Dans les ouvrages de la collection

ESSEBIL AU BAC – Mathématiques

vous trouverez chaque trimestre:

Des résumés de cours pour réviser rapidement et mémoriser les formules,

Des QCM pour l'entraînement et la maîtrise des notions du programme,

Des exercices corrigés variés et progressifs pour teser et approfondir vos connaissances,

Des exercices de synthèse et des problèmes non corrigés pour préparer éfficacement l'épreuve du Bac.

L'AUTEUR

Dr. Horma Ould Hamoud

•Titulaire d'un CAPES de l'ENS (Nouakchott,1990),

•Docteur en Mathématiques (Spécialité Algèbre, Université Cheikh Anta Diop de Dakar, Sénégal, 2002),

•Précédemment enseignant à l'ENS et à l'Université de Nouakchott (FST et FSJE),

•Inspecteur de Mathématiques depuis janvier 2002 en service à l'Inspection Générale de l'Education Nationale (Nouakchott, Mauritanie),

•Coordinateur de la commission de réécriture des programmes de mathématiques et informatique de l'enseignement secondaire.

•Formateur de professeurs et producteur de ressources éducatives et numériques (curriculum, documents d'accompagnement, supports de formation, cours en ligne, formation à distance, applications mobiles, etc ...),

•Membre de la commission nationale chargée des olympiades et rallyes de Maths. Coordinateur de l'équipe de mathématiques.

•Auteur de plusieurs manuels scolaires de mathématiques (cours, exercices corrigés, formulaire, ...) du collège à la terminale,

•Président et membre fondateur de l'ONG Association des Amis de Mathématiques (AMIMATH),

•Site web : https://maurimath.net/

AFD

REPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE
ET DE LA FORMATION TECHNIQUE ET PROFESSIONNELLE
INSPECTION GENERALE

Collection Essebil السبيل au Bac

Mathématiques

Tome 1

Algébre

7C

Résumés de cours

QCM

Exercices Corrigés

Exercices de synthése

Horma Hamoud
Inspecteur

ESSEBIL
Au Bac

MATHS

TERMINALE C

Tome 1
Algèbre
1er trimestre

Horma Ould Hamoud
Inspecteur de Mathématiques

Dans les ouvrages de la collection ESSEBIL AU BAC- Mathématiques vous trouverez :

- ✓ ***Des résumés de cours pour réviser rapidement et mémoriser les formules ;***
- ✓ ***Des QCM pour l'entraînement et la maîtrise des notions du programme ;***
- ✓ ***Des exercices corrigés variés et progressifs pour teser et approfondir vos connaissances ;***
- ✓ ***Des exercices de synthèse et des problèmes non corrigés pour préparer éfficacement l'épreuve du Bac ;***
- ✓ ***Quelques traductions pour améliorer le niveau d'acquisition.***

Dépôt légal : 2177/2020

Bibliothèque nationale - Nouakchott

AVANT PROPOS

Chers élèves de la 7ème AS,

Nous sommes heureux de mettre à votre disposition cette nouvelle collection, "ES-SEBIL pour réussir au bac", qui constituer

a, nous l'espérons, un réel cheminement au succès.

A travers cette collection, le Département cherche, à court terme, à améliorer l'enseignement/apprentissage afin d'avoir, de manière concrète, un impact positif sur le niveau des apprenants.

Cette collection touche le programme en vigueur dans toutes ses dimensions aussi bien théoriques que pratiques: rappels de cours, exercices corrigés et exercices d’entrainement. Elle couvre toutes les disciplines de bases, toutes séries confondues: sciences de la nature (SN), mathématiques (M) et lettres (LM et LO).

Permettez-nous, ici, d'exprimer nos sincères remerciements à nos frères inspecteurs pour leurs efforts vivement louables et sincèrement reconnus.

Nous vous souhaitons, chers candidats au bac, plein succès et réussite et prions qu'Allah, le Tout-Puissant, vous aide à en tirer profit.

وعلى الله قصد السبيل

L’Inspecteur Général

Sommaire

	Thème	Page
Chapitre 1	**Systèmes linéaires et matrices**	**5**
	Résumé de cours	5
	QCM	14
	Enoncés des exercices corrigés	16
	Corrigés des exercices	18
	Exercices de synthèse	26
Chapitre 2	**Nombres complexes**	**29**
	Résumé de cours	29
	QCM	37
	Enoncés des exercices corrigés	39
	Corrigés des exercices	46
	Exercices de synthèse	79
Chapitre 3	**Arithmétique**	**87**
	Résumé de cours	87
	QCM	96
	Enoncés des exercices corrigés	98
	Corrigés des exercices	101
	Exercices de synthèse	116

CHAPITRE 1 MATRICES ET SYSTEMES LINEAIRES

I. RESUME DE COURS

I. Matrices

I.1) Définition et vocabulaire

1) Une matrice de dimension n×p est un tableau rectangulaire de nombres (réels ou complexes) comportant n lignes et p colonnes.

Ces nombres sont appelés coefficients de la matrice.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \textbf{ où } A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{i\in\{1,2,\dots,n\} \\ j\in\{1,2,\dots,p\}}}.$$

Le coefficient $a_{i,j}$ est à l'intersection entre la ligne i et la colonne j.

2) Une matrice ligne est une matrice comportant une seule ligne.
$\mathbf{A = (a_1, a_2, ..., a_p)}$.

3) Une matrice colonne est une matrice comportant une seule colonne. $\mathbf{B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}}$

4) Une matrice carrée est une matrice qui a le même nombre de ligne et le même nombre de colonne. On notera dans ce cas *n* le nombre de lignes et de colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

5) Les éléments de la diagonale (diagonale principale) dans une matrice carrée sont les éléments du type $a_{i,i}$.

6) Une matrice diagonale est une matrice carrée dont les coefficients en dehors de la diagonale principale sont nuls. Les coefficients de la diagonale peuvent être ou ne pas être nuls. C'est-à-dire si $i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.

7) Une matrice triangulaire supérieure est une matrice carrée à coefficients dont les valeurs sous la diagonale principale sont nulles :

***A* est triangulaire supérieure si et seulement si :** $i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$

8) Une matrice triangulaire inférieure est une matrice carrée à coefficients dont les valeurs au-dessus de la diagonale principale sont nulles :

***A* est triangulaire inférieure si et seulement si :** $i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$

9) La matrice identité ou matrice unité est une matrice carrée avec des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

10) La matrice transposée de A est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A. On la note A^T .

Si A est de dimension n × p, alors A^T est de dimension p × n.

I.2) Opérations sur les matrices

1) Addition de matrices

Définition 1 :
On appelle somme de deux matrices A et B de même dimension la matrice obtenue en additionnant les coefficients situés aux mêmes emplacements.
Cette matrice est notée A + B.

Propriétés
Soient A,B et C des matrices de même dimension
1) Associativité : (A + B)+C = A + (B + C) = A + B + C
2) Commutativité : A + B = B + A.

2) Multiplication d'une matrice par un réel

Définition :

On appelle produit d'une matrice A par un réel k la matrice obtenue en multipliant tous les coefficients de A par k.

Cette matrice est notée k × A ou kA.

Remarques :

La matrice (−1) × A est notée −A et est appelée matrice opposée de A.

On définit la soustraction de deux matrices par : A − B = A + (−B).

3) Multiplication de vecteur-ligne par vecteur-colonne

Définition :

A étant une matrice ligne de dimension 1×p et B une matrice colonne de dimension p×1, on appelle produit A × B le nombre obtenu en multipliant le premier élément de A par le premier élément de B, le deuxième élément de A par le deuxième élément de B, etc. puis en ajoutant tous ces produits.

$$A = (a_1, a_2, ..., a_p),\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \Rightarrow A \times B = a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2 + ... + a_p \times b_p$$

Remarque :

Il faut que A ait autant de colonnes que B de lignes pour que le produit soit possible.

4) Multiplication d'une matrice n × p par une matrice colonne

Définition :

A étant une matrice de dimension n × p et B une matrice colonne de dimension

p × 1, on appelle produit A × B la une matrice colonne de dimension n × 1 obtenu en multipliant chaque ligne de A par la matrice colonne B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \ ; \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_2} \\ \vdots \\ \mathbf{b_p} \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{1,1} \times b_1 + a_{1,2} \times b_2 + ... + a_{1,p} \times b_p \\ a_{2,1} \times b_1 + a_{2,2} \times b_2 + ... + a_{2,p} \times b_p \\ \vdots \\ a_{n,1} \times b_1 + a_{n,2} \times b_2 + ... + a_{n,p} \times b_p \end{pmatrix}$$

Remarque :

Il faut que A ait autant de colonnes que B de lignes pour que le produit soit possible.

5) Multiplication d’une matrice ligne 1 × n par une matrice n × p

Définition :

A étant une matrice ligne de dimension 1 × n et B une matrice de dimension n × p, On appelle produit A × B la une matrice ligne de dimension 1 × n obtenue en multipliant la matrice A par chaque colonne de la matrice B.

$$\mathbf{A = (a_1, a_2, ..., a_n)} \ ; B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \left(a_1 \times b_{1,1} + a_2 \times b_{2,1} + ... + a_n \times b_{n,1}, a_1 \times b_{1,2} + a_2 \times b_{2,2} + ... + a_n \times b_{n,2}, ..., a_1 \times b_{1,p} + a_2 \times b_{2,p} + ... + a_n \times b_{n,p} \right)$$

6) Multiplication de deux matrices quelconques

Définition :

A étant une matrice de dimension n×p et B une matrice de dimension p×m. On appelle produit A × B la matrice de dimension n × m obtenu en multipliant chaque ligne de A par chaque colonne de B.

Plus précisément, le coefficient de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne du produit A × B est obtenu en multipliant la $i^{ème}$ ligne de A par la $j^{ème}$ colonne de B.

Remarques :

1) Pour pouvoir faire le produit de deux matrices $A \times B$, il faut absolument que le nombre de colonne de A (celle de gauche) soit identique aux nombres de lignes de B (celle de droite).

2) Le produit A × B a autant de lignes que A et autant de colonnes que B.

3) La possibilité de faire le produit $A \times B$ n'implique pas celle de $B \times A$.

4) Pour toute matrice A carré de taille n : $A \times I_n = I_n \times A = A$. C'est-à-dire que la matrice unité a le même rôle que le nombre 1 dans la multiplication.

7) Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Définitions :

Soit A une matrice carrée d'ordre 2.

Dire que B est la matrice inverse de A signifie que : AB = BA = I_2.

où I_2 désigne la matrice unité d'ordre 2.

Dans ce cas, on admettra que B est unique et on notera B = A^{-1}.

Le nombre $\Delta = ad - bc$ **est appelé déterminant de la matrice carrée** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

On note $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Une matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **est inversible si et seulement si** $ad - bc \neq 0$.

Dans ce cas, son inverse est la matrice $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Remarque :

Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est différent de zéro.

<u>Application</u>

Résolution de systèmes de 2 équations à 2 inconnues (Cas général)

Le système $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ **peut s'écrire sous la forme** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.

soit AX = B, où $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **et** $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **et** $B=\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.

Si A est inversible, on obtient : $X = A^{-1}B$.

8) Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

Soit $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ **. Le déterminant de A est noté** $\det(A)=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

Il est calculé par la formule $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=aei+dhc+gbf-gec-dbi-ahf$.

Il est obtenu en développant suivant une ligne ou une colonne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

II. Systèmes d'équations linéaires

1- Définitions et propriétés

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

1. On appelle système linéaire de p équations à n inconnues tout système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \ldots + a_{p,n}x_n = b_p \end{cases}$$

Où $a_{i,j}$ et b_i sont des réels donnés ;$1 \le i \le p$ et $1 \le j \le n$.

2. Le coefficient de l'inconnue x_j dans l'équation numéro i est $a_{i,j}$: Le premier indice indique le numéro de l'équation le deuxième indice indique le numéro de l'inconnue dont il est le coefficient.

Le système linéaire (S) est dit homogène si pour tout i ; $b_i = 0$. Un système homogène possède toujours une solution : la solution évidente (ou triviale) : $(0,0,...,0)$.

3. La matrice A du système (S) est le tableau à n lignes et m colonnes composé des coefficients des inconnues du système :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix}$$

4. La matrice complète M du système (S) est la matrice :

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} & b_p \end{array}\right)$$

2. Solutions d'un système linéaire

1. Une solution d'un système linéaire (S) est un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de nombres réels ou complexes vérifiant simultanément les équations de (S).

Autrement dit, la suite $(p_1, p_2, ..., p_n)$ est une solution su système si en remplaçant x_i par p_i pour tous les indices i, toutes les équations du système sont vérifiées.

2. **Un système linéaire (S) peut ne pas avoir de solution comme il peut en avoir une seule ou une infinité.**

3. **Deux systèmes linéaires (S_1) et (S_2) sont dits équivalents si toute solution de (S_1) est solution de (S_2) et réciproquement.**

3. Système carré

1. **Un système linéaire de p équations à n inconnues est dit carré si n=p.**

2. **Un système carré est appelé système de Cramer, s'il possède une solution unique. C'est le cas de déterminant non nul. Sinon, le système n'est pas un système de Cramer, il peut n'avoir aucune solution ou bien une infinité de solutions.**

3. **Dans un système carré, le déterminant du système est calculé à partir du tableau de nombres suivant :**

4.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}\ldots\ldots a_{1,j}\ldots\ldots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}\ldots\ldots a_{2,j}\ldots\ldots a_{2,n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2}\ldots\ldots a_{i,j}\ldots\ldots a_{i,n} \\ \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2}\ldots\ldots a_{n,j}\ldots\ldots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Méthode particulière : On peut calculer le déterminant selon la règle de Sarrus

5. **Un système carré est dit triangulaire supérieur à diagonale unité si : $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$ et $a_{i,i} = 1$ avec $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le n$.**

<u>Théorème</u>

Un système triangulaire à diagonale unité admet une solution unique.

4. Résolution d'un système linéaire

4.1. Opérations élémentaires : notation et définitions

On note de haut en bas $L_1, L_2, \ldots, L_p$ les p équations ou lignes d'un système.

On définit sur ces lignes les opérations suivantes dites élémentaires :

a) **Permutation de deux lignes :** $\mathbf{L_i \leftrightarrow L_j}$

b) **Multiplication d'une ligne par un réel ou un complexe non nul :** $\mathbf{L_i \leftarrow \mu L_i}$ $(\mu \neq \mathbf{0})$

c) **Addition à une ligne d'un multiple d'une autre :**
$\mathbf{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j (i \neq j)}$

Théorème

Etant donné un système linéaire, on obtient un système équivalent en effectuant une succession d'opérations élémentaires.

Un système triangulaire à diagonale unité admet une solution unique.

4.2. Méthode du pivot de Gauss :

La méthode du Pivot de Gauss consiste à faire une succession d'opérations élémentaires pour résoudre des systèmes d'équations linéaires quelconques.

Elle a pour objectif de "triangulariser" le système, c'est à dire : obtenir un système équivalent (qui possède les mêmes solutions) mais tel que pour chaque ligne, la ligne qui la suit possède au moins une inconnue de moins.

II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

QCM 1

Dans ce QCM, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

1) Que vaut le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$?

- **A.** $ad - cb$
- **B.** $ab - cd$
- **C.** $ac - bd$
- **D.** $cb - ad$

2) Soient A et B des matrices carrées de même ordre. B est l'inverse de A. Laquelle de ces propositions est fausse ?

- **A.** $B = A^{-1}$
- **B.** $B^{-1} = A^{-1}$
- **C.** $BA = I_n$
- **D.** $AB = I_n$

3) Si A est une matrice inversible telle que $AX = B$, alors on a :

- **A.** $X = B \times A^{-1}$
- **B.** $X^{-1} = A^{-1} \times B$
- **C.** $X = A^{-1} \times B$
- **D.** $X^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

4) La multiplication matricielle est associative. Laquelle de ces formules illustre cette propriété ?

- **A.** $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- **B.** $A \times B = B \times A$
- **C.** $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
- **D.** $(A \times B) + C = A \times C + B \times C$

5) La multiplication matricielle est distributive par rapport à l'addition. Laquelle de ces formules illustre cette propriété ?

- **A.** $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- **B.** $(A + B) \times C = C \times A + C \times B$
- **C.** $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
- **D.** $(A + B) + C = (A + C) + B$

QCM 2

Dans ce QCM, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

1) Soient A et B des matrices carrées de même ordre. I la matrice unité. Laquelle de ces propositions est fausse ?

A. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

B. $(A+I)^2 = A^2 + 2A + I$

C. $(A+B)^2 = (B+A)^2$

D. $(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$

2) Soit A et B deux matrices.

A. Si la somme $A+B$ est définie, alors le produit AB est défini.
B. Si la somme $A+B$ est définie, alors le produit BA est défini.
C. Si le produit AB est défini, alors la somme $A+B$ est définie.
D. Si les produits AB et BA sont définis, alors la somme $A+B$ est définie.

3) Soit A une matrice, ${}^tA$ la transposée de A.

A. Le produit $A \times A$ est toujours défini.
B. La somme $A + {}^tA$ est toujours définie
C. Le produit $A \times {}^tA$ est toujours défini.
D. Si A est carrée alors $A \times {}^tA = {}^tA \times A$.

4) Soit S un système linéaire de 2 équations à 3 inconnues.

A. Le système S a forcément une infinité de solutions.
B. Si les deux équations ont le même premier membre, alors le système S a une infinité de solutions.
C. L'ensemble des solutions du système S est forcément une droite affine.
D. Si le système S a une solution, alors il en a une infinité.

5) Quelle relation a, b et c doivent-ils satisfaire pour que le système

$$\begin{cases} 2x-4y+10z=a \\ 4x-5y+8z=b \\ -2x+y+2z=c \end{cases}$$

ait des solutions ?

A. $a-b-c=0$
B. $a+b+c=0$
C. $2a+b-3c=0$
D. Toutes les valeurs de a, b et c conviennent.

III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

Soit les matrices : $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **;** $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer les produits suivants : AB et BA

2) Que peut-on conclure ?

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$**.**

1) Calculer $A^3 - A$.

2) En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1} .

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

Déterminer la matrice inverse A^{-1} de A puis en déduire les solutions des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 3x - 10y = 4 \\ -2x + 8y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 10y = 1.5 \\ -2x + 8y = -0.4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 10y = 15 \\ -2x + 8y = -5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 10y = 1.25 \\ -2x + 8y = 0.5 \end{cases}$

Exercice 4

Résoudre le système suivant en utilisant la méthode du déterminant

$$(S) = \begin{cases} x - 2y + 3z = -3 \\ 2x - y + z = -6 \\ 3x + 5y - 7z = -2 \end{cases}$$

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1° Montrer que $A^2 = A + 2I_3$ **. Montrer que** $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3$$

2° On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Montrer que $A = M - I_3$ **et que** $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $M^k = 3^{k-1} M$

b) En déduire que $A^n = (-1)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k 3^{k-1} (-1)^{n-k} \right) M$ **puis que**

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} M + (-1)^n I_3$$

3° a) Montrer que $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **;** $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ **et** $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $AP = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **puis que** $A^n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$

IV. CORRIGES DES EXERCICES

Corrigé 1

$$A\times B=\begin{pmatrix}4&8\\1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3&9\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20&44\\5&11\end{pmatrix}$$

$$B\times A=\begin{pmatrix}3&9\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4&8\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21&42\\5&10\end{pmatrix}$$

$B\times A\neq A\times B$.

La multiplication des matrices n'est pas commutative.

Corrigé 2

$$A^2=A\times A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\1&-2&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\1&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-4&2\\1&-1&-1\\1&2&0\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{pmatrix}3&-4&2\\1&-1&-1\\1&2&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\1&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&2\\0&3&1\\1&-2&4\end{pmatrix}$$

$$A^3-A=\begin{pmatrix}5&0&2\\0&3&1\\1&-2&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\1&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$A^3-A=4I_3$

On en déduit que $\frac{1}{4}(A^3-A)=I_3$. Donc $\frac{1}{4}(A^2-I)\times A=I_3$. D'où A est inversible et son inverse est la matrice $A^{-1}=\frac{1}{4}(A^2-I)$

$$A^{-1}=\frac{1}{4}(A^2-I)=\frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix}3&-4&2\\1&-1&-1\\1&2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-4&2\\1&-2&-1\\1&2&-1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-4&2\\1&-2&-1\\1&2&-1\end{pmatrix}$$

On peut écrire: $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}.$

Verification:

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-4&2\\1&-2&-1\\1&2&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\1&-2&0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$$

Corrigé 3

1) Pour calculer la matrice inverse de A, on a :

$\det A=\begin{vmatrix}3&-10\\-2&8\end{vmatrix}=3\times8-(-2)\times(-10)=4$.

Comme $\det A\neq0$ alors A est inversible et son inverse est

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}8&10\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

2) On peut remarquer que la matrice associée aux quatre systèmes est A .
D'où la déduction de la résolution de ces systèmes.

On considère la matrice colonne $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

a) Soit $B_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$. Résoudre le système $\begin{cases} 3x - 10y = 4 \\ -2x + 8y = 7 \end{cases}$ équivaut à résoudre l'équation $AX = B_2$.

La solution de ce système est

$$X = A^{-1} \times B_1 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 4 + \frac{5}{2}\times 7 \\ \frac{1}{2}\times 4 + \frac{3}{4}\times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{51}{2} \\ \frac{29}{4} \end{pmatrix}.$$

La solution de ce système est donc $\begin{cases} x = \frac{51}{2} \\ y = \frac{29}{4} \end{cases}$

b) Soit $B_2 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ -0.4 \end{pmatrix}$. Résoudre le système $\begin{cases} 3x - 10y = 1.5 \\ -2x + 8y = -0.4 \end{cases}$ équivaut à résoudre l'équation $AX = B_2$.

La solution de ce système est

$$X = A^{-1} \times B_2 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1.5 \\ -0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 1.5 + \frac{5}{2}\times(-0.4) \\ \frac{1}{2}\times 1.5 + \frac{3}{4}\times(-0.4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.45 \end{pmatrix}.$$

La solution de ce système est donc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0.45 \end{cases}$

c) Soit $B_3 = \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix}$. Résoudre le système $\begin{cases} 3x - 10y = 15 \\ -2x + 8y = -5 \end{cases}$ équivaut à résoudre l'équation $AX = B_3$.

La solution de ce système est

$$X = A^{-1} \times B_3 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 15 + \frac{5}{2}\times(-5) \\ \frac{1}{2}\times 15 + \frac{3}{4}\times(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.5 \\ 3.75 \end{pmatrix}.$$

La solution de ce système est donc $\begin{cases} x = 17.5 \\ y = 3.75 \end{cases}$

d) Soit $B_3 = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 0.5 \end{pmatrix}$. Résoudre le système $\begin{cases} 3x - 10y = 1.25 \\ -2x + 8y = 0.5 \end{cases}$ équivaut à résoudre l'équation $AX = B_4$.

La solution de ce système est

$$X = A^{-1} \times B_3 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1.25 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 1.25 + \frac{5}{2}\times 0.5 \\ \frac{1}{2}\times 1.25 + \frac{3}{4}\times 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La solution de ce système est donc $\begin{cases} x = 3.75 \\ y = 1 \end{cases}$

Corrigé 4

On a :

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} + 2\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7.$$

Le système admet une solution unique.

$$\det_X = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -6 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -7 \end{vmatrix} = -3\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} + 6\times\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \Rightarrow$$

$$x = \frac{\det_x}{\det(S)} = \frac{-14}{7} = -2$$

$$\det_Y = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -6 & 1 \\ 3 & -2 & -7 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 35 \Rightarrow$$

$$y = \frac{\det_y}{\det(S)} = \frac{35}{7} = 5$$

$$\det_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -6 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = 21 \Rightarrow$$

$z = \dfrac{\det_z}{\det(S)} = \dfrac{21}{7} = 3$. La solution du système (S) est le triplet $(-2;5;3)$.

Corrigé 5

1) On a

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=A+2I_3.$$

Montrons par récurrence que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=\frac{2^n-(-1)^n}{3}A+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}I_3$$

On a : $A^0=I_3=0\times A+1\times I_3=\frac{2^0-(-1)^0}{3}A+\frac{2^0+2(-1)^0}{3}I_3$**, donc la proposition est vraie pour** $n=0$**.**

Si on suppose que $A^n=\frac{2^n-(-1)^n}{3}A+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}I_3$ **alors**

$$\begin{aligned}A^{n+1}=A^n\times A&=\left(\frac{2^n-(-1)^n}{3}A+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}I_3\right)\times A=\frac{2^n-(-1)^n}{3}A^2+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}A\\&=\frac{2^n-(-1)^n}{3}\left(\frac{2^2-(-1)^2}{3}A+\frac{2^2+2(-1)^2}{3}I_3\right)+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}A\\&=\frac{2^n-(-1)^n}{3}(A+2I_3)+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}A\\&=\left(\frac{2^n-(-1)^n}{3}+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}\right)A+\frac{2^n-(-1)^n}{3}.2I_3\\&=\frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3}A+\frac{2^{n+1}+2(-1)^{n+1}}{3}I_3\end{aligned}$$

Ce qui prouve que la propriété est vraie pour $n+1$**.**

Conclusion :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=\frac{2^n-(-1)^n}{3}A+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}I_3$$

2° a) $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ d'où $A=M-I_3$

Par conséquence on a : $M=A+I_3$. Comme la matrice identité permutent avec toutes les autres matrices, on a donc :

$$M^k=\left(A+I_3\right)^k=\sum_{p=0}^{k}C_k^pA^pI_3^{k-p}=\sum_{p=0}^{k}C_k^pA^p.$$

D'après la question précédente on a : $A^p=\dfrac{2^p-(-1)^p}{3}A+\dfrac{2^p+2(-1)^p}{3}I_3$ **ce qui entraine que**

$$M^k=\sum_{p=0}^{k}C_k^p\left(\frac{2^p-(-1)^p}{3}A+\frac{2^p+2(-1)^p}{3}I_3\right)=$$
$$\frac{1}{3}A\left(\sum_{p=0}^{k}C_k^p2^p-\sum_{p=0}^{k}C_k^p(-1)^p\right)+\frac{1}{3}I_3\left(\sum_{p=0}^{k}C_k^p2^p+2\sum_{p=0}^{k}C_k^p(-1)^p\right)$$

Or on a $\sum_{p=0}^{k}C_k^p2^p=(1+2)^k=3^k$; $\sum_{p=0}^{k}C_k^p(-1)^p=(1-1)^k=0$.

D'où $M^k=\dfrac{1}{3}A\left(3^k-0\right)+\dfrac{1}{3}I_3\left(3^k+2\times0\right)=3^{k-1}\left(A+I_3\right)=3^{k-1}.M$

b) Puisque $A=M-I_3$, on a

$$A^n=\left(M-I_3\right)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kM^kI_3^{n-k}\Leftrightarrow$$

$$A^n=(-1)^nI_3+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kM^kI_3^{n-k}\Leftrightarrow$$

$$A^n=(-1)^nI_3+\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k3^{k-1}\right)M.$$

En écrivant 3^{k-1} sous la forme $\frac{1}{3}.3^k$, On trouve

$$A^n=(-1)^nI_3+\frac{1}{3}M\sum_{k=1}^{n}C_n^k3^k(-1)^{n-k}\Leftrightarrow$$

$$A^n=(-1)^nI_3+\frac{1}{3}MI_3+\frac{1}{3}M\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k3^{k-1}(-1)^{n-k}-(-1)^n\right)\Leftrightarrow$$

$$A^n=(-1)^nI_3+\frac{1}{3}M\left[(3-1)^n-(-1)^n\right].$$

Par conséquence on a : $A^n = (-1)^n I_3 + \frac{2^n - (-1)^n}{3} M$

3. a) On a :

$$A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} ;$$

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\text{et } A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

b) $$AP = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&-1&2\\1&0&2\\0&1&2\end{pmatrix}$$

en plus on a

$$P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&-1&2\\1&0&2\\0&1&2\end{pmatrix}.$$

On en déduit alors que $AP = P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

Si on pose $B = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, cette dernière relation s'écrit : $AP = PB$.

Donc $A^2P = A(AP) = A(PB) = (AP)B = (PB)B = PB^2$

On montre facilement par récurrence que $A^n.P = P.B^n$ **(1).**

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Elle est évidement vraie pour $n = 1$ **et on vient de le prouver pour** $n = 2$ **.**

Si on suppose que $B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ **alors**

$$B^{n+1} = B^n.B = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Ce qui achève la démonstration.

La relation (1) nous donne alors que :

$$A^n.P = P.B^n = P.\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = P.\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

V. EXERCICES DE SYNTHESE

Exercice 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & 10 & -6 \end{pmatrix}$

1) Déterminer la matrice M telle que $A = M - I_3$.

2) Vérifier que M^2 est la matrice nulle. En déduire A^2.

3) Déduire A^{-1}

4) Résoudre le système $\begin{cases} -2x - 2y + z = -7 \\ 3x + 5y - 3z = 14 \\ 5x + 10y - 6z = 26 \end{cases}$

Exercice 2

On considère les matrices

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $P \times Q$ et $Q \times P$ puis en déduire que les matrices P et Q sont inverses l'une de l'autre.

2) Vérifier que $Q \times A \times P = B$ et montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a

$B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix}$.

3) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $A^n = P \times B^n \times Q$ et en déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 3

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} -27 & 12 & -6 & -3 \\ -25 & 0 & -50 & -75 \\ -1 & 6 & 22 & -39 \\ 20 & 30 & 10 & 30 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le produit MB .

2) Sachant que $AM = \lambda I_4$, c'est-à-dire que $AM = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$; calculer la valeur du nombre réel λ .

3) En déduire la matrice inverse de A.

4) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -5x + y + 2t = 3 \\ 2x + y + z + 4t = 15 \\ x - 2y + 3z - t = -9 \\ x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

Exercice 4

On considère les matrices : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer $M^2 = M \times M$. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$

2. a) Vérifier que : $M^3 = M^2 + 8M + 6I$

b) Exprimer M^4 sous la forme : $M^4 = \alpha M^2 + \beta M + \gamma I$ où α, β et γ sont des entiers naturels à déterminer.

3) En déduire que M est inversible et déterminer M^{-1} .

4) On cherche à déterminer trois entiers a, b et c tels que la courbe de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ passe par les points $A(1,1), B(-1,-1)$ et $C(2,5)$.

a) Montrer que ça revient à trouver les entiers a, b et c tels que :

$$M \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

b) Déterminer alors ces entiers.

Exercice 5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_2$ où I_2 est la matrice identité d'ordre 2 .

2) En déduire une expression de A^3 sous la forme $\alpha A + \beta I_2$ où α et β des réels.

3) On considère les suites numériques (r_n) et (s_n) définies par

$$\begin{cases} r_0 = 0 \text{ et } s_0 = 1 \\ r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2r_n \end{cases}.$$

a) Calculer r_1 , s_1 ; r_2 , s_2; r_3 et s_3.

b) Vérifier que $A^2 = r_2A + s_2I_2$ et $A^3 = r_3A + s_3I_2$.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n , $A^n = r_nA + s_nI_2$. (On admet que $A^0 = I_2$)

4) Démontrer que la suite (k_n) définie par $k_n = r_n - s_n$ est géométrique de raison -1 .

En déduire l'expression de k_n en fonction de n.

5) On admet que la suite (t_n) définie par $t_n = r_n + \frac{(-1)^n}{3}$ est géométrique de raison2.

a) Déduire l'expression de t_n en fonction de n.

b)Déduire des questions précédentes, une expression explicite de r_n et s_n en fonction de n

c)En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression des coefficients de la matrice A^n .

Exercice 6 (traduit)

Deux ouvriers accomplissent un travail. Si les deux ouvriers travaillent simultanément ils peuvent achever ce travail en 12h. Si chacun fait la moitié du travail seul le travail se termine en 25h.	يقوم عاملان بإنجاز عمل معين بحيث إذا عملا معا في آن واحد يمكنهما إكماله في 12 ساعة. أما إذا قام كل واحد منهما بإنجاز نصف العمل فإن العمل يكتمل خلال 25 ساعة.
a) Quel est le temps nécessaire à chaque ouvrier pour accomplir le travail seul ?	a) ما هو الزمن اللازم لكل عامل لكي يكمل العمل وحده؟
b) Si le travail est rémunéré à 15000 UM et si les deux ouvriers travaillent simultanément et sont payés au prorata de leurs efforts, quelle serait le montant mérité par chacun ?	b) إذا كان العمل مقابل 15000 أوقية وكان العاملان يعملان في آن واحد وكانت أجرة كل منهما حسب جهده، فما هو المبلغ المستحق لكل واحد منهما؟

CHAPITRE 2 NOMBRES COMPLEXES

I. RESUME DE COURS

Le nombre i

Il existe dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ un élément n'appartenant pas à $\mathbb{R}$, noté i tel que $i^2 = -1$.

Le nombre i est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $x^2 + 1 = 0$.

On a alors : $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $\frac{1}{i} = -i$.

Opérations dans $\mathbb{C}$

Soient a , b , a' et b' des réels. $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$.

1) $(a + ib = a' + ib') \Leftrightarrow (a = a'; b = b')$	4) $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$
2) $z + z' = a + a' + i(b + b')$	5) $(a - ib)^2 = a^2 - b^2 - 2abi$
3) $zz' = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$	6) $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$
7) $a + ib \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$	

Définitions et vocabulaire

Soient a et b des réels et $z = a + ib$.

Forme algébrique de z	L'écriture $z = a + ib$
Partie réelle de z	$\text{Re}(z) = a$
Partie imaginaire de z	$\text{Im}(z) = b$
Le conjugué de z	$\overline{z} = a - ib$
Le module de z	$\lvert z\rvert = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
Argument de z où $z \neq 0$. On note $\arg z$	$\arg z = \theta \Rightarrow \left(\cos\theta = \frac{a}{\lvert z\rvert}, \quad \sin\theta = \frac{b}{\lvert z\rvert}\right)$
Forme trigonométrique de z avec $(z \neq 0; \arg z = \theta)$	$z = \lvert z\rvert(\cos\theta + i\sin\theta)$
Forme exponentielle de z avec $(z \neq 0; \arg z = \theta)$	$z = \lvert z\rvert e^{i\theta}$

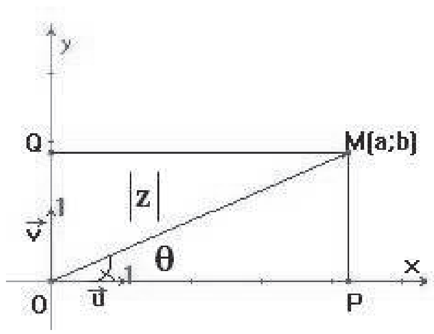
Représentation géométrique des nombres complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soient a et b des réels.

A tout nombre complexe $z = a + ib$, on peut associer le point $M(a;b)$ du plan.

Le plan est appelé le plan complexe.

Le point image du nombre complexe $z = a + ib$	$M(a;b)$
Le vecteur image du nombre complexe $z = a + ib$	$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
L'affixe du point $M(a;b)$ et du vecteur $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	**Le nombre complexe $z = a + ib$**
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$	**Le nombre $z_B - z_A$**
L'affixe du milieu du segment $[AB]$	**Le nombre $\frac{z_A + z_B}{2}$**
La distance AB	$AB = \lvert z_B - z_A \rvert$



Conjugué d'un nombre complexe

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et z , z_1 , z_2 des nombres complexes.

1) $z = a + ib \Rightarrow \overline{z} = a - ib$	7) $\overline{\overline{z}} = z$
2) $z = a + ib \Rightarrow z\overline{z} = a^2 + b^2$	8) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3) z est réel $\Leftrightarrow \overline{z} = z$	9) $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
4) z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$	10) $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n, \quad n \in \mathbb{Z}$
5) $Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$	11) $\overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)} = \frac{1}{\overline{z_1}}, \quad z_1 \neq 0$
6) $Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$	12) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad z_2 \neq 0$

Module d'un nombre complexe

Soient $a,b \in IR$ et z , z_1 , z_2 des nombres complexes.

1) $\lvert z\rvert = \sqrt{z\bar{z}}$	7) $\left\lvert \frac{1}{z}\right\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}$, $z \neq 0$
2) $z = a + ib \Rightarrow \lvert z\rvert = \sqrt{a^2+b^2}$	8) $\left\lvert \frac{z_1}{z_2}\right\rvert = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$, $z_2 \neq 0$
3) $\lvert z\rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$	9) $\lvert z_1 + z_2\rvert \leq \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$
4) $\lvert \bar{z}\rvert = \lvert -z\rvert = \lvert z\rvert$	**(L'inégalité triangulaire)**
5) $\lvert z_1 z_2\rvert = \lvert z_1\rvert\lvert z_2\rvert$	10) $AB = \lvert z_B - z_A\rvert$
6) $\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$, $n \in Z$	

Argument d'un nombre complexe

Soient z , z_1 , z_2 des nombres complexes non nuls.

1) $\arg \bar{z} = \arg \frac{1}{z} = -\arg z$	**5) z est réel** $\Leftrightarrow \arg z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
2) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$	**6) z est imaginaire pur** $\Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
3) $\arg z^n = n \arg z, \quad n \in Z$	**Soient** A,B,C,D **des points tels que** $AB \neq 0, CD \neq 0$.
4) $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$	7) $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) \quad [2\pi]$
	8) $\arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \quad [2\pi]$

Notation exponentielle e^{ix}

Soient x et y des réels.

1) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$	7) $e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}$
2) $\frac{1}{e^{ix}} = e^{-ix} = \cos x - i \sin x$	8) $\frac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)}$
3) $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$	9) $\left(e^{ix}\right)^n = e^{inx}, \quad n \in Z$
4) $e^{i\pi} = -1$	10) $\lvert e^{ix}\rvert = 1$
5) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$	**11) Si** $z = \lambda e^{ix}$ avec $\lambda \in IR^*$ **, alors**
6) $e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$	$\begin{cases} \lambda > 0 \Rightarrow \arg z = x \\ \lambda < 0 \Rightarrow \arg z = \pi + x \end{cases}$

Formules d'Euler – Formule de Moivre

Formules d'Euler	**Soit $x \in IR$** $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$; $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
Formule de Moivre	**Soit $x \in IR$ et $n \in Z$;** $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$

Les formules d'Euler permettent dans certains cas de transformer un polynôme en $\cos x$ et $\sin x$ en une somme de cosinus et de sinus des multiples de x (linéarisation).

La formule de Moivre permet d'exprimer $\cos nx$ et $\sin nx$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ sous forme d'un polynôme en $\cos x$ et $\sin x$.

Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

1. Cas particulier : équation à coefficients réels

$az^2 + bz + c = 0$ **où** $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$.

❖ **Le discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$	**deux solutions réelles distinctes**	$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ **et** $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	**une solution réelle double**	$z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$
$\Delta < 0$	**deux solutions complexes conjuguées :**	$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$ **et** $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$

2. Equation à coefficients complexes $a, b, c \in \mathbb{C}$; $a \neq 0$.

❖ **Le discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$

❖ **Les racines carrées du discriminant sont les nombres complexes** $\delta = x + iy$ **et** $-\delta = -x - iy$ **tel que** $\delta^2 = \Delta$ **avec** $x; y \in IR$:

$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \lvert\Delta\rvert \\ x^2 - y^2 = Re(\Delta) \\ 2xy = Im(\Delta) \end{cases}$	**Les solutions de l'équation** $az^2 + bz + c = 0$: $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ **et** $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$

3. Somme et produit des solutions:

Somme : $s = z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$; **Produit:** $p = z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $Z \in \mathbb{C}$, $(Z \neq 0)$.

- **Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ sont les nombres $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k \in \{0,1,\cdots,n-1\}$. Ces solutions sont appelées racines n-ièmes de l'unité (de 1).**
- **Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = Z$ sont les nombres $z_k = \sqrt[n]{|Z|}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ où $k \in \{0,1,\cdots,n-1\}$; $\theta = \arg Z$. Ces solutions sont appelées racines n-ièmes du nombre complexe non nul Z.**
- **Tout nombre Z non nul admet n racines n-ièmes distincts deux à deux de même modules.**
- **On obtient les n racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul en multipliant l'une quelconque d'entre elles par les n racines n-ièmes de l'unité:**

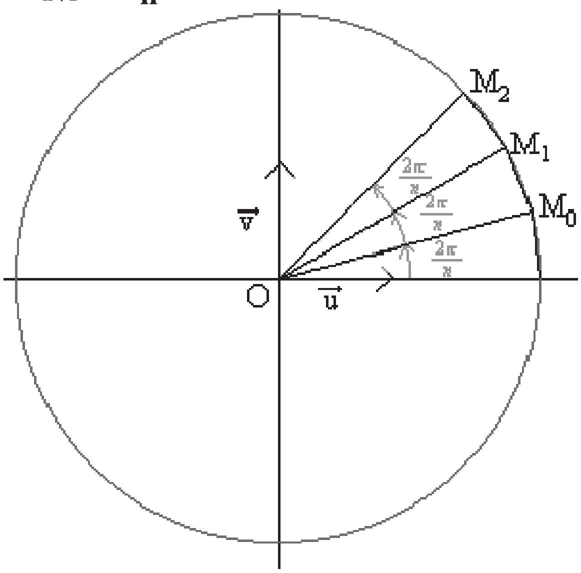
Si $z_0^n = Z$, alors $z_k = z_0 e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k \in \{0,1,\cdots,n-1\}$.

- **La somme des n racines n-ièmes d'un nombre complexe Z $(Z \neq 0)$ est nulle.**
- **Dans le plan complexe, les images des n racines n-ièmes d'un nombre complexe sont situées sur le même cercle de centre O et de rayon $r = \sqrt[n]{|Z|}$.**

Ces points sont les sommets d'un polygone régulier.

- **Si M_k est l'image du racine n-ième z_k de Z avec $\arg Z = \theta$, alors :**

$OM_k = \sqrt[n]{|Z|}$ et $(\overrightarrow{OM_k};\overrightarrow{OM_{k+1}}) = \frac{2\pi}{n}$.



Applications géométriques des nombres complexes

1) Nature d'un triangle

Soit ABC un triangle. On pose $Z=\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$

Nature du triangle ABC	Relation caractéristique
Equilatéral	$Z=e^{i\frac{\pi}{3}}$ **ou** $Z=e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Rectangle en A	Z **est un imaginaire pur**
Rectangle isocèle en A	$Z=i$ **ou** $Z=-i$
Isocèle en A	$\lvert Z\rvert=1$

2) Alignement et orthogonalité

Soient A,B,C,D des points du plan.

Relation complexe	Interprétation géométrique
$\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ **est réel**	**A,B,C sont alignés**$(A\neq B, A\neq C)$
$\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$ **est réel**	**Les droites (AB) et (CD) sont parallèles,** $(A\neq B; C\neq D)$(
$\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}=\pm i$	$AB=CD$ **et** $(AB)\perp(CD)$ **où** $(A\neq B, C\neq D)$
$\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$ **est imaginaire pur**	$(AB)\perp(CD)$ **où** $(A\neq B, C\neq D)$
$\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}=\lambda e^{i\theta};\lambda\in\mathbb{R}_+^*$	$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=\theta\ [2\pi]$ **et** $CD=\lambda AB$
$\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\times\dfrac{z_B-z_D}{z_C-z_D}$ **est réel**	**A,B,C,D sont alignés ou cocycliques**

3) Lieux géométriques simples

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Considérons un point variable M d'affixe z. Le point M' d'affixe z'. Les points A,B,Ω sont fixes et d'affixes respectives a,b,ω.

Relation complexe	Ensemble des points M
$\lvert z-\omega\rvert = r$, $r>0$	Cercle de centre Ω et de rayon r
$\lvert z-a\rvert = \lvert z-b\rvert$	Médiatrice de $[AB]$
$\arg\frac{z-a}{z-b}=\frac{\pi}{2}\quad[\pi]$	Cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B
Le nombre $\frac{z-a}{z-b}$ est imaginaire pur	Cercle de diamètre $[AB]$ privé de B
$\arg\frac{z-a}{z-b}=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$	Demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B
$\arg\frac{z-a}{z-b}=0\quad[\pi]$	Droite (AB) privée de A et B
Le nombre $\frac{z-a}{z-b}$ est réel	Droite (AB) privée de B
$\left\lvert\frac{z-a}{z-b}\right\rvert=k$, $k>0;k\neq 1$	Cercle centré sur (AB) de diamètre [IJ] tel que $I=\text{bar}\{(A,1);(B,k)\};J=\text{bar}\{(A,1);(B,-k)\}$
$\arg\frac{z-a}{z-b}=\alpha\quad[\pi]$, $\alpha\neq 0\quad[\pi]$	Cercle passant par A et B privé de A et B
$\arg\frac{z-a}{z-b}=\alpha\quad[2\pi]$, $\alpha\neq 0\quad[\pi]$	Arc capable d'extrémités A et B exclues

Nombres complexes et transformations

1.Expressions complexes des transformations usuelles

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Considérons la transformation qui associe à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe z'.

Transformation	Ecriture complexe
Translation de vecteur d'affixe z_0	$z' = z + z_0$
Homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k	$z' - \omega = k(z - \omega)$
Symétrie de centre Ω d'affixe ω	$z' - \omega = -(z - \omega)$
Rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle de mesure θ	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$
Symétrie d'axe x'x	$z' = \bar{z}$
Symétrie d'axe y'y	$z' = -\bar{z}$
Similitude directe de centre Ω d'affixe ω, de rapport k , $k \in \mathbb{R}^{\bullet}$ et d'angle de mesure θ .	$z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$

2) Etude de l'expression $z' = az + b$ où $a,b \in \mathbb{C}; a \neq 0$

Soient f la transformation qui associe à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = az + b$.

		Transformation
$a = 1$		**Translation de vecteur d'affixe b**
$a \neq 1$		**f admet un unique point invariant Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$**
	$a \in IR^*$	**Homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport a**
	$\lvert a \rvert = 1$	**Rotation de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ et d'angle de mesure $\theta = \arg a$**
	$a = -1$	**Symétrie centrale de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{2}$**
	Cas général	**Similitude directe de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$, de rapport $k = \lvert a \rvert$ et d'angle de mesure $\theta = \arg a$**

II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

QCM 1

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

Ecrire le numéro de chaque question et donner la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses A	B	C	D
1	Si $\frac{\pi}{2}$ est un argument de z, alors	$\bar{z} = \frac{1}{z}$	$\bar{z} = -z$	$z\bar{z} = i$	$\bar{z} = z$
2	Si $z = -1 + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, alors la forme exponentielle de z est :	$e^{i\frac{\pi}{2}}$	$\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$	$i\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$	$\left(-1+\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$
3	Si $z + \lvert z \rvert = 2 + 4i$, alors	$z = -3+4i$	$z = -3-4i$	$z = 4i$	$z = -4+3i$
4	Si $z = (1-i)e^{i\frac{\pi}{6}}$, alors	$\arg z = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$	$\arg z = \pi + \frac{\pi}{6}$	$\arg z = \frac{\pi}{6}$	$\arg z = -\frac{\pi}{12}$
5	Si $z = 4 + (1-5i)i$, alors la partie réelle de z est	9	8	4	-1
6	Si $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_2 = -2\, e^{i\frac{\pi}{2}}$, alors le rapport $\frac{z_2}{z_1}$ est égal à	$\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$	$\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$	$-1-i$	$1-i$

QCM 2

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner la réponse qui lui correspond.

	Questions	Réponses A	B	C	D
1	La forme algébrique de $\dfrac{2+5i}{3-2i}$ est	$2+5i$	$\dfrac{-4}{13}+\dfrac{19}{13}i$	$\dfrac{16}{13}+\dfrac{19}{13}i$	$\dfrac{6}{5}+2i$
2	Le module de $\dfrac{\left(2-2i\sqrt{3}\right)^2}{(1+i)(2i)^3}$ est	$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$	$\dfrac{4}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{8}$	$\sqrt{2}$
3	Si $\dfrac{\pi}{4}$ est un argument de z, alors le nombre $z^3e^{i\frac{\pi}{4}}$ est	réel positif	imaginaire pur	réel négatif	d'argument $\dfrac{\pi}{4}$
4	Si $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, alors le triangle *ABC* est :	isocèle et non rectangle	équilatéral	rectangle et isocèle	rectangle et non isocèle
5	L'ensemble des points *M* d'affixe *z* tels que $\left\lvert\dfrac{z-1+2i}{2+3i}\right\rvert=\sqrt{13}$ est :	un cercle	la médiatrice d'un segment	une droite privée d'un point	un cercle privé de deux points
6	Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $\theta\in\mathbb{R}^*$. La forme algébrique de $\left(e^{i\theta}\right)^n$ est :	$\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$	$\cos\left(\theta^n\right)+i\sin\left(\theta^n\right)$	$n\cos\theta+in\sin\theta$	$e^{in\theta}$

III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

Ecrire sous forme algébrique chacun des nombres :

$z_1 = (3+2i)(2-3i), \quad z_2 = \dfrac{1+5i}{5-i},$

$z_3 = 2-3i+\dfrac{2i+4}{2+3i}, \quad z_4 = (1+2i)(3-5i)(1-2i),$

$z_5 = \dfrac{3-5i}{5+i}+\dfrac{4-3i}{3+i}, \quad z_6 = \dfrac{2+5i}{4-i}+\dfrac{4+i}{2-5i},$

$z_7 = (1-2i)^3, \quad z_8 = \dfrac{2+3i}{3i}+\dfrac{5i}{3-2i}$

Exercice 2

On pose $f(z) = (3-2i)z^2+(5-i)z+2+5i$

Calculer et donner la forme algébrique de chacun des nombres :
$f(i), \quad f(3+2i), \quad f(1+i), \quad f(5-i)$

Exercice 3

On pose $f(z) = (5+i)z+(1+2i)\bar{z}+4-3i$ **où** $\bar{z}$ **désigne le conjugué de z**

Calculer et donner la forme algébrique de chacun des nombres :
$f(5-i), \quad f(1+2i), \quad f(3+4i), \quad f(5+3i)$

Exercice 4

Soit $f(z) = \dfrac{(1-2i)z+2+3i}{(3-2i)z-2-5i}$ **où z est un nombre complexe.**

1) Calculer et donner la forme algébrique de chacun des nombres :

$f(5+i), \quad f(2i), \quad f(3+2i), \quad f(1-i)$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations

$f(z) = 1, \qquad f(z) = \dfrac{3}{2}.$

Ecrire les solutions sous forme algébrique.

Exercice 5

Soit

$$Z_1 = (1+5i)^{2020} + (1-5i)^{2020}$$
$$Z_2 = (1+5i)^{2020} - (1-5i)^{2020}$$

Montrer que Z_1 est réel et Z_2 imaginaire pur.

Exercice 6

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivant:

$$z_1 = 4-3i, \quad z_2 = (3+i)(2+5i),$$
$$z_3 = \frac{2+4i}{2+3i}, \quad z_4 = (1+2i)(3-5i)(1-2i),$$
$$z_5 = \frac{(3-5i)(5+2i)^3}{(2+5i)^4}$$

Exercice 7

Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants:

$$z_1 = 4+4i, \quad z_2 = 3+i\sqrt{3}, \quad z_3 = \frac{4+4i}{3+i\sqrt{3}},$$
$$z_4 = (4+4i)(3+i\sqrt{3}), \quad z_5 = \frac{(3-i\sqrt{3})(4+4i)^3}{(3+i\sqrt{3})^4}.$$

Exercice 8

En utilisant les résultats de l'exercice précédent, écrire chacun des nombres suivants sous forme trigonométrique et exponentielle.

$$z_1 = 4+4i, \quad z_2 = 3+i\sqrt{3}, \quad z_3 = \frac{4+4i}{3+i\sqrt{3}},$$
$$z_4 = (4+4i)(3+i\sqrt{3}), \quad z_5 = \frac{(3-i\sqrt{3})(4+4i)^3}{(3+i\sqrt{3})^4}.$$

Exercice 9

Soit $z_1 = 4+4i,\ z_2 = 3+i\sqrt{3}$ **,** $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2},\ z_4 = z_1 z_2$

1) Ecrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique.

2.a) Donner les formes trigonométrique et algébrique de z_3 .

b) En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$.

3.a) Donner les formes trigonométrique et algébrique de z_4 **.**

b) En déduire $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Exercice 10 (Bac)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1.a)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation E_1 : $z^2+2z+10=0$

On note z_1 et z_2 ses solutions avec $\operatorname{Im} z_2 \leq 0$ **.**

b)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation E_2 **:** $z^2-4z+20=0$

On note z_3 et z_4 ses solutions avec $\operatorname{Im} z_4 \leq 0$ **.**

2) On considère les points A, B, K , L et E d'affixes respectives $z_A = z_1$ **,** $z_B = z_2$ **,** $z_K = z_3$ **,** $z_L = z_4$ **et** $z_E = z_3 - 2i$ **.**

a) Placer les points A , B, K, L **, et** E **dans le repère** $(O;\vec{u},\vec{v})$**.**

b) Ecrire $z_E = z_3 - 2i$ **sous forme algébrique et trigonométrique.**

c) Déterminer la nature du quadrilatère ABLE **et du triangle** AKE **.**

3) Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq -1+3i$ **on pose :** $f(z) = \frac{z-2-4i}{z+1-3i}$**.**

Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles des points M **du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :**

Γ_1 **tel que** $|f(z)|=1$**.**

Γ_2 **tel que** $|f(z)-1|=\sqrt{10}$ **.**

Exercice 11

1. On pose $P(z)=z^3-5z^2+12z-8$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(1)$.

b) Déterminer a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$ on a: $P(z)=(z-1)(z^2+az+b)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $P(z)=0$.

2. On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_1 = 1$, $z_2 = 2+2i$ et $z_3 = 2-2i$.

a) Calculer le module et un argument de chacun des nombres z_1, z_2 et z_3.

b) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

3.a) Ecrire le nombre $\frac{z_2}{z_3}$ sous forme algébrique. En déduire la nature du triangle OBC.

b) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que $\left|\frac{z-1}{z-2-2i}\right| = 1$.

Exercice 12

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 3 cm).

On désigne par A ; B et C les points d'affixes respectives 1+5i ;-1+i et 3i.

Soit f l'application qui à tout point M du plan P, distinct de C, d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{3iz+6+4i}{z-3i}$. On note $f(M)=M'$.

1) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z dans les cas suivants :

a) $|z'| = 3$

b) $|z' - 3i| = 3$

c) $z' \in \mathbb{R}$

d) $\arg z' = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

e) $\arg z' = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$.

2) Montrer que les points A ;B ;M et M' sont cocycliques ou alignés .

Exercice 13

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On pose : $P(z)=z^3-(11+6i)z^2+(28+38i)z-12-60i$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(3)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$P(z)=(z-3)(z^2+az+b).$$

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

c) Soient les points A , B et C images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $\mathrm{Im}(z_A)<\mathrm{Im}(z_B)<\mathrm{Im}(z_C)$. Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$ et placer les points A ,B ,C et G.

2) Pour tout réel k différent de 2, on définit l'application f_k du plan P dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+(3-k)\overrightarrow{MC}.$$

a) Pour quelles valeurs de k , l'application f_k est une translation? Déterminer alors son vecteur.

b) On suppose que $k\in\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$. Montrer que f_k admet un unique point invariant Ω_k . Reconnaître alors f_k et donner ses éléments caractéristiques en fonction de k.

c) Déterminer et construire le lieu géométrique des points Ω_k lorsque k décrit $\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$. Reconnaître Ω_1 .

d) Pour $k=1$; déterminer et construire le lieu géométrique du point R centre de gravité du triangle AMM' lorsque M décrit le cercle Γ de centre G passant par C.

3) Pour tout point M du plan on pose $\varphi(M)=2MA^2-2MB^2+2MC^2$ et Γ_m l'ensemble des points M tels que $\varphi(M)=k$, où k est un réel.

a) Discuter suivant les valeurs de k, la nature de Γ_m .

b) Déterminer et construire Γ_m pour $k=10$

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante sachant qu'elle admet une racine réelle :

$$z^3-(6+3i)z^2+(21+19i)z-26(1+i)=0$$

Exercice 15 (Bac)

Dans $\mathbb{C}$ on donne : $a=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}$

1) Calculer a^2. Donner le module et un argument de a^2.

2) En déduire le module et un argument de a.

3) En déduire $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$.

4) Donner les entiers naturels n tels que a^n soit réel.

Exercice 16

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.) On pose :

$P(z) = z^3 - (11+6i)z^2 + (28+38i)z - 12 - 60i$ où z est un nombre complexe.

1) Calculer $P(3)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$P(z) = (z-3)(z^2+az+b)$.

2) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

Exercice 17

Pour tout nombre complexe z on pose :
$P(z) = z^3 - (1+2\cos\theta)z^2 + (1+2\cos\theta)z - 1$ où $\theta \in [0;2\pi[$.

Calculer $P(1)$ puis déterminer les solutions z_0, z_1 et z_2 de l'équation $P(z)=0$ sachant que z_0 est réel, et $\operatorname{Im} z_1 \geq 0$ si $\sin\theta \geq 0$.

Exercice 18

Dans le plan orienté, on considère deux triangles ABC et DEF équilatéraux directs. Les points G et H tels que EDBG et CDFH soient des parallélogrammes. Soient a,b,c,d,e,f,g et h les affixes respectives des points A,B,C,D,E,F,G et H.

1) Exprimer $c-a$ en fonction de $b-a$, puis $f-d$ en fonction de $e-d$.

2) Exprimer g en fonction de b,d et e ; puis h en fonction de c,d et f.

3) Démontrer que le triangle AGH est équilatéral.

Exercice 19

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(1+4i)z^2-(9-i)z-6+18i$.

1.a) Calculer $P(3i)$ et déterminer les nombres a et b tels que $\forall z\in\mathbb{C}$:
$P(z)=(z-3i)(z^2+az+b)$

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$.

c) On considère les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z)=0$ tels que $|z_C|\le|z_B|\le|z_A|$. Placer les points A, B et C et déterminer la nature du triangle ABC.

d) Soit $A'=\text{bar}\{(A;-5),(B;6),(C;12)\}$. Vérifier que l'affixe de A' est $z_{A'}=-3+i$. Placer A'.

2° On considère l'ellipse Γ de sommets A, A' et B.

a) Déterminer le centre I et l'excentricité de Γ.

b) Ecrire une équation cartésienne de Γ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

c) Préciser les points d'intersection de Γ avec l'axe (Ox).

d) Déterminer les foyers et les directrices de Γ puis construire Γ.

Exercice 20

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(7+3i)z^2+(12+15i)z-4-18i$.

1.a) Calculer $P(2)$ et déterminer les nombres a et b tels que $\forall z\in\mathbb{C}$:
$P(z)=(z-2)(z^2+az+b)$

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$.

c) On considère les points A, B et D images des solutions de l'équation $P(z)=0$ tels que $\text{Im}(z_A)\le\text{Im}(z_B)\le\text{Im}(z_D)$. Placer les points A, B et D et déterminer la nature du triangle ABD.

2.a) Déterminer le barycentre du système $\{(A;9),(B;-6),(C;2)\}$, où C est le symétrique de A par rapport à (BD).

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que
$9MA^2-6MB^2+2MC^2=-10$.

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que
$4MA^2-6MB^2+2MC^2=-10$

d) Déterminer et construire l'ensemble Γ_3 des points M du plan tels que
$\left(9\overrightarrow{MA}-6\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=10$.

3° Soit $S^0=id$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $S^{n+1}=S\circ S^n$ où S est la similitude directe qui transforme A en B et B en D.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S^{2018}

b) Justifier que $S^{2020^{2020}}$ est une homothétie de rapport positif.

IV. CORRIGES DES EXERCICES

Corrigé 1

$$\begin{aligned} z_1 &= (3+2i)(2-3i) \\ &= 6-9i+4i+6i^2 \\ &= 6-9i+4i-6 \\ &= 12-5i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{1+5i}{5-i} \\ &= \frac{(1+5i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} \end{aligned}$$

$$z_2 \quad = \frac{5+i+25i-5}{25+1} \quad = \frac{26i}{26} \quad = i.$$

$$\begin{aligned} z_3 &= 2-3i+\frac{2i+4}{2+3i} \quad = \quad \frac{(2-3i)(2+3i)+2i+4}{2+3i} \\ &= \frac{4+9+2i+4}{2+3i} \quad = \frac{17+2i}{2+3i} \\ &= \frac{(17+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} \quad = \frac{34-51i+4i+6}{4+9} \end{aligned}$$

$$z_3 = \frac{40}{13}-\frac{47}{13}i.$$

$$\begin{aligned} z_4 &= (1+2i)(3-5i)(1-2i) \quad = (1+2i)(1-2i)(3-5i) \\ &= 5(3-5i) \end{aligned}$$

$$z_4 = 15-25i.$$

$$\begin{aligned} z_5 &= \frac{3-5i}{5+i}+\frac{4-3i}{3+i} = \frac{(3-5i)(3+i)+(5+i)(4-3i)}{(5+i)(3+i)} \\ &= \frac{9+3i-15i+5+20-15i+4i+3}{15+5i+3i-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_5 &= \frac{37-23i}{14+8i} = \frac{(37-23i)(14-8i)}{(14+8i)(14-8i)} \\ &= \frac{334-618i}{196+64} \end{aligned}$$

$$z_5 = \frac{334}{260}-\frac{618}{260}i.$$

$$z_6 = \frac{2+5i}{4-i} + \frac{4+i}{2-5i} = \frac{(2+5i)(2-5i)+(4-i)(4+i)}{(4-i)(2-5i)}$$

$$= \frac{4+25+16+1}{8-20i-2i-5} = \frac{46}{3-22i} \times \frac{3+22i}{3+22i}$$

$$z_6 = \frac{138+1012i}{9+484} = \frac{138}{493} + \frac{1012}{493}i.$$

$$z_7 = (1-2i)^3 = (1-2i)(1-2i)^2 = (1-2i)(1-4i-4)$$

$$= (1-2i)(-3-4i) = -3-4i+6i-8$$

$$z_7 = -11+2i.$$

$$z_8 = \frac{2+3i}{3i} + \frac{5i}{3-2i} = \frac{(2+3i)(3-2i)+(3i)(5i)}{3i(3-2i)}$$

$$= \frac{6-4i+9i+6-15}{9i+6} = \frac{-3+5i}{6+9i} \times \frac{6-9i}{6-9i}$$

$$= \frac{-18+27i+30i+45}{36+81}$$

$$= \frac{27+57i}{117}$$

$$z_8 = \frac{27}{117} + \frac{57}{117}i.$$

Enfin $z_8 = \dfrac{3}{13} + \dfrac{19}{39}i$

Corrigé 2

On a : $f(z) = (3-2i)z^2 + (5-i)z + 2 + 5i$

$$f(i) = (3-2i)(i)^2 + (5-i)i + 2 + 5i$$
$$= -3+2i+5i+1+2+5i$$
$$= 12i.$$

$$f(3+2i) = (3-2i)(3+2i)^2 + (5-i)(3+2i) + 2 + 5i$$
$$= (9+4)(3+2i) + 15 + 10i - 3i + 2 + 2 + 5i$$
$$= 13(3+2i) + 19 + 12i$$
$$= 39 + 26i + 19 + 12i$$
$$= 58 + 38i.$$

$$
\begin{aligned}
f(1+i) &= (3-2i)(1+i)^2+(5-i)(1+i)+2+5i\\
&= (3-2i)(2i)+5+5i-i+1+2+5i\\
&= 6i+4+8+9i\\
&= 12+15i.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(5-i) &= (3-2i)(5-i)^2+(5-i)^2+2+5i\\
&= (3-2i)(25-10i-1)+(25-10i-1)+2+5i\\
&= (3-2i)(24-10i)+26-5i\\
&= 72-30i-48i-20+26-5i\\
&= 78-83i.
\end{aligned}
$$

Corrigé 3

On a $f(z)=(5+i)z+(1+2i)\bar{z}+4-3i$

On remplace z par sa valeur dans chaque cas :

$$
\begin{aligned}
f(5-i) &= (5+i)(5-i)+(1+2i)\,(\overline{5-i})+4-3i\\
&= 25+1+(1+2i)(5+i)+4-3i\\
&= 30+5+i+10i-2-3i\\
&= 33+8i.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(1+2i) &= (5+i)(1+2i)+(1+2i)(\overline{1+2i})+4-3i\\
&= 5+10i+i-2+1+4+4-3i\\
&= 12+8i.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(3+4i) &= (5+i)(3+4i)+(1+2i)(\overline{3+4i})+4-3i\\
&= 15+20i+3i-4+(1+2i)(3-4i)+4-3i\\
&= 15+20i+3-4i+6i+8\\
&= 26+22i.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(5+3i) &= (5+i)(5+3i)+(1+2i)(\overline{5+3i})+4-3i\\
&= 25+15i+5i-3+(1+2i)(5-3i)+4-3i\\
&= 26+17i+5-3i+10i+6\\
&= 37+24i.
\end{aligned}
$$

Corrigé 4

On a

$$
\begin{aligned}
f(5+i) &= \frac{(1-2i)(5+i)+2+3i}{(3-2i)(5+i)-2-5i}\\
&= \frac{5+i-10i+2+2+3i}{15+3i-10i+2-2-5i}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{9-6i}{15-12i} = \frac{9-6i}{15-12i} \times \frac{15+12i}{15+12i}$$
$$= \frac{135+108i-90i+72}{225+144}$$
$$= \frac{207+18i}{369} \quad = \frac{207}{369} + \frac{18}{369}i$$

$$f(5+i) = \frac{23}{41} + \frac{2}{41}i$$

$$f(2i) = \frac{(1-2i)(2i)+2+3i}{(3-2i)(2i)-2-5i} = \frac{2i+4+2+3i}{6i+4-2-5i}$$

$$= \frac{6+5i}{2+i} = \frac{6+5i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i}$$
$$= \frac{12-6i+10i+5}{4+1}$$
$$= \frac{17+4i}{5} \quad = \frac{17}{5} + \frac{4}{5}i.$$

$$f(3+2i) = \frac{(1-2i)(3+2i)+2+3i}{(3-2i)(3+2i)-2-5i}$$
$$= \frac{3+2i-6i+4+2+3i}{9+4-2-5i}$$
$$= \frac{9-i}{11-5i} \times \frac{11+5i}{11+5i} = \frac{99+45i-11i+5}{121+25}$$
$$= \frac{104+34i}{146} = \frac{104}{146} + \frac{34}{146}i$$
$$= \frac{52}{73} + \frac{17}{73}i.$$

$$f(1-i) = \frac{(1-2i)(1-i)+2+3i}{(3-2i)(1-i)-2-5i}$$
$$= \frac{1-i-2i-2+2+3i}{3-3i-2i-2-2-5i}$$
$$= \frac{1}{-1-10i} \times \frac{-1+10i}{-1+10i} = \frac{-1+10i}{1+100}$$
$$= \frac{-1+10i}{101}$$
$$= \frac{-1}{101} + \frac{10}{101}i.$$

$$f(z)=1 \Rightarrow \frac{(1-2i)z+2+3i}{(3-2i)z-2-5i}=1$$
$$\Rightarrow (1-2i)z+2+3i=(3-2i)z-2-5i$$
$$\Rightarrow [(1-2i)-(3-2i)]z=-2-5i-2-3i$$
$$\Rightarrow -2z=-4-8i$$
$$\Rightarrow z=2+4i.$$

$$f(z)=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{(1-2i)z+2+3i}{(3-2i)z-2-5i}=\frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow 2\big((1-2i)z+2+3i\big)=3\big((3-2i)z-2-5i\big)$$
$$\Rightarrow (2-4i)z+4+6i=(9-6i)z-6-15i$$
$$\Rightarrow [(2-4i)-(9-6i)]z=-6-15i-4-6i$$
$$\Rightarrow (-7+2i)z=-10-21i$$
$$\Rightarrow z=\frac{-10-21i}{-7+2i}$$
$$\Rightarrow z=\frac{-10-21i}{-7+2i}\times\frac{-7-2i}{-7-2i}$$
$$\Rightarrow z=\frac{70+20i+147i-42}{49+4}$$
$$\Rightarrow z=\frac{28+167i}{53}$$
$$\Rightarrow z=\frac{28}{53}+\frac{167i}{53}.$$

Corrigé 5

Pour montrer que Z_1 est réel, il suffit de montrer que $\overline{Z_1}=Z_1$.

On a

$$\overline{Z_1}=\overline{(1+5i)^{2020}+(1-5i)^{2020}}$$
$$=\overline{(1+5i)^{2020}}+\overline{(1-5i)^{2020}}$$
$$=(\overline{1+5i})^{2020}+(\overline{1-5i})^{2020}$$
$$=(1-5i)^{2020}+(1+5i)^{2020}$$
$$=(1+5i)^{2020}+(1-5i)^{2020}$$
$$=Z_1$$

Alors Z_1 est réel.

Pour montrer que Z_2 est imaginaire pur, il suffit de montrer que $\overline{Z_2}=-Z_2$.

$$\begin{aligned}\overline{Z_2} &= \overline{(1+5i)^{2020} - (1-5i)^{2020}} \\ &= \overline{(1+5i)^{2020}} - \overline{(1-5i)^{2020}} \\ &= (\overline{1+5i})^{2020} - (\overline{1-5i})^{2020} \\ &= (1-5i)^{2020} - (1+5i)^{2020} \\ &= -\left((1+5i)^{2020} - (1-5i)^{2020}\right) \\ &= -Z_2\end{aligned}$$

Alors Z_2 **est imaginaire pur.**

Corrigé 6

On utilise les propriétés des modules :

$|z_1| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5,$

$|z_2| = |3+i||2+5i| = \sqrt{9+1}\times\sqrt{4+25} = \sqrt{290},$

$|z_3| = \left|\dfrac{2+4i}{2+3i}\right| = \dfrac{|2+4i|}{|2+3i|} = \dfrac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{4+9}} = \sqrt{\dfrac{20}{13}},$

$$\begin{aligned}|z_4| &= |(1+2i)(3-5i)(1-2i)| = |1+2i||3-5i||1-2i| \\ &= \sqrt{1+4}\times\sqrt{9+25}\times\sqrt{1+4} = 5\sqrt{34},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|z_5| &= \left|\frac{(3-5i)(5+2i)^3}{(2+5i)^4}\right| = \frac{|(3-5i)|\left|(5+2i)^3\right|}{\left|(2+5i)^4\right|} \\ &= \frac{\sqrt{9+25}\times(\sqrt{25+4})^3}{(\sqrt{4+25})^4} = \sqrt{\frac{34}{29}}.\end{aligned}$$

Corrigé 7

1) On a

$z_1 = 4+4i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

On note $\arg z_1 = \theta_1$ **. Alors :**

$$\begin{cases}\cos\theta_1 = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

2) On a $z_2 = 3+i\sqrt{3} \Rightarrow |z_2| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

On note $\arg z_2 = \theta_2$ **. Alors :**

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6}$$

3) On constate que $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$ **.**

Alors $|z_3| = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

et $\arg z_3 = \arg\dfrac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{12}$

4) On constate que $z_4 = z_1 z_2$ **.**

Alors $|z_4| = |z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 4\sqrt{2}\times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{6}$ **,**

$\arg z_4 = \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{12}$

5) On constate que $z_5 = \dfrac{\overline{z_2}\, z_1^3}{z_2^4}$ **. Alors**

$|z_5| = \left|\dfrac{\overline{z_2}\, z_1^3}{z_2^4}\right| = \dfrac{|\overline{z_2}||z_1^3|}{|z_2^4|} = \dfrac{|z_2||z_1|^3}{|z_2|^4} = \dfrac{2\sqrt{3}(4\sqrt{2})^3}{(2\sqrt{3})^4}$ $|z_5| = \dfrac{16}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$$\begin{aligned} \arg z_5 &= \arg\frac{\overline{z_2}\, z_1^3}{z_2^4} = \arg\overline{z_2}\, z_1^3 - \arg z_2^4 \\ &= \arg\overline{z_2} + \arg z_1^3 - \arg z_2^4 \\ &= -\arg z_2 + 3\arg z_1 - 4\arg z_2 \end{aligned}$$

$\arg z_5 = 3\arg z_1 - 5\arg z_2 = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{5\pi}{6}$**.. Alors** $\arg z_5 = \dfrac{-\pi}{12}$.

Corrigé 8

D'après l'exercice précédent :

1) $|z_1| = 4\sqrt{2}$ **et** $\arg z_1 = \dfrac{\pi}{4}$

Forme trigonométrique : $z_1 = 4\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4})$

ou $z_1 = 4\sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}})$

Forme exponentielle : $z_1 = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2) $|z_2| = 2\sqrt{3}$ **et** $\arg z_2 = \frac{\pi}{6}$ ؛

Forme trigonométrique : $z_2 = 2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

Ou $z_2 = 2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$.

Forme exponentielle : $z_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

3) $|z_3| = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ **et** $\arg z_3 = \frac{\pi}{12}$ ؛

Forme trigonométrique : $z_3 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$.

Forme exponentielle : $z_3 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

4) $|z_4| = 8\sqrt{6}$ **et** $\arg z_4 = \frac{5\pi}{12}$ ؛

Forme trigonométrique : $z_4 = 8\sqrt{6}(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$.

Forme exponentielle : $z_4 = 8\sqrt{6}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

5) $|z_5| = \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ **et** $\arg z_5 = \frac{-\pi}{12}$ ؛

Forme trigonométrique : $z_5 = \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}(\cos\frac{-\pi}{12} + i\sin\frac{-\pi}{12})$.

Forme exponentielle : $z_5 = \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

Corrigé 9

1) Forme trigonométrique de z_1 et z_2 :

D'après l'exercice précédent on a :

$z_1 = 4\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ **, et** $z_2 = 2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

2.a) Forme trigonométrique de z_3 :

D'après l'exercice précédent on a : $z_3 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$ (*)

Pour écrire z_3 **sous la forme algébrique, on multiplie par le conjugué du dénominateur :** $z_3 = \frac{4+4i}{3+i\sqrt{3}} \times \frac{3-i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}$

On obtient : $z_3 = \frac{3+\sqrt{3}}{3} + \frac{3-\sqrt{3}}{3}i$ (**)

b) Par comparaison des écritures (*) **et** (**) **du nombre** z_3 **on obtient :**

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}+3}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}-3}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

3.a) D'après l'exercice précédent on a :

$z_4 = 8\sqrt{6}(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$ (*)

Pour la forme algébrique de z_4**, on développe :**

$z_4 = (4+4i)(3+i\sqrt{3})$

$z_4 = 12 - 4\sqrt{3} + (12+4\sqrt{3})i$ (**)

b) Par comparaison des écritures (*) **et** (**) **du nombre** z_4 **on obtient :**

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{12-4\sqrt{3}}{8\sqrt{6}} = \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{12+4\sqrt{3}}{8\sqrt{6}} = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Corrigé 10

1) Résolutions d'équations:

a) E_1 $z^2 + 2z + 10 = 0$

Le discriminant : $\Delta = 2^2 - 4\times1\times10 = -36 = (6i)^2$

Les solutions z_1 **et** z_2 **avec** $\operatorname{Im} z_2 \le 0$**:**

$z_1 = \dfrac{-2+6i}{2} = -1+3i$ **et** $z_2 = \dfrac{-2-6i}{2} = -1-3i$

Ensemble de solution : $\boxed{S_1 = \{-1+3i, -1-3i\}}$

b) E_2 **:** $z^2 - 4z + 20 = 0$

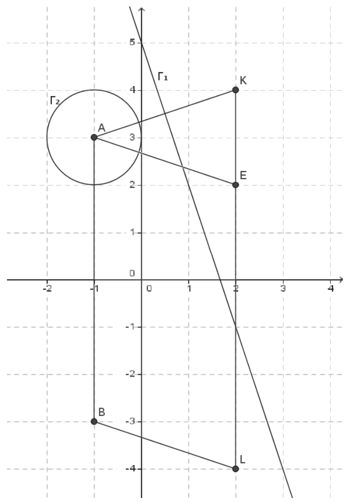
$\Delta = 4^2 - 4\times 1\times 20 = 16 - 80 = -64 = (8i)^2$

Les solutions z_3 et z_4 avec $\operatorname{Im} z_4 \le 0$ **:**

$z_3 = \dfrac{4+8i}{2} = 2+4i$ **et** $z_4 = \dfrac{4-8i}{2} = 2-4i$

Ensemble de solution : $\boxed{S_2 = \{2+4i, 2-4i\}}$

2.a) Représentation des points :



$z_A = z_1 = -1+3i \Rightarrow A(-1,3)$ **,** $z_B = z_2 = -1-3i \Rightarrow B(-1,-3)$

$z_K = z_3 = 2+4i \Rightarrow K(2,4)$ **,** $z_L = z_4 = 2-4i \Rightarrow L(2,-4)$

$z_E = z_3 - 2i = 2+4i-2i = 2+2i \Rightarrow E(2,2)$

b) Forme algébrique de z_E :

$z_E = z_3 - 2i = 2+4i-2i \Rightarrow \boxed{z_E = 2+2i}$

Forme trigonométrique :

$z_E = 2+2i \Rightarrow |z_E| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$z_E = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \boxed{z_E = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}$

c) Nature du quadrilatère ABLE **:**

D'après la figure, il semble que ABLE est un parallélogramme. Pour la démonstration on a :

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -1-3i+1-3i = -6i$

$z_{\overrightarrow{EL}} = z_L - z_E = 2-4i-2-2i = -6i$

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{EL}} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EL}$

Alors ABLE est un parallélogramme.

Nature du triangle AKE **:**

D'après la figure, il semble que AKE est isocèle en A. Pour la démonstration on a :

$AK=\left|z_K-z_A\right|=\left|2+4i+1-3i\right|=\left|3+i\right|=\sqrt{10}$

$AE=\left|z_E-z_A\right|=\left|2+2i+1-3i\right|=\left|3-i\right|=\sqrt{10}$

AK=AE. Alors le triangle AKE est isocèle en A.

3.a) L'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $\left|f(z)\right|=1$:

On a $f(z)=\dfrac{z-2-4i}{z+1-3i}$**. On constate que** $f(z)=\dfrac{z-z_K}{z-z_A}$ **.**

Alors : $\left|f(z)\right|=1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-z_K}{z-z_A}\right|=1 \Leftrightarrow \left|z-z_K\right|=\left|z-z_A\right| \Leftrightarrow MK=MA$

D'où l'ensemble Γ_1 est la médiatrice du segment $[AK]$.

Pour la construction, voir la figure.

b)L'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tels que $\left|f(z)-1\right|=\sqrt{10}$:

On a $\left|f(z)-1\right|=\sqrt{10} \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-2-4i}{z+1-3i}-1\right|=\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{z-2-4i-z-1+3i}{z+1-3i}\right|=\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{-3-i}{z+1-3i}\right|=\sqrt{10} \Leftrightarrow \dfrac{\left|-3-i\right|}{\left|z+1-3i\right|}=\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{10}}{\left|z-z_A\right|}=\sqrt{10} \qquad \Leftrightarrow \left|z-z_A\right|=1 \qquad \Leftrightarrow AM=1$

Alors Γ_2 est le cercle de centre A et de rayon 1.

Pour la construction, voir la figure.

Corrigé 11

On a pour tout nombre complexe z : $\mathbf{P(z)=z^3-5z^2+12z-8}$

1. a) En remplaçant z par 1 on obtient :

$\mathbf{P(1)=(1)^3-5(1)+12(1)-8=-4+4=0}$

b) <u>1</u>

b) <u>1ère méthode : identification</u>

Pour déterminer a et b tels que : $\mathbf{P(z)=(z-1)(z^2+az+b)}$**, on utilise une identification (Développer, réduire, ordonner le second membre et identifier) :**

$$(z-1)(z^2+az+b)=z^3+az^2+bz\ -z^2-az-b$$
$$=\ z^3+(a-1)z^2+(b-a)z-b$$

Par identification :

$z^3-5z^2+12z-8=\ z^3+(a-1)z^2+(b-a)z-b$, **pour tout** $z\in\mathbb{C}$; **on obtient le système :** $\begin{cases} a-1=-5 \\ b-a=12 \\ -b=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=8 \end{cases}$

Alors, pour tout $z\in\mathbb{C}$; $P(z)\ =\ (z-1)(z^2\ -4z\ +\ 8)$

2$^{\text{ème}}$ méthode : Division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} z^3-5z^2+12z-8 & z-1 \\ \cline{2-2} z^3-z^2 & z^2-4z+8 \\ -4z^2+12z-8 & \\ -4z^2+4z & \\ 8z-8 & \\ 8z-8 & \\ 0 & \end{array}$$

On en déduit que, pour tout $z\in\mathbb{C}$; $P(z)\ =\ (z-1)(z^2\ -4z\ +\ 8)$

soit $a=-4$ **et** $b=8$.

3$^{\text{ème}}$ méthode : Tableau d'Horner

L'utilisation du tableau d'Horner permet à la fois de calculer $P(1)$ **et factoriser** $P(z)$ **, (si** $P(1)=0$ **) :**

	1	**-5**	**12**	**-8**
1		**1**	**-4**	**8**
	1	**-4**	**8**	**0**

D'où : $a=-4$ **,** $b=8$ **,** $P(1)=0$ **et** $P(z)\ =\ (z-1)(z^2\ -4z\ +\ 8)$

c) L'équation $P(z)=0$ **équivaut** $z-1=0$ **ou** $z^2-4z+8=0$.

*** Si** $z-1=0$ **on obtient la solution** $z_1=1$

***Si** $z^2-4z+8=0$**, on a** $\Delta=16-32=-16=(4i)^2$

Les solutions de cette équation sont : $z_2 = \frac{4+4i}{2} = 2+2i$; $z_3 = \frac{4-4i}{2} = 2-2i$

(Ces solutions sont conjuguées car les coefficients sont réels et le discriminant est négatif).

L'ensemble de solutions de l'équation $P(z)=0$ est : $S = \{1; 2+2i; 2-2i\}$

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Les points A, B et C sont d'affixes : $z_A = 1$, $z_B = 2+2i$ et $z_C = 2-2i$.

a) Calcul de modules arguments :

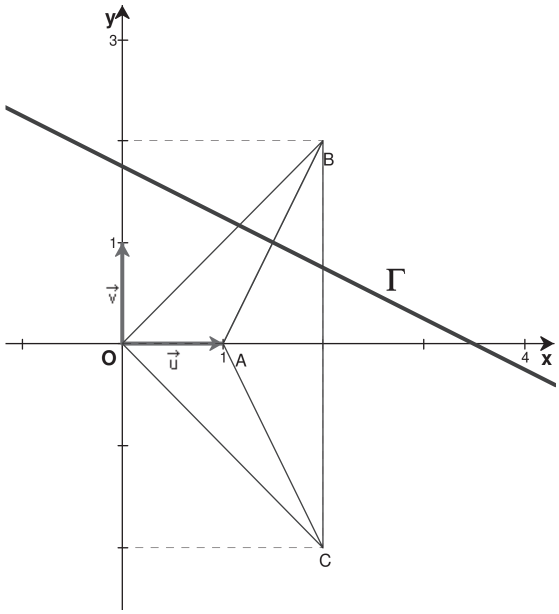
$|z_1| = |1| = 1$, $\arg z_1 = 0\ [2\pi]$

$|z_2| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$, $\arg z_2 = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

$|z_3| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8}$, $\arg z_3 = \frac{-\pi}{4}\ [2\pi]$

b) Représentation des points :

Les points A,B et C ont pour affixes Les points $z_A = 1$, $z_B = 2+2i$ et $z_C = 2-2i$. Alors $A(1;0)$, $B(2;2)$ et $C(2;-2)$.



3.a) On a :

$$\frac{z_2}{z_3} = \frac{2+2i}{2-2i} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$$

On remarque que $\frac{z_2}{z_3}=\frac{z_B-z_O}{z_C-z_O}$. Alors $\frac{z_B-z_O}{z_C-z_O}=i$, d'où le triangle OBC est rectangle isocèle en O.

b) Pour déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que $\left|\frac{z-1}{z-2-2i}\right|=1$, on constate que cette égalité peut s'écrire : $\left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right|=1$

Alors $M\in\Gamma \Leftrightarrow |z-z_A|=|z-z_B| \Leftrightarrow AM=BM$

D'où l'ensemble Γ est la médiatrice du segment $[AB]$.

Méthode 2 : Equation de Γ

On pose $z=x+iy$;

$$M\in\Gamma \Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{z-2-2i}\right|=1$$

$$\Leftrightarrow |z-1|=|z-2-2i|$$

$$\Leftrightarrow |x-1+iy|=|x-2+(y-2)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=(x-2)^2+(y-2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2=x^2-4x+4+y^2-4y+4$$

$$\Leftrightarrow 2x+4y-7=0$$

D'où l'ensemble Γ est la droite d'équation $2x+4y-7=0$.

Remarque :

L'équation $2x+4y-7=0$ représente la médiatrice du segment $[AB]$.

Corrigé 12

1) Ensembles de points

a)Soit E_1 l'ensemble des points M du plan tels que $|z'|=3$.

On a : $|z'|=3 \Rightarrow \left|\frac{3iz+6+4i}{z-3i}\right|=3$. Alors $\left|\frac{3i\left(z+\frac{6+4i}{3i}\right)}{z-3i}\right|=3$.

d'où $|3i|\left|\dfrac{z+\frac{6+4i}{3i}}{z-3i}\right|=3$

$\left|\dfrac{z+\frac{4}{3}-2i}{z-3i}\right|=1$. E_1 donc, est la médiatrice du segment $[DC]$ où $D(-\frac{4}{3},2)$.

b) Soit E_2 l'ensemble des points M du plan tels que $|z'-3i|=3$. On a :

$|z'-3i|=3 \Rightarrow \left|\dfrac{3iz+6+4i}{z-3i}-3i\right|=3 \Leftrightarrow \left|\dfrac{3iz+6+4i-3iz-9}{z-3i}\right|=3$

$\left|\dfrac{-3+4i}{z-3i}\right|=3 \Leftrightarrow \dfrac{5}{|z-3i|}=3 \Leftrightarrow |z-3i|=\dfrac{5}{3}$ soit $|z_M-z_c|=\dfrac{5}{3}$

E_2 donc, est le cercle de centre C et de rayon $\dfrac{5}{3}$.

c) Soit E_3 l'ensemble des points M du plan tels que $z'\in\mathbb{R}$. On a :

$z'\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left(z'=0 \text{ ou } \arg\dfrac{3iz+6+4i}{z-3i}=0\ [\pi]\right)$

Soit $z'=0\Leftrightarrow 3iz+6+4i=0\Leftrightarrow z=-\dfrac{4}{3}+2i\Leftrightarrow M=D$

Soit $\arg\dfrac{3iz+6+4i}{z-3i}=0\ [\pi]\Leftrightarrow \arg 3i+\arg\dfrac{z+\frac{6+4i}{3i}}{z-3i}=0[\pi]\Leftrightarrow$

$\arg\dfrac{z+\frac{4}{3}-2i}{z-3i}=\dfrac{\pi}{2}[\pi]\Leftrightarrow$

$\arg\dfrac{z_M-z_D}{z_M-z_C}=\dfrac{\pi}{2}[\pi]\Leftrightarrow(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD})=\dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

M appartient au cercle de diamètre $[CD]$ privé de C et D. En particulier si M est en D, $z'=0$.

Enfin, E_3 est le cercle de diamètre $[CD]$ privé de C.

d) Soit E_4 l'ensemble des points M du plan tels que $\arg z'=\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$. On a :

$\arg z'=\dfrac{\pi}{3}[2\pi]\Leftrightarrow \arg 3i+\arg\dfrac{z+\frac{6+4i}{3i}}{z-3i}=\dfrac{\pi}{3}[2\pi]\Leftrightarrow\dfrac{\pi}{2}+\arg\dfrac{z+\frac{4}{3}-2i}{z-3i}=\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

$$\Leftrightarrow \arg\frac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \arg\frac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$$

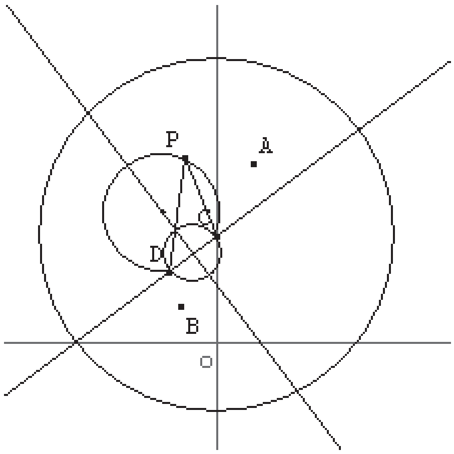
E_4 donc, est un arc (de sens indirect) d'un cercle d'extrémités C et D exclues.

e) Soit E_5 l'ensemble des points M du plan tels que $\arg z' = \frac{\pi}{2}[\pi]$. On a :

$$\arg z' = \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \arg\frac{z + \frac{4}{3} - 2i}{z - 3i} = \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg\frac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = 0[\pi]$$

E_5 donc, est la droite (CD) privée de C et D.



2) Pour montrer que les points A ;B ;M et M' sont cocycliques ou alignés, il suffit de montrer que le nombre Z tel que : $Z = \frac{z' - z_A}{z' - z_B} \times \frac{z - z_B}{z - z_A}$ soit réel.

On a : $$Z = \frac{\frac{3iz + 6 + 4i}{z - 3i} - 1 - 5i}{\frac{3iz + 6 + 4i}{z - 3i} + 1 - i} \times \frac{z + 1 - i}{z - 1 - 5i} \Leftrightarrow$$

$$Z = \frac{\frac{3iz + 6 + 4i - z + 3i - 5iz - 15}{z - 3i}}{\frac{3iz + 6 + 4i + z - 3i - iz - 3}{z - 3i}} \times \frac{z + 1 - i}{z - 1 - 5i}$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{-2iz - z + 7i - 9}{2iz + z + i + 3} \times \frac{z + 1 - i}{z - 1 - 5i} \Leftrightarrow Z = \frac{(-2i - 1)z + 7i - 9}{(2i + 1)z + i + 3} \times \frac{z + 1 - i}{z - 1 - 5i}$$

$$\Leftrightarrow Z=\frac{(-2i-1)\left(z+\frac{7i-9}{-2i-1}\right)}{(2i+1)\left(z+\frac{i+3}{2i+1}\right)}\times\frac{z+1-i}{z-1-5i} \Leftrightarrow Z=\frac{-\left(z+\frac{7i-9}{-2i-1}\right)}{z+\frac{i+3}{2i+1}}\times\frac{z+1-i}{z-1-5i}$$

$$Z=\frac{-(z-1-5i)}{z+1-i}\times\frac{z+1-i}{z-1-5i}$$

$Z=-1$ d'où $Z\in\mathbb{R}^*$

Alors les points A,B,M et M' sont cocycliques ou alignés.

Corrigé 13

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On pose : $P(z)=z^3-(11+6i)z^2+(28+38i)z-12-60i$ où z est un nombre complexe.

a)Pour calculer $P(3)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$P(z)=(z-3)(z^2+az+b)$, on peut utiliser la division euclidienne, une identification ou le <u>tableau d'Horner :</u>

	1	$-11-6i$	$28+38i$	$-12-60i$
3	$\times$	3	$-24-18i$	$12+60i$
	1	$-8-6i$	$4+20i$	0

Alors, $P(3)=0$ et pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z)=(z-3)(z^2+(-8-6i)z+4+20i)$.

Donc $a=-8-6i$ et $b=4+20i$.

b) L'équation $P(z)=0$ équivaut à $z-3=0$ ou $z^2+(-8-6i)z+4+20i=0$

On a $z-3=0\Leftrightarrow z=3$.

Le discriminent de l'équation du second degré est

$$\Delta=(-8-6i)^2-4(4+20i)=64-36+96i-16-80i$$

$\Delta=12+16i=(4+2i)^2$. **Donc** $\delta=4+2i$.

Les solutions sont

$$z_1=\frac{8+6i+4+2i}{2}=6+4i \text{ et } z_2=\frac{8+6i-4-2i}{2}=2+2i.$$

<u>Conclusion :</u> L'ensemble de solutions de l'équation $P(z)=0$ est $S=\{3,\quad 6+4i,\quad 2+2i\}$.

c) Les points A, B et C sont les images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $\mathrm{Im}(z_A)<\mathrm{Im}(z_B)<\mathrm{Im}(z_C)$. Donc $z_A=3,\quad z_B=2+2i$ et $z_C=6+4i$.

G barycentre du système $\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$. G est alors le quatrième sommet du parallélogramme ABCG.

L'affixe de G est : $z_G = \dfrac{2z_A - 2z_B + 2z_C}{2-2+2}$

$z_G = \dfrac{2(3) - 2(2+2i) + 2(6+4i)}{2} = \dfrac{14+4i}{2} = 7+2i$

2) L'application f_k du plan P dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-k)\overrightarrow{MC}.$$

Cette question sera traitée par deux méthodes : Calcul vectoriel ou nombres complexes

Méthode1 : Calcul vectoriel

a) L'application f_k est une translation si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est constant.

La fonction vectorielle de Leibniz $(M \mapsto 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-k)\overrightarrow{MC})$ est constante si et seulement si le poids du système $\{(A;2),(B;-2),(C;3-k)\}$ est nul. Ce qui équivaut à $3-k=0$. Soit $k=3$.

Alors, f_k est une translation si et seulement si $k=3$. On obtient son vecteur en remplaçant M dans l'expression vectorielle $\vec{v} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-k)\overrightarrow{MC}$ par n'importe quel point. Pour M en C on obtient $\vec{v} = 2\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{BA}$.

b) Si $k \neq 3$, le poids du système $\{(A;2),(B;-2),(C;3-k)\}$ est non nul. Donc ce système admet un barycentre G_k et on a pour tout point M du plan $2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-k)\overrightarrow{MC} = (3-k)\overrightarrow{MG_k}$. D'où :

$f_k(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = (3-k)\overrightarrow{MG_k}$.

$f_k(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_k} + \overrightarrow{G_kM'} = (3-k)\overrightarrow{MG_k}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{G_kM'} = (2-k)\overrightarrow{MG_k}$

Enfin , $f_k(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{G_kM'} = (k-2)\overrightarrow{G_kM}$

Particulièrement, pour $k=2$ on a : $f_2(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{G_2M'} = \vec{0} \Leftrightarrow M' = G_2$ donc l'application f_2 est constante.

G_2 est le barycentre du système $\{(A;2),(B;-2),(C;1)\}$. Alors $\overrightarrow{CG_2} = 2\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{BA}$. Donc $\overrightarrow{CG_2} = 2\overrightarrow{CG}$. Alors G_2 est le symétrique de C par rapport à G.

Maintenant, si $k \in \mathbb{R} \setminus \{2;3\}$ et M un point invariant par f_k, alors $f_k(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{G_kM} = (k-2)\overrightarrow{G_kM} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_kM} = \vec{0} \Leftrightarrow M = G_k$. D'où f_k admet un unique point invariant $\Omega_k = G_k = \text{bar}\{(A;2),(B;-2),(C;3-k)\}$.

f_k est l'homothétie de centre Ω_k et de rapport $k-2$.

c) On a $\Omega_k = G_k = \text{bar}\{(A;2),(B;-2),(C;3-k)\}$

Donc $2\overrightarrow{\Omega_kA} - 2\overrightarrow{\Omega_kB} + (3-k)\overrightarrow{\Omega_kC} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{BA} + (3-k)\overrightarrow{\Omega_kC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{\Omega_k C} = \frac{2}{3-k}\overrightarrow{AB}$

Alors Ω_k est situé sur la droite passant par C et parallèle à (AB).

Comme $\frac{2}{3-k} \neq 0$ et $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, on a $\overrightarrow{\Omega_k C} \neq \vec{0}$ donc $\Omega_k \neq C$.

Comme $k \neq 2$, on a $\overrightarrow{\Omega_k C} \neq 2\overrightarrow{AB}$ donc $\Omega_k \neq G_2$ où G_2 est le point tel que $\overrightarrow{G_2 C} = 2\overrightarrow{AB}$. G_2 est le symétrique de C par rapport à G. C'est aussi le quatrième sommet du parallélogramme ABGG_2.

Conclusion : Le lieu géométrique des points Ω_k lorsque k décrit $\mathbb{R} \setminus \{2;3\}$ est la droite passant par C et parallèle à (AB) privée de C et G_2.

d) Le centre de gravité R du triangle AMM' est le barycentre du système $\{(A;1),(M;1),(M';1)\}$. Alors pour tout point M du plan on a, pour $k = 1$:

$3\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MA} + \cancel{\overrightarrow{MM}} + \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + (2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{BC}$

D'où $3\overrightarrow{MR} - 3\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{BC}$.

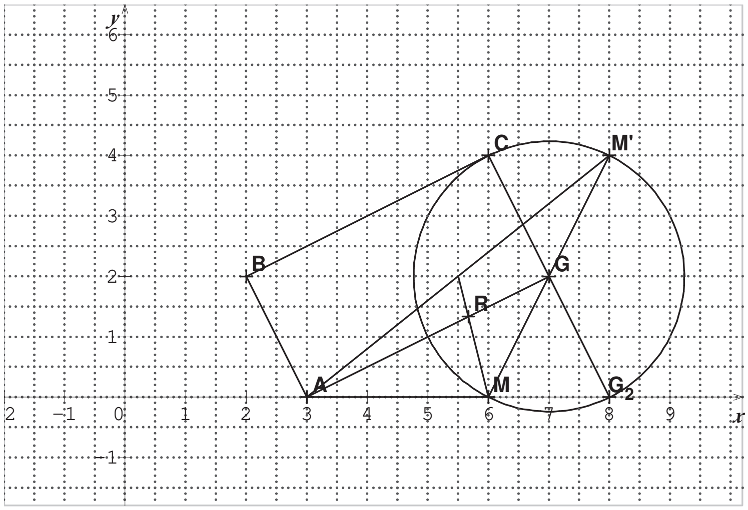
Enfin $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. D'où le centre de gravité R du triangle AMM' est un point fixe indépendant de la position de M. Le lieu géométrique de R est un point fixe.

On peut aussi remarquer que, pour $k = 1$, la transformation f_k est l'homothétie de centre $\Omega_1 = \text{bar}\{(A;2),(B;-2),(C;2)\} = G$ et de rapport $k - 2 = -1$. Alors c'est une symétrie centrale de centre G. Donc G est le milieu du segment $[MM']$.

D'où le barycentre R du système $\{(A;1),(M;1),(M';1)\}$ est celui de $\{(A;1),(G;2)\}$.

Donc $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$. Comme $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BC}$ on retrouve le résultat précédent $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Le centre de gravité R du triangle AMM' est fixe car le milieu G des points variables M et M' est un point fixe.



<u>Méthode2 : Nombres complexes</u>

a) On désigne par z et z’ les affixes respectives de M et M’.

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-k)\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow z' - z = 2(z_A - z) - 2(z_B - z) + (3-k)(z_C - z)$$

$$\Leftrightarrow z' - z = 2(3-z) - 2(2+2i-z) + (3-k)(6+4i-z)$$

$$\Leftrightarrow z' = z + 6 - 2z - 4 - 4i + 2z + 18 - 6k + 12i - 4ki - (3-k)z$$

$$\Leftrightarrow z' = (k-2)z + 20 - 6k + (8-4k)i$$

Une expression de type $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}$.

Si $k = 3$, on a $z' = z + 2 - 4i$ donc f_3 est une translation dont le vecteur a pour affixe $2 - 4i$. Soit $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Si $k \in \mathbb{R} \setminus \{2;3\}$, alors $k - 2 \neq 0$ et $k - 2 \neq 1$. Les points invariants sont d’affixes z vérifiant $z' = z$.

$$z' = z \Leftrightarrow z = (k-2)z + 20 - 6k + (8-4k)i \Leftrightarrow z = \frac{20 - 6k + (8-4k)i}{3-k}$$

D’où f_k admet un unique point invariant Ω_k d’affixe $z_k = \dfrac{20 - 6k + (8-4k)i}{3-k}$.

D’après la forme complexe $z' = (k-2)z + 20 - 6k + (8-4k)i$, f_k est l’homothétie de centre Ω_k et de rapport $k - 2$.

c) L’affixe de Ω_k est $z_k = \dfrac{20 - 6k + (8-4k)i}{3-k} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_k = \dfrac{20-6k}{3-k} = \dfrac{6k-20}{k-3} \\ y_k = \dfrac{8-4k}{3-k} = \dfrac{4k-8}{k-3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_k = 6 - \dfrac{2}{k-3} \\ y_k = 4 + \dfrac{4}{k-3} \end{cases} \Rightarrow 2x + y - 16 = 0$$

. C’est l’équation d’une droite Δ .

Comme $(x_k,y_k)=\left(6-\frac{2}{k-3},4+\frac{4}{k-3}\right)$ avec $\frac{2}{k-3}\neq 0$ et $\frac{4}{k-3}\neq 0$. On a alors $(x_k,y_k)\neq(6,4)$. D'où $\Omega_k \neq C(6,4)$.

Comme $k\neq 2$, on a $(x_k,y_k)\neq(x_2,y_2)\Leftrightarrow$ $(x_k,y_k)\neq\left(6-\frac{2}{2-3},4+\frac{4}{2-3}\right)\Rightarrow(x_k,y_k)\neq(8,0)$, donc $\Omega_k\neq G_2(8,0)$.

Conclusion : Le lieu géométrique des points Ω_k lorsque k décrit $\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$ est la droite Δ d'équation $2x+y-16=0$ privée de $C(6,4)$ et $G_2(8,0)$.

* Pour $k=1$, $\Omega_1=G_1=\text{bar}\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$. C'est le quatrième sommet du parallélogramme $ABCG_1$, avec $\begin{cases} x_1=\frac{14}{2}=7 \\ y_1=\frac{4}{2}=2 \end{cases}$. D'où $\Omega_1(7,2)$.

d) L'affixe de M' est $z'=(k-2)z+20-6k+(8-4k)i$. Pour $k=1$, on a $z'=-z+14+4i$. Alors l'affixe du point R centre de gravité du triangle AMM' est

$z_R=\frac{z_A+z+z'}{3}$

$z_R=\frac{z+(-z+14+4i)+3}{3}$

$z_R=\frac{17+4i}{3}=\frac{17}{3}+\frac{4}{3}i$. Alors lorsque M décrit le cercle Γ de centre G passant par C, le point R reste fixe.

3) Pour tout point M du plan on a $\varphi(M)=2MA^2-2MB^2+2MC^2$ et Γ_m l'ensemble des points M tels que $\varphi(M)=m$, où m est un réel.

La somme des coefficients est égale à 2 (non nulle). Le barycentre G de ce système est le point $\Omega_1(7,2)$.

Alors, par transformation d'écriture on obtient l'écriture réduite $\varphi(M)=2MG^2+\varphi(G)$.

Donc $M\in\Gamma_m \Leftrightarrow 2MG^2+\varphi(G)=m$

soit $MG^2=\frac{m-\varphi(G)}{2}$.

Calculons $\varphi(G)$:

On a $\varphi(G)=2GA^2-2GB^2+2GC^2$. On remarque que G est le point $\Omega_1(7,2)$.

Donc : $GA^2=|z_A-z_G|^2=|3-7-2i|^2=|-4-2i|^2=20$

$GB^2=|z_B-z_G|^2=|2+2i-7-2i|^2=|-5|^2=25$

$GC^2=|z_C-z_G|^2=|6+4i-7-2i|^2=|-1+2i|^2=5$.

Alors $\varphi(G)=2GA^2-2GB^2+2GC^2$

$\varphi(G) = 2\times 20 - 2\times 25 + 2\times 5$

Enfin $\varphi(G) = 0$**. D'où** $M \in \Gamma_m \Leftrightarrow MG^2 = \frac{m}{2}$ **.**

Discussion suivant les valeurs de m:

$m < 0$ **:** Γ_m **est l'ensemble vide.**

$m = 0$ **:** Γ_m **est le point G**

$m > 0$ **:** Γ_m **est le cercle de centre G et de rayon** $r = \sqrt{\frac{m}{2}}$ **.**

b) D'après les résultats précédents, pour $m = 10$**, l'ensemble est un cercle de centre G et de rayon** $r = \sqrt{\frac{m}{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5}$**. Comme** $GC^2 = 5$**, ce cercle passe par C. Donc** Γ_{10} **est le cercle de centre G passant par C.**

Corrigé 14

- **Soit** $z_0 = \alpha\ , \alpha \in \mathbb{R}$ **la solution réelle de l'équation**

$$E : \quad z^3 - (6+3i)z^2 + (21+19i)z - 26(1+i) = 0$$

Alors : $\alpha^3 - (6+3i)\alpha^2 + (21+19i)\alpha - 26(1+i) = 0$

$$\alpha^3 - 6\alpha^2 - 3i\alpha^2 + 21\alpha + 19i\alpha - 26 - 26i = 0$$

$$\alpha^3 - 6\alpha^2 + 21\alpha - 26 + (-3\alpha^2 + 19\alpha - 26)i = 0$$

- **On résout le système :**

$$\begin{cases} \alpha^3 - 6\alpha^2 + 21\alpha - 26 = 0 & (1) \\ -3\alpha^2 + 19\alpha - 26 = 0 & (2) \end{cases}$$

D'après (2) **On trouve :** $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \frac{13}{3}$**.**

En remplaçant dans (1) **on trouve que** $\alpha_1 = 2$ **vérifie** (1) **et** $\alpha_2 = \frac{13}{3}$ **ne vérifie pas** (1) **Alors** $z_0 = 2$

- **On pose** $P(z) = z^3 - (6+3i)z^2 + (21+19i)z - 26(1+i)$

On factorise par $(z-2)$ **:**

On utilise le tableau d'Horner ;

	1	-6-3i	21+19i	-26-26i
2		2	-8-6i	26+26i
	1	-4-3i	13+13i	0

Alors : $P(z)=(z-2)(z^2+(-4-3i)z+13+13i)$

- **Résolvons l'équation :** $z^2-(4+3i)z+13+13i=0$

$\Delta=(4+3i)^2-52-52i=-45-28i$.

Par le calcul on obtient une racine carrée $\delta=2-7i$.

Les racines de l'équation du second degré :

$$z_1=\frac{4+3i+2-7i}{2}=3-2i;\quad z_2=\frac{4+3i-2+7i}{2}=1+5i$$

- **Ensemble de solution :** $S=\{2,3-2i,1+5i\}$

Corrigé 15

1) On a : $$a^2=\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)^2$$

$$a^2=\frac{2-\sqrt{3}}{2}+2i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2}}-\frac{2+\sqrt{3}}{2}\quad a^2=\frac{-2\sqrt{3}}{2}+2i\sqrt{\frac{1}{4}}\Rightarrow a^2=-\sqrt{3}+i$$

- **Module :** $\left|a^2\right|=\left|-\sqrt{3}+i\right|=\sqrt{3+1}\Rightarrow\left|a^2\right|=2$

- **Argument : Soit** θ **un réel tel que** $\arg a^2=\theta$

Alors : $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow \arg a^2=\frac{5\pi}{6}$.

2.a) Module et argument de a **:**

- **Module :** $\left|a^2\right|=2\Rightarrow|a|=\sqrt{2}$

- **Argument :** $\arg a^2=\frac{5\pi}{6}\Rightarrow 2\arg a=\frac{5\pi}{6}$

$$\arg a=\frac{5\pi}{12}+k\pi,\quad k\in\{0,1\}$$

Soit $k = 0 \Rightarrow \arg a = \frac{5\pi}{12}$

Soit $k = 1 \Rightarrow \arg a = \frac{5\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12}$.

Comme $Re(a) > 0$ et $Im(a) > 0$, $\arg a \neq \frac{17\pi}{12}$. Enfin, $\arg a = \frac{5\pi}{12}$.

3) D'après ce qui précède, on déduit que :

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

4) Le nombre a^n est réel si et seulement si $\arg a^n = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$:

$$\arg a^n = k\pi \Leftrightarrow \frac{5n\pi}{12} = k\pi \Leftrightarrow 5n = 12k \Leftrightarrow n = \frac{12k}{5}$$

n est un entier naturel et le nombre 12 n'est pas divisible par 5, donc k est divisible par 5. On prend $k = 5k'$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.

$$\arg a^n = k\pi \Leftrightarrow n = 12 \times \frac{k}{5} \Leftrightarrow n = 12k'$$

Alors, l'ensemble des valeurs de n tels que a^n soit réel c'est les multiples de 12.

Corrigé 16

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1) On pose : $P(z) = z^3 - (11+6i)z^2 + (28+38i)z - 12 - 60i$ où z est un nombre complexe.

a)Pour calculer $P(3)$ et déterminer les nombres a et b tels que:

$P(z) = (z-3)(z^2+az+b)$, on peut utiliser la division euclidienne, une identification ou le <u>tableau d'Horner :</u>

	1	$-11-6i$	$28+38i$	$-12-60i$
3		3	$-24-18i$	$12+60i$
	1	$-8-6i$	$4+20i$	0

Alors, $P(3)=0$ et pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z)=(z-3)(z^2+(-8-6i)z+4+20i)$.

Donc $a=-8-6i$ et $b=4+20i$.

b) L'équation $P(z)=0$ équivaut à $z-3=0$ ou $z^2+(-8-6i)z+4+20i=0$

On a $z-3=0 \Leftrightarrow z=3$.

Le discriminant de l'équation du second degré est

$\Delta=(-8-6i)^2-4(4+20i)=64-36+96i-16-80i$

$\Delta=12+16i=(4+2i)^2$. Donc $\delta=4+2i$.

Les solutions sont : $z_1=\dfrac{8+6i+4+2i}{2}=6+4i$ et $z_2=\dfrac{8+6i-4-2i}{2}=2+2i$.

<u>Conclusion :</u> L'ensemble de solutions de l'équation $P(z)=0$ est $S=\{3,\quad 6+4i,\quad 2+2i\}$.

Corrigé 17

Pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=z^3-(1+2\cos\theta)z^2+(1+2\cos\theta)z-1$ où $\theta\in[0;2\pi[$.

1.a) Calcul de $P(1)$:

$P(1)=1-(1+2\cos\theta)\times 1^2+(1+2\cos\theta)\times 1-1=0$

- Pour résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z)=0$, on factorise $P(z)$ et pour cela on peut utiliser la division euclidienne , une identification ,ou bien le tableau d'Horner : 1 est une racine du polynôme P

	1	$-1-2\cos\theta$	$1+2\cos\theta$	-1
1		1	$-2\cos\theta$	1
	1	$-2\cos\theta$	1	0

Alors Pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=(z-1)(z^2-2\cos\theta z+1)$

$P(z)=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2-2\cos\theta z+1)=0$

soit $z-1=0 \Rightarrow z_0=1\in\mathbb{R}$

ou $z^2-2\cos\theta z+1=0$

Résolvons l'équation : $z^2-2\cos\theta z+1=0$

$$\Delta' = (-\cos)^2 - 1\times 1$$
$$= \cos^2\theta - 1$$
$$= -(1-\cos^2\theta)$$
$$=(i\sin\theta)^2$$

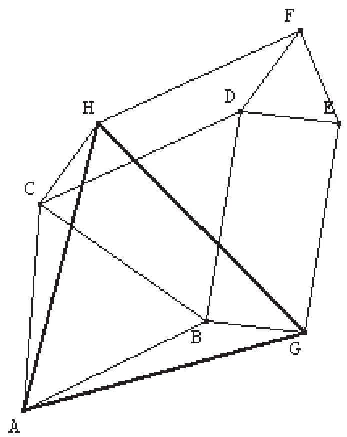
Donc

$$z' = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{1} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$z'' = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Si $\sin\theta \geq 0$, $\operatorname{Im}(z_1) \geq 0 \Rightarrow z_1 = z' = \cos\theta + i\sin\theta$ **et** $z_2 = \cos\theta - i\sin\theta$ **.**

Donc l'ensemble de solutions de l'équation $P(z)=0$ **dans** $\mathbb{C}$ **est :** $S = \{1; \cos\theta + i\sin\theta; \cos\theta - i\sin\theta\}$.

Corrigé 18



1) ABC **est équilatéral direct :**

$$\Rightarrow \frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow (c-a) = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$$

DEF est équilatéral direct :

$$\Rightarrow \frac{f-d}{e-d} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow (f-d) = e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)$$

2) $EDBG$ **est un Parallélogramme**

$\Rightarrow \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DE} \Rightarrow g-b = e-d \Rightarrow g = b+e-d$

DCHF est un parallélogramme $\Rightarrow h-c = f-d$

$\Rightarrow h = c+f-d$

3) On calcule $\dfrac{h-a}{g-a}$

$g-a = b-a+e-d$, $\quad h-a = c-a+f-d$

$$h-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) + e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)$$

$$h-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a+e-d) \Rightarrow h-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(g-a)$$

$$\frac{h-a}{g-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \Rightarrow \text{AGH est équilatéral direct.}$$

Corrigé 19

1.a) Pour calculer P(3i) on remplace z par 3i :

$$\begin{aligned}P(3i) &= (3i)^3 - (1+4i)(3i)^2 - (9-i)(3i) - 6 + 18i\\ &= -27i + 9 + 36i - 27i - 3 - 6 + 18i\\ &= 0\end{aligned}$$

Alors le nombre $3i$ est une racine de P .

Donc ils existent deux nombres complexes a et b tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-3i)(z^2+az+b)$.

Utilisons le tableau d'Horner pour les déterminer :

	1	-1-4i	-9+i	-6+18i
3i		3i	-3i+3	-18i+6
	1	-1-i	-6-2i	0

D'où $a = -1-i$ et $b = -6-2i$

Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-3i)\left(z^2 - (1+i)z - 6 - 2i\right)$

b) On a $P(z) = 0 \Leftrightarrow z - 3i = 0$ ou $z^2 - (1+i)z - 6 - 2i = 0$.

D'une part $z - 3i = 0 \Leftrightarrow z = 3i$

D'autre part, le discriminant de l'équation $z^2 - (1+i)z - 6 - 2i = 0$ est

$$\Delta = (1+i)^2 + 4(6+2i) = 24 + 10i = 25 - 1 + 2\times 5\times i = (5+i)^2$$

D'où $\delta = 5+i$ est une racine carrée de Δ.

Alors les solutions de cette équation sont

$$z' = \frac{1+i+(5+i)}{2} = 3+i \text{ et } z'' = \frac{1+i-(5+i)}{2} = -2.$$

<u>Conclusion</u> : L'ensemble de solutions de l'équation $P(z) = 0$ est

$$S = \{-2, 3i, 3+i\}$$

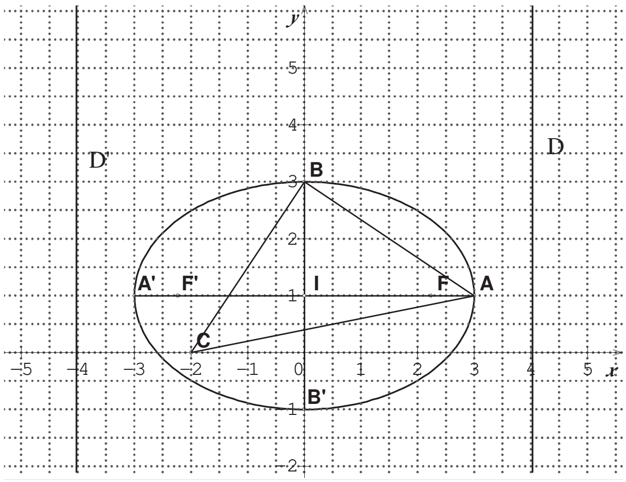
c) En remarquant que $|-2| < |3i| < |3+i|$; on a alors $z_A = 3+i$; $z_B = 3i$ et $z_C = -2$.

Construction :

$z_A = 3+i \Rightarrow A(3;1)$

$z_B = 3i \Rightarrow B(0;3)$

$z_C = -2 \Rightarrow C(-2;0)$



On a $\dfrac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = \dfrac{3i\ -(3+i)}{3i\ -(-2)} = \dfrac{-3+2i}{2+3i} = \dfrac{i(3i+2)}{2+3i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et

$\dfrac{BA}{BC} = 1$. D'où le triangle ABC est rectangle isocèle direct en B.

d) Le point A' est le barycentre du système $\{(A;-5),(B;6),(C;12)\}$. Alors L'affixe de A' est $z_{A'} = \dfrac{-5z_A + 6z_B + 12z_C}{-5+6+12}$

$$z_{A'} = \frac{-5(3+i)+6(3i)+12(-2)}{-5+6+12}$$

$$z_{A'} = \frac{-39+13i}{13}$$

Donc : $z_{A'} = -3+i$ et $A'(-3;1)$

2.a) Puisque les points A, A' et B sont des sommets de l'ellipse Γ , et B appartient à la médiatrice du segment $[AA']$, donc la droite (AA') est un axe de Γ et par suite le centre de Γ est le milieu I de $[AA']$.

Son affixe est $z_I = \dfrac{z_A + z_{A'}}{2}$

$$z_I = \frac{3+i+(-3+i)}{2}$$

$$z_I = i$$

Alors le centre de Γ est le point $I(0,1)$.

Les demi-longueurs des axes sont $a = IA = |z_A - z_I| = |3+i-i| = |3| = 3$ et $b = IB = |z_B - z_I| = |3i - i| = |2i| = 2$ donc $a > b$, d'où $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ et par conséquent l'excentricité de Γ est $e = \dfrac{c}{a} \Rightarrow e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

b) Le centre de Γ est le point $I(0,1)$. Ses demi-longueurs des axes sont $a = 3$ et $b = 2$. Alors, une équation cartésienne de Γ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est $\dfrac{(x-0)^2}{3^2} + \dfrac{(y-1)^2}{2^2} = 1$

C'est-à-dire : $$\frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

c) Pour déterminer les coordonnées (x,y) des points d'intersection de Γ avec (Ox), on résout le système :

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1 \end{cases}$$

Ceci équivaut à $$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{1}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{9} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = \dfrac{27}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{27}{4}} \end{cases}$$

Donc Γ coupe (Ox) en deux points $M\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},0\right)$ et $N\left(\dfrac{-3\sqrt{3}}{2},0\right)$.

d) Dans le repère $(I;\vec{i},\vec{j})$, l'équation réduite de Γ est $\dfrac{X^2}{9}+\dfrac{Y^2}{4}=1$; avec

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y-1 \end{cases}$$

Les foyers de Γ sont $F(c;0)$ et $F'(-c;0)$ avec $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

Donc $F\left(\sqrt{5};0\right)$ et $F'\left(-\sqrt{5};0\right)$.

Les directrices de Γ sont les droites D et D' d'équations respectives

$$X=\frac{a^2}{c} \text{ et } X=-\frac{a^2}{c}.$$

Donc $X=\dfrac{9}{\sqrt{5}}$ et $X=-\dfrac{9}{\sqrt{5}}$.

Alors dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

Les foyers : $F\left(\sqrt{5};1\right)$ et $F'\left(-\sqrt{5};1\right)$ car $Y=y-1 \Rightarrow y=Y+1$.

Les directrices ont pour équations: $x=\dfrac{9}{\sqrt{5}}$ et $x=-\dfrac{9}{\sqrt{5}}$ car $X=x$.

Pour la construction voir la figure précédente.

Corrigé 20

1.a) $P(z)=z^3-(7+3i)z^2+(12+15i)z-4-18i$

$P(2)=2^3-(7+3i)2^2+(12+15i)2-4-18i=8-28-12i+24+30i-4-18i=0$.

Alors le nombre 2 est une racine de P . Donc ils existent deux nombres complexes a et b tels que pour tout $z\in\mathbb{C}$, $P(z)=(z-2)(z^2+az+b)$. Uutilisons le tableau d'Horner pour les déterminer :

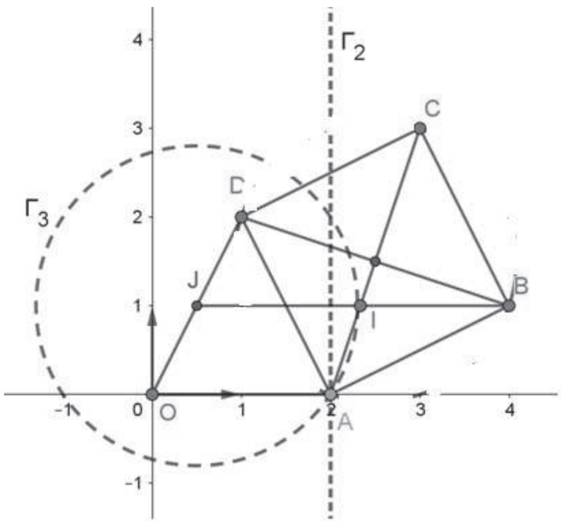
	1	-7-3i	12+15i	-4-18i
2		2	-10-6i	4+18i
	1	-5-3i	2+9i	0

D'où $a=-5-3i$ **et** $b=2+9i$

Alors pour tout $z\in\mathbb{C}$**,** $P(z)=(z-2)\left(z^2-(5+3i)z+2+9i\right)$

b) $P(z)=0 \Leftrightarrow z=2$ **ou** $z^2-(5+3i)z+2+9i=0$**. Pour cette dernière équation on a** $\Delta=(5+3i)^2-4(2+9i)=8-6i=(3-i)^2$**, donc ses solutions sont** $z_1=\dfrac{(5+3i)+(3-i)}{2}=4+i$ **et** $z_2=\dfrac{(5+3i)-(3-i)}{2}=1+2i$**. D'où les solutions de l'équation** $P(z)=0$ **sont** $z_0=2;\ z_1=4+i$ **et** $z_2=1+2i$**.**

c) Comme $\mathrm{Im}(z_0)\le \mathrm{Im}(z_1)\le \mathrm{Im}(z_2)$ **alors** $z_A=2;\ z_B=4+i$ **et** $z_D=1+2i$**.**



On a $\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{1+2i-2}{4+i-2}=\dfrac{-1+2i}{2+i}=\dfrac{i(i+2)}{2+i}=i$**, d'où le triangle ABD est rectangle isocèle et direct en A.**

2° a) Le point C est donc un sommet du carré ABCD alors son affixe est $z_C=-z_A+z_B+z_D=3+3i$**, donc l'affixe du barycentre du système**

$\{(A;9),(B;-6),(C;2)\}$ est $\frac{9z_A-6z_B+2z_C}{9-6+2}=\frac{18-24-6i+6+6i}{5}=0$. **D'où O est le barycentre du système** $\{(A;9),(B;-6),(C;2)\}$.

b) Soit $\varphi(M)=9MA^2-6MB^2+2MC^2$. **Pour tout point M du plan, on a** $\varphi(M)=5MO^2+9OA^2-6OB^2+2OC^2$ **donc**

$\varphi(M)=5MO^2+36-102+36=5MO^2-30$.

Alors $M\in\Gamma_1\Leftrightarrow\varphi(M)=-10\Leftrightarrow 5MO^2=20\Leftrightarrow MO^2=4$.

Donc Γ_1 **est le cercle de centre O et de rayon 2, il passe par A.**

c) Soit $\psi(M)=4MA^2-6MB^2+2MC^2$.

On remarque que $\psi(A)=4AA^2-6AB^2+2AC^2=-10$, **donc** $A\in\Gamma_2$

Pour tout point M du plan, on a $\psi(M)=2\overrightarrow{MA}.\vec{u}+\psi(A)=2\overrightarrow{MA}.\vec{u}-10$ **avec** $\vec{u}=4\overrightarrow{MA}-6\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{IB}$ **où I est le barycentre du système** $\{(A;2),(C;1)\}$,

donc $z_I=\frac{2z_A+z_C}{3}=\frac{7}{3}+i$. **Alors** $\psi(M)=12\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{IB}-10$

$M\in\Gamma_2\Leftrightarrow\psi(M)=-10\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{IB}=0$. **Donc** Γ_2 **est la droite perpendiculaire à** (IB) **passant par A.**

d) Soit $\sigma(M)=(9\overrightarrow{MA}-6\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=5\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MD}$

Soit J le milieu de $[OD]$, **L'affixe de J est donc** $z_J=\frac{1}{2}z_D=\frac{1}{2}+i$ **alors**

$\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MD}=MJ^2-\frac{1}{4}OD^2=MJ^2-\frac{5}{4}$.

Pour tout point M du plan on a donc $\sigma(M)=5MJ^2-\frac{25}{4}$ **et alors**

$M\in\Gamma_3\Leftrightarrow 5MJ^2-\frac{25}{4}=10\Leftrightarrow MJ^2=\frac{13}{4}$

Alors Γ_3 **est le cercle de centre J et de rayon** $\frac{1}{2}\sqrt{13}$. **Or** $AJ^2=\frac{13}{4}$ **donc le cercle** Γ_3 **passe par A.**

3°a) L'écriture complexe de S est de la forme $z'=az+b$ **avec**

$$\begin{cases} S(A)=B \\ S(B)=D \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_D = az_B + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4+i=2a+b \\ 1+2i=a(4+i)+b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-1+i \\ b=6-i \end{cases}$$

Donc l'écriture complexe de S est $z'=(-1+i)z+6-i$.

Donc le rapport de S est $|-1+i|=\sqrt{2}$,

son angle est une mesure de $\arg(-1+i)=\dfrac{3\pi}{4}$

et son centre est le point Ω d'affixe $\omega=\dfrac{6-i}{1-(-1+i)}=\dfrac{13}{5}+\dfrac{4}{5}i$.

b) On a $S=s\left(\Omega;\sqrt{2};\dfrac{3\pi}{4}\right)$

donc par composition des similitudes : $S^{2018}=s\left(\Omega;\left(\sqrt{2}\right)^{2018};\dfrac{3\pi}{4}\times 2018\right)$

Alors : $S^{2018}=s\left(\Omega;2^{1009};-\dfrac{\pi}{2}\right)$

c) On a $S^4=s\left(\Omega;\left(\sqrt{2}\right)^4;\dfrac{3\pi}{4}\times 4\right)\Rightarrow S^4=s(\Omega;4;\pi)$ c'est donc l'homothétie h de centre Ω et de rapport –4 et on a $S^8=h^2$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport 16.

En plus on a $2020\equiv 4[8]$ ce qui montre que $2020^{2020}\equiv 4^{2020}[8]$. Or $4^{2020}=2^{4040}=2^{3\times 1346+2}=2^{4037}\times 2^3=2^{4037}\times 8$, un multiple de 8, donc $4^{2020}\equiv 0[8]$. Ce qui montre l'existence d'un entier k tel que $2020^{2020}=8k$ et par conséquent que $S^{2020^{2020}}=S^{8k}$ qui est l'homothétie de centre Ω et de rapport $(-4)^{8k}=4^{8k}$.

D'où $S^{2020^{2020}}$ est une homothétie de rapport positif.

V. EXERCICES DE SYNTHESE

Exercice 1

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on pose:

$P(z) = z^3 - (4+8i)z^2 + (-16+20i)z + 24 + 8i$.

1.a) Calculer $P(2i)$.

b) Déterminer les complexes α et β tels que pour tout complexe z on a:

$P(z) = (z-2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$

c) Résoudre l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 2

Soit $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ et $z_3 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$.

1) Ecrire z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.

2) Ecrire z_3 sous forme algébrique.

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

4) Justifier les affirmations suivantes :

Le nombre $(z_1)^{2019}$ est réel.

Le nombre $(z_2)^{2019}$ est imaginaire pur.

Exercice 3

Déterminer suivant les valeurs de θ ($\theta \in [0;2\pi[$) le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivant:

$z_1 = \cos\theta + i(1+\sin\theta)$,

$z_2 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$,

$z_3 = 1 + \sin\theta - i\cos\theta$

$z_4 = 1 + i\tan\theta$

$z_5 = \dfrac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1+\cos\theta - i\sin\theta}$,

$z_6 = \dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$.

Exercice 4

1) Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 + (2-2i)z^2 + (2-4i)z - 4i$.

a) Calculer $P(2i)$.

b) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout z on a: $P(z) = (z-2i)(z^2 + az + b)$.

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe, l'équation $P(z) = 0$.

2) On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1-i$, $z_B = 2i$ et $z_C = -1+i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

c) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z telle que : $|z+1-i| = 3$.

Exercice 5

Soit $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. On pose $\alpha = z + z^2 + z^4$.

1) Calculer $\alpha + \overline{\alpha}$ et $\alpha\overline{\alpha}$.

2) En déduire que : $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{8\pi}{7} = -\dfrac{1}{2}$;

et que $\sin\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{4\pi}{7} + \sin\dfrac{8\pi}{7} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Exercice 6

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 1+2i$ on pose : $f(z) = \dfrac{z-3-i}{z-1-2i}$.

1) Calculer le nombre $\alpha = f(1+3i)$ puis l'écrire sous formes algébrique et trigonométrique.

2) On considère les deux points A et B d'affixes respectives $z_A = 1+2i$ et $z_B = 3+i$.

Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles Γ_k des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a) Γ_1 tel que $|f(z)| = 1$; b) Γ_2 tel que $f(z)$ soit imaginaire pur. ;

c) Γ_3 tel que $f(z)$ soit réel ; d) Γ_4 tel que $|f(z)-1| = \sqrt{5}$.

3.a) Déterminer et représenter dans le repère précédent un point C tel que le triangle ABC soit rectangle isocèle en C (deux solutions possibles).

b) Vérifier que C est commun entre Γ_1 et Γ_2 .

Exercice 7

Simplifier les expressions suivantes:

1) $\begin{array}{l} C_n = 1+\cos x+\cos 2x+\cdots\cos nx \\ S_n = \sin x+\sin 2x+\cdots\sin nx \end{array}$; (On pourra calculer $C_n + iS_n$)

2) $\begin{array}{l} C_n = \cos^2 x + \cos^2 x\cos 2x+\cdots+\cos^n x\cos nx \\ S_n = \cos x\sin x + \cos^2 x\sin 2x+\cdots+\cos^n x\sin nx \end{array}$; (On pourra calculer $C_n + iS_n$).

Exercice 8

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2z - 2 - 4i = 0$

2) On considère le polynôme P définie sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - (2+2i)z^2 - 2z - 8 + 4i$.

a) Calculer $P(2i)$ et déterminer deux réels a et b tels que $P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)$

b) Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=(1+i)^2$, $z_B=\dfrac{5+5i}{2+i}$ et $z_C=\dfrac{1-5i}{2+3i}$.

a) Donner la forme algébrique de z_A, z_B et z_C

b) Placer les points A, B et C

c) Déterminer et construire l'affixe du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

4) Soit f l'application définie pour tout complexe $z \neq 3+i$ par $f(z)=\dfrac{(1-i)z+2}{z-3-i}$

Montrer que pour tout $z \neq 3+i$, on a : $f(z)=(1-i)\dfrac{z+1+i}{z-3-i}$

5) Déterminer et construire les ensembles de points M dans chacun des cas suivants :

a. Γ_1 tel que $|f(z)|=\sqrt{2}$.

b. Γ_2 tel que $\arg(f(z))=\dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$

c. Γ_3 tel que $\arg(f(z))=\dfrac{3\pi}{4}\ [\pi]$

d. Γ_4 tel que $|f(z)-1+i|=2\sqrt{10}$.

Exercice 9

On muni le plan complexe d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit f_a l'application qui associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' telle que : $z'=(a+\dfrac{1}{2}i)z+4-4a-2i, \quad a\in\mathbb{C}$

1) Reconnaître l'application f_a et la caractériser pour chacune des valeurs suivantes du nombre complexe a :

a) $a=1-\frac{1}{2}i$ b) $a=2-\frac{1}{2}i$ c) $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $a=\frac{1}{2}$

2) Dans la suite de l'exercice on suppose que $a\in\mathbb{R}$ et on note $\theta=\arg(a+\frac{1}{2}i)$.

Soit les points $M_0(3;0)$ et $\Omega(4;0)$. Pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}$ on pose $M_{n+1}=f_a(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

a) Calculer et écrire sous forme algébrique : z_1 et z_2 en fonction de a.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $z_n=4-(a+\frac{1}{2}i)^n$.

c) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on pose : $V_n=|z_n-4|$. Pour quelles valeurs de θ ; la suite (V_n) est elle convergente ?

d) Calculer en fonction de n : et $S_n=\sum_{k=0}^{n}d_k$.

e) Pour $a=\frac{1}{2}$; déterminer la nature du triangle ΩM_nM_{n+1}. Placer les points M_0 ; M_1 et M_2. Calculer S_n et $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ puis interpréter géométriquement.

Exercice 10 (Bac)

On considère un triangle ABC de sens direct et on construit à l'extérieur de ce triangle trois triangles ACQ, BAR et CBP rectangle et isocèle respectivement en A, B et C. Soient P', Q' et R' les milieux respectifs des segments [BP], [CQ] et [AR].

L'objectif de cette partie est de montrer que les triangles ABC, PQR et P'Q'R' sont de même centre de gravité. On considère le plan complexe muni du repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soient a, b, c, p, q, r, p', q' et r' les affixes respectives des points A, B, C, P, Q, R, P', Q' et R'.

1) Faire une construction illustrant les données précédentes.

2.a) Montrer que $p'=\frac{b-ic}{1-i}$ puis écrire q' en fonction de a et c ; r' en fonction de a et b.

b) Calculer $p'+q'+r'$ en fonction de a , b et c puis en déduire que les triangles ABC et $P'Q'R'$ ont le même centre de gravité G d'affixe g .

3) Exprimer chacun des complexes p , q et r en fonction de a , b et c puis montrer que les triangles ABC et PQR ont le même centre de gravité G.

Exercice 11 (Bac)

1) Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on pose: $P(z)=z^3+(2-2i)z^2+(-2-8i)z-8+4i$.

a) Calculer $P(2i)$.

b) Résoudre l'équation $P(z)=0$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère la transformation f d'expression : $z'=\frac{1}{3}iz+\frac{2}{3}+2i$.

a) Montrer que f est une similitude directe. Préciser le centre A , le rapport et un angle de f.

b) Calculer l'affixe z_C du point C image de B(-1,-3) par f. Vérifier que le triangle ABC est rectangle. Placer les points A , B et C sur la figure.

c) Calculer l'affixe z_G du point G barycentre du système $S=\{(A,2);(B,3);(C,-1)\}$.

3.a) Déterminer puis construire les trois ensembles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 des points M du plan définis par :

$$M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow 2MA^2+3MB^2-MC^2=16$$

$$M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow MB^2-MC^2=16$$

$$M\in\Gamma_3 \Leftrightarrow (2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$$

b) Que peut-on dire à propos de la position relative des ensembles Γ_2 et Γ_3 ?

Exercice 12 (Bac)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(4+8i)z^2+(-14+24i)z+32+4i$.

1.a) Calculer $P(2i)$ et déterminer deux nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)$.

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$. On note z_1, z_2 et z_3 ses solutions avec $|z_1|<|z_2|<|z_3|$.

c) Soit A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3. Déterminer l'affixe du point G barycentre du système $\{(O,5);(A,-7);(C,4)\}$. Placer A, B ,C et G sur la figure.

2) Pour tout nombre complexe z on pose : $Q(z)=z^2-(4+6i)z-2+16i$.

On note Γ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Q(z)$ soit imaginaire pur (ou nul).

a) En posant $z=x+iy$, donner une équation cartésienne de Γ et montrer que Γ est une conique de centre G.

b) Préciser les sommets et l'excentricité de Γ puis la construire dans le repère précédent.

Exercice 13 (Bac)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) Pour tout nombre complexe z on pose $P(z)=z^3-(5+4i)z^2+(7+10i)z+5-10i$.

Calculer $P(i)$ puis déterminer les solutions $z_0; z_1$ et z_2 de l'équation $P(z)=0$ avec $\text{Re}(z_0)<\text{Re}(z_1)<\text{Re}(z_2)$.

2) On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_0; z_1 et z_2 .

a) Déterminer la nature du triangle ABC .

b) Soit G le barycentre du système $\{(A,13);(B,-3);(C,2)\}$. Déterminer l'affixe du point G.

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan tels que $13\,MA^2-3\,MB^2+2\,MC^2=12$

3) On considère l'hyperbole H de centre G qui passe par C et dont A est un sommet.

a) Déterminer le 2$^{\text{ème}}$ sommet de H.

b) Vérifier que l'équation de H peut s'écrire sous la forme $x^2-3(y-2)^2=-3$.

c) Donner l'équation réduite de H puis déterminer ses foyers, ses asymptotes et son excentricité et la construire.

Exercice 14 (Bac - traduit)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout nombre complexe z on pose :

$$P(z) = z^3 - (9-i)z^2 + (28-5i)z - 32 + 4i \ .$$

1.a) Calculer $P(4)$.

b) Déterminer deux nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a : $P(z) = (z-4)(z^2 + az + b)$. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$.

2) On considère les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ tels que $z_A = 4$, $\operatorname{Im} z_B > 0$ et $\operatorname{Im} z_C < 0$.

a) Donner l'expression complexe de la similitude directe s de centre C qui transforme A en B. Déterminer le rapport et un angle de s.

b) Soit $g = s \circ s$. Pour tout point $M(x,y)$ on note $g(M) = M'$; et $M'(x',y')$. Ecrire x' y' en fonction de x et y.

3) Pour tout nombre complexe z on pose :

$$Q(z) = z^2 - (5-i)z + 8 - i \ .$$

On note Γ l'ensemble des points M d'affixe z tels que soit imaginaire pur (ou nul).

a) En posant $z = x + iy$, donner une équation cartésienne de Γ et montrer que Γ est une hyperbole de centre $\Omega(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$.

b) Préciser les sommets et les asymptotes de Γ puis la construire.

نعتبر المستوي العقدي منسوبا إلى مرجع قائم ومنتظم $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) لكل عدد عقدي z نضع :

$$P(z) = z^3 - (9-i)z^2 + (28-5i)z - 32 + 4i$$

a.1) احسب $P(4)$ ثم حدد العددين a و b بحيث يكون لكل z من $\mathbb{C}$:
$P(z) = (z-4)(z^2 + az + b)$.

b)حل في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة $P(z) = 0$.

2) نعتبر النقط A ؛ B وC صور حلول المعادلة $P(z) = 0$ مع $z_A = 4$ ؛ $\operatorname{Im} z_B > 0$ و $\operatorname{Im} z_C < 0$.

a) أعط العبارة العقدية للتشابه المباشر s الذي مركزه C وينقل A إلى B .

b) حدد نسبة وزاوية s.

3) لكل عدد عقدي نضع: $Q(z) = z^2 - (5-i)z + 8 - i$. ولتكن Γ مجموعة النقط M ذات اللاحق z بحيث يكون $Q(z)$ تخيليا بحتا (أو معدوما).

a) بوضع $z = x + iy$ ،أعط معادلة كرتيزية للمجموعة Γ وبين أن Γ قطع زائد مركزه النقطة $\Omega(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$.

b) حدد القمتين والمقاربين للقطع Γ ثم مثله.

CHAPITRE 3 ARITHMETIQUE

I. RESUME DE COURS

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

1) Définition

Soient a et b deux entiers relatifs, on dit que b divise a s'il existe un entier relatif k tel que $a = kb$. On note: $b|a$

Remarques

- **On dit aussi que a est un multiple de b ou b est un diviseur de a.**
- **1 et -1 divisent tous les nombres.**
- **Un nombre *a* admet au minimum 4 diviseurs : $\{1\,;-1\,;a;-a\}$.**

2) Propriétés

Soient a, b, c trois entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

1. $(a|b \text{ et } b|a) \Leftrightarrow (a = b \text{ ou } a = -b)$
2. $(a \mid b \text{ et } b|c) \Rightarrow a|c$ **(transitivité)**
3. $(c|a \text{ et } c|b) \Rightarrow c \mid (ua + vb)\ ;\ u,v \in \mathbb{Z}$ **(divisibilité par combinaison linéaire)**
4. $a \mid b \Rightarrow -a \mid b$
5. $a|b \Rightarrow |a| \leq |b|;\quad b \neq 0$
6. $a \mid b \Rightarrow a \mid bc$ **pour tout entier c**
7. $a \mid b \Rightarrow ac \mid bc$ **pour tout entier c non nul.**
8. $(a-b)\,|\,(a^n - b^n);\quad n \in \mathbb{N}^*$
9. **Si n est impair alors** $(a+b)\,|\,(a^n + b^n);\quad n \in \mathbb{N}^*$

3) Critères de divisibilité

Soit n un entier naturel

n	Critères de divisibilité par n (en écriture décimale)
10	Le chiffre des unités est 0.
2	Le chiffre des unités est paire :0, 2, 4, 6, 8.
5	Le chiffre des unités est 0 ou 5.
4	Le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4
25	Le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 25.
8	Le nombre formé par les trois derniers chiffres est divisible par 8.
125	Le nombre formé par les trois derniers chiffres est divisible par 125.

n	Critères de divisibilité par n (en écriture décimale)
3	La somme des chiffres qui le composent est divisible par 3.
9	La somme des chiffres qui le composent est divisible par 9.
11	La différence de la somme des chiffres de rang impair et de la somme des chiffres de rangs pair (en partant de la droite) est divisible par 11.
7	Le nombre de dizaines diminué du double du chiffre des unités est divisible par 7. Soustraction alternée des tranches de trois chiffres divisible par 7.
13	Le nombre de dizaines augmenté de 4 fois le chiffre des unités est divisible par 13. Soustraction alternée des tranches de trois chiffres divisible par 13.

Division euclidienne

1) Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Soient a et b deux entiers naturels, avec $b \neq 0$. Il existe un unique couple $(q;r)$ d'entiers naturels tels que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.

2) Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Pour deux entiers relatifs a et b avec $b \neq 0$, il existe un unique couple $(q;r)$ avec $q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}$ tel que : $a = bq + r$ avec $0 \leq r < |b|$.

a	b	q	R
dividende	diviseur	quotient	reste, $r \in \mathbb{N}$, $(r = 0 \Rightarrow b \mid a)$

3) Congruence

Soient a et b deux entiers relatifs, et n un entier naturel non nul.

Définition et notation

On dit que a et b sont congrus modulo n si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.

On note $a \equiv b \ (n)$ ou $a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ n)$

Propriétés

Soient a, b, c, a′ et b′ des entiers relatifs, et n un entier naturel non nul.

1.	$a \equiv b\ (n) \Leftrightarrow b \equiv a\ (n)$
2.	$a \equiv b\ (n) \Leftrightarrow a - b \equiv 0\ (n)$
3.	$a \equiv b\ (n) \Leftrightarrow n \mid (a - b)$
4.	$n \mid a \Leftrightarrow a \equiv 0\ (n)$
5.	$n \equiv 0\ (n)$
6.	$a \equiv a\ (n)$
7.	$\left.\begin{array}{l} a \equiv b\ (n) \\ b \equiv c\ (n) \end{array}\right\rangle \Rightarrow a \equiv c\ (n)$
8.	$\left.\begin{array}{l} a \equiv b\ (n) \\ a' \equiv b'(n) \end{array}\right\rangle \Rightarrow a + a' \equiv b + b'(n)$
9.	$\left.\begin{array}{l} a \equiv b\ (n) \\ a' \equiv b'(n) \end{array}\right\rangle \Rightarrow a - a' \equiv b - b'(n)$
10.	$\left.\begin{array}{l} a \equiv b\ (n) \\ a' \equiv b'(n) \end{array}\right\rangle \Rightarrow aa' \equiv bb'(n)$
11.	$a \equiv b(n) \Rightarrow a^p \equiv b^p(n)$ pour tout p de $\mathbb{N}$,
12.	$a \equiv b(n) \Rightarrow ac \equiv bc(n)$

4) Nombres premiers

1)Définition

Un nombre entier naturel p est premier s’il possède exactement deux diviseurs positifs: 1 et p lui-même.

2)Théorème

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 . n admet au moins un diviseur premier.
Si n n'est pas premier alors il admet au moins un diviseur premier p tel que $p \leq \sqrt{n}$.

3)Critère de primalité

Si un entier naturel n n'est divisible par aucun nombre premier dont le carré lui est inférieur ou égal, alors il est premier.

4)Théorèmes

Théorème 1: **Il existe une infinité de nombres premiers (Théorème d'Euclide).**

Théorème 2: **Tout entier naturel *n* > 1 s'écrit de façon unique sous la forme d'un produit de facteurs :** $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times ... \times p_r^{\alpha_r}$ **où** $p_1, p_2, p_3, ..., p_r$ **sont des nombres premiers et** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_r$ **des entiers naturels. On note** $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$.

5) Crible d'Eratosthène

Pour trouver les nombres premiers, on peut utiliser le « crible d'Eratosthène :

~~0~~	~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~
~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19
~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29
~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~
~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~

PGCD

1) Définition

a et b sont deux entiers naturels non nuls. Le plus grand élément des diviseurs communs de a et b est appelé Plus Grand Commun Diviseur de a et de b , on le note PGCD(a ; b) ou $a \wedge b$ **.**

Si a et b sont des entiers relatifs non nuls : $PGCD(a;b) = PGCD(|a|;|b|)$

2) Propriétés

***a*, *b* et *c* étant trois entiers naturels non nuls.**

1.	$c \mid a \text{ et } c \mid b \Leftrightarrow c \mid PGCD(a;b)$
2.	$b \mid a \Rightarrow b = PGCD(a;b)$
3.	$PGCD(a;b) = PGCD(b;a)$ **soit** $a \wedge b = b \wedge a$
4.	$PGCD(a;\ PGCD(b;c)) = PGCD(PGCD(a;b)\ ;c)$ **soit** $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
5.	$aPGCD(b;c) = PGCD(ab;ac)$ **soit** $a(b \wedge c) = ab \wedge ac$
6.	**a, b et g sont trois entiers positifs.**
	$g = PGCD\ (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ g \mid a \text{ et } g \mid b \\ \bullet\ \frac{a}{g} \wedge \frac{b}{g} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ g \mid a \text{ et } g \mid b \\ \bullet\ \text{il existe u et v} \\ \text{tels que } ua+vb=g \end{cases}$

3) Algorithme d'Euclide

Théorème

a et b étant deux entiers naturels non nuls tels que $a \geq b$ et $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$

Si $r = 0$, alors $PGCD(a;b) = b$, sinon ($r \neq 0$), $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$.

En d'autre termes :

$$\left.\begin{array}{l} a,b \in \mathbb{N}^*, \\ a \geq b, \\ a = bq + r, \\ 0 \leq r < b. \end{array}\right| \left| \begin{array}{l} r = 0 \Rightarrow PGCD(a;b) = b \\ r \neq 0 \Rightarrow PGCD(a;b) = PGCD(b;r) \end{array}\right.$$

Propriété

Lorsque b ne divise pas a, le PGCD de a et b est le dernier reste non nul obtenu par l'algorithme d'Euclide.

4) Nombres premiers entre eux

Définition

Deux entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux (ou étrangers) si PGCD(a ;b) = 1.

5) Théorème de Gauss

Soit a, b et c trois entiers naturels non nuls.
Si a et b sont premiers entre eux et si $a|bc$ alors $a|c$.

Conséquences

Soit a, b, c et p des entiers naturels non nuls.

1) $\left|\begin{array}{l}\bullet\ a\,|\,c,\\ \bullet\ b\,|\,c,\\ \bullet\ \mathrm{PGCD}(a,b)=1.\end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{ab\,|\,c}$

2) $\left|\begin{array}{l}\bullet\ p \text{ est premier},\\ \bullet\ p\,|\,ab.\end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{p\,|\,a \text{ ou } p\,|\,b}$

3) $\left|\begin{array}{l}\bullet\ p \text{ est premier},\\ \bullet\ \mathrm{PGCD}(p,a)=1,\\ \bullet\ \mathrm{PGCD}(p,b)=1.\end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{\mathrm{PGCD}(p,ab)=1}$

Si a et b sont premiers entre eux et si $a|bc$ alors $a|c$.

6) Petit théorème de Fermat

Théorème
Soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p (non divisible par p) alors $a^{p-1}-1$ est divisible par p.

Corollaire
Soit p un nombre premier et a un entier naturel. Alors a^p-a est divisible par p.

En d'autres termes :

$$\boxed{\left|\begin{array}{l}\bullet\ p \text{ est premier},\\ \bullet\ a \text{ un entier naturel}.\end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{a^p-a \text{ est divisible par } p}}$$

PPCM

Définition

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. L'ensemble des multiples positifs communs à a et b admet un plus petit élément.

On appelle Plus Petit Commun Multiple de a et de b le plus petit entier strictement positif commun à a et à b. On note PPCM(a ; b) ou $a \vee b$

Propriétés

1. $a \mid b \Rightarrow PPCM(a;b) = b$
2. $PGCD(a;b) = 1 \Rightarrow PPCM(a;b) = ab$
3. $PPCM(a;b) = PPCM(b;a)$ soit $a \vee b = b \vee a$
4. $PPCM(a;\ PPCM(b;c)) = PPCM(PPCM(a;b)\ ;c)$ soit $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
5. $aPPCM(b;c) = PPCM(ab;ac)$ soit $a(b \vee c) = ab \vee ac$
6. $PPCM(a;b) \times PGCD(a;b) = ab$ soit $(a \vee b)(a \wedge b) = ab$

Equations diophantiennes

1)Théorème

a et b sont deux entiers naturels n on nuls et $d = PGCD\,(a,b)$. Il existe deux entiers relatifs x et y tels que $ax + by = d$.

Autrement dit :

$$\left.\begin{array}{l} a,b \in \mathbb{N}^*, \\ d = PGCD\,(a,b) \end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{\text{il existe deux entiers relatifs x et y tels que } ax + by = d}$$

2)Théorème de Bézout

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs x et y tels que $xa + yb = 1$.

Autrement dit :

$$\boxed{\begin{array}{l} a,b \in \mathbb{N}^*, \\ \text{a et b sont premiers entre eux} \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{il existe deux entiers relatifs} \\ \text{x et y tels que } xa + yb = 1 \end{array}}$$

3) Théorème

a, b et c étant trois entiers naturels. L'équation $ax + by = c$ admet des solutions entières si et seulement si c est un multiple de $PGCD(a,b)$.

Systèmes de numération

1) Système de numération décimale (ou « en base 10 ») :

Dans notre système habituel de numération, on dispose de 10 symboles (chiffres) : 0,1,2,3,…9 pour écrire tous nos nombres.

Tout nombre peut donc se décomposer en une somme de puissances de 10.

2) Système binaire (ou « en base 2 ») :

Ce système ne se compose que de deux symboles : 0 et 1 ; ce qui est très pratique pour toute l'électronique puisqu'il n'y a que deux possibilités : le courant passe ou ne passe pas. Tout nombre se décompose donc ici en «paquets de 2 » au lieu de « paquets de 10 », et donc en puissances de 2.

3) Système octal (ou « en base 8 ») :

Le système octal utilise un système de numération ayant comme base 8 (octal => latin octo = huit).
Il faut noter que dans ce système nous avons 8 symboles seulement : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
Cette base obéira aux même règles que la base 10, vue précédemment,

4) Système hexadécimal (ou « en base 16 ») :

On dispose ici de 16 symboles et on décompose selon les puissances de 16. Les chiffres s'écrivent ainsi : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; A ; B ; C ; D ; E ; F.

5) Tableau de correspondance entre base 2, base 8, base 10 et base 16:

Base 10	Base 2	Base 8	Base 16
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14
32	100000	40	20
48	110000	60	30
64	1000000	100	40
100	1100100	144	64
200	11001000	310	C8
400	110010000	620	190
500	111110100	764	1F4
800	1100100000	1440	320
1000	1111101000	1750	3E8
2000	11111010000	3720	7D0

II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

QCM 1

Dans ce QCM, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

1) Quel est l'ensemble des entiers relatifs n tels que n-1 divise n+17 :

- **A.** $\{2\ ;3\ ;4\ ;7\ ;10\ ;19\ ;0\ ;-1\ ;-2\ ;-5\ ;-8\ ;-17\}$
- **B.** $\{2\ ;3\ ;4\ ;7\ ;10\ ;19\ ;-1\ ;-2\ ;-3\ ;-5\ ;-8\ ;-17\}$
- **C.** $\{1\ ;2\ ;4\ ;6\ ;9\ ;-6\ ;-9\ ;-18\}$
- **D.** $\{0\ ;1;2;4;-1;9;-6\ ;-9\ ;-18\}$

2) On divise un entier naturel n par 139 et 142. Les quotients sont égaux et les restes respectifs sont 74 et 32. Quelle est la valeur de n ?

- **A.** 1452
- **B.** 1464
- **C.** 2020
- **D.** 3271

3) On sait que a est un entier naturel, et que le reste de la division euclidienne de a par 90 est 75.Quelle est le reste de la division euclidienne de a par 45 ?

- **A.** 40
- **B.** 35
- **C.** 30
- **D.** 25

4) Le PGCD de 8534 et 6526 est :

- **A.** 26
- **B.** 104
- **C.** 251
- **D.** 502

5) Le PPCM de 72 et 180 est :

- **A.** 270
- **B.** 360
- **C.** 720
- **D.** 1800

QCM 2

Dans ce QCM, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

1) Soit n un entier naturel. Quels sont les entiers toujours premiers entre eux ?
$\mathbf{7n+1}$ et $\mathbf{3n+2}$.
$\mathbf{n+5}$ et $\mathbf{n-2}$.
$\mathbf{2n+5}$ et $\mathbf{n+2}$
$\mathbf{2n-1}$ et $\mathbf{11n+3}$.

2) x et y sont deux entiers naturels tels que PGCD(x, y) = 3 et x + y = 27. Quelle valeur de x peut être un élément d'un couple solution ?
9
18
21
27

3) Soit n un entier naturel. $\mathbf{n^7 - n}$ **est toujours divisible par :**
11
14
20
21

4) Quelle affirmation est vraie ?
$\mathbf{2020^{22} \equiv 1\ [22]}$
$\mathbf{2020^{23} \equiv 1\ [22]}$
$\mathbf{2020^{22} \equiv 1\ [23]}$
$\mathbf{2020^{23} \equiv 1\ [23]}$

5) Quelle affirmation est fausse ?
$\mathbf{2019^{19} - 2019 \equiv 0\ [19]}$
$\mathbf{2020^{18} - 1 \equiv 0\ [19]}$
$\mathbf{2019^{18} - 2019 \equiv 0\ [19]}$
$\mathbf{2019^{2019} - 2019 \equiv 0\ [2019]}$

III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

1) Trouvez, suivant les valeurs de l'entier naturel *n*, le reste de la division euclidienne de 5^n par 7.

2) Trouvez le reste de la division euclidienne de 2021^{2020} par 7.
3) Soit $X = 2011^{2n+1} + 2014^{2n+1}$.
a) Montrez que pour tout entier naturel *n*, X est divisible par 7.

b) Montrez que pour tout entier naturel *n*, X est divisible par 25.

c) X est – il divisible par 175 ? Justifier.

Exercice 2 (Bac)

1) On considère l'équation (E) : $2017x + 41y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs

a) Vérifier que 2017 est un nombre premier puis montrer que l'équation (E) admet des solutions entières.
b) Vérifier que le couple $(-5;246)$ est une solution particulière de (E). Résoudre l'équation (E).
c) Déduire qu'il existe un unique entier y inférieur ou égal à 2016 tel que : $41y \equiv 1[2017]$
Pour la suite de l'exercice on rappelle qu'un entier a est l'inverse de b modulo 2017 si $ab \equiv 1[2017]$.
2) Soient a et b deux entiers relatifs.

a) Montrer que : si $ab \equiv 0[2017]$ alors $(a \equiv 0[2017]$ ou $b \equiv 0[2017])$
b) Déduire que : si $a^2 \equiv 1[2017]$ alors $(a \equiv 1[2017]$ ou $a \equiv -1[2017])$
c) Quels sont donc les entiers de l'intervalle $[1;4033]$ qui sont égaux à leurs inverses modulo 2017 ?

Exercice 3

En rangeant les n pièces de son puzzle, un enfant constate que :

S'il les range par groupe de 5, il lui reste 3 pièces.

S'il les range par groupe de 7, il lui reste 2 pièces.

S'il les range par groupe de 9, il lui reste 1 pièce.

S'il les range par groupe de 11, il ne lui reste plus de pièces.

Sa mère affirme qu'alors 2n-11 est divisible par 5, 7, 9 et 11.

1) A-t-elle raison ?

2) Combien ce puzzle contient de pièces sachant que ce nombre est inférieur à 2020 ?

Exercice 4 (Bac)

1) On considère l'équation (E) : $25x - 49y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.
a) Déterminer le pgcd de 49 et 25 à l'aide de l'algorithme d'Euclide et en déduire que l'équation (E) admet des solutions entières.
b) Vérifier que le couple $(10\ ;\ 5)$ est une solution particulière de (E). Résoudre l'équation (E).
c) Montrer qu'il existe un unique entier p compris entre 1960 et 2018 tel que :
$25p \equiv 5[49]$.
2.a) Justifier que si (x,y) est une solution de (E) alors $5x \equiv 1[7]$ et $y \equiv 0[5]$.
b) Montrer que $5x \equiv 1[7]$ si et seulement si $x \equiv 3[7]$.
3.a) Soit x un entier relatif. Quels sont les restes de x^2 dans la division euclidienne par7 ?
b) Existe-t-il un couple (x,y) d'entiers relatifs tels que (x^2, y^2) soit solution de (E) ?

Exercice 5

Quels sont les entiers n tels que $n^6 - 1$ soit divisible par 9 ?

Exercice 6

On considère l'équation (E) : $11x - 7y = 25$, où x et y sont des entiers relatifs.
1.a) Justifier que l'équation (E) admet des solutions entières et vérifier que le couple $(8,9)$ est une solution particulière de (E).
b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
2) Soit (x, y) une solution de (E).
a) Montrer que si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 25.
b) Soit m un entier relatif. Existe-t il des valeurs de m telles que le quotient $\dfrac{20+11m}{15+7m}$ soit un entier relatif ?

Exercice 7

On donne les nombres suivants en base 10 : $A = 1268$ et $B = 2098$.
Convertir ces nombres :
1) En binaire
2) En base 3
3) En base 5
4) En base 7
5) En base 8.

Exercice 8

On donne les nombres suivants en base 10 : $X = 1216$ et $Y = 8091$.
Convertir ces nombres en hexadécimal .

Exercice 9

Effectuer les opérations suivantes :

1) En base 2 : $110010110 + 10001110 =$
2) En base 8 : $5612 + 7572 =$
3) En base 16 : $1D21 + F1BC =$

Exercice 10

Convertir en décimal les nombres suivants qui sont donnés en représentation hexadécimale :

a) 3DE18
b) 8AFCE.

IV. CORRIGES DES EXERCICES

Corrigé 1

1) On a :

$$\begin{cases} 5^0 \equiv 1[7] \\ 5^1 \equiv 5[7] \\ 5^2 \equiv 4[7] \\ 5^3 \equiv 6[7] \\ 5^4 \equiv 2[7] \\ 5^5 \equiv 3[7] \\ 5^6 \equiv 1[7] \end{cases}$$

On en déduit que pour tout entier k :

$$\begin{cases} 5^{6k} \equiv 1[7] \\ 5^{6k+1} \equiv 5[7] \\ 5^{6k+2} \equiv 4[7] \\ 5^{6k+3} \equiv 6[7] \\ 5^{6k+4} \equiv 2[7] \\ 5^{6k+5} \equiv 3[7] \end{cases}$$

2) On a $2021 = 7\times 288 + 5$, donc $2021 \equiv 5 \quad [7]$ et $2021^{2020} \equiv 5^{2020} \quad [7]$.

D'autre part, $2020 = 6\times 336 + 4$, donc 2020 est du type $6k + 4$.

Alors $5^{2020} \equiv 5^{6k+4} \equiv 2 \quad [7]$.

On en déduit que le reste de la division euclidienne de 2021^{2020} par 7 est 2.

3) On a X= $2011^{2n+1} + 2014^{2n+1}$.

a) On a $2011 = 7\times 287 + 2$, donc $2011 \equiv 2 \quad [7]$ et $2011 \equiv -5 \quad [7]$

On a aussi $2014 = 7\times 287 + 5$, donc $2014 \equiv 5 \quad [7]$.

Donc $2011^{2n+1} \equiv (-5)^{2n+1} = -5^{2n+1} \quad [7]$ (car $2n+1$ est impair) ;

et $2014^{2n+1} \equiv 5^{2n+1} \quad [7]$. Par addition $2011^{2n+1} + 2014^{2n+1} \equiv 0[7]$. Alors, pour tout entier naturel *n*, X est divisible par 7.

b) On sait que $2011 \equiv 11 \quad [25]$ et $2014 \equiv 14 \equiv -11 \quad [25]$.

En élevant à la puissance impaire $2n+1$ et par addition on trouve que $2011^{2n+1} + 2014^{2n+1} \equiv 0[25]$. Alors, pour tout entier naturel *n*, X est divisible par 25.

Remarque :

Le nombre $X=2011^{2n+1} + 2014^{2n+1}$ est divisible par la somme $2011 + 2014$ car la puissance $2n+1$ est impaire. Donc X est divisible par 2025 qui est un multiple de 25. Alors X est divisible par 25.

c) Le nombre X est divisible par deux entiers 7 et 25 qui sont premiers entre eux. Alors X est divisible par leur produit qui est 175 .

Corrigé 2

1) a) Vérifions que 2017 est un nombre premier :

Comme $\sqrt{2017} \simeq 44.9$, et les nombres premiers inferieurs à 45 sont :

$2;3;5;7;11;13;17;19;23;29;31;37;41$ et 43 ; et comme 2017 n'est divisible par aucun de ces nombres, il est alors premier.

b- Vérifions que $(-5,246)$ est solution de l'équation (E) : $2017x+41y=1$,

On a : $2017(-5)+41\times 246 = -10085+10086=1$

Donc le couple $(-5,246)$ est solution de l'équation (E) .

Résolution de l'équation (E) :

Comme $2017 \wedge 41 = 1$ alors l'équation (E) admet des solutions entières. Soit $(x;y)$ un couple solution de l'équation (E) :

$2017x+41y = 2017(-5)+41(246) \Leftrightarrow 2017(x+5) = 41(246-y)$

Donc 41 divise $2017(x+5)$ or $41 \wedge 2017 = 1$

Donc d'après le théorème de Gauss : 41 divise $x+5$, D’où il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $x+5=41k$ soit $x=-5+41k$,

En remplaçant $x+5$ par $41k$ dans l’égalité $2017(x+5)=41(246-y)$ on obtient $y=246-2017k$.

Donc $S=\{(-5+41k, 246-2017k); k \in \mathbb{Z}\}$

c) Montrons qu’il existe un unique entier naturel y inférieur ou égal à 2016 tel que : $41y \equiv 1[2017]$

Soit y un entier naturel inférieur ou égal à 2016 vérifiant : $41y \equiv 1[2017]$

Il existe donc un entier x tel que $41y = 1+2017\times(-x)$ soit $2017x+41y=1$ par conséquent (x ; y) est solution de l’équation (E) et $y=246-2017k,\ k \in \mathbb{Z}$
$0 \le 246-2017k \le 2016$ d’où $-0,87 \le k \le 0,12$ donc $k=0$ et $y=246$

2) Soient a et b deux entiers relatifs

a) Montrons que si $a.b \equiv 0[2017]$ alors $a \equiv 0[2017]$ ou $b \equiv 0[2017]$

Si $ab \equiv 0[2017]$ et $a \not\equiv 0[2017]$ alors $\begin{cases} 2017 | ab \\ 2017 \wedge a = 1 \end{cases}$, car 2017 est premier

Donc d’après Gauss $2017|b$ et $b \equiv 0[2017]$

Par conséquent soit $a \equiv 0[2017]$ ou $b \equiv 0[2017]$

b) Montrons que si $a^2 \equiv 1[2017]$ alors $a = 1[2017]$ ou $a \equiv -1[2017]$

Si $a^2 \equiv 1[2017]$ alors $a^2-1 \equiv 0[2017] \Rightarrow (a-1)(a+1) \equiv 0[2017]$

D’après 2) a) soit $a-1 \equiv 0[2017]$ ou $a+1 \equiv 0[2017]$

$$a = 1[2017] \text{ ou } a \equiv -1[2017]$$

c) Déterminons les entiers de l’intervalle $[1, 4033]$ qui sont égaux à leur inverse modulo 2017 :

Supposons qu’un entier a est égal à son inverse, c-à-d que $a^2 \equiv 1[2017]$ alors $a = \pm 1[2017]$

Soit $a \equiv 1 \; [2017]$ **ou bien** $a \equiv -1 \; [2017]$

$a = 2017k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}$

$1 \le a \le 4033$

$1 \le 2017k + 1 \le 4033$

$0 \le k \le \dfrac{4033}{2017}$

$0 \le k \le 1{,}99$

$\Rightarrow \quad k = 0$, **ou** $k = 1$

$a = 1$ **ou** $a = 2018$

$a = 2017k - 1, \quad k \in \mathbb{Z}$

$1 \le a \le 4033$

$1 \le 2017k - 1 \le 4033$

$2 \le 2017k \le 4034$

$0{,}0009 \le k \le 2$

$\Rightarrow \quad k = 1$ **ou** $k = 2$

$a = 2016$ **ou** $a = 4033$

Donc les entiers de l'intervalle $[1, 4033]$ **qui sont égaux à leurs inverses modulo 2017 sont** $\{1, 2018, 2016, 4033\}$ **.**

Corrigé 3

1) Soit n le nombre de pièces du puzzle.

S'il les range par groupe de 5, il lui reste 3 pièces. Alors $n \equiv 3\,[5]$

S'il les range par groupe de 7, il lui reste 2 pièces. Alors $n \equiv 2\,[7]$

S'il les range par groupe de 9, il lui reste 1 pièce. Alors $n \equiv 1\,[9]$

S'il les range par groupe de 11, il ne lui reste plus de pièces. Alors $n \equiv 0\,[11]$

On en déduit que :

$2n - 11 \equiv 6 - 11 = -5 \equiv 0\,[5]$

$2n - 11 \equiv 4 - 11 = -7 \equiv 0\,[7]$

$2n - 11 \equiv 2 - 11 = -9 \equiv 0\,[9]$

$2n - 11 \equiv -11 \equiv 0\,[11]$

Alors $2n - 11$ **est divisible par 5, 7, 9 et 11. Sa mère a raison.**

2) Le nombre $2n-11$ est divisible par quatre nombres premiers. Alors il est divisible par leur produit $5\times7\times9\times11=3465$.

Il existe un entier k tel que $2n-11=3465k$.

D'autre part $n<2020 \Rightarrow 2n-11<4029$

Alors la seule valeur possible de k est $k=1$.

$k=1 \Rightarrow 2n-11=3465 \Rightarrow 2n=3476 \Rightarrow n=1738$

Conclusion : Le puzzle contient 1738 pièces.

Corrigé 4

1.a) Pour appliquer l'algorithme d'Euclide on effectue les divisions euclidiennes successives :

$$
\begin{aligned}
49 &= 25\times1+24\\
25 &= 24\times1+1\\
24 &= 1\times24+0
\end{aligned}
$$

Le dernier reste non nul de la division euclidienne de 49 par 25 est égal 1. Alors $p\gcd(49,25)=1$.

L'équation (E) : $25x-49y=5$ admet des solutions entières car le $p\gcd(25,49)$ divise 5.

b) Pour vérifier que le couple $(10\ ;\ 5)$ est une solution particulière de (E), on remplace dans (E) :

On a $25\times10-49\times5=250-245=5$. Alors le couple $(10\ ;\ 5)$ est une solution particulière de (E).

Pour résoudre (E) :

On sait que pour tout couple (x,y) solution de (E) on a : $\begin{cases}25x-49y=5\\25\times10-49\times5=5\end{cases}$

Ce qui implique, par soustraction, que : $25(x-10)-49(y-5)=0$

Ce qui équivaut à : $25(x-10)=49(y-5)$

Cette dernière égalité montre que $\begin{cases}49 \mid 25(x-10)\\25 \mid 49(y-5)\end{cases}$

Or $p\gcd(49,25)=1$, d'après le théorème de Gauss : $\begin{cases} 49 \mid (x-10) \\ 25 \mid (y-5) \end{cases}$

Ce qui équivaut à : « il existe un entier k tel que $\begin{cases} x-10=49k \\ y-5=25k \end{cases}$ » ; soit $\begin{cases} x=49k+10 \\ y=25k+5 \end{cases}$

Réciproquement ; quel que soit l'entier k on montre en remplaçant dans (E) que le couple $(49k+10, 25k+5)$ est solution de (E).

<u>Conclusion</u> : les solutions de (E) sont les couples de la forme $(49k+10, 25k+5)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

c) Pour tout entier p on a :

$$\begin{aligned} 25p \equiv 5[49] &\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : \ 25p = 49q+5 \\ &\Leftrightarrow 25p - 49q = 5 \\ &\Leftrightarrow (p,q) \text{ est solution de } (E) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p = 49k+10 \\ q = 25k+5 \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Cherchons les valeurs de p comprises entre 1960 et 2018 :

$$\begin{aligned} 1960 \le p \le 2018 &\Leftrightarrow 1960 \le 49k+10 \le 2018 \\ &\Leftrightarrow 1950 \le 49k \le 2008 \\ &\Leftrightarrow 49\times 39+39 \le 49k \le 49\times 41+9 \\ &\Leftrightarrow k = 40 \end{aligned}$$

car il existe un seul multiple de 49 (nombre du type 49k) compris entre $49\times 39+39$ et $49\times 41+9$. C'est 49×40 Enfin, la seule valeur possible de p est $p = 49\times 40+10 = 1970$. Donc $p = 1970$

Conclusion : Il existe un unique entier p compris entre 1960 et 2018 tel que : $25p \equiv 5[49]$

2.a) Si le couple (x,y) est une solution de (E) alors $25x-49y=5$ ce qui implique que $25x-5=49y$. Donc $5(5x-1)=7\times 7y$ d'où 7 divise le nombre $5(5x-1)$. Or 5 et 7 sont deux nombres premiers - donc premiers aussi entre eux, d'où d'après le théorème de Gauss, 7 divise $5x-1$. Alors il existe un entier k tel que $5x-1=7k$. Donc $5x=7k+1$ ce qui prouve que $5x \equiv 1[7]$

D'autre part si le couple (x,y) est une solution de (E) alors $25x-49y=5$ ce qui montre que $49y=5(5x-1)$. Donc 5 divise le nombre $49y$. Or 5 et 49 sont premiers entre eux (5 est premier et ne divise pas 49) , alors 5 divise y. C'est-à-dire que $y \equiv 0[5]$

b) Si $x \equiv 3[7]$, alors $5x \equiv 5\times 3[7]$. Donc $5x \equiv 1[7]$.

Réciproquement : les restes de divisions possibles d'un entier x par 7 sont les éléments de l'ensemble : $\{0,1,2,3,4,5,6\}$.

Dressons le tableau de congruence modulo 7 pour x et 5x :

$x \quad [7]$	0	1	2	3	4	5	6
$5x \quad [7]$	0	5	3	1	6	4	2

On en déduit que $5x \equiv 1[7]$ implique que $x \equiv 3[7]$.

<u>Conclusion</u> :Pour tout entier relatif x : $5x \equiv 1[7]$ si et seulement si $x \equiv 3[7]$.

3.a) Dressons le tableau de congruence modulo 7 pour x et x^2 :

$x \quad [7]$	0	1	2	3	4	5	6
$x^2 \quad [7]$	0	1	4	2	2	4	1

On en déduit que pour tout entier x, le reste de la division euclidienne de x^2 par 7 est un élément de l'ensemble $\{0;1;2;4\}$

b) D'après la question 2) pour que le couple $(x^2;y^2)$ soit solution de (E) il faut que $5x^2 \equiv 1[7]$. Ce qui implique que $x^2 \equiv 3[7]$ et ceci est impossible car le reste 3 n'appartient pas à l'ensemble précédent $\{0;1;2;4\}$ des restes de la division euclidienne de x^2 par 7.

Conclusion : il n'existe aucun couple (x,y) d'entiers relatifs tels que (x^2,y^2) soit solution de (E).

<u>Autre méthode</u> : Pour que le couple $(x^2;y^2)$ soit solution de (E) il faut que

$$25x^2 - 49y^2 = 5$$

Donc $(5x-7y)(5x+7y) = 5$. Les décompositions possibles de 5 dans $\mathbb{Z}$ sont $5\times 1, 1\times 5, (-5)\times(-1), (-1)\times(-5)$.

Alors l'équation $25x^2 - 49y^2 = 5$ se ramène à l'un des quatre systèmes suivants, avec (x,y) entiers relatifs:

$\begin{cases}5x-7y=5\\5x+7y=1\end{cases}$, $\begin{cases}5x-7y=1\\5x+7y=5\end{cases}$ $\begin{cases}5x-7y=-5\\5x+7y=-1\end{cases}$, $\begin{cases}5x-7y=-1\\5x+7y=-5\end{cases}$.

L'addition (ou la soustraction) des équations de chaque système implique une contradiction (x ou y non relatif).

Par exemple l'addition des équations du premier système implique 10x = 6, ce qui est impossible dans l'ensemble des entiers relatifs.

On conclut qu'il n'existe aucun couple (x,y) d'entiers relatifs tels que (x^2,y^2) soit solution de (E).

Corrigé 5

Si n est un multiple de 3, alors n^2 est un multiple de 9 . Donc n^6 est divisible par 9. C'est-à-dire que $n^6 - 1$ n'est pas divisible par 9. C'est le cas où n congru 0 ; 3 ou 6 modulo 9.

Sinon :

$n\equiv 1[9] \Rightarrow n^6\equiv 1[9] \Rightarrow n^6-1\equiv 0[9]$

$n\equiv 2[9] \Rightarrow n^3\equiv 8\equiv -1[9] \Rightarrow n^6\equiv 1[9] \Rightarrow n^6-1\equiv 0[9]$

$n\equiv 4[9] \Rightarrow n^3\equiv 64\equiv 1[9] \Rightarrow n^6\equiv 1[9] \Rightarrow n^6-1\equiv 0[9]$

$n\equiv 5[9] \Rightarrow n\equiv -4[9] \Rightarrow n^3\equiv -1[9] \Rightarrow n^6\equiv 1[9] \Rightarrow n^6-1\equiv 0[9]$

$n\equiv 7[9] \Rightarrow n\equiv -2[9] \Rightarrow n^3\equiv 1[9] \Rightarrow n^6\equiv 1[9] \Rightarrow n^6-1\equiv 0[9]$

$n\equiv 8[9] \Rightarrow n\equiv -1[9] \Rightarrow n^6\equiv 1[9] \Rightarrow n^6-1\equiv 0[9]$.

Conclusion : Les solutions sont donc tous les entiers non divisibles par 3.

Corrigé 6

$$11x - 7y = 25 \quad (E)$$

1. a) Existence des solutions entières de (E) et solution particulière :

On sait que 7 et 11 sont des nombres premiers distincts, donc ils sont premiers entre eux, c'est-à-dire que $PGCD(7,11) = 1$. Et comme 1 divise 25 alors (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}$.

D'autre part : $11 \times 8 - 7 \times 9 = 88 - 63 = 25$, ce qui signifie que le couple $(8, 9)$ est une solution particulière de (E).

b) Résolution de (E) :

Si (x, y) est une solution générale de (E), alors : $11x - 7y = 25$.

Et comme : $11 \times 8 - 7 \times 9 = 25$. Alors par soustraction :

$$11(x - 8) - 7(y - 9) = 0$$

$$\Rightarrow 11(x - 8) = 7(y - 9) \quad (*)$$

Donc 7 divise $11(x - 8)$.

Or $\text{PGCD}(7, 11) = 1$, alors d'après Gauss 7 divise $(x - 8)$.

Donc il existe un entier relatif k tel que : $x - 8 = 7k$, c'est-à-dire :

$$x = 7k + 8$$

En injectant cette valeur de x dans la relation $(*)$, on obtient :

$$11 \times 7k = 7(y - 9)$$

Ce qui implique que :

$$y = 11k + 9$$

Réciproquement :

Si $x = 7k + 8$ et $y = 11k + 9$ avec k un entier relatif, alors :

$$11x - 7y = 11 \times 7k + 11 \times 8 - 7 \times 11k - 7 \times 9 = 11 \times 8 - 7 \times 9 = 25$$

Et ainsi l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\boxed{S = \{(7k + 8, 11k + 9); k \in \mathbb{Z}\}}$$

2. (x, y) est une solution de (E).

a) Montrons que si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 25 :

si x est un diviseur de y, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $y = kx$.

Mais comme (x, y) est une solution de (E), alors :

$$11x - 7y = 25$$
$$\Rightarrow 11x - 7kx = 25$$
$$\Rightarrow x(11 - 7k) = 25$$

Ce qui implique que x est un diviseur de 25.

Ainsi, si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 25.

b) m est un entier relatif. Voyons s'il existe des valeurs de m pour lesquelles le quotient $\frac{20+11m}{15+7m}$ est un entier relatif :

On sait que :

$$20 + 11m = 11(m + 1) + 9$$

Et :

$$15 + 7m = 7(m + 1) + 8$$

Donc le couple $(15 + 7m, 20 + 11m)$ est une solution de (E) car $(m + 1) \in \mathbb{Z}$.

Si le quotient $\frac{20+11m}{15+7m}$ est un entier relatif, alors $(15 + 7m)$ divise $(20 + 11m$, ce qui implique, d'après la question 2. a), que : $15+7m$ divise 25.

Or les diviseurs de 25 sont : -25, -5, -1, 1, 5 et 25, alors l'un des cas ci-dessous se pose :

$15 + 7m = -25 \Rightarrow 7m = -40$: impossible car m est un entier relatif.

$15 + 7m = -5 \Rightarrow 7m = -20$: impossible car m est un entier relatif.

$15 + 7m = -1 \Rightarrow 7m = -16$: impossible car m est un entier relatif.

$15 + 7m = 5 \Rightarrow 7m = -10$: impossible car m est un entier relatif.

$15 + 7m = 25 \Rightarrow 7m = 10$: impossible car m est un entier relatif.

$15 + 7m = 1 \Rightarrow 7m = -14 \Rightarrow m = -2$: pour cette valeur de m, le quotient $\frac{20+11m}{15+7m}$ est égal à $\frac{20-22}{15-14} = -2$ est bien un entier relatif.

Ainsi, la seule valeur de m pour laquelle le quotient $\frac{20+11m}{15+7m}$ est un entier relatif est : $\boxed{m = -2}$.

Corrigé 7

Pour convertir un nombre donné en système décimal (base 10) en une autre base :

1) On divise le nombre décimal par la base du nouveau système : on obtient un quotient entier et un reste qui sera utilisé pour former un chiffre de la nouvelle représentation dans le nouveau système ;

2) On continue en divisant le quotient entier de l'opération précédente par la base et on en tire un deuxième reste comme précédemment ;

3) On recommence cette opération jusqu'à ce que l'on obtienne un quotient égal à zéro.

4) Le résultat obtenu est constitué de tous les restes des divisions, écrits de gauche à droite, en partant du dernier vers le premier.

A) On commence par le nombre $A = 1268$:

<u>En base 2 :</u>

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
1268	2	634	0
634	2	317	0
317	2	158	1
158	2	79	0
79	2	39	1
39	2	19	1
19	2	9	1
9	2	4	1
4	2	2	0
2	2	1	0
1	2	0	1

Il faut lire les restes de bas en haut, ce qui donne : $1268 = (10011110100)_2$

<u>En base 3 :</u>

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
1268	3	422	2
422	3	140	2
140	3	46	2

46	**3**	**15**	**1**
15	**3**	**5**	**0**
5	**3**	**1**	**2**
1	**3**	**0**	**1**

Il faut toujours lire les restes de bas en haut, ce qui donne : $\mathbf{1268 = (1201222)_3}$

<u>En base 5 :</u>

Dividende	**Diviseur(base)**	**Quotient**	**Reste**
1268	**5**	**253**	**3**
253	**5**	**50**	**3**
50	**5**	**10**	**0**
10	**5**	**2**	**0**
2	**5**	**0**	**2**

Alors $\mathbf{1268 = (20033)_5}$

<u>En base 8 :</u>

Dividende	**Diviseur(base)**	**Quotient**	**Reste**
1268	**8**	**158**	**4**
158	**8**	**19**	**6**
19	**8**	**2**	**3**
2	**8**	**0**	**2**

Alors $\mathbf{1268 = (2364)_8}$

B) Pour le nombre B = 2098 :

<u>En base 2 :</u>

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
2098	2	1049	0
1049	2	524	1
524	2	262	0
262	2	131	0
131	2	65	1
65	2	32	1
32	2	16	0
16	2	8	0
8	2	4	0
4	2	2	0
2	2	1	0
1	2	0	1

Alors $2098 = (100000110010)_2$

<u>En base 3 :</u>

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
2098	3	699	1
699	3	233	0
233	3	77	2
77	3	25	2
25	3	8	1
8	3	2	2
2	3	0	2

Alors $2098 = (2212201)_3$

En base 5 :

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
2098	5	419	3
419	5	83	4
83	5	16	3
16	5	3	1
3	5	0	3

Alors $2098 = (31343)_5$

En base 8 :

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
2098	8	262	2
262	8	32	6
32	8	4	0
4	8	0	4

Alors $2098 = (4062)_8$

Corrigé 8

1) Pour le nombre $X = 1216$ **:**

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
1216	16	76	0
76	16	4	12=C
4	16	0	4

Alors $1216 = (4C0)_{16}$

2) Pour le nombre $Y = 8091$ **:**

Dividende	Diviseur(base)	Quotient	Reste
8091	16	505	11=B
505	16	31	9
31	16	1	15=F
1	16	0	1

Alors $8091 = (1F9B)_{16}$.

Corrigé 9

1) En base 2 : $110010110 + 10001110 = 1000100100$

2) En base 8 : $5612 + 7572 = 15404$

3) En base 16 : 1D21 + F1BC = 10EDD

Corrigé 10

On décompose suivant les puissances de 16, et on remplace les symboles A,B,C,D,E, F par leurs équivalents en base 10 :

1) Pour le premier nombre :

$$\begin{aligned} 3DE18 &= 3\times16^4 + D\times16^3 + E\times16^2 + 1\times16^1 + 8\times16^0 \\ &= 3\times16^4 + 13\times16^3 + 14\times16^2 + 1\times16^1 + 8\times16^0 \\ &= 253464 \end{aligned}$$

$$(3DE18)_{16} = (253464)_{10}$$

2) Pour le second nombre :

$$\begin{aligned} 8AFCE &= 8\times16^4 + A\times16^3 + F\times16^2 + C\times16^1 + E\times16^0 \\ &= 8\times16^4 + 10\times16^3 + 15\times16^2 + 12\times16^1 + 14\times16^0 \\ &= 569294 \end{aligned}$$

$$(8AFCE)_{16} = (569294)_{10}.$$

V. EXERCICES DE SYNTHESE

Exercice 1

1) Écrire l'ensemble des entiers relatifs diviseurs de 6.

2) Déterminer les entiers relatifs n tels que $n-4$ divise 6.

3) Déterminer les entiers relatifs n tels que $n-4$ divise $n+2$.

4) Déterminer les entiers relatifs n tels que $n+1$ divise $3n-4$.

Exercice 2

Déterminer le reste de la division par 7 du nombre 32^{2021} .

Exercice 3

1) Déterminer les restes de la division de 5^{p} par 13 pour p entier naturel.

2) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre $N=31^{4n+1}+18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Exercice 4

p et q sont des entiers naturels.

1) Démontrez que $2^{pq}-1$ est divisible par $2^{p}-1$ et par $2^{q}-1$.

2) Déduisez en que pour que $2^{n}-1$ soit premier, il faut que n soit premier.

3) Prouvez à l'aide d'un contre-exemple que la condition « n est premier » n'est pas suffisante pour que $2^{n}-1$ soit premier.

Exercice 5 (Bac)

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $(E):\ 7x-5y=1$

a) Justifier que le couple $(3;4)$ est solution de (E) puis résoudre (E).

b) Montrer que si $(x;y)$ est une solution de (E) alors $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ y \equiv 4[7] \end{cases}$

2) Dans cette question on se propose de déterminer l'ensemble S des entiers relatifs A tels que $\begin{cases} A \equiv 4[5] \\ A \equiv 3[7] \end{cases}$

a) Soit A un élément de S. Démontrer qu'il existe un couple d'entiers $(x;y)$ tel que $A = 7x+3 = 5y+4$ où $(x;y)$ est une solution de (E)

b) En déduire que $A \in S$ si et seulement si $A \equiv 24[35]$.

c) Soit n et a deux entiers naturels ($0 < n < 9$) et B un entier qui s'écrit, en base n, sous la forme $\overline{374a}$. Déterminer n puis en déduire l'écriture décimale de l'entier B sachant qu'il appartient à S.

Exercice 6 (Bac)

On considère l'équation (E) : $5x - 3y = 17$, où x et y sont des entiers relatifs.
1.a) Justifier que l'équation (E) admet des solutions entières et vérifier que le couple $(4,1)$ est une solution particulière de (E).
b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
2) Soit (x,y) une solution de (E).
a) Montrer que si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 17.
b) Soit m un entier relatif. Trouver les valeurs de m telles que le quotient $\dfrac{1+5m}{4+3m}$ soit un entier relatif.

Exercice 7

1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) :18a + 23b = 2001.

a) Montrer que pour tout couple (a, b) solution de (E) a est un multiple de 23 et b un multiple de 3.

b) Déterminer une solution de (E).

c) Résoudre (E).

2) Déterminer les couples (p, q) d'entiers tels que 18d + 23m = 2001, où d désigne le pgcd de p et q, et m leur ppcm.

Exercice 8

1. On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où $(x ; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation (E).

2. Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple (a ; b) de nombres entiers vérifiant : $\begin{cases} N = 8a+1 \\ N = 5b+2 \end{cases}$.

a. Montrer que le couple (a ; b) est solution de (E).

b. Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?

3. a. Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où (x ; y) est un couple de nombres entiers relatifs.

Exercice 9

1) Vérifier les conversions suivantes du nombre X

Base	**2**	**3**	**5**	**8**	**10**	**16**
X	**1000111101101**	**20021222**	**121324**	**10755**	**4589**	**11ED**

2) Compléter le tableau de conversion

Base	**2**	**3**	**5**	**8**	**10**	**16**
X			**4203**			
Y				**6724**		
Z						**1C2D**

Exercice 10

1. Résolution d'une équation

On considère l'équation (1) : $11n - 24m = 1$ d'inconnue (n, m) élément de $\mathbb{Z}^2$.

a. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).

c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2. Recherche du PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$

a. Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

b. Soit (n, m) un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1). Montrer que l'on peut écrire

$$(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9.$$

c. Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$

Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :

$$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9.$$

d. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.

e. Déduire des questions précédentes le PGCD de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.

Exercice 11

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD des nombres 28 et 31. Trouver alors deux nombres x et y entiers relatifs tels que $31x - 28y = 1$.

2. Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation $31x - 28y = 414$.

3. Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On donne les points A(–30 ; – 48) et B(82 ; 76). On appelle (D) la droite (AB).

a. Trouver l'ensemble des points M(x ; y) de (D) dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

b. Le repère utilisé pour le graphique est gradué de –10 à +10 en abscisses et de –14 à +14 en ordonnées. Vérifiez et expliquez pourquoi il n'y a pas de point de (D) à coordonnées entières visible sur le graphique.

c. Pour remédier à l'inconvénient du 3.b. on décide d'agrandir la fenêtre à [–40 ; +40] en abscisses et à [–50 ; +10] en ordonnées. Combien y-a-t-il de points de (D) à coordonnées entières sur ce nouveau graphique ? Faire la figure.

Exercice 12

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 ; etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent des mathématiciens.

Cet exercice propose d'en découvrir quelques-unes.

Pour k entier strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit à l'aide de k chiffres 1.

Ainsi $N_1 = 1$, $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, …

1. Citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit. Justifier brièvement la réponse.

2. A quelle condition sur k le nombre 3 apparaît-il dans la décomposition du rep-unit N_k ? Justifier brièvement la réponse.

3. Pour $k > 1$, le rep-unit N_k est défini par $N_k = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i = 1 + 10 + 100 + ... + 10^{k-1}$.

Justifier l'égalité : $9N_k = 10^k - 1$ pour tout entier $k > 1$.

4. Soit k un entier strictement positif. Démontrer que : « $10^k \equiv 1(7)$ » équivaut à « k est multiple de 6 ».

En déduire que 7 divise N_k si et seulement si k est multiple de 6.

Exercice 13 (Bac- traduit)

On considère l'équation (E) : $25x - 9y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs. 1.a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $25u + 9v = 1$. En déduire une solution particulière (x_0, y_0) de (E). b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E). 2) On désigne par d le PGCD de x et y où (x, y) est une solution particulière de (E). a) Quelles sont les valeurs possibles de d ? b) Quelles sont les solutions (x, y) de (E) telles que x et y soient premiers entre eux? c) Peut-on trouver un couple (x, y) d'entiers relatifs tel que (x^2, y^2) soit solution de (E) ? Justifier votre réponse.	نعتبر المعادلة $25x - 9y = 5$: (E) حيث x و y عددان صحيحان. 1.a) باستخدام خوارزمية إقليدس عين عددين صحيحين u و v بحيث يكون $25u + 9v = 1$. استنتج حلا خاصا (x_0, y_0) للمعادلة (E) . b) عين مجموعة حلول (E). 2) نعني بالرمز d المضاعف المشترك الأعلى للعددين x و y حيث (x, y) حل للمعادلة (E). a) ما هي القيم الممكنة للعدد d؟ b) ما هي الحلول (x, y) للمعادلة (E) التي من أجلها يكون العددان x و y أوليين فيما بينهما؟ c) هل يمكن إيجاد زوج (x, y) من الأعداد الصحيحة بحيث يكون (x^2, y^2) حلا للمعادلة (E)؟ برر جوابك.

Dépôt légal N° 2177/2020

Bibliothèque nationale

Nouakchott

ESSEBIL Au Bac

Mathématiques

-

Dans les ouvrages de la collection ESSEBILAU BAC - Mathématiques vous trouverez chaque trimestre:

- ✓ **Des résumés de cours pour réviser rapidement et mémoriser les formules**
- ✓ **Des QCM pour l’entraînement et la maîtrise des notions du programme**
- ✓ **Des exercices corrigés variés et progressifs pour teser et approfondir vos connaissances**
- ✓ **Des exercices de synthèse et des problèmes non corrigés pour préparer éfficacement l’épreuve du Bac**
- ✓ **Quelques traductions pour améliorer le niveau d’acquisition.**