neq 0,001$
Donc $P(A) \times P(D) \neq P(A \cap D)$
Par conséquent les événements A et D sont liés c'est-à-dire qu'ils ne sont pas indépendants.

| |
|---|
| Deux événements A et D sont indépendants Si et seulement si **$P(A \cap D) = P(A) \times P(D)$** |

**4°)** Ne paniquez surtout pas.
Sachant que le compteur est défectueux nous voulons estimer les chances qu'il soit l'un des compteurs sous garanties.
La probabilité cherchée est donc celle de l'événement « A sachant D »
$P_D(A) = \frac{\mathbf{P(A \cap D)}}{P(D)} = \frac{\mathbf{P(A) \times \boldsymbol{P_A}(D)}}{P(D)} = \frac{0,1 \times 0,01}{0,061} = 0,016$
On a donc 1,6% de chance que ce compteur défectueux soit un compteur sous garantie.
**5°)** La probabilité cherchée est celle de l'événement $X \geq 1$ où X est la variable aléatoire qui indique le nombre de compteurs sous garanties sachant qu'ils sont défectueux.
Chaque choix d'un compteur parmi les huit est une épreuve de Bernoulli.
En effet,
Soit le compteur choisi est sous garantie
Soit il ne l'ai pas.
Les huit choix constituent alors un schéma de Bernoulli
Par conséquent, la variable aléatoire X suit une loi Binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = P_D(A) = 0,016$
D'où $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_8^0 (0,016)^0 \times (1 - 0,016)^8 = 0,12$

**Mais pourquoi vous aimez passer par l'événement contraire pour ce genre de question ?**
**Parce que j'aime les méthodes qui nous font gagner du temps.**
Au moins Un compteur sous garantie correspond à la réalisation des événements exactement 1, exactement 2, exactement 3, exactement 4, exactement 5, exactement 6, exactement 7, exactement 8 sous garanties.
Il faut donc calculer la somme des probabilités de ces différents événements pour avoir le résultat attendu. Ce qui est quand même un peu long.
**MAIS** comme vous aimez les longues méthodes et que j'ai un peu de temps (de toute façon je compte tenir ma promesse... de vous faire plaisir) je vais pousser ma patiente jusqu'à calculer, avec vous, cette somme.
P(x≥1) = P(X=1) + P(X= 2) + P(X= 3) + P(X= 4) + P(X= 5) + P(X= 6) + P(X= 7) + P(X= 8)
P(x≥1) = $C_8^1(0{,}016)^1 \times (1-0{,}016)^7$ + $C_8^2(0{,}016)^2 \times (1-0{,}016)^6$ + $C_8^3(0{,}016)^3 \times (1-0{,}016)^5$ **+** $C_8^4(0{,}016)^4 \times (1-0{,}016)^4$ **+** $C_8^5(0{,}016)^5 \times (1-0{,}016)^3$ **+** $C_8^6(0{,}016)^6 \times (1-0{,}016)^2$ **+** $C_8^7(0{,}016)^7 \times (1-0{,}016)^1$ **+** $C_8^8(0{,}016)^8 \times (1-0{,}016)^0$
P(x≥1) = 0,12
Ouf que ce fut long !
**En tout cas, moi je n'emprunterai plus jamais ce chemin, ni pour vous, ni pour kabableke (c'est le nom de mon chat).**

## ■ EXERCICE 60

**1°)** Vous avez dit tirer une boule dans chaque urne ?
**Jamais exercice de probabilités n'a été si facile.**
Nous devons faire le choix de quatre boules en tirant bien sûr (comme le Monsieur nous l'a imposé) une boule par urne.
Combien de choix possible a-t-on par urne ?
Evidemment on a 3 choix possibles par urne (c'est naturel quand même : on a que 3 boules par urne)
On a 4 urnes et comme on a trois choix possibles par urne alors le nombre de possibilités est : **3 × 3 × 3 × 3 = $3^4$ = 81**
**2°)**
La bonne stratégie consistera à faire d'abord le choix de l'urne d'où sortira la boule blanche.
Combien de possibilités avons-nous pour le choix de cette fameuse urne ?
Vous l'avez deviné : on a **4** possibilités puisqu'on a 4 urnes.
De plus, on a une seule boule blanche dans l'urne choisie
Donc on a **1** possibilité pour le choix de la boule dans cette urne.
Enfin, la boule blanche tirée, il reste à faire le choix de 3 boules (non blanches bien sûr) dans les urnes restantes (la boule d'où est sortie notre adorable boule blanche n'étant plus concerné puisqu'on tire une boule par urne).
Nos aimables lecteurs savent d'ailleurs qu'on a 2 possibilités par urnes puisqu'on a 2 boules par urnes(les boules blanches étant exclues des tirages)
**Finalement** le nombre de tirage amenant une seule boule blanche est
**4 × 1 × 2 × 2 × 2 = 32.**
**3°) (a)**
Le joueur gagne 1000 F lorsqu'il réussit à tirer une boule blanche.
Donc P(X= 1000) = $\frac{32}{81}$
Il gagne 4000 lorsqu'il réussit à tirer quatre boules blanches (c'est-à-dire une boule blanche

par urne) donc : P(X= 4000) = $\frac{1\times1\times1\times1}{81} = \frac{1}{81}$

**(b)**

Il gagne 2000 F lorsqu'il réussit à tirer 2 boules blanches.

Vous l'avez deviné on a $C_4^2 \times 1 \times 1 \times 2 \times 2 = 24$ tirages qui amènent 2 boules blanches.

Par conséquent **: P(X = 2000) = $\frac{24}{81}$**

| |
|---|
| Moi je n'ai pas réussi à deviner votre $C_4^2 \times 1 \times 1 \times 2 \times 2$.<br>D'ailleurs je ne comprends rien à tout ce baratin !<br>Que pus-je face à votre exigence ! une promesse demeure une promesse ! Je compte tenir la mienne.<br>Vous avez dit deux boules blanches ? Mais dans quelles urnes les choisir ?<br>Il faut d'abord faire le choix des urnes concernées par le tirage des deux boules blanches puis les tirer et enfin choisir les autres (non blanches) dans les deux urnes restantes. Jusque-là vous me suivez j'espère !<br>On a $C_4^2$ = 6 façon de choisir les deux urnes d'où sortira les deux boules blanches. Je peux même vous les énuméré ($U_1$, $U_2$), ($U_1$, $U_3$), ($U_1$, $U_4$), ($U_2$, $U_3$), ($U_2$, $U_4$), ($U_3$, $U_4$) où le couple ($U_1$, $U_2$) signifie que le tirage des boules blanches s'effectuent dans les urnes $U_1$ et $U_2$.<br>Pour chaque tirage d'une boule blanche dans chacune des deux urnes choisies on a une seule possibilité.<br>Enfin, on a 2 choix possibles lors du tirage d'une boule noire de chacune des urnes restantes.<br>Il suffit de faire le produit de toutes ces possibilités pour conclure |

Par ailleurs, Il gagne 3000 F lorsqu'il réussit à tirer 3 boules blanches.

Vous l'avez deviné on a $C_4^3 \times 1 \times 1 \times 1 \times 2 = 8$ tirages qui amènent 3 boules blanches.

Par conséquent **: P(X = 3000) = $\frac{8}{81}$**

**4°) (a)**

La variable X prend les valeurs : 0 ; 1000 ; 2000 ; 3000 ; 4000

X = 0 est la réalisation l'événement « le tirage amène uniquement des boules noires »

Donc P(X = 0) = $\frac{2\times2\times2\times2}{81}$ = $\frac{16}{81}$

Par conséquent la loi de probabilité de la variable aléatoire X est fournie par le tableau suivant :

| **$X = x_i$** | **0** | **1000** | **2000** | **3000** | **4000** |
|---|---|---|---|---|---|
| **$P(X = x_i)$** | $\frac{16}{81}$ | $\frac{32}{81}$ | $\frac{24}{81}$ | $\frac{8}{81}$ | $\frac{1}{81}$ |

Les plus curieux d'entre nous ont déjà remarqué que la somme des différentes probabilités associées aux différentes valeurs prises par la variable X est égale à 1.

**(b)**

**$E(X) = 0\times\frac{16}{81} + 1000\times\frac{32}{81} + 2000\times\frac{24}{81} + 3000\times\frac{8}{81} + 4000\times\frac{1}{81} = \frac{4000}{3} \approx 133,33$**

**L'espérance de gain moyen est donc 133 F.** On a donc toutes les raisons de penser que le jeu est à l'avantage du joueur.

**5°)**

Il s'agit ici de calculer la probabilité de l'événement X≥ 1000.

Pour vous aider à mieux comprendre, j'ai même représenté la partie concernée du tableau en trait foncée.

Il suffit alors de faire la somme des différences probabilités de cette partie du tableau pour obtenir P(X≥ 1000) = $\frac{65}{81}$

Les chances qu'un joueur obtienne au moins 1000 F sont donc estimées à 80,25%.

**6°)**

**Encore du Bernoulli tout craché.**

Soit Y la variable aléatoire qui indique le nombre de joueurs qui gagnent au moins 1000 F.

Sous cette hypothèse, la probabilité cherchée est celle de l'événement Y≥ 1000

De plus, Il est immédiat que Y suit une loi binomiale de paramètre 5 et $\frac{65}{81}$

Par conséquent, en utilisant notre méthode adorée pour ce genre de question on obtient : P(X≥ 1000) =1 – P(X = 0) = 1 - $C_5^0 \times (\frac{65}{81})^0 \times (\frac{16}{81})^5$ = 0,999699271≈ 1

**On est presque certains que l'un au moins des 5 joueurs gagnera au moins 1000 F.**

**J'espère avoir au moins tenu ma promesse de vous expliquer tout en partant de ZERO. Si telle est votre avis alors ne tarder plus à constater les éditions Matrice pour les autres ouvrages de la collection affaires classées.**