

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES (FST)
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
ET INFORMATIQUE (DMI)

Exercice 1 (Questions de cours).

1. Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Rappeler la définition de la borne supérieure de A . (1 pt)
2. Montrer que toute suite décroissante et minorée est convergente et donner sa limite. (1pt)
3. Rappeler la définition d'une suite de Cauchy. (0,5pt)
4. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée. (1pt)

Exercice 2.

On pose $A = \left\{ \frac{x}{x+y}, x > 0, y > 0 \right\}$.

1. Montrer que A est borné. (1pt)
2. Déterminer $\sup A$ et $\inf A$. (2pts)

Mr Fadel M'ayye

Exercice 3.

On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

1. Prouver que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. (1pt)
2. On pose $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Montrer que ℓ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. (1,5 pts)

Exercice 4.

1. Montrer que la suite (v_n) , définie par $v_n = \frac{\cos n}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est de Cauchy. (1pt)
2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ est-elle de Cauchy? (1pt)

Exercice 5.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- a) Prouver que $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^n} |u_1 - u_0|$ pour tout $n \geq 1$. (1,5pt)
- b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. (1,5pt)
- c) Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite. (1pt)

Exercice 6.

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$v_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = -v_n^2 + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Sans utiliser la dérivation, montrer que la fonction $f: x \mapsto -x^2 + 1$ est décroissante sur $[0, 1]$. (0,5pt)
2. Montrer que $v_n \in [0, 1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. (0,5pt)
3. Montrer que les suites $(v_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones (préciser les sens de variation). (2pts)
4. Déduire que les suites $(v_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes. (0,5pt)
5. Déterminer la limite de chacune des suites $(v_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. (1 pt)
6. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente? (0,5pt)

Correction de l'examen d'Analyse I

Session 1 - 2017-2018

①

Exercice 1

1. Voir cours!

2. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle décroissante et minorée. Le sous-ensemble $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ étant minoré dans $\mathbb{R}$, admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$. Soit l cette borne inférieure et soit $\varepsilon > 0$. Il existe un élément $u_{n_0} \in A$ tel que $l \leq u_{n_0} < l + \varepsilon$.

Comme la suite (u_n) est décroissante, pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$l - \varepsilon < l \leq u_n \leq u_{n_0} < l + \varepsilon$$

Il suit donc que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - l| < \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - l| < \varepsilon$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)_n$ converge vers $l = \inf_n u_n$.

3. Voir cours!

4. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy. Pour $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que tout $n \geq n_0$, $|u_n - u_{n_0}| < 1$. Il suit donc que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq 1 + |u_{n_0}|$.

posons $M' = 1 + |u_{n_0}|$. Alors pour tout $n \geq n_0$, (2)
 $|u_n| \leq M'$. Maintenant posons $M = \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{n_0}|, M'\}$.

Par suite pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. D'où $(u_n)_n$ est bornée.

Exercice 2

M, Felel
 M. B. Ays
 3

$$A = \left\{ \frac{x}{x+y}, x > 0, y > 0 \right\}.$$

1- Pour tout $t = \frac{x}{x+y}$ avec $x > 0$ et $y > 0$ on a :

$$\bullet t > 0;$$

$$\bullet t < 1, \text{ car } x+y > x.$$

Donc $0 < t < 1$, pour tout $t \in A$. D'où A est bornée.

2- $\sup A$ et $\inf A$.

a/ • 0 est un minorant de A ;

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = \frac{1/n}{1/n+1} \in A$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$

donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$

$$0 < t_n < \varepsilon = 0 + \varepsilon. \text{ En particulier}$$

$0 < t_{n_0} < 0 + \varepsilon$. D'où pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t_{n_0} \in A$ tel que $0 < t_{n_0} < 0 + \varepsilon$. Par conséquent $\inf A = 0$.

1°/ 1 est un majorant de A.

(3)

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{n}{n+1} \in A$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe

$n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$1 - \varepsilon < x_n \leq 1$. En particulier

$1 - \varepsilon < x_{n_0} \leq 1$; avec $x_{n_0} \in A$. D'où

$$1 = \sup A.$$

Exercice 3

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} ; b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

1°/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}.$$

donc

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)!}.$$

Par suite $\{a_{n+1} > a_n\}$. La suite (a_n) est donc croissante.

De même,

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} - b_n &= a_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - a_n - \frac{1}{n \cdot n!} \quad (4) \\
 &= (a_{n+1} - a_n) + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\
 &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\
 &= \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} \right] \\
 &= -\frac{1}{n(n+1)^2} - \frac{1}{n!} < 0;
 \end{aligned}$$

donc (b_n) est décroissante.

Enfin, $b_n - a_n = \frac{1}{n \times n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0;$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0.$

Conclusion: les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

2- Comme (a_n) et (b_n) sont adjacentes, elles convergent vers la même limite l . Montrons que $l \notin \mathbb{Q}$. Supposons le contraire et soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $l = \frac{p}{q}$. On a: pour tout n ,

$$a_n < l < b_n,$$

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} - b_n &= a_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - a_n - \frac{1}{n \cdot n!} \quad (4) \\
 &= (a_{n+1} - a_n) + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\
 &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\
 &= \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} \right] \\
 &= -\frac{1}{n(n+1)^2} \cdot \frac{1}{n!} < 0;
 \end{aligned}$$

donc (b_n) est décroissante.

Enfin, $b_n - a_n = \frac{1}{n \cdot n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0;$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0.$

Conclusion: les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

2- Comme (a_n) et (b_n) sont adjacentes, elles convergent vers la même limite l . Montrons que $l \notin \mathbb{Q}$. Supposons le contraire et soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $l = \frac{p}{q}$. On a: pour tout n ,
 $a_n < l < b_n,$

en particulier

$$a_q < l < b_q \quad c-a-d \quad a_q < \frac{p}{q} < b_q$$

$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{q!} < \frac{p}{q} < \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{q \times q!}$$

En multipliant ces inegalite par $q!$ on a :

$$q! + q! + \frac{q!}{2!} + \dots + \frac{q!}{(q-1)!} + 1 < p(q-1)! <$$

$$\text{Si nous posons } \alpha = q! + q! + \frac{q!}{2!} + \dots + \frac{q!}{(q-1)!} + 1 + \frac{1}{q}$$
$$\alpha < p(q-1)! < \alpha + \frac{1}{q}$$

Ce qui est impossible car $\alpha, p(q-1)!$ sont des entiers et $\frac{1}{q} < 1$. Donc $l \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 4 Mr Fadel

Noraj

1° $V_n = \frac{\cos n}{2^n}$

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \geq n$. On a :

$$|V_m - V_n| = \left| \frac{\cos m}{2^m} - \frac{\cos n}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$|v_m - v_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

(6)

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout n, n_0 , $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$. Dès lors, pour tous $m, n \geq n_0$, $|v_m - v_n| < \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$. Donc (v_n) est de Cauchy.

2. On donne $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a:

$$|U_{2n} - U_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$\geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ fois}}$$

$$\geq \frac{1}{2}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \frac{1}{2}$, on ne peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|U_{2n} - U_n| < \varepsilon$. Donc (U_n) n'est pas de Cauchy.

Exercice 5

Mr Fadel
M. Drayez

$$U_0 = 1, U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

a) ~~soit n=1~~, Pour $n=1$, on a:

$$|U_2 - U_1| = |\sqrt{2+U_1} - \sqrt{2+U_0}| = \left| \frac{2+U_1 - 2-U_0}{\sqrt{2+U_1} + \sqrt{2+U_0}} \right|$$

$$|u_2 - u_1| = \frac{|u_1 - u_0|}{\sqrt{2+u_1} + \sqrt{2+u_0}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_1 - u_0| \leq \frac{1}{2} |u_1 - u_0|. \quad (7)$$

L'inégalité est donc vraie pour $n=1$.

Supposons l'inégalité vraie pour un certain $n \geq 1$. Alors: $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^n} |u_1 - u_0|$. On a:

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |\sqrt{2+u_{n+1}} - \sqrt{2+u_n}|$$

$$= \frac{|u_{n+1} - u_n|}{\sqrt{2+u_{n+1}} + \sqrt{2+u_n}}$$

$$\leq \frac{1}{2^n} |u_1 - u_0| \times \frac{1}{\sqrt{2+u_{n+1}} + \sqrt{2+u_n}}$$

$$\leq \frac{1}{2^n} |u_1 - u_0| \times \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} |u_1 - u_0|.$$

L'inégalité est donc vraie pour $n+1$.

Conclusion: Pour tout $n \geq 1$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^n} |u_1 - u_0|$.

b) Soient m, n deux entiers. On a:

$$|u_m - u_n| = |u_m - u_{m-1} + u_{m-1} - u_{m-2} + u_{m-2} - \dots + u_{n+1} - u_n|$$

$$\leq |u_m - u_{m-1}| + |u_{m-1} - u_{m-2}| + \dots + |u_{n+1} - u_n|$$

$$|u_m - u_n| \leq \left(\frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-2}} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) |u_1 - u_0|$$

$$\leq \frac{1}{2^n} \frac{1 - (\frac{1}{2})^{m-n}}{1 - \frac{1}{2}} |u_1 - u_0|$$

$$\leq \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 - (\frac{1}{2})^{m-n} \right) |u_1 - u_0|$$

$$\leq \frac{1}{2^{n-1}} |u_1 - u_0|$$

Mr Feld
Ndring

On déduit que (u_n) est de Cauchy car

$$\frac{1}{2^{n-1}} |u_1 - u_0| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La suite étant de Cauchy, elle converge vers une limite l . Cette limite vérifie l'équation $l = \sqrt{2+l}$. On obtient $l = 2$.

Exercice 6

$$v_0 = \frac{1}{2} \text{ et } v_{n+1} = -v_n^2 + 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

1 - Soient $x_1, x_2 \in [0, 1]$ tels que $x_1 \leq x_2$. On a:

$$x_1^2 \leq x_2^2 \quad (\text{car } x_1, x_2 \in [0, 1])$$

$$-x_2^2 \leq -x_1^2$$

$$1 - x_2^2 \leq 1 - x_1^2$$

$f(x_2) \leq f(x_1)$. Ici f est décroissante sur $[0, 1]$

- donc $v_0 = \frac{1}{2} \in [0, 1]$.

Supposons que pour un certain n , $v_n \in [0, 1]$. On a:

(9)

$v_n \in$

$$0 \leq v_n \leq 1$$

$$0 \leq v_n^2 \leq 1$$

$$-1 \leq -v_n^2 \leq 0$$

$$0 \leq 1 - v_n^2 \leq 1$$

$$0 \leq v_{n+1} \leq 1$$

f fadef
N.B. Vierge

Donc $v_{n+1} \in [0, 1]$.

Conclusion $v_n \in [0, 1]$ pour tout n .

Σ

3. la fonction f est décroissante donc $f \circ f$ est croissante.

Par ailleurs $v_{2n+2} = f \circ f(v_{2n})$ et $v_{2n+3} = f \circ f(v_{2n+1})$. Donc les sous-suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) sont monotones. Comparons les premiers termes de chaque sous-suite.

$$v_0 = \frac{1}{2}, \quad v_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}; \quad v_2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}; \quad v_3 = 1 - \frac{49}{256} = \frac{207}{256}$$

On a:

$$v_0 > v_2 \quad \text{et} \quad v_1 < v_3$$

La suite (v_{2n}) est ~~croissante~~ décroissante et la suite (v_{2n+1}) est croissante.

Ainsi les suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) sont monotones bornées, donc elles convergent vers des limites l et l' respectivement.

Les limites l et l' sont des points fixes de $f \circ f$. Cherchons donc les points fixes de $f \circ f$.

(10)

$$f \circ f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{1-x} - 1 - (1-x^2)^2 = x$$

$$\Leftrightarrow 1 - 1 + 2x^2 - x^4 = x$$

$$\text{M.V. Full} \Leftrightarrow x(x^3 - 2x + 1) = 0$$

$$\text{M.V. Full} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^3 - 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } (x-1)(x^2 + x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } (x-1)\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

Les points fixes de $f \circ f$ sont

$$0, 1, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \text{ On exclut } -\frac{1+\sqrt{5}}{2} < 0.$$

La suite (v_{2n}) est décroissante donc $l = \inf v_{2n} < \frac{1}{2}$.

Or $v_0 = \frac{1}{2}$; donc le seul point fixe qui peut être la limite de (v_{2n}) est 0: $\lim_{n \rightarrow \infty} v_{2n} = l = 0$.

La suite (v_{2n+1}) est croissante donc $l' = \sup v_{2n+1}$. Mais $v_1 = \frac{3}{4}$, est supérieur à 0 et à $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; donc la seule possibilité est

$$l' = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} v_{2n+1}.$$

6° Les sous-suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) convergent vers des limites différentes, donc (v_n) est divergente.