

**C**OLLECTION  
**I**NTER  
**A**FRICAINE DE  
**M**ATHEMATIQUES



1<sup>re</sup>

*Littéraire*

# MATHÉMATIQUES

## GUIDE PÉDAGOGIQUE

EDICEF

**C**ollection  
**I**nter  
**A**fricaine de  
**M**athématiques

sous la direction  
de **Saliou TOURÉ**  
Professeur à l'Université  
d'Abidjan

# MATHÉMATIQUES

1<sup>re</sup>L

GUIDE PÉDAGOGIQUE

EDICEF  
58, rue Jean-Bleuzen  
92178 Vanves Cedex

L'idée d'harmoniser les programmes de mathématiques entre les pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien remonte à l'année 1983 où fut organisé par l'IRMA, à Abidjan, le premier séminaire d'harmonisation. Depuis, d'autres séminaires ont suivi : en 1985 à Cotonou, en 1988 à Conakry et en juin 1992 à Abidjan avec la participation de 20 pays.

#### PARTICIPATION DES DIFFÉRENTS PAYS

BÉNIN	COMORES	GUINÉE	RWANDA
BURKINA FASO	CONGO	MADAGASCAR	SÉNÉGAL
BURUNDI	CÔTE D'IVOIRE	MALI	TCHAD
CAMEROUN	DJIBOUTI	MAURITANIE	TOGO
CENTRAFRIQUE	GABON	NIGER	ZAÏRE

La suite logique, souhaitée par tous les participants, est l'élaboration d'une Collection Inter-Africaine de manuels de mathématiques pour l'enseignement secondaire. Des rédacteurs de tous les pays participent à la réalisation de ce projet. Un comité de coordination travaille avec les cellules nationales mises en place dans chaque pays.

#### COMITÉ DE COORDINATION

Missa COULIBALY

Isidore KOFFI

Alain RENAULT

Soma TRAORÉ

D'autres séminaires de concertation ont réuni les responsables de ces cellules, à Libreville en 1993, à Ndjaména en 1994, à Yaoundé en 1995, à Antananarivo en 1996, à Dakar en 1997, à Niamey en 1998, à Nouakchott en 1999, à Ouagadougou en 2000, à Cotonou en 2001 et à Bangui en 2002.

ISBN 978-2-84129-835-8

© EDICEF 2002

*Droits de reproduction, de traduction et d'adaptation réservés pour tous pays.*

En application de la loi du 11 mars 1957, il est interdit de reproduire intégralement ou partiellement le présent ouvrage sans autorisation de l'éditeur ou du Centre Français de l'Exploitation du Droit de Copie (3, rue Hautefeuille, 75006 Paris). Cette reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal.

# SOMMAIRE

<b>1</b>	TABLEAU SYNOPTIQUE DES PROGRAMMES DU SECOND CYCLE LITTÉRAIRE .....	5
<b>2</b>	MATHÉMATIQUES DANS LES SECTIONS LITTÉRAIRES ET ÉCONOMIQUES .....	7
	2.1 Des difficultés didactiques .....	8
	2.2 Les thèmes que l'on peut aborder .....	8
	2.3 Catalogue pour choisir des curricula .....	10
	2.4 Que choisir ? .....	10
<b>3</b>	COMMENTAIRES GÉNÉRAUX POUR LE SECOND CYCLE .....	11
	3.1 Options académiques.....	11
	3.2 Options pédagogiques.....	12
	3.3 Aspect culturel.....	12
	3.4 Utilisation du manuel .....	12
<b>4</b>	COMMENTAIRES SPÉCIFIQUES À LA CLASSE DE PREMIÈRE L.....	14
	4.1 Activités des élèves.....	14
	4.2 Présentation du manuel.....	14
	4.3 Points méthodes.....	14
	4.4 Travaux dirigés.....	15
<b>5</b>	ANALYSE DES CHAPITRES .....	17
	5.1 Problèmes du second degré.....	17
	5.2 Représentations graphiques de fonctions .....	24
	5.3 Dénombrement.....	35
	5.4 Dérivation.....	45
	5.5 Statistiques .....	51
	5.6 Étude de fonctions .....	72
	5.7 Suites numériques .....	82

# ALPHABET GREC

Majuscule	Minuscule	Appellation
A	α	alpha
B	β	bêta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ε	epsilon
Z	ζ	dzêta
H	η	êta
Θ	θ	thêta
I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mu
N	ν	nu
Ξ	ξ	ksi
O	ο	omicron
Π	π	pi
P	ρ	rhô
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Υ	υ	upsilon
Φ	φ	phi
X	χ	khi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	oméga

# 1 TABLEAU SYNOPTIQUE DES PROGRAMMES DU SECOND CYCLE LITTÉRAIRE

Les programmes du Second Cycle Littéraire ont été établis en juin 1992, lors du quatrième séminaire d'harmonisation des programmes de mathématiques des pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien. Ils sont ici présentés dans un tableau synoptique afin de faire apparaître :

- la cohérence des différents thèmes à un niveau donné ;
- l'évolution d'un thème d'un niveau à l'autre.

## Seconde L

## Première L

## Terminale L

	Seconde L	Première L	Terminale L
<b>ALGÈBRE</b>	<b>LES NOMBRES</b>		
	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Les nombres réels                             <ul style="list-style-type: none"> <li>• Nombres rationnels</li> <li>• Nombres irrationnels</li> </ul> </li> <li>◆ Calculs dans <math>\mathbb{R}</math> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Sommes et produits</li> <li>• Quotients</li> <li>• Puissances</li> <li>• Racines carrées</li> </ul> </li> <li>◆ Proportionnalité                             <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tableaux de proportionnalité</li> <li>• Pourcentages</li> <li>• Échelles</li> <li>• Problèmes concrets</li> </ul> </li> <li>◆ Ordre et valeur absolue                             <ul style="list-style-type: none"> <li>• Comparaison des nombres</li> <li>• Encadrement, approximations, ordre de grandeur</li> <li>• Valeur absolue, distance</li> </ul> </li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Divisibilité dans <math>\mathbb{N}</math> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Critères de divisibilité</li> <li>• Bases 10, 2 et 5</li> </ul> </li> <li>◆ Décimales successives d'un nombre rationnel                             <ul style="list-style-type: none"> <li>• Application aux suites</li> </ul> </li> <li>◆ Calculs sur les grands nombres                             <ul style="list-style-type: none"> <li>• Utilisation d'une calculatrice</li> </ul> </li> </ul>
	<b>CALCUL LITTÉRAL</b>		
	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Développements et factorisations                             <ul style="list-style-type: none"> <li>• Égalités remarquables</li> <li>• Applications aux calculs numériques</li> </ul> </li> <li>◆ Calculs simples sur les polynômes</li> <li>◆ Simplifications de fractions rationnelles</li> </ul>		
	<b>ÉQUATIONS</b>		
	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Équations dans <math>\mathbb{R}</math> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Équations du type : <math>ax + b = 0</math></li> <li>• Équations du type : <math> x - a  = r</math></li> <li>• Équations du type : <math>(ax + b)(cx + d) = 0</math></li> <li>• Équations du type : <math>\frac{ax + b}{cx + d} = 0</math></li> <li>• Problèmes concrets</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Équations dans <math>\mathbb{R}</math> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Équations du type : <math>\frac{ax + b}{cx + d} = 0</math></li> <li>• Problèmes concrets</li> </ul> </li> <li>◆ Équations du second degré                             <ul style="list-style-type: none"> <li>• Forme canonique</li> <li>• Discriminant</li> <li>• Somme et produit des racines</li> <li>• Problèmes concrets</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Équations dans <math>\mathbb{R}</math> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Méthodes graphique et numérique</li> <li>• Équations faisant intervenir <math>\ln</math> ou <math>\exp</math></li> </ul> </li> </ul>

Première L

Seconde L

ALGÈBRE (suite)

INÉQUATIONS

- ◆ Inéquations dans  $\mathbb{R}$
- Inéquations du type :  $ax + b \leq 0$
- Inéquations du type :  $|x - a| \leq r$
- Inéquations du type :  $(ax + b)(cx + d) \leq 0$
- Inéquations du type :  $\frac{ax + b}{cx + d} \leq 0$
- Problèmes concrets

SYSTÈMES LINÉAIRES

- ◆ Systèmes linéaires
- Systèmes linéaires d'équations
- Systèmes linéaires d'inéquations
- Problèmes concrets

FONCTIONS

- ◆ Notion de fonction
- ◆ Ensemble de définition
- ◆ Représentation graphique
- ◆ Lecture graphique
- Image et antécédents d'un nombre réel
- Utilisations d'un graphique
- ◆ Variations d'une fonction
- Notion d'extremum
- Sens de variation d'une fonction

FONCTIONS USUELLES

- ◆ Fonctions affines
- ◆ Fonctions affines par intervalles
- Fonctions définies par intervalles
- Fonction valeur absolue
- Fonctions en escalier
- ◆ Fonctions élémentaires
- Fonction carré
- Fonction racine carrée
- Fonction inverse
- ◆ Utilisations des fonctions élémentaires
- Résolution graphique d'équations
- Résolution graphique d'inéquations

LIMITES - CONTINUITÉ

- ◆ Inéquations du second degré
- Signe de  $ax^2 + bx + c$
- Inéquations du type :  $ax^2 + bx + c \leq 0$
- Problèmes concrets
- ◆ Inéquations dans  $\mathbb{R}$
- Inéquations du type :  $\frac{ax + b}{cx + d} \leq 0$
- Problèmes concrets

- ◆ Parité d'une fonction, éléments de symétrie d'une courbe
- ◆ Observation de courbes de fonctions périodiques
- ◆ Fonctions de la forme :
- $x \mapsto f(x - a)$
- $x \mapsto f(x) + b$
- $x \mapsto |f(x)|$
- $x \mapsto kf(x)$ , où  $f$  est une fonction élémentaire
- ◆ Fonctions polynômes du second degré
- ◆ Fonctions homographiques

- ◆ Approche intuitive des notions de limite et de continuité

- ◆ Approche intuitive de la notion de nombre dérivé
- Interprétation géométrique
- Équation de la tangente en un point d'une courbe
- ◆ Fonctions dérivées
- ◆ Variations de fonctions
- Fonction polynôme du second degré
- Fonction homographique

DÉRIVÉE

- ◆ Inéquations dans  $\mathbb{R}$
- Inéquations faisant intervenir  $\ln$  ou  $\exp$
- ◆ Systèmes linéaires
- Systèmes linéaires d'équations
- Systèmes linéaires d'inéquations
- Problèmes de programmation

- ◆ Fonctions  $\ln$  et  $\exp$
- ◆ Fonctions simples faisant intervenir  $\ln$  ou  $\exp$

- ◆ Limites
- Notions
- Opérations
- ◆ Notion d'asymptote

- ◆ Dérivées usuelles
- ◆ Dérivées de fonctions composées
- Dérivée de  $\ln \circ u$
- Dérivée de  $\exp \circ u$
- ◆ Utilisation des dérivées pour étudier :
- Fonctions polynômes de degré supérieur à 2
- Fonctions rationnelles du type :

$$x \mapsto \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

◆ Notion de suite numérique

◆ Diverses déterminations d'une suite

- $u_n = f(n)$
- $u_{n+1} = g(u_n)$

◆ Représentations graphiques d'une suite

◆ Suites arithmétiques, suites géométriques

- Terme général
- Somme des  $n$  premiers termes
- Problèmes concrets

◆ Comportement d'une suite

- Sens de variation
- Convergence
- ◆ Applications
  - Initiation au raisonnement par récurrence
  - Approximation de nombres réels par des suites rationnelles
  - Étude de la suite :  $n \mapsto 2^n$
  - Étude de la fonction :  $x \mapsto 2^x$

◆ Organisation de données

- Caractère quantitatif
- Caractère qualitatif
- Fréquence
- Effectif cumulé, fréquence cumulée

◆ Traitement de données

- Mode
- Moyenne

◆ Représentations graphiques

- Diagramme circulaire
- Diagramme semi-circulaire
- Diagramme à bandes
- Diagramme en bâtons

◆ Caractères qualitatif, quantitatif

- Caractéristiques de position
- Caractéristiques de dispersion

◆ Regroupement des modalités en classes

- Histogrammes
- Caractéristiques de position
- Caractéristiques de dispersion
- ◆ Exemples de séries chronologiques

◆ Quartiles et déciles d'une série à un caractère

◆ Étude conjointe de deux caractères

- Nuage de points
- Point moyen
- Ajustement linéaire

◆ Outils élémentaires de dénombrement

- Comptage
- Diagrammes
- Arbres de choix
- Tableaux

◆ Résolution de problèmes concrets

◆ Produit cartésien

- ◆ Ensemble  $E^P$
- ◆ Arrangements
- ◆ Permutations
- ◆ Combinaisons

◆ Notion de probabilité

$$p = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

## 2 MATHÉMATIQUES DANS LES SECTIONS LITTÉRAIRES ET ÉCONOMIQUES

D'après une communication de Monsieur PIEDNOIR, Inspecteur Général de France, lors du sixième séminaire HPM (Niamey, 1998).

Quelles mathématiques enseigner dans les sections non scientifiques ?

Le problème n'est pas résolu d'une façon stable dans les différents systèmes éducatifs. Plusieurs philosophies s'affrontent :

- (1) L'important pour l'élève d'une section non scientifique est de se former à la rigueur, au raisonnement déductif. Le contenu de l'enseignement est second. Les mathématiques forment un tout et il ne faut pas trop s'inquiéter des techniques mathématiques que les élèves manipulent éventuellement lors de leurs études supérieures.
- (2) Il est inutile de vouloir faire boire un âne qui n'a pas soif. Pour ces élèves, les mathématiques sont au mieux inutiles. D'autres disciplines peuvent former à la rigueur, au raisonnement. Éventuellement, afin d'éviter l'illettrisme mathématique, entretenir les acquis antérieurs.
- (3) Les mathématiques font partie de la culture. En liaison avec la philosophie, il est intéressant de faire une certaine vulgarisation, de donner une idée de la place des mathématiques dans la culture.
- (4) L'économie, les sciences humaines utilisent des modèles, des techniques mathématiques spécifiques. Dès l'enseignement secondaire, mais surtout pour préparer les études ultérieures, il importe d'apporter à ces élèves une formation spécifique en mathématiques.

Pour la suite de cette note, on s'inspirera des points de vue (3) et (4).

## 2.1. DES DIFFICULTÉS DIDACTIQUES

De ses études dans les classes antérieures, l'élève s'orientant vers une section littéraire ou économique a souvent développé une allergie à la discipline, avec des discours définitifs du type : « je n'y comprends rien », « cela ne me servira à rien ». Les échecs antérieurs pèsent lourds. Cela veut dire que si on fait des mathématiques en section littéraire, il faut obtenir des élèves une certaine adhésion. Il y a donc nécessité, d'une certaine façon, de casser le jeu traditionnel, de présenter du neuf, ce qui est une justification des choix faits précédemment.

Aborder des thèmes nouveaux ne suffit évidemment pas à engendrer intérêt et réussite. Il faut prendre en compte les échecs antérieurs, les savoir-faire non acquis en les déterminant d'une façon précise à l'aide, par exemple, d'évaluations en début d'année. Mais pour y remédier, des séances de révisions sont vaines. Elles remettent l'élève devant son échec, ce qui est loin d'être agréable. Du coup il coupe la communication. C'est à propos de l'étude de thèmes nouveaux que l'on peut progressivement procéder aux réinvestissements des concepts vus au collège. Mais l'élève perçoit mieux la nécessité de maîtriser certaines notions.

Trop souvent dans ses apprentissages mathématiques, l'élève est freiné par la lenteur avec laquelle il effectue certaines manipulations de base, en particulier le calcul algébrique. Le temps passé à mettre au point un calcul fait perdre de vue l'objectif poursuivi. Il s'agit d'un phénomène analogue à celui de l'illettrisme. Celui qui lit trop lentement mobilise ses énergies pour déchiffrer le texte et en perd le sens. La lecture devient un exercice pénible et à la limite inutile, car en cours de route on a perdu le sens du texte. Il faut donc dans les exercices traités, dans les activités faites, éviter une technicité importante et/ou mettre en place, quand cela est possible, des béquilles : recours systématique à la calculette, utilisation des touches « fonctions », des représentations graphiques, usage de l'ordinateur.

Une formation n'a de sens que si on perçoit bien les relations qui existent entre les symboles que l'on manipule et les réalités qu'ils représentent. Quelles significations donnent ces élèves à %,  $\sqrt{\quad}$ ,  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f'$ , proportion, projection, etc.

## 2.2. LES THÈMES QUE L'ON PEUT ABORDER

### 2.2.1. Les mathématiques du citoyen

Il faut montrer qu'un certain nombre de concepts mathématiques sont utilisés dans la vie courante et que leur maîtrise est indispensable à tout individu qui veut maîtriser sa vie, avoir un regard critique sur l'information chiffrée qu'il reçoit. Parmi eux, deux objets sont à manipuler en priorité : la proportionnalité et la lecture graphique.

La proportionnalité, la manipulation des pourcentages recèlent de pièges dans lesquels tombent des individus qui peuvent par ailleurs être de haute culture. La lecture de la presse, l'écoute des médias, permettent, sur ce thème, de se constituer un bêtisier dont l'analyse par les élèves peut être à la fois déculpabilisante et intéressante. À un autre niveau, l'interprétation des proportions représentant des fréquences empiriques, des probabilités, est l'occasion de montrer aux élèves qu'il ne faut pas se précipiter sur un chiffre mais qu'il est nécessaire de faire le va-et-vient entre celui-ci et la réalité qu'il est censé représenter.

Une lecture des graphiques existant dans les pages économiques des quotidiens, dans des publications spécialisées est une excellente introduction aux notions d'ordre, de croissance/décroissance d'une fonction, de continuité. Des exemples peuvent illustrer cela. Pour représenter graphiquement la répartition statistique des familles selon leur taille, faut-il utiliser un diagramme circulaire ou un diagramme semi-circulaire ? Comment réagit l'adulte ou l'élève devant un graphique représentant, année par année, le taux de croissance de l'économie ? En France, pour établir l'impôt sur le revenu des personnes physiques, on utilise des tranches. Beaucoup croient que le passage d'une tranche à l'autre fera baisser le revenu final disponible. Qu'en est-il ? D'autres exemples sont possibles.

### 2.2.2. Réflexion conceptuelle et historique sur la mathématique

La démarche mathématique est une des grandes conquêtes de l'esprit humain. Elle a aidé à mieux comprendre les choses, c'est l'aspect gratuit. Elle a été efficace, c'est l'aspect mathématique appliquée. On peut présenter cette aventure culturelle autour de deux pôles : la notion de modèle et le raisonnement déductif.

La géométrie euclidienne est le premier modèle que les enfants ont à appréhender. Il faut montrer comment on a remplacé des objets familiers par des abstractions, comment on a raisonné sur ces abstractions pour établir des relations entre les objets. L'efficacité de la démarche est facilement illustrable par des exemples issus de la vie courante, par des exemples historiques : comment les Anciens ont déterminé le rayon de la Terre, celui de la Lune, la distance Terre-Lune, Terre-Soleil, leurs réussites, leurs échecs.

On peut montrer aussi comment une intuition commune peut être un obstacle à la mise en place d'un modèle adéquat : Archimède a bien refusé le modèle selon lequel la Terre tourne autour du Soleil.

Le calcul des probabilités est un modèle simple qui permet de rendre compte d'une réalité complexe. On met en place des axiomes, on fait des observations, on montre (ou l'on suggère selon les cas) comment un théorème rend compte d'une réalité observable : la convergence en probabilité, le théorème central limite. Là aussi, la dimension historique est à présenter, du chevalier de Méré à Mendel, donc des jeux aux lois de l'hérédité.

En terminale, en lien avec la philosophie, il est possible d'aller plus loin.

De montrer par exemple, à l'aide de contradictions simples, que le concept d'ensemble n'est pas un concept premier, qu'il doit être exploité à l'aide d'axiomes sans toutefois aller jusqu'à développer l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel.

### **2.2.3. Des éléments de vulgarisation**

Il est très difficile de vulgariser des champs mathématiques récents. Il est toutefois possible de parler d'un certain nombre de problèmes ayant un fondement historique : théorème de Fermat, résolution des équations algébriques par radicaux, quadrature du cercle, espace euclidien à  $n$  dimensions, géométries non euclidiennes etc. À l'aide d'exemples pris dans l'histoire, on peut rendre compte des rapports complexes entre mathématiques et mathématiques appliquées. Des développements théoriques purement gratuits trouvent une application parfois très longtemps après leur apparition. Inversement, des notions mathématiques utilisées sans fondement théorique suscitent chez les théoriciens des réflexions, d'où il sort qu'elles trouvent un statut mathématique correct et sont l'occasion de nouveaux développements théoriques.

L'apparition de nouveaux outils de calcul modifie l'approche des mathématiques. De vieilles théories retrouvent une nouvelle jeunesse car les calculs deviennent faisables. Des développements nouveaux sont nécessaires pour utiliser les nouveaux monstres. L'essentiel est de montrer aux jeunes que la mathématique n'est pas une science figée, qu'elle évolue, que de nouveaux problèmes apparaissent.

### **2.2.4. Préparation aux techniques mathématiques utilisées en sciences humaines et en économie**

Ce point peut faire l'objet d'un développement important, au moins en option dans un certain nombre de filières non scientifiques. S'il est difficile à un élève de ces sections de faire des études d'économie mathématique, il est parfaitement possible de présenter des thèmes d'étude qui prépareront à la manipulation des objets mathématiques utiles dans ces sciences : économie d'abord et donc gestion, mais aussi sociologie, psychologie, géographie, voire histoire.

Le premier chapitre à étudier est celui des fonctions avec les quatre fonctions de base : linéaire, exponentielle, logarithme, puissance, utilisées dans de nombreux modèles : croissance à taux constant, fonction prix-demande, phénomène de saturation des marchés, etc.

Le second est l'étude graphique des fonctions empiriques les plus couramment utilisées : croissance, décroissance, extréma, limites (surtout infinies), continuité, notion de dérivée liée au taux d'accroissement. Par contre, l'intérêt d'études classiques de fonctions données par une expression algébrique plus ou moins farfelue est très limité. Sur le même registre, les suites arithmétiques et géométriques sont à étudier.

Le second chapitre doit préparer les futurs étudiants à bien comprendre l'algèbre linéaire et la statistique descriptive multidimensionnelle. Pour cela, il faut saisir intuitivement la notion d'espace vectoriel, de sous-espace vectoriel, d'espace euclidien à  $k$  dimensions. La difficulté conceptuelle lors des études supérieures de toute nature (université, BTS, IUT) est réelle. L'étude de la géométrie dans l'espace est l'outil privilégié pour cette initiation : notion de droite, de plan, intersection, parallélisme, orthogonalité, projection orthogonale. Voir dans l'espace est un atout important pour comprendre l'algèbre linéaire.

Un troisième chapitre est l'étude du calcul des probabilités qu'il ne faut pas lier systématiquement à l'analyse combinatoire. Ces deux parties des mathématiques ont leurs difficultés propres. À les étudier ensemble on rend l'accès aux probabilités difficiles. Successivement, au fil des années, il est possible d'introduire dans le cas fini uniquement les notions d'espace probabilisé, de variable aléatoire, d'espérance, de variance, d'indépendance et peut-être en travaux dirigés de démontrer la loi des grands nombres.

Certaines techniques mathématiques utilisées en statistiques, en gestion, ont des bases théoriques très simples, mais nécessitent des calculs longs qui dans tous les cas pratiques se font sur ordinateur. Elles ont un intérêt pratique considérable et il est facile sur des exemples simples mais artificiels de montrer comment cela fonctionne. Ainsi en est-il de la classification automatique, de l'utilisation des graphes pour trouver un chemin de longueur minimale, etc.

## 2.3. CATALOGUE POUR CHOISIR DES CURRICULA

### 2.3.1. Quelques points d'histoire

- La première démonstration : les lunules d'Anstarque
- Démontrer le théorème de Pythagore (ou celui de Thalès)
- La quadrature du cercle
- Le postulat d'Euclide
- Le théorème de Fermat
- L'abstraction : appeler  $x$  l'inconnu
- La recherche des décimales de  $\pi$
- Calcul des dimensions de l'univers.

### 2.3.2. L'analyse

- Les fonctions de base
- Etudes graphiques des fonctions empiriques
- Notion de continuité, de dérivée
- Présentation de fonctions utilisées pour décrire les phénomènes économiques.

### 2.3.3. Géométrie

- Comment représenter l'espace : la méthode axiomatique depuis Euclide jusqu'à Hilbert en passant par Lobatchevsky
- La géométrie dans l'espace : droites, plans, relations d'incidence, parallélisme, orthogonalité, projection, notion d'angle.

### 2.3.4. Statistique descriptive

- En lien avec la géométrie : notion de moyenne, d'écart type, de coefficient de corrélation
- Rapport entre indicateur et réalité à décrire ou action à mener, introduction de la médiane, du mode, pertinence des regroupements en classe
- Exemple de classification automatique.

### 2.3.5. Calcul des probabilités

- Un modèle simple dans le cas fini : l'espace probabilisé
- Dépendance, indépendance
- Notion de variable aléatoire, l'espérance, la variance en lien avec la statistique descriptive
- La loi des grands nombres
- Acquisition d'une sensibilité au hasard.

### 2.3.6. Problèmes plaisants et délectables

- Graphes : combien de temps pour construire la maison
- Astronomie : Lune, le Zodiaque
- Arithmétique : corrige ton erreur
- Fractale : la longueur de la côte est infinie.

## 2.4. QUE CHOISIR ?

Dans la liste précédente, il faut bien sûr choisir. Il est hors de question sur un cursus de trois années de traiter l'intégralité du catalogue. L'idéal serait de décider en fonction de l'orientation future de l'élève, et alors de lui donner ce dont il a besoin et ce qu'il peut assimiler. Mais ce qui convient à celui qui fait le programme, ne contente pas l'élève qui construit peu à peu son projet professionnel. Pour certains, un programme se réduisant aux mathématiques du citoyen et à quelques vulgarisations serait suffisant. À l'opposé, ceux qui sont attirés par l'économie devraient avoir quatre à cinq heures de mathématiques et un programme conséquent axé sur la géométrie dans l'espace, l'analyse, la statistique descriptive, le calcul des probabilités. Pour ceux attirés par les sciences humaines, une réflexion en lien avec la philosophie est intéressante ainsi qu'à un niveau moins élevé, le calcul des probabilités, la statistique descriptive plus les aspects historiques et quelques problèmes plaisants et délectables. Comme il n'est pas possible ni souhaitable de trop spécialiser, des choix sont nécessaires. Ils dépendent du parti pris des concepteurs de programmes. Qu'ils se rassurent, un élève bien formé peut vite rattraper.

# 3 COMMENTAIRES GÉNÉRAUX POUR LE SECOND CYCLE

La Collection Inter-Africaine de Mathématiques (C.I.A.M.) est l'aboutissement d'une volonté, déjà ancienne, des pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien de mettre en place un cadre commun pour Harmoniser les Programmes de Mathématiques (H.P.M.) et leur enseignement.

Cette harmonisation vise essentiellement à améliorer la qualité de l'enseignement, à le rendre accessible à un plus grand nombre d'élèves et à prendre en compte les résultats des dernières recherches en didactique des mathématiques. Elle a, dans un premier temps, débouché sur une rénovation des programmes et des méthodes. Elle s'est par la suite accompagnée d'une formation adéquate des professeurs puis concrétisée par la rédaction de manuels-élève, au coût réduit, et de guides pédagogiques, à l'usage exclusif des professeurs.

Les contenus des manuels du second cycle littéraire peuvent être couverts en **25 semaines**, si les volumes horaires suivants sont retenus :

Classe	2 <sup>nd</sup> e L	1 <sup>re</sup> L	T L <sub>1</sub> Économique	T L <sub>2</sub> Littéraire	T L <sub>3</sub> Beaux arts
Horaire hebdomadaire	3 h	3 h	4 h	3 h	3 h
Total	75 h	75 h	100 h	75 h	75 h

À noter que tous les livres ont un index et que ceux de terminales se terminent par un chapitre « Problèmes de synthèse », dont la plupart sont extraits des différents baccalauréats africains.

## 3.1. Options académiques

Le choix des contenus tient compte des objectifs suivants :

- l'aptitude à mathématiser un problème ;
- les approches numériques qui facilitent la compréhension de certaines notions mathématiques ;
- les activités graphiques qui développent les qualités de soin et de précision, et permettent une interprétation de nombreux phénomènes scientifiques (mathématique, physique, économique) ou sociaux.

Le programme s'articule autour de quatre rubriques :

- activités numériques ;
- calcul littéral ;
- fonctions numériques ;
- organisation des données.

### Activités numériques

Le programme offre l'occasion de contrôler / développer les aptitudes des élèves aux techniques de calculs, d'encadrement et d'approximations.

### Calcul littéral

Cette rubrique vise autant la maîtrise d'une (relative) virtuosité dans certains calculs sur les polynômes (développement, réduction, factorisation) et les fractions rationnelles, que celle des différentes méthodes de résolution des équations et inéquations, des systèmes d'équations ou d'inéquations.

La résolution de problèmes concrets, qui permet de donner du sens à des techniques abstraites, reste (au moment de la mise en équation) un exercice difficile pour l'élève.

### Fonctions numériques

Les notions de fonction, d'ensemble de définition et de représentation graphique sont des thèmes nouveaux et délicats, promis à un grand avenir dans les classes ultérieures !

Ici encore, un support concret est privilégié, tant au niveau de la découverte des concepts que de leur exploitation : les représentations graphiques.

### Organisation des données

Les statistiques jouent un rôle important comme outil d'aide à la prise de décision dans un contexte donné. Il est cependant important de savoir qu'à chaque étape du traitement allant de données obser-

vées à des conclusions statistiques, un gain en signification a pour prix la perte d'une partie des informations. Le meilleur moyen pour les élèves de s'en convaincre est d'avoir eu l'occasion de mener, au moins une fois, une étude statistique complète, c'est-à-dire allant du relevé de données à l'élaboration d'une réponse à une question posée au départ.

### 3.2. Options pédagogiques

#### *Utilisation de la calculatrice*

La calculatrice est un outil qui, avec ou sans instructions officielles, connaît une large diffusion. Il est de l'intérêt des enseignants d'en tenir compte. S'il ne peut être encore question, vu les coûts, d'imposer son usage par des mentions dans les programmes officiels, les manuels-élève recensent les points de programmes ou les activités motivant son emploi et favorisant chez l'élève l'habitude d'une utilisation intelligente.

#### *Apprentissage du raisonnement*

- Les démonstrations de certaines propriétés et les résolutions d'exercices permettent de dégager de nombreuses **méthodes** qui enrichissent la boîte à outils de l'élève. Ces points méthodes sont repérés par l'avertisseur **M**.
- Les éléments de **logique** (notion de proposition, connecteurs, quantificateurs, méthodes de raisonnement : contraposition, absurde, récurrence) ne font pas l'objet d'un cours, mais sont introduits et réinvestis chaque fois que le besoin s'en fait sentir. La rubrique **L** a été créée à cet effet.
- Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes. Pour répondre à cette nécessité, des **travaux dirigés** sont proposés en fin de leçon. Outre un renforcement de l'apprentissage du raisonnement, ces travaux dirigés constituent soit un inventaire des exercices types de la leçon, soit un prolongement non exigible à certaines notions, soit encore une ouverture interdisciplinaire. Lorsqu'ils semblent un peu difficiles et montrent une propriété intéressante ou un type de raisonnement inédit, les solutions sont intégralement données ; sinon les solutions sont guidées par un questionnement.

### 3.3. Aspects culturels

#### *Les notes historiques*

Traitant d'événements ou de mathématiciens qui ont marqué l'évolution des mathématiques, les notes historiques doivent convaincre les élèves que les mathématiques se sont construites peu à peu, à travers recherches, tâtonnements et découvertes, et leur permettre de prendre contact avec quelques problèmes célèbres.

#### *Contextualisation des contenus*

Autant que faire se peut, les auteurs ont voulu prendre en compte l'environnement socioculturel africain, aussi bien pour lutter contre le désintérêt des élèves pour une discipline réputée importée, que pour les convaincre que cette réputation est fallacieuse (il y a des mathématiques dans la vie de l'Africain, comme dans celle de l'Indien ou de l'Asiatique) et leur donner le goût d'œuvrer au développement de leur continent.

#### *Les informations scientifiques*

Il s'agit cette fois de convaincre les élèves et, si besoin est, leurs professeurs que les mathématiques sont en constante évolution, comme de rester en contact avec quelques récentes découvertes (rôle croissant, en particulier, de l'informatique).

### 3.4. Utilisation du manuel

Le manuel n'est pas un livre saint, mais un outil pédagogique précieux comme le tableau ou le rétroprojecteur, au service du professeur et de l'élève. En plus de ses fonctions classiques d'aide aux préparations de cours et de recueil d'exercices, il a de nombreuses autres fonctions avant, pendant et après le cours qu'il convient de préciser ici.

Utilisation du manuel	Le professeur	L'élève
<i>avant le cours</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• lit le programme</li> <li>• lit les instructions officielles</li> <li>• étudie la traduction des contenus du programme dans le manuel</li> <li>• choisit, en relation avec le manuel :               <ul style="list-style-type: none"> <li>– la présentation d'une notion</li> <li>– des démarches</li> <li>– des motivations</li> <li>– des activités</li> <li>– des traces écrites</li> <li>– des exercices à traiter en classe ou à la maison</li> </ul> </li> <li>• repère les points précis d'utilisation du manuel pendant le cours</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• apprend la leçon précédente sur son livre et son cahier</li> <li>• prépare sur le cahier de recherche un tableau, une activité du livre, une figure, un organigramme, un exercice</li> <li>• étudie les pages de révisions</li> </ul>
<i>pendant le cours</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• fait analyser, commenter, identifier des planches, des tableaux, des figures, des textes du manuel</li> <li>• fait reconnaître une démarche, une construction, une démonstration déjà vue par l'élève</li> <li>• fait lire une définition, une propriété</li> <li>• fait critiquer cette lecture par la classe</li> <li>• fait reconnaître, rechercher dans le livre, recopier sur le cahier de cours :               <ul style="list-style-type: none"> <li>– des définitions ou propriétés</li> <li>– des notations de symboles, des figures, des schémas</li> </ul> </li> <li>• fait analyser des énoncés d'exercices</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• utilise le manuel selon les indications du professeur</li> <li>• exploite oralement ou sur le cahier de recherche des planches, des tableaux, des figures, des textes du manuel</li> <li>• recherche dans le manuel (utilisation de l'index, du sommaire) des définitions, propriétés, symboles, figures, schémas</li> <li>• analyse oralement des énoncés d'exercices</li> <li>• traite les exercices sur le cahier de recherche</li> </ul>
<i>après le cours</i>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• relit le cours sur le cahier, le livre</li> <li>• traite les exercices</li> </ul>

Il faut apprendre à l'élève à se servir du manuel où il trouvera les résultats essentiels, les méthodes de résolution de certains types de problèmes, des exercices d'entraînement et d'approfondissement qui lui permettront de contrôler ses acquis et de s'initier à la recherche.

Avant de proposer des exercices ou des travaux aux élèves, le professeur devra se poser les questions suivantes :

- font-ils partie des capacités requises dans cette classe ?
- constituent-ils des activités possibles en classe ou faut-il les réserver pour le travail à la maison ?
- leur contexte mathématique est-il compréhensible par un élève de ce niveau ?
- leur résolution relève-t-elle de l'entraînement, de l'approfondissement ? a-t-elle valeur de méthode ?

# 4 COMMENTAIRES SPECIFIQUES À LA CLASSE DE PREMIÈRE LITTÉRAIRE

La classe de première littéraire assure à la fois une continuité avec la classe de seconde littéraire et une préparation à la classe de terminale littéraire, où l'élève devra passer l'examen du baccalauréat.

## 4.1. Activités des élèves

Il est très important de mettre l'élève en activité, car selon la formule bien dite de Vergnaud, **l'action est source et critère de savoir**.

En continuité avec les classes du premier cycle et la seconde littéraire, on a voulu :

- faire précéder chaque notion ou propriété par une ou plusieurs activités de motivation ;
- mettre l'accent sur le raisonnement par la pratique des travaux dirigés ;
- proposer des problèmes concrets et leurs solutions complètes.

## 4.2. Présentation du manuel

### Organisation des chapitres

Chaque chapitre est découpé en leçons, chaque leçon en paragraphes, et chaque paragraphe en sous-paragraphes.

Les leçons se terminent par des exercices de fixation des savoirs et les chapitres par des exercices d'entraînement et d'approfondissement, classés par thème.

### Proposition de progression

3 heures hebdomadaires.

Semaine	Chapitres	Horaire
3	Problèmes du second degré	9 h
3	Représentations graphiques de fonctions	9 h
4	Dénombrement	12 h
3	Dérivation	9 h
4	Statistiques	12 h
4	Étude de fonctions	12 h
4	Suites numériques	12 h
<b>25</b>	<b>Total</b>	<b>75 h</b>

## 4.3. Points méthodes

On relève dans le manuel de première littéraire les points méthodes suivants :

Algèbre	Page	Analyse	Page
Écrire un polynôme du second degré sous forme canonique	7	Déterminer une équation de l'image d'une courbe par une des transformations usuelles du plan	28
Déterminer les racines d'un polynôme du second degré	7	Utiliser, dans le plan muni d'un repère orthogonal, la représentation graphique d'une fonction $f$ , pour construire celle de la fonction $g$ définie par : $g(x) =  f(x) $	30
Écrire un polynôme du second degré comme produit de facteurs du premier degré	8		
Résoudre une équation du second degré	8	Construire, dans le plan muni d'un repère orthogonal, la parabole d'équation $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ , après la construction du point $O'(\alpha ; \beta)$ , de la droite $(\Delta)$ d'équation $x = \alpha$ et la partie de cette parabole située à droite de $(\Delta)$	31
Étudier le signe d'un polynôme du second degré	14		

Organisation de données	Page	Analyse	Page
Déterminer le nombre de tirages de $p$ éléments d'un ensemble $E$ à $n$ éléments ( $p \leq n$ )	55	Construire, dans le plan muni d'un repère orthogonal, l'hyperbole d'équation $y = \frac{k}{x - \alpha} + \beta$ , après la construction du point $O'(\alpha ; \beta)$ , de la droite $(\Delta)$ d'équation $x = \alpha$ , la droite $(\Delta')$ d'équation $y = \beta$ et la partie de cette hyperbole située à droite de $(\Delta)$ .	33
Dénombrer un ensemble $E$ à l'aide des locutions « au moins » ou « au plus »	57		
Déterminer l'écart type d'une série statistique	87		
Construire un polygone des effectifs cumulés d'une série statistique à modalités regroupées en classes	91	Étudier la parité d'une fonction	38
Déterminer la médiane d'une série statistique à modalités regroupées en classes	92	Déterminer le coefficient directeur d'une droite	65
		Déterminer le nombre dérivé en $x_0$ d'une fonction dérivable en $x_0$ .	71
		Résoudre un problème d'optimisation	106
		Étudier une fonction	108
		Démontrer qu'une suite numérique est arithmétique	126
Démontrer qu'une suite numérique est géométrique	129		

## 4.4. Travaux dirigés

### 4.4.1. Objectifs généraux

- apprendre à chercher,
- faire fonctionner un outil,
- dégager des méthodes,
- donner un prolongement (non exigible) à certaines notions.

#### Apprendre à chercher

L'élève suit généralement deux étapes : la lecture de l'énoncé et la recherche d'une démarche.

#### Lecture de l'énoncé

Faite avec attention, elle permet à l'élève de bien distinguer :

- les données et contraintes (ce que l'on sait),
- les conclusions (ce que l'on cherche).

#### Recherche d'une démarche

L'élève dispose de connaissances minimales (définitions, propriétés). Il doit faire l'inventaire de celles qui ont un rapport avec les objets mathématiques entrant en jeu et sélectionner les plus opérationnelles.

Pour certains types de problèmes, la démarche est plus élaborée et donne lieu à des points méthodes :

- les problèmes de lieux,
- les problèmes de construction,
- les problèmes conduisant à une équation ou à une inéquation.

Les problèmes de modélisation et les problèmes ouverts sont des cadres appropriés pour mettre un élève en situation de recherche.

#### *Exemples*

- Résoudre une équation du second degré par la méthode d'Al-Khwarizmi (page 11).
- Résoudre une équation par la méthode d'Al-Khayyâm (pages 11 et 12).
- Résoudre une équation ou inéquation bicarrée (pages 13 et 16).
- Démontrer (page 27).

#### **Faire fonctionner un outil**

Il s'agit d'outils déjà formalisés dans le cours :

- propriétés,
- méthodes de résolution de problèmes,
- principes de démonstrations : utilisation d'un contre-exemple, raisonnement par absurde, implication, contraposition, équivalence.

#### *Exemples*

- Utiliser un graphique (pages 16, 36).
- Utiliser un diagramme ou un tableau à double entrée pour dénombrer (pages 47 et 48).

#### **Dégager des méthodes**

Certains travaux dirigés permettent de rappeler ou de mettre en place des points méthodes.

#### *Exemples*

- Étudier la parité d'une fonction (page 37).
- Dénombrer un ensemble E (pages 54, 55 et 56).
- Résoudre un problème d'optimisation (page 106).

#### **Donner un prolongement à certaines notions**

Certains travaux dirigés permettent de démontrer un résultat connu ou de donner un prolongement à une notion.

#### *Exemples*

- Déterminer l'aire d'un segment de parabole (page 26).
- Construire des tangentes à une parabole ou à une hyperbole (pages 72 et 73).

### **4.4.2. Conduite d'une séance de travaux dirigés**

#### **Choix d'un problème**

- Le professeur propose le travail dirigé adapté à l'objectif qu'il veut atteindre.
- Il précise alors aux élèves le temps de recherche, qui peut varier d'un travail dirigé à l'autre suivant la longueur ou la difficulté du problème.

#### **Gestion de la classe**

Après la phase de recherche, le professeur organise dans la classe un débat :

- les élèves sont invités à communiquer leurs idées, à partir desquelles on essaie de trouver une solution ;
- s'il n'y a aucune piste sérieuse, le professeur donne une, deux ou plusieurs indications suivant la réaction des élèves.

#### **Rédaction d'une solution**

Lorsqu'on a trouvé une solution, le professeur demande aux élèves de la rédiger.

Rédiger, en mathématique, c'est mettre en évidence les grandes lignes et les articulations du raisonnement. Si cela s'est fait souvent à l'aide d'un schéma ou d'un organigramme au premier cycle, l'accent sera mis au second cycle sur une rédaction en français. En effet, c'est d'après ses rapports et ses projets que l'élève, cadre de demain, sera jugé par ses collègues et ses supérieurs hiérarchiques.

Le professeur lui apprendra donc à être précis, concis et clair.

# 5 ANALYSE DES CHAPITRES

## 1. Problèmes du second degré

(pages 5 à 22 du livre de l'élève)

### OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- consolider les acquis de l'élève sur la résolution d'équations et d'inéquations du second degré ;
- renforcer l'aptitude de l'élève à mathématiser une situation concrète.

### COMMENTAIRES

Ce chapitre donne en particulier l'occasion de découvrir la méthode du discriminant (calcul et utilisation).

Les exposés théoriques devront être évités, on privilégiera les méthodes essentielles.

Il est indispensable de bien entraîner les élèves à l'étude du signe d'un polynôme, car il devra réinvestir souvent ce savoir-faire dans les problèmes d'analyse de première et terminale.

L'accent devra être mis sur l'acquisition de l'aptitude à organiser la mise en équation (ou inéquation) d'un problème (concret), sur la culture de l'esprit critique (par exemple, l'appréciation de la pertinence d'un résultat).

### SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

#### savoirs

##### Équations du second degré

- Polynômes du second degré :
  - définition ;
  - forme canonique ;
  - discriminant ;
  - expressions des racines en fonction des coefficients.
- Somme et produit des solutions d'une équation du second degré :
  - détermination ;
  - utilisation.

##### Inéquations du second degré

- Résolution d'une inéquation du second degré :
  - signe d'un polynôme du second degré ;
  - résolution d'inéquations du second degré.

##### Résolution de problèmes

#### savoir-faire

- Reconnaître un polynôme du second degré.
- Déterminer la forme canonique d'un polynôme du second degré.
- Calculer le discriminant d'un polynôme du second degré.
- Déterminer les racines d'un polynôme du second degré lorsqu'elles existent.
- Factoriser un polynôme du second degré dont on connaît les racines.
- Résoudre une équation du second degré.
- Déterminer la somme et le produit des solutions d'une équation du second degré lorsqu'elles existent.
- Utiliser la somme et/ou le produit pour déterminer une solution connaissant l'autre.
- Déterminer deux nombres dont on connaît la somme et le produit.
- Déterminer le signe d'un polynôme du second degré.
- Résoudre une inéquation du second degré.
- Résoudre un problème concret conduisant à une équation ou à une inéquation du second degré.

**EXERCICES DU MANUEL**

**Exercices du cours**

◇ **Exercice 1.a p. 13**

- a)  $P(x) = (x - 3)^2 + 1$ .
- b)  $P(x) = 2[(x + 1)^2 + \frac{3}{2}]$ .
- c)  $P(x) = (x - 2)^2 - 9$ .
- d)  $P(x) = 2[(x - \frac{3}{4})^2 + \frac{23}{16}]$ .

◇ **Exercice 1.b p. 13**

- a)  $P(-2) = 0$  et  $P(3) = 0$ .
- b)  $P(1) = 0$  et  $P(\frac{2}{3}) = 0$ .
- c)  $P(-\frac{1}{2}) = 0$  et  $P(3) = 0$ .
- d)  $P(-1) = 0$  et  $P(4) = 0$ .

◇ **Exercice 1.c p. 13**

- a)  $\Delta = -3$  ; donc l'équation n'a pas de solution
- b)  $\Delta = 25$  ; donc l'équation a deux solutions
- c)  $\Delta = 0$  ; donc l'équation a une solution.

◇ **Exercice 1.d p. 13**

- a) Si ces deux nombres existent, ils sont solutions de :  $x^2 + x - 6 = 0$ . Ce sont :  $-3$  et  $2$ .
- b) Si ces deux nombres existent, ils sont solutions de :  $2x^2 + 3x - 20 = 0$ . Ce sont :  $-4$  et  $\frac{5}{2}$ .
- c) Si ces deux nombres existent, ils sont solutions de :  $x^2 - 7x + 12 = 0$ . Ce sont :  $3$  et  $4$ .
- d) Si ces deux nombres existent, ils sont solutions de :  $x^2 - 2x - 15 = 0$ . Ce sont :  $-3$  et  $5$ .

◇ **Exercice 1.e p. 14**

a)

$x^2 + 2 \times 6x + 6^2 = 108 + 36$   
 $(x + 6)^2 = 12^2$   
 $x = 6$  ou  $x = -18$ .

b)

$x^2 + 2 \times 7x + 7^2 = 176 + 49$   
 $(x + 7)^2 = 15^2$   
 $x = 8$  ou  $x = -22$ .

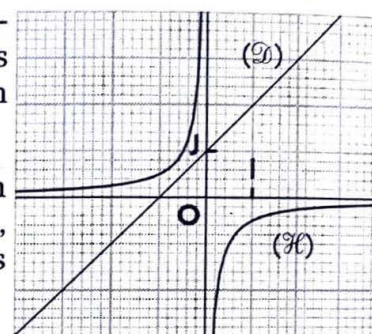
◇ **Exercice 1.f p. 14**

- a)  $13 + 2 \times 1 - 3 = 0$ .
- b)  $(x - 1)(x^2 + x + 3) = x^3 + 2x - 3$ .
- c) Le discriminant de l'équation  $x^2 + x + 3 = 0$  est :  $\Delta = -11$  ; donc, 1 est la seule solution de (E).

◇ **Exercice 1.g p. 14**

- a) 0 n'est pas solution de l'équation.  
 $2x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = -\frac{1}{2x}$ .  
 Soit (D) la droite d'équation :  $y = x + 1$  ;  
 (H) l'hyperbole d'équation :  $y = -\frac{1}{2x}$ .

Les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersection des courbes (D) et (H).



(D) et (H) n'ont aucun point d'intersection, donc l'équation n'a pas de solution.

- b) On peut utiliser l'une des méthodes suivantes :  
 (1) Étudier l'intersection de la droite (D) d'équation :  $y = x - 1$  et de l'hyperbole (H) d'équation :  $y = \frac{6}{x}$ .  
 ou

(2) Étudier l'intersection de la droite (D') d'équation  $y = x + 6$  et de la parabole (P) d'équation :  $y = x^2$ .  
 Les courbes se coupent en deux points qui ont pour abscisses, par lecture graphique, environ  $-2$  et  $3$ .  
 On vérifie par le calcul que  $-2$  et  $3$  sont solutions de l'équation.

- c) On étudie l'intersection de :  
 (D), la droite d'équation :  $y = x - 4$  ;  
 (H), l'hyperbole d'équation :  $y = -\frac{1}{x}$  ;

ou de : (D'), la droite d'équation :  $y = 4x - 1$  ;  
 (P), la parabole d'équation :  $y = x^2$ .

Les courbes se coupent en deux points qui ont pour abscisses, par lecture graphique, environ  $0,3$  et  $3,7$ .

- d) On utilise l'intersection de :  
 (D), la droite d'équation :  $y = 2x - 1$  ;  
 (H), l'hyperbole d'équation :  $y = \frac{3}{x}$  ;  
 ou de : (D'), la droite d'équation :  $y = x + 3$  ;  
 (P), la parabole d'équation :  $y = 2x^2$ .

Les courbes se coupent en deux points qui ont pour abscisses, par lecture graphique, environ  $-1$  et  $\frac{3}{2}$ .  
 On vérifie par le calcul que  $-1$  et  $\frac{3}{2}$  sont solutions de l'équation.

◇ Exercice 2.a p. 17

a) On a :  $P(x) = (x - 3)^2$ .

$x$	$-\infty$	3	$+\infty$
$P(x)$	+	0	+

b) On a :  $P(x) = 3(x - 2)(x - \frac{4}{3})$ .

$x$	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	2	$+\infty$	
$P(x)$	+	0	-	0	+

c) On a :  $P(x) = -2(x + 3)(x - \frac{1}{2})$ .

$x$	$-\infty$	-3	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$P(x)$	-	0	+	0	-

d) On a :  $\Delta = -15$ .

Pour tout nombre réel  $x$ ,  $P(x) > 0$ .

◇ Exercice 2.b p. 17

a) On a :  $P(x) = -(x - 3)(x + 3)$ .

$x$	$-\infty$	-3	3	$+\infty$	
$P(x)$	-	0	+	0	-

L'ensemble des solutions est :  $[-3 ; 3]$ .

▢ Exercices d'apprentissage

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

◇ Exercice n° 1 p. 21

a)  $P(x) = (x - 1)^2 + 4$ .

b)  $P(x) = (x + 5)^2 - 9$ .

c)  $P(x) = 4[(x - \frac{3}{2})^2 - 4]$ .

d)  $P(x) = -3[(x - 2)^2 - \frac{20}{3}]$ .

◇ Exercice n° 2 p. 21

a)  $P(x) = (x - 1)(2x + 5)$ .

b)  $P(x) = (x + 1)(3x - 4)$ .

c)  $P(x) = (-2x + 1)(x + 3)$ .

◇ Exercice n° 3 p. 21

$P(x) = a(x + 1)(x - 2)$ , avec  $a \in \mathbb{R}^*$ .

◇ Exercice n° 4 p. 21

$P(x) = a(x + 3)(x - 2)$ , avec  $a \in \mathbb{R}^*$ .

$P(0) = 4 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$ ; donc :  $P(x) = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 4$ .

◇ Exercice n° 5 p. 21

$P(x) = a(x - 1)^2$ , avec  $a \in \mathbb{R}^*$ .

$P(0) = -2 \Leftrightarrow a = -2$ ; donc :  $P(x) = -2x^2 + 4x - 2$ .

b) On a :  $P(x) = 2(x + 1)(x - \frac{3}{2})$ .

$x$	$-\infty$	-1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$P(x)$	+	0	-	0	+

L'ensemble des solutions est :  $]-\infty ; -1[ \cup ]\frac{3}{2} ; +\infty[$ .

c) On a :  $\Delta = -19$ .

Pour tout nombre réel  $x$ ,  $P(x) < 0$ .

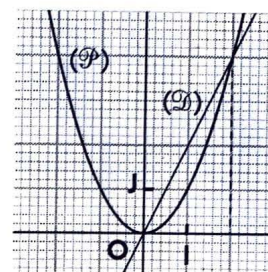
L'ensemble des solutions est  $\mathbb{R}$ .

d) On a :  $P(x) = (2x - 3)^2$ .

L'ensemble des solutions est :  $\{\frac{3}{2}\}$ .

◇ Exercice 2.c p. 17

Les solutions sont les abscisses des points de  $(\mathcal{P})$  situés au-dessus de  $(\mathcal{D})$ .



Par lecture graphique, on trouve :

$]-\infty ; 0] \cup [2 ; +\infty[$ .

◇ Exercice 2.d p. 17

On a :  $P(x) = (x^2 + 3)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$ .

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$P(x)$	+	0	-	0	+

L'ensemble des solutions est :  $[-\sqrt{2} ; \sqrt{2}]$ .

◇ Exercice n° 6 p. 21

a)  $P(x) = (x - 1)(x + 7)$ .

b)  $\Delta = -4$ ; on ne peut factoriser  $P(x)$ .

c)  $P(x) = -2(x + 1)(x - 3)$ .

d)  $P(x) = -(3x - 1)^2$ .

◇ Exercice n° 7 p. 21

a)  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = \frac{11}{7}$ .

b)  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = -\frac{1}{2}$ .

c)  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = -\frac{4}{5}$ .

◇ Exercice n° 8 p. 21

a)  $\Delta = 49$ ; l'équation a deux solutions :  $-\frac{1}{2}$  et 3.

b)  $\Delta = 4$ ; l'équation a deux solutions : 1 et  $\frac{3}{2}$ .

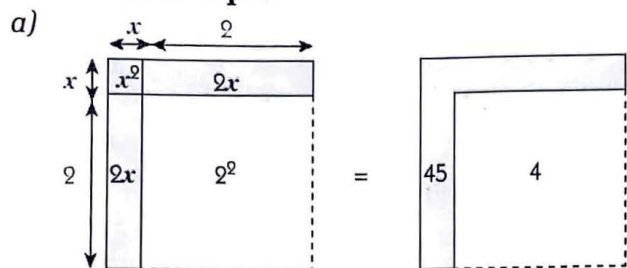
c)  $\Delta = 100$ ; l'équation a deux solutions :  $\frac{2}{3}$  et 4.

d)  $\Delta = 0$ ; l'équation a une solution :  $\sqrt{3}$ .

e)  $\Delta = 169$ ; l'équation a deux solutions :  $-\frac{3}{5}$  et 2.

f)  $\Delta = -47$ ; l'équation n'a pas de solution.

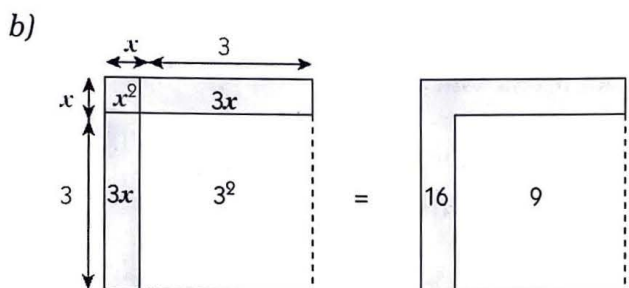
◇ Exercice n° 9 p. 21



$$x^2 + 2 \times 2x + 2^2 = 45 + 4$$

$$(x + 2)^2 = 49$$

$$x = 5 \quad \text{ou} \quad x = -9.$$



$$x^2 + 2 \times 3x + 3^2 = 16 + 9$$

$$(x + 3)^2 = 25$$

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -8.$$

◇ Exercice n° 10 p. 21

Si ces deux nombres existent, ils sont solutions de :  $X^2 - SX + P = 0$ .

- a) Ce sont : - 2 et 5.  
 b) Ce sont : 2 et 3.  
 c) Pas de solution.  
 d) Ils sont confondus à : - 3.

◇ Exercice n° 11 p. 21

1. a)  $\Delta = 3\,996\,000$  ; donc l'équation a deux solutions.  
 b) La somme :  $S = 2\,000$  ; le produit :  $P = 1\,000$ .  
 c)  $P > 0$ , donc les solutions sont de même signe. De plus,  $S > 0$  ; donc les solutions sont positives.  
 2.  $\Delta > 0$  ; donc l'équation a deux solutions. La somme :  $S = -2\,000$  et le produit :  $P = 1\,000$ .  $P > 0$ , donc les solutions sont de même signe. De plus,  $S < 0$  ; donc les solutions sont négatives.

◇ Exercice n° 12 p. 21

1.  $\Delta = 5 + 2\sqrt{6}$  ; donc l'équation a deux solutions.  
 2. La somme :  $S = \sqrt{3} - \sqrt{2}$  ; le produit :  $P = -\sqrt{6}$ . On a :  $P < 0$  ; donc les deux solutions sont de signes contraires.  
 3. On a :  $x_1 + x_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$  et  $x_1 \times x_2 = -\sqrt{6}$ . Or :  $\sqrt{3} \times (-\sqrt{2}) = -\sqrt{6}$  ; donc,  $x_1 = \sqrt{3}$  et  $x_2 = -\sqrt{2}$ .

◇ Exercice n° 13 p. 21

1.  $(-6)^2 - 9 \times (-6) - 90 = 0$ .  
 2.  $x_1 = -6$  et  $x_1 + x_2 = 9$  ; donc :  $x_2 = 15$ .

◇ Exercice n° 14 p. 21

1.  $12(-1)^2 - 13(-1) - 25 = 0$ .  
 2.  $x_1 = -1$  et  $x_1 \times x_2 = -\frac{25}{12}$  ; donc :  $x_2 = \frac{25}{12}$ .

INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

◇ Exercice n° 15 p. 21

- a) On a :  $\Delta = -15$ .  
 Pour tout nombre réel  $x$ ,  $P(x) > 0$ .  
 b) On a :  $P(x) = (-2x + 1)(x - 3)$ .

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$3$	$+\infty$	
$P(x)$	-	0	+	0	-

- c) On a :  $P(x) = -(3x - 1)^2$ .  
 Donc, pour tout nombre réel  $x$ ,  $P(x) \leq 0$ .  
 d) On a :  $P(x) = (x - 2)(x - 3)$ .

$x$	$-\infty$	$2$	$3$	$+\infty$	
$P(x)$	+	0	-	0	+

◇ Exercice n° 16 p. 21

- a) On a :  $P(x) = (2 + 3x)(2 - 3x)$ .

$x$	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	
$P(x)$	-	0	+	0	-

$$S = ]-\infty ; -\frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3} ; +\infty[.$$

- b) On a :  $P(x) = -(x - 3)(x + 4)$ .

$x$	$-\infty$	$-4$	$3$	$+\infty$	
$P(x)$	-	0	+	0	-

$$S = [-4 ; 3].$$

- c) On a :  $P(x) = (x + 1)(2x - 3)$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$P(x)$	+	0	-	0	+

$$S = ]-\infty ; -1[ \cup ]\frac{3}{2} ; +\infty[.$$

- d) On a :  $P(x) = (2x + 7)(4x + 3)$ .

$x$	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$+\infty$	
$P(x)$	+	0	-	0	+

$$S = ]-\frac{7}{2} ; -\frac{3}{4}[.$$

- e) On a :  $\Delta' = -8$ .  
 Pour tout nombre réel  $x$ ,  $P(x) < 0$  ; donc :  $S = \mathbb{R}$ .  
 f) On a :  $P(x) = -(3x - 2)^2$ .  
 $S = \emptyset$ .

◇ Exercice n° 17 p. 21

a) On a :  $(I) \Leftrightarrow x(1 - 4x) \geq 0$ .

$$S = [0 ; \frac{1}{4}]$$

b) On a :  $(I) \Leftrightarrow 3x^2 - x + 5 > 0$ .

$$P(x) = 3x^2 - x + 5 ; \Delta = -59$$

Pour tout nombre réel  $x$ ,  $P(x) > 0$  ; donc :  $S = \mathbb{R}$ .

c) On a :  $(I) \Leftrightarrow (x + 7)(5x + 1) < 0$ .

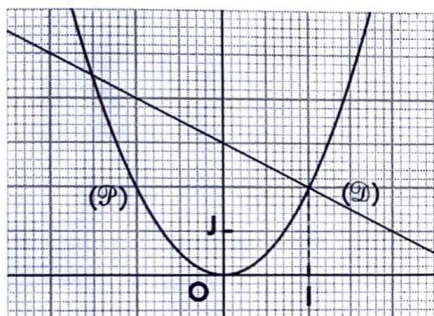
$$S = ]-7 ; -\frac{1}{5}[$$

d) On a :  $(I) \Leftrightarrow 4x(x^2 + 1) < 0$ .

$$S = ]-\infty ; 0[$$

◇ Exercice n° 18 p. 21

1.  $(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{P})$  sont représentées ci-dessous.



2. a) •  $(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{P})$  se coupent aux points d'abscisses :

$$-\frac{3}{2} \text{ et } 1 ;$$

• sur les intervalles  $]-\infty ; -\frac{3}{2}[$  et  $]1 ; +\infty[$ ,  $(\mathcal{P})$  est située au-dessus de  $(\mathcal{D})$  ;

• sur l'intervalle  $]-\frac{3}{2} ; 1[$ ,  $(\mathcal{P})$  est située au-dessous de  $(\mathcal{D})$ .

b) On vérifie ces résultats en étudiant le signe du polynôme :  $P(x) = 2x^2 + x - 3$ .

◇ Exercice n° 19 p. 21

1. Les vérifications sont immédiates.

$$2. a) S = [2 - \sqrt{2} ; 2 + \sqrt{2}]$$

$$b) -\frac{1}{2}x^2 + 2x < 0 \Leftrightarrow P(x) < 0$$

$$S = ]-\infty ; 0[ \cup ]4 ; +\infty[$$

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

◇ Exercice n° 20 p. 22

	Banque A	Banque B
Nombre d'actions	$x$	$x - 100$
Valeur d'une action	$y$	$y + 300$
Somme totale	600 000	600 000

$$\text{On a le système : } \begin{cases} xy = 600\,000 \\ (x - 100)(y + 3\,000) = 600\,000 \end{cases}$$

On trouve :  $x = 200$  et  $y = 3\,000$ . Bintou a acheté 200 actions de la banque A, à 3 000 F CFA l'action.

◇ Exercice n° 21 p. 22

Désignons par :

$x$  le nombre de mètres de tissu acheté ;

$y$  le prix du mètre de tissu.

$$\text{On a le système : } \begin{cases} xy = 10\,800 \\ (x + 9)(y - 100) = 10\,800 \end{cases}$$

$$\text{Le système équivaut à : } \begin{cases} y = \frac{10\,800}{x} & (1) \\ x^2 + 9x - 972 = 0 & (2) \end{cases}$$

L'équation (2) a pour solution : 27.

$$\text{On en déduit que : } y = \frac{10\,800}{27} = 400$$

On a acheté 27 mètres de tissu, à 400 F CFA le mètre.

◇ Exercice n° 22 p. 22

	Automobiliste A	Automobiliste B
Vitesse	$v$	$v + 20$
Temps	$t$	$t - 1$
Trajet	400	400

$$\text{On a le système : } \begin{cases} vt = 400 \\ (v + 20)(t - 1) = 400 \end{cases}$$

$$\text{Le système équivaut à : } \begin{cases} v \neq \frac{400}{t} & (1) \\ t^2 - t - 20 = 0 & (2) \end{cases}$$

L'équation (2) a pour solution : 5.

$$\text{Donc : } v = \frac{400}{5} = 80$$

On en déduit que :  $v_A = 80$  km/h et  $t_A = 5$  h ;

$v_B = 100$  km/h et  $t_B = 4$  h.

◇ Exercice n° 23 p. 22

Soit  $P$  le prix d'un article.

• Avec  $x$  % de remise,

$$\text{Yannick l'achète à : } P\left(1 - \frac{x}{100}\right)$$

• Avec  $y$  % supplémentaire de remise,

$$\text{il l'achète à : } P\left(1 - \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{y}{100}\right)$$

On a le système :

$$\begin{cases} 0 \leq x < y \\ x + y = 10 \\ 100\,000\left(1 - \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{y}{100}\right) = 90\,160 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < y \\ x + y = 10 \\ (100 - x)(100 - y) = 9\,016 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < y \\ x + y = 10 \\ xy = 16 \end{cases}$$

$x$  et  $y$  ( $0 \leq x < y$ ) sont les solutions de l'équation :  $x^2 - 10x + 16 = 0$ .

Cette équation a deux solutions : 2 et 8.

Donc, Yannick bénéficie habituellement d'une remise de 2 %.

Le jour de la solde, la réduction supplémentaire est de 8%.

◇ Exercice n° 24 p. 22

Soit  $v$  la vitesse en montée ; donc la vitesse en descente est  $v + 10$ . On a :

$$\frac{15}{v} + \frac{20}{v+10} + \frac{30}{v} = 2 \Leftrightarrow 2v^2 - 45v - 450 = 0 \text{ (E)}$$

L'équation (E) a deux solutions :  $-\frac{15}{2}$  et 30 ;

$v$  étant positif, la solution acceptable est :  $v = 30$ .  
Donc, la vitesse du cycliste en montée est de 30 km/h et celle en descente est de 40 km/h.

◇ Exercice n° 25 p. 22

Désignons par :

$x$  le nombre de personnes entre lesquelles on doit partager les 30 000 F CFA ;

$y$  la part de chacune d'elles.

On a le système : 
$$\begin{cases} xy = 30\,000 \\ (x-4)(y+1\,250) = 30\,000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{30\,000}{x} \\ x - \frac{96}{x} - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{30\,000}{x} \\ x^2 - 4x - 96 = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2).$$

L'équation (2) a deux solutions :  $-8$  et  $12$ .

$x$  étant positif, la solution acceptable est  $x = 12$ .

On en déduit que :  $y = \frac{30\,000}{12} = 2\,500$ .

On doit partager les 30 000 entre 12 personnes et la part de chacune d'elles est de 2 500 F CFA.

◇ Exercice n° 26 p. 22

Désignons par :  $x$  le premier taux de placement.

• Après un an, la somme du capital et des intérêts produits est :  $2\,000\,000 \times \left(1 + \frac{x}{100}\right)$ .

• Les intérêts produits au cours de la deuxième année sont :  $2\,000\,000 \times \left(1 + \frac{x}{100}\right) \times \frac{x+2}{100}$ .

Donc :  $2\,000\,000 \times \left(1 + \frac{x}{100}\right) \times \frac{x+2}{100} = 147\,000$  ;

ou :  $x^2 + 102x - 535 = 0$  (E).

L'équation (E) a deux solutions :  $-107$  et  $5$ .

$x$  étant positif, la solution acceptable est :  $x = 5$ .

Le premier taux de placement est de 5 %.

◇ Exercice n° 27 p. 22

Désignons par :  $x$  le placement du premier ;  
 $y$  le bénéfice du second.

On a :

placement	$x$	1 600 000
bénéfice	600 000	$y$

$x > 1\,600\,000$  ; donc :  $y < 600\,000$  ;

$$(x + 600\,000) + (1\,600\,000 + y) = 5\,000\,000.$$

Donc, on a le système :

$$\begin{cases} xy = 600\,000 \times 1\,600\,000 \\ x + y = 5\,000\,000 - (600\,000 + 1\,600\,000) \end{cases}$$

S'ils existent,  $x$  et  $y$  sont les solutions de l'équation :

$$x^2 - 28 \times 10^5 x + 960 \times 10^9 \text{ (E)}$$

On a :  $\Delta = (20 \times 10^5)^2$ .

L'équation (E) a deux solutions :

400 000 et 2 400 000.

Le placement du premier est de 2 400 000 F CFA et le bénéfice du second est de 400 000 F CFA.

◇ Exercice n° 28 p. 22

Désignons par :  $x$  le nombre de vestes achetées ;

$y$  le prix de la veste avant le rabais.

On a le système : 
$$\begin{cases} (x-4)y = 800\,000 \\ x(y-5\,000) = 840\,000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, y > 5\,000 \\ y = \frac{800\,000}{x-4} \\ x - \frac{640}{x-4} + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, y > 5\,000 \\ y = \frac{800\,000}{x-4} \\ x^2 + 4x - 672 = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2).$$

L'équation (2) a deux solutions :  $-28$  et  $24$ .

$x$  étant supérieur à 4, la solution acceptable est :

$$x = 24.$$

On en déduit que :  $y = \frac{800\,000}{24-4} = 40\,000$ .

Le commerçant a acheté 24 vestes et le prix de la veste avant le rabais est de 40 000 F CFA.

◇ Exercice n° 29 p. 22

Soit  $x$  le nombre cherché.

$x$  est un nombre positif tel que :

$$(160+x)(120-x) = \frac{160 \times 120}{2} ;$$

c'est-à-dire :  $x^2 + 40x - 9\,600 = 0$  (E).

L'équation (E) a deux solutions :  $-120$  et  $80$ .

$x$  étant positif, la solution acceptable est :  $x = 80$ .

Il faut augmenter le plus grand côté et diminuer le plus petit côté de 80 mètres.

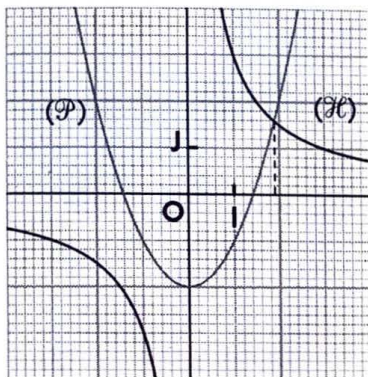
## Exercices d'approfondissement

### ◇ Exercice n° 30 p. 22

- $P(1) = 0$ .
- $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$ .
- L'ensemble de solutions est :  $\{-3 ; 1 ; 2\}$ .

### ◇ Exercice n° 31 p. 22

- a) 0 n'est pas solution de l'équation.  
 $x^3 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2 = \frac{3}{x}$ .
- b)  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{H})$  ci-dessous.



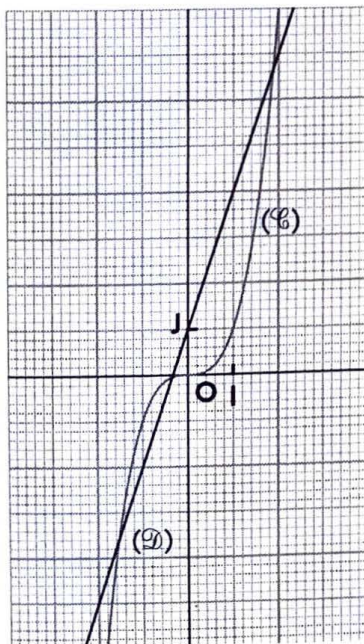
c)  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{H})$  se coupent en un unique point qui a pour abscisse, par lecture graphique, environ 1,9.

2.  $x^3 - 3x - 1 \Leftrightarrow x^3 = 3x + 1$ .

Soit  $(\mathcal{C})$  la courbe d'équation :  $y = x^3$  ;

$(\mathcal{D})$  la droite d'équation :  $y = 3x + 1$ .

$(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{D})$  ci-dessous.



Donc, l'équation  $x^3 - 3x - 1 = 0$  a trois solutions.

### ◇ Exercice n° 32 p. 22

Désignons par :

$x$  le nombre de mois de placement ;

$V(t)$  le capital et les intérêts acquis pendant  $x$  mois au taux annuel  $t$ .

On a :

$$\begin{aligned} \bullet V(8\%) &= 10\,000 \times \left(1 + \frac{8}{100}x\right) \\ &= 10\,000 \times \left(1 + \frac{8x}{1200}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet V(12\%) &= V(8\%) \times \left(1 + \frac{12x}{1200}\right) \\ &= 10\,000 \times \left(1 + \frac{8x}{1200}\right) \left(1 + \frac{12x}{1200}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } 10\,000 \times \left(1 + \frac{8x}{1200}\right) \left(1 + \frac{12x}{1200}\right) &= 12\,650 \\ \Leftrightarrow x^2 + 250x - 3\,975 &= 0 \quad (\text{E}). \end{aligned}$$

L'équation (E) a deux solutions :  $-265$  et  $15$ .

$x$  étant positif, la solution acceptable est :  $x = 15$ .

La durée du premier placement est de 15 mois.

### ◇ Exercice n° 33 p. 22

Désignons par :  $x$  le taux d'intérêt annuel de la première année.

• L'emprunt et les intérêts générés à devoir à la fin de la première année sont :  $500\,000 \times \left(1 + \frac{x}{100}\right)$ .

• L'emprunt et les intérêts générés à devoir à la fin de la deuxième année sont :

$$\left[500\,000 \times \left(1 + \frac{x}{100}\right) - 300\,000\right] \times \left(1 + \frac{x+2}{100}\right).$$

On a :

$$\begin{aligned} \left[500\,000 \times \left(1 + \frac{x}{100}\right) - 300\,000\right] \times \left(1 + \frac{x+2}{100}\right) \\ = 280\,000 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 142x - 1520 = 0 \quad (\text{E}).$$

L'équation (E) a deux solutions :  $-152$  et  $10$ .

$x$  étant positif, la solution acceptable est :  $x = 10$ .

Le taux d'intérêt de la première année est de 10 %.

## 2. Représentations graphiques de fonctions

(pages 23 à 42 du livre de l'élève)

### OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- mettre en place des méthodes de représentations graphiques de certaines fonctions à partir de celle d'une fonction usuelle et d'une transformation simple ;
- étudier les éléments de symétrie d'une courbe.

### COMMENTAIRES

On utilisera de préférence un repère orthogonal pour construire les représentations graphiques. Tous les résultats repris ou présentés dans les tableaux récapitulatifs sont évidemment à connaître. Tout le long de ce chapitre, la pratique des méthodes de construction continuera à être entretenue.

### SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

#### savoirs

#### Fonctions élémentaires

- Étude de la fonction cube (variations et représentation graphique).

- Tableau récapitulatif (tableau de variation et représentation graphique) des fonctions élémentaires :

$$x \mapsto ax + b, \quad x \mapsto |x|, \quad x \mapsto ax^2, \quad x \mapsto \frac{k}{x}, \\ x \mapsto \sqrt{x}, \quad x \mapsto x^3.$$

#### Fonctions et transformations du plan

- Transformations usuelles.

*Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).*

Caractérisations et expressions analytiques de :

- la symétrie orthogonale d'axe (OI) ;
- la symétrie orthogonale d'axe (OJ) ;
- la symétrie de centre O ;
- la translation de vecteur  $\vec{u}$ .

- Représentations graphiques des fonctions associées à une fonction  $f$  :  $x \mapsto -f(x)$  ;  $x \mapsto |f(x)|$  ;  $x \mapsto (x - \alpha) + \beta$ .

- Application à la construction de :

- la parabole d'équation  $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$  ;
- l'hyperbole d'équation  $y = \frac{k}{x - \alpha} + \beta$ .

#### Parité et éléments de symétrie

- Fonctions paires, fonctions impaires.

- Définition d'une fonction paire ; interprétation graphique.

- Définition d'une fonction impaire ; interprétation graphique.

#### savoir-faire

- Tracer la représentation graphique d'une fonction élémentaire.

- Construire l'image ( $\mathcal{C}'$ ) d'une courbe ( $\mathcal{C}$ ) par chacune des transformations usuelles du plan.

- Déterminer une équation de l'image ( $\mathcal{C}'$ ) d'une courbe ( $\mathcal{C}$ ) par chacune des transformations usuelles du plan, connaissant une équation de ( $\mathcal{C}$ ).

- Construire les représentations graphiques d'une fonction associée à une fonction  $f$ , connaissant celle de  $f$ .

- Construire la représentation graphique d'une fonction :

- du type  $x \mapsto a(x - \alpha)^2 + \beta$  ;
- du type  $x \mapsto \frac{k}{x - \alpha} + \beta$ .

- Étudier la parité d'une fonction.

- Trouver l'ensemble d'étude d'une fonction paire ou impaire.

- Construire la représentation graphique d'une fonction paire ou impaire.

- Reconnaître la représentation graphique d'une fonction paire ou impaire.

Compléter, lorsque cela est possible, la représentation graphique d'une fonction sachant qu'elle est paire ou impaire.

**EXERCICES DU MANUEL**

**Exercices du cours**

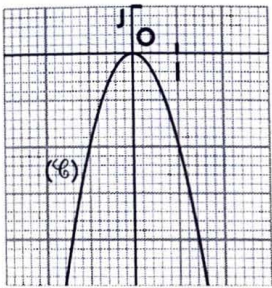
◇ Exercice 1.a p. 27

1. On a :  $a = -2$ .

Tableau de variation

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$	↗ 0 ↘		

2. Représentation graphique ( $\mathbb{C}$ )



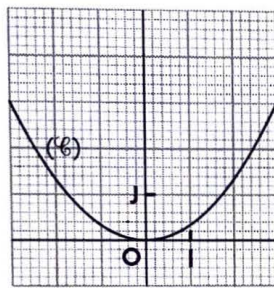
◇ Exercice 1.b p. 27

1. On a :  $a = \frac{1}{3}$ .

Tableau de variation

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$	↘ 0 ↗		

2. Représentation graphique ( $\mathbb{C}$ )



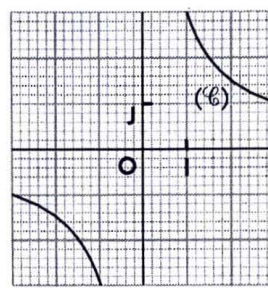
◇ Exercice 1.c p. 27

1. On a :  $k = 3$ .

Tableau de variation

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$	↘ ↘		

2. Représentation graphique ( $\mathbb{C}$ )



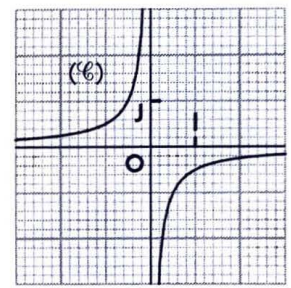
◇ Exercice 1.d p. 27

1. On a :  $k = -\frac{1}{2}$ .

Tableau de variation

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$	↗ ↗		

2. Représentation graphique ( $\mathbb{C}$ )

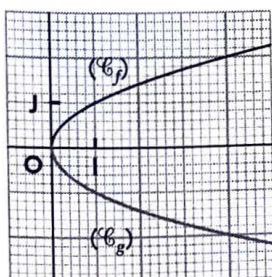


◇ Exercice 2.a p. 34

- a) Une équation de ( $\mathcal{D}'$ ) est :  $x - 2y + 1 = 0$ .
- b) Une équation de ( $\mathcal{D}'$ ) est :  $-x + 2y + 1 = 0$ .
- c) Une équation de ( $\mathcal{D}'$ ) est :  $-x - 2y + 1 = 0$ .
- d) Une équation de ( $\mathcal{D}'$ ) est :  $x + 2y = 0$ .

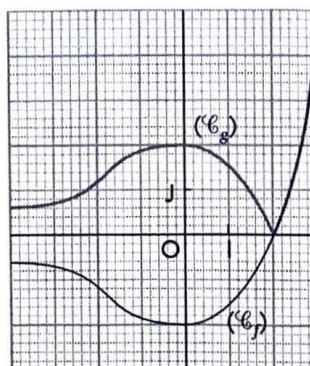
◇ Exercice 2.b p. 34

( $\mathcal{C}_f$ ) et ( $\mathcal{C}_g$ ) sont symétriques par rapport à (OI).



◇ Exercice 2.c p. 34

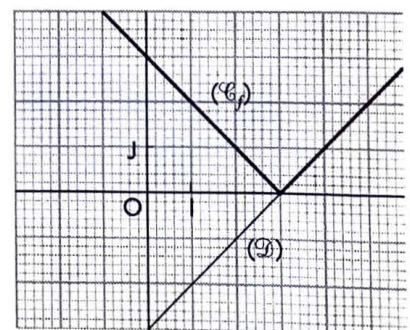
( $\mathcal{C}_g$ ) est la réunion de la partie de ( $\mathcal{C}_f$ ) située au-dessus de (OI) et du symétrique, par rapport à (OI), de la partie de ( $\mathcal{C}_f$ ) située au-dessous de (OI).



Exercice 2.d p. 34

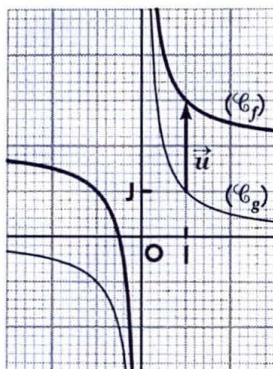
Soit ( $\mathcal{D}$ ) la droite d'équation  $y = x - 3$ . ( $\mathcal{C}_f$ ) est la réunion de deux demi-droites :

- la partie de ( $\mathcal{D}$ ) située au-dessus de (OI) ;
- le symétrique, par rapport à (OI), de la partie de ( $\mathcal{D}$ ) située au-dessous de (OI).



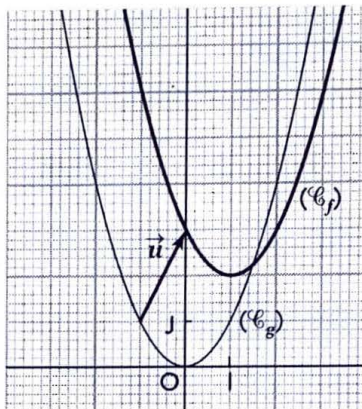
◇ Exercice 2.e p. 34

Soit  $(\mathcal{C}_g)$  la représentation graphique de la fonction définie par :  $g(x) = \frac{1}{x}$ .  
 $(\mathcal{C}_f)$  est l'image de  $(\mathcal{C}_g)$  par la translation de vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ .



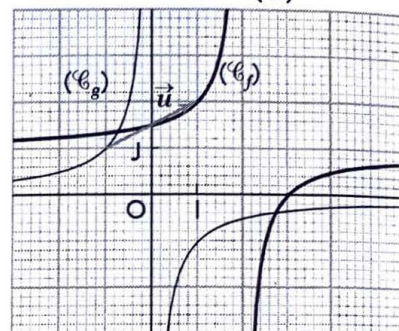
◇ Exercice 2.f p. 34

On a :  $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ .  
 Soit  $(\mathcal{C}_g)$  la représentation graphique de la fonction définie par :  $g(x) = x^2$ .  
 $f(x) = g(x - 1) + 2$ .  
 $(\mathcal{C}_f)$  est l'image de  $(\mathcal{C}_g)$  par la translation de vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .



Exercice 2.g p. 34

On a :  $f(x) = -\frac{1}{x-2} + 1$ .  
 Soit  $(\mathcal{C}_g)$  la représentation graphique de la fonction définie par :  $g(x) = -\frac{1}{x}$ .  
 $f(x) = g(x - 2) + 1$ .  
 $(\mathcal{C}_f)$  est l'image de  $(\mathcal{C}_g)$  par la translation de vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .



◇ Exercice 3.a p. 38

$[-4; 2]$ , l'ensemble de définition de la fonction, n'est pas symétrique par rapport à zéro. Donc, la fonction n'est ni paire, ni impaire.

◇ Exercice 3.b p. 38

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = (-x)^2 - 3 = f(x)$  ; donc,  $f$  est paire.

◇ Exercice 3.c p. 38

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = -x|-x| = -f(x)$  ; donc,  $f$  est impaire.

◇ Exercice 3.d p. 38

$\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , l'ensemble de définition de la fonction  $f$ , n'est pas symétrique par rapport à zéro. Donc, la fonction n'est ni paire, ni impaire.

◇ Exercice 3.e p. 38

- a) On a :  $f(1) = 2$  et  $f(-1) = 0$  ; donc,  $f$  n'est ni paire, ni impaire.
- b) Pour tout nombre réel  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = f(x)$  ; donc,  $f$  est paire.
- c) Pour tout nombre réel  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = -f(x)$  ; donc,  $f$  est impaire.
- d) Pour tout nombre réel  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = -f(x)$  ; donc,  $f$  est impaire.

▢ Exercices d'apprentissage

FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

◇ Exercice n° 1 p. 39

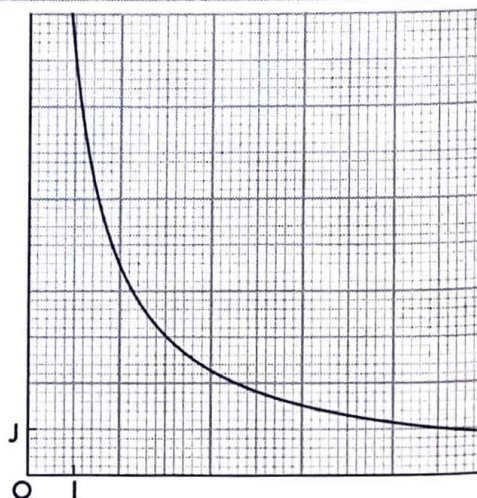
1. On a :  $L(x) \times x = 9$  ; donc :  $L(x) = \frac{9}{x}$ .

2. L'ensemble de définition de  $L$  est :  $D_L = ]0; +\infty[$ .

Tableau de variation

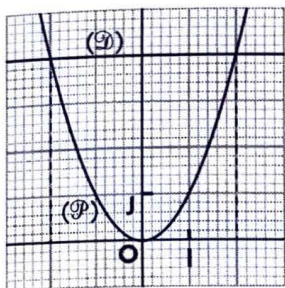
$x$	0	$+\infty$
$L(x)$	↘	

Ci-contre la représentation graphique de  $L$ .



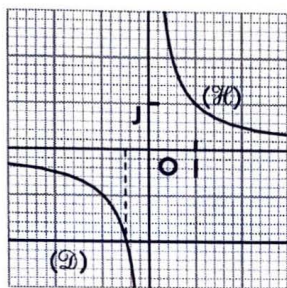
◇ Exercice n° 2 p. 39

a) Soit la droite  $(\mathcal{D})$  d'équation  $y = 4$  et la parabole  $(\mathcal{P})$  d'équation  $y = x^2$ .



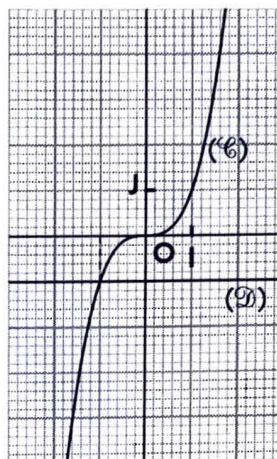
$(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{P})$  se coupent en deux points d'abscisses  $-2$  et  $2$ .  
 $-2$  et  $2$  sont les solutions de l'équation.

b) Soit la droite  $(\mathcal{D})$  d'équation  $y = -2$  et l'hyperbole  $(\mathcal{H})$  d'équation  $y = \frac{1}{x}$ .



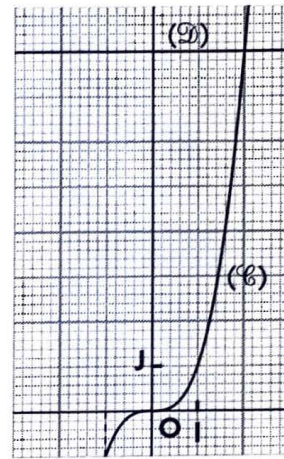
$(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{H})$  se coupent en un point d'abscisse  $-\frac{1}{2}$ .  
 $-\frac{1}{2}$  est la solution de l'équation.

c) Soit la droite  $(\mathcal{D})$  d'équation  $y = -1$  et la courbe  $(\mathcal{C})$  d'équation  $y = x^3$ .



$(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{C})$  se coupent en un point d'abscisse  $-1$ .  
 $-1$  est la solution de l'équation.

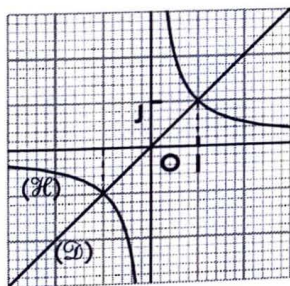
d) Soit la droite  $(\mathcal{D})$  d'équation  $y = 8$  et la courbe  $(\mathcal{C})$  d'équation  $y = x^3$ .



$(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{C})$  se coupent en un point d'abscisse  $2$ .  
 $2$  est la solution de l'équation.

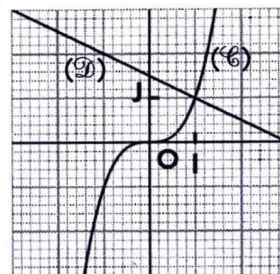
◇ Exercice n° 3 p. 39

a) Soit la droite  $(\mathcal{D})$  d'équation  $y = x$  et l'hyperbole  $(\mathcal{H})$  d'équation  $y = \frac{1}{x}$ .



$(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{H})$  se coupent en deux points d'abscisses  $-1$  et  $1$ .  
 $-1$  et  $1$  sont les solutions de l'équation.

b) Soit la droite  $(\mathcal{D})$  d'équation  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$  et la courbe  $(\mathcal{C})$  d'équation  $y = x^3$ .

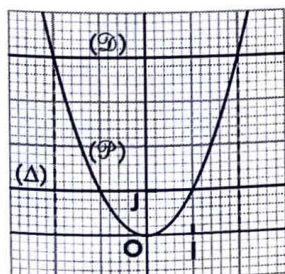


$(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{C})$  se coupent en un point d'abscisse  $1$ .  
 $1$  est la solution de l'équation.

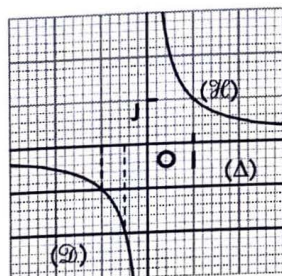
◇ Exercice n° 4 p. 39

Les solutions sont les abscisses des points d'une courbe situés entre deux droites.

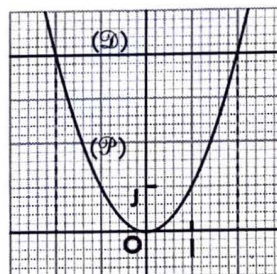
a) Soit les droites  $(\mathcal{D})$  et  $(\Delta)$  d'équations  $y = 4$  et  $y = 1$ , puis la parabole  $(\mathcal{P})$  d'équation  $y = x^2$ .



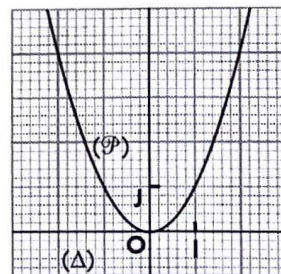
b) Soit les droites  $(\mathcal{D})$  et  $(\Delta)$  d'équations  $y = -2$  et  $y = -1$ , puis l'hyperbole  $(\mathcal{H})$  d'équation  $y = \frac{1}{x}$ .



c) Soit la droite  $(\mathcal{D})$  d'équation  $y = 4$  et la parabole  $(\mathcal{P})$  d'équation  $y = x^2$ .



d) Soit les droites  $(\mathcal{D})$  et  $(\Delta)$  d'équations  $y = -8$  et  $y = -1$ , puis la parabole  $(\mathcal{P})$  d'équation  $y = x^2$ .





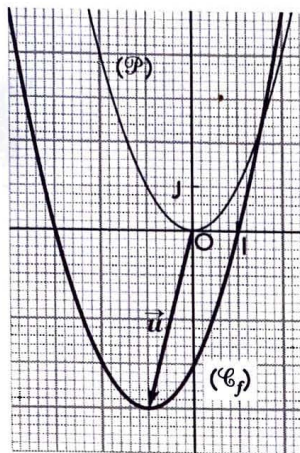
◇ Exercice n° 10 p. 40

1. On a : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  
 $f(x) = (x + 1)^2 - 4$ .

2.  $(\mathcal{C}_f)$  est l'image de la parabole  $(\mathcal{P})$  d'équation  $y = x^2$  par la translation de vecteur :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

3. Ci-contre,  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{C}_f)$ .



◇ Exercice n° 11 p. 40

1. a) On a :  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

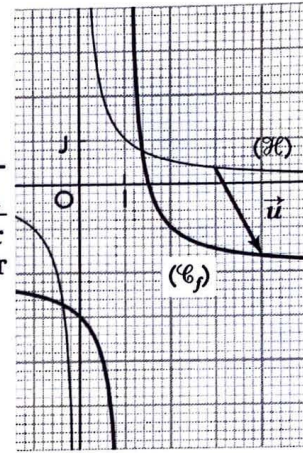
b) Pour tout  $x \in D_f$ ,

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - 2.$$

2.  $(\mathcal{C}_f)$  est l'image de l'hyperbole  $(\mathcal{H})$  d'équation  $y = \frac{1}{x}$  par la translation de vecteur

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3. Ci-contre,  $(\mathcal{H})$  et  $(\mathcal{C}_f)$ .



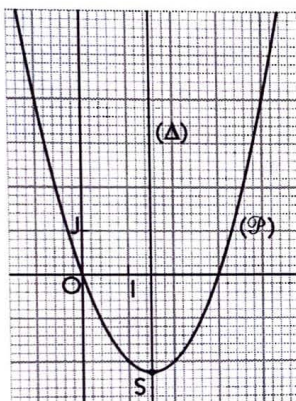
◇ Exercice n° 12 p. 40

1. L'équation réduite de la parabole  $(\mathcal{P})$  est :

$$y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

2.  $(\mathcal{P})$  est une parabole de sommet  $S\left(\frac{3}{2}; -\frac{9}{4}\right)$  et d'axe la droite  $(\Delta)$  d'équation  $x = \frac{3}{2}$ .

3. Ci-contre,  $(\mathcal{P})$ .



◇ Exercice n° 13 p. 40

1. L'équation réduite de l'hyperbole  $(\mathcal{H})$  est :

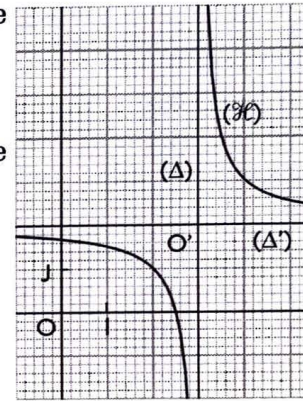
$$y = \frac{1}{x-3} + 2.$$

2.  $(\mathcal{H})$  est une hyperbole de centre  $O'(3; 2)$ .

3. Ci-contre,  $(\mathcal{H})$ .

$$(\Delta) : x = 3;$$

$$(\Delta') : y = 2.$$



◇ Exercice n° 14 p. 40

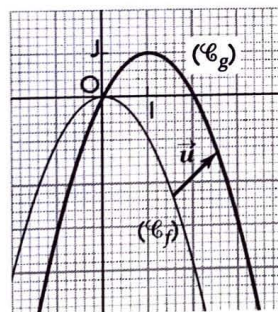
a) On a :

• pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  
 $g(x) = -(x-1)^2 + 1$ .

•  $(\mathcal{C}_g)$  est l'image de  $(\mathcal{C}_f)$  par la translation de vecteur :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

• Ci-contre,  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_g)$ .



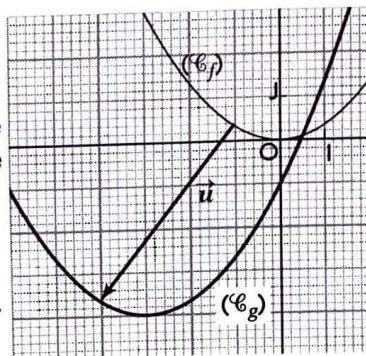
b) On a :

• pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  
 $g(x) = \frac{1}{3}(x+3)^2 - 4$ .

•  $(\mathcal{C}_g)$  est l'image de  $(\mathcal{C}_f)$  par la translation de vecteur :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

• Ci-contre,  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_g)$ .

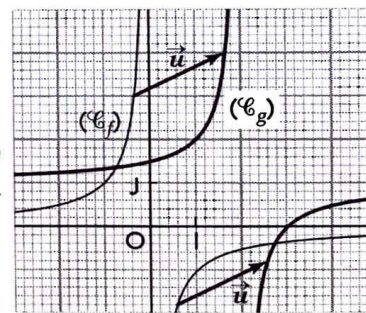


c) On a :

• pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ,  
 $g(x) = \frac{1}{-(x-2)} + 1$ .

•  $(\mathcal{C}_g)$  est l'image de  $(\mathcal{C}_f)$  par la translation de vecteur :  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

• Ci-contre,  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_g)$ .

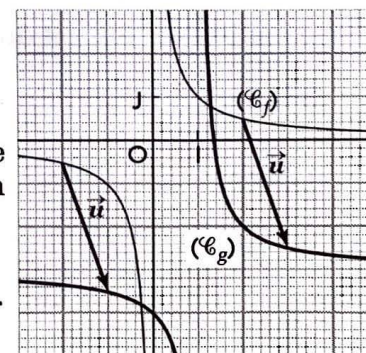


d) On a :

• pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  
 $g(x) = \frac{2}{x-1} - 3$ .

•  $(\mathcal{C}_g)$  est l'image de  $(\mathcal{C}_f)$  par la translation de vecteur :  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

• Ci-contre,  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_g)$ .



◇ Exercice n° 15 p. 40

a)

x	-2	-1	1	3
g(x)	15	0	-12	0

b)

x	-2	-1	1	3
g(x)	15	0	12	0

c)

$x$	-3	-2	0	2
$g(x)$	-15	0	12	0

d)

$x$	0	1	3	5
$g(x)$	-11	4	16	4

◇ Exercice n° 16 p. 40

1. a) Ci-contre  $(\mathcal{C}_f)$ .

b) On a :  $g(x) = f(x) + 4$  ;  
donc,  $(\mathcal{C}_g)$  est l'image de  $(\mathcal{C}_f)$   
par la translation de vec-  
teur :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

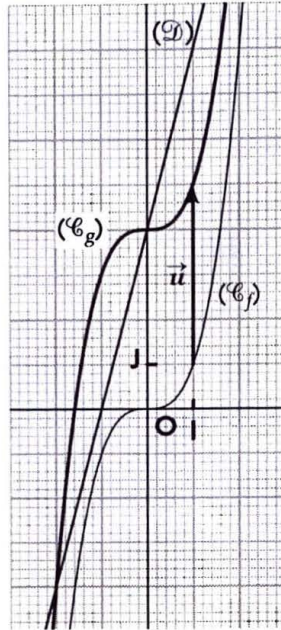
Ci-contre  $(\mathcal{C}_g)$ .

2. Soit la droite  $(\mathcal{D})$  d'équa-  
tion  $y = 4x + 4$ .

Les solutions sont les abs-  
cisses des points où  $(\mathcal{C}_g)$  et  
 $(\mathcal{D})$  se coupent.

$(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{C}_g)$  se coupent en 3  
points d'abscisses -2, 0 et 2.

Les nombres -2, 0 et 2 sont  
les solutions de l'équation.



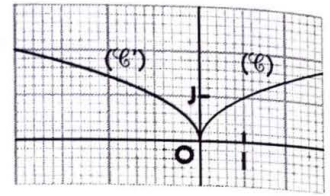
◇ Exercice n° 17 p. 40

1. Ci-contre  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C}')$ .

2. L'expression analytique  
de  $S_{(O)}$  est :

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} ; \text{ ou } : \begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}.$$

Une équation de  $(\mathcal{C}')$  est  
donc :  $y = \sqrt{-x}$ .



◇ Exercice n° 18 p. 40

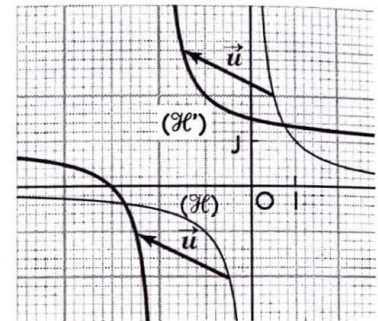
1. Ci-contre  $(\mathcal{H})$  et  $(\mathcal{H}')$ .

2. L'expression analy-  
tique  $t_{\vec{u}}$  est :

$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 1 \end{cases} ;$$

ou :

$$\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 1 \end{cases}.$$



Une équation de  $(\mathcal{C}')$  est donc :

$$y = \frac{1}{x+2} + 1 = \frac{x+3}{x+2}.$$

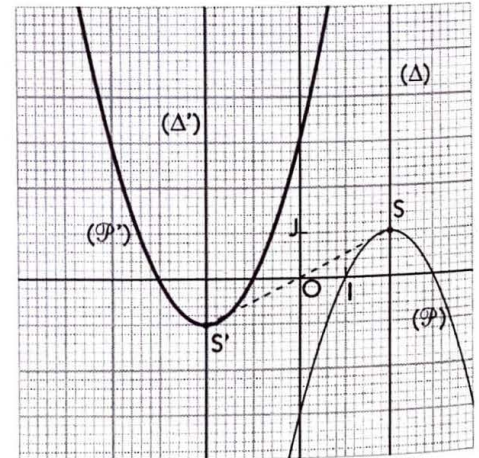
◇ Exercice n° 19 p. 40

1. L'équation réduite de la parabole  $(\mathcal{P})$  est :  $y = -(x-2)^2 + 1$ .  
 $(\mathcal{P})$  est la parabole de sommet  $S(2 ; 1)$  et d'axe d'équation  $x = 2$ .

Ci-contre  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$ .

2. L'expression analytique associée est :  $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$  ; ou :  $\begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases}$ .

Une équation de  $(\mathcal{P}')$  est donc :  $y = (x+2)^2 - 1$ .



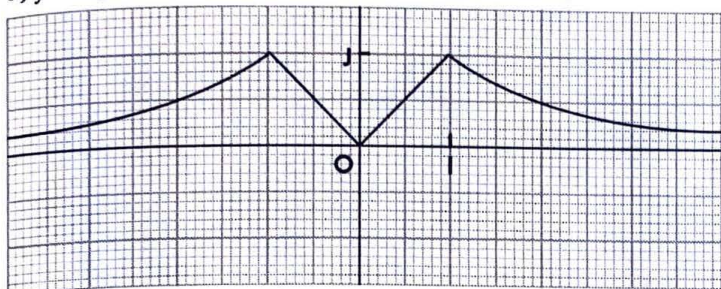
PARITÉ ET ÉLÉMENTS DE SYMÉTRIE

◇ Exercice n° 20 p. 40

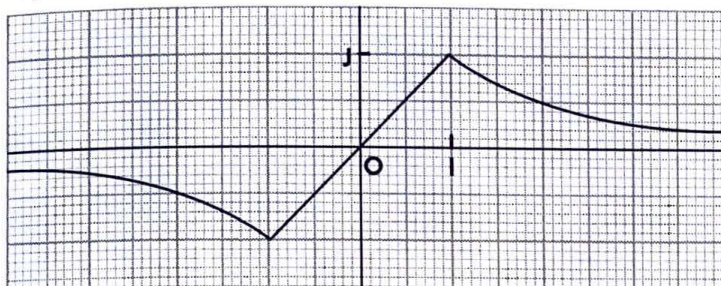
$(\mathcal{C})$	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Ensemble de définition de $f$ : $D_f$	$[-1 ; 3]$	$[-4 ; 4]$	$[-4 ; 4]$	$[0 ; 4]$	$[-3 ; 3]$	$[-4 ; -2] \cup [-1 ; 1] \cup [2 ; 4]$
Parité de $f$	$f$ ni paire ni impaire	$f$ impaire	$f$ paire	$f$ ni paire ni impaire	$f$ impaire	$f$ paire

◇ Exercice n° 21 p. 41

a)  $f$  est paire

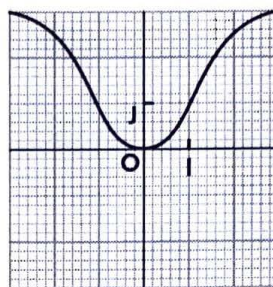


b)  $f$  est impaire

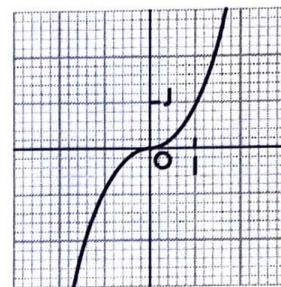


◇ Exercice n° 22 p. 41

a)  $f$  est paire et croissante sur  $[0 ; +\infty[$

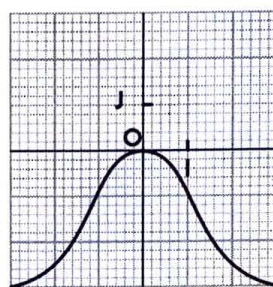


b)  $f$  est impaire et croissante sur  $[0 ; +\infty[$

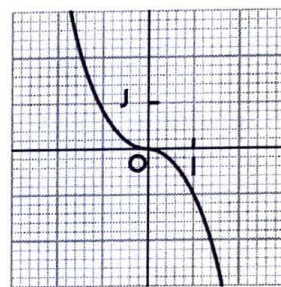


◇ Exercice n° 23 p. 41

a)  $f$  est paire et décroissante sur  $[0 ; +\infty[$



b)  $f$  est impaire et décroissante sur  $[0 ; +\infty[$



◇ Exercice n° 24 p. 41

a) Pour tout nombre réel  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = -f(x)$  ; donc,  $f$  est impaire.

b) On a :  $f(1) = 2$  et  $f(-1) = 0$  ; donc,  $f$  n'est ni paire, ni impaire.

c) L'ensemble de définition de  $f$ ,  $]-\infty ; 0]$ , n'est pas symétrique par rapport à zéro. Donc, la fonction  $f$  n'est ni paire, ni impaire.

d) Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $f(-x) = -f(x)$  ; donc,  $f$  est impaire.

e) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = f(x)$  ; donc,  $f$  est paire.

f) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = f(x)$  ; donc,  $f$  est paire.

◇ Exercice n° 25 p. 41

Soit  $f$  une fonction polynôme du second degré.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$  et  $f(-x) = ax^2 - bx + c$  ( $a \neq 0$ ).

$f$  est paire équivaut à  $ax^2 + bx + c = ax^2 - bx + c$  ; ou  $b = 0$ . Donc :  $f(x) = ax^2 + c$  ( $a \neq 0$ ).

▢ Exercices d'approfondissement

◇ Exercice n° 26 p. 41

1. Le repère  $(O, I, J)$  est orthonormé.

Soit  $S_{(\Delta)}$  la symétrie orthogonale d'axe  $(\Delta)$ .

• On a :  $S_{(\Delta)}(O) = O$ ,  $S_{(\Delta)}(J) = I$ ,  $S_{(\Delta)}(K) = K'$  et  $S_{(\Delta)}(M) = M'$ .

Donc :  $S_{(\Delta)}(OJ) = (OI)$  ; c'est-à-dire,  $(OI)$  est un axe de symétrie de  $(\mathcal{P}')$ , image de  $(\mathcal{P})$  par  $S_{(\Delta)}$ .

• Construction de  $(\mathcal{P}')$  :

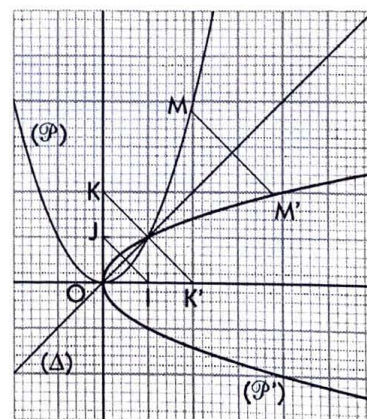
- construire l'image  $(\mathcal{C}')$  de la branche de la parabole  $(\mathcal{P})$  d'abscisses positives ;

- compléter  $(\mathcal{P}')$  en construisant le symétrique  $(\mathcal{C}'')$  de  $(\mathcal{C}')$  par rapport à  $(OI)$ .

On a :  $(\mathcal{P}') = (\mathcal{C}') \cup (\mathcal{C}'')$ .

2. L'expression analytique de  $S_{(\Delta)}$  est :  $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

Une équation de  $(\mathcal{P}')$  est donc :  $y^2 = x$ .



◇ Exercice n° 27 p. 41

$0 \leq y^2 = x$  équivaut à  $y = \sqrt{x}$  ou  $y = -\sqrt{x}$  ( $x \geq 0$ ).

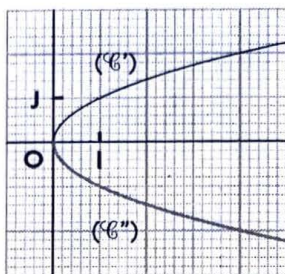
Soit  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C}')$  les courbes d'équations respectives :

$$y = \sqrt{x} \text{ et } y = -\sqrt{x}.$$

$(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C}')$  sont symétriques par rapport à  $(OI)$ .

$(\mathcal{C}) \cup (\mathcal{C}')$  est l'ensemble des points  $M(x ; y)$  tels que :  $y^2 = x$ .

On remarque que  $(\mathcal{C}) \cup (\mathcal{C}')$  est la symétrique de la parabole d'équation  $y = x^2$  par rapport à la première bissectrice.



◇ Exercice n° 28 p. 41

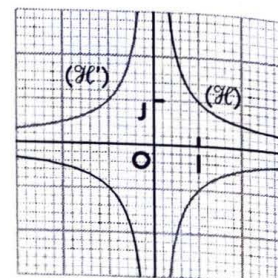
$x^2y^2 = 1$  équivaut à  $y = \frac{1}{x}$  ou  $y = -\frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ ).

Soit  $(\mathcal{H})$  et  $(\mathcal{H}')$  les hyperboles d'équations respectives :

$$y = \frac{1}{x} \text{ et } y = -\frac{1}{x}.$$

$(\mathcal{H})$  et  $(\mathcal{H}')$  sont symétriques par rapport à  $(OI)$ .

$(\mathcal{H}) \cup (\mathcal{H}')$  est l'ensemble des points  $M(x ; y)$  tels que :  $x^2y^2 = 1$ .



◇ Exercice n° 29 p. 41

$$\begin{cases} xy = 100 \\ 2x - y - 10 = 0 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} y = \frac{100}{x} \\ y = 2x - 10 \end{cases}.$$

Soit la droite  $(\mathcal{D})$  d'équation  $y = 2x - 10$

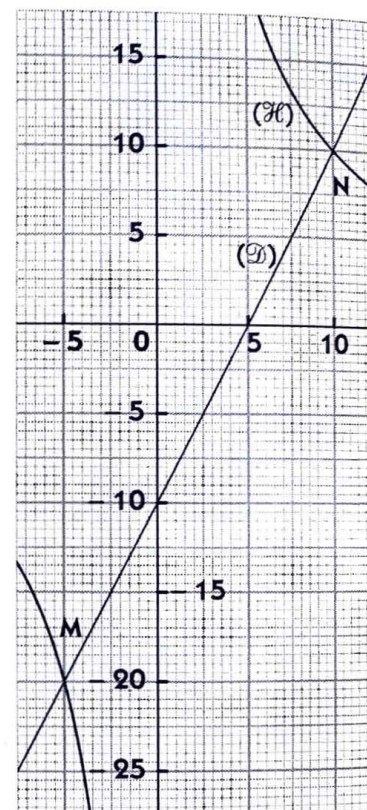
et l'hyperbole  $(\mathcal{H})$  d'équation  $y = \frac{100}{x}$ .

Les solutions sont les couples de coordonnées des points où  $(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{H})$  se coupent.

$(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{H})$  se coupent aux points :  $M(-5 ; -20)$  et  $N(10 ; 10)$ .

Les solutions du système sont les couples :

$$(-5 ; -20) \text{ et } (10 ; 10).$$

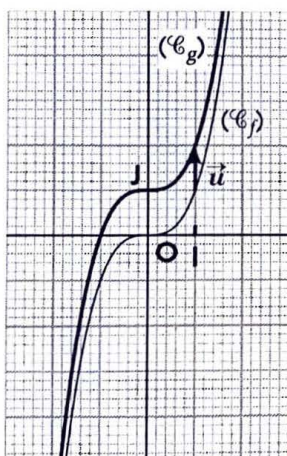


◇ Exercice n° 30 p. 41

Soit  $(\mathcal{C}_f)$  la représentation graphique de la fonction définie par :  $f(x) = x^3$ .

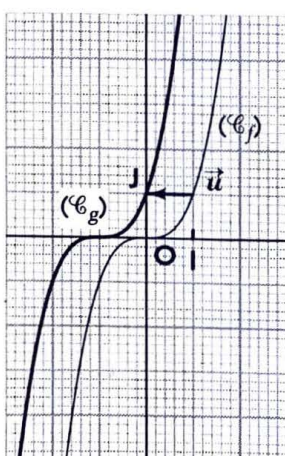
a) On a :  $g(x) = f(x) + 1$ .

$(\mathcal{C}_g)$  est l'image de  $(\mathcal{C}_f)$  par la translation de vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .



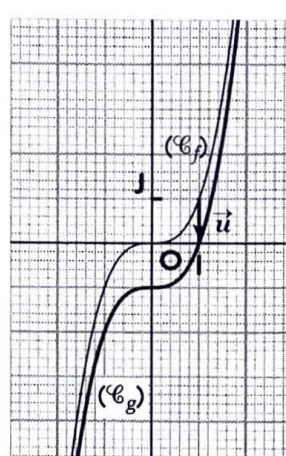
b) On a :  $g(x) = f(x + 1)$ .

$(\mathcal{C}_g)$  est l'image de  $(\mathcal{C}_f)$  par la translation de vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



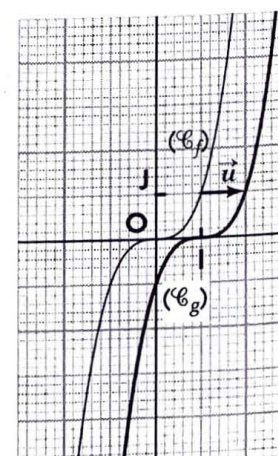
c) On a :  $g(x) = f(x) - 1$ .

$(\mathcal{C}_g)$  est l'image de  $(\mathcal{C}_f)$  par la translation de vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ .



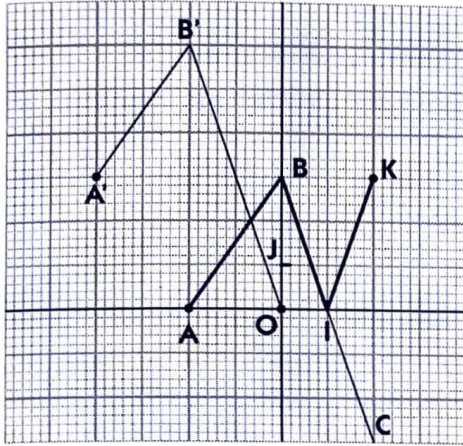
d) On a :  $g(x) = f(x - 1)$ .

$(\mathcal{C}_g)$  est l'image de  $(\mathcal{C}_f)$  par la translation de vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



◇ Exercice n° 31 p. 41

1. a) L'ensemble de définition de  $g$  :  $D_g = [-2 ; 2]$ .  
 b) Ci-dessous  $(\mathcal{C}_g) = [AB] \cup [BI] \cup [IK]$ .



c) On a : 
$$\begin{cases} \text{si } x \in [-2 ; 0], & g(x) = \frac{3}{2}x + 3 \\ \text{si } x \in [0 ; 1], & g(x) = -3x + 3 \\ \text{si } x \in [1 ; 2], & g(x) = 3x - 3. \end{cases}$$

2. a)  $(\mathcal{C}_g)$  est l'image de  $(\mathcal{C}_f)$  par la translation de vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

L'expression analytique  $t_{\vec{u}}$  est : 
$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 3. \end{cases}$$

L'ensemble de définition de  $g$  :  $D_g = [-4 ; 0]$ .

- b) On a :  $A(-2 ; 0) \xrightarrow{t} A'(-4 ; 3)$   
 $B(0 ; 3) \xrightarrow{t} B'(-2 ; 6)$   
 $C(2 ; -3) \xrightarrow{t} O(0 ; 0)$ .

Ci-dessus,  $(\mathcal{C}_g) = [A'B'] \cup [B'O]$ .

c) On a : 
$$\begin{cases} \text{si } x \in [-4 ; -2], & h(x) = \frac{3}{2}x + 9 \\ \text{si } x \in [-2 ; 0], & h(x) = -3x \end{cases}$$

◇ Exercice n° 32 p. 41

Soit  $x$  et  $y$  deux nombres réels de  $[-5 ; 0]$  tels que :  $x < y$ . On a :  $-x > -y > 0$ .

Or,  $f$  est croissante sur  $[0 ; 5]$  ; donc :  $f(-x) > f(-y)$ .

De plus,  $f$  est paire ; donc :  $f(-x) = f(x)$  ;  $f(-y) = f(y)$   
 et :  $f(x) > f(y)$ .

Donc,  $f$  est décroissante sur  $[-5 ; 0]$ .

◇ Exercice n° 33 p. 41

Soit  $x$  et  $y$  deux nombres réels de  $[-5 ; 0]$  tels que :  $x < y$ . On a :  $-x > -y > 0$ .

Or,  $f$  est croissante sur  $[0 ; 5]$  ; donc :  $f(-x) > f(-y)$ .

De plus,  $f$  est impaire ;

donc :  $f(-x) = -f(x)$  ;  $f(-y) = -f(y)$ ,

et :  $f(x) < f(y)$ .

Donc,  $f$  est également croissante sur  $[-5 ; 0]$ .

◇ Exercice n° 34 p. 41

1. Soit  $x$  la largeur du rectangle et  $y$  la longueur.

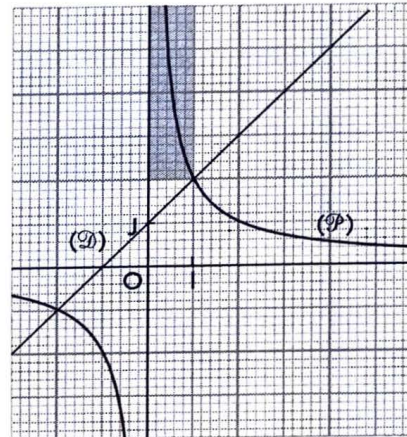
$$\begin{cases} xy = 2 \\ y - x > 1 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} xy = 2 \\ x - y + 1 < 0 \end{cases}$$

2. a) Soit la droite  $(\mathcal{D})$  d'équation  $y = x + 1$  et l'hyperbole  $(\mathcal{H})$  d'équation  $y = \frac{2}{x}$ .

b) 
$$\begin{cases} xy = 2 \\ x - y + 1 < 0 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ y > x + 1 \end{cases}$$

Les solutions sont les couples de coordonnées positives des points de  $(\mathcal{H})$  pour lesquels  $(\mathcal{H})$  est au-dessus de  $(\mathcal{D})$ .

La lecture graphique donne les couples  $(x ; y)$  tels que :  $x \in ]0 ; 1[$  et  $y \in ]2 ; +\infty[$ .



◇ Exercice n° 35 p. 41

L'équation réduite de la parabole  $(\mathcal{P})$  est :

$$y = a(x - 1)^2 - 4, (a \neq 0).$$

$(\mathcal{P})$  passe par le point  $A(3 ; 0)$ , on a :

$$0 = a(3 - 1)^2 - 4 ; \text{ ou } : a = 1.$$

L'équation réduite de la parabole  $(\mathcal{P})$  est :

$$y = (x - 1)^2 - 4.$$

◇ Exercice n° 36 p. 41

L'équation réduite de l'hyperbole  $(\mathcal{H})$  est :

$$y = \frac{k}{x - 3} + 1, (k \neq 0).$$

$(\mathcal{H})$  passe par le point  $A(4 ; 5)$ , on a :

$$5 = \frac{k}{4 - 3} + 1 ; \text{ ou } : k = 4.$$

L'équation réduite de l'hyperbole  $(\mathcal{H})$  est :

$$y = \frac{4}{x - 3} + 1.$$

◇ Exercice n° 37 p. 41

1. a) Les solutions sont les abscisses des points où  $(\mathcal{H})$  et la droite  $(OI)$  se coupent.

La lecture graphique donne les nombres :  $-2$  et  $1$ .

b) Les solutions sont les abscisses des points de  $(\mathcal{H})$  situés au-dessous de la droite  $(OI)$ .

La lecture graphique donne :  $]-\infty ; -2[ \cup ]1 ; +\infty[$ .

2. a) On a :  $f(x) = a(x + 2)(x - 1) (a \neq 0)$ .

$f(0) = 6$  équivaut à  $a = -3$ .

Donc :  $f(x) = -3(x + 2)(x - 1) = -3x^2 - 3x + 6$ .

b) Vérifications immédiates.

◇ Exercice n° 38 p. 42

1. a) Soit la droite  $(\mathcal{D})$  d'équation  $y = x$ .

Les solutions sont les abscisses des points où  $(\mathcal{C})$  et la droite  $(\mathcal{D})$  se coupent.

La lecture graphique donne les nombres : 0 et 3.

b) Les solutions sont les abscisses des points de  $(\mathcal{C})$  situés au-dessus de la droite  $(\Delta)$  d'équation :  $y = 4$ .

La lecture graphique donne :  $]1 ; +\infty[$ .

2. a) L'équation réduite de l'hyperbole  $(\mathcal{H})$  est :

$$y = \frac{k}{x-1} + 4 \quad (k \neq 0).$$

On a :  $f(0)$  équivaut à  $-k + 4 = 0$ .

Donc :  $f(x) = \frac{4}{x-1} + 4$ .

b) Vérifications immédiates.

◇ Exercice n° 39 p. 42

1. a) Les solutions sont les abscisses des points B, S et C où  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_g)$  se coupent.

La lecture graphique donne les nombres :

$$4, 0 \text{ et } -2.$$

b) Les solutions sont les abscisses des points de  $(\mathcal{C}_f)$  situés au-dessus de  $(\mathcal{C}_g)$ .

La lecture graphique donne :

$$]-2 ; 0[ \cup ]2 ; 4[.$$

2. a) On a :  $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 5$  ;

et  $g(x) = -\frac{4}{x-2} + 3$ .

b)  $f(-2) = g(-2) = 4$ .

c) Vérifications immédiates.

◇ Exercice n° 40 p. 42

1. a) Pour tout  $x \in [0 ; +\infty[$ ,

$f(x) = (x-1)^2 - 1$  et  $f$  est paire.

• Construire la branche  $(\mathcal{C})$  de  $(\mathcal{C}_f)$  située à droite de  $(O)$  ;

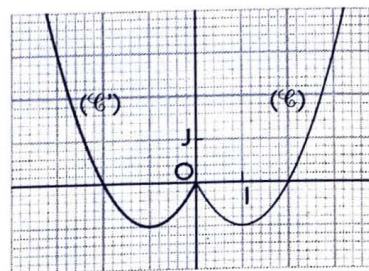
• Compléter  $(\mathcal{C}_f)$  en construisant le symétrique  $(\mathcal{C}')$  de  $(\mathcal{C})$  par rapport à  $(OJ)$ .

On a :  $(\mathcal{C}_f) = (\mathcal{C}') \cup (\mathcal{C})$ .

b) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = f(x)$ .

$x \in ]-\infty ; 0]$ ,  $f(x) = f(-x) = x^2 + 2x$ .

c) Donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2|x|$ .



2. a) Pour tout nombre réel  $x \in [0 ; +\infty[$ ,

$f(x) = (x-1)^2 - 1$  et  $f$  est paire.

• Construire la branche  $(\mathcal{C})$  de  $(\mathcal{C}_f)$  située à droite de  $(OJ)$  ;

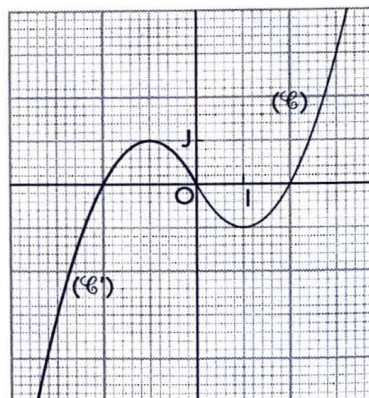
• Compléter  $(\mathcal{C}_f)$  en construisant le symétrique  $(\mathcal{C}')$  de  $(\mathcal{C})$  par rapport à  $O$ .

On a :  $(\mathcal{C}_f) = (\mathcal{C}') \cup (\mathcal{C})$ .

b) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -f(-x)$ .

Pour tout  $x \in ]-\infty ; 0]$ ,  $f(x) = -f(-x) = -x^2 - 2x$ .

c) Donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x|x| - 2x$ .



### 3. Dénombrement

(pages 43 à 62 du livre de l'élève)

#### OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- rendre l'élève apte à reconnaître les situations dans lesquelles on doit utiliser une partition (addition) et celles dans lesquelles on doit utiliser un produit cartésien (multiplication) ;
- maîtriser les notions de  $p$ -uplets, arrangements et combinaisons pour résoudre des problèmes concrets de dénombrement.

#### COMMENTAIRES

L'objectif essentiel de la première leçon (*Compléments sur les ensembles*) n'est pas l'acquisition de ce vocabulaire, mais d'attirer l'attention des élèves sur les deux associations d'idées suivantes :

- partition (réunion) – somme ;
- produit cartésien – multiplication.

Il est essentiel de clarifier les choses sur les situations où il faut additionner les cas et sur celles où il faut multiplier les cas avant d'introduire les outils de dénombrement :  $p$ -uplets, arrangements, permutations et combinaisons.

Les élèves ont été habitués à manipuler les diagrammes, les tableaux ou les arbres de choix dans les classes précédentes. On pourra les utiliser dans le cours pour illustrer certaines situations, mais aussi en exercices pour « décanter » des cas complexes. On évitera cependant de les utiliser systématiquement, l'objectif de ce chapitre étant de mettre au point des instruments pour aller plus vite.

La principale difficulté pour un élève confronté à un problème de dénombrement est de choisir le bon outil. On l'habitue à exercer ce choix peu à peu en partant de situations simples et diverses.

#### SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

##### savoirs

##### Compléments sur les ensembles

- Réunion et intersection de deux ensembles :
  - définitions ;
  - cardinal de la réunion de deux ensembles.

- Complémentaire d'un ensemble :
  - définition ;
  - cardinal du complémentaire d'un ensemble.

- Produit cartésien :
  - définition ;
  - cardinal du produit cartésien.

##### $p$ -uplets, arrangements et permutations

- Définition de :
  - $p$ -uplet ;
  - arrangements ;
  - permutations.
- Formules :
  - du nombre de  $p$ -uplets d'un ensemble fini ;
  - de  $A_n^p$  ;
  - du nombre de permutations d'un ensemble fini.

##### savoir-faire

- Calculer  $\text{card}(A \cup B)$ .
- Reconnaître une situation dans laquelle on doit utiliser une réunion (partition).

- Calculer  $\text{card}(\bar{A})$ .

- Calculer  $\text{card}(A \times B)$ .
- Reconnaître une situation dans laquelle on doit utiliser un produit cartésien.

- Bien différencier les trois notions :  $p$ -uplet, arrangement et permutation.
- Choisir une de ces trois notions pour résoudre un problème de dénombrement.

- Calculer  $A_n^p$  pour des faibles valeurs de  $n$  et  $p$  le plus rapidement possible.
- Calculer  $A_n^p$  pour des grosses valeurs de  $n$  et  $p$  avec l'aide de la calculatrice.
- Utiliser la notation factorielle dans les calculs.

**Combinaisons**

- Définition
- Formule de  $C_n^p$

- Calculer  $C_n^p$  pour des faibles valeurs de  $n$  et  $p$  le plus rapidement possible.
- Calculer  $C_n^p$  pour de grandes valeurs de  $n$  et  $p$  avec l'aide de la calculatrice.
- Utiliser la notation factorielle dans les calculs.
- Plus généralement, bien différencier les trois notions fondamentales :  $p$ -uplet, arrangement et combinaison.
- Choisir une de ces trois notions fondamentales pour résoudre un problème de dénombrement.

**EXERCICES DU MANUEL**

 **Exercices du cours**

◇ **Exercice 1.a p. 48**

Désignons par :

- E l'ensemble des élèves de la classe ;
- A l'ensemble des élèves qui étudient l'arabe ;
- B l'ensemble des élèves qui étudient le français.

On a :  $E = A \cup B$  ;

$\text{card}(A \cup B) = 40$  et  $\text{card}(A \cap B) = 15$ .

Le nombre d'élèves qui étudient une seule des deux langues est :

$\text{card}(A \cup B) - \text{card}(A \cap B) = 40 - 15 = 25$ .

◇ **Exercice 1.b p. 48**

Désignons par :

- E l'ensemble des membres du club sportif ;
- A l'ensemble des membres du club sportif qui pratiquent le handball ;
- B l'ensemble des membres du club sportif qui pratiquent le basket.

On a :  $E = A \cup B$  ;  $\text{card}(A) = 600$  ;  $\text{card}(B) = 850$  et  $\text{card}(A \cap B) = 250$ .

Le nombre de membres du club sportif est :

$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$   
 $= 600 + 850 - 250 = 1200$ .

◇ **Exercice 1.c p. 48**

<b>Ensemble</b>	A	B	C	$A \times B$	$B \times C$
<b>Cardinal</b>	5	8	9	40	72

◇ **Exercice 1.d p. 48**

<b>Épreuve</b>	<b>Nombre de choix</b>
Mathématiques	3
Français	5
Mathématiques × Français	15

◇ **Exercice 2.a p. 52**

On dispose de 4 professeurs A, B, C, D qu'on veut affecter dans 3 lycées numérotés 1, 2 et 3.

Une affectation correspond à un 4-uplet de l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ .

Par exemple, le 4-uplet  $(1, 2, 2, 3)$  traduit que :

- le professeur A est affecté au lycée numéroté 1 ;
- le professeur B est affecté au lycée numéroté 2 ;
- le professeur C est affecté au lycée numéroté 2 ;
- le professeur D est affecté au lycée numéroté 3.

<b>Professeur</b>	A	B	C	D	Total
<b>Nbre de choix</b>	3	3	3	3	$3^4 = 81$

Le nombre de façons d'affecter 4 professeurs dans 3 lycées est :  $3^4 = 81$ .

◇ **Exercice 2.b p. 52**

a) Un mot de 5 lettres est un 5-uplet de l'ensemble des 2 lettres de l'alphabet morse.

Le nombre de mots qu'on peut former est :  $2^5 = 32$ .

b) Un mot de 4 lettres est un 4-uplet de l'ensemble des 28 lettres de l'alphabet arabe.

Le nombre de mots est :  $28^4 = 614\ 656$ .

◇ **Exercice 2.c p. 52**

Choisir un ministre de l'Économie, un ministre de l'Éducation, un ministre de la Santé, un ministre de l'Agriculture (sans cumul), revient à réaliser un arrangement de 4 personnes parmi 10.

Il y a  $A_{10}^4 = 5\ 040$  choix possibles.

◇ **Exercice 2.d p. 52**

Les chiffres du système décimal :

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = E$  et  $\text{card}(E) = 10$ .

- a) Un tel numéro de téléphone est un 8-uplet de E.  
Le nombre de numéros est :  $10^8 = 100\ 000\ 000$ .
- b) Un tel numéro de téléphone est un arrangement de 8 éléments de E.  
Le nombre de numéros est :  $A_{10}^8 = 1\ 814\ 400$ .

◇ **Exercice 2.e p. 52**

Il y a autant de façons différentes de placer les 4 personnes autour d'une table ronde que de permutations des 4 personnes, c'est-à-dire :  $4! = 24$ .

◇ **Exercice 2.f p. 52**

Il y a autant d'anagrammes du mot AFRIQUE que de permutations des 7 lettres, c'est-à-dire :  $7! = 5\ 040$ .

◇ **Exercice 3.a p. 57**

Il y a autant de choix que de combinaisons de 3 questions parmi 9, c'est-à-dire :  $C_9^3 = 84$ .

◇ **Exercice 3.b p. 57**

a) Il y a autant de listes différentes de livres lus que de combinaisons de 4 livres parmi 12, c'est-à-dire :  $C_{12}^4 = 495$ .

b) Il y a autant de listes différentes de livres non lus que de combinaisons de 8 livres parmi 12, c'est-à-dire :  $C_{12}^8 = 495$ .

◇ **Exercice 3.c p. 57**

Il y a autant de bureaux différents que de combinaisons de 7 membres parmi 10, c'est-à-dire :  $C_{10}^7 = 120$ .

◇ **Exercice 3.d p. 57**

Il y a autant de poignées de mains échangées que de combinaisons de 2 personnes parmi 8, c'est-à-dire :  $C_8^2 = 28$ .

▢ **Exercices d'apprentissage**

**COMPLÉMENTS SUR LES ENSEMBLES**

◇ **Exercice n° 1 p. 58**

1. Désignons par :

E l'ensemble des élèves de la classe ;

A l'ensemble des élèves qui étudient l'anglais ;

B l'ensemble des élèves qui étudient l'espagnol.

On a :  $E = A \cup B$  ;  $\text{card}(A \cup B) = 50$  ;  $\text{card}(A) = 40$  et  $\text{card}(B) = 20$ .

Le nombre d'élèves qui étudient les deux langues est :

$$\begin{aligned} \text{card}(A \cap B) &= \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cup B) \\ &= 40 + 20 - 50 = 10. \end{aligned}$$

2. Le nombre d'élèves qui étudient uniquement l'espagnol est :

$$\text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) = 20 - 10 = 10.$$

3. Le nombre d'élèves qui étudient une langue et une seule est :

$$\text{card}(A \cup B) - \text{card}(A \cap B) = 50 - 10 = 40.$$

◇ **Exercice n° 2 p. 58**

Désignons par :

E l'ensemble des 150 élèves auprès desquels l'enquête a été réalisée ;

A l'ensemble des élèves qui aiment la musique de variétés ;

B l'ensemble des élèves qui aiment la musique traditionnelle.

On a :  $\text{card}(E) = 150$  ;  $\text{card}(A) = 116$  ;  $\text{card}(B) = 52$  ;  $\text{card}(A \cap B) = 40$ .

L'ensemble des élèves qui ont donné leur avis est :  $A \cup B$ .

Le nombre des élèves qui n'ont pas donné leur avis est :  $\text{card}(E) - \text{card}(A \cup B) = 150 - (116 + 52 - 40) = 22$ .

◇ **Exercice n° 3 p. 58**

Désignons par :

E l'ensemble des 1 000 personnes interrogées ;

A l'ensemble des personnes qui souhaitent un véhicule équipé de radio ;

B l'ensemble des personnes qui souhaitent un véhicule équipé de la climatisation.

On a :  $\text{card}(E) = 1\ 000$  ;  $\text{card}(A) = 900$  ;

$$\text{card}(B) = 150 ; \text{card}(A \cap B) = 120.$$

Les consommateurs qui souhaitent au moins l'un des deux équipements forment  $A \cup B$  et leur nombre est :

$$\begin{aligned} \text{card}(A \cup B) &= \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) \\ &= 900 + 150 - 120 \\ &= 930. \end{aligned}$$

◇ **Exercice n° 4 p. 58**

Désignons par :

E l'ensemble des membres du club sportif ;

A l'ensemble des membres du club sportif qui pratiquent le football ;

B l'ensemble des membres du club sportif qui pratiquent le basket.

1. Le nombre de membres du club pratiquant uniquement le football est :  $\text{card}(E) = 35$  ;  $\text{card}(A) = 18$  ;  $\text{card}(B) = 16$  ;  $\text{card}(A \cap B) = 10$ .

2. Le nombre de membres du club ne pratiquant aucun de ces deux sports est :

$$\text{card}(E) - \text{card}(A \cup B) = 35 - (18 + 16 - 10) = 11.$$

◇ Exercice n° 5 p. 58

1.

n° carte	1	2	3	4	5	6
♥	1,♥	2,♥	3,♥	4,♥	5,♥	6,♥
♦	1,♦	2,♦	3,♦	4,♦	5,♦	6,♦
♣	1,♣	2,♣	3,♣	4,♣	5,♣	6,♣
♠	1,♠	2,♠	3,♠	4,♠	5,♠	6,♠

2. Les nombres impairs sont 1, 3 et 5.

Le nombre de façons d'obtenir un nombre impair est :  $3 \times 4 = 12$ .

3. Le nombre de façons de tirer la carte ♣ est :  $6 \times 1 = 6$ .

4. Les nombres supérieurs ou égaux à 3 sont 3, 4, 5 et 6.

Le nombre de façons d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 3 et de tirer la carte ♠ est :  $4 \times 1 = 4$ .

5. Les multiples de 2 sont 2, 4 et 6.

Le nombre de façons d'obtenir un nombre multiple de 2 et tirer la carte ♥ ou la carte ♦ est :  $3 \times 2 = 6$ .

◇ Exercice n° 6 p. 58

Le nombre de menus différents est :  $5 \times 4 \times 6 = 120$ .

◇ Exercice n° 7 p. 58

Le nombre de façons différentes dont Madame Ouattara peut s'habiller est :  $10 \times 8 \times 6 = 480$ .

◇ Exercice n° 8 p. 58

**Composition du numéro minéralogique**      **Nombre de possibilités**

Choix des 4 chiffres       $10^4$

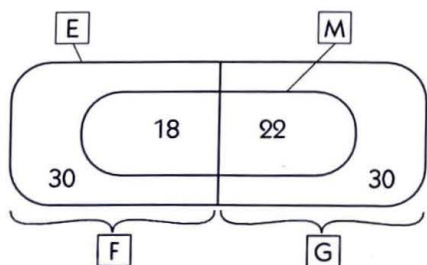
Choix de la lettre      26

Choix du nombre      10

Le nombre de véhicules que l'on peut ainsi immatriculer est :  $10^4 \times 26 \times 10 = 2\ 600\ 000$ .

◇ Exercice n° 9 p. 58

1.



2. Il y a 22 garçons qui savent jouer d'un instrument de musique.

3. Il y a 60 élèves qui ne savent jouer d'aucun instrument de musique.

◇ Exercice n° 10 p. 58

1. Désignons par :

H l'ensemble des hommes de la ville ;

F l'ensemble des femmes de la ville ;

M l'ensemble des habitants de la ville atteints de la maladie M ;

$\bar{M}$  l'ensemble des habitants de la ville non atteints de la maladie M.

	H	F	Total
M	$48 \times \frac{5}{100}$ = 2,40 %	$52 \times \frac{3}{100}$ = 1,56 %	3,96 %
$\bar{M}$	$48 \times \frac{95}{100}$ = 45,60 %	$52 \times \frac{97}{100}$ = 50,44 %	96,04 %
Total	48 %	52 %	100 %

La proportion des habitants de la ville atteints de la maladie M est :  $48 \times \frac{5}{100} + 52 \times \frac{3}{100} = 3,96\%$ .

2. La proportion des femmes parmi les habitants atteints de la maladie M est :

$$\frac{1,56 \times 100}{3,96} \approx 39,39\%$$

◇ Exercice n° 11 p. 59

1.

Souris	ayant développé la maladie	n'ayant pas développé la maladie	Total
vaccinées	63	27	90
non vaccinées	58	12	70
Total	121	39	160

2. a) Le pourcentage de souris n'ayant pas développé la maladie est :

$$\frac{39 \times 100}{160} = 24,375 ; \text{ c'est-à-dire environ } 24 \%$$

b) Le pourcentage de souris non vaccinées est :

$$\frac{70 \times 100}{160} = 43,75 ; \text{ c'est-à-dire environ } 44 \%$$

c) Le pourcentage de souris ayant développé la maladie, parmi celles non vaccinées est :

$$\frac{58 \times 100}{70} = 82,857 ; \text{ c'est-à-dire environ } 83 \%$$

d) Le pourcentage de souris ayant développé la maladie parmi celles qui ont été vaccinées est :

$$\frac{63 \times 100}{90} = 70 \%$$

3. On peut affirmer que le vaccin est inefficace.

**P-UPLETS D'UN ENSEMBLE, ARRANGEMENTS ET PERMUTATIONS**

◇ Exercice n° 12 p. 59

**Composition du code**      **Nombre de possibilités**

Choix de la lettre      26

Choix du 1<sup>er</sup> chiffre      10

Choix du 2<sup>e</sup> chiffre      10

Le nombre de façons de composer un code est :

$$26 \times 10 \times 10 = 2\ 600$$

◊ Exercice n° 13 p. 59

1. Un code est un 5-uplet des 10 chiffres.

Le nombre de codes possibles est :  $10^5 = 100\ 000$ .

2. Les 5 chiffres du code forment un 5-uplet des chiffres impairs 1, 3, 5, 7 et 9.

Le nombre de codes ne comportant aucun chiffre pair est :  $5^5 = 3\ 125$ .

3. L'ensemble des codes ne comportant aucun chiffre pair est le complémentaire de l'ensemble des codes comportant au moins un chiffre pair.

Le nombre de codes comportant au moins un chiffre pair est :

$$10^5 - 5^5 = 100\ 000 - 3\ 125 = 96\ 875.$$

◊ Exercice n° 14 p. 59

1. Il y a autant de nombres de 3 chiffres que d'arrangements de 3 jetons parmi 5, c'est-à-dire :  $A_5^3 = 60$ .

2. Il n'y a que 2 jetons de chiffres pairs ; elle ne peut former aucun nombre de 5 chiffres ne comportant que des chiffres pairs.

◊ Exercice n° 15 p. 59

Les 3 tirages successifs avec remise correspondent à des 3-uplets.

Le nombre de tirages est :  $10^3 = 1\ 000$ .

◊ Exercice n° 16 p. 59

Un octet est un 8-uplet de  $\{0 ; 1\}$ .

Le nombre de configurations est :  $2^8 = 256$ .

◊ Exercice n° 17 p. 59

1. Un domino est un couple (ou 2-uplet) de  $A = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ .

La figure correspond au domino  $(2 ; 4)$ .

Les dominos doubles sont :  $(0,0) ; (1,1) ; (2,2) ; (3,3) ; (4,4) ; (5,5) ; (6,6)$ .

Le nombre de dominos doubles est : 6.

2. Le nombre de dominos d'un jeu complet est :  $\text{card}(A \times A) = 7^2 = 49$ .

◊ Exercice n° 18 p. 59

1. Le chiffre des centaines est différent de zéro (0).

Le nombre de nombres de 3 chiffres est :

$$9 \times 10 \times 10 = 900.$$

2. Le chiffre des centaines est égal à 2.

Le nombre de nombres de 3 chiffres commençant par 2 est :  $1 \times 10 \times 10 = 100$ .

3. Seul le chiffre des centaines ( $\neq 0$ ) change.

Le nombre de nombres de 3 chiffres terminés par 45 est :

$$9 \times 1 \times 1 = 9.$$

◊ Exercice n° 19 p. 59

Les 3 portes sont unicolores et de couleurs différentes, donc elles forment un arrangement de 3 couleurs parmi 5.

Le nombre de possibilités est :  $A_5^3 = 120$ .

◊ Exercice n° 20 p. 59

1. Chaque question a 2 choix. Remplir le questionnaire c'est réaliser un 10-uplet de  $\{\text{Vrai ; Faux}\}$ .

Le nombre de façons de remplir le questionnaire est :  $2^{10} = 1\ 024$ .

2. Remplir le questionnaire c'est réaliser un 10-uplet de  $\{\text{Vrai ; Faux ; Sans Réponse}\}$ .

Le nombre de façons de remplir le questionnaire est :  $3^{10} = 59\ 049$ .

◊ Exercice n° 21 p. 60

Un « rangement » des 4 CD dans les 4 boîtes (à raison de 1 CD par boîte) est une permutation de 4 CD.

Le nombre de possibilités de « rangements » est :

$$4! = 24.$$

◊ Exercice n° 22 p. 60

Une disposition des 5 jetons indiscernables sur le damier à raison d'un jeton par case au maximum est une combinaison de 5 parmi 36. Le nombre de possibilités différentes est :  $C_{36}^5 = 376\ 992$ .

◊ Exercice n° 23 p. 60

Il y a autant de façons d'attribuer les 3 médailles que d'arrangements de 3 sprinters parmi 8, c'est-à-dire :  $A_8^3 = 336$ .

◊ Exercice n° 24 p. 60

Il y a autant de comités qu'on peut former que d'arrangements de 3 membres parmi 20, c'est-à-dire :  $A_{20}^3 = 6\ 840$ .

◊ Exercice n° 25 p. 60

Il y a autant de façons d'organiser leur passage que de permutations des 5 artistes, c'est-à-dire :

$$5! = 120.$$

◊ Exercice n° 26 p. 60

- Il y a autant de façons d'installer 6 élèves que d'arrangements de 6 éléments parmi 10, c'est-à-dire :  $A_{10}^6 = 151\ 200$ .

- Le nombre de façons d'installer 10 élèves est :

$$10! = 3\ 628\ 800.$$

◊ Exercice n° 27 p. 60

1. Le nombre de possibilités d'installer 6 personnes sur 6 chaises est :  $6! = 720$ .

2. a) Si la première chaise est réservée, elle l'est pour une (bien déterminée) des 6 personnes.

Le nombre de possibilités est :  $1 \times 5! = 120$ .

b) Si les deux dernières chaises sont réservées, elles le sont pour deux (bien déterminées) des 6 personnes. Chacune de ces deux personnes a soit une chaise bien indiquée, soit la première des deux qui s'installe à deux choix.

Le nombre de possibilités est :

$$(1 \times 1 \times 4!) + (2 \times 1 \times 4!) = 72.$$

c) Si 2 chaises sont réservées sans autres précisions, l'installation des 2 personnes (bien déterminées) est un arrangement de 2 éléments parmi 6, tandis que les 4 personnes restantes réalisent une permutation.

Le nombre de possibilités est :  $A_6^2 \times 4! = 6! = 720$ .

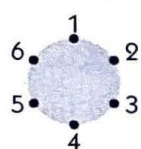
d) La disposition des 6 chaises est un facteur (paramètre) important. Nous choisissons deux dispositions (par intervalle régulier) : en ligne ou bien autour d'une table ronde.

LES CHAISES SONT EN LIGNE

Chaise n°	1	2	3	4	5	6
Françoise occupe la chaise n°	<b>Françoise</b>	<b>Yves</b>				<b>les 4 autres</b>
1 ou bien 6	2	4				4!
2 ou bien 5	2	3				4!
3 ou bien 4	2	3				4!

Le nombre de possibilités est :  
 $(2 \times 4 \times 4!) + 2(2 \times 3 \times 4!) = 480$ .

LES CHAISES SONT AUTOUR D'UNE TABLE



Françoise	Yves	les 4 autres
6	3	4!

Le nombre de possibilités est :  $6 \times 3 \times 4! = 432$ .

#### ◇ Exercice n° 28 p. 60

1. Il y a autant de nombres de 4 chiffres distincts que d'arrangements de 4 éléments parmi 6, c'est-à-dire :  $A_6^4 = 360$ .

2. Il y a autant de nombres de 6 chiffres distincts que de permutations de 6 éléments, c'est-à-dire :  $6! = 720$ .

#### ◇ Exercice n° 29 p. 60

1. Il y a autant de possibilités que de permutations de 5 éléments, c'est-à-dire :  $5! = 120$ .

2.

Position de la lettre	1	2	3	4	5
N occupe la position	<b>N</b>	<b>V</b>	<b>les 3 autres</b>		
1 ou bien 5	2	1	3!		
3 ou bien 4	2	2	3!		
3	1	2	3!		

Le nombre de possibilités est :  
 $(2 \times 1 \times 3!) + (2 \times 2 \times 3!) + (1 \times 2 \times 3!) = 48$ .

#### ◇ Exercice n° 30 p. 60

1. Il y a autant d'itinéraires possibles que de permutations de 4 éléments, c'est-à-dire :  $4! = 24$ .

2. Il y a autant d'itinéraires possibles que de permutations de 6 éléments, c'est-à-dire :  $6! = 720$ .

## COMBINAISONS

### ◇ Exercice n° 31 p. 60

1. Une équipe est une combinaison de 5 parmi 35. Le nombre d'équipes qu'on peut former est :

$$C_{35}^5 = 324\ 632.$$

2. a) Le nombre d'équipes comportant exactement 3 filles est :  $C_{20}^3 \times C_{15}^2 = 1\ 140 \times 105 = 119\ 700$ .

b) Le nombre d'équipes ne comportant aucun garçon est :  $C_{20}^5 = 15\ 504$ .

c) L'ensemble des équipes comportant au moins un garçon est le complémentaire de l'ensemble des équipes ne comportant aucun garçon.

Le nombre d'équipes comportant au moins un garçon est :  $C_{35}^5 - C_{20}^5 = 309\ 128$ .

### ◇ Exercice n° 32 p. 60

a) Le nombre de jurys comprenant seulement des femmes est :  $C_8^5 = 56$ .

b) Le nombre de jurys comprenant 3 hommes et 2 femmes est :  $C_{12}^3 \times C_8^2 = 220 \times 28 = 6\ 160$ .

c) Le nombre de jurys comprenant au plus 2 hommes est :

$$C_{12}^0 \times C_8^5 + C_{12}^1 \times C_8^4 + C_{12}^2 \times C_8^3 = 56 + 840 + 3\ 696 = 4\ 592.$$

### ◇ Exercice n° 33 p. 60

1. Le nombre de tirages possibles est :  $C_{10}^2 = 45$ .

2. Les 2 boules sont : soit toutes 2 rouges, soit toutes 2 blanches.

Le nombre de tirages de 2 boules de même couleur est :  $C_6^2 + C_4^2 = 15 + 6 = 21$ .

3. Les 2 boules sont : 1 boule rouge et 1 boule blanche. Le nombre de tirages de 2 boules de couleurs différentes est :  $C_6^1 \times C_4^1 = 6 \times 4 = 24$ .

### ◇ Exercice n° 34 p. 60

1. Le nombre de tirages simultanés de 3 boules parmi 10 est :  $C_{10}^3 = 120$ .

2. Le nombre de tirages comportant exactement 2 boules noires est :

$$C_3^2 \times C_7^1 = 3 \times 7 = 21.$$

3. Le nombre de tirages comportant une boule de chaque couleur est :

$$C_3^1 \times C_2^1 \times C_5^1 = 3 \times 2 \times 5 = 30.$$

4. Le nombre de tirages comportant au moins deux boules rouges est :

$$C_5^2 \times C_5^1 + C_5^3 \times C_5^0 = (10 \times 5) + (10 \times 1) = 60.$$

### ◇ Exercice n° 35 p. 60

1. Le nombre de tirages simultanés de 3 transistors parmi 40 est :  $C_{40}^3 = 9\ 880$ .

2. Le nombre de tirages comportant exactement 1 transistor défectueux est :

$$C_5^1 \times C_{35}^2 = 5 \times 595 = 2\ 975.$$

3. Le nombre de tirages comportant au moins 2 transistors défectueux est :

$$C_5^2 \times C_{35}^1 + C_5^3 \times C_{35}^0 = (10 \times 35) + (10 \times 1) = 360.$$

◇ **Exercice n° 36 p. 60**

1. 2 points quelconques pris parmi ces 5 points déterminent une droite qui ne contient aucun des 3 autres points restants. Le nombre de droites que déterminent ces 5 points est :  $C_5^2 = 10$ .
2. 3 points quelconques pris parmi ces 5 points déterminent un triangle dont les côtés ne contiennent aucun des 2 autres points restants. Le nombre de triangles que déterminent ces 5 points est :  $C_5^3 = 10$ .
3. Le nombre de pentagones est :  $C_5^5 = 1$ .

◇ **Exercice n° 37 p. 60**

1. Le nombre de choix possibles d'entourer les noms de 3 chanteurs parmi 8 est :  $C_8^3 = 56$ .
2. Le nombre de choix possibles comportant le chanteur numéro 2 est :  $C_1^1 \times C_7^2 = 21$ .
3. Les numéros impairs sont : 1, 3, 5 et 7.  
Le nombre de choix possibles ne comportant que des numéros impairs est :  $C_4^3 = 4$ .

□ **Exercices d'approfondissement**

◇ **Exercice n° 38 p. 61**

Un caractère est représenté par une suite de 1, 2, 3, 4 ou bien 5 signaux distincts ou non ; c'est donc un  $p$ -uplet de  $\{\bullet ; -\}$ .

Caractère comportant	Nombre de caractères
1 signal	$2^1$
2 signaux	$2^2$
3 signaux	$2^3$
4 signaux	$2^4$
5 signaux	$2^5$

Le nombre de caractères que l'on peut représenter avec le système d'écriture Morse est :

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 62.$$

◇ **Exercice n° 39 p. 61**

Un caractère est représenté sur la matrice de 6 points dont 1, 2, 3, 4, 5, ou bien 6 points sont en relief ; c'est une combinaison d'éléments choisis parmi 6.

Caractère comportant	Nombre de caractères
1 point	$C_6^1$
2 points	$C_6^2$
3 points	$C_6^3$
4 points	$C_6^4$
5 points	$C_6^5$
6 points	$C_6^6$

Le nombre de caractère que l'on peut représenter avec le système d'écriture BRAILLE est :

$$C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 63.$$

On peut remarquer que c'est le nombre des parties non vides d'un ensemble à 6 éléments, c'est-à-dire :  $2^6 - 1 = 63$ .

◇ **Exercice n° 40 p. 61**

1. Le nombre de cases est :  $7 \times 7 = 49$ . Donc, un jeu est une combinaison de 6 éléments choisis parmi 49.

Le nombre de jeux distincts possibles est :

$$C_{49}^6 = 13\,983\,816.$$

2. Il y a 6 bons numéros (cases) sur les 49 (cases).  
Le nombre de jeux distincts ne comportant aucun bon numéro est :  $C_{43}^6 = 6\,096\,454$ .
3. L'ensemble de jeux distincts comportant au moins un bon numéro est le complémentaire de l'ensemble des jeux distincts ne comportant aucun bon numéro.  
Le nombre de jeux distincts comportant au moins un bon numéro est :  $C_{49}^6 - C_{43}^6 = 7\,887\,362$ .
4. Le nombre de jeux distincts comportant exactement 4 bons numéros est :  
 $C_6^4 \times C_{43}^2 = 15 \times 903 = 13\,545$ .
5. Le nombre de jeux distincts comportant au plus 3 bons numéros est :

$$(C_6^0 \times C_{43}^6) + (C_6^1 \times C_{43}^5) + (C_6^2 \times C_{43}^4) + (C_6^3 \times C_{43}^3) ;$$

c'est-à-dire :

$$6\,096\,454 + 5\,775\,588 + 1\,851\,150 + 246\,820 = 13\,970\,012.$$

◇ **Exercice n° 41 p. 61**

1. Un bureau est un arrangement de 3 éléments parmi 10. Le nombre de bureaux différents que l'on peut constituer est :  $A_{10}^3 = 720$ .
2. Le nombre de bureaux différents dont le poste de trésorier est occupé par une femme est :  
 $6 \times 9 \times 8 = 432$ .
3. Le nombre de bureaux différents dont le poste de trésorier est occupé par une femme et celui de président par un homme est :  $6 \times 4 \times 8 = 192$ .

◇ **Exercice n° 42 p. 61**

1. Il faut au moins 1 moniteur dans chaque remplissage du minibus pour servir d'accompagnateur.  
– Le nombre de remplissages possibles avec ou sans moniteur est :  $C_{24}^{12} = 2\,704\,156$  ;  
– le nombre de remplissages possibles sans moniteur est :  $C_{20}^{12} = 125\,970$ .  
Donc, le nombre de remplissages possibles avec au moins un moniteur est :  $C_{24}^{12} - C_{20}^{12} = 2\,578\,186$ .
2. a) On choisit 1 moniteur parmi les 4 moniteurs et 11 parmi les 20 autres. Le nombre de remplis-

sages possibles comportant un seul moniteur est :

$$C_4^1 \times C_{20}^{11} = 4 \times 167\,960 = 671\,840.$$

b) Il faut au moins 1 moniteur dans chaque remplissage. Les deux moniteurs qui désirent rester ensemble :

• soit les 2 font partie des accompagnateurs du remplissage :

$$C_2^2 \times C_{22}^{10} = 646\,646.$$

• soit les 2 ne montent pas dans le minibus :

$$C_{22}^{12} - C_{20}^{12} = 646\,646 - 125\,970 = 520\,676.$$

Le nombre de remplissages si deux moniteurs désirent rester ensemble est :

$$(C_2^2 \times C_{22}^{10}) + (C_{22}^{12} - C_{20}^{12}) = 1\,167\,322.$$

#### ◇ Exercice n° 43 p. 61

1. Le nombre de dispositions de 4 jetons indiscernables sur les 16 cases du damier à raison de 1 jeton au plus par case est :  $C_{16}^4 = 1\,820$ .

2. a) Une disposition avec 1 jeton sur chaque ligne est obtenue en plaçant 1 jeton dans 1 des 4 cases sur chacune des 4 lignes. Le nombre de dispositions est :  $C_4^1 \times C_4^1 \times C_4^1 \times C_4^1 = 4^4 = 256$ .

b) On peut choisir successivement :

• 1 ligne parmi les 4, où on place 2 jetons dans 2 des 4 cases :  $C_4^1 \times C_4^2 = 4 \times 6 = 24$  possibilités.

• 2 lignes parmi les 3 restantes, où on place 1 jeton dans 1 des 4 cases :

$$C_3^2 \times (C_4^1 \times C_4^1) = 3 \times 16 = 48 \text{ possibilités.}$$

Le nombre de dispositions avec 2 jetons sur une ligne et 1 jeton sur deux autres lignes est :

$$(C_4^1 \times C_4^2) \times (C_3^2 \times C_4^1 \times C_4^1) = 24 \times 48 = 1\,152.$$

c) On choisit 2 lignes parmi les 4, où on place 2 jetons dans 2 des 4 cases de chaque ligne.

Le nombre de dispositions avec 2 jetons sur une ligne et 2 jetons sur une autre ligne est :

$$C_4^2 \times (C_4^2 \times C_4^2) = 216.$$

d) On peut choisir successivement :

• 1 ligne parmi les 4, où on place 3 jetons dans 3 des 4 cases :  $C_4^1 \times C_4^3 = 16$  possibilités.

• 1 ligne parmi les 3 restantes, où on place 1 jeton dans 1 des 4 cases :  $C_3^1 \times C_4^1 = 12$  possibilités.

Le nombre de dispositions avec 3 jetons sur une ligne et 1 jeton sur une autre ligne est :

$$(C_4^1 \times C_4^3) \times (C_3^1 \times C_4^1) = 16 \times 12 = 192.$$

e) On choisit 1 ligne parmi les 4, où on place 1 jeton dans chacune des 4 cases.

Le nombre de dispositions avec 4 jetons sur une ligne est :  $C_4^1 \times C_4^4 = 4$ .

f) On peut choisir successivement :

• sur la 1<sup>re</sup> ligne, on place 1 jeton dans 1 des 4 cases :  $C_4^1 = 4$  possibilités.

• sur la 2<sup>e</sup> ligne, on place 1 jeton dans 1 des 3 cases (colonnes) restantes :  $C_3^1 = 3$  possibilités.

• sur la 3<sup>e</sup> ligne, on place 1 jeton dans 1 des 2 cases (colonnes) restantes :  $C_2^1 = 2$  possibilités.

• sur la 4<sup>e</sup> ligne, on place 1 jeton dans la case (colonne) restante : 1.

Le nombre de dispositions avec 1 jeton sur chaque ligne et sur chaque colonne est :  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ .

#### ◇ Exercice n° 44 p. 61

1. Un mot de 7 lettres est une permutation des 7 lettres.

Le nombre de mots de 7 lettres est :  $7! = 5\,040$ .

2. Il y a autant de mots de 4 lettres que d'arrangements de 4 éléments parmi 7, c'est-à-dire :

$$A_7^4 = 840.$$

3. On a : 2 voyelles A et E ; 5 consonnes B, C, D, F et G. Le nombre de mots de 4 lettres comportant dans l'ordre une consonne, une voyelle, une consonne, une consonne est :  $5 \times 2 \times 4 \times 3 = 120$ .

4. Pour écrire un mot de 4 lettres comportant 3 consonnes et 1 voyelle, on peut successivement :

• choisir 3 consonnes parmi les 5 :

$$C_5^3 \text{ choix possibles ;}$$

• choisir 1 voyelle parmi les 2 :

$$C_2^1 \text{ choix possibles ;}$$

• écrire le mot à l'aide des 4 lettres :

$$4! \text{ possibilités.}$$

Le nombre de mots comportant 3 consonnes et 1 voyelle est :

$$C_5^3 \times C_2^1 \times 4! = 10 \times 2 \times 24 = 480.$$

#### ◇ Exercice n° 45 p. 61

1. On a 2 consonnes f et g ; 3 voyelles a, i et u.

Pour écrire la dernière lettre on a 2 choix possibles.

Le nombre de mots finissant par une consonne est :

$$2 \times 4! = 48.$$

2. Pour écrire la première lettre on a 3 choix possibles. Le nombre de mots commençant par une voyelle est :  $3 \times 4! = 72$ .

3. Pour écrire la première lettre on a 3 choix possibles, puis pour la dernière lettre on a 2 choix possibles. Le nombre de mots dont la première et la dernière sont des voyelles est :  $3 \times 2 \times 3! = 36$ .

4. Le nombre de mots dont la première et la dernière sont des consonnes est :  $2 \times 1 \times 3! = 12$ .

#### ◇ Exercice n° 46 p. 61

On peut former le comité de la manière suivante :

• soit ni madame, ni monsieur N'Guetta ne siège :

$$C_7^3 \times C_6^4 = 35 \times 15 = 525 ;$$

• soit madame siège et monsieur N'Guetta non :

$$C_7^2 \times C_6^4 = 21 \times 15 = 315 ;$$

• soit monsieur N'Guetta siège et madame non :

$$C_7^3 \times C_6^3 = 35 \times 20 = 700.$$

Le nombre de comités que l'on peut former est :

$$(C_7^3 \times C_6^4) + (C_7^2 \times C_6^4) + (C_7^3 \times C_6^3) = 1\,540.$$

◇ Exercice n° 47 p. 61

	Visites				Nombre de trajets
	1 <sup>re</sup>	2 <sup>e</sup>	3 <sup>e</sup>	4 <sup>e</sup>	
a)	4	3	2	1	$4! = 24$
b)	1 Abidjan	3	2	1	$1 \times 3! = 6$
c)	• 1 Bamako	3	2	1	$1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6$
	• 2	1 Bamako	2	1	$2 \times 1 \times 2 \times 1 = 4$
	• 2	1	1 Bamako	1 Cotonou	$2 \times 1 \times 1 \times 1 = 2$
					$6 + 4 + 2 = 12$

◇ Exercice n° 48 p. 62

1. On a :  $4 + 3 + 2 = 9$  pièces.

Le nombre de tirages possibles est :  $C_9^3 = 84$ .

2. a) Pour que la somme soit supérieure ou égale à 200 F, il faut au moins 2 pièces de 100 F parmi les 3 pièces tirées. Le nombre de tirages dont la somme est supérieure ou égale à 200 F est :

$$(C_4^2 \times C_5^1) + (C_4^3 \times C_5^0) = (6 \times 5) + (4 \times 1) = 34.$$

b) Il y a au plus une pièce de 100 F parmi les 3 pièces sinon la somme est supérieure à 200 F.

Le nombre de tirages dont la somme est inférieure à 200 F est :

$$(C_4^0 \times C_5^3) + (C_4^1 \times C_5^2) = (1 \times 10) + (4 \times 10) = 50.$$

◇ Exercice n° 49 p. 62

1. Les 3 chiffres sont identiques :

$$(1,1,1); (2,2,2); (3,3,3); (4,4,4); (5,5,5); (6,6,6).$$

Le nombre de résultats comportant 3 chiffres identiques est : 6.

2. Le nombre de résultats comportant 3 chiffres distincts est :  $6 \times 5 \times 4 = 120$ .

3. Pour le chiffre 1 deux fois et le chiffre 2 une fois on a :  $(1,1,2); (1,2,1); (2,1,1)$  : 3 résultats ;

On a : 6 choix pour le chiffre qui apparaît deux fois, puis 5 choix pour celui qui apparaît une fois.

Le nombre de résultats comportant exactement 2 chiffres distincts est :  $3 \times (6 \times 5) = 90$ .

4. La somme des 3 chiffres est égale à 6 :

• soit :  $1 + 1 + 4 = 6$  ; on a : 3 résultats ;

• soit :  $1 + 2 + 3 = 6$  ; on a :  $3! = 6$  résultats ;

• soit :  $2 + 2 + 2 = 6$  ; on a : 1 résultat.

Le nombre de résultats pour lesquels la somme des chiffres obtenus est égale à 6 est :

$$3 + 6 + 1 = 10.$$

◇ Exercice n° 50 p. 62

1. Le nombre de résultats possibles est :

$$6 \times 6 \times 6 = 216.$$

2. Le nombre de résultats possibles comportant 3 chiffres identiques est : 6.

3. Le nombre de résultats possibles comportant 3 chiffres distincts est :  $6 \times 5 \times 4 = 120$ .

4. Le nombre de résultats possibles ne comportant aucun 6 est :  $5 \times 5 \times 5 = 125$ .

5. Le nombre de résultats comportant au moins un 6 est :  $6^3 - 5^3 = 216 - 125 = 91$ .

6. Pour 6 et 1 on a :  $(6,6,1); (6,1,6); (1,6,6)$ .

Le nombre de résultats comportant exactement deux 6 est :  $3 \times (1 \times 5) = 15$ .

◇ Exercice n° 51 p. 62

1. Pour chaque dé on a : 1 sur 3 faces ; 2 sur 2 faces ; 3 sur 1 face.

Le nombre de façons d'obtenir le nombre 333 est : 1.

2. Le nombre de façons d'obtenir le nombre 123 est :  $3 \times 2 \times 1 = 6$ .

3. La somme des 3 chiffres est égale à 3.

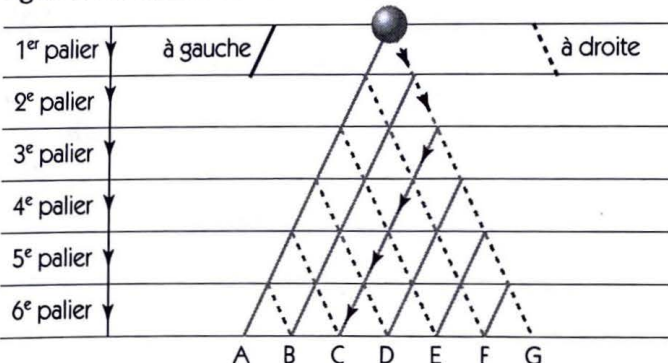
Or :  $1 + 1 + 1 = 3$ . Le nombre de résultats dont la somme des chiffres obtenus est égale à 3 est :

$$3 \times 3 \times 3 = 27.$$

◇ Exercice n° 52 p. 62

On convient de numéroter les paliers successifs de descente de la bille.

• Soit le trajet suivant conduisant à la lettre C, tracé sur la figure ci-après. Pour chaque trajet (T) conduisant à la lettre C, la bille doit descendre de 2 paliers sur la droite (D) et de 4 paliers sur la gauche (G) comme le montre l'exemple tracé sur la figure ci-contre :  $T = DDGGGG$ .



Chaque trajet conduisant à la lettre C est le choix de 2 paliers (parmi les 6) pour descendre sur la droite et les 4 restants pour descendre sur la gauche (ou vice versa). Le nombre de trajets conduisant à la lettre C est :  $C_6^2 = C_6^4 = 15$ .

• Pour chaque trajet conduisant à la lettre A, la bille doit descendre de 0 palier sur la droite et de 6 paliers sur la gauche. Le nombre de trajets conduisant à la lettre A est :  $C_6^0 = C_6^6 = 1$ .

• Pour chaque trajet conduisant à la lettre B, la bille doit descendre de 1 palier sur la droite et de 5 paliers sur la gauche. Le nombre de trajets conduisant à la lettre B est :  $C_6^1 = C_6^5 = 6$ .

• Pour chaque trajet conduisant à la lettre D, la bille doit descendre de 3 paliers sur la droite et de 3 paliers sur la gauche. Le nombre de trajets conduisant à la lettre D est :  $C_6^3 = 20$ .

• Pour chaque trajet conduisant à la lettre E, la bille doit descendre de 4 paliers sur la droite et de 2 paliers sur la gauche. Le nombre de trajets conduisant à la lettre E est :  $C_6^4 = C_6^2 = 15$ .

• Pour chaque trajet conduisant à la lettre F, la bille doit descendre de 5 paliers sur la droite et de 1 palier sur la gauche. Le nombre de trajets conduisant à la lettre F est :  $C_6^5 = C_6^1 = 6$ .

• Pour chaque trajet conduisant à la lettre G, la bille doit descendre de 6 paliers sur la droite et de 0 palier sur la gauche. Le nombre de trajets conduisant à la lettre G est :  $C_6^6 = C_6^0 = 1$ .

◊ **Exercice n° 53 p. 62**

1. a) Le nombre de phrases différentes que l'on peut former est :  $2 \times 3 \times 3 = 18$ .

b) Le nombre de phrases qui ont pour sujet **le chat** est :  $1 \times 3 \times 3 = 9$ .

2. a) Le nombre de phrases qui ont pour sujet **le bébé** et pour complément **sur mes genoux** est :

$$1 \times 3 \times 1 = 3.$$

b) Le nombre de phrases qui ne contiennent ni **le bébé**, ni **sur mes genoux** est :  $1 \times 3 \times 2 = 6$ .

c) • La phrase contient le verbe **joue** mais pas le complément **sur le canapé** :  $2 \times 1 \times 2 = 4$  ;

• La phrase contient le complément **sur le canapé** mais pas le verbe **joue** :  $2 \times 2 \times 1 = 4$ .

• La phrase contient les deux :  $2 \times 1 \times 1 = 2$ .

Le nombre de phrases qui contiennent soit le verbe **joue**, soit le complément **sur le canapé**, soit les deux est :

$$(2 \times 1 \times 2) + (2 \times 2 \times 1) + (2 \times 1 \times 1) = 10.$$

◊ **Exercice n° 54 p. 62**

1. Nombre de façons différentes dont on peut former une équipe de 4 vigiles parmi les 12 :  $C_{12}^4 = 495$ .

2. a) Pour former les 3 équipes de 4 vigiles chacune, on choisit successivement :

• 4 vigiles parmi les 12 pour constituer l'équipe A :  $C_{12}^4 = 495$  possibilités ;

• 4 vigiles parmi les 8 restants pour constituer l'équipe B :  $C_8^4 = 70$  possibilités ;

• 4 vigiles parmi les 4 restants pour constituer l'équipe C :  $C_4^4 = 1$  possibilités.

Le nombre de façons différentes dont on peut former 3 équipes de 4 vigiles chacune est :

$$C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4 = 495 \times 70 \times 1 = 34\ 650.$$

b) Les répartitions des 5 femmes dans les 3 équipes avec au moins 1 femme par équipe peut se faire de manière suivante :

•  $1 + 1 + 3 = 5$  : (1,1,3), (1,3,1), (3,1,1) ;

•  $1 + 2 + 2 = 5$  : (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1).

On a les répartitions suivantes des 5 femmes et des 7 hommes dans les équipes A, B et C.

A	B	C	Nombre de façons différentes
1 femme 3 hommes	1 femme 3 hommes	3 femmes 1 homme	$(C_5^1 \times C_7^3) \times (C_4^1 \times C_4^3) \times (C_3^3 \times C_1^1) = 2\ 800$
1 femme 3 hommes	3 femmes 1 homme	1 femme 3 hommes	$(C_5^1 \times C_7^3) \times (C_4^3 \times C_4^1) \times (C_1^1 \times C_3^3) = 2\ 800$
3 femmes 1 homme	1 femme 3 hommes	1 femme 3 hommes	$(C_5^3 \times C_7^1) \times (C_2^1 \times C_6^3) \times (C_1^1 \times C_3^3) = 2\ 800$
2 femmes 2 hommes	2 femmes 2 hommes	1 femme 3 hommes	$(C_5^2 \times C_7^2) \times (C_3^2 \times C_5^2) \times (C_1^1 \times C_3^3) = 6\ 300$
2 femmes 2 hommes	1 femme 3 hommes	2 femmes 2 hommes	$(C_5^2 \times C_7^2) \times (C_3^1 \times C_5^3) \times (C_2^2 \times C_2^2) = 6\ 300$
1 femme 3 hommes	2 femmes 2 hommes	2 femmes 2 hommes	$(C_5^1 \times C_7^3) \times (C_4^2 \times C_4^2) \times (C_2^2 \times C_2^2) = 6\ 300$
<b>Total : 27 300</b>			

**Remarques**

• Répartitions des femmes dans les 3 équipes avec au moins 1 femme par équipe.

$1 + 1 + 3 = 5$  : (1,1,3), (1,3,1), (3,1,1) :  $3 \times 2\ 800 = 8\ 400$  }  
 $1 + 2 + 2 = 5$  : (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1) :  $3 \times 6\ 300 = 18\ 900$  } = 27 300.

• Les autres répartitions sont telles qu'1 équipe sur les 3 n'est constituée que d'hommes = 7 350.

• On vérifie que :  $27\ 300 + 7\ 350 = 34\ 650$ .

# 4. Dérivation

(pages 63 à 82 du livre de l'élève)

## OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- présenter, de façon intuitive, la notion de limite d'une fonction en un point ;
- définir le nombre dérivé d'une fonction en un point à partir du coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point ;
- familiariser l'élève aux techniques de calcul de dérivées (somme, produit, ...).

## COMMENTAIRES

L'objectif essentiel de la première leçon est de clarifier certaines notions sur les droites (équations, coefficient directeur, vecteurs directeurs) pour mieux asseoir la définition du nombre dérivé.

On introduit le nombre dérivé comme le coefficient directeur de la tangente, puis on le détermine comme limite du rapport  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ .

Les exposés théoriques sur les calculs des dérivées devront être évités ; tous les résultats concernant les calculs de dérivées sont admis. Tous les résultats repris dans les tableaux récapitulatifs sont évidemment à savoir « par cœur ».

## SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

### savoirs

#### Compléments sur les droites

- Vecteurs directeurs d'une droite.
  
- Coefficient directeur d'une droite.

#### Notion de limite

La fonction  $f$  est définie en  $x_0$ .

Si  $f$  admet une limite en  $x_0$ , alors :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

#### Dérivation en $x_0$

- Tangente à une courbe.
- Nombre dérivé.
  
- Équation de la tangente.

#### Calculs de dérivées

- Fonction dérivée.
- Dérivées de fonctions élémentaires.
- Propriétés relatives aux dérivées d'une somme, d'un produit, d'un quotient de deux fonctions dérivables.
- Propriété relative à la dérivée de l'inverse d'une fonction dérivable.

### savoir-faire

- Déterminer une équation d'une droite, connaissant un vecteur directeur et un point.
- Déterminer un vecteur directeur d'une droite, connaissant une équation.
- Construire une droite définie par un point et un vecteur directeur.
- Déterminer le coefficient directeur (s'il existe) d'une droite définie par :
  - une équation ;
  - une représentation graphique ;
  - deux points.
- Déterminer la position relative de deux droites, connaissant leurs coefficients directeurs.
  
- Calculer la limite de  $f$  en  $x_0$ , lorsque  $f$  est définie en  $x_0$ .
  
- Calculer le nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$ .
- Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse  $x_0$ , lorsque  $f$  est dérivable en  $x_0$ .
  
- Calculer les dérivées de fonctions simples :
  - fonctions polynômes ;
  - fonctions homographiques.

**EXERCICES DU MANUEL**

**Exercices du cours**

◇ **Exercice 1.a p. 68**

( $\mathcal{D}_1$ ) n'a pas de coefficient directeur.

Un vecteur directeur de ( $\mathcal{D}_1$ ) est :  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

( $\mathcal{D}_2$ ) a pour coefficient directeur : 0.

Un vecteur directeur de ( $\mathcal{D}_2$ ) est :  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

( $\mathcal{D}_3$ ) a pour coefficient directeur : 2.

Un vecteur directeur de ( $\mathcal{D}_3$ ) est :  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

( $\mathcal{D}_4$ ) a pour coefficient directeur :  $-\frac{3}{2}$ .

Un vecteur directeur de ( $\mathcal{D}_4$ ) est :  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

◇ **Exercice 1.b p. 68**

a)  $m = \frac{6}{-2} = -3$

b)  $m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

c)  $m = 0$

d)  $m = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

e)  $m = \frac{3}{-1} = -3$

f)  $m = 0$ .

◇ **Exercice 1.c p. 68**

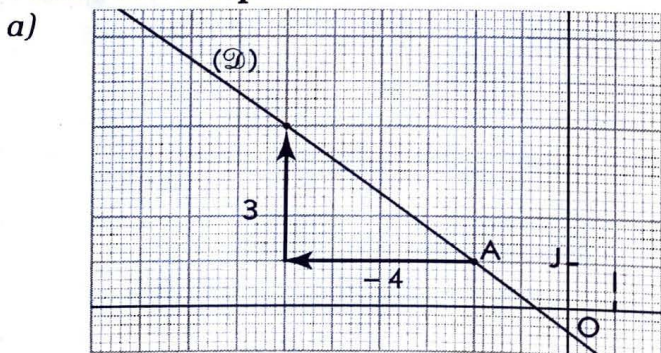
a)  $m = \frac{1+4}{-5-0} = -1$

b)  $m = \frac{3-1}{2-1} = 2$

c)  $m = \frac{6-6}{0+1} = 0$

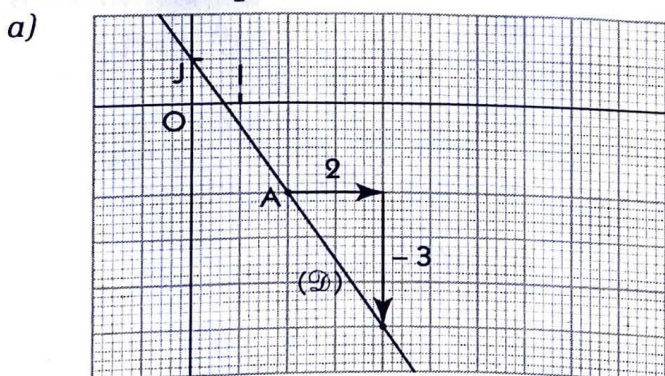
d)  $m = \frac{2+1}{5-3} = \frac{3}{2}$ .

◇ **Exercice 1.d p. 68**



b) ( $\mathcal{D}$ ) :  $3x + 4y + 2 = 0$ .

◇ **Exercice 1.e p. 68**



b) ( $\mathcal{D}$ ) :  $y = -\frac{3}{2}x + 1$ .

◇ **Exercice 1.f p. 68**

Le coefficient directeur de ( $\mathcal{D}_1$ ) est positif.

Le coefficient directeur de ( $\mathcal{D}_2$ ) est nul.

Le coefficient directeur de ( $\mathcal{D}_3$ ) est négatif.

◇ **Exercice 1.g p. 68**

Soit  $m$  et  $m'$  les coefficients directeurs respectifs de ( $\mathcal{D}$ ) et ( $\mathcal{D}'$ ).

a)  $m \times m' = (-2) \times 0,5 = -1$  ; donc : ( $\mathcal{D}$ )  $\perp$  ( $\mathcal{D}'$ ).

b)  $m \times m' = 1 \times 2 = 2$  ; donc : ( $\mathcal{D}$ ) et ( $\mathcal{D}'$ ) sont sécantes non perpendiculaires.

c)  $m = m' = 40$  ; donc : ( $\mathcal{D}$ ) // ( $\mathcal{D}'$ ).

d)  $m = m' = -\frac{3}{2}$  ; donc : ( $\mathcal{D}$ ) // ( $\mathcal{D}'$ ).

e)  $m \times m' = 0 \times (-1) = 0$  ; donc : ( $\mathcal{D}$ ) et ( $\mathcal{D}'$ ) sont sécantes non perpendiculaires.

f)  $m \times m' = \frac{4}{3} \times -\frac{3}{4} = -1$  ; donc : ( $\mathcal{D}$ )  $\perp$  ( $\mathcal{D}'$ ).

◇ **Exercice 2.a p. 69**

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = -5$     b)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 1$ .

◇ **Exercice 2.b p. 69**

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \frac{3}{2}$     b)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = -5$ .

◇ **Exercice 3.a p. 74**

$f'(0) = 0$  ;  $f'(1,5) = -\frac{1}{2}$  ;  $f'(3) = 2$  ;  
 $f'(4) = 0$  ;  $f'(5) = -1$ .

◇ **Exercice 3.b p. 74**

a)  $m(x) = \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x - 1$

et  $\lim_{x \rightarrow -1} m(x) = -2$ . Donc :  $f'(-1) = -2$ .

b)  $m(x) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{3(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{3}{x-3}$

et  $\lim_{x \rightarrow 2} m(x) = -3$ . Donc :  $f'(2) = -3$ .

◇ **Exercice 3.c p. 74**

a) On a :  $f'(0) = 1$  ; donc, une équation de la tangente au point d'abscisse 0 est :  $y = x$ .

b) On a :  $f'(1) = 2$  ; donc, une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est :  $y + 1 = 2(x - 1)$  ou  $y = 2x - 3$ .

◇ **Exercice 3.d p. 74**

On a :  $f'(1) = -3$  et  $f(1) = (-3) \times 1 + 2 = -1$ .

◇ Exercice 4.a p. 78

On a :  $f'(2) = \frac{7-3}{4-2} = 2$ .

◇ Exercice 4.b p. 78

a)  $f'(x) = 2x$                       b)  $f'(x) = 3x$   
 c)  $f'(x) = 2x - 2$                 d)  $f'(x) = 6x^2 - 2x + 8$   
 e)  $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$                       f)  $f'(x) = \frac{-3}{(x+3)^2}$ .

◇ Exercice 4.c p. 78

a)  $f'(x) = 3x^2$                       b)  $f'(x) = 3x^2$

c)  $f'(x) = 3x^2 - 6$                 d)  $f(x) = 12x^2$ .

◇ Exercice 4.d p. 78

a) On a :  $f(x) = x^2 - 2x - 3$ .  
 b) On a :  $f'(x) = 2x - 2$  ;  
 ou :  $f'(x) = 1(x-3) + 1(x+1) = 2x - 2$ .

◇ Exercice 4.e p. 78

a)  $f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$                       b)  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{4}{x^2}$ .

▢ Exercices d'apprentissage

COMPLÉMENTS SUR LES DROITES

◇ Exercice n° 1 p. 79

a)  $(\mathcal{D}) : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$  ; donc :  $m = \frac{1}{2}$ .

b)  $m = \frac{1+3}{-1-2} = -\frac{4}{3}$ .

c)  $m = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$ .

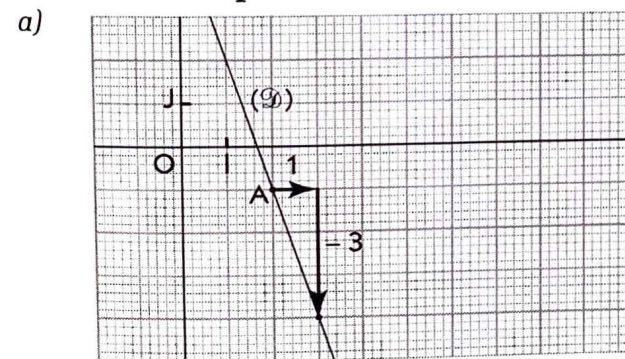
◇ Exercice n° 2 p. 79

$(\mathcal{D}_1)$  a pour coefficient directeur :  $-\frac{3}{5}$ .

$(\mathcal{D}_2)$  a pour coefficient directeur : 0.

$(\mathcal{D}_3)$  a pour coefficient directeur : 2.

◇ Exercice n° 3 p. 79



b)  $(\mathcal{D}) : y = -3x + 5$ .

◇ Exercice n° 4 p. 79

1. On a :  $f(-1) = -1$  et  $f(2) = -4$  ;  
 donc : A(-1 ; -1) et B(2 ; -4).

La droite (AB) a pour coefficient directeur :

$$m = \frac{-4+1}{2+1} = -1.$$

2.  $(\mathcal{D}) : y = -x - 2$ .

◇ Exercice n° 5 p. 79

1. La droite (AB) a pour coefficient directeur :

$$m = \frac{3-0}{0-2} = -\frac{3}{2}.$$

2. Soit  $(\mathcal{D})$  la droite de coefficient directeur  $m'$  contenant la hauteur du triangle OAB issue de O.

On a :  $-\frac{3}{2} \times m' = -1$  ; c'est-à-dire :  $m' = \frac{2}{3}$ .  
 L'équation réduite de la droite  $(\mathcal{D})$  est :  $y = \frac{2}{3}x$ .

◇ Exercice n° 6 p. 79

1. La droite (AB) a pour coefficient directeur :

$$m = \frac{3-1}{2+2} = \frac{1}{2}.$$

2. Soit  $(\mathcal{D})$  la médiatrice [AB], de coefficient directeur  $m'$ . On a :  $m' = -2$ .

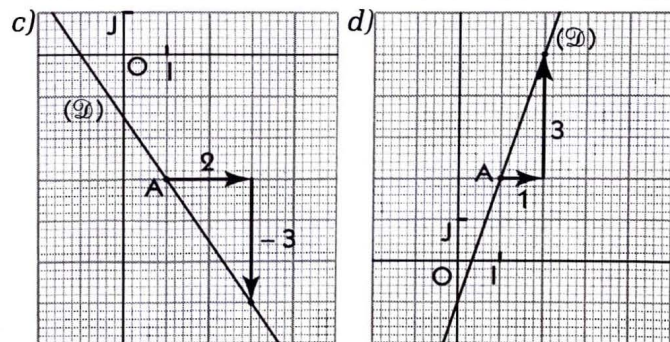
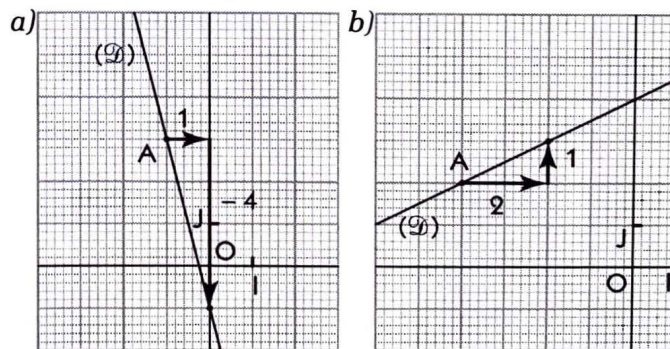
$(\mathcal{D})$  passe par K(0 ; 2), milieu de [AB].

L'équation réduite de la droite  $(\mathcal{D})$  est :

$$y = -2x + p.$$

On a :  $-2 \times 0 + p = 2$  ; donc :  $y = -2x + 2$ .

◇ Exercice n° 7 p. 79



NOTION DE LIMITE

◇ Exercice n° 8 p. 79

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = -3$     b)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -4$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 4$         d)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = -2$ .

◇ Exercice n° 9 p. 79

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -6$       b)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -8$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 7$       d)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -3.$

**DÉRIVATION EN  $x_0$**

◇ Exercice n° 10 p. 79

a)  $f'(1) = 2$       b)  $f'(-2) = -4$   
 c)  $f'(-1) = 3$       d)  $f'(2) = -5.$

◇ Exercice n° 11 p. 79

a) (T) :  $y = -2x + 3$       b) (T) :  $y = -x + \frac{17}{4}$   
 c) (T) :  $y = -3x - 3$       d) (T) :  $y = \frac{1}{9}x + \frac{13}{9}.$

◇ Exercice n° 12 p. 80

$(\mathcal{D}_1) : y = -x$  ;  $(\mathcal{D}_2) : y = 2x - 2$  ;  $(\mathcal{D}_3) : y = 3.$

◇ Exercice n° 13 p. 80

$f'(0) = -2$  et  $f(0) = (-3) \times 0 + 3 = 3.$

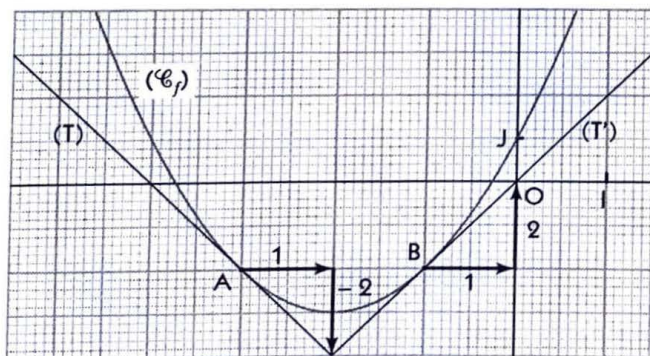
◇ Exercice n° 14 p. 80

• Le coefficient directeur de la tangente (T) au point A(-3 ; -2) est le nombre dérivé en -3.

On a :  $m(x) = \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = \frac{(x+1)(x+3)}{x+3} = x + 1 ;$   
 et  $\lim_{x \rightarrow -3} m(x) = -2$  ou  $f'(-3) = -2.$

• Le coefficient directeur de la tangente (T') au point B(-1 ; -2) est le nombre dérivé en -1.

On a :  $m(x) = \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{(x+1)(x+3)}{x+1} = x + 3 ;$   
 et  $\lim_{x \rightarrow -1} m(x) = 2$  ou  $f'(-1) = 2.$



◇ Exercice n° 15 p. 80

- Une équation de la tangente à  $(\mathcal{C}_f)$  au point d'abscisse 1 est :  $y = -2x + 6.$
- a) Les points d'abscisses respectives -1 et 1 sont symétriques par rapport à l'axe (O).

On a :  $\begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}$  ; donc :  $y' = -2(-x') + 6 = 2x' + 6.$   
 Donc, une équation de la tangente à  $(\mathcal{C}_f)$  au point d'abscisse -1 est :  $y = 2x + 6.$   
 b) Les points d'abscisses respectives -1 et 1 sont symétriques par rapport au point O.

On a :  $\begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases}$  ; donc :  $-y' = -2(-x') + 6 = 2x' + 6$   
 ou  $y' = -2x' - 6.$   
 Donc, une équation de la tangente à  $(\mathcal{C}_f)$  au point d'abscisse -1 est :  $y = -2x - 6.$

**CALCULS DE DÉRIVÉES**

◇ Exercice n° 16 p. 80

- $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On a :  $f'(x) = 8x + 8.$
- $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On a :  $f'(x) = -2x + 3.$
- $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On a :  $f'(x) = 3x^2 - 3.$
- $f$  est dérivable sur chacun des intervalles  $]-\infty ; 2[$  et  $]2 ; +\infty[.$  On a :  $f'(x) = \frac{1}{(x-2)^2}.$
- $f$  est dérivable sur chacun des intervalles  $]-\infty ; 5[$  et  $]5 ; +\infty[.$  On a :  $f'(x) = -\frac{11}{(x-5)^2}.$
- $f$  est dérivable sur chacun des intervalles  $]-\infty ; 3[$  et  $]3 ; +\infty[.$  On a :  $f'(x) = -\frac{2}{(x-3)^2}.$

◇ Exercice n° 17 p. 80

- On a :  $f'(x) = 3x^2 - 3.$
- a) L'abscisse d'un point où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses est solution de l'équation :  $f'(x) = 0.$   
 On a :  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$  ou  $x = 1 ;$   
 $f(-1) = 2$  et  $f(1) = -2.$   
 Les points cherchés sont : A(-1 ; 2) et B(1 ; -2).  
 b) Les équations réduites respectives de  $(T_A)$  et  $(T_B)$  sont :  $y = 2$  et  $y = -2.$

◇ Exercice n° 18 p. 80

On a :  $f'(x) = 2x - 4.$   
 $f'(x) = 2 \Leftrightarrow 2x - 4 = 2 \Leftrightarrow x = 3.$   
 $f(3) = -2 ;$  donc, le point cherché est : A(3 ; -2).  
 Une équation de la tangente à  $(\mathcal{C})$  au point A est :  $y = 2x - 8.$

◇ Exercice n° 19 p. 80

- Pour tout nombre réel  $x \neq 1, f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}.$   
 On a :  $f'(x) = 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 = -\frac{1}{3}.$   
 Cette équation n'a pas de solution.  
 Il n'existe aucun point où la tangente a pour coefficient directeur 3.
- On a :  $f'(x) = -1 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = 2$   
 $f(0) = 0$  et  $f(2) = 2 ;$   
 Les points cherchés sont : O et A(2 ; 2).  
 On a :  $(T_O) : y = -x ;$   
 $(T_A) : y = -x + 4.$

◇ Exercice n° 20 p. 80

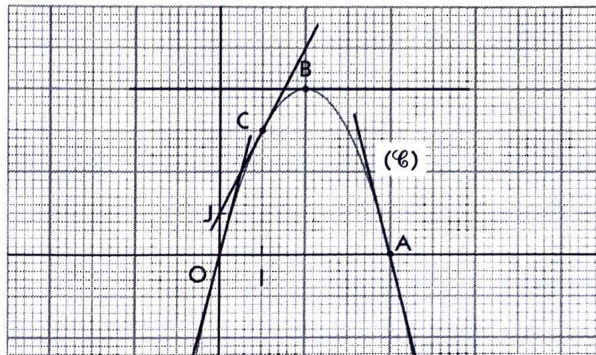
- On a : a)  $f(x) = -12x^2 + 17x - 6$   
b)  $f(x) = x^2 - 6x + 9$ .
- On a : a)  $f'(x) = -24x + 17$   
ou bien  $f'(x) = 4(2 - 3x) - 3(4x - 3) = -24x + 17$ .  
b)  $f'(x) = 2x - 6$   
ou bien  $f'(x) = 1(x - 3) + 1(x - 3) = 2x - 6$ .

◇ Exercice n° 21 p. 80

- $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .
- Pour tout  $x \in D$ ,  $f(x) = 2 - \frac{3}{x-1}$ .
- Pour tout  $x \in D$ , on a :  
$$f'(x) = 0 + \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{3}{(x-1)^2}$$
  
ou :  $f'(x) = \frac{2(x-1) - (2x-5)}{(x-1)^2} = \frac{3}{(x-1)^2}$ .

◇ Exercice n° 22 p. 81

- Le nombre dérivé en  $x_0$  est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse  $x_0$ .  
On a :  $f'(x) = -2x + 4$  ;  
 $f'(0) = 4$  ;  $f'(4) = -4$  ;  $f'(2) = 0$  ;  $f'(1) = 2$ .
- $(T_O) : y = 4x$  ;  $(T_A) : y = -4x + 16$   
 $(T_B) : y = 4$  ;  $(T_C) : y = 2x + 1$ .



▢ Exercices d'approfondissement

◇ Exercice n° 23 p. 81

- Le nombre dérivé en  $x_0$  est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse  $x_0$ .  
On a :  $f'(1,5) = 0$  ;  $f'(3) = 2$  ;  $f'(5) = 0$ .
- a) La représentation de  $f$  sur l'intervalle  $[-8 ; 8]$  s'obtient en complétant la partie correspondante à  $[0 ; 8]$  par son symétrique par rapport au point O.  
b)  $f'(-1,5) = 0$  ;  $f'(-3) = 2$  ;  $f'(-5) = 0$ .
- c) On a :

$$m(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ et } m(-x) = \frac{f(-x)}{-x} = \frac{-f(x)}{-x} = \frac{f(x)}{x}$$

Donc,  $f$  est dérivable en 0 et la tangente « descend » ; donc le nombre dérivé en 0 est négatif.

- a) La représentation de  $f$  sur l'intervalle  $[-8 ; 8]$  s'obtient en complétant la partie correspondante à  $[0 ; 8]$  par son symétrique par rapport à l'axe (OJ).

b)  $f'(-1,5) = 0$  ;  $f'(-3) = -2$  ;  $f'(-5) = 0$ .

c) On a :  $m(x) = \frac{f(x)}{x}$

et  $m(-x) = \frac{f(-x)}{-x} = \frac{f(x)}{-x} = -\frac{f(x)}{x} = -m(x)$ .

De plus :  $\lim_{x \rightarrow 0} m(x) \neq 0$ . Graphiquement, le point O est un point « anguleux ». Donc,  $f$  n'est pas dérivable en O.

◇ Exercice n° 24 p. 81

- On a :
- $$\begin{cases} f(x) = ax^2 + bx \text{ et } f(-1) = 2 \times (-1) - 3 = -5 \\ f'(x) = 2ax + b \text{ et } f'(-1) = 2 \end{cases}$$
- donc :  $\begin{cases} a - b = -5 \\ -2a + b = 2 \end{cases}$  ou :  $\begin{cases} a = 3 \\ b = 8 \end{cases}$  ;  $f(x) = 3x^2 + 8x$ .

◇ Exercice n° 25 p. 81

- On a :
- $$\begin{cases} f(x) = ax^2 + bx \text{ et } f(4) = 0 \\ f'(x) = 2ax + b \text{ et } f'(4) = -4 \end{cases}$$
- donc :  $\begin{cases} 16a + 4b = 0 \\ 8a + b = -4 \end{cases}$  ou :  $\begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases}$  ;  $f(x) = -x^2 + 4x$ .

◇ Exercice n° 26 p. 81

- On a :
- $$\begin{cases} f(x) = ax^2 + bx + 3 \text{ et } f(-1) = 2 \\ f'(x) = 2ax + b \text{ et } f'(-1) = 0 \end{cases}$$
- donc :  $\begin{cases} a - b + 3 = 2 \\ -2a + b = 0 \end{cases}$  ou :  $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$  ;  
 $f(x) = x^2 + 2x + 3$ .

◇ Exercice n° 27 p. 81

- Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ,  $f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}$ .
- L'abscisse d'un point où la tangente est parallèle à la droite d'équation  $y = -5x + 7$  est solution de l'équation :  $f'(x) = -5$ .  
On a :  $f'(x) = -5 \Leftrightarrow x = 1$  ou  $x = 3$  ;  
 $f(1) = -4$  et  $f(3) = 6$ .  
Les points cherchés sont : A(1 ; -4) et B(3 ; 6).

◇ Exercice n° 28 p. 81

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 2x - 2$ .
- L'abscisse d'un point où la tangente est parallèle à la droite d'équation  $y = 4x - 5$  est solution de l'équation :  $f'(x) = 4$ .  
On a :  $f'(x) = 4 \Leftrightarrow x = 3$  ;  
 $f(3) = 0$  ; donc, le point cherché est : A(3 ; 0).

◇ Exercice n° 29 p. 81

On a :  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) ;  
 $f'(x) = 2ax + b$ .

On a :  $\begin{cases} f(1) = -2 \\ f(0) = -6 \\ f'(0) = 5 \end{cases}$  équivaut à  $\begin{cases} a + b + c = -2 \\ c = -6 \\ b = 5 \end{cases}$

Donc :  $\begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \\ c = -6 \end{cases}$  et  $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ .

◇ Exercice n° 30 p. 81

1. On a :

•  $f(1) = 1$  et  $g(1) = 1$  ; donc,  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_g)$  passent par le point  $A(1; 1)$  ;

•  $\begin{cases} f'(x) = 6x - 4 \text{ et } f'(1) = 2 \\ g'(x) = -4x + 6 \text{ et } g'(1) = 2 \end{cases}$  ;

donc, les deux tangentes sont parallèles, passent par le même point  $A$  et sont confondues :  $(T)$ .

2. a)  $(T) : y = 2x - 1$ .

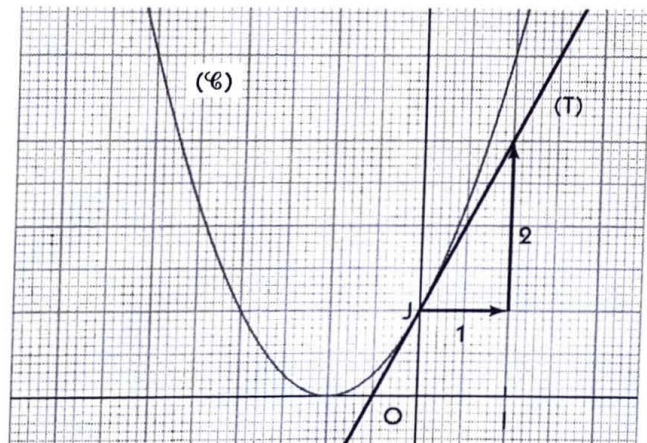
b) On a :

•  $f(x) - (2x - 1) = 3(x - 1)^2 \geq 0$  ; donc, en dehors du point de contact  $A$ ,  $(\mathcal{C}_f)$  est au-dessus de  $(T)$  ;

•  $g(x) - (2x - 1) = -2(x - 1)^2 \leq 0$  ; donc, en dehors du point de contact  $A$ ,  $(T)$  est au-dessus de  $(\mathcal{C}_g)$ .

◇ Exercice n° 31 p. 81

1. Représentation graphique  $(\mathcal{C})$  de  $f$  ci-dessous.



2. On a :  $f'(x) = 2x + 2$  et  $f'(0) = 2$ .

$(T) : y = 2x + 1$ .

3. a)

$x$	-0,01	-0,001	0	0,001	0,01
$(1+x)^2$	0,9801	0,998001	1	1,002001	1,0201
$1+2x$	0,98	0,998	1	1,002	1,020
$(1+x)^2 - (1+2x)$	0,0001	0,000001	0	0,000001	0,0001

b) Lorsque  $x$  est très proche de zéro,  $(1+x)^2 - (1+2x)$  est très proche de zéro ; donc, dans ce cas  $(1+2x)$  est une valeur approchée de  $(1+x)^2$ .

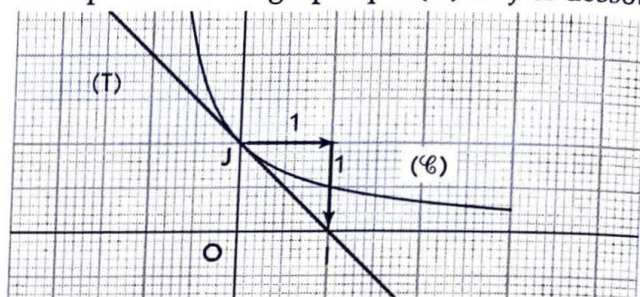
c) L'erreur commise est :  $(1+x)^2 - (1+2x) = x^2$ .

4. Une valeur approchée de :

- $(1,02)^2$  est :  $1 + 2 \times 0,02 = 1,04$  ;
- $(1,001)^2$  est :  $1 + 2 \times 0,001 = 1,002$  ;
- $(0,98)^2$  est :  $1 + 2 \times (-0,02) = 0,96$  ;
- $(0,999)^2$  est :  $1 + 2 \times (-0,001) = 0,998$ .

◇ Exercice n° 32 p. 82

1. La représentation graphique  $(\mathcal{C})$  de  $f$  ci-dessous.



2. On a :  $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$  et  $f'(0) = -1$ .

L'équation réduite de la droite  $(T)$  est :  $y = -x + p$ .

On a :  $(-1) \times 0 + p = 1$  ; donc :  $y = -x + 1$ .

3. a)

$x$	-0,01	-0,001	0	0,001	0,01
$\frac{1}{1+x}$	1,01001	1,001001	1	0,9990009	0,99009
$1-x$	1,01	1,001	1	0,999	0,00009
$\frac{1}{1+x} - (1-x)$	0,00001	0,000001	0	0,0000009	0,01

b) Lorsque  $x$  est très proche de zéro,  $\frac{1}{1+x} - (1-x)$  est très proche de zéro ; donc, dans ce cas  $(1-x)$  est une valeur approchée de  $\frac{1}{1+x}$ .

c) L'erreur commise est :  $\frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{x^2}{1+x}$ .

4. Une valeur approchée de :

- $\frac{1}{1,009}$  est :  $1 - 0,009 = 0,991$  ;
- $\frac{1}{1,01}$  est :  $1 - 0,01 = 0,99$ .

◇ Exercice n° 33 p. 82

1. Lorsque l'entreprise ne fabrique aucun objet, on a :  $x = 0$  ; donc le montant des charges fixes est :  $f(0) = 100$  F CFA.

2. a) Lorsque l'entreprise fabrique 100 objets, on a :  $x = 100$  ; donc le coût de fabrication de 100 objets est :  $f(100) = 700$  F CFA.

Lorsque l'entreprise fabrique 101 objets, on a :  $x = 101$  ; donc le coût de fabrication de 101 objets est :  $f(101) = 708,02$  F CFA.

b) L'augmentation de coût entraînée par la fabrication de ce 101<sup>e</sup> objet est :  $f(101) - f(100) = 8,02$  F CFA.

3. a) On a :  $f'(x) = 0,04x + 4$ .

b) On a :  $f'(100) = 8$ .

c) On a :  $[f(101) - f(100)] - f'(100) = 8,02 - 8 = 0,02$  ; donc, les deux valeurs sont très voisines.

## 5. Statistiques

(pages 83 à 102 du livre de l'élève)

### OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- présenter les caractéristiques de position et de dispersion, ainsi que leur utilisation dans l'analyse d'une série statistique.
- étendre aux séries statistiques à modalités regroupées en classes les notions de caractéristiques de position et de dispersion.
- présenter des exemples de séries chronologiques.

### COMMENTAIRES

• Ce chapitre donne l'occasion de faire fonctionner les concepts acquis en classe de seconde, tant pour l'organisation des données que pour leurs représentations graphiques.

Les points nouveaux sont :

- la présentation de nouvelles caractéristiques d'une série statistique ;
  - les histogrammes, notamment pour représenter des séries à modalités regroupées en classes.
- Comme souvent en statistiques, le cours comportera essentiellement des exercices bien choisis et peu nombreux.
- Les notions relatives aux séries à modalités regroupées en classes sont analogues à celles qui ont été présentées en seconde pour les séries à modalités non regroupées en classes. En particulier, la moyenne, la variance et l'écart type se calculent de la même manière, en remplaçant chaque classe par son centre.

Quand l'occasion se présente, on pourra interpréter les caractéristiques en terme de répartition des éléments de la série.

### SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

#### savoirs

##### Caractéristiques d'une série statistique

- Caractéristiques de position  
Mode, moyenne et médiane
- Caractéristiques de dispersion  
Variance et écart type

##### Séries à modalités regroupées en classes

- Regroupement en classes :
  - effectif et fréquence d'une classe ;
  - effectifs cumulés et fréquences cumulées.
- Représentations graphiques :
  - histogramme ;
  - polygones des effectifs cumulés (ou fréquences cumulées).
- Traitement des données :
  - détermination du mode ;
  - détermination de la médiane ;
  - détermination de la moyenne ;
  - détermination de l'écart type.

#### savoir-faire

- Déterminer le(s) mode(s), la moyenne, la médiane d'une série statistique à caractère quantitatif.
- Calculer la variance, l'écart type d'une série statistique à caractère quantitatif.
- Déterminer un effectif (une fréquence) cumulé(e) relatif(ve) à une classe.
- Dresser un tableau des effectifs cumulés (ou des fréquences cumulées).
- Représenter une série à modalités regroupées en classes par un histogramme.
- Représenter une série à modalités regroupées en classes par un polygone des effectifs cumulés (ou fréquences cumulées).
- Établir le tableau des effectifs ou des fréquences à partir d'une représentation graphique d'une série.
- Déterminer le(s) mode(s), la moyenne, la médiane d'une série à modalités regroupées en classes.
- Calculer la variance, l'écart type d'une série à modalités regroupées en classes.

savoirs

savoir-faire

Exemples de séries chronologiques

- Définition
- Représentations graphiques :
  - diagramme à bandes ;
  - polygone des effectifs ;
  - diagramme polaire.

- Représenter une série chronologique par un diagramme à bandes, un polygone des effectifs ou un diagramme polaire.
- Établir le tableau des effectifs ou des fréquences à partir d'une représentation graphique d'une série chronologique.

EXERCICES DU MANUEL

Exercices du cours

◇ Exercice 1.a p. 88

1. Le tableau des effectifs.

Âge	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Effectif	1	4	3	5	4	3	3	7	6	4

2. Le mode est : 17 (ans).

4. 20 passagers ont un âge inférieur ou égal à 15 et 20 passagers ont un âge supérieur ou égal à 16 ; donc la médiane est comprise entre 15 et 16, c'est-à-dire la médiane est : 15,5.

5.

Âge	Effectif	Produit de l'âge par l'effectif	Écart à la moyenne	Produit du carré de l'écart à la moyenne par l'effectif
10	1	10	- 5,175	26,780 625
11	4	44	- 4,175	69,722 5
12	3	36	- 3,175	30,241 875
13	5	65	- 2,175	23,653 125
14	4	56	- 1,175	5,522 5
15	3	45	- 0,175	0,091 875
16	3	48	0,825	2,041 875
17	7	119	1,825	23,314 375
18	6	108	2,825	47,883 75
19	4	76	3,825	58,522 5
<b>Total</b>	<b>40</b>	<b>607</b>		<b>287,775</b>

La moyenne est :  $m = \frac{607}{40} = 15,175$ . L'écart type est :  $\sigma = \sqrt{\frac{287,775}{40}} \approx 2,68$ .

◇ Exercice 1.b p. 88

1. Le salaire moyen dans cette entreprise est :

$$\frac{2\ 200\ 000 \times 1 + 500\ 000 \times 4 + 100\ 000 \times 11 + 50\ 000 \times 14}{1 + 4 + 11 + 14} = \frac{6\ 000\ 000}{30} = 200\ 000 \text{ F CFA.}$$

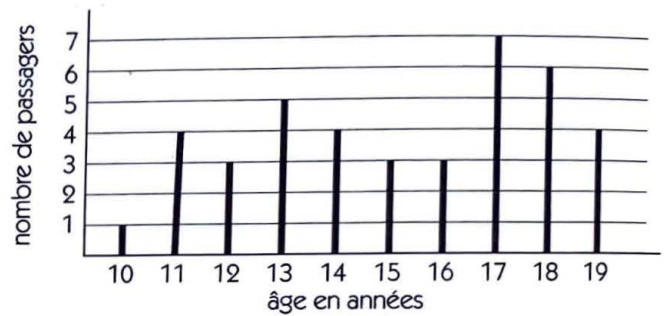
2. Le mode est : 50 000 F CFA.

3.

Salaire mensuel	50 000	100 000	500 000	2 200 000
Effectif	14	11	4	1

25 employés ont un salaire mensuel inférieur ou égal à 100 000 F CFA et 16 employés ont un salaire mensuel supérieur ou égal à 100 000 F CFA ; donc la médiane est : 100 000 F CFA . Cela signifie : un employé sur deux de cette entreprise, a au moins (ou au plus) 100 000 F CFA comme salaire mensuel.

3. Le diagramme en bâtons



◇ Exercice 1.c p. 88

1. • La population étudiée est l'ensemble des familles du village ;
- le caractère est le nombre d'enfants par famille ;
- le mode est : 5 (enfants).

2. et 3.

Nombre d'enfants $x$	Nombre de familles $y$	Produit de $x$ par $y$	Écart à la moyenne	Produit du carré de l'écart à la moyenne par $y$
1	6	6	- 3,3125	65,835 937 5
2	8	16	- 2,3125	42,781 25
3	12	36	- 1,3125	20,671 875
4	15	60	- 0,3125	1,464 843 75
5	20	100	0,6875	9,453 125
6	10	60	1,6875	28,476 562 5
7	5	35	2,6875	36,113 281 25
8	4	32	3,6875	54,390 625
<b>Total</b>	<b>80</b>	<b>345</b>		<b>259,187 5</b>

La moyenne est :  $m = \frac{345}{80} = 4,3125$ . L'écart type est :  $\sigma = \sqrt{\frac{259,187 5}{80}} \approx 1,80$ .

◇ Exercice 2.a p. 93

1. Le nombre de véhicules qui ont franchi le pont Lévis au cours de l'année 2000 est :

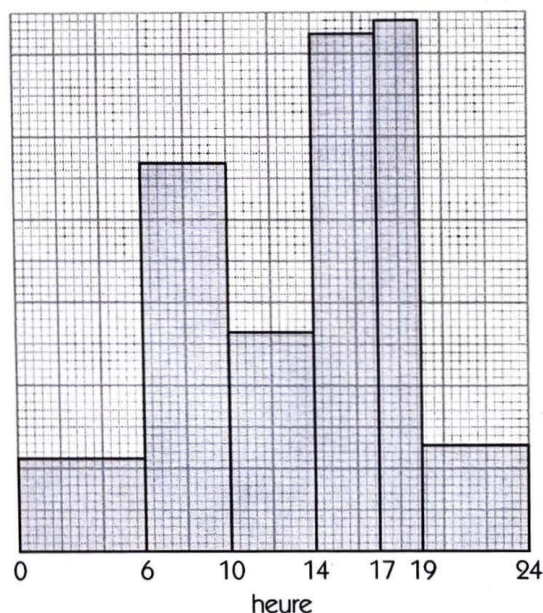
$$4\ 200 + 11\ 700 + 6\ 600 + 11\ 700 + 8\ 000 + 4\ 000 = 46\ 200.$$

2. Les classes modales sont : [6 ; 10[ et [14 ; 17[.

3. Choisissons de représenter 2 500 véhicules par une aire de 1 cm<sup>2</sup> et 4 heures par 1 cm.

Pour chaque classe on détermine alors la base, l'aire et la hauteur du rectangle correspondant ( $\text{Hauteur} = \frac{\text{Aire}}{\text{Base}}$ ).

Heure	Nombre de véhicules	Aire du rectangle (en cm <sup>2</sup> )	Base du rectangle (en cm)	Hauteur du rectangle (en cm)
[0 ; 6[	4 200	1,68	1,5	1,12
[6 ; 10[	11 700	4,68	1	4,68
[10 ; 14[	6 600	2,64	1	2,64
[14 ; 17[	11 700	4,68	0,75	6,24
[17 ; 19[	8 000	3,2	0,5	6,4
[19 ; 24[	4 000	1,6	1,25	1,28



Ci-contre l'histogramme.

◇ Exercice 2.b p. 93

1. La fréquence des automobilistes ayant parcouru 1 000 km ou plus est :  $\frac{200 + 160}{1\ 200} \times 100 = 30\ %$ .

2.

Centre de la classe	Effectif	Produit du centre par l'effectif	Écart à la moyenne	Produit du carré de l'écart à la moyenne par l'effectif
250	180	45 000	- 641,667	74 112 577
750	660	495 000	- 141,667	13 245 895,67
1 250	200	250 000	358,333	25 680 507,78
1 750	160	280 000	858,333	117 877 686,2
<b>Total</b>	<b>1 200</b>	<b>1 070 000</b>		<b>230 916 666,7</b>

La moyenne est :  $m = \frac{1\,070\,000}{1\,200} \approx 891,667$ .

L'écart type est :  $\sigma = \sqrt{\frac{230\,916\,666,7}{1\,200}} \approx 438,669$ .

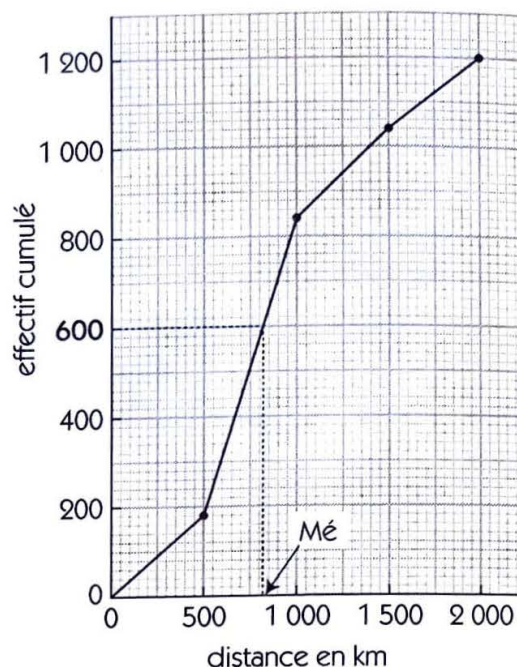
3. Ci-contre le diagramme.

Distance (en km)	Effectif	Effectif cumulé croissant
[0 ; 500[	180	180
[500 ; 1 000[	660	840
[1 000 ; 1 500[	200	1040
[1 500 ; 2 000[	160	1 200

La distance médiane est l'abscisse du point du polygone des effectifs cumulés dont l'ordonnée est :

$$\frac{1\,200}{2} = 600.$$

La lecture graphique donne :  $Mé \approx 815$  km.

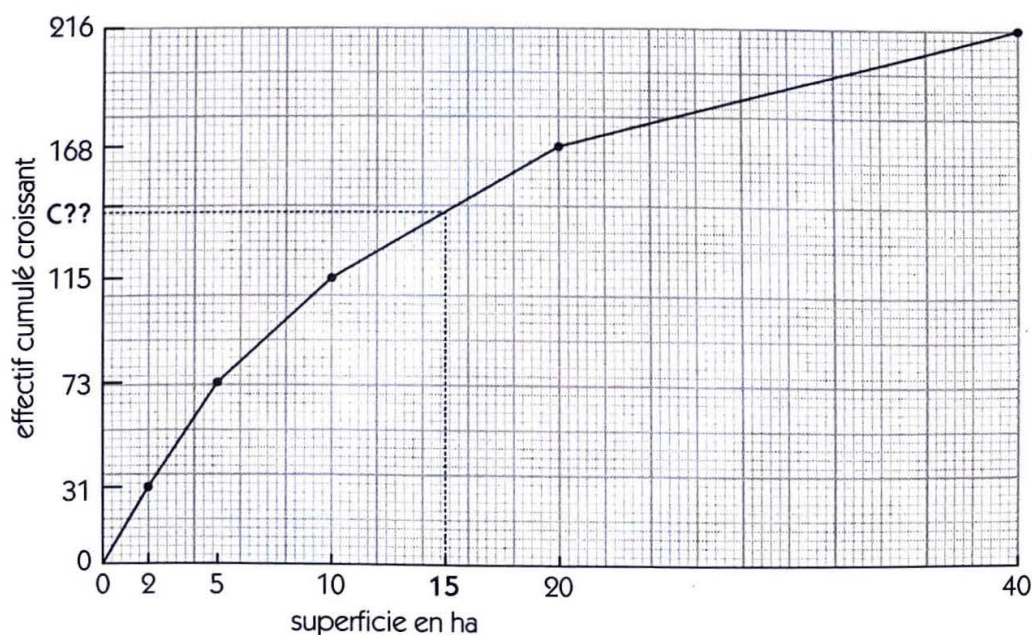


◇ Exercice 2.c p. 93

1.

Superficie (en ha)	Nombre d'exploitations	Fréquence (en %)	Effectif cum. croissant	Effectif cum. décroissant
[0 ; 2[	31	14,35	31	216
[2 ; 5[	42	19,44	73	185
[5 ; 10[	42	19,44	115	143
[10 ; 20[	53	24,54	168	101
[20 ; 40]	48	22,22	216	48

2. Ci-dessous le diagramme.



3. Le nombre d'exploitations dont la superficie est inférieure ou égale à 15 ha est l'ordonnée C du point du polygone des effectifs cumulés d'abscisse 15.

La lecture graphique donne :  $C \approx 141$  ; c'est-à-dire :  $\frac{141}{216} \times 100 = 65,28 \%$ .

◇ Exercice 2.d p. 93

1.	Versement (en F CFA)	Fréquence cumulée	Fréquence (en %)	Effectif
	[1 000 ; 2 000[	10	10	20
	[2 000 ; 3 000[	32	22	44
	[3 000 ; 4 000[	40	8	16
	[4 000 ; 5 000[	90	50	100
	[5 000 ; 6 000]	100	10	20

2. Le montant moyen des versements est :

$$\frac{1\ 500 \times 20 + 2\ 500 \times 44 + 3\ 500 \times 16 + 4\ 500 \times 100 + 5\ 500 \times 20}{200} = \frac{756\ 000}{200} = 3\ 780 \text{ F CFA.}$$

3. Soit  $x$  le nombre de versements inférieurs ou égaux à 3 500 F CFA.

On a : 3 500 est compris entre 3 000 et 4 000 ;

l'effectif cumulé croissant de 3000 est 64 et celui de 4 000 est 80 ;

$$\frac{x - 64}{3\ 500 - 3\ 000} = \frac{80 - 64}{4\ 000 - 3\ 000} \text{ ou } x = 72.$$

Donc, 72 versements sont inférieurs ou égaux à 3 500 F CFA.

4. Soit  $Mé$  la médiane des versements.

On a :  $Mé$  est comprise entre 4 000 et 5 000 ;

la fréquence cumulée croissante de 4000 est 40 et celle de 5 000 est 90 ;

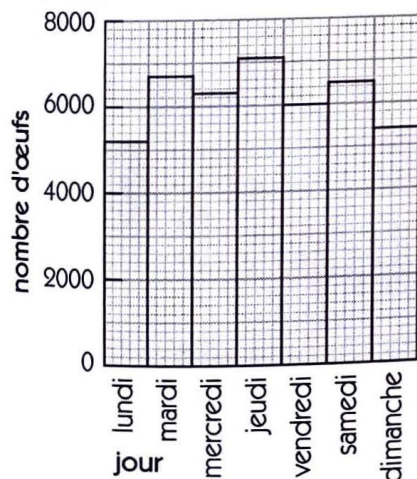
$$\frac{Mé - 4\ 000}{50 - 40} = \frac{5\ 000 - 4\ 000}{90 - 40} \text{ ou } Mé = 4\ 200.$$

Donc, la médiane des versements est : 4 200 F CFA.

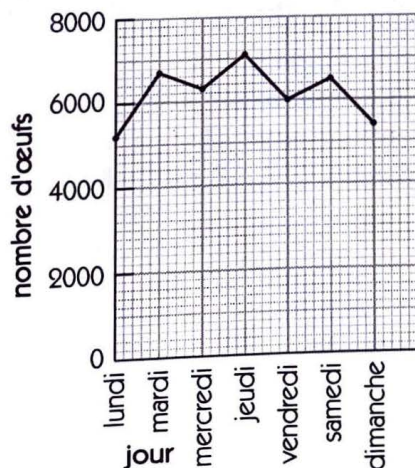
Cela signifie : un versement effectué sur deux a un montant inférieur (supérieur) ou égal à 4 200 F CFA.

◇ Exercice 3.a p. 96

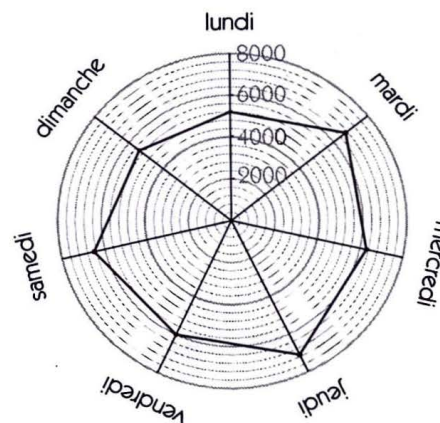
a) Ci-dessous le diagramme à bandes.



b) Ci-dessous le polygone des effectifs.



c) Ci-dessous le diagramme polaire.

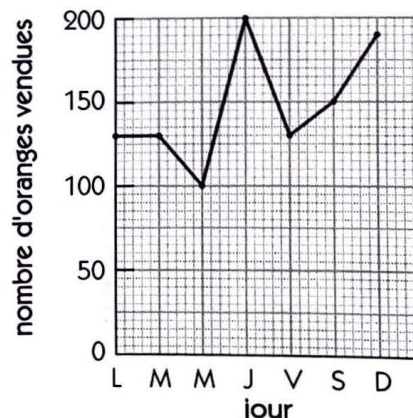


◇ Exercice 3.b p. 96

1. Ci-dessous le tableau des effectifs.

Jour	Nombre d'oranges vendues
lundi	130
mardi	130
mercredi	100
jeudi	200
vendredi	130
samedi	150
dimanche	190

2. Ci-contre le polygone des effectifs.



**Exercices d'apprentissage**

**CARACTÉRISTIQUES D'UNE SÉRIE STATISTIQUE**

◇ Exercice n° 1 p. 97

1.

<b>Poids (en g)</b>	290	294	295	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308
<b>Nbre pièces</b>	1	1	5	6	4	7	1	3	1	2	2	3	1	2	1
<b>Fréq. (en %)</b>	2,5	2,5	12,5	15	10	17,5	2,5	7,5	2,5	5	5	7,5	2,5	5	2,5

2. • Le mode est : 299.

• La médiane est : 299.

• La moyenne est :  $\frac{290 \times 1 + 294 \times 1 + 295 \times 5 + \dots + 307 \times 2 + 308 \times 1}{40} = \frac{11\,988}{40} = 299,7$ .

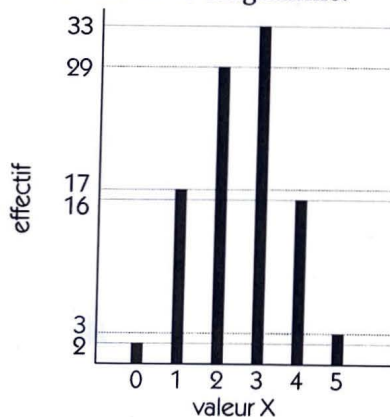
3. L'écart type est :  $\sigma = \sqrt{\frac{664,4}{40}} = 4,075$ .

◇ Exercice n° 2 p. 97

La moyenne des notes des 500 candidats de ce centre d'examen est :  $\frac{14 \times 200 + 12 \times 300}{500} = \frac{6\,400}{500} = 12,8$ .

◇ Exercice n° 3 p. 97

1. Ci-dessous le diagramme.



2.

<b>Valeur de X</b>	0	1	2	3	4	5
<b>Effectif</b>	2	17	29	33	16	3
<b>Effectif cum. croissant</b>	2	19	48	81	97	100
<b>Effectif cum. décroissant</b>	100	98	81	52	19	3

3. • Le mode est : 3.

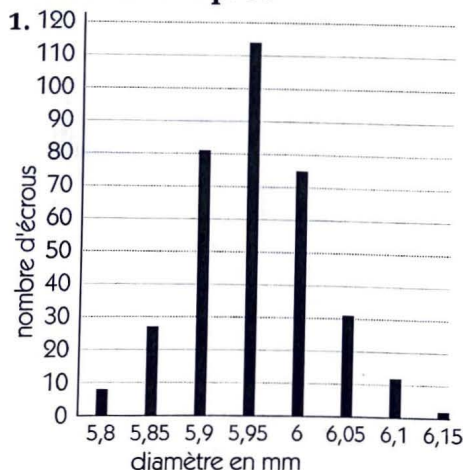
• La médiane est : 3.

• La moyenne est :

$$\frac{0 \times 2 + 1 \times 17 + 2 \times 29 + 3 \times 33 + 4 \times 16 + 5 \times 3}{100} = \frac{253}{100} = 2,53$$

4. L'écart type est :  $\sigma = \sqrt{\frac{120,91}{100}} = 1,0995$ .

◇ Exercice n° 4 p. 97



2. La médiane est : 5,95 ; c'est-à-dire : un écrou sur deux a un diamètre inférieur (supérieur) ou égal à 5,95 mm.

3. • La moyenne est :

$$\frac{5,8 \times 8 + 5,85 \times 27 + \dots + 6,1 \times 12 + 6,15 \times 2}{350} = \frac{2083,6}{350} \approx 5,95$$

• L'écart type est :  $\sigma = \sqrt{\frac{1,496\,542\,9}{350}} \approx 0,07$ .

◇ Exercice n° 5 p. 97

1. La moyenne générale de Koné est :  $m_K = \frac{9,25 \times 4 + 10,12 \times 3 + \dots + 16 \times 1}{24} = \frac{267,74}{24} \approx 11,15$  ;

la moyenne générale de Yéro est :  $m_Y = \frac{8,15 \times 4 + 12,14 \times 3 + \dots + 15 \times 1}{24} = \frac{267,74}{24} \approx 11,15$ .

2. L'écart type des notes de Koné est :  $\sigma_K = \sqrt{\frac{108,4912}{24}} \approx 2,126$  ;

l'écart type des notes de Yéro est :  $\sigma_Y = \sqrt{\frac{119,2978}{24}} \approx 2,2295$ .

3. Koné et Yéro ont la même moyenne générale, mais l'écart type des notes moyennes de Koné est inférieur à celui des notes moyennes de Yéro ; donc, Koné est le meilleur des deux.

◇ Exercice n° 6 p. 97

1. Soit  $m_X$  la moyenne du candidat X, on a :

$$m_A = \frac{11 \times 6 + 13 \times 4 + 10 \times 5 + 9 \times 3 + 11 \times 3 + 7 \times 2 + 9 \times 2}{25} = \frac{260}{25} = 10,40 ;$$

$$m_B = \frac{9 \times 6 + 11 \times 4 + 6 \times 5 + 13 \times 3 + 12 \times 3 + 5 \times 2 + 10 \times 2}{25} = \frac{233}{25} = 09,32 ;$$

$$m_C = \frac{13 \times 6 + 9 \times 4 + 11 \times 5 + 15 \times 3 + 7 \times 3 + 12 \times 2 + 7 \times 2}{25} = \frac{273}{25} = 10,92 ;$$

$$m_D = \frac{15 \times 6 + 13 \times 4 + 8 \times 5 + 6 \times 3 + 9 \times 3 + 12 \times 2 + 9 \times 2}{25} = \frac{275}{25} = 11,00 ;$$

$$m_E = \frac{7 \times 6 + 16 \times 4 + 7 \times 5 + 7 \times 3 + 15 \times 3 + 7 \times 2 + 3 \times 2}{25} = \frac{227}{25} = 09,08 ;$$

$$m_F = \frac{4 \times 6 + 5 \times 4 + 13 \times 5 + 17 \times 3 + 13 \times 3 + 9 \times 2 + 18 \times 2}{25} = \frac{253}{25} = 10,12.$$

Classement par ordre de mérite décroissant

<b>Moyenne</b>	11,00	10,92	10,40	10,12	09,32	09,08
<b>Rang</b>	1 <sup>er</sup>	2 <sup>e</sup>	3 <sup>e</sup>	4 <sup>e</sup>	5 <sup>e</sup>	6 <sup>e</sup>
<b>Candidat</b>	D	C	A	F	B	E

2. Soit  $x$  et  $y$  les coefficients respectifs de seconde langue et de mathématique.

$$\text{On a : } \begin{cases} 0 < x, y \leq 5 \\ x + y = 5 \\ \frac{7 \times 6 + 16 \times 4 + 7 \times 5 + 7 \times 3 + 15 \times x + 7 \times 2 + 3 \times y}{25} \geq 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 - x \\ 15x + 12y \geq 74 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 5 - x \\ x \geq \frac{59}{12} > 4,916 \end{cases}$$

On ne peut pas modifier les deux coefficients.

3. Soit  $n$  la note du candidat X en mathématique.

$$\text{On a : } \frac{11 \times 6 + 4 \times 4 + 9 \times 5 + 11 \times 3 + 7 \times 3 + 9 \times 2 + n \times 2}{25} = 08,60 \quad \text{ou} \quad n = 8.$$

Donc, le candidat X avait la note 8 en mathématique.

◇ Exercice n° 7 p. 98

1. Les modes sont : 43 et 45.

2.

<b>Pointure</b>	40	41	42	43	44	45	46	47
<b>Effectif cum. croissant</b>	30	40	50	250	270	470	490	500
<b>Effectif cum. décroissant</b>	500	470	460	450	250	230	30	10

3. La médiane est comprise entre 43 et 44 ; c'est-à-dire : 43,5.

4. La moyenne est :

$$m = \frac{40 \times 30 + \dots + 47 \times 10}{500} = \frac{21\,900}{500} = 43,8.$$

◇ **Exercice n° 8 p. 98**

1. Soit  $m_X$  la moyenne de la série X, on a :

$$m_A = \frac{(4 + 6 + 18 + 20) \times 1 + (8 + 16) \times 2 + (10 + 14) \times 6 + 12 \times 10}{4 + 4 + 12 + 10} = \frac{360}{30} = 12 ;$$

$$m_B = \frac{(4 + 20) \times 8 + (6 + 18) \times 4 + (8 + 16) \times 2 + (10 + 14) \times 1}{16 + 8 + 4 + 2} = \frac{360}{30} = 12 ;$$

$$m_C = \frac{(4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20) \times 4}{4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4} = \frac{432}{36} = 12 ;$$

$$m_D = \frac{(4 + 20) \times 2 + (6 + 18) \times 3 + (8 + 16) \times 4 + (10 + 14) \times 5 + 12 \times 6}{4 + 6 + 8 + 10 + 6} = \frac{408}{34} = 12.$$

2. • L'écart type sera petit lorsque les notes proches de la moyenne auront une fréquence cumulée dépassant les 50 %.

Pour la série A, les notes 10, 12 et 14 ont un effectif cumulé de 24 sur un effectif total de 30 ;

c'est-à-dire :  $\frac{24}{30} \times 100 \% = 80 \%$ . La série A a l'écart type le plus petit.

• L'écart type sera grand lorsque les notes éloignées de la moyenne auront une fréquence cumulée dépassant les 50 %.

Pour la série B, les notes 4, 6, 18 et 20 ont un effectif cumulé de 24 sur un effectif total de 30 ;

c'est-à-dire :  $\frac{24}{30} \times 100 \% = 80 \%$ . La série B a l'écart type le plus grand.

3. Soit  $V_X$  et  $\sigma_X$  respectivement la variance et l'écart type de la série X, on a :

$$\bullet V_A = \frac{(8^2 + 6^2 + 6^2 + 8^2) \times 1 + (4^2 + 4^2) \times 2 + (2^2 + 2^2) \times 6 + 0^2 \times 10}{4 + 4 + 12 + 10} = \frac{312}{30} = 10,4 ; \text{ donc : } \sigma_A \approx 3,22 ;$$

$$\bullet V_B = \frac{(8^2 + 8^2) \times 8 + (6^2 + 6^2) \times 4 + (4^2 + 4^2) \times 2 + (2^2 + 2^2) \times 1}{16 + 8 + 4 + 2} = \frac{1\ 384}{30} = 46,13 ; \text{ donc : } \sigma_B \approx 6,79 ;$$

$$\bullet V_C = \frac{(8^2 + 6^2 + 4^2 + 2^2 + 0^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2) \times 4}{4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4} = \frac{960}{36} = 26,67 ; \text{ donc : } \sigma_C \approx 5,16 ;$$

$$\bullet V_D = \frac{(8^2 + 8^2) \times 2 + (6^2 + 6^2) \times 3 + (4^2 + 4^2) \times 4 + (2^2 + 2^2) \times 5 + 0^2 \times 6}{4 + 6 + 8 + 10 + 6} = \frac{640}{34} = 18,82 ; \text{ donc : } \sigma_D \approx 4,34.$$

◇ **Exercice n° 9 p. 98**

Caractéristique	1 <sup>re</sup> L <sub>1</sub>	1 <sup>re</sup> L <sub>2</sub>	1 <sup>re</sup> L <sub>3</sub>
Mode(s)	11	16	7
Effectif total	50	50	50
Moyenne	$\frac{593}{50} = 11,86$	$\frac{593}{50} = 11,86$	$\frac{593}{50} = 11,86$
Écart type	$\sqrt{\frac{232,02}{50}} \approx 2,154$	$\sqrt{\frac{424,02}{50}} \approx 2,912$	$\sqrt{\frac{714,02}{50}} \approx 3,778$

La classe la plus homogène est celle dont l'écart type des notes est le plus petit ; donc, la plus homogène des trois est la 1<sup>re</sup> L<sub>1</sub>.

2. La moyenne générale de l'ensemble des trois classes est :  $\frac{593 + 593 + 593}{50 + 50 + 50} = 11,86$ .

◇ **Exercice n° 10 p. 98**

1. Soit  $m_X$  la moyenne du tireur X, on a :

$$m_A = \frac{50 \times 4 + 30 \times 6 + 20 \times 5 + 10 \times 4 + 0 \times 1}{20} = \frac{520}{20} = 26 ;$$

$$m_B = \frac{50 \times 6 + 30 \times 3 + 20 \times 5 + 10 \times 3 + 0 \times 3}{20} = \frac{520}{20} = 26.$$

Les moyennes ne peuvent départager les deux concurrents.

2. Soit  $\sigma_X$  l'écart type du tireur X, on a :

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{4\,280}{20}} \approx 14,6287 \text{ et } \sigma_B = \sqrt{\frac{6\,480}{20}} = 18.$$

Donc, A est le plus régulier des deux.

◇ Exercice n° 11 p. 98

Masse	Effectif	Effectif cumulé croissant	Effectif cumulé décroissant
140	24	24	120
140,5	20	44	96
141	16	60	76
141,5	14	74	60
142	13	87	46
142,5	10	97	33
143	9	106	23
143,5	7	113	14
144	3	116	7
144,5	2	118	4
145	2	120	2

2. La moyenne est :

$$m = \frac{140 \times 24 + 140,5 \times 20 + \dots + 145 \times 2}{120} = \frac{16\,980,5}{120} \approx 141,504.$$

3. La quantité moyenne de pain, en grammes, achetée chaque jour par ce client est : 141,5 g.

4. La médiane est comprise entre 141 et 141,50 ; la médiane est : 141,25.

◇ Exercice n° 12 p. 98

1.

Modalité	1	2	3	4	5	6	8	9	10	Total
Fréquence (en %)	10	15	5	20	10	20	5	10	5	100
Effectif	50	75	25	100	50	100	25	50	25	500

2. La médiane est comprise entre 4 et 5 ; la médiane est : 4,5.

3. • La moyenne est :  $m = \frac{1 \times 10 + 2 \times 15 + \dots + 9 \times 10 + 10 \times 5}{100} = \frac{485}{100} = 4,85.$

• L'écart type est :  $\sigma = \sqrt{\frac{682,75}{100}} \approx 2,613.$

◇ Exercice n° 13 p. 98

1.

Kakou				
Note	5	8	16	19
Effectif	1	4	4	1

2. • La moyenne est :

$$m = \frac{(5 \times 1 + 8 \times 4 + 16 \times 4 + 19 \times 1)}{10} = \frac{120}{10} = 12.$$

• L'écart type est :  $\sigma = \sqrt{\frac{226}{10}} \approx 4,7539.$

Annah					
Note	9	10	13	14	15
Fréquence (en %)	10	30	40	10	10
Effectif	1	3	4	1	1

• La moyenne est :

$$m = \frac{9 \times 1 + 10 \times 3 + 13 \times 4 + 14 \times 1 + 15 \times 1}{10} = \frac{120}{10} = 12.$$

• L'écart type est :  $\sigma = \sqrt{\frac{38}{10}} \approx 1,949.$

3. Les notes d'Annah sont moins dispersées que celles de Kakou, d'où le choix d'Annah.

◇ Exercice n° 14 p. 99

1. Nombre de livres	0	1	2	3	4
Effectif	18	72	45	36	9
Fréquence	10	40	25	20	5
Fréquence cum. croissante	10	50	75	95	100
Fréquence cum. décroissante	100	90	50	25	5

2. • Le nombre d'élèves qui ont lu aux moins 2 livres est :  $\frac{180 \times 50}{100} = 90$  ;

• Le nombre d'élèves qui ont lu moins de 2 livres est :  $\frac{180 \times 50}{100} = 90$ .

3. Le mode est : 1.

4. Le nombre de livres lus en moyenne par élève est :

$$m = \frac{0 \times 18 + 1 \times 72 + 2 \times 45 + 3 \times 36 + 4 \times 9}{180} = \frac{306}{180} = 1,7 ; \text{ c'est-à-dire 2 livres par excès.}$$

SÉRIES À MODALITÉS REGROUPÉES EN CLASSES

◇ Exercice n° 15 p. 99

Heure	Nombre de pièces fabriq.	Effectif cum. croissant
[0 ; 6[	300	300
[6 ; 12[	1 000	1 300
[12 ; 18[	400	1 700
[18 ; 24[	1 300	3 000

50 % de la production journalière correspondent à 1 500 pièces fabriquées. Tout revient à déterminer la médiane  $Mé$  de cette série.

On a :  $Mé$  est comprise entre 12 et 18 ;

$$\frac{Mé - 12}{1\ 500 - 1\ 300} = \frac{18 - 12}{1\ 700 - 1\ 300}$$

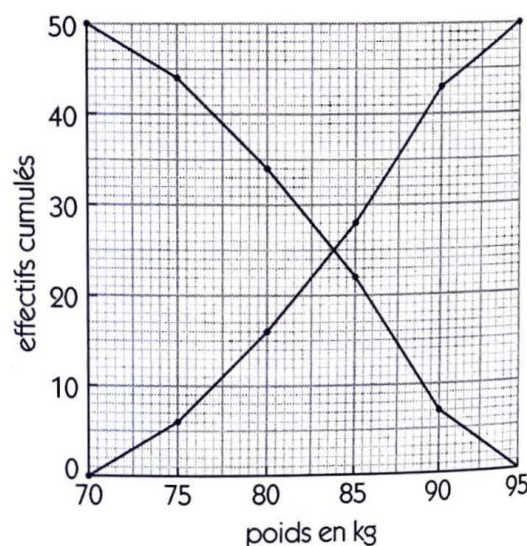
ou :  $Mé = 15$ .

Donc, la machine aura atteint 50 % de sa production journalière à 15 heures.

◇ Exercice n° 16 p. 99

1. Ci-contre les diagrammes des effectifs cumulés.

Poids (en kg)	Effectif	Effectif cum. croissant	Effectif cum. décroissant
[70 ; 75[	6	6	50
[75 ; 80[	10	16	44
[80 ; 85[	12	28	34
[85 ; 90[	15	43	22
[90 ; 95[	7	50	7



2. a) Le nombre d'athlètes ayant un poids inférieur à 85 kg est : 28.

b) Le nombre d'athlètes ayant un poids supérieur à 80 kg est : 34.

c) Le nombre d'athlètes ayant un poids compris entre 75 kg et 90 kg est :  $10 + 12 + 15 = 37$ .

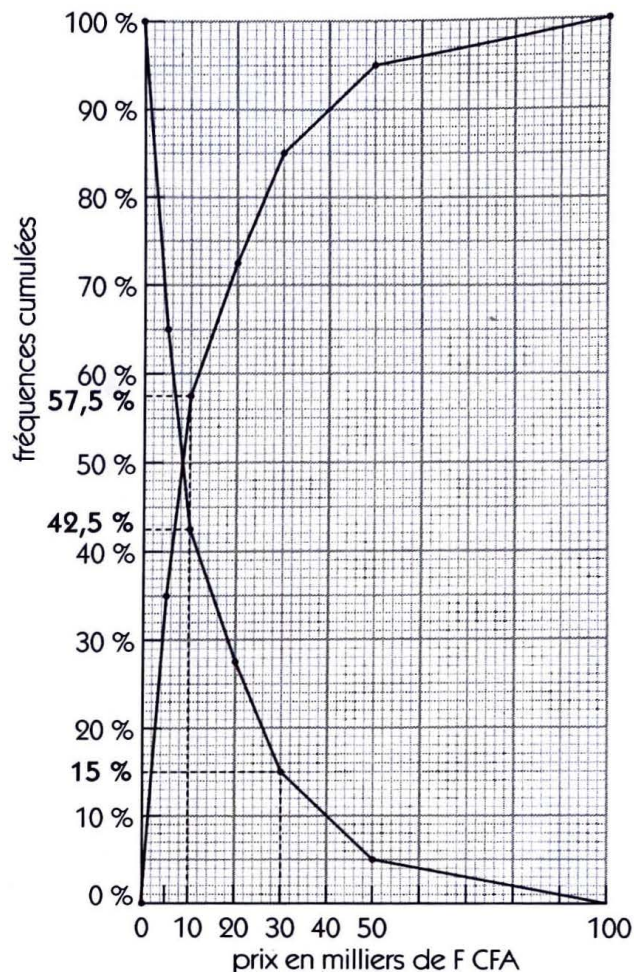
3. • Le poids moyen est :  $m = \frac{72,5 \times 6 + 77,5 \times 10 + 82,5 \times 12 + 87,5 \times 15 + 92,5 \times 7}{50} = \frac{4\ 160}{50} = 83,2$ .

• L'écart type est :  $\sigma = \sqrt{\frac{1\ 900,5}{50}} \approx 6,165$ .

◇ Exercice n° 17 p. 99

1. Ci-contre les diagrammes des fréquences cumulées.

Prix (en milliers de F CFA)	Nombre de paires	Fréquence cumulée croissante (en %)	Fréquence cumulée décroissante (en %)
[1 ; 5[	70	35	100
[5 ; 10[	45	57,5	65
[10 ; 20[	30	72,5	42,5
[20 ; 30[	25	85	27,5
[30 ; 50[	20	95	15
[50 ; 100[	10	100	5



2. a) Le pourcentage de paires de chaussures ayant un prix inférieur à 10 000 F CFA est : 57,5 %.

b) Le pourcentage de paires de chaussures ayant un prix supérieur à 30 000 F CFA est : 15 %.

c) Le pourcentage de paires de chaussures ayant un prix compris entre 10 000 F CFA et 30 000 F CFA est :  $85 - 57,5 = 27,5$  % (=  $42,5 - 15$ ).

• La moyenne est :  $m = \frac{3 \times 70 + 7,5 \times 45 + 15 \times 30 + 25 \times 25 + 40 \times 20 + 75 \times 10}{200} = \frac{3\ 172,5}{200} = 15,8625$  ;

c'est-à-dire : le prix moyen est de 15 862,5 F CFA.

• L'écart type est :  $\sigma = \sqrt{\frac{63\ 462,468\ 75}{200}} \approx 17,813\ 22$  ; c'est-à-dire : 17 813,22 F CFA.

◇ Exercice n° 18 p. 99

1. Choisissons de représenter 200 habitants par une aire de 1 cm<sup>2</sup> et 10 années par 1 cm.

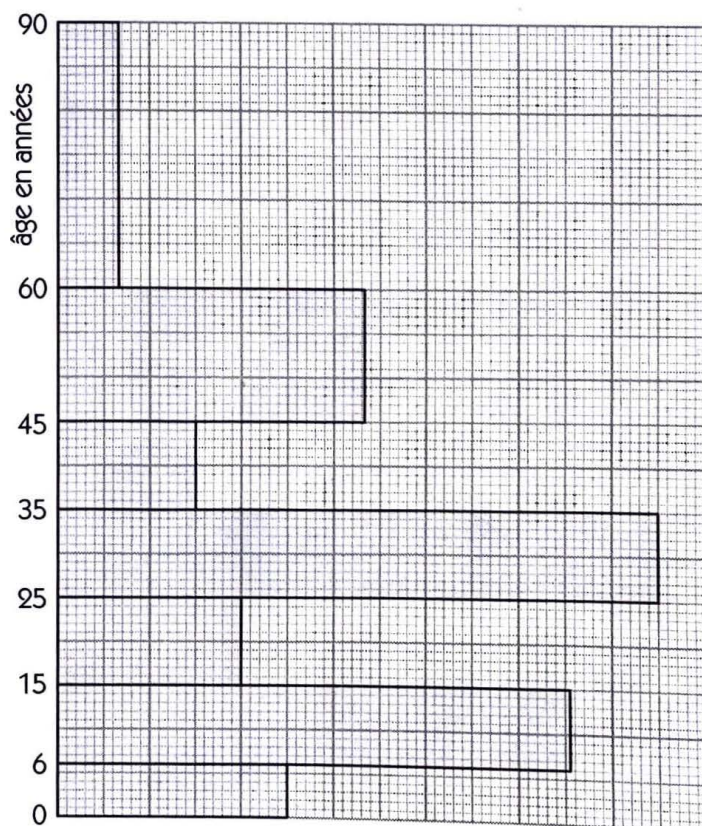
Pour chaque classe on détermine alors l'aire, la base et la hauteur du rectangle correspondant.

Âge	Effectif	Aire (en cm <sup>2</sup> )	Base (en cm)	Hauteur (en cm)
[0 ; 6[	300	1,5	0,6	2,5
[6 ; 15[	1 000	5	0,9	5,55
[15 ; 25[	400	2	1	2
[25 ; 35[	1 300	6,5	1	6,5
[35 ; 45[	300	1,5	1	1,5
[45 ; 60[	1 000	5	1,5	3,33
[60 ; 90[	400	2	3	0,66

Ci-contre l'histogramme.

2. a) Le nombre d'individus de cet échantillon dont l'âge est compris entre 5 ans et 20 ans est :

$$300 \times \frac{6-5}{6-0} + 1\ 000 + 400 \times \frac{20-15}{25-15} = 1\ 250.$$



b) Le nombre d'individus de cet échantillon dont l'âge est supérieur à 50 ans, c'est-à-dire compris entre

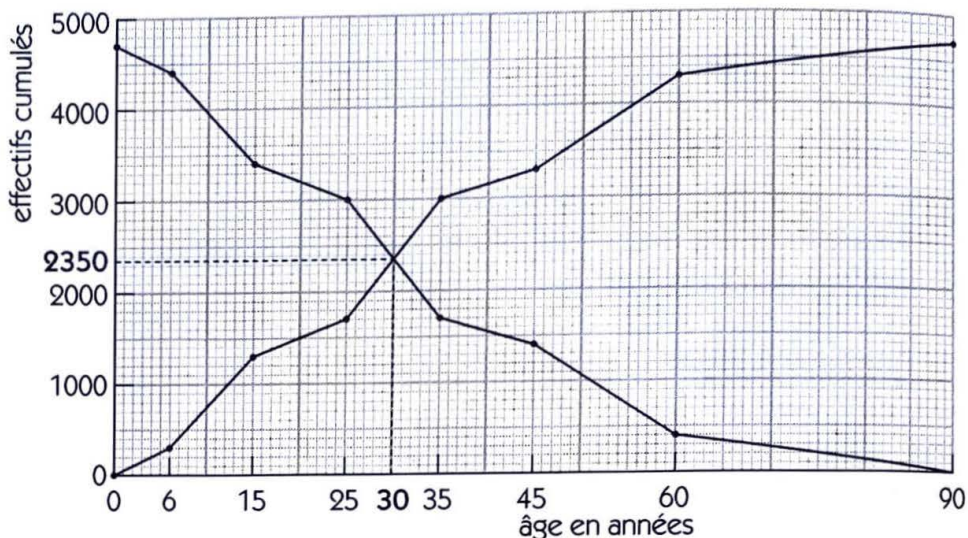
50 ans et 90 ans, est :  $1\ 000 \times \frac{60 - 50}{60 - 45} + 400 \approx 1\ 067$ .

c) Le nombre d'individus de cet échantillon dont l'âge est inférieur à 30 ans, c'est-à-dire compris entre

0 ans et 30 ans, est :  $300 + 1\ 000 + 400 + 1\ 300 \times \frac{30 - 25}{35 - 25} = 2\ 350$ .

3. Ci-contre les diagramme des effectifs cumulés.

Âge	Effectif cumulé croiss.	Effectif cumulé décroiss.
[0 ; 6[	300	4 700
[6 ; 15[	1 000	4 400
[15 ; 25[	1 700	3 400
[25 ; 35[	3 000	3 000
[35 ; 45[	3 300	1 700
[45 ; 60[	4 300	1 400
[60 ; 90[	4 700	400



4. Les deux courbes se coupent au point de coordonnées (30 ; 2 350) ; 2 350 est la moitié de l'effectif total de l'échantillon ; donc 30 est la médiane de la série, c'est-à-dire : un habitant sur deux de cet échantillon a moins (ou plus) de 30 ans.

◇ Exercice n° 19 p. 99

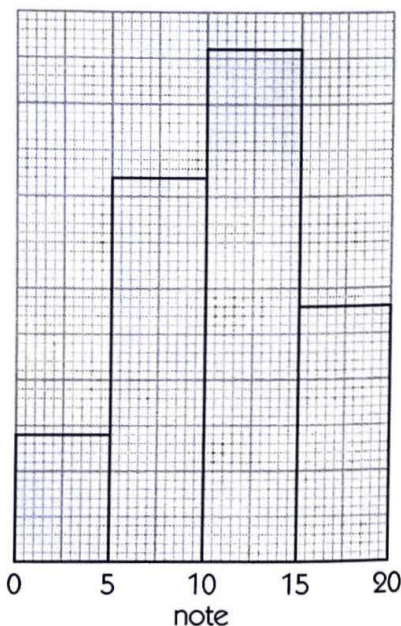
1.

Classe	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[
Centre de classe	2,5	7,5	12,5	17,5
Fréquence	10	30	40	20
Effectif	7	21	28	14

2. Choisissons de représenter 5 notes par une aire de 1 cm<sup>2</sup> et 5 unités de note par 1 cm.

Chaque rectangle de l'histogramme a pour « base » 1 cm et on détermine alors les hauteurs correspondant aux différentes classes.

Note	Effectif	Aire (en cm <sup>2</sup> )	Hauteur (en cm)
[0 ; 5[	7	1,4	1,4
[5 ; 10[	21	4,2	4,2
[10 ; 15[	28	5,6	5,6
[15 ; 20[	14	2,8	2,8



Ci-contre l'histogramme.

3. La note moyenne est :

$$m = \frac{2,5 \times 7 + 7,5 \times 21 + 12,5 \times 28 + 17,5 \times 14}{70} = \frac{770}{70} = 11.$$

4. L'écart type est :  $\sigma = \sqrt{\frac{1\ 417,5}{70}} = 4,5$ .

◇ Exercice n° 20 p. 100

1. a) Ci-contre le diagramme des fréquences cumulées croissantes.

b) L'intervalle médian est : [12 ; 13[.

2. • La classe modale est : [18 ; 20[.

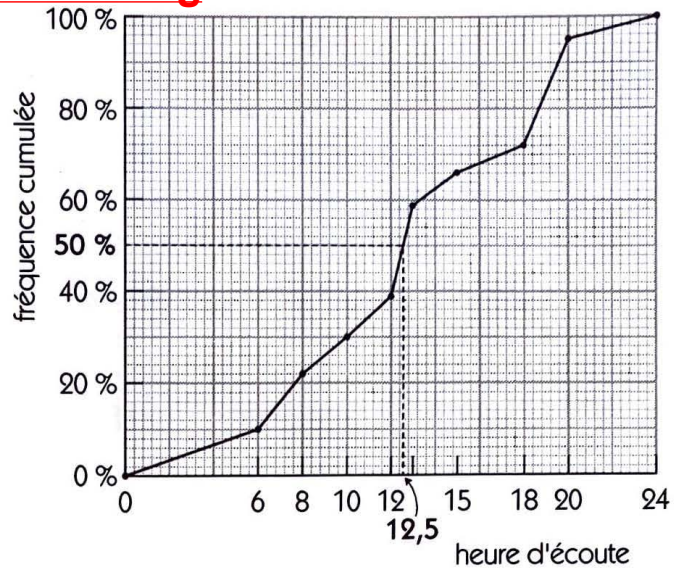
• La moyenne est :

$$m = \frac{5 \times 1\,000 + \dots + 22 \times 500}{10\,000}$$

$$= \frac{129\,900}{10\,000} = 12,99.$$

3. • La variance est :  $V = \frac{255\,449}{10\,000} = 25,544\,9.$

• L'écart type est :  $\sigma = \sqrt{\frac{255\,449}{10\,000}} \approx 5,054.$



◇ Exercice n° 21 p. 100

1. Classe	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[	Total
Aire (en cm <sup>2</sup> )	8	8	10	14	6	46
Effectif	80	80	100	140	60	460

(× 10)

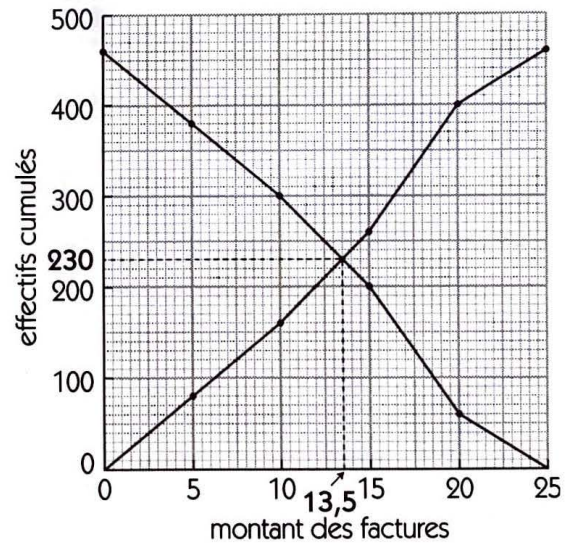
2. La classe modale est : [15 ; 20[.

3. Le pourcentage des clients ayant une facture supérieure à 15 millions de F CFA est :

$$\frac{140 + 60}{460} \times 100 \approx 43,35 \%$$

4. a) Ci-contre les diagrammes des effectifs cumulés

Montant des factures	Effectif cumulé croissant	Effectif cumulé décroissant
[0 ; 5[	80	460
[5 ; 10[	160	380
[10 ; 15[	260	300
[15 ; 20[	400	200
[20 ; 25[	460	60



b) La médiane est : 13,5 ; c'est-à-dire 13 500 000 F CFA.

5. La moyenne est :  $m = \frac{2,5 \times 80 + 7,5 \times 80 + 12,5 \times 100 + 17,5 \times 140 + 22,5 \times 60}{460} = \frac{5\,850}{460} = 12,717\,391\,3.$

Donc, le montant moyen d'une facture est : 12 717 391,3 F CFA.

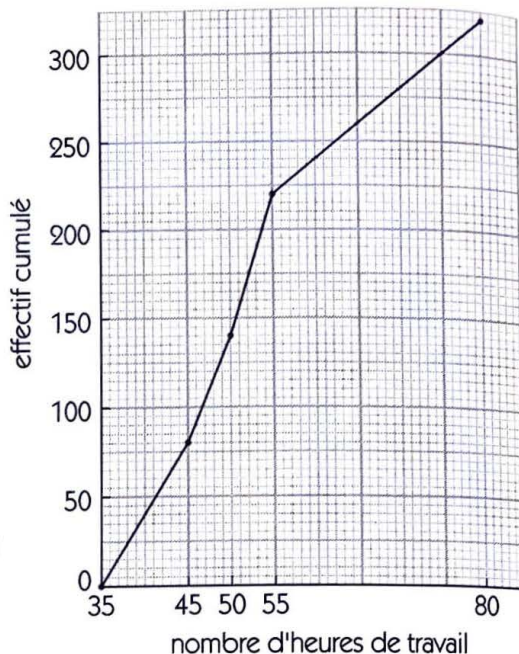
◇ Exercice n° 22 p. 100

1. Nbre d'heures	[35 ; 45[	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 80[	Total
Aire (en cm <sup>2</sup> )	2	1,5	2	2,5	8
Effectif	80	60	80	100	320

(× 40)

2. Ci-contre le diagramme des effectifs cumulés croissants.

Nombre d'heures	Effectif cumulé croissant
[35 ; 45[	80
[45 ; 50[	140
[50 ; 55[	220
[55 ; 80[	320



3. La moyenne est :

$$m = \frac{40 \times 80 + 47,5 \times 60 + 52,5 \times 80 + 67,5 \times 100}{320}$$

$$= \frac{17\,000}{320} = 53,125.$$

Donc, le nombre moyen d'heures de travail hebdomadaire est : 53 heures 7 minutes 30 secondes.

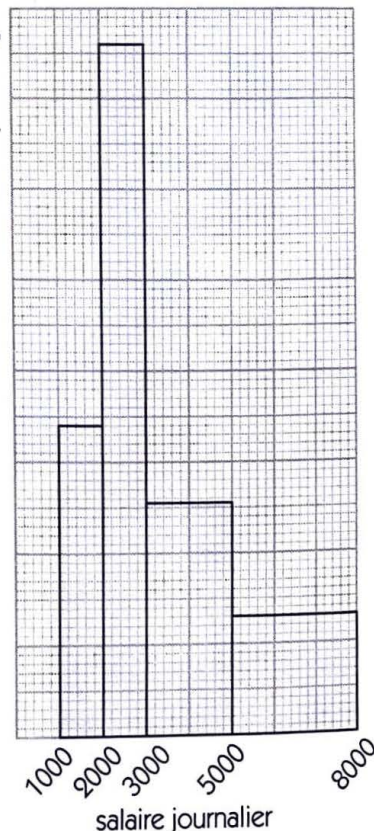
◇ Exercice n° 23 p. 100

1. Salaire	[1 000 ; 2 000[	[2 000 ; 3 000[	[3 000 ; 5 000[	[5 000 ; 8 000[
Effectif	34	76	51	39
Fréquence (en %)	17	38	25,5	19,5

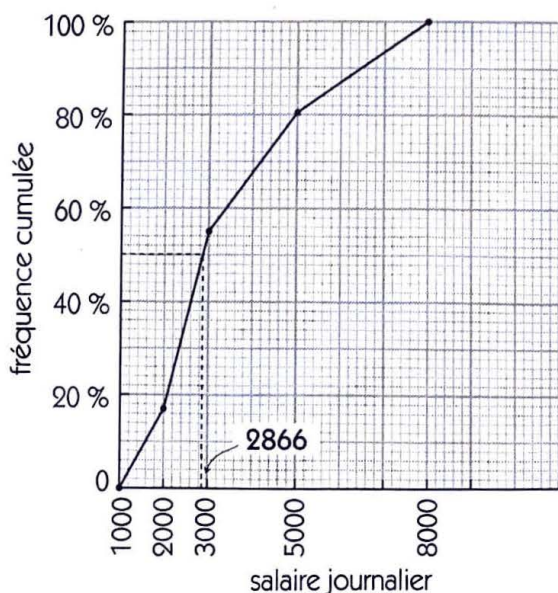
2. Choisissons de représenter 20 ouvriers par une aire de 1 cm<sup>2</sup> et 2 000 F CFA par 1 cm.

Pour chaque classe on détermine alors l'aire, la base et la hauteur du rectangle correspondant ( $\text{Hauteur} = \frac{\text{Aire}}{\text{Base}}$ ).

Salaire	Effectif	Aire (en cm <sup>2</sup> )	Base (en cm)	Hauteur (en cm)
[1 000 ; 2 000[	34	1,7	0,5	3,4
[2 000 ; 3 000[	76	3,8	0,5	7,6
[3 000 ; 5 000[	51	2,55	1	2,55
[5 000 ; 8 000[	39	1,95	1,5	1,3



Ci-contre l'histogramme.



3. Polygone des fréquences cumulées croissantes.

Salaire journalier	Fréq cum. croissante
[1 000 ; 2 000[	17
[2 000 ; 3 000[	55
[3 000 ; 5 000[	80,5
[5 000 ; 8 000[	100

4. La classe modale est : [2 000 ; 3 000[.

5. a) La moyenne est :

$$m = \frac{1\,500 \times 34 + 2\,500 \times 55 + 4\,000 \times 51 + 6\,500 \times 39}{200}$$

$$= \frac{698\,500}{200} = 3\,492,5.$$

Donc, le salaire journalier moyen est : 3 495 F CFA par excès.

b) Le nombre d'employés qui gagnent moins que ce salaire moyen est :

$$34 + 76 + 51 \times \frac{3\,495 - 3\,000}{5\,000 - 3\,000} \approx 123.$$

Donc, le pourcentage d'employés qui gagnent moins que ce salaire moyen est :  $\frac{123}{200} \times 100 = 61,5 \%$ .

6. La lecture graphique donne environ : 2 866.

Donc, le salaire journalier médian est : 2 866 F CFA.

### ◇ Exercice n° 24 p. 100

1. • La moyenne est :

$$m = \frac{19,375 \times 5 + 19,625 \times 9 + 19,875 \times 25 + 20,125 \times 32 + 20,375 \times 22 + 20,625 \times 7}{100}$$

$$= \frac{2\,007}{100} = 20,07.$$

• L'écart type est :  $\sigma = \sqrt{\frac{11,796\,875}{100}} \approx 0,307\,4.$

2. Le nombre de rondelles acceptables dans l'échantillon prélevé est :

$$25 \times \frac{20 - 19,90}{20 - 19,75} + 32 \times \frac{20,10 - 20}{20,25 - 20} \approx 23.$$

Donc, le pourcentage de rondelles acceptables dans l'échantillon prélevé est : 23 %.

3. On a : 23 % de rondelles acceptables dans l'échantillon prélevé et l'écart type est 0,307 4.

Donc, la machine n'est pas bien réglée.

### ◇ Exercice n° 25 p. 100

1. et 3.

Âge	effectif hommes	effectif femmes	effectif villageois
[0 ; 5[	30	30	60
[5 ; 10[	25	30	55
[10 ; 15[	25	25	50
[15 ; 20[	30	25	55
[20 ; 25[	30	30	60
[25 ; 30[	25	25	50
[30 ; 35[	25	20	45
[35 ; 40[	20	25	45
[40 ; 45[	20	20	40
[45 ; 50[	20	25	45
[50 ; 55[	15	20	35
[55 ; 60[	10	15	25
<b>Total</b>	<b>275</b>	<b>290</b>	<b>565</b>

2. • La moyenne d'âge des hommes est :

$$m_H = \frac{2,5 \times 30 + 7,5 \times 25 + \dots + 57,5 \times 10}{275}$$

$$= \frac{7\,187,5}{275} \approx 26,136 \text{ ans}$$

ou environ 26 ans 1 mois et 19 jours.

• La moyenne d'âge des femmes est :

$$m_F = \frac{2,5 \times 30 + 7,5 \times 25 + \dots + 57,5 \times 10}{275}$$

$$= \frac{7\,950}{290} \approx 27,414 \text{ ans}$$

ou environ 27 ans et 5 mois.

3. La moyenne d'âge de la population du village est :

$$m_V = \frac{7\,187,5 + 7\,950}{275 + 290} = 15\,137,5\,565 \approx 26,792 \text{ ans}$$

ou environ 26 ans 9 mois et 15 jours.

◇ Exercice n° 26 p. 101

1. et 3.

Poids (en g)	Effectif	Effectif cumulé croissant	Effectif cumulé décroissant
[8 988 ; 8 992[	2	2	21
[8 992 ; 8 996[	4	6	19
[8 996 ; 9 000[	2	8	15
[9 000 ; 9 004[	4	12	13
[9 004 ; 9 008[	6	18	9
[9 008 ; 9 012[	3	21	3

2. • La classe modale est : [9 004 ; 9 008[.

5. La médiane *Mé* de cette série est :

*Mé* est comprise entre 9 000 et 9 004 ;

$$\frac{Mé - 9\,000}{10,5 - 8} = \frac{9\,004 - 9\,000}{12 - 8}$$

ou : *Mé* = 9 002,5.

6. La note moyenne est :

$$m = \frac{8\,990 \times 2 + 8\,994 \times 4 + \dots + 9\,010 \times 3}{21}$$

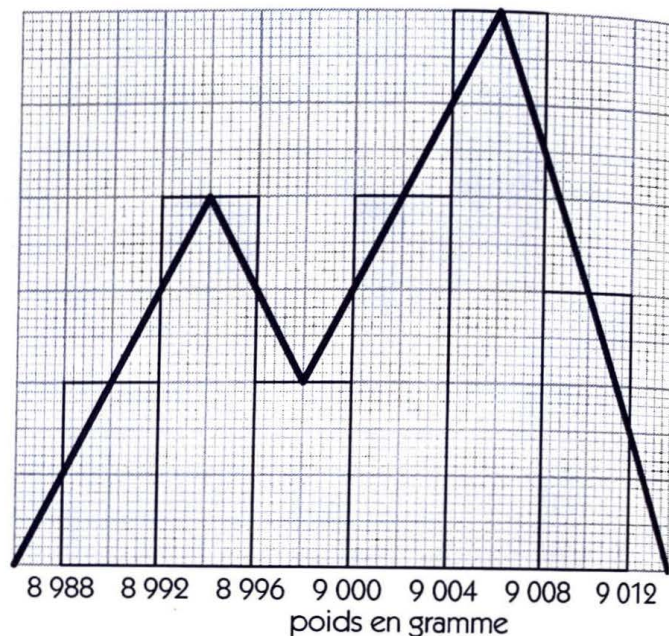
$$= \frac{189\,026}{21} \approx 90\,001,24.$$

$$\text{L'écart type est : } \sigma = \sqrt{\frac{851,81}{21}} \approx 6,369.$$

4. Choisissons de représenter 1 boîte par une aire de 1 cm<sup>2</sup> et 4 g par 1 cm.

Chaque rectangle de l'histogramme a pour « base » 1 cm, et les hauteurs (en cm) correspondant aux différentes classes sont leurs effectifs respectifs.

Ci-dessous l'histogramme et le polygone des effectifs.



◇ Exercice n° 27 p. 101

1.

Dépôt	[10 ; 120[	[120 ; 160[	[160 ; 200[	[200 ; 280[	[280 ; 360[	[360 ; 400[
Effectif	160	330	440	550	380	140
Fréquence (en %)	8	16,5	22	27,5	19	7
Fréquence cumulée croissante	8	24,5	46,5	74	93	100
Fréquence cumulée décroissante	100	92	75,5	53,5	26	7

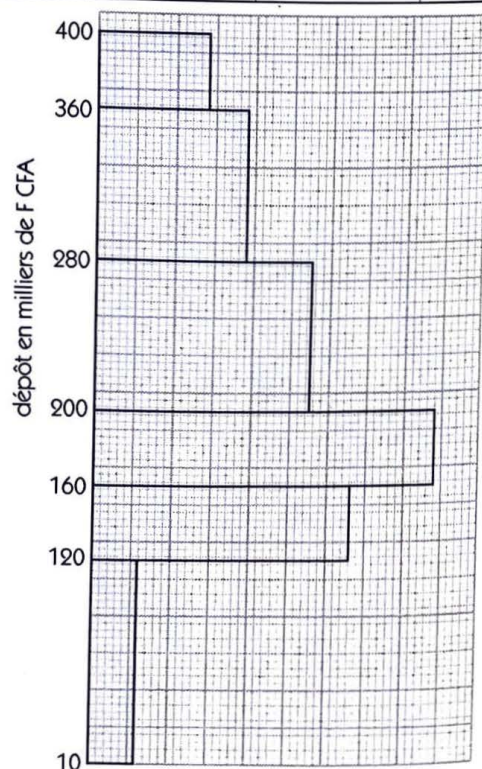
2. Choisissons de représenter 100 livrets par une aire de 1 cm<sup>2</sup> et 40 milliers de F CFA par 1 cm.

Pour chaque classe on détermine alors l'aire, la base et la hauteur du rectangle correspondant

(Hauteur =  $\frac{\text{Aire}}{\text{Base}}$ ).

Dépôt	Effectif	Aire (en cm <sup>2</sup> )	Base (en cm)	Hauteur (en cm)
[10 ; 120[	160	1,6	2,75	0,58
[120 ; 160[	330	3,3	1	3,3
[160 ; 200[	440	4,4	1	4,4
[200 ; 280[	550	5,5	2	2,75
[280 ; 360[	380	3,8	2	1,9
[360 ; 400[	140	1,4	1	1,4

Ci-contre l'histogramme.



3. Le pourcentage de livrets ayant moins de 100 000 F CFA est : 24,3 %.

4. Le pourcentage de livrets ayant au moins 280 000 F CFA est : 26 %.

5. Le dépôt moyen est :

$$m = \frac{60 \times 160 + 140 \times 330 + \dots + 380 \times 140}{2\ 000} = \frac{442\ 600}{2\ 000} = 221,3 ;$$

ou : 221 300 F CFA.

$$\text{L'écart type est : } \sigma = \sqrt{\frac{14\ 260\ 620}{2\ 000}} \approx 84,441 ;$$

ou : 84 441 F CFA.

◇ Exercice n° 28 p. 101

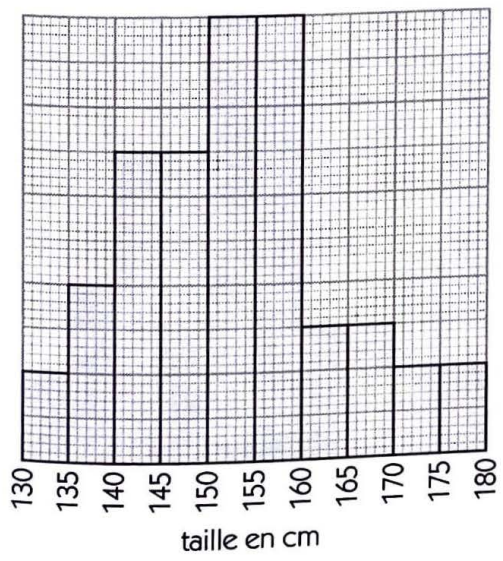
1. a) Série S

Taille	Effectif	Effectif cumulé croiss.	Effectif cumulé décroiss.
[130 ; 135[	2	2	50
[135 ; 140[	4	6	48
[140 ; 145[	7	13	44
[145 ; 150[	7	20	37
[150 ; 155[	10	30	30
[155 ; 160[	10	40	20
[160 ; 165[	3	43	10
[165 ; 170[	3	46	7
[170 ; 175[	2	48	4
[175 ; 180[	2	50	2

2. • Choisissons de représenter 4 élèves par une aire de 1 cm<sup>2</sup> et 5 cm de taille par 0,5 cm.

Chaque rectangle de l'histogramme a pour « base » 0,5 cm et les hauteurs (en cm) correspondant aux différentes classes sont les 1/2 de leurs effectifs respectifs.

Ci-dessous l'histogramme.



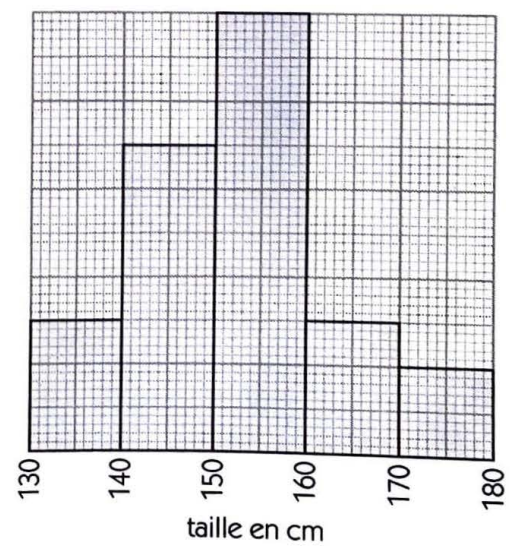
b) Série T

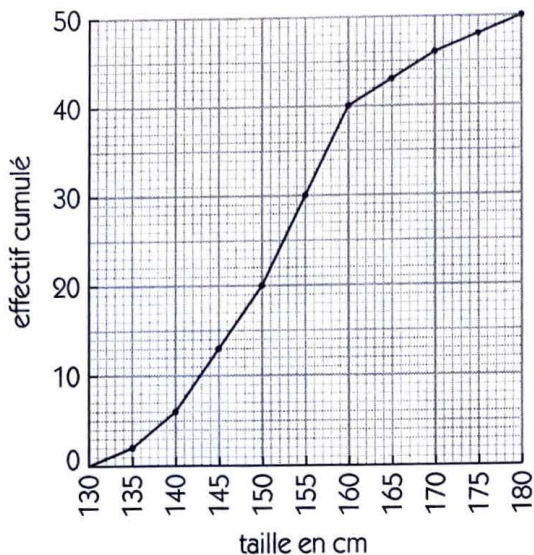
Taille	Effectif	Effectif cumulé croiss.	Effectif cumulé décroiss.
[130 ; 140[	6	6	50
[140 ; 150[	14	20	44
[150 ; 160[	20	40	30
[160 ; 170[	6	46	10
[170 ; 180[	4	50	4

• Choisissons de représenter 4 élèves par une aire de 1 cm<sup>2</sup> et 10 cm de taille par 1 cm.

Chaque rectangle de l'histogramme a pour « base » 1 cm et les hauteurs (en cm) correspondant aux différentes classes sont les 1/4 de leurs effectifs respectifs.

Ci-dessous l'histogramme.





3. • La médiane  $Mé_S$  de la série S est :

$Mé_S$  est comprise entre 150 et 155 ;

$$\frac{Mé_S - 150}{25 - 20} = \frac{155 - 150}{30 - 20}$$

ou :  $Mé_S = 152,5$ .

• La moyenne de la série S est :

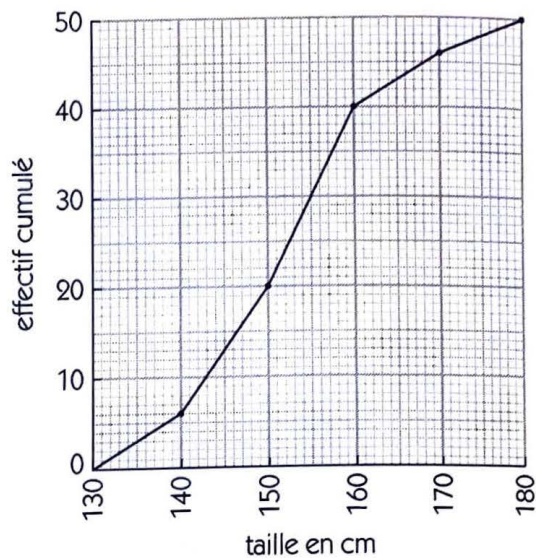
$$m_S = \frac{132,5 \times 2 + \dots + 177,5 \times 2}{50}$$

$$= \frac{7\,635}{50} = 152,7.$$

4. L'écart type de la série S est :

$$\sigma_S = \sqrt{\frac{5\,848}{50}} \approx 10,8.$$

5. La série T semble plus régulière que la série S.



• Déterminer la médiane  $Mé_T$  de la série T.

On a :  $Mé_T$  est comprise entre 150 et 160 ;

$$\frac{Mé_T - 150}{25 - 20} = \frac{160 - 150}{40 - 20}$$

ou :  $Mé_T = 152,5$ .

• La moyenne de la série T est :

$$m_T = \frac{135 \times 6 + \dots + 175 \times 4}{50}$$

$$= \frac{7\,630}{50} = 152,6.$$

L'écart type de la série T est :

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{5\,712}{50}} \approx 10,7.$$

## SÉRIES CHRONOLOGIQUES

### ◇ Exercice n° 29 p. 101

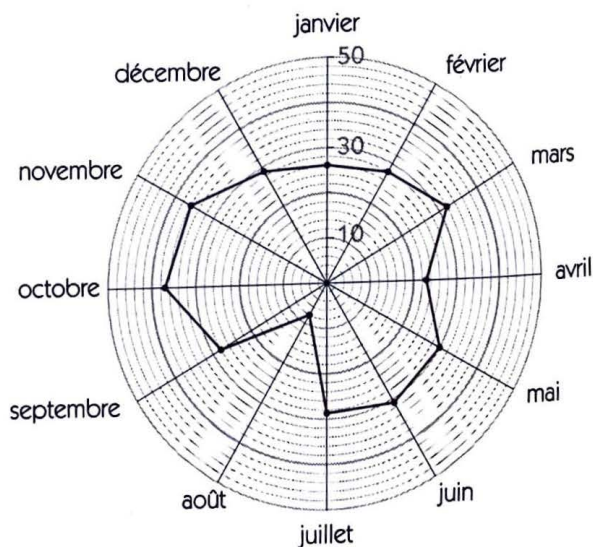
Choisissons de représenter 20 milliers de tonnes par une « bande » de hauteur 1 cm.

Ci-dessous le diagramme à bandes.



### ◇ Exercice n° 30 p. 101

Ci-dessous le diagramme polaire.



◊ Exercice n° 31 p. 101

1.

Mois	janvier	février	mars
Exportation (en millions de F CFA)	70	76	84
Mois	avril	mai	juin
Exportation (en millions de F CFA)	82	80	90
Mois	juillet	août	septembre
Exportation (en millions de F CFA)	82	60	78
Mois	octobre	novembre	décembre
Exportation (en millions de F CFA)	94	86	98

3. La moyenne mensuelle des exportations est :

$$m = \frac{70 + 76 + \dots + 98}{12} = \frac{980}{12} \approx 81,666\ 6667$$

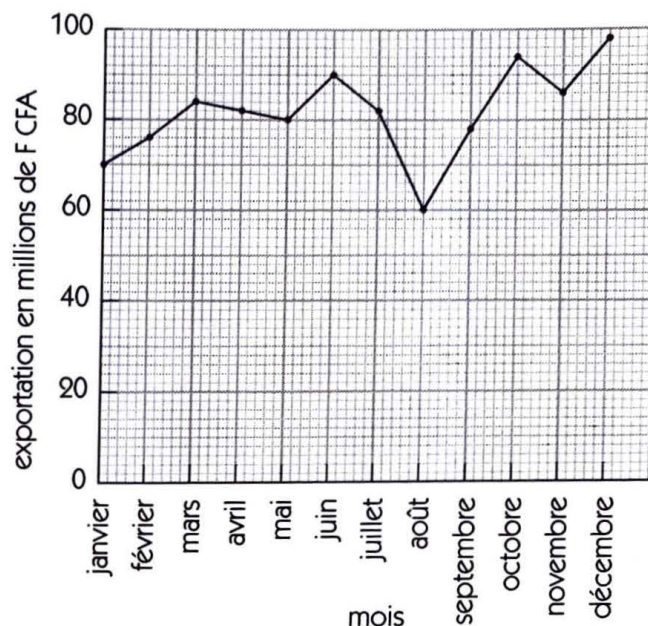
ou : 81 666 667 F CFA.

◊ Exercice n° 32 p. 102

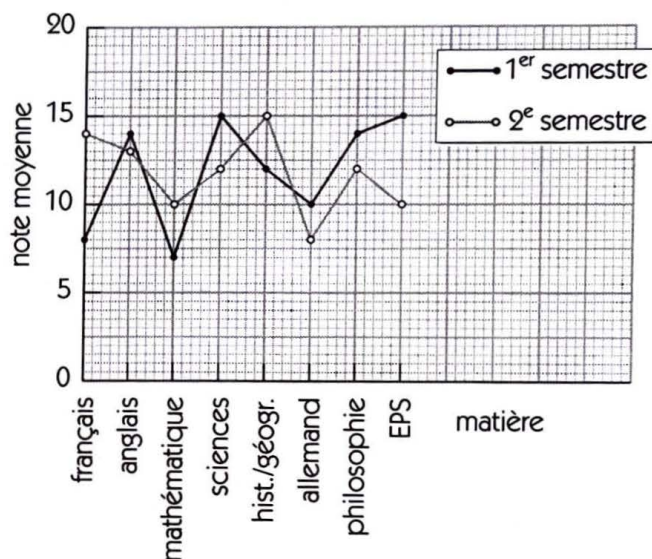
1.

Matière	1 <sup>er</sup> semestre	2 <sup>e</sup> semestre
Français	8	14
Anglais	14	13
Mathématique	7	10
Sciences	15	12
Histoire/géographie	12	15
Allemand	10	8
Philosophie	14	12
Éduc. phys. et sport.	15	10

2. Ci-dessous le polygone des effectifs.



2. Ci-dessous le polygone des effectifs.



▢ Exercices d'approfondissement

◊ Exercice n° 33 p. 102

Soit  $x_1, x_2, \dots, x_n$  les  $n$  salaires dont la moyenne est  $m = 125\ 000$  et l'écart type  $\sigma = 20\ 000$ .

On a :  $m = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = 125\ 000$  ;

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + \dots + (x_n - m)^2}{n} = 20\ 000^2.$$

a) Soit  $x$  le salaire avant l'augmentation de 2 500 F CFA, alors le nouveau salaire sera :  $x + 2\ 500$ .

• La moyenne  $m'$  des  $n$  salaires  $x_1 + 2\ 500, x_2 + 2\ 500, \dots, x_n + 2\ 500$  est :

$$m' = \frac{(x_1 + 2\ 500) + (x_2 + 2\ 500) + \dots + (x_n + 2\ 500)}{n}$$

$$= \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + 2\ 500 \times n}{n} = m + 2\ 500 = 127\ 500 \text{ F CFA.}$$

• Le carré de l'écart type  $\sigma'^2$  des  $n$  salaires  $x_1 + 2\ 500, x_2 + 2\ 500, \dots, x_n + 2\ 500$  est :

$$\sigma'^2 = \frac{(x_1 + 2\ 500 - m - 2\ 500)^2 + \dots + (x_n + 2\ 500 - m - 2\ 500)^2}{n}$$

$$= \frac{(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + \dots + (x_n - m)^2}{n} = \sigma^2 = 20\ 000^2.$$

Donc,  $\sigma' = \sigma = 20\ 000$  F CFA.

b) Soit  $x$  le salaire avant l'augmentation de 2 %, alors le nouveau salaire sera :  $x + x \times \frac{2}{100} = 1,02x$ .

• La moyenne  $m''$  des  $n$  salaires  $1,02x_1, 1,02x_2, \dots, 1,02x_n$  est :

$$m'' = \frac{1,02x_1 + 1,02x_2 + \dots + 1,02x_n}{n} = \frac{1,02(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n} = 1,02m = 1,02 \times 125\ 000 = 127\ 500 \text{ F CFA.}$$

• La carré de l'écart type  $\sigma''^2$  des  $n$  salaires  $1,02x_1, 1,02x_2, \dots, 1,02x_n$  est :

$$\sigma''^2 = \frac{(1,02x_1 - 1,02m)^2 + \dots + (1,02x_n - 1,02m)^2}{n}$$

$$= \frac{(1,02)^2[(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + \dots + (x_n - m)^2]}{n} = (1,02\sigma)^2 = (1,02 \times 20\ 000)^2.$$

Donc,  $\sigma'' = 1,02 \times 20\ 000 = 20\ 400$  F CFA.

### ◇ Exercice n° 34 p. 102

1. Soit  $x_1, x_2, \dots, x_n$  les  $n$  nombres dont la moyenne est  $m$ .

$$\text{On a : } m = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

La moyenne  $m'$  des  $n$  nombres  $x_1 + a, x_2 + a, \dots, x_n + a$  est :

$$m' = \frac{(x_1 + a) + (x_2 + a) + \dots + (x_n + a)}{n} = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + n \times a}{n} = m + a.$$

2.

Nombre $x_i$	18	8	11	7	9	13	10
Nombre $x_i - 10$	8	-2	1	-3	-1	3	0

$$m - 10 = \frac{6}{7} \approx 0,857 ; \text{ donc, } m \approx 10,857.$$

### ◇ Exercice n° 35 p. 102

1. Soit  $E$  l'effectif total des étudiants issus de la population totale  $P$  de ce pays.

On désigne par  $x$  et  $y$  les pourcentages d'agriculteurs et d'ouvriers dans la population totale  $P$  de ce pays.

Représentons la répartition de la population de ce pays par le schéma ci-contre.

Le pourcentage des étudiants issus d'une famille d'agriculteurs parmi les agriculteurs est :

$$P_{e/a} = \frac{E \times 24}{P \times x} \times 100.$$

Le pourcentage des étudiants issus d'une famille d'ouvriers parmi les ouvriers est :

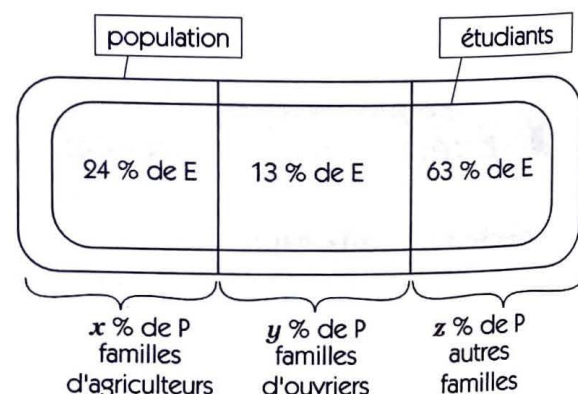
$$P_{e/o} = \frac{E \times 13}{P \times y} \times 100.$$

Tout revient à comparer  $P_{e/a}$  et  $P_{e/o}$  ; c'est-à-dire :  $\frac{13}{x}$  et  $\frac{24}{y}$ .

Les données recueillies par le journaliste ne sont pas suffisantes pour justifier cette affirmation. Il faut des précisions sur les nombres  $x$  et  $y$ .

2. • Cette affirmation est vraie lorsque :  $\frac{13}{y} < \frac{24}{x}$  ; c'est-à-dire :  $\frac{y}{x} > \frac{13}{24} \approx 0,5416$ .

• Cette affirmation est fausse lorsque :  $\frac{13}{y} > \frac{24}{x}$  ; c'est-à-dire :  $\frac{y}{x} < \frac{13}{24} \approx 0,5416$ .



◇ Exercice n° 36 p. 102

1. Choisissons de représenter 5 enfants par une aire de 1 cm<sup>2</sup> et 5 cm de taille par 1 cm.

Pour chaque classe on détermine alors l'aire, la base et la hauteur du rectangle correspondant (Hauteur =  $\frac{\text{Aire}}{\text{Base}}$ ).

Dépôt	Effectif	Aire (en cm <sup>2</sup> )	Base (en cm)	Hauteur (en cm)
[80 ; 90[	3	0,6	2	0,3
[90 ; 95[	15	3	1	3
[95 ; 100[	22	4,4	1	4,4
[100 ; 105[	18	3,6	1	3,6
[105 ; 110[	12	2,4	1	2,4
[110 ; 120[	5	1	2	0,5

Ci-contre l'histogramme et le polygone des effectifs.

2. La moyenne de la série est :

$$m = \frac{85 \times 3 + \dots + 115 \times 5}{75} = \frac{7\,497,5}{75} = 99,96 \approx 100.$$

L'écart type est :  $\sigma = \sqrt{\frac{3\,568,75}{75}} \approx 6,9 \text{ cm.}$

3. • On a :  $[m - \sigma ; m + \sigma] = [93,3 ; 106,9]$  ;

le nombre d'enfants ayant une taille dans  $[93,3 ; 106,9]$  est :

$$15 \times \frac{95 - 93,3}{95 - 90} + 22 + 18 + 12 \times \frac{106,9 - 105}{110 - 105} = 49,66 ; \text{ c'est-à-dire environ : } 66 \%$$

• On a :  $[m - 2\sigma ; m + 2\sigma] = [86,2 ; 113,8]$  ;

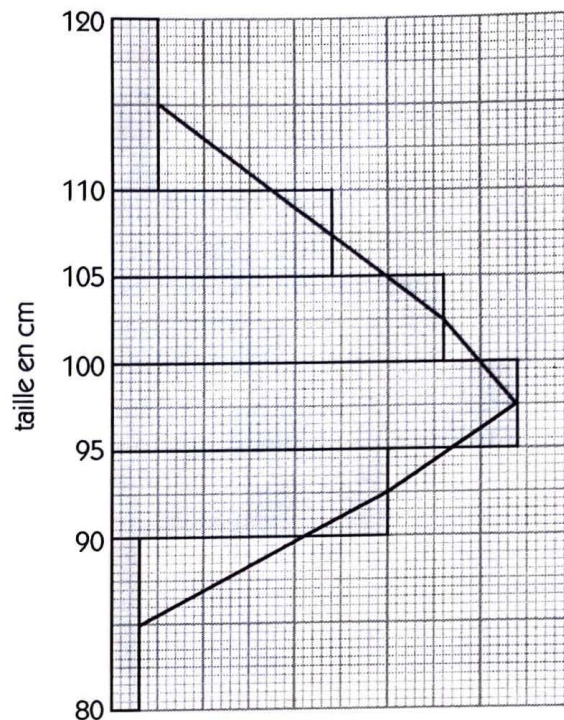
le nombre d'enfants ayant une taille dans  $[86,2 ; 113,8]$  est :

$$3 \times \frac{90 - 86,2}{95 - 80} + 15 + 22 + 18 + 12 + 5 \times \frac{120 - 113,8}{120 - 110} = 71,24 ; \text{ c'est-à-dire environ : } 95 \%$$

• On a :  $[m - 3\sigma ; m + 3\sigma] = [79,3 ; 120,7]$  ;

le nombre d'enfants ayant une taille dans  $[79,3 ; 120,7]$  est : 75 ; c'est-à-dire : 100 %.

La répartition de la série semble normale.



# 6. Étude de fonctions

(pages 103 à 118 du livre de l'élève)

## OBJECTIFS

Ce chapitre vise essentiellement à :

- étudier le sens de variation d'une fonction à l'aide de sa dérivée ;
- maîtriser les représentations graphiques des fonctions polynômes et homographiques ;
- résoudre des problèmes concrets conduisant à des fonctions polynômes et homographiques.

## COMMENTAIRES

On se limitera aux fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3 et aux fonctions homographiques. Les études de problèmes d'optimisation sont un excellent exercice : l'élève y apprend à modéliser une situation concrète avant de mobiliser l'outil *dérivation* pour la recherche d'un extremum.

Le plan proposé pour l'étude de fonctions est purement indicatif.

Il convient d'utiliser un repère orthogonal, au besoin orthonormé, pour construire les représentations graphiques.

## SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

### savoirs

#### Applications de la dérivation

- Dérivée et sens de variation :
  - propriété.

- Dérivée et extremum :
  - propriété.

#### Étude de fonctions polynômes et homographiques

- Étude de fonctions polynômes.
- Étude de fonctions homographiques.

#### Résolution de problèmes

- Problèmes conduisant à une fonction polynôme.
- Problèmes conduisant à une fonction homographique.

### savoir-faire

- Déterminer la fonction dérivée d'une fonction, étudier son signe, en déduire le sens de variation de la fonction numérique et dresser son tableau de variation.

- Rechercher et donner la nature des extremums relatifs d'une fonction numérique.
- Connaissant le tableau de variation ou la représentation d'une fonction, conjecturer les extremums.

- Conduire l'étude d'une fonction :
  - polynôme de degré inférieur ou égal à 3 ;
  - homographique.
- Déterminer une équation de la tangente à la représentation graphique d'une fonction en un point et la construire.
- Résoudre graphiquement une équation, une inéquation ou un système (d'équations ou d'inéquations).

Exercices du cours

◇ Exercice 1.a p. 106

a) On a :  $f'(x) = -2$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	↘	

b) On a :  $f'(x) = 4$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	↗	

c) On a :  $f'(x) = -2x + 4$ .

$x$	-1	2	5
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-5	4	-5

d) On a :  $f'(x) = x + 1$ .

$x$	-3	-1	3
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{11}{2}$

e) On a :  $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ .

$x$	-2	-1	1
$f'(x)$	+	+	
$f(x)$	2		$\frac{1}{2}$

f) On a :  $f'(x) = -\frac{7}{(x+3)^2}$ .

$x$	-4	-3	0
$f'(x)$	-	-	
$f(x)$	-9		$\frac{1}{3}$

◇ Exercice 1.b p. 106

a) On a :  $D_f = \mathbb{R}$  ;  $f'(x) = -2x + 2$ .

$x$	-1	1	3
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	4	0

b) Les résultats de a) justifient que 4 est le maximum de  $f$  sur  $[-1 ; 3]$ .

◇ Exercice 1.c p. 106

a) On a :  $D_f = \mathbb{R}$  ;  $f'(x) = 2x - 4$ .

$x$	0	2	4
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	3	-1	3

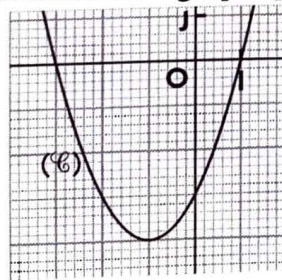
b) Les résultats de a) justifient que -1 est le minimum de  $f$  sur  $[0 ; 4]$ .

◇ Exercice 2.a p. 112

a) On a :  $D_f = \mathbb{R}$  ;  $f'(x) = 2x + 2$ .

Tableau de variation      Représentation graphique

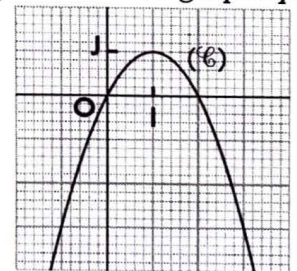
$x$	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘ -4 ↗		



b) On a :  $D_f = \mathbb{R}$  ;  $f'(x) = -2x + 2$ .

Tableau de variation      Représentation graphique

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗ 1 ↘		

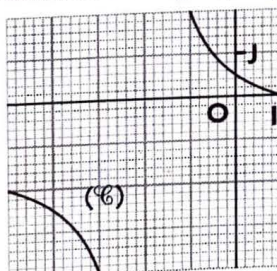


◇ Exercice 2.b p. 112

a) On a :  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$  ;  $f'(x) = -\frac{3}{(x+2)^2}$ .

Tableau de variation      Représentation graphique

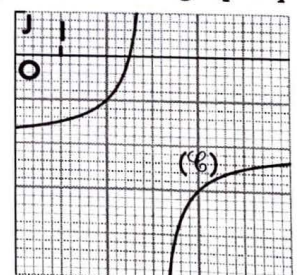
$x$	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	
$f(x)$	↘ ↘		



b) On a :  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$  ;  $f'(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ .

Tableau de variation      Représentation graphique

$x$	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	
$f(x)$	↗ ↗		



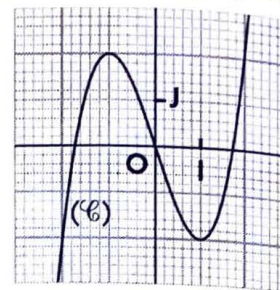
◇ Exercice 2.c p. 112

On a :  $D_f = \mathbb{R}$  ;  $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ .

Tableau de variation

Représentation graphique

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	
$f(x)$	↗		2	↘		↗



◇ Exercice 2.d p. 112

a) Soit la courbe (C) d'équation  $y = -\frac{x^2}{4} + 2x - 3$  et la droite (D) d'équation  $y = \frac{1}{2}x - 2$ .

Les solutions sont les abscisses des points de (C) pour lesquels (C) est au-dessus de (D).

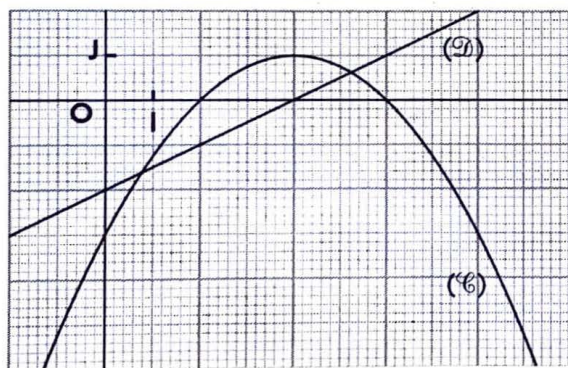
Posons :  $f(x) = -\frac{x^2}{4} + 2x - 3$  et  $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$ .

On a :  $f'(x) = -\frac{1}{2}x + 2$  et  $g'(x) = \frac{1}{2}$ .

Tableaux de variations

$x$	$-\infty$	$4$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	
$f(x)$	↗		1	↘

$x$	$-\infty$	$4$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$0,5$	$+$
$g(x)$	↗		



(D) et (C) se coupent en deux points d'abscisses  $a$  et  $b$  telles que :  $a \approx 0,8$  et  $b \approx 5,2$ .

L'ensemble des solutions de l'inéquation est :  $]a ; b[$ .

b) Soit les droites (D') et (Δ) d'équations respectives  $y = -1$  et  $y = 3$ , puis la courbe (H) d'équation  $y = \frac{x+2}{x-1}$ .

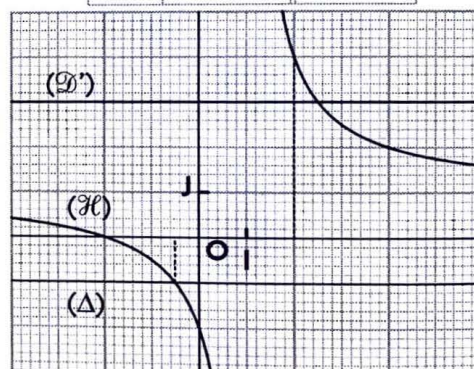
Les solutions sont les abscisses des points de (H) situés entre les deux droites (D') et (Δ).

Posons :  $h(x) = \frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$  ;

on a :  $h'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2}$ .

Tableau de variation

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$h'(x)$	$-$		$-$
$h(x)$	↘		↗



(D') et (H) se coupent en un point d'abscisse  $-\frac{1}{2}$  ;

(Δ) et (H) se coupent en un point d'abscisse  $\frac{5}{2}$ .

L'ensemble des solutions de la double inéquation est :  $]-\infty ; -\frac{1}{2}[ \cup ]\frac{5}{2} ; +\infty[$ .

▣ Exercices d'apprentissage

APPLICATION DE LA DÉRIVATION

◇ Exercice n° 1 p. 116

a)  $x \in [-7 ; 1]$ ,  
 $f'(x) = 2x + 6$ .

$x$	$-7$	$-3$	$1$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$

$f$  a le minimum relatif :  
 $f(-3) = -9$  en  $-3$ .

b)  $x \in [2 ; 6]$ ,  
 $f'(x) = -x + 4$ .

$x$	$2$	$4$	$6$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$

$f$  a le maximum relatif :  
 $f(4) = 5$  en  $4$ .

c)  $x \in [0 ; +\infty[$ ,  
 $f'(x) = x(3x - 2)$ .

$x$	$0$	$2/3$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$

$f$  a le minimum relatif :  
 $f(\frac{2}{3}) = -\frac{4}{27}$  en  $\frac{2}{3}$ .

d)  $x \in ]-\infty ; 0]$ ,  
 $f'(x) = \frac{(2x-1)(2x+1)}{x^2}$ .

$x$	$-\infty$	$-1/2$	$0$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$

$f$  a le maximum relatif :  
 $f(-\frac{1}{2}) = -4$  en  $-\frac{1}{2}$ .

◊ Exercice n° 2 p. 116

$D_f = \mathbb{R} ; f'(x) = -3x(x - 2).$

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$	-	0	+	0	-	
$f(x)$		$\swarrow$	-5	$\nearrow$	-1	$\searrow$

Donc,  $f$  a pour minimum local  $-5$ , atteint en 0, et pour maximum local  $-1$ , atteint en 2.

◊ Exercice n° 3 p. 116

1. et 2.  $D_f = [-5 ; 7] ;$

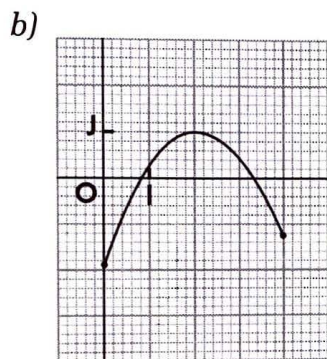
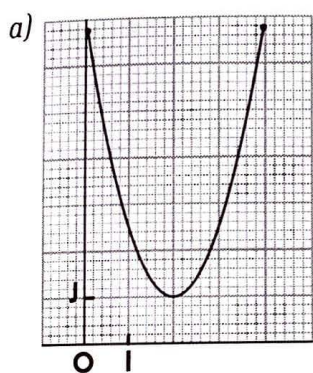
$x$	-5	-2	1	4	7					
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-			
$f(x)$	$\swarrow$	-4	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4

3. •  $f$  a pour minimum local  $-4$ , atteint en  $-5$  et en 7.

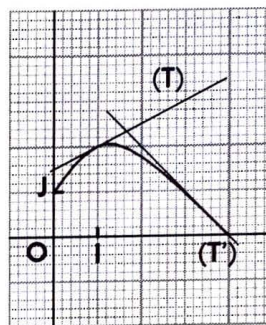
•  $f$  a pour minimum local  $-1$ , atteint en 1.

•  $f$  a pour maximum local 3, atteint en  $-2$  et en 4.

◊ Exercice n° 4 p. 116



◊ Exercice n° 5 p. 116



ÉTUDE DE FONCTIONS POLYNÔMES ET HOMOGRAPHIQUES

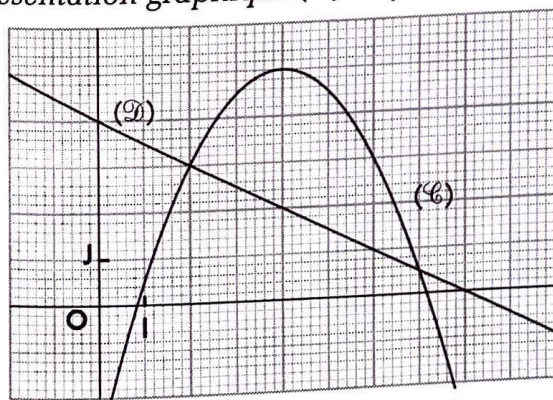
◊ Exercice n° 6 p. 116

1. On a :  $D_f = \mathbb{R} ; f'(x) = -x + 4.$

Tableau de variation

$x$	$-\infty$	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	5	$\searrow$

Représentation graphique (C) de  $f$



2. Soit la droite (D) d'équation  $y = -\frac{1}{2}x + 4.$

Les solutions sont les abscisses des points de (C) pour lesquels (C) est au-dessus de (D). (D) et (C) se coupent en deux points d'abscisses 2 et 7. L'ensemble des solutions de l'inéquation est :  $[2 ; 7].$

Vérification

L'inéquation équivaut à  $x^2 - 9x + 14 \leq 0 ; S = [2 ; 7].$

◊ Exercice n° 7 p. 116

1. On a :  $D_f = \mathbb{R} ; f'(x) = 2x - 4 ;$

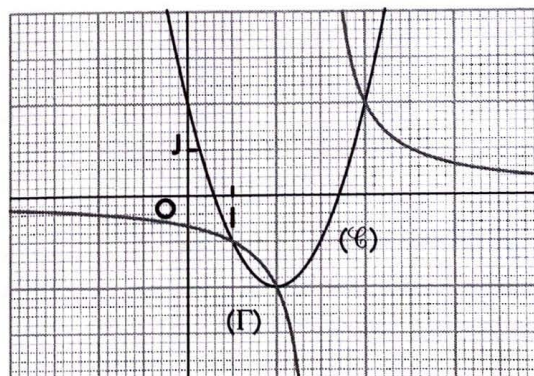
$D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\} ; g'(x) = -\frac{2}{(x-3)^2} .$

Tableaux de variation

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	
$f(x)$		$\swarrow$	-2	$\nearrow$

$x$	$-\infty$	3	$+\infty$
$g'(x)$	-		-
$g(x)$	$\searrow$		$\searrow$

Représentations graphiques (C) de  $f$  et (D) de  $g$



Les solutions sont les abscisses des points où (C) et (D) se coupent.

(C) et (D) se coupent en trois points d'abscisses 1, 2 et 4.

Donc, les solutions de l'équation sont : 1, 2 et 4.

◇ Exercice n° 8 p. 116

On a :  $D_f = \mathbb{R}$  ;  $f(0) = 0$  ;  $f'(x) = x + \frac{3}{2}$  ;  $f'(0) = \frac{3}{2}$  ;

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$  ;  $g(0) = 0$  ;  $g'(x) = \frac{6}{(x+2)^2}$  ;  $g'(0) = \frac{3}{2}$  .

Donc,  $(\mathcal{C})$  et  $(\Gamma)$  admettent la même tangente  $(\Delta)$  à l'origine d'équation :  $y = \frac{3}{2}x$ .

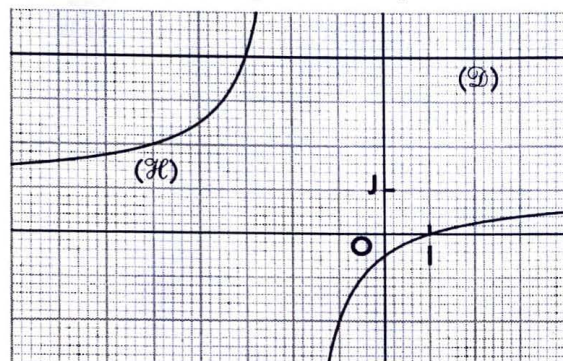
◇ Exercice n° 9 p. 116

1.  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$  ;  $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$  .

Tableau de variation

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	↗		↘

Représentation graphique  $(\mathcal{H})$  de  $f$



2. Soit la droite  $(\mathcal{D})$  d'équation  $y = 4$ .

Les solutions sont les abscisses des points de  $(\mathcal{H})$  situés entre les deux droites  $(\mathcal{D})$  et  $(OI)$ .

$(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{H})$  se coupent en un point d'abscisse  $-3$  ;

$(OI)$  et  $(\mathcal{H})$  se coupent en un point d'abscisse  $1$ .

L'ensemble des solutions de la double inéquation est :  $]-\infty ; -3[ \cup ]1 ; +\infty[$ .

◇ Exercice n° 11 p. 116

1.  $D_f = \mathbb{R}$  ;  $f'(x) = x - 2$ .

Tableau de variation

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

2.  $(\Gamma)$  est la réunion de la partie de  $(\mathcal{C})$  située au-dessus de  $(OI)$  et du symétrique, par rapport à  $(OI)$ , de la partie de  $(\mathcal{C})$  située au-dessous de  $(OI)$ .

◇ Exercice n° 12 p. 117

On a :  $f'(x) = 2ax + b$ .

$\begin{cases} f(3) = 0 \\ f'(3) = -2 \end{cases}$  équivaut à  $\begin{cases} 9a + 3b + \frac{3}{2} = 0 \\ 6a + b = -2 \end{cases}$  ou :  $a = -\frac{1}{2}$  et  $b = 1$ . Donc,  $f(x) = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2}$ .

Vérification

- $0 < \frac{x-1}{x+2}$  équivaut à  $x \in ]-\infty ; -2[ \cup ]1 ; +\infty[ = S$  ;
- $\frac{x-1}{x+2} < 4$  équivaut à  $x \in ]-\infty ; -3[ \cup ]-2 ; +\infty[ = S'$  ;
- $S \cap S' = ]-\infty ; -3[ \cup ]1 ; +\infty[$ .

◇ Exercice n° 10 p. 116

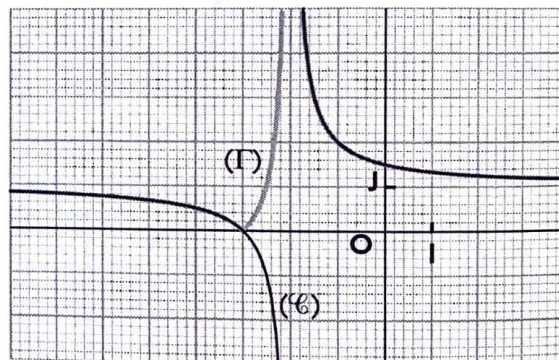
1.  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$  ;  $f'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2}$  .

Tableau de variation de  $f$

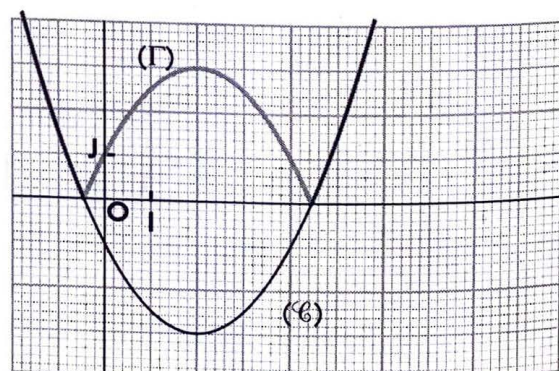
$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	↘		↘

2.  $(\Gamma)$  est la réunion de la partie de  $(\mathcal{C})$  située au-dessus de  $(OI)$  et du symétrique, par rapport à  $(OI)$ , de la partie de  $(\mathcal{C})$  située au-dessous de  $(OI)$ .

Représentations graphiques  $(\mathcal{C})$  de  $f$  et  $(\Gamma)$  de  $g$



Représentations graphiques  $(\mathcal{C})$  de  $f$  et  $(\Gamma)$  de  $g$



◇ Exercice n° 13 p. 117

1. On a :  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$  ;  $f'(x) = -\frac{1}{(2x-3)^2}$  .

On a :  $f'(x) = -1$  équivaut à  $(2x-3)^2 - 1 = 0$  équivaut à  $x = 1$  ou  $x = 2$ .

2. Une équation de la tangente en A(1 ; 1) est :  $y = -x + 2$  ;  
une équation de la tangente en B(2 ; 2) est :  $y = -x + 4$ .

RÉSOLUTION DE PROBLEMES

◇ Exercice n° 14 p. 117

- On a :  $x \in [0 ; 8]$ .
- $\mathcal{A}(x) = 12 \times 8 - x(12 - x) - x(8 - x)$   
 $= 2x^2 - 20x + 96$ .
- On a :  $x \in [0 ; 8]$ ,  $\mathcal{A}'(x) = 4(x - 5)$ .

Tableau de variation de  $\mathcal{A}$

$x$	0	5	8
$\mathcal{A}'(x)$	-	0	+
$\mathcal{A}(x)$	96	46	64

Pour  $x = 5$ ,  $\mathcal{A}(x)$  est minimale et elle est égale à 46.

◇ Exercice n° 15 p. 117

Soit  $AM = x$  ; on a :  $x \in [0 ; AB]$  et  $BM = AB - x$ .

On a :  $S(x) = AM^2 + BM^2 = x^2 + (AB - x)^2$   
 $= 2x^2 - 2ABx + AB^2$ .

$x \in [0 ; AB]$ ,  $S'(x) = 4x - 2AB$ .

Tableau de variation de  $S$

$x$	0	$\frac{AB}{2}$	AB
$S'(x)$	-	0	+
$S(x)$	$AB^2$	$\frac{AB^2}{2}$	$AB^2$

Pour  $x = \frac{AB}{2}$ , c'est-à-dire lorsque le point est le milieu du segment  $[AB]$ ,  $S(x)$  est minimale.

◇ Exercice n° 16 p. 117

- On a :  $x \in [0 ; 15]$ .  
Soit  $V(x)$  le volume de mousse.  
On a :  $V(x) = 20 \times 15 \times x - x^3 = -x^3 + 300x$ .
- On a :  $x \in [0 ; 15]$ ,  
 $V'(x) = 3(-x + 10)(x + 10)$ .

Tableau de variation de  $V$

$x$	0	10	15
$V'(x)$	-	0	-
$V(x)$	0	2 000	1 125

Pour  $x = 10$ ,  $V(x)$  est maximal et est égal à 2 000 cm<sup>3</sup>.

◇ Exercice n° 17 p. 117

- On a :  $x \in [0 ; 4]$ .
- $\mathcal{A}(x) = 4 \times 4 - 2x(4 - x) = 2x^2 - 8x + 16$ .
- On a :  $x \in [0 ; 8]$ ,  $\mathcal{A}'(x) = 4(x - 2)$ .

Tableau de variation de  $\mathcal{A}$

$x$	0	2	4
$\mathcal{A}'(x)$	-	0	+
$\mathcal{A}(x)$	16	8	16

Pour  $x = 2$ ,  $\mathcal{A}(x)$  est minimale et elle est égale à 8.

◇ Exercice n° 18 p. 117

1. Pour vendre  $x$  articles, il faut produire  $x + 1\ 000$  articles (dont 1 000 pour assurer la promotion).

Le coût de production des  $(x + 1\ 000)$  articles est :

$P(x) = 2\ 000(x + 1\ 000) + 5\ 000\ 000$   
 $= 2\ 000x + 7\ 000\ 000$ .

Le prix (coût) de revient de chaque article vendu est :

pour  $x > 0$ ,  $C(x) = \frac{P(x)}{x} = 2\ 000 + \frac{7\ 000\ 000}{x}$ .

2. On a :  $x \in ]0 ; +\infty[$ ,  $C(x) \leq 2\ 500$  équivaut à  $7\ 000\ 000 \leq 500x$  ; ou  $x \geq 14\ 000$ .

Il faut vendre 14 000 articles pour amortir les investissements.

Remarque

On a :  $x \in ]0 ; +\infty[$ ,  $C(x) \leq 2\ 500$ .

$C'(x) = -\frac{7\ 000\ 000}{x^2}$ .

Tableau de variation

$x$	0	$+\infty$
$C'(x)$	-	-
$C(x)$		

On pourrait faire une résolution graphique en utilisant la courbe ( $\mathcal{C}$ ) d'équation :

$y = C(x) = 2\ 000 + \frac{7\ 000\ 000}{x}$

et la droite ( $\mathcal{D}$ ) d'équation :  $y = 2\ 500$  ;

les solutions sont les abscisses des points de ( $\mathcal{C}$ ) pour lesquels ( $\mathcal{D}$ ) est au-dessus de ( $\mathcal{C}$ ).

◇ Exercice n° 19 p. 117

1. On a :  $x\left(1 + \frac{t}{100}\right) = 8\,000$  ;

•  $x = \frac{8\,000}{1 + \frac{t}{100}} = \frac{800\,000}{t + 100}$  ;

•  $y = x \times \frac{t}{100} = \frac{8\,000t}{t + 100}$ .

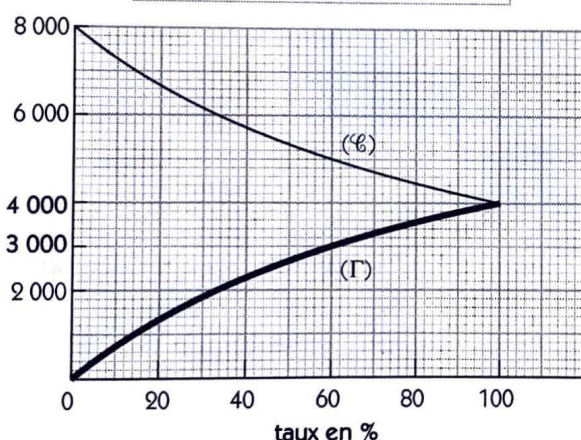
2. a) Pour tout nombre réel  $t \in [0 ; 100]$ , on a :

•  $x(t) = \frac{800\,000}{t + 100}$  ;  $x'(t) = -\frac{800\,000}{(t + 100)^2}$  ;

•  $y(t) = \frac{8\,000t}{t + 100}$  ;  $y'(t) = \frac{800\,000}{(t + 100)^2}$ .

Tableaux de variation de  $x$  et de  $y$

$t$	0	100
$x'(t)$		-
$x(t)$	8 000	4 000
$y'(t)$		+
$y(t)$	0	4 000



b) Une TVA de 3 000 F CFA correspond à un taux de 60 % et celle de 4 000 F CFA à 100 %.

◇ Exercice n° 20 p. 117

1. On a :  $C \times \frac{x}{100} = 50\,000$  ; donc :  $C = \frac{5\,000\,000}{x}$ .

2. a) Les valeurs extrêmes du capital sont 500 000 F et 5 000 000 F CFA.

b) Pour tout  $x \in [1 ; 10]$ , on a :

$C(x) = \frac{5\,000\,000}{x}$  ;  $C'(x) = -\frac{5\,000\,000}{x^2}$ .

▢ Exercices d'approfondissement

◇ Exercice n° 22 p. 117

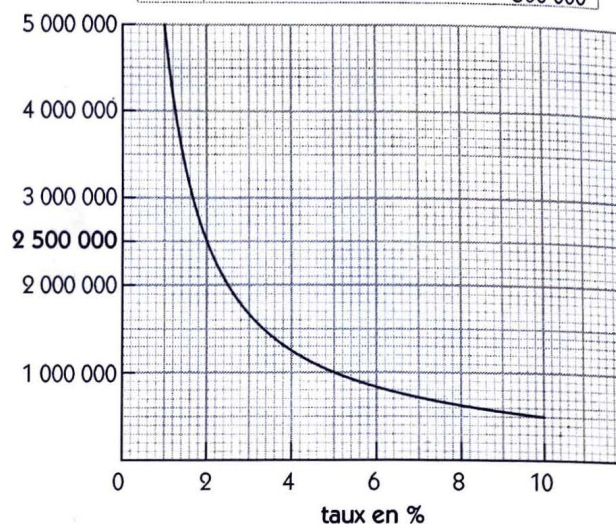
1. On a :  $D_f = \mathbb{R}$  et  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

a)  $f(2) = 4 = g(2)$ .

b) On a :  $f(x) - g(x) = \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x - 1}$ .

Tableau de variation

$x$	1	10
$C'(x)$		-
$C(x)$	5 000 000	500 000



c) Un capital de 2 500 000 F CFA correspond à un taux de 2 % (voir courbe ci-dessus).

◇ Exercice n° 21 p. 117

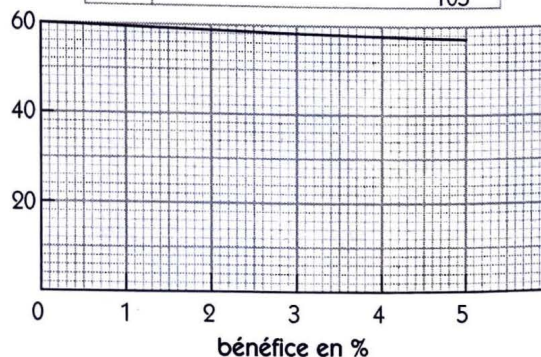
1. On a :  $y\left(1 + \frac{x}{100}\right) = 60$  ;

donc :  $y = \frac{60}{1 + \frac{x}{100}} = \frac{6\,000}{x + 100}$ .

2. On a :  $x \in [0 ; 5]$ ,  $y'(x) = -\frac{6\,000}{(x + 100)^2}$ .

Tableau de variation

$x$	0	5
$y'(x)$		-
$y(x)$	60	$\frac{6\,000}{105}$



Or :  $f(2) - g(2) = 0$  ;

donc :  $f(x) - g(x) = \frac{(x - 2)(ax^2 + bx + c)}{x - 1}$

$$f(x) - g(x) = \frac{(x-2)(x+2)(x+1)}{x-1}$$

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
f(x) - g(x)	+	0	-	0	+	
					-	0
						+

c) • (Γ) et (℄) se coupent en trois points d'abscisses -2, -1 et 2.

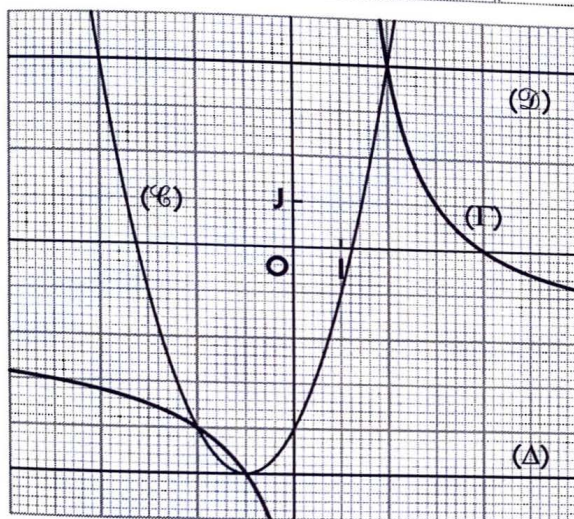
• Les abscisses des points de (℄) pour lesquels (Γ) est au-dessus de (℄) sont les nombres réels x tels que :  $x \in ]-2 ; -1[ \cup ]1 ; 2[$ .

2. On a :  $f'(x) = 2x + 2$  et  $g'(x) = -\frac{6}{(x-1)^2}$ .

Tableaux de variations

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	↘ -5 ↗		

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g'(x)	-		-
g(x)	↘ ↘		



3. a) (℄) et (OI) se coupent en deux points d'abscisses a et b telles que :  $a \approx 1,2$  et  $b \approx -3,2$ .

b) (℄) et (℄) se coupent en deux points d'abscisses 2 et -4.

c) (℄) et (Γ) se coupent en un point d'abscisse 2.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$]-\infty ; 1[ \cup ]2 ; +\infty[.$$

d) (Δ) et (Γ) se coupent en un point d'abscisse -1.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$]-\infty ; -1[ \cup ]1 ; +\infty[.$$

Vérification

$f(x) = 0$  équivaut à  $x = -1 - \sqrt{5}$  ou  $x = -1 + \sqrt{5}$ .

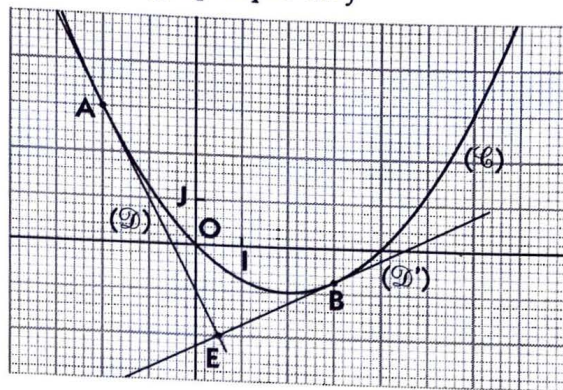
◇ Exercice n° 23 p. 118

1. On a :  $D_f = \mathbb{R}$  ;  $f'(x) = \frac{x}{2} - 1$ .

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	↘ -1 ↗		

Représentation graphique de f



2. a) Une équation de la tangente (℄) en A(-2 ; 3) est :  $y = -2x - 1$  ;

une équation de la tangente (℄') en B(3 ; -3/4) est :  $y = \frac{x}{2} - \frac{9}{4}$ .

b) On a :  $-2 \times \frac{1}{2} = -1$ .

Donc, (℄) et (℄') sont perpendiculaires en un point

E d'abscisse  $\frac{1}{2}$  solution de :  $-2x - 1 = \frac{x}{2} - \frac{9}{4}$  ;

c'est-à-dire : E( $\frac{1}{2}$  ; -2).

◇ Exercice n° 24 p. 118

1. Soit y l'autre dimension du terrain .

On a :  $xy = 150$  ; ou :  $y = \frac{150}{x}$ .

Donc,  $L(x) = 2(x + \frac{150}{x}) + x = 3(x + \frac{100}{x})$ .

2. On a :  $x \in ]0 ; +\infty[$ ,

$$L'(x) = 3(1 - \frac{100}{x^2}) = \frac{3(x-10)(x+10)}{x^2}$$

Tableau de variation de L

x	0	10	$+\infty$
L'(x)		-	0
			+
L(x)	↘ 60 ↗		

Pour  $x = 10$ , L(x) est minimale et est égale à 60.

L'autre dimension du terrain est :  $y = 15$ .

◇ Exercice n° 25 p. 117

1. a) On a :

•  $MN = 2x$ .

• Aire(ABC)

$$= \text{aire}(MNPQ) + 2\text{aire}(CMQ) + \text{aire}(APQ)$$

$$= QM \times 2x + QM(3-x) + \frac{1}{2}(2x(6-QM))$$

Donc :  $\frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 3QM + 6x$  ; ou :  $QM = 6 - 2x$ .

b) MNPQ est un carré équivaut à  $2x = 6 - 2x$  ;

$$\text{ou : } x = \frac{3}{2}$$

2. On a :  $x \in [0 ; 3]$ ,

$$\mathcal{A}(x) = 2x(6-2x) = -4x^2 + 12x$$

3. On a :  $x \in [0 ; 3]$ ,  $\mathcal{A}'(x) = 4(3-2x)$ .

Tableau de variation

$x$	0	$\frac{3}{2}$	3
$\mathcal{A}'(x)$	+	0	-
$\mathcal{A}(x)$	0	9	0

Pour  $x = \frac{3}{2}$ ,  $\mathcal{A}(x)$  est maximale et elle est égale à 9.

◇ Exercice n° 26 p. 118

1. L'instant  $t = 0$  correspond à la hauteur du pont ; c'est-à-dire :  $f(0) = 15$  mètres.

2. La balle tombera au sol à l'instant  $t$  tel que :  $f(t) = 0$  ; c'est-à-dire la plus petite racine positive de  $f$  ou :  $t = 3$  secondes.

L'ensemble de définition de  $f$  est :  $[0 ; 3]$ .

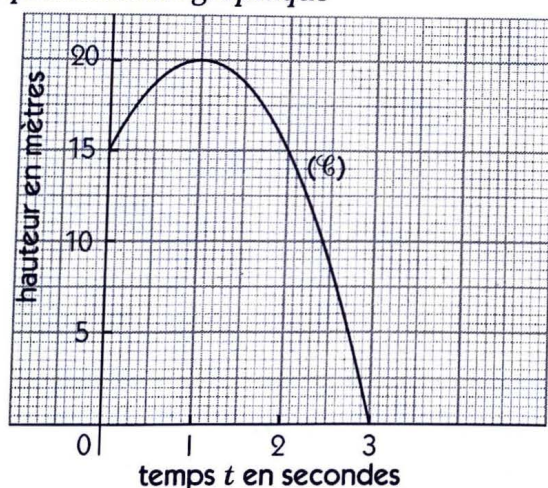
3. On a :  $t \in [0 ; 3]$ ,  $f'(t) = 10(-t + 1)$ .

Tableau de variation

$t$	0	1	3
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	15	20	0

Pour  $t = 1$ ,  $f(t)$  est maximale et est égale à 20 mètres.

4. Représentation graphique



◇ Exercice n° 27 p. 118

1.  $2(x-1)(2x^2 + 2x + 3) = 4x^3 + 2x - 6$ .

2. Soit  $M(x ; x^2) \in (\mathcal{P})$ .

On a :  $AM^2 = (x-3)^2 + x^4$ .

Posons :  $f(x) = (x-3)^2 + x^4$ .

On a :  $D_f = \mathbb{R}$  ;

$$f'(x) = 4x^3 + 2x - 6 = 2(x-1)(2x^2 + 2x + 3).$$

Or : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $2x^2 + 2x + 3 > 0$ .

Tableau de variation

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		5	

Pour  $x = 1$ ,  $f(x)$  est minimale et elle est égale à 5. Donc, le point de  $(\mathcal{P})$  le plus proche de A est :  $M(1 ; 1)$ .

◇ Exercice n° 28 p. 118

1. On a :  $0 < 2x < 50$  ; c'est-à-dire :  $0 < x < 25$ .

La boîte est réalisable pour :  $x \in ]0 ; 25[$ .

2. Soit  $V(x)$  le volume de la boîte.

On a :  $x \in ]0 ; 25[$ ,

$$V(x) = x(50 - 2x)(80 - 2x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x.$$

3. On a :  $x \in ]0 ; 25[$ ,

$$V'(x) = (x - 10)(12x - 400).$$

Tableau de variation

$x$	0	10	25
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$		18 000	

Pour  $x = 10$ ,  $V(x)$  est maximal et il est égal à 18 000  $\text{cm}^3$ .

◇ Exercice n° 29 p. 118

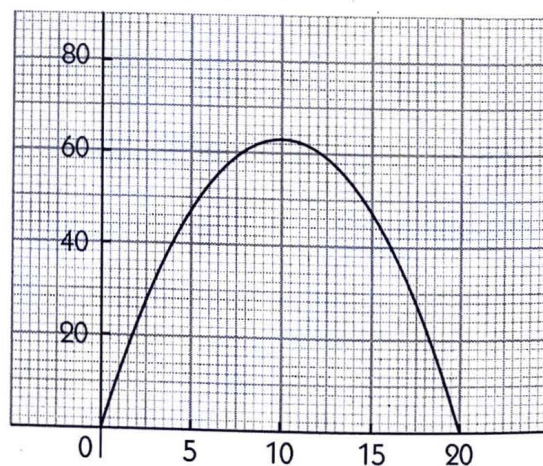
1. On a :  $40 = 2x + \pi y$  ;

$$\text{c'est-à-dire : } y = \frac{40 - 2x}{\pi}.$$

2. On a :  $x \in [0 ; 3]$ ,

$$\mathcal{A}(x) = xy = x \frac{40 - 2x}{\pi} = x \left( \frac{40}{\pi} - \frac{2x}{\pi} \right).$$

3. Représentation graphique



4. Le maximum de la fonction  $\mathcal{A}$  semble être atteint pour  $x = 10$  et il est environ 63.

5. On a :  $x \in [0 ; 20]$ ,

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{-4x + 40}{\pi}.$$

Tableau de variation

$x$	0	10	20
$\mathcal{A}'(x)$	+	0	-
$\mathcal{A}(x)$	0	$\frac{200}{\pi}$	0

Donc, pour tout  $x \in [0 ; 20]$ ,  $\mathcal{A}(x) \leq \frac{200}{\pi}$ .

6. Pour  $x = 10$ ,  $\mathcal{A}(x)$  est maximale et elle est égale à  $\frac{200}{\pi}$ . On a :  $\frac{200}{\pi} \approx 63,7$ .

◇ **Exercice n° 30 p. 118**

1. • Soit  $AM = a$  ; on a :

$$AM^2 \times MB = a^2(b - a) = a^2b - a^3 \quad (1).$$

• Soit  $AM = a + e$  ; on a :

$$AM^2 \times MB = (a + e)^2(b - a - e) = a^2b - a^3 - 3a^2e - 3ae^2 + be^2 + 2abc - e^3 \quad (2).$$

• On égalise les expressions (1) et (2) et on supprime les termes communs, puis on déduit l'égalité :

$$e^3 + (3a - b)e^2 + (3a^2 - 2ab)e = 0 \quad (3).$$

• On divise tous les termes par  $e$  :

$$e^2 + (3a - b)e + (3a^2 - 2ab) = 0 \quad (4).$$

• On supprime les termes comportant  $e$  ou l'une de ses puissances.

On obtient :  $3a^2 - 2ab = 0 \quad (5).$

$$3a^2 - 2ab = 0 \text{ équivaut à } a = 0 \text{ ou } x = \frac{2b}{3}.$$

2. Soit  $AM = x$  ; on a :

$$AM^2 \times MB = x^2(b - x).$$

Le problème revient à déterminer le maximum de la fonction  $f : x \mapsto x^2(b - x) = bx^2 - x^3$ .

On a :

$$x \in [0 ; b], f(x) = bx^2 - x^3 \text{ et } f'(x) = x(2b - 3x).$$

Tableau de variation

$x$	0	$\frac{2b}{3}$	$b$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{4b^3}{27}$	0

Pour  $x = \frac{2b}{3}$ ,  $f(x)$  est maximal et il est égal à  $\frac{4b^3}{27}$ .

# 7. Suites numériques

(pages 119 à 142 du livre de l'élève)

## OBJECTIFS

- Définir et représenter graphiquement une suite numérique.
- Étudier les suites arithmétiques et les suites géométriques, les utiliser pour résoudre des problèmes concrets.

## COMMENTAIRES

L'étude des variations de suites n'est pas au programme.

## SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

### savoirs

#### Généralités

- Définition d'une suite numérique.
- Détermination et représentation graphique :
  - d'une suite numérique définie par une formule explicite ;
  - d'une suite numérique définie par une formule de récurrence.

#### Suites arithmétiques, suites géométriques

- Suites arithmétiques :
  - définition ;
  - propriétés.
- Suites géométriques :
  - définition ;
  - propriétés.

#### Résolution de problèmes

### savoir-faire

- Calculer un terme quelconque d'une suite numérique définie par :
  - une formule explicite ;
  - une formule de récurrence.
- Représenter graphiquement des termes d'une suite numérique définie par une formule explicite dans le plan, puis sur l'axe (OJ) d'un repère (O, I, J).
- Représenter graphiquement, de proche en proche, des termes d'une suite numérique définie par une formule de récurrence, sur l'axe (OI) d'un repère (O, I, J) en utilisant la première bissectrice.
- Démontrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique.
- Calculer le terme de rang  $n$  d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Déterminer le premier terme et la raison d'une suite arithmétique ou géométrique connaissant deux de ses termes.
- Calculer la somme de  $n$  termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Utiliser les suites arithmétiques et géométriques pour résoudre des problèmes concrets.

**EXERCICES DU MANUEL**

**Exercices du cours**

◇ **Exercice 1.a p. 124**

$$u_1 = \frac{1}{2} ; u_2 = \frac{1}{4} ; u_3 = \frac{1}{6} .$$

◇ **Exercice 1.b p. 124**

$$u_1 = -1 ; u_2 = 1 ; u_3 = 5 ; u_4 = 13 .$$

◇ **Exercice 1.c p. 124**

1. Le 5<sup>e</sup> terme est :  $\frac{10 + 3}{81 \times 3} = \frac{13}{243} ;$

◇ **Exercice 1.e p. 124**

1. Construction des droites (D) et (Δ) d'équations respectives  $y = \frac{3}{2}x$  et  $y = x$ .

2. La droite (D) est la représentation graphique de la fonction  $f : x \mapsto \frac{3}{2}x$ .

*Construction de  $u_1$*

Soit  $M_0$  le point de (D) d'abscisse  $u_0 = -4$  ; l'ordonnée de  $M_0$  est  $u_1 = f(u_0)$ .

Soit  $P_0$  le point de (Δ) d'ordonnée  $u_1$  ; l'abscisse de  $P_0$  est  $u_1$ .

*Construction de  $u_2$*

Soit  $M_1$  le point de (D) d'abscisse  $u_1$  ; l'ordonnée de  $M_1$  est  $u_2 = f(u_1)$ .

Soit  $P_1$  le point de (Δ) d'ordonnée  $u_2$  ; l'abscisse de  $P_1$  est  $u_2$ .

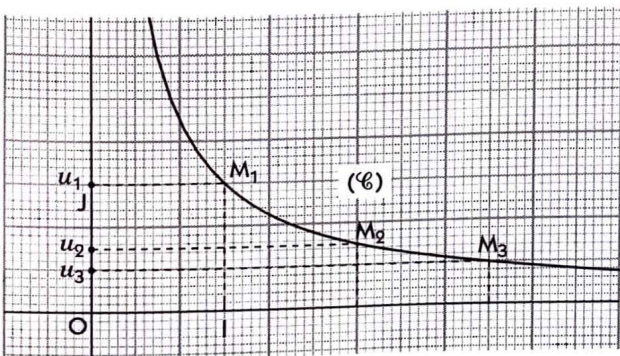
*Construction de  $u_3$*

Soit  $M_2$  le point de (D) d'abscisse  $u_2$  ; l'ordonnée de  $M_2$  est  $u_3 = f(u_2)$ .

Soit  $P_2$  le point de (Δ) d'ordonnée  $u_3$  ; l'abscisse de  $P_2$  est  $u_3$ .

◇ **Exercice 1.f p. 124**

1. Construction, sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ , de la représentation graphique (C) de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ .



2. Pour tout entier naturel  $n$ , on désigne par  $M_n$  le point de coordonnées  $[n, f(n)]$ .

L'ensemble des points  $M_n$  est une représentation graphique de la suite  $(u_n)$  dans le plan.

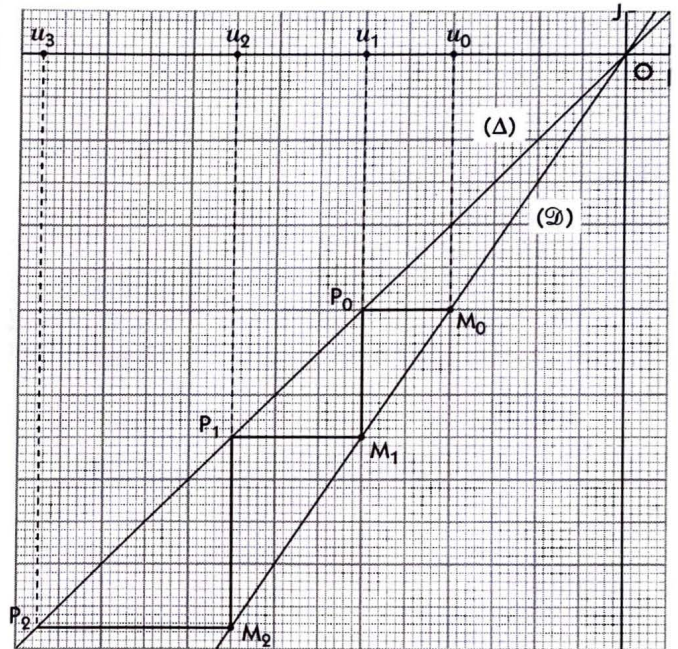
le 6<sup>e</sup> terme est :  $\frac{13 + 3}{243 \times 3} = \frac{16}{729} .$

2. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a :

$$u_n = \frac{1 + 3(n-1)}{3^n} .$$

◇ **Exercice 1.d p. 124**

On a :  $u_{n+1} = 3(n+1) + 5 = 3n + 5 + 3 = u_n + 3 .$



Lorsqu'on projette orthogonalement les points  $M_n$  sur l'axe des ordonnées, on obtient une représentation des termes de la suite sur l'axe (OJ).

Cette méthode permet une construction, de proche en proche sur l'axe (OJ), des termes d'une suite définie par une formule de récurrence.

◇ **Exercice 2.a p. 130**

On a :  $u_0 = 2 ; u_1 = 2 + 7 = 9 ; u_2 = 9 + 7 = 16 ;$   
 $u_3 = 16 + 7 = 23 ; u_4 = 23 + 7 = 30 .$

◇ **Exercice 2.b p. 130**

- On a : si le 1<sup>er</sup> terme est  $u_1$ ,  
 $u_{20} = u_1 + (20 - 1) \times 4 = -5 + 19 \times 4 = 71 ;$   
 si le 1<sup>er</sup> terme est  $u_0$ ,  
 $u_{19} = u_0 + 19 \times 4 = -5 + 19 \times 4 = 71 .$
- On a :  $u_1 + u_2 + \dots + u_{20} = \frac{20(u_1 + u_{20})}{2} = 660 .$

◇ Exercice 2.c p. 130

1. Soit  $r$  la raison et  $u_1$  le 1<sup>er</sup> terme.

On a :  $u_5 = 6$  ;  $u_{12} = -8$  ;

$$u_{12} = u_5 + (12 - 5)r ; u_1 = u_5 + (1 - 5)r.$$

On obtient :  $r = -2$  et  $u_1 = 14$ .

2. Pour tout naturel non nul  $n$ , on a :

$$u_n = u_1 + (n - 1) \times (-2) = 14 - 2(n - 1) = -2n + 16.$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = n(15 - n).$$

◇ Exercice 2.d p. 130

Soit  $r$  la raison et  $u_1$  le 1<sup>er</sup> terme.

$$\text{On a : } u_4 = 16 ; u_1 + u_2 + \dots + u_4 = \frac{4(u_1 + u_4)}{2} = 34.$$

On obtient :  $u_1 = 1$  et  $r = 5$ .

◇ Exercice 2.e p. 130

Soit  $r$  la raison et  $u_0$  le 1<sup>er</sup> terme. On a :

$$a) u_0 = 0 \text{ et } r = \frac{1}{5} \quad b) u_0 = -1 \text{ et } r = 5$$

$$c) u_0 = 2 \text{ et } r = 4 \quad d) u_0 = -3 \text{ et } r = 3.$$

◇ Exercice 2.f p. 130

Soit  $u_1$  le 1<sup>er</sup> terme.

On a :  $u_1 = 36$  ;  $u_2 = 18$  ;  $u_3 = 9$ .

◇ Exercice 2.g p. 130

Soit  $u_0$  le 1<sup>er</sup> terme. On a :  $u_0 = 3$  ;

le 10<sup>e</sup> terme est :  $u_9 = 3 \times 2^9 = 1\,536$ .

$$u_0 + u_1 + \dots + u_9 = 3 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 3\,069.$$

◇ Exercice 2.h p. 130

1. Soit  $q$  la raison et  $u_1$  le 1<sup>er</sup> terme.

On a :  $u_4 = 2\,000$  ;  $u_7 = 2\,000\,000$  ;  $u_7 = u_4 \times q^{(7-4)}$ .

Donc, on a :  $q^3 = 1\,000$  ;

c'est-à-dire :  $q = 10$  et  $u_1 = \frac{u_4}{q^3} = 2$ .

2. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a :

$$\bullet u_n = 2 \times 10^{n-1}.$$

$$\bullet u_1 + u_2 + \dots + u_n = 2 \times \frac{1 - 10^n}{1 - 10} = \frac{2(10^n - 1)}{9}.$$

◇ Exercice 2.i p. 130

Soit  $q$  la raison et  $u_1$  le 1<sup>er</sup> terme.

$$\text{On a : } u_1 = 1 \text{ et } u_1 + u_2 = 1 \times \frac{1 - q^2}{1 - q} = 5 \quad (q \neq 1).$$

$q$  est solution de l'équation :  $q^2 - 5q + 4 = 0$ .

Cette équation a pour solution : 1 et 4 ; donc :  $q = 4$ .

◇ Exercice 2.j p. 130

Soit  $q$  la raison et  $u_0$  le 1<sup>er</sup> terme. On a :

$$a) u_0 = 1 \text{ et } q = \frac{1}{2} \quad b) u_0 = -1 \text{ et } q = 3$$

$$c) u_0 = -5 \text{ et } q = 4 \quad d) u_0 = 9 \text{ et } q = -3.$$

## Exercices d'apprentissage

### GÉNÉRALITÉS

◇ Exercice n° 1 p. 137

$$\text{On a : } u_0 = 0 ; u_1 = \frac{1}{2} ; u_2 = \frac{2}{3} ; u_3 = \frac{3}{4} ; u_4 = \frac{4}{5}.$$

◇ Exercice n° 2 p. 137

$$\text{On a : } u_0 = 5 ; u_1 = -3 + 4 = 1 ; u_2 = 9 + 4 = 13.$$

◇ Exercice n° 3 p. 137

$$\text{On a : } u_1 = 4 + \frac{1}{2} u_0 = 4 + 2 = 6 ;$$

$$u_2 = 4 + \frac{1}{2} u_1 = 4 + 3 = 7 ;$$

$$u_3 = 4 + \frac{1}{2} u_2 = 4 + \frac{7}{2} = \frac{15}{2} ;$$

$$u_4 = 4 + \frac{1}{2} u_3 = 4 + \frac{15}{4} = \frac{31}{4}.$$

◇ Exercice n° 4 p. 137

$$\text{On a : } u_1 = 2 ; u_2 = 1 ; u_3 = 0 ; u_4 = -1 ; u_5 = -2.$$

◇ Exercice n° 5 p. 137

$$a) \frac{1}{4} ; \frac{1}{8} \quad b) 15 ; 19$$

$$c) 0,101\,001\,000\,1 ; 0,101\,001\,000\,100\,001.$$

d) On effectue la somme des deux derniers termes : 34 ; 55.

◇ Exercice n° 6 p. 137

$$u_0 = 2 ; u_1 = 1 ; u_2 = 4 ;$$

$$u_3 = -1 ; u_4 = 6 ; u_5 = -3.$$

◇ Exercice n° 7 p. 137

$$u_0 = 8 ; u_1 = 5 ; u_2 = \frac{7}{2} ; u_3 = \frac{11}{4}.$$

◇ Exercice n° 8 p. 137

1. Construction des droites  $(\mathcal{D})$  et  $(\Delta)$  d'équations respectives  $y = \frac{1}{4}x + 3$  et  $y = x$ . (Voir page suivante.)

2. La droite  $(\mathcal{D})$  est la représentation graphique de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{4}x + 3$ .

**Construction de  $u_1$**

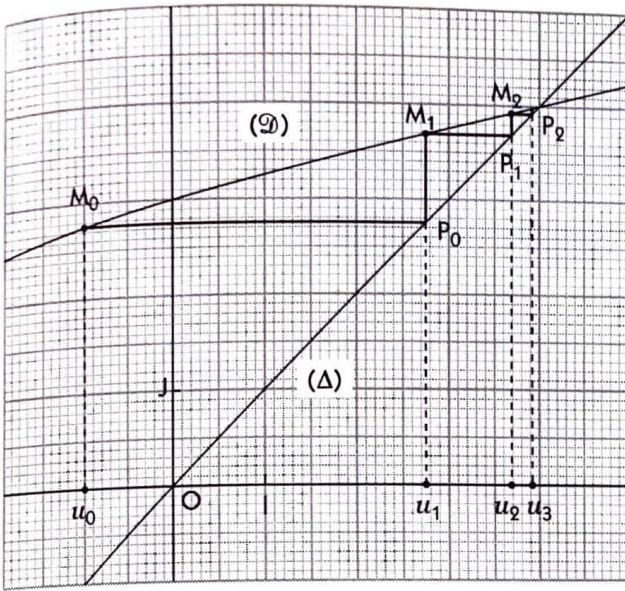
Soit  $M_0$  le point de  $(\mathcal{D})$  d'abscisse  $u_0 = -1$  ; l'ordonnée de  $M_0$  est  $u_1 = f(u_0)$ .

Soit  $P_0$  le point de  $(\Delta)$  d'ordonnée  $u_1$  ; l'abscisse de  $P_0$  est  $u_1$ .

**Construction de  $u_2$**

Soit  $M_1$  le point de  $(\mathcal{D})$  d'abscisse  $u_1$  ; l'ordonnée de  $M_1$  est  $u_2 = f(u_1)$ .

Soit  $P_1$  le point de  $(\Delta)$  d'ordonnée  $u_2$  ; l'abscisse de  $P_1$  est  $u_2$ .



**Construction de  $u_3$**

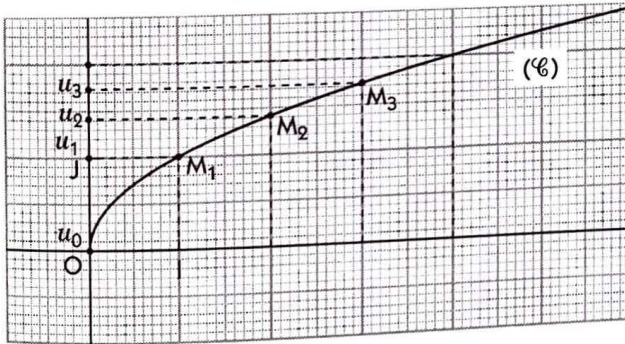
Soit  $M_2$  le point de (D) d'abscisse  $u_2$  ; l'ordonnée de  $M_2$  est  $u_3 = f(u_2)$ .

Soit  $P_2$  le point de (Δ) d'ordonnée  $u_3$  ; l'abscisse de  $P_2$  est  $u_3$ .

◇ **Exercice n° 9 p. 137**

1. Construction, sur l'intervalle  $[0 ; + \infty[$ , de la représentation graphique (C) de la fonction :

$$f : x \mapsto \sqrt{x} .$$



2. Pour tout entier naturel  $n$ , on désigne par  $M_n$  le point de coordonnées  $[n, f(n)]$ .

L'ensemble des points  $M_n$  est une représentation graphique de la suite  $(u_n)$  dans le plan.

Lorsqu'on projette orthogonalement les points  $M_n$  sur l'axe des ordonnées, on obtient une représentation des termes de la suite sur l'axe (OJ).

◇ **Exercice n° 10 p. 137**

(Figure modèle p. 124.)

1. Construction, sur l'intervalle  $[- 1 ; + \infty[$ , des courbes (C) et (Δ) d'équations respectives :

$$y = 1 + x^2 \text{ et } y = x .$$

2. La courbe (C) est la représentation graphique de la fonction  $f : x \mapsto 1 + x^2$ .

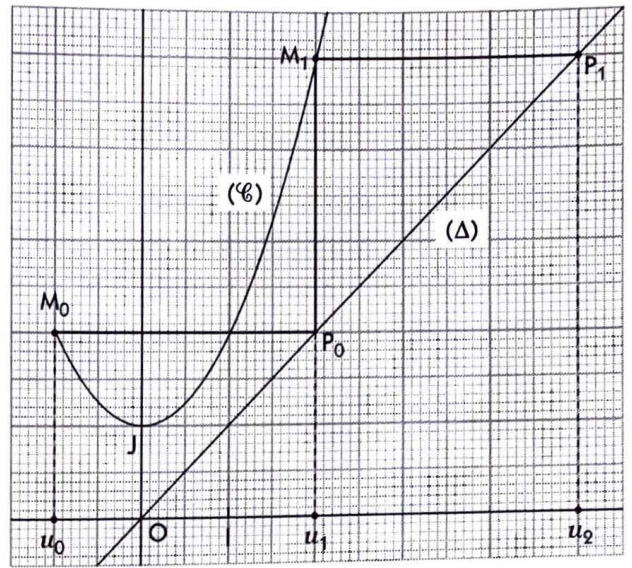
**Construction de  $u_1$**

Soit  $M_0$  le point de (C) d'abscisse  $u_0 = - 1$  ;

l'ordonnée de  $M_0$  est  $u_1 = f(u_0)$ .

Soit  $P_0$  le point de (Δ) d'ordonnée  $u_1$  ;

l'abscisse de  $P_0$  est  $u_1$ .



**Construction de  $u_2$**

Soit  $M_1$  le point de (C) d'abscisse  $u_1$  ; l'ordonnée de  $M_1$  est  $u_2 = f(u_1)$ .

Soit  $P_1$  le point de (Δ) d'ordonnée  $u_2$  ; l'abscisse de  $P_1$  est  $u_2$ .

**Construction de  $u_3$**

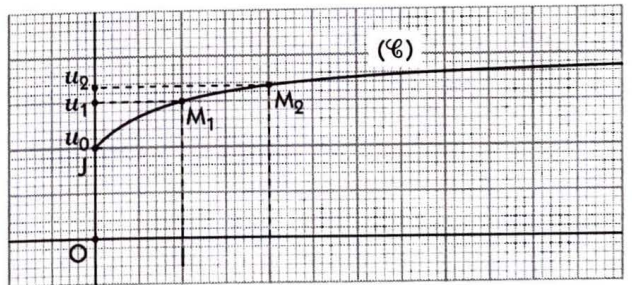
Soit  $M_2$  le point de (C) d'abscisse  $u_2$  ; l'ordonnée de  $M_2$  est  $u_3 = f(u_2)$ .

Soit  $P_2$  le point de (Δ) d'ordonnée  $u_3$  ; l'abscisse de  $P_2$  est  $u_3$ .

◇ **Exercice n° 11 p. 137**

1. Construction, sur l'intervalle  $[0 ; + \infty[$ , de la représentation graphique (C) de la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{2x + 1}{x + 1} .$$



2. Pour tout entier naturel  $n$ , on désigne par  $M_n$  le point de coordonnées  $[n, f(n)]$ .

L'ensemble des points  $M_n$  est une représentation graphique de la suite  $(u_n)$  dans le plan.

Lorsqu'on projette orthogonalement les points  $M_n$  sur l'axe des ordonnées, on obtient une représentation des termes de la suite sur l'axe (OJ).

**SUITES ARITHMÉTIQUES**

◇ **Exercice n° 12 p. 137**

Soit  $r$  la raison et  $u_0$  le 1<sup>er</sup> terme.

On a :  $u_8 = u_0 + 8r = - 5$  et  $u_{15} = u_0 + 15r = 37$ .

On obtient :  $r = 6$  et  $u_0 = - 53$ .

Donc, c'est une suite arithmétique de 1<sup>er</sup> terme  $\frac{1}{2}$  et de raison  $\frac{1}{2}$ .

Figure n° 3

On a :  $u_0 = 3$  ;  $u_1 = 2$  ;  $u_2 = 1$  ;  $u_3 = 0$  ;  $u_4 = -1$ .

Donc, c'est une suite arithmétique de 1<sup>er</sup> terme 3 et de raison  $-1$ .

Figure n° 4

On a :  $u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1$ .

Donc, c'est une suite arithmétique de 1<sup>er</sup> terme 1 et de raison 0.

◇ Exercice n° 20 p. 138

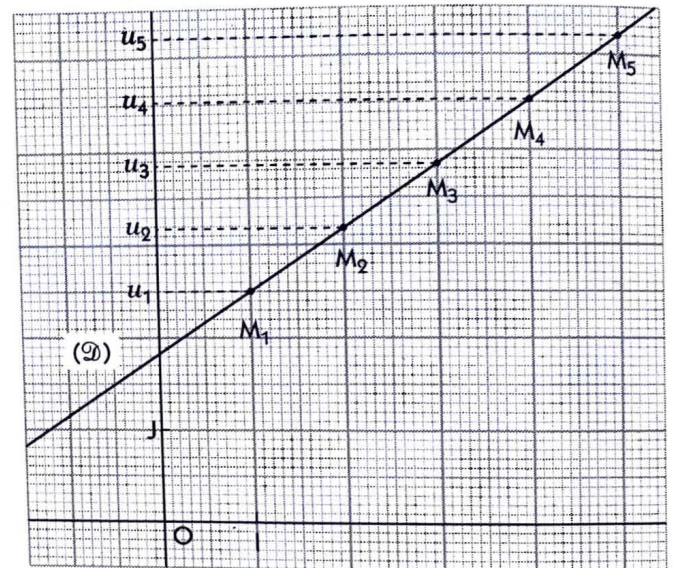
1. a) On a :  $u_1 = 2,5$  et  $u_5 = u_1 + 4r$ .

On obtient :  $r = 0,675$ .

b) On a :  $u_2 = u_1 + 0,675 = 3,175$  ;

$$u_3 = u_1 + 2 \times 0,675 = 3,85 ;$$

$$u_4 = u_1 + 3 \times 0,675 = 4,525.$$



2. La droite (D) est la représentation graphique de la fonction  $f : x \mapsto 0,675x + 2,5$ .

3. L'an 2010 correspondrait à  $u_7$ .

On aurait :  $u_7 = u_1 + 6 \times 0,675 = 6,55$ .

- En 1960, on a :  $u_2 = 3,175$  ;

- en 1970, on a :  $u_3 = 3,85$  et le pourcentage de l'augmentation de la population par rapport à 1960 est :  $\frac{0,675}{3,175} \times 100 \approx 21,26\%$  ;

- en 1980, on a :  $u_4 = 4,525$  et le pourcentage de l'augmentation de la population par rapport à 1970 est :  $\frac{0,675}{3,85} \times 100 \approx 17,53\%$  ;

- en 1990, on a :  $u_5 = 5,2$  et le pourcentage de l'augmentation de la population par rapport à 1980 est :  $\frac{0,675}{4,525} \times 100 \approx 14,92\%$  ;

- en 2000, on a :  $u_6 = 5,875$  et le pourcentage de l'augmentation de la population par rapport à 1990 est :  $\frac{0,675}{5,2} \times 100 \approx 12,98\%$  ;

◇ Exercice n° 13 p. 137

Soit  $r$  la raison et  $u_0$  le 1<sup>er</sup> terme.

On a :  $u_2 = u_0 + 2r = 3$  et  $u_8 = u_0 + 8r = 57$ .

On obtient :  $r = 9$  et  $u_0 = -15$ .

◇ Exercice n° 14 p. 137

Soit  $r$  la raison et  $u_1$  le 1<sup>er</sup> terme.

On a :  $u_{45} = u_{35} + (45 - 35)r$  ;

c'est-à-dire :  $29 = 9 + 10r$ .

On obtient :  $r = 2$  et  $u_{40} = u_{35} + 5r = 9 + 10 = 19$ .

◇ Exercice n° 15 p. 137

Soit  $u_0$  le 1<sup>er</sup> terme.

On a :  $u_2 = u_0 + 2 \times (-1) = 15$  ; donc :  $u_0 = 17$ .

$$\begin{aligned} \text{On a : } u_0 + u_1 + \dots + u_9 &= \frac{10(u_0 + u_9)}{2} \\ &= \frac{10(17 + 17 - 9)}{2} = 125. \end{aligned}$$

◇ Exercice n° 16 p. 137

Soit  $u_1$  le 1<sup>er</sup> terme.

On a :  $u_3 = u_1 + 2 \times 2 = -1$  ; donc :  $u_1 = -5$ .

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \dots + u_{10} &= \frac{10(u_1 + u_{10})}{2} \\ &= \frac{10(-5 - 5 + 9 \times 2)}{2} = 40. \end{aligned}$$

◇ Exercice n° 17 p. 137

Soit  $u_1$  le 1<sup>er</sup> terme.

$$\begin{aligned} \text{On a : } u_1 + u_2 + \dots + u_{16} &= \frac{16(u_1 + u_{16})}{2} \\ &= \frac{16(u_1 + u_1 + 15 \times 5)}{2} ; \end{aligned}$$

c'est-à-dire :  $8(2u_1 + 75) = 648$ .

On obtient :  $u_1 = 3$  et  $u_{16} = 3 + 15 \times 5 = 78$ .

◇ Exercice n° 18 p. 137

1. a) A est la somme des 9 premiers termes d'une suite arithmétique de 1<sup>er</sup> terme 10 et de raison 10.

$$b) \text{ On a : } A = \frac{9 \times (10 + 90)}{2} = 450.$$

2. B est la somme des 10 premiers termes d'une suite arithmétique de 1<sup>er</sup> terme 100 et de raison 20.

$$\text{Donc : } B = \frac{10 \times (100 + 280)}{2} = 1\,900.$$

C est la somme des 9 premiers termes d'une suite arithmétique de 1<sup>er</sup> terme 1000 et de raison 500.

$$\text{Donc : } C = \frac{9 \times (1000 + 5000)}{2} = 27\,000.$$

◇ Exercice n° 19 p. 137

Figure n° 1

On a :  $u_0 = 2$  ;  $u_1 = 1$  ;  $u_2 = 0$  ;  $u_3 = -1$  ;  $u_4 = -2$ .

Donc, c'est une suite arithmétique de 1<sup>er</sup> terme 2 et de raison  $-1$ .

Figure n° 2

$$\text{On a : } u_0 = \frac{1}{2} ; u_1 = 1 ; u_2 = \frac{3}{2} ; u_3 = 2 ; u_4 = \frac{5}{2}.$$

• en 2010, on a :  $u_7 = 6,55$  et le pourcentage de l'augmentation de la population par rapport à 2000 est :  $\frac{0,675}{5,875} \times 100 \approx 11,49 \%$ .

◇ Exercice n° 21 p. 138

a)  $(u_n)$  est la suite arithmétique de 1<sup>er</sup> terme 7 et de raison  $-3$ .

b)  $(u_n)$  est la suite arithmétique de 1<sup>er</sup> terme  $-1$  et de raison  $-\frac{2}{5}$ .

◇ Exercice n° 22 p. 138

On a :  $(y + 4) + y + (y - 4) = 9 \Leftrightarrow 3y = 9 \Leftrightarrow 3$ .

On obtient :  $x = -1$  ;  $y = 3$  ;  $z = 7$ .

◇ Exercice n° 23 p. 138

$$1. u_0 + u_1 + \dots + u_{p-1} = \frac{p(u_0 + u_{p-1})}{2} = p^2 + 2p.$$

On a :  $p(3 + p - 1) = 24 \Leftrightarrow p^2 + 2p - 24 = 0$ .

2.  $\Delta = 10^2$  ; donc, les solutions sont :  $-6$  et  $4$ .

$p$  étant positif, la solution acceptable est :  $p = 4$ .

◇ Exercice n° 24 p. 138

1. a) La suite  $(u_n)$  est définie par :  $u_n = -\frac{4}{3}n + 4$ .

b) La suite  $(u_n)$  est définie par :  $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$ .

c) La suite  $(u_n)$  est définie par :  $\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n \end{cases}$ .

2. a)  $(u_n)$  est la suite arithmétique de 1<sup>er</sup> terme 4 et de raison  $-\frac{4}{3}$ .

b)  $(u_n)$  est la suite arithmétique de 1<sup>er</sup> terme 8 et de raison  $-3$ .

c) La suite  $(u_n)$  n'est pas arithmétique.

SUITES GÉOMÉTRIQUES

◇ Exercice n° 25 p. 139

On obtient :  $q = -2$  et  $u_0 = 3$ .

◇ Exercice n° 26 p. 139

On obtient :  $q = 2$  ou  $q = -2$  et  $u_0 = \frac{3}{4}$ .

◇ Exercice n° 27 p. 139

Soit  $q$  la raison et  $u_0$  le 1<sup>er</sup> terme.

On a :  $u_{19} = u_0 q^{19} = 9$  et  $u_{20} = u_0 q^{20} = 27$ .

$u_0 \neq 0$  et  $q \neq 0$  ; donc :  $\frac{u_0 q^{20}}{u_0 q^{19}} = \frac{27}{9}$ , c'est-à-dire :  $q = 3$ .

On obtient :  $u_{24} = u_{19} q^{24-19} = 9 \times 3^5 = 2\ 187$ .

◇ Exercice n° 28 p. 139

Soit  $u_1$  le 1<sup>er</sup> terme.

On a :  $u_3 = u_1 \times (-1)^2 = 15$  ; donc :  $u_1 = 15$ .

On obtient :  $u_1 + u_2 + \dots + u_{10} = \frac{u_1 \times [1 - (-1)^{10}]}{1 - (-1)}$   
 $= 15 \times \frac{1 - 1}{2} = 0$ .

◇ Exercice n° 29 p. 139

Soit  $u_0$  le 1<sup>er</sup> terme.

On a :  $u_2 = u_0 \times 2^2 = -1$  ; donc :  $u_0 = -\frac{1}{4}$ .

On obtient :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_9 = \frac{u_0 \times (1 - 2^{10})}{1} - 2 = -\frac{1023}{4}$$

◇ Exercice n° 30 p. 139

Soit  $q$  la raison et  $u_0$  le 1<sup>er</sup> terme.

a) On obtient  $u_0 = 2$  et  $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} = 2$ .

b)  $u_0 = 4$  et  $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = 4$ .

c)  $u_0 = 12$  et  $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = 3$ .

d)  $u_0 = 1$  et  $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3}$ .

◇ Exercice n° 31 p. 139

On a :  $\frac{y}{4} + y + 4y = 63 \Leftrightarrow \frac{21y}{4} = 63 \Leftrightarrow y = 12$ .

On obtient :  $x = \frac{12}{4} = 3$  ;  $y = 12$  et  $z = 4 \times 12 = 48$ .

◇ Exercice n° 32 p. 139

On a :  $\frac{y}{2} \times y \times 2y = -27 \Leftrightarrow y^3 = -27 \Leftrightarrow y = -3$ .

On obtient :  $x = -\frac{3}{2}$  ;  $y = -3$  et  $z = -6$ .

◇ Exercice n° 33 p. 139

a) D peut s'identifier à la somme des 10 premiers termes consécutifs d'une suite géométrique de 1<sup>er</sup> terme 1 et de raison 10.

b) On a :  $D = \frac{1 - 10^{10}}{1 - 10} = 1\ 111\ 111\ 111$ .

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

◇ Exercice n° 34 p. 139

On a :  $(a - r) + a + (a + r) = 24 \Leftrightarrow 3a = 24 \Leftrightarrow a = 8$ .

$$(a - r)^2 + a^2 = (a + r)^2 \Leftrightarrow 32r = 64 \Leftrightarrow r = 2.$$

L'hypothénuse mesure 10 et les 2 côtés perpendiculaires mesurent respectivement 8 et 6.

◇ Exercice n° 35 p. 139

On a :  $(a - 5)^2 + a^2 = (a + 5)^2 \Leftrightarrow a(a - 20) = 0$ .

$a > 0$  ; donc :  $a = 20$ .

Donc, l'hypothénuse mesure 25 et les deux côtés perpendiculaires mesurent respectivement 15 et 20.

◇ Exercice n° 36 p. 139

1. Le nombre de contrôles en 2002 est : 4 200

Le nombre de contrôles en 2003 est : 4 400.

2. a) Posons :

- $c_1$  le nombre de contrôles effectués en 2001 ;
- $c_2$  le nombre de contrôles effectués en 2002 ;
- $c_n$  le nombre de contrôles effectués en 2000 +  $n$ .

Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :

$$c_n = 4\,000 + 200(n - 1).$$

b) Le nombre de contrôles pour l'année 2006 est :  
 $u_6 = 4\,000 + 200 \times 5 = 5\,000$ .

c) Soit  $n$  le nombre d'années au bout desquelles on atteindra 6 000 contrôles :

On a :  $4\,000 + 200(n - 1) = 6\,000$  ; donc :  $n = 11$ .

Le nombre de contrôles atteindra 6 000 au bout de 11 ans.

3. Le nombre total de contrôles effectués au bout de  $n$  années est :

$$S_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

$$= \frac{n(4\,000 + 4\,000 + 200)(n - 1)}{2}$$

$$= n(4\,000 + 100(n - 1)) = 100n^2 + 3\,900n.$$

Le nombre total de contrôles de l'année 2001 à l'année 2010 est :

$$C_{10} = 100 \times 10^2 + 3\,900 \times 10 = 49\,000.$$

◇ Exercice n° 37 p. 139

1. Soit  $P_0$  la population initiale de bactéries.

- Après 1 heure, on a :  $P_1 = P_0 \times 2$  ;
- après  $n$  heures, on a :  $P_n = P_0 \times 2^n$ .
- Il faut déterminer l'entier naturel  $n$ , tel que :

$$P_n \geq 100P_0.$$

On a :  $P_n \geq 100P_0 \Leftrightarrow 2^n \geq 2^2 \times 5^2 \Leftrightarrow 2^{n-2} \geq 25$ .

On a :  $2^4 = 16$  et  $2^5 = 32$  ; donc  $n - 2 = 5 \Leftrightarrow n = 7$ .

Donc, au bout de 7 heures la population de bactéries sera multipliée par 100.

2. Au bout de 8 heures on a :  $P_8 = P_0 \times 2^8 = 256P_0$ .

Donc, au bout de 8 heures la population sera multipliée par 256.

◇ Exercice n° 38 p. 139

1. La quantité de produit que l'organisme élimine par demi-heure est :  $1\,000 \text{ mm}^3 \times \frac{10}{100} = 100 \text{ mm}^3$ .

Les 90 minutes correspondent à 3 demi-heures.

Le volume de ce produit éliminé au bout de 90 minutes est  $3 \times 100 \text{ mm}^3 = 300 \text{ mm}^3$ .

2. Le produit reste efficace si le volume éliminé est inférieur ou égal à  $500 \text{ mm}^3$  c'est-à-dire :

$$100n \leq 500 \Leftrightarrow n \leq 5.$$

Donc, au bout de 5 demi-heures ou 2 heures 30 minutes le produit sera inefficace.

◇ Exercice n° 39 p. 139

1. On a :

$$L_0 = 10 ;$$

$$L_1 = L_0 + \frac{40}{100} L_0 = L_0 \times 1,40 = 10 \times 1,40 = 14 \text{ cm} ;$$

$$L_2 = L_1 + \frac{40}{100} L_1 = L_1 \times 1,40 = L_0 \times (1,40)^2 = 19,6 \text{ cm}.$$

2. Pour tout entier naturel  $n$  ( $0 \leq n \leq 12$ ),

$$L_n = L_0 \times (1,40)^n = 10 \times (1,4)^n.$$

3. La longueur du boa au bout de 12 années est :

$$L_{12} = 10 \times (1,4)^{12} = 566,939 \text{ cm} \approx 567 \text{ cm}.$$

4. On a : 1 m = 100 cm.

Il faut déterminer l'entier  $n$  ( $0 \leq n \leq 12$ ),

tel que :  $L_n \geq 100$ .

On a :  $L_n \geq 100 \Leftrightarrow (1,4)^n \geq 10$ .

Or :  $(1,4)^6 = 7,52$  et  $(1,4)^7 = 10,541$ .

Donc, le boa dépassera 1 mètre au bout de 7 ans.

◇ Exercice n° 40 p. 139

1.  $u_1 = 200$  ;  $u_2 = 100$  ;  $u_3 = 50$ .

2. Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_n = u_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 400 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

3. On a :  $u_6 = 400 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 6,25$ .

4. Le nombre de rebonds précédant l'immobilisation du ballon est tel que :  $u_n < 1$ .

On a :  $400 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1 \Leftrightarrow 2^n \geq 400$ .

Or :  $2^8 = 256$  et  $2^9 = 512$ .

Donc, le nombre de rebonds précédant l'immobilisation est 8.

◇ Exercice n° 41 p. 139

1. Désignons par  $P_n$  la superficie de la pelouse au bout de  $n$  années. On a :  $P_0 = 500 \text{ m}^2$ .

Au bout d'un an, on a :

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{10} P_0 = 550 \text{ m}^2.$$

2. La superficie de la pelouse après 4 ans est :

$$P_4 = 500 \times (1,1)^4 = 732,05 \text{ m}^2.$$

3. S'il veut conserver au plus  $100 \text{ m}^2$  de potager, il faut au moins  $900 \text{ m}^2$  de pelouse.

Il faut déterminer l'entier naturel  $n$ , tel que  $P_n \geq 900$ .

On a :  $500 \times (1,1)^n \geq 900 \Leftrightarrow (1,1)^n \geq 1,8$ .

Or :  $(1,1)^6 = 1,771\,561$  et  $(1,1)^7 = 1,948\,717\,1$ .

Il parviendra à ce résultat au bout de 7 années.

◇ Exercice n° 42 p. 139

• Après 1 an, la population est :

$$p_1 = (16,5 \times 10^6) \times 1,03 = 16\,995\,000.$$

• Après 2 ans, la population est :

$$p_2 : (16,5 \times 10^6) \times (1,03)^2 = 17\,504\,850.$$

• Après 10 ans, la population est :

$$p_{10} = (16,5 \times 10^6) \times (1,03)^{10} \approx 22\,174\,620.$$

◇ Exercice n° 43 p. 140

1. • Le taux d'accroissement annuel est de 2 % signifie que, chaque année, l'effectif de la population de la ville A est multiplié par :  $1 + \frac{2}{100} = 1,02$ .

– Après 1 an, c'est-à-dire en l'an 2002, la population de A est :  $p_1 = 40\ 000 \times 1,02 = 40\ 800$  ;

– après 2 ans, c'est-à-dire en l'an 2003, la population de A est :  $p_2 = 40\ 000 \times (1,02)^2 = 41\ 616$ .

• Le taux de réduction annuel est de 4 % signifie que, chaque année, l'effectif de la population de la ville B est multiplié par :  $1 - \frac{4}{100} = 0,96$ .

– Après 1 an, c'est-à-dire en l'an 2002, la population de B est :  $q_1 = 60\ 000 \times 0,96 = 57\ 600$  ;

– après 2 ans, c'est-à-dire en l'an 2003, la population de B est :  $q_2 = 60\ 000 \times (0,96)^2 = 55\ 296$ .

2. Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$p_n = 40\ 000 \times (1,02)^n \text{ et } q_n = 60\ 000 \times (0,96)^n.$$

3. a) La population de A sera multipliée par 1,5 lorsqu'elle atteindra 60 000 habitants.

La lecture graphique donne :  $n = 21$  ;

donc, en l'an 2022, la population sera multipliée par 1,5.

*Vérification*

$$\text{On a : } 40\ 000 \times (1,02)^{20} \approx 59\ 438$$

$$\text{et } 40\ 000 \times (1,02)^{21} = 60\ 627.$$

Donc, les 2 résultats sont identiques

b) La population de B aura diminué de moitié lorsqu'elle atteindra 30 000 habitants.

La lecture graphique donne :  $n = 20$  ;

donc, en l'an 2021, la population de B aura diminué de moitié.

*Vérification*

$$\text{On a : } 60\ 000 \times (0,96)^{16} \approx 31\ 224$$

$$\text{et } 60\ 000 \times (0,96)^{17} \approx 29\ 975.$$

Donc la population de B aura diminué de moitié en l'an 2018 et non en l'an 2021 comme l'indique le graphique.

c) La lecture graphique donne :  $n = 20$  ; c'est-à-dire en l'an 2021, la population de A sera le double de celle de B.

*Vérification*

$$p_n = 2q_n \Leftrightarrow 40\ 000 \times (1,02)^n = 2 \times 60\ 000 \times (0,96)^n \\ \Leftrightarrow (1,0625)^n = 3.$$

$$\text{Or : } (1,0625)^{18} \approx 2,9779 \text{ et } (1,0625)^{19} \approx 3,164.$$

Donc, c'est en l'an 2020 que la population de A sera le double de celle de B et non en l'an 2021 comme l'indique le graphique.

d) La lecture graphique donne :  $n = 9$  ; c'est-à-dire en l'an 2010, les deux villes auront la même population.

*Vérification*

$$40\ 000 \times (1,02)^9 = 60\ 000 \times (0,96)^9 \Leftrightarrow (1,0625)^9 = 1,5.$$

$$\text{Or : } (1,0625)^6 \approx 1,438 \text{ et } (1,0625)^7 \approx 1,5286.$$

Donc, c'est en l'an 2008 que les deux villes auront la même population et non en l'an 2010 comme l'indique la réponse graphique.

◇ Exercice n° 44 p. 140

Après  $n$  années, la valeur du capital est :

$$C_n = 500\ 000 \times (1,06)^n$$

$$C_8 = 500\ 000 \times (1,06)^8 \approx 796\ 924 \text{ F CFA}$$

$$C_{10} = 500\ 000 \times (1,06)^{10} \approx 895\ 424 \text{ F CFA}.$$

◇ Exercice n° 45 p. 140

Après  $n$  années, la valeur du capital est :

$$C_n = C_0 \times (1,05)^n.$$

$$C_7 = 4\ 000\ 000 \Leftrightarrow C_0 = \frac{4\ 000\ 000}{(1,05)^7} = 2\ 842\ 725,321.$$

Le capital placé est : 2 842 726 F CFA.

◇ Exercice n° 46 p. 140

1. Après  $n$  années, la valeur du capital est :

$$C_n = 100\ 000 + 6\ 000n.$$

2. Si le taux double, la valeur du capital après  $n$  années devient :

$$D_n = 100\ 000 + 12\ 000n.$$

On a :  $C_n \neq D_n$  ; donc, si le taux double, la valeur acquise ne double pas.

◇ Exercice n° 47 p. 140

La maison comporte 24 marches.

Les prix des marches successives sont les termes d'une suite géométrique  $(p_n)$  ( $1 \leq n \leq 24$ ) de 1<sup>er</sup> terme 10 et de raison 2. Le prix de vente de la maison est :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{24} = 10 \times \frac{1 - 2^{24}}{1 - 2} = 10(2^{24} - 1) \\ = 167\ 772\ 150 \text{ F CFA}.$$

◇ Exercice n° 48 p. 140

1. Après 8 ans, le loyer mensuel est :

$$l_8 = 100\ 000 \times (1,05)^8 = 147\ 745 \text{ F CFA}.$$

2. Après  $n$  années, le loyer mensuel est :

$$l_n = 100\ 000 \times (1,05)^n.$$

$$\text{On a : } l_n = 2 \times 100\ 000 \Rightarrow n = 15.$$

Au bout de 15 années, le loyer aura doublé.

3. La somme des loyers payés pendant les 10 premières années est :

$$S_{10} = 100\ 000 \times \frac{1 - (1,05)^{10}}{1 - 1,05} \times 12$$

$$S_{10} \approx 15\ 093\ 471 \text{ F CFA}.$$

◇ Exercice n° 49 p. 140

1. On a :  $p_2 = p_1 \times 1,08 = 2\ 500 \times 1,08 = 2\ 700 \text{ F CFA}.$

2. Le coefficient multiplicateur est : 1,08 ;

$$p_{n+1} = p_n \times 1,08.$$

3.  $p_3 = p_2 \times 1,08 = 2\ 916$  ;  $p_4 = p_3 \times 1,08 \approx 3\ 149.$

4. • Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :

$$p_n = p_1 \times (1,08)^{n-1} = 2\,500 \times (1,08)^{n-1}.$$

•  $p_{10} = 2\,500 \times (1,08)^9 \approx 4\,998$  F CFA.

◊ Exercice n° 50 p. 140

1. On a :  $p_{n+1} = p_n + p_n \times \frac{11}{100} = p_n \times 1,11.$

$$p_n = p_0 \times (1,11)^n.$$

2. Après 2 ans, le prix de l'article est  $p_2 = p_0 \times (1,11)^2.$

Le taux d'augmentation par rapport à l'année 2001 est :

$$\frac{p_2 - p_0}{p_0} \times 100 = 23,21 \% ; \text{ il est supérieur à } 22 \%.$$

3. a) • En 2004, c'est-à-dire 3 ans après 2001, l'article coûtera :

$$p_3 = 1\,000\,000 \times (1,11)^3 = 1\,367\,631 \text{ F CFA.}$$

• En 2006, c'est-à-dire 5 ans après 2001, l'article coûtera :

$$p_5 = 1\,000\,000 \times (1,11)^5 \approx 1\,685\,058 \text{ F CFA.}$$

b) Le prix aura doublé si  $p_n = 2p_0.$

$$\text{On a : } p_n = 2p_0 \Leftrightarrow (1,11)^n = 2.$$

$$\text{Or : } (1,11)^6 = 1,874 \text{ et } (1,11)^7 = 2,076 \text{ 1.}$$

Donc, le prix aura doublé après 7 ans.

Le nombre d'années pour doubler le prix n'est pas fonction du prix, mais du taux d'augmentation.

▢ Exercices d'approfondissement

◊ Exercice n° 51 p. 140

1.  $u_0 = 2$  et  $u_{p-1} = u_0 + 3(p-1) = 2 + 3(p-1)$

$$187 = u_0 + u_1 + \dots + u_{p-1} = \frac{p[2 + 2 + 3(p-1)]}{2}$$

$$187 = \frac{p[2 + 2 + 3(p-1)]}{2} \Leftrightarrow 3p^2 + p - 374 = 0.$$

Le discriminant de  $3p^2 + p - 374 = 0$  est :  $\Delta = 67^2 ;$

donc, les solutions sont :  $-\frac{68}{6}$  et 11.

$p$  étant positif, la solution acceptable est :  $p = 11.$

◊ Exercice n° 52 p. 140

1.

Étape $n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Largeur	1	1	2	3	5	8	13	21	34
Longueur	1	2	3	5	8	13	21	34	55

2. Soit  $\ell_n$  la largeur du rectangle à l'étape  $n.$

On a :  $\ell_0 = \ell_1 = 1$  et pour tout entier naturel  $n,$

$$\ell_{n+2} = \ell_n + \ell_{n+1}.$$

◊ Exercice n° 53 p. 141

1.

Étape $n$	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de triangle $T_n$	1	4	16	64	256	1024	4096

2. À l'étape  $n,$  on a :  $T_n = 4^n.$

3.  $(T_n)$  est la suite géométrique de raison 4 et de 1<sup>er</sup> terme :  $T_0 = 1.$

◊ Exercice n° 54 p. 141

1. La récolte en l'an 1 est :  $10^5 \times 10 = 10^6$  graines.

Le nombre de graines disponibles pour le semis

en l'an 1 est :  $d_1 = 10^6 \times \frac{20}{100} = 2 \times 10^5.$

2. La récolte en l'an 2 est :  $2 \times 10^5 \times 10.$

Le nombre de graines disponibles pour le semis

en l'an 2 est :  $d_2 = 2 \times 10^6 \times \frac{20}{100} = 2^2 \times 10^5.$

Au bout de  $n$  années, c'est-à-dire en l'an  $n,$  le nombre de graines disponibles pour le semis est :

$$d_n = 10^5 \times 2^n.$$

3. On a :  $d_n \geq 1,5 \times 10^6 ;$

c'est-à-dire :  $10^5 \times 2^n \geq 1,5 \times 10^6$  ou :  $2^n \geq 15.$

Or :  $2^3 = 8$  et  $2^4 = 16.$

Donc, au bout de 4 récoltes, on constate un excédent de graines pour le semis de l'année suivante.

◊ Exercice n° 55 p. 141

1. La distance journalière parcourue la 2<sup>e</sup> semaine est :  $d_2 = d_1 \times 1,25 = 80 \times 1,25 = 100$  km.

La distance journalière parcourue la 3<sup>e</sup> semaine est :  $d_3 = 100 \times 1,25 = 125$  km.

2. a) On a :  $d_n = d_1 \times (1,25)^{n-1} = 80 \times (1,25)^{n-1}.$

b) On a :  $d_n < 300 ;$

c'est-à-dire :  $80 \times (1,25)^{n-1} < 300$  ou :  $(1,25)^{n-1} < 3,75.$

Or :  $(1,25)^5 = 3,051$  et  $(1,25)^6 = 3,814.$

Donc :  $n - 1 = 5$  ou :  $n = 6.$

Le coureur fera moins de 300 km par jour pendant 6 semaines.

c) La distance totale parcourue la 4<sup>e</sup> semaine est :

$$7 \times d_4 = 7 \times 80 \times (1,25)^3 = 1\,093,75 \text{ km.}$$

◊ Exercice n° 56 p. 141

1. a) On a :  $u_0 = 3\,000\,000 ;$

$$u_1 = u_0 \times 1,05 = 3\,000\,000 \times 1,05 = 3\,150\,000 ;$$

$$u_2 = u_1 \times 1,05 = 3\,150\,000 \times 1,05 = 3\,307\,500.$$

b) On a :  $u_{n+1} = u_n \times 1,05.$

c) On a :  $u_n = u_0 \times (1,05)^n = 3\,000\,000 \times (1,05)^n.$

2. a) On a :  $v_0 = 3\,000\,000 ;$

$$v_1 = v_0 + 160\,000 = 3\,160\,000 ;$$

$$v_2 = v_1 + 160\,000 = 3\,320\,000.$$

b) On a :  $v_{n+1} = v_n + 160\,000.$

c) On a :  $v_n = v_0 + 160\,000n = 3\,000\,000 + 160\,000n.$

3. a) Le 31 décembre 2005 correspond à 5 années de location de la maison.

Le locataire aura payé :

• FORMULE 1 :  $u_0 + u_1 + \dots + u_4 = u_0 \times \frac{1 - (1,05)^5}{1 - 1,05}$   
 $= 16\,576\,893,75 \approx 16\,576\,894$  ;

• FORMULE 2 :  
 $v_0 + v_1 + \dots + v_4 = \frac{5(v_0 + v_4)}{2} = 16\,600\,000$ .

Donc, le contrat FORMULE 2 est plus avantageux.

b) 31 décembre 2010 correspond à 10 années de location.

• FORMULE 1 :  $u_0 + u_1 + \dots + u_9 = u_0 \times \frac{1 - (1,05)^{10}}{1 - 1,05}$   
 $= 37\,773\,677,61 \approx 37\,773\,678$  ;

• FORMULE 2 :  
 $v_0 + v_1 + \dots + v_9 = \frac{10(v_0 + v_9)}{2} = 37\,200\,000$ .

Donc, le contrat FORMULE 2 est le plus avantageux.

◇ Exercice n° 57 p. 141

1. a) On a :  $a_n = a_1 + 100(n - 1)$ .

Donc :  $a_{24} = a_1 + 100 \times 23$  ;

c'est-à-dire :  $a_1 + 2\,300 = 5\,300$  ou :  $a_1 = 3\,000$ .

b) • Le nombre de nouveaux abonnés au 12<sup>e</sup> mois est :  $a_{12} = a_1 + 100 \times 11 = 3\,000 + 1\,100 = 4\,100$ .

• Le pourcentage d'augmentation du nombre d'abonnements souscrits au début de la 2<sup>e</sup> année est :

$$\frac{1\,100}{3\,000} \times 100 \approx 36,67\%$$

c) Le nombre total d'exemplaires adressés par voie d'abonnement au cours des 2 premières années est :

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{24} = \frac{24(a_1 + a_{24})}{2} = \frac{24 \times (3\,000 + 5\,300)}{2} = 99\,600$$

2. • À son 24<sup>e</sup> mois de publication, la revue a enregistré 5 300 nouveaux abonnements ( $a_{24} = 5\,300$ ).

Donc, le nombre de nouveaux abonnés au début de la 3<sup>e</sup> année est :

$$a'_1 = 5\,300 + 5\,300 \times \frac{40}{100} = 5\,300 \times 1,4 = 7\,420$$

• Si l'augmentation mensuelle est de 40 %, alors on a :  $a'_2 = a'_1 \times 1,4 = 10\,388$ .

Le nombre total d'abonnés pendant la 3<sup>e</sup> année est :

$$a'_1 + a'_2 + \dots + a'_{12} = a'_1 \times \frac{1 - (1,4)^{12}}{1 - 1,4} \approx 1\,033\,122$$

◇ Exercice n° 58 p. 141

1. On a :  $u_0 = 100$  ;

$$u_1 = u_0 - u_0 \times \frac{10}{100} = u_0 \times 0,90 = 90$$
 ;

$$u_2 = u_1 \times 0,90 = 81$$
 ;

$$u_3 = u_2 \times 0,90 = 72,9$$

2. On a :  $u_n = u_0 \times (0,9)^n$  :  $100 \times (0,9)^n$ .

3. On a :  $u_n < 1$  ; c'est-à-dire :  $(0,9)^n < 0,01$ .

Or :  $(0,9)^{43} = 0,010\,7$  et  $(0,9)^{44} = 0,009\,6$ .

Donc :  $n = 44$ .

◇ Exercice n° 59 p. 141

1. En 2001, c'est-à-dire 1 an après, la quantité de rejets est :

$$50\,000 \times \left(1 - \frac{4}{100}\right) = 50\,000 \times 0,96 = 48\,000 \text{ tonnes.}$$

Donc, il respecte son engagement.

2. a) On a :  $r_0 = 50\,000$  ;

$$r_1 = r_0 \times 0,96 = 48\,000$$
 ;

$$r_2 = r_1 \times 0,96 = 46\,080$$
 ;

$$r_3 = r_2 \times 0,96 = 44\,236,8$$

b) On a :  $r_{n+1} = r_n \times 0,96$ .

La suite  $(r_n)$  est une suite géométrique de 1<sup>er</sup> terme 50 000 et de raison 0,96.

c) On a :  $r_n = 50\,000 \times (0,96)^n$ .

3. La quantité de rejets prévus pour 2010 est :

$$r_{10} = 50\,000 \times (0,96)^{10} = 33\,241,6 \approx 33\,242 \text{ tonnes.}$$

On a :  $r_{10} > 30\,000$  ; donc l'industriel n'a pas respecté les conditions fixées.

4. Avec 5 %, on a :  $r'_{10} = 50\,000 \times (0,95)^{10} \approx 29\,937$ .

Donc, 5 % de réduction annuelle permet d'atteindre les conditions fixées.

◇ Exercice n° 60 p. 142

1. On a :

$$v_2 = \frac{1}{2} v_1$$
 ;

$$v_3 = \frac{1}{2} v_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times v_1$$
 ;

$$v_k = \frac{1}{2} v_{k-1}$$

$(v_k)$  est une suite géométrique de 1<sup>er</sup> terme  $v_1$  et de raison  $\frac{1}{2}$ .

Pour tout entier naturel  $k$ , tel que  $k \in [1 ; n]$ , on a :  
 $v_k = v_1 \times (0,5)^{k-1}$ .

2. a) Le nombre total de voix réunies par les  $n$  candidats est :

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \times \frac{1 - (0,5)^n}{1 - 0,5} = 2v_1 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

b) On a :  $v_1 > v_1 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \Leftrightarrow 1 > 1 - (0,5)^n$ .

Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on a :  $1 > 1 - (0,5)^n$ .

Donc, un second tour n'est pas nécessaire.

3. On a :  $945 = 2 \times 480 \times [1 - (0,5)^n]$  ; c'est-à-dire :  
 $2^n = 64$  ou :  $n = 6$ .

Donc, le nombre de candidats est : 6.

◇ Exercice n° 61 p. 142



À l'instant  $t = 0$ , Achille est au point A tandis que la tortue est au point B. Lorsque Achille sera en B, la tortue sera en C.

Les distances successives, exprimées en mètres, séparant Achille de la tortue sont : 100 ; 10 ; 1 ; 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; ...

Ces distances forment une suite géométrique de raison 0,1 et de premier terme  $d_0 = 100$ .

• Le terme général de cette suite est :

$$d_n = 100 \times (0,1)^n.$$

• La distance  $D$  parcourue par Achille est la somme des  $n$  premiers termes de cette suite, c'est-à-dire :

$$D = d_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1} = 100 \times \frac{1 - (0,1)^n}{1 - 0,1}$$

$$= \frac{1\,000}{9} \times [1 - (0,1)^n].$$

À l'aide de la calculatrice, on constate que  $(0,1)^n$  est très voisin de 0 pour de grandes valeurs de l'entier naturel  $n$ .

On peut conjecturer que :

• Achille rattrapera la tortue ;

•  $D$  sera  $\frac{1\,000}{9}$ , il aura alors parcouru 111,111... m.

◇ Exercice n° 62 p. 142

1. L'arbre de choix se construit de la façon suivante :

• 1 branche en trait pointillé le mois  $n$  signifie qu'au mois  $(n + 1)$ , il y aura 2 branches (1 trait pointillé + 1 trait plein) ;

• 1 branche en trait plein le mois  $n$  signifie qu'au mois  $(n + 1)$ , il n'y aura qu'1 branche (trait pointillé).

2. En construisant l'arbre jusqu'au 8<sup>e</sup> mois :

a) on a :  $u_0 = 1$  ;  $u_1 = 1$  ;  $u_2 = 2$  ;  $u_3 = 3$  ;  $u_4 = 5$  ;  $u_5 = 8$  ;  $u_6 = 13$  ;  $u_7 = 21$  ;  $u_8 = 34$ .

b) on a :  $u_2 = u_1 + u_0$  ;  $u_3 = u_2 + u_1$  ;  $u_4 = u_3 + u_2$  ; ... ;  $u_8 = u_7 + u_6$ .

c) on peut conjecturer que :  $u_{n+1} = u_{n-1} + u_n$ .

▽ Exercice n° 63 p. 142

1. a) On a :  $v_0 = 30\,000$  ;

$$v_1 = 30\,000 - 30\,000 \times \frac{2}{100} + 500 = 29\,900 ;$$

$$v_2 = 29\,900 - 29\,900 \times \frac{2}{100} + 500 = 29\,802 ;$$

$$v_3 = 29\,802 - 29\,802 \times \frac{2}{100} + 500 = 29\,705,96.$$

b) On a :

$$v_{n+1} = v_n - v_n \times \frac{2}{100} + 500 = v_n \times 0,98 + 500.$$

2. a) On a :  $u_{n+1} = v_{n+1} - 25\,000$

$$= (v_n \times 0,98 + 500) - 25\,000$$

$$= v_n \times 0,98 - 24\,500$$

$$= (u_n + 25\,000) \times 0,98 - 24\,500$$

$$= u_n \times 0,98.$$

Donc,  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison 0,98 et de premier terme  $u_0 = v_0 - 25\,000 = 5\,000$ .

b) On a :  $u_n = 5\,000 \times (0,98)^n$

et  $v_n = 5\,000 \times (0,98)^n + 25\,000$ .

c)  $v_n < 27\,000$

$$\text{équivalent à } 5\,000 \times (0,98)^n + 25\,000 < 27\,000$$

$$\text{équivalent à } (0,98)^n < 0,4.$$

Or :  $(0,98)^{45} \approx 0,4028$  et  $(0,98)^{46} \approx 0,3948$ .

Donc,  $n = 46$ , c'est-à-dire que le volume d'eau sera inférieur à  $27\,000 \text{ m}^3$  après 46 jours.

d) On a :

$$v_{61} = 5\,000 \times (0,98)^{61} + 25\,000 = 26\,458,010\,4 \text{ m}^3.$$