ICORP ENCYCLOPEDIA

Edition 2016

I TORE

L’ incontournable de la préparation
au concours d’entrée à

L’ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE

FILIERE MATHÉMATIQUES

Intelligentsia corporation

AsTEX Edition

Dédicaces

Cet ouvrage est dédié à toutes les personnes qui ont obtenu leur admission dans les grandes écoles scientifiques, d'ingénierie et de médecine du Cameroun avec le concours de près ou de loin de la maison INTELLIGENTSIA CORPORATION. Vous faites notre fierté car vous êtes la preuve que tout le monde peut y arriver...

Note de l'équipe I-CORP

Chers(ères) élèves, Arrêtez de vous fier à ceux qui disent et ou pensent que vous n'êtes pas capables de grand-chose ; le seul fait d'être rentré en possession de cet ouvrage montre, à n'en point douter, combien ambitieux vous pouvez être.
Vous avez porté votre choix sur une Ecole d'ingénierie, cet ouvrage est vôtre ; mais là commence votre « calvaire ». Votre intellect sera en effet soumis à toutes formes de difficultés des plus basiques aux plus affinées.
Notre ultime objectif est de vous faire comprendre que vous partez sur le même pied d'égalité que n'importe quel élève du même niveau académique que vous. La différence résidera en ce que vous aurez su prendre l'ascendant psychologique sur le reste de vos camarades au jour du concours.
La Motivation, le sens du Sacrifice et de l'effort, le Don de soi-même, l'Abnégation a toutes épreuves, l'Endurance devant l'adversité, l'Humilité sont les qualités que vous devrez posséder pour atteindre vos ambitions les plus folles quel que soit le domaine dans lequel vous aurez décidé de vous lancer. Il peut arriver que vous buttiez sur des difficultés apparemment insurmontables, le plus important sera alors de savoir vous rapprocher de la source « idéale » pour avoir de plus amples éclairages.
Dès à présent commencez ou continuez à croire en vous et en votre potentiel sans toutefois cédé aux diverses pressions. « A tes résolutions répondra le succès ;Sur tes sentiers brillera la lumière. »
Votre motivation se doit d'être canalisée par les citations et conseils que regorge cet ouvrage. Prenez donc le temps en introduction de chaque sous-partie d'en analyser la signification.

E-mail : infos@intelligentsiacorporation.com
site Web : www.intelligentsiacorporation.com
Tel : 671 83 97 97
698 22 22 77

L'équipe **INTELLIGENTSIA CORPORATION**

Remerciements

Parce qu'ils ont été présents depuis la conception jusqu'à la version actuelle en passant par les nombreuses mises à jour de cet ouvrage et aussi et surtout par devoir de conscience nous tenons à remercier tous ceux qui y ont activement participés de près ou de loin par leurs conseils ou par leurs actions. Ceux sont entre autres et sans être exhaustifs :

- Les enseignants des écoles normales supérieures (ENS) du cameroun qui nous ont soutenus dans l'élaboration des corrigés ;
- Les élèves-ingénieurs de l'ENSP et l'ensemble des enseignants du groupe **intelligentsia corporation** ;
- La direction technique du groupe **intelligentsia corporation** ;
- La direction générale du groupe **intelligentsia corporation** ;
- La direction des affaires académiques du groupe **intelligentsia corporation** sous la coordonation de **Noula Gires**, ***élève-ingénieur en cinquième année génie mécanique à l'ENSP*** pour l'élaboration de ce livre ;
- Le **Dr. Takam**, enseignant de mathématique à l'école Nationale Supérieure Polytechnique de Yaoundé ;
- Le groupe **AsTEX Edition** pour l'édition de qualité de ce document sous la coordination de : **(Ngansob Yves, Tchonang Magellan, Kana Abel...)** ;
- Les differents superviseurs de région.

Préface

L'orientation académique et socio-professionnelle est une question de taille pour le jeune camerounais. Dans la situation de « flou » général observée, il est très difficile pour le jeune qui se pose sérieusement la question « que vais-je devenir après le bac ? » De facilement trouver ses repères. Et pour cause :

- Une transition pour la plus part absente du secondaire au supérieur ;
- La faiblesse, voir le manque d'informations relatifs à une orientation solide ;
- L'ignorance générale de ce qu'est un concours et de comment s'y prendre pour le réussir ;
- La nécessité d'obtention de documents solides et complets préparant l'élève dans les aspects les plus importants ;
- En dernier lieu la corruption jusque-là déplorée dans notre pays, qui met en avant comme critère de réussite les capacités financières et relationnelles de la famille du candidat et non ses aptitudes.

Pour ce dernier cas, il est à noter c'est une voie très risquée qui se solde pour beaucoup par un échec lamentable, mais aussi que, pour le bonheur de tous, les meilleurs n'ont jamais besoin de suivre cette voix. Une solution, faire ressortir le meilleur qui sommeille en chaque individu.

C'est le but que c'est donnée l'entreprise **INTELLIGENTSIA CORPORATION**, depuis plus de cinq ans déjà leader de l'orientation professionnelle et de la préparation aux concours d'entrée dans les grandes écoles scientifiques au Cameroun.

Pour une meilleure préparation individuelle des apprenants, elle a mis sur pied la collection **ICORP- ENCYCLOPEDIA** qui est un document indispensable à la préparation aux concours. En effet, elle propose des cours, des explications pratiques, des méthodes prouvées pour booster les résultats, un grand nombre de sujets corrigés des dernières années de presque tous les concours d'entrée dans les grandes écoles au Cameroun.

C'est ainsi que dans cette collection, on distinguera :

- Le « **PI** », guide de référence pour la préparation du concours d'entrer à l'École Nationale Supérieure Polytechnique de Yaoundé (ENSP)
- L' « **I-BRAIN** », guide de référence pour la préparation du concours commun d'admission aux études médicales ;
- Le « **SIGMA** », guide de référence pour la préparation du concours d'entrée à l'École Nationale Supérieure des Travaux Publics (ENSTP)
- L' « **EPSILON** », guide de référence pour la préparation du concours d'entrée à l'École de Géologie et d'Exploitation Minière (EGEM)
- Les « **ITORE-MATH**, **ITORE-PHYS**, **ITORE-CHIM**, **ITORE-BIO** » qui sont des guides pour l'entrée aux différentes filières scientifiques de l'École Normale Supérieure (ENS)
- Et pleins d'autres (**ICORE (ENSPT)**, **THE ROAD TO FASA** (**FASA**), **THETA** (**FGI**), ...)

Cette dernière édition de la collection ICORP-ENCYCLOPEDIA n'aura pas fini de surprendre, tant dans la diversité des secrets qu'elle met à la disposition des étudiants que dans la facilité de manipulation.Une nouvelle configuration des ouvrages, une mise en page actualisée et une réédition des équations, figures et citations en début de partie en améliorent convivialité, lisibilité et donc compréhension

Nous avons proposé des éléments de solutions pour ces sujets notamment. Pour éviter que le lecteur ne tombe dans la facilité, nous recommandons aux candidats de se mettre dans les conditions d'examen pour traiter ces sujets sachant que chaque épreuve a une durée limitée.

C'est un nouveau concept qui s'offre au candidat, qui n'a plus devant lui un ramassis d'épreuves disposés souvent de façon hasardeuse où il est très difficile de se retrouver et où on a de la peine à lire les images.

Chaque document de cette collection est un tout en soit, conçu pour faciliter la navigation des candidats et pour rendre les sujets aussi clairs que possible. Chaque épreuve s'inscrit dans une logique comme faisant partie d'un tout, où chaque exercice a une numérotation globale pour sa partie avec juxtaposé à lui le numéro de la page où se trouve la correction. Ainsi, plus besoin de trop se fatiguer, où même de s'inquiéter.

Sommaire

Partie

I

« Il y a des adultes qui jamais n'ont
été des enfants »
Jacques Prévert

Quelques rappels

Cours-

Jacques Prévert est un poète et scénariste français, né le 4 février 1900 à Neuilly-sur -Seine, et mort le 11 avril 1977 à Omonville-la -Petite (Manche)

Chapitre 1 Quelques notions utiles

Mon dictionnaire ne va pas de A à Z.
Il va de A à Zython

Jean-Marie **Gourio**.

1 Les Nombres Parfaits :

Notons $s(n)$ la somme des diviseurs d'un entier naturel non nul. n est dit parfait si et seulement si $s(n) = 2n$. Remarquons que $s(n) = 2n$ équivaut à $s(n) - n = n$: autrement dit n est parfait si et seulement si n est égal à la somme de ses diviseurs stricts. Comme exemple simple $6 = 1 + 2 + 3$ est parfait. Entre 1 et 500 on arrive difficilement à recenser trois nombres parfaits : $6, 28, 496$.
L'idée est de mettre en évidence un point commun entre ces trois nombres, en espérant que ce point commun nous permettra de déterminer d'autres nombres parfaits. En écrivant ces nombres sous forme de produit de facteur premier on a $6 = 2\times 3, 28 = 2^2 \times 7$ et $496 = 2^4 \times 31$ Les nombres obtenus présentent des similitudes troublantes. À partir de ces 3 résultats, on peut émettre les conjectures suivantes :

1. N n'a que deux facteurs premiers ;
2. N est de la forme $2^{n-1} \times (2^{n-1})$ avec 2^{n-1} qui est un nombre premier ;
3. N est de la forme $2^{n-1} \times (2^{n-1})$ avec n premier. Ce pendant la conjecture 3 chute avec $n = 11$; Demeurent les conjectures 1 et 2, que l'on peut chercher à démontrer.

1.1 Proposition :

Si 2^{n-1} qui est un nombre premier, alors $2^{n-1} \times (2^{n-1})$ est parfait.

1.2 Démonstration :

1. En effet, en posant $p = 2^{n-1}$ les diviseurs de $2^{n-1} \times p$, en nombre de $2n$ car p est premier, sont exactement : $1, 2, 2^2, ..., 2^{n-1}$
$p, 2p, 2^2p, ..., 2^{n-1}p$ Leur somme vaut donc :

$$\begin{aligned} S &= 1+2+2^2++2^{n-1}+p+2p+2^2p+...+2^{n-1}p \\ &= 1+2+2^2+...+2^{n-1}+p\left(1+2+2^2+...+2^{n-1}\right) \\ &= \left(1+2+2^2+...+2^{n-1}\right)(1+p) \\ &= \left(2^{n+1}-1\right)\times 2^n \\ &= 2\times\left(2^{n+1}\times\left(2^{n+1}-1\right)\right) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que le nombre entier considéré est bien parfait.

2. Cette proposition est démontrée par Euclide (proposition 36 du livre IX de Éléments).

Euclide énonce :

Si autant de nombres que l'on veut, en commençant par l'unité, sont obtenu par une suite à double proportion jusqu'à ce que la somme de tous devienne un nombre premier, et si on forme un nombre en multipliant le premier par le dernier, alors ce produit sera un nombre parfait. En langage clair : On calcul $S_n = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = 2^{n-1}$
S_n est il premier ?

- Si oui, alors $S_n \times 2^{n-1}$ est un nombre parfait ;
- Si non, on calcule $S_{n+1} = S_n + 2^n$, on teste à nouveau la primalité de S_{n+1}

On retrouve bien notre proposition.

Cependant on peut se poser la question suivante :la proposition d'Euclide fournit-elle tous les nombres parfaits ?
Autrement dit, si l'on part d'un nombre parfait quelconque, peut-on prouver qu'il peut s'écrire sous la forme $2^{n-1} \times (2^{n-1})$ où n est un entier naturel non nul tel que (2^{n-1}) soit premier ?

Il a fallu attendre quelque 2000 ans pour qu'une réciproque à la proposition d'Euclide soit démontrée mais malheureusement c'est une réciproque partielle. C'est Euler qui, au XVIII-ieme siècle, démontre la proposition suivante, concernant les nombres parfaits pairs :

1.3— Proposition

Si N est un nombre parfait pair, alors il s'écrit $N = 2^{n-1} \times (2^{n-1})$ où n est un entier naturel non nul tel que 2^{n-1} est un nombre premier.

1.4— Démonstration

N étant pair, il s'écrit $N = 2^k \times a$ avec entier impair et $k \geq 1$ 2^k et a étant premiers entre eux, on a : $s(N) = s(2^k) \times s(a) = (2^{k+1} - 1) \times S(a)$ où $s(N)$ definit la somme des diviseurs de N

Or N étant parfait, on sait que : $s(N) = 2N$

$$\begin{aligned} s(N) = 2N \quad &\Leftrightarrow \quad (2^{k+1} - 1) \times s(a) = 2^{k+1} \times a \\ &\Leftrightarrow \quad s(a) = \frac{2^{k+1} \times a}{2^{k+1} - 1} = a + \frac{a}{2^{k+1} - 1} \\ &\Leftrightarrow \quad s(a) - a = \frac{a}{2^{k+1}} \\ &\Leftrightarrow \quad (2^{k+1} - 1)(s(a) - a) = a \quad (1) \end{aligned}$$

De (1), on peut déduire que $s(a) - a$ est un diviseur de a ; or, comme $k \geq 1$, $2^{k+1} - 1 \geq 3$ et donc, $s(a) - a$ est un diviseur strict de a. C'est aussi la somme de tous les diviseurs stricts de a. On ne peut donc avoir que : $s(a) - a = 1$, et donc a est un nombre premier impair.
De l'égalité (1), on tire que $a = 2^{k+1} - 1$ En conclusion, $N = 2^k \times a$, avec a premier de la forme $2^{k+1} - 1$. Le théorème est prouvé en posant $n = k + 1$.

1.5— Bilan :

les nombres de la forme $2^{n-1} \times (2^{n-1})$ avec 2^{n-1} premier, sont exactement les nombres parfaits pairs. Ajoutons que jusqu'à ce jour on ne connaît aucun nombre parfait impair.

2 Les suites adjacentes :

2.1— Définition :

Deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes si et seulement si les conditions ci-dessous sont vérifiées :

. (U_n) est croissante.

. (V_n) est décroissante.

. $\lim U_n - V_n) = 0$.

2.2— Proposition :

Si et (V_n) et sont adjacentes, avec est (U_n) croissante et (V_n) est décroissante, alors (U_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq V_n$.

2.3— Proposition :

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

Dans la plupart des grands concours nationaux et même internationaux vous serez appelés à composer sans calculatrice. Vous devez par conséquent vous trouvez des techniques de travail. Le présent exercice vous donne une méthode rapide de calcul de racine carrée d'un nombre avec une bonne précision.

Chapitre 2 Algorithme d'Héron

Mon dictionnaire ne va pas de A à Z.
Il va de A à Zython

Jean-Marie **Gourio**.

Voici un extrait du traite « Les Métriques » (livre 1) de Héron d'Alexandrie, où ce dernier explique comment il trouve une valeur approchée d'une racine (ici la racine du nombre entier 720). (L'extraction d'une racine carrée d'un nombre a correspond au problème géométrique de la recherche du coté d'un carré d'aire égale a.) Extrait du livre « Mathématiques au fil des ages », p.137, Editions Gauthiers Villars.

Puique 720 n'a pas de coté rationnel,nous extrairons le coté avec une très petite différence de la façon suivante. Comme le premier nombre carré plus grand que 720 est 729 qui a pour coté 27, divise 720 par 27 ;cela fait 26 et $\frac{2}{3}$;ajoute 27,cela fait $53\frac{2}{3}$;
prends-en la moitié : cela fait $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ .Ainsi donc le coté de 720 sera très proche de $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$.
En fait,$26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ multiplié par lui meme donne $720\frac{1}{36}$; de sorte que la difference est $\frac{1}{36}$. Si nous voulons rendre cette cette difference inferieure encore à $\frac{1}{36}$ trouvé tout à l'heure à la place de 729 et,en procédant de la meme façon,nous trouverons que la différence est beaucoup plus petite que $\frac{1}{36}$.
noter que l'écriture$26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ est équivalent a $(26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})$
Soit a un réel strictement supérieure à 1. a est compris entre deux carrés d'entiers consécutifs. Il existe donc un entier $pv \geq 1$ tel que : $(p-1)^2 \leq a \leq p^2$. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = p$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$.

1 a. Expliquez pourquoi u_1 , correspondant à $a = 720$, est bien égal à la valeur donnée par Héron : $u_1 = 26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.
b. Quelle phrase du texte de Héron permet de calculer u_2 ? Calculez $u_2^2 - 720$ .Que pensez-vousde l'affirmation de Heron : « nous trouverons que la difference est beaucoup plus petite que $\frac{1}{36}$ » ?

2 Cas général

a. Montrez que : $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{a})^2$

b. Déduisez-en que, pour tout entier $n, u_n \geq \sqrt{a}$
c. a) Montrez que (u_n) est décroissante.
 b) Justifier alors que $\sqrt{a} \leq u_n \leq p$
d. Majoration de $u_n - \sqrt{a}$
 a) Justifier les inégalités :

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_1\sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}; \\ 0 &\leq u_2\sqrt{a} \leq (\frac{1}{2\sqrt{a}})^{1+2}; \\ 0 &\leq u_3\sqrt{a} \leq (\frac{1}{2\sqrt{a}})^{1+2+4}; \end{aligned}$$

 b) Montrez par récurrence que, pour tout $n \geq 1 : 0 \leq u_n - (\frac{1}{2\sqrt{a}})^{1+2+\ldots+2^{n+1}}$
 c) Déduisez-en que, pour tout $n \leq 1 : u_n - \sqrt{a} \leq (\frac{1}{2\sqrt{a}})^{2^n-1}$. Justifiez alors la convergence de (u_n) vers $\sqrt{a}$.
 d) Prenons à nouveau $a = 720$ .On a donc : $26 \leq \sqrt{a} \leq 27$. Montrez alors que, pour tout $n \geq 1, 0 \leq u_n - \sqrt{720} \leq (\frac{1}{52})^{2^n-1}$
 e) Programmez la suite (u_n) sur votre calculatrice. A partir de combien d'itérations obtient-on les huit premières décimales de $\sqrt{720}$ exactement ?

Correction :

1 a. Explication :

En effet, pour $a = 720$ on a $26^2 = 676 \leq 720 \leq 27^2 = 269$

Donc, on peut prendre $u_0 = p = 27$.
Ainsi, on a $u_1 = \frac{1}{2}(u_0 + \frac{a}{u_0}) = \frac{1}{2}(27 + \frac{720}{27}) = 26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

b. La phrase du texte permettant de calculer u_2 est :

« Si nous voulons rendre cette cette difference inferieure encore à $\frac{1}{36}$ trouvé tout à l'heure à la place de 729 et,en procédant de la meme façon,nous trouverons que la différence est beaucoup plus petite que $\frac{1}{36}$ ».

Calculons $u_2^2 - 720$:

On a $u_2 = \frac{1}{2}\left(26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{720}{26+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\right)$

Donc $u_2^2 - 720 = 2,679 \times 10^{-7}$. Ainsi cette affirmation de Héron est valide car $\frac{1}{36} > 2,679 \times 10^{-7}$.

2 a. Montrons que $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2$:

Soit n un élément de $\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}) - \sqrt{a} = `\frac{1}{2}(u_n^2 + a - 2u_n\sqrt{a}) \\ &= \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2 \end{aligned}$$

b. Déduisons-en que, pour tout n, $u_n \geq \sqrt{a}$:
D'après *2.a*, on a pour tout entier $n, u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2 \geq 0$
Donc on a pour tout entier n ,on a $u_{n+1} \geq \sqrt{a}$ de plus $(p-1)^2 \leq a \leq p^2$
C'est-à-dire $\sqrt{a} \leq u_0 = p$
Ainsi, pour tout entier $n, u_n \geq \sqrt{a}$.

c. a) Montrons que (u_n) est décroissante :

Soit un entier n de $\mathbb{N}$, on a, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}) - u_n = \frac{-1}{2}u_n + \frac{a}{2u_n} = \frac{a-u_n^2}{2u_n}$
De plus, $u_n \geq \sqrt{a} \geq 0$ soit $u_n^2 \geq a$ c'est-à-dire $-u_n^2 + a \geq 0$ ainsi $u_{n+1} \leq u_n$ d'où (u_n) est décroissante.

b) Justifions l'égalité :
(u_n) Etant décroissante on a pour tout entier n ,$u_n \leq u_0 = p$, de plus $\sqrt{a} \leq u_n$ d'après *B.2ř*
Ainsi $\sqrt{a} \leq u_n \leq p$

d. a) Justifions les inégalités :
D'après *B.1*, on a $u_1 - \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2$.
D'autre part on a d'après *B.3.b* $\sqrt{a} \leq u_0 \leq p$ c'est-à-dire $\frac{1}{2p} \leq \frac{1}{u_0} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$
Ainsi $u_1 - \sqrt{a} \leq \frac{u_0 - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$
De plus on a $(p-1)^2 \leq a \leq p^2$ c'est-à-dire $u_0 - 1 \leq \sqrt{a} \leq u_0$ soit $u_0 - \sqrt{a} \leq 1$
Soit $(u_0 - \sqrt{a})^2 \leq 1$
Ainsi $u_1 - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$
De plus $u_1 \geq \sqrt{a} \geq 0$ d'apès *B.2* d'où $0 \leq u_1 - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$
On a $u_2 - \sqrt{a} = \frac{1}{2u_1}(u_1 - \sqrt{a})^2 \leq \frac{1}{2u_1}(\frac{1}{2\sqrt{a}})^2$ d'après l'inégalité qui précède.
D'autre part pour tout entier n ,on a $u_n \geq \sqrt{a}$ c'est-à-dire $\frac{1}{2u_n} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$ d'où $u_2 - \sqrt{a} \leq (\frac{1}{2\sqrt{a}})^{1+2}$ de plus $u_1 \geq \sqrt{a} \geq 0$ d'apès *B.2ř*

Ainsi $0 \leq u_2 - \sqrt{a} \leq (\frac{1}{2\sqrt{a}})^{1+2}$
De même on montre que $0 \leq u_3 - \sqrt{a} \leq (\frac{1}{2\sqrt{a}})^{1+2+4}$

b) Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 1 \quad 0 \leq u_n - \sqrt{a} \leq (\frac{1}{2\sqrt{a}})^{1+2+...+2^{n-1}}$

Considérons la proposition $P_{(n)}$ « $n \geq 1 : 0 \leq u_n - \sqrt{a} \leq (\frac{1}{2\sqrt{a}})^{1+2+...+2^{n-1}}$ » Pour $n = 1$, on a bien $0 \leq u_1 - \sqrt{a} \leq (\frac{1}{2\sqrt{a}})^{1+2}$ d'après $B.4.a$
Soit $n \geq 1$ supposons $P_{(n)}$ vrai et montrons que $P_{(n+1)}$ est vraie
On a d'après $B.1$ $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2 \leq \frac{1}{2u_n}((\frac{1}{2\sqrt{a}})^{2+4+...+2^n})$ par hypothèse de récurrence. Or d'après $B.2\check{r}$ pour tout entier n ,$u_n \geq \sqrt{a}$ soit $\frac{1}{2u_n} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$
Ainsi $0 \leq u_n - \sqrt{a} \leq (\frac{1}{2\sqrt{a}})^{1+2+...+2^n}$ d'où $P_{(n+1)}$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \geq 1, \quad 0 \leq u_n - \sqrt{a} \leq (\frac{1}{2\sqrt{a}})^{1+2+...+2^{n-1}}$

c) Déduisons-en que, pour tout $n \geq 1, \quad 0 \leq u_n - \sqrt{a} \leq (\frac{1}{2\sqrt{a}})^{2^n-1}$

soit $n \geq 1$, on a d'après $B.4.b$, $0 \leq u_n - \sqrt{a} \leq (\frac{1}{2\sqrt{a}})^{1+2+...+2^{n-1}}$

Or $2 + ... + 2^{n-1} = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$ comme somme de n terme d'une suite geometrique de raison et de premier terme 1.

Justifions la convergence de (u_n) vers $\sqrt{a}$:

On a $0 \leq u_n - \sqrt{a} \leq (\frac{1}{2\sqrt{a}})^{2^n-1}$ or $2^n - 1$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et on sait que $(p-1)^2 \leq a \leq p^2$ d'où $\frac{1}{2p} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$ avec $p \geq 1$ ainsi $\left|\frac{1}{2\sqrt{a}}\right| \leq 1$ par suite (u_n) vers $\sqrt{a}$.

d) Montrez alors que, pour tout $n \geq 1, \quad 0u_n - \sqrt{720} \leq (\frac{1}{52})^{2^n-1}$.
D'après $B.4.C$ on a $0 \leq u_n - \sqrt{720} \leq (\frac{1}{2\sqrt{720}}^{2^{n-1}}$ de plus $26 \leq \sqrt{720} \leq 27$ soit $\frac{1}{2\sqrt{720}} \leq \frac{1}{52}$ d'où $0 \leq u_n - \sqrt{720} \leq (\frac{1}{2\sqrt{720]}}^{2^n-1}$.

e) On obtient les huit première décimale de $\sqrt{720}$ après 2 itération.

Partie

II

« L'imagination est la reine du vrai, et le possible est une des provinces du vrai »

Charles Baudelaire

Filière Informatique

Épreuves-

C'est un poète français, né à Paris le 9 avril 1821 et mort le 31 août 1867 à Paris. Il est l'un des poètes les plus célèbres du XIXe siècle : en incluant la modernité comme motif poétique, il a rompu avec l'esthétique classique

Épreuve ENS

.

1 ENS 2007

Exercice 01 Corr. page 73

Déterminer les couples (z,t) de nombre complexe vérifiant

$$\begin{cases} z^4+t^4=17 \\ zt=-2 \end{cases}$$

Exercice 02 Corr. page 73

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par : U_0 et pour tout n $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+2$ et $V_n=U_n-\frac{4}{3}$.

1. Montrer que (V_n) est une suite géométrique, puis en déduire les termes V_1 et V_2 en fonction de n.
2. En la limite de la suite (S_n) définit par :

$$\forall n\in\mathbb{N}*,\quad S_n=\sum_{k=1}^{n}U_k=U_1+U_2+...+U_n$$

Exercice 03 Corr. page 74

1. Ecrire $2-\sqrt{3}+i$ sous forme trigonométrique et $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^5$ sous forme algébrique.
2. Calculer $(2+i)^2$ et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation .

Exercice 04 Corr. page 75

On considère la fonction f définit par $f(x)=x+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J) (unité 1 cm).

1. Dresser le tableau de variations de f en présentant les étapes de l'étude.
2. Etudier l'existence des asymptotes et des points d'inflexion de (C), puis construire (C).
3. Représenter le domaine plan (D) : $\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ f(x)\le y\le x \end{cases}$. et déterminer son aire A.

Exercice 05 Corr. page 76

Soient $ABCD$ un carré de sens direct et d'arête 3 cm et T la similitude directe qui transforme B en D et C en I, I milieu de $[A,B]$. On pose $\vec{i}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

1. Exprimer les cordonnées des points B,C,D et I dans le repère orthonormé direct $(A,\vec{i},\vec{j})$.
2. En déduire la forme complexe de T et ses éléments caractéristiques.
3. Déterminer l'image par T de la droite d'équation $2x-y+1=0$.

Exercice 06 Corr. page 78

On considère un triangle équilatéral direct ABC d'arête 4cm.

1. Construire le point G, barycentre A, B, C affectés des coefficients respectifs $1, 1$ et 2, puis calculer $GA^2 + GB^2 + 2GC^2$.

2. Déterminer et construire les ensembles de points suivants : $(E1) : MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 48$ $(E2) : MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 8$.

Exercice 07 Corr. page 79

On considère les équations différentielles $(E) : y'' + y' + y = x$ et $(E') : y'' + y'y = 0$.

1. Monter que y est solution de (E) si et seulement si $y - (x - 1)$ est solution de (E').

2. Résoudre (E'), puis en déduire les solutions de (E).

Exercice 08 Corr. page 80

On considère deux urnes A et B telles que A content 3 boules noires et 4 boules blanches ; B contient 5 boules noires et 2 boules blanches, on tire au hasard 2 boules dont l'une dans A et l'autre dans B.

1. Déterminer la probabilité des événements suivants : $(E1)$: obtenir 2 boules de même couleur. $(E2)$: obtenir 2 boules blanches.

2. Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules noires sachant que les deux boules tirées sont de même couleur.

Exercice 09 Corr. page 80

On considère le tableau statistique suivant indiquant les dépenses minimales $X1$ et les dépenses maximales $y1$ dans les établissements d'enseignement secondaires d'une ville.

X1	10	15	9	11	29	18
Y1	79	110	72	88	212	120

1. Construire le nuage des points de cette série statistique.

2. Déterminer le point moyen G, puis le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique.

Exercice 10 Corr. page 82

On considère une sphère de rayon 1 cm. Les segments $[AC]$, $[BD]$ et $[EF]$ sont trois diamètres dont les supports sont deux à deux perpendiculaires.

1. Déterminer la surface totale et le volume du solide $ABCDE$.

Épreuve ENS

.

2 ENS 2008

Exercice 11 Corr. page 83

Résoudre le système dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} 2x - 3y + z = 3 \\ x - 2y + 3z = 4 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 452 \end{cases}$

Exercice 12 Corr. page 83

On considère les suites (U_n) et (V_n) définit par :
$U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{4n-4}{n(n+1)(n+2)}$ $\quad U_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad V_n = U_n - \frac{6}{n(n+1)}$

1. Monter que la suite (v_n) est géométrique, puis en déduire les termes V_n et U_n en fonction de n.

2. En déduire la limite de la suite (S_n) définit par :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k = U_1 + U_2 + ... + U_n$. (On pourra déterminer a et b tel que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{6}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$

Exercice 13 Corr. page 84

1. Ecrire $2 - \sqrt{3} + i$ sous forme trigonométrique et $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^5$ sous forme algébrique.

2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1 = 0$

Exercice 14 Corr. page 86

On considère la fonction définit par $f(x) = x\frac{9}{1+e^x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). (unité 1 cm)

1. Dresser le tableau des variations de f en présentant les étapes de l'étude.

2. Etudier l'existence des asymptotes et des points d'inflexion de (C). Puis construire (C).

3. Représenter le domaine plan (D) $\begin{cases} 0 \leq x \leq \ln 5 \\ x \leq y \leq f(x) \end{cases}$

Exercice 15 Corr. page 88

Soit la transformation T du plan complexe de forme complexe $z' = (-1 - i)z + 4 - 3i$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T.

2. Déterminer l'image par T de la droite d'équation $2x - y - 1 = 0$.

Exercice 16 Corr. page 88

On considère un triangle équilatéral direct $ABCD$ d'arête 4 cm.

1. Construire le point G barycentre A, B, C affectés des coefficients respectifs 1, 1 et 2. Puis calculer $GA^2 + GB^2 + 2GC^2$

2 Déterminer et construire les ensembles de points : $(E1) : MA^2+MB^2+2MC^2 = 48$ et $(E2) : MA^2+MB^2-2MC^2 = 8$.

Exercice 17 Corr. page 90

On considère les équations différentielles $(E) : y'' + y' + y = x$ et $y'' + y' + y = 0$.

1 Monter que y est solution de (E) si et seulement si $y - (x - 1)$ est solution de (E')

2 Résoudre (E') puis en déduire les solutions de (E).

3 Déterminer la solution f de (E) dont la courbe est tangente à la droite $(d) : x - 2y = 0$ au point d'abscisse $x = 0$.

Exercice 18 Corr. page 90

On considère un dé cubique parfaitement équilibré dont 2 faces sont vertes et les autres rouges. On lance 6 fois de suite ce dé et on observe la couleur de la face obtenue.

1 Déterminer la probabilité d'obtenir autant de faces vertes que de faces rouge.

2 Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X au bout des 6 jets du dé associé le nombre 100 si les faces obtenues sont toutes de même couleur et -10 sinon.

Exercice 19 Corr. page 91

On considère le tableau statistique suivant indiquant les dépenses minimales Xi et les dépenses maximales Yi dans les établissements d'enseignement secondaire d'une ville.

Xi	12	17	11	13	31	20
Yi	89	120	82	98	222	130

1 Déterminer la probabilité d'obtenir autant de faces vertes que de faces rouge.

2 Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X au bout des 6 jets du dé associé le nombre 100 si les faces obtenues sont toutes de même couleur et -10 sinon.

Exercice 20 Corr. page 91

$ABCDEFGH$ étant un cube de sens direct et d'arrêt 4 cm, déterminer $\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{DB}$.

Épreuve ENS

.

3 ENS 2009

Exercice 21 Corr. page 92

1 On définit les suites (U_n) et (V_n) par : $U_0 = 1, V_0 = -2$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{2}{3}V_n$ et $V_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + \frac{3}{4}V_n$.

a. Montrer que la suite $(U_n - V_n)$ est une suite géométrique.

b. Montrer que la suite $(U_n + \frac{8}{3}V_n)$ est une suite constante.

c. En déduire les expressions respectives de U_n et V_n en fonction de n.

d. Les suites (U_n) et (V_n) sont-elles convergentes ? si oui donner les limites.

2 On considère la suite (en) définie par : $e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{(n+1)!}$

a. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{(n+1)!} \leq 2^{-n}$

b. En déduire que la suite (e_n) est majorée par 3.

c. Montrer que (e_n) est une suite convergente (on ne demande pas la limite).

Exercice 22 Corr. page 94

1 Une urne contient 10 billes indiscernables au toucher dont 6 noires, 2 blanches et 2 rouges. Une expérience aléatoire consiste, à chaque essai, d'effectuer dans l'urne deux tirages au hasard et comme suit : au premier tour, on tire sans remise une bille et au deuxième tour, on tire simultanément deux billes. Déterminer :

a. La probabilité $P1$ de tirer deux billes de même couleur au deuxième tour.

b. La probabilité $P2$ d'avoir au moins deux billes de même couleur au cours d'un essai.

c. La probabilité d'avoir trois billes de couleurs toutes distinctes au cours d'un essai.

2 Le tableau ci-dessous indique , pour 5 ménages choisit au hasard, le nombre X de personnes dans le ménage et la quantité Y (en kg) de poissons consommés en un mois. X 3 4 5 7 8 Y 5.1 11.5 15 21.37 24.4

X	3	4	5	7	8
Y	5.1	11.5	15	21.37	24.4

a. Représenter graphiquement ces observations.

b. Déterminer le point moyen G de cette série statistique.

c. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y. Qu'en conclure ?

d. Donner une estimation de la quantité de poisson consommé dans un ménage de 6 personnes.

Exercice 23 Corr. page 95

1 Montrer que $e^{4x} - 14e^{2x} + 1 = (e^{2x} + 4.e^x + 1)(e^{2x} - 4.e^x + 1)$

2 En déduire la résolution de l'équation : $e^{4x} - 14e^{2x} + 1 = 0$

3 On définit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \frac{8}{1+e^{2x}}$

a. Calculer $f'(x)$

b. Déterminer les limites de $f(x)$ aux bornes du domaine de définition.

c. Dresser le tableau de variation de f.

d. Montrer que la courbe (C) de f admet deux asymptotes obliques à déterminer.

e. Construire la courbe (C) de f et ses asymptotes dans un repère orthonormé.

f. Montrer que : $f(x) = x + \frac{8e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

g. En déduire la primitive F de f qui s'annule en 0.

Exercice 24 Corr. page 97

1 Calculer chacune des intégrales suivantes par une méthode appropriée :

$$A = \int_0^1 x^2.e^{-x}dx \text{ et } B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^3 dx$$

2 Soit $ABCD$ un carré de centre O et d'arrête 2 cm :

a. Exprimer le milieu I de $[OD]$ comme barycentre des points A, B et C.

b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant : $AM^2 + BM^2 = 5$.

Épreuve ENS

.

4 ENS 2010

Exercice 25 Corr. page 99

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)...\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

On pose $v_n = \ln(u_n)$

1. Montrer que pour tout $x \geq 0 \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$

2. En déduire que

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2N+1)}{6n^3} \leq v_n \leq \frac{n+1}{2n}$$

   On admettra que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Montrer que v_n converge, et préciser sa limite.

4. Montrer que u_n converge, et préciser sa limite.

Exercice 26 Corr. page 99

On peint les six faces d'un cube de bois d'arrête 3 cm. On le débite par des traits de scie parallèles aux plans des faces, en 27 petits cubes d'arrête 1 cm. On place ces 27 petits cubes dans un sac. On tire au hasard, et sans remise, deux cubes du sac, les tirages étant supposés équiprobables. Soit X la variable réelle égale au total de faces peintes que présentent les deux cubes tire.

1. **a.** Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique et l'écart type $\sigma(x)$ de X.

Exercice 27 Corr. page 100

On considère l'application $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par$f(z) = \frac{8-z\overline{z}}{\overline{z}}$

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $z = re^{i\theta}$ Déterminer en fonction de r et θ le module de $f(z)$ et son argument lorsqu'il est défini.

2. Soit $w = \rho e^{i\phi} \in \mathbb{C}^*$, Calculer en fonction de ρ et ϕ le module r et l'argument θ des complexes non nuls z tels que $f(z) = w$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $f(z) = z$

4. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $z + \overline{z} = 4$ Soit θ l'argument z de avec $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
   Calculer en fonction de θ , le module de z , l'argument et le module de $f(z)$

Exercice 28 Corr. page 100

1 Déterminer les fonctions solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ dans les cas suivant :

a. $a = 2$ et $b = -3$

b. $a = 2$ et $b = 1$

c. $a = 1$ et $b = 1$

2 On considère l'équation différentielle suivante : $y'' - 2y' + y = 4e^x \quad (1)$ Où y est une fonction numérique a variable réelle x, y' sa dérive première et y'' sa dérive seconde.

a. On pose $u(x) = 2x^2e^x$ Vérifier que la fonction u est solution particulière de l'équation caractéristique (1).

b. On pose $z = y - u$. Montrer que y est solution de (1) si, et seulement si, z est solution de l'équation différentielle : $y'' - 2y' + y = 0 \quad (2)$

c. Intégrer l'équation (2) et en déduire la solution générale de l'équation (1).

3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-3x + 2x^2)e^x$

a. Etudier f et représenter sa courbe (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

b. Vérifier que f est la solution de (1) qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = -3$

Épreuve ENS

.

5 ENS 2011 (Géométrie)

Exercice 29 Corr. page 103

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; I, J)$, on considère le point $A(1; 2)$ et la transformation S qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = (-2 + 2i\sqrt{3})z + \sqrt{3} + 2i\sqrt{3}$.

1 Déterminer la nature de S et ses éléments caractéristiques.

2 Déterminer l'image par S des ensembles des point suivants :

a. L'axe $x'Ox$ des abscisses.

b. Le cercle de centre$J$ et de rayon 3.

3 Déterminer les coordonnés du centre de gravité du triangle AIJ puis exprimer A comme barycentre des points O, I et J.

Exercice 30 Corr. page 103

A

Le plan (P) étant rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}?; \vec{j})$, on considère la transformation plane S qui à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ vérifiant :

$$\begin{cases} x' = -2x - 2y + 7 \\ y = 2x - 2y - 4 \end{cases}$$

1 Déterminer la forme complexe de la transformation S.

2 En déduire la nature et les éléments caractéristiques de S.

3 Déterminer :

a. La nature et l'image par S de la courbe $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$.

b. Une équation cartésienne de la droite (d') image par S de la droite $(d) : x - y + 2 = 0$.

B

Soient A et B deux points du plan (P) tels que $AB = 2cm$. Déterminer et construire chacun des ensembles des points suivants :

$$(E_1) : AM = 2BM \quad (E_2) : \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AB}$$

Exercice 31 Corr. page 103

1 On considère la transformation S du plan complexe dont la forme complexe est donnée par : $z' = (-1 + i)z + 2i - 1$, le point A d'affixe $2 + 2i$.

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation S.

b. Déterminer l'image par S du cercle de centre A et de rayon 4.

2 On considère les points B et C d'affixes respectives $2i$ et $i\sqrt{3} - 1 + 2i$.

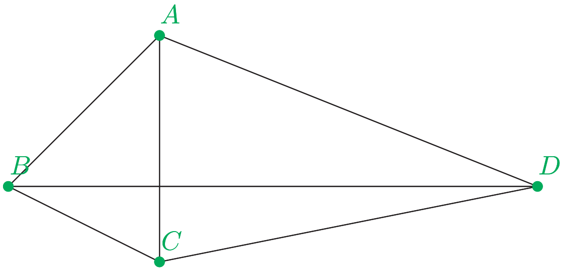
a. Déterminer les distances AC, BA et BC.

b. Déterminer une mesure en radians de chacun des angles $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$.

Exercice 32

Corr. page 103

Soit $G_1 = bar\{(A,1),(B,1),(C,-1),(D,1)\}$; Exprimer $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$. Placer I,J et G_1 sur la figure. Soit $G_2 = bar\{(A,1),(B,1),(D,2)\}$. Démontrer que G_2 est le milieu du segment $[ID]$. Placer G_2. Démontrer que IG_1DJ est un parallélogramme. En déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et J. Soit m un réel. On pose $G_m = bar(A,1),(B,1),(C,m-2),(D,m)$. Préciser l'ensemble E des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe. Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel m appartient à l'ensemble E. Démontrer que G_m appartient au plan (ICD). Démontrer que le vecteur $m\overrightarrow{J}$ lorsque m décrit l'ensenble E



Épreuve ENS

.

6 ENS 2011 (Algèbre)

Exercice 33 Corr. page 104

On pose $E = a, b, c$. On définit sur E une opération d'addition notée $\oplus$ de sorte que $(E, \oplus)$ soit un groupe. C'est-à-dire que les trois conditions suivantes sont satisfaites :

i Il existe un unique élément de E noté e vérifiant $\forall x \in E, x \oplus e = x$ et $e \oplus x = x$

ii Pour chaque élément x de E, il existe une unique élément $\overline{x}$ de E vérifiant $x \oplus x? = e$ et $x \oplus x = e$

iii Pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de E, $(x \oplus y)z = x \oplus (y \oplus z)$ (associativité de $\oplus$).

Dans ce cas, l'élément $\overline{x}$ de la condition *(ii)* est appelé le symétrique de x. On considère le tableau incomplet suivant :

$\oplus$	a	b	c
a	c	a	
b		b	
c		c	

L'exercice consiste à compléter progressivement le tableau ci-dessus où chaque case contient l'élément $x \oplus y$, x étant l'élément en tête de ligne et y l'élément en tête de colonne. Pour le faire, chaque candidat répondra aux questions suivantes :

1 Montrer que :

a. L'élément a n'est pas élément neutre de $\oplus$.

b. L'élément c n'est pas élément neutre de $\oplus$.

2 Montre que $e = b$; puis reproduire le tableau ci-dessus et compléter la deuxième ligne.

3 Montrer que $\overline{a} = c$ en justifiant la réponse.

4 Montrer que $c \oplus a = b$

5 Montrer que $c \oplus c = a$

6 Compléter le tableau entière.

Exercice 34 Corr. page 104

1 Soit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$(E) : z^3 + iz^2 - 12iz + 36 - 18i = 0$$

a. Déterminer la forme algébrique de $(3 + 2i)^2$.

b. Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure.

c. En déduire que $z^3 + iz^2 - 12iz + 36 - 18i = (z + i\mu)(z^2 + i\alpha z + \beta + i\gamma)$ où α, β, γ et μ sont des nombres réel à déterminer.

d. Résoudre l'équation (E).

2 On pose $Z = -\sqrt{2+2\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

a. Déterminer la forme algébrique de Z^4.

b. En déduire la forme exponentielle de Z^4 et Z.

c. Donner la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Exercice 35 Corr. page 105

Soit le système d'équations

$$(S) : \begin{cases} x+2y+3z+4t=1 \\ 4x+y+2z+3t=2 \\ 3x+4y+z+2t=3 \\ 2x+3y+4z+t=4 \end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases} X = x+2y+3z+4t \\ Y = -7y+-10z-13 \\ Z = -\frac{36}{7}z-\frac{44}{7}t \\ T = -2t \end{cases}$$

On suppose que (x,y,z,t) est une solution de (S). répondre uniquement aux questions suivantes pour déterminer x, y, z et t.

1 Que vaut X ?

2 Exprimer $4X+Y$, $3X+\frac{2Y}{7}+Z$ et $2X+\frac{Y}{7}+\frac{Z}{2}+T$ en fonction de x, y, z et t.

3 Déduire la valeur de $4X+Y$, $3X+\frac{2Y}{7}+Z$ et $2X+\frac{Y}{7}+\frac{Z}{2}+T$.

4 Déterminer Y, Z et T.

5 A partir des valeurs de X, Y, Z et T, déterminer x, y, z et t.

Épreuve ENS

.

7 ENS 2012 (Algèbre)

Exercice 36 Corr. page 107

Pour chacune des propositions suivantes dire si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse. Dans le cas d'une réponse fausse, donner un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Pour tout complexe z, $Re(z^2) = (Re(z))^2$.
2. Pour tout complexe z, si $|1+iz| = |1-iz|$. Alors la partie imaginaire de z est nulle.
3. Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$. pour tout entier naturel n non nul. z^{3n} est imaginaire pur.
4. Soit z un nombre complexe non nul. Si $\frac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|i - z| = 1 + |z|$.
5. Soit z un nombre complexe non nul. Si le module de z est égal à 1 alors $z^2 + z - 2$ est un nombre réel.

Exercice 37 Corr. page 107

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Des enfants se partagent un sac de billes, de manière égale. Le premier enfant prend 1 bille et le dixième des billes qui restent, puis le deuxième prend 2 billes et le dixième de celle qui restent. Et ainsi de suite jusqu'au dernier enfant qui prend toutes les billes qui restantes. Combien il y avait d'enfants et combien chacun a-t-il pris de billes ? mettre le problème en équations, puis résoudre.une réponse numérique ne suffit pas.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation :
$$\frac{log_2(\sqrt{(x-1)(x+3)})}{log_8 3 + log_8(x+3)} = log_9 27$$
3. Résoudre $4x^3 - 24x^2 + 23x + 18 = 0$, sachant que ses racines sont en progression arithmétique.

Exercice 38 Corr. page 108

On donne l'équation suivante, dans laquelle z est l'inconnue et c est un paramètre réel : $\left(\frac{z-c}{2}\right)^8 = 1$. Déterminer l'ensemble des valeurs de c pour lesquelles l'équation précédente possède exactement 3 racines complexes z dont la partie réelle est strictement négative.

Exercice 39 Corr. page 108

1. montrer que : $(1+i)^6 = -8i$.
2. on considère l'équation (E) : $z^2 = -8i$.
   - **a.** déduire de *1.)* Une solution de l'équation (E).
   - **b.** l'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.
3. déduire également de *1.)* Une solution de l'équation (E') : $z^3 = -8i$.
4. on considère le point A d'affixe $2i$ et la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a. Déterminer l'affixe b du point B, image de A par r, ainsi que l'affixe c du point C, image de B par r.

b. montrer que b et c sont solution de (E').

5 **a.** Dans le repère complexe rapporté à un repère orthonormal $(0, \vec{u}, \vec{v})$ (Unité graphique 2 cm).représenter les points A, B et C.

b. quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?

c. Déterminer le centre de gravité de cette figure.

Épreuve ENS

.

8 ENS 2012 (Géométrie)

Exercice 40 Corr. page 110

Soit $(0; i; j; k)$ un repère orthonormal de l'espace. On considère les points $A(2; 4; 1)$, $B(0; 4; -3)$, $C(3; 1; -3)$, $D(1; 0; -2)$, $E(3; 2; -1)$ et $I(\frac{3}{5}; 4; -\frac{9}{5})$. Soit G le barycentre de A, B et C affectés respectivement des coefficients 3 ; -2 et 1 et K un point quelconque de l'espace.

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire sans le justifier, si elle est *VRAIE* ou si elle est *FAUSSE*. Pour chaque question, il est compter 0.5 point si la réponse est exacte et 0 sinon.

1. Une équation du plan (ABC) est : $2x + 2y - z - 11 = 0$.
2. Le point E est projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
3. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
4. La droite (CD) est donnée par la représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

5. Le point I est sur la droite (AB).
6. L'ensemble des points M du plan tels que : $\left\| 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 1$ est le cercle de centre G et de rayon 1.
7. Le produit scalaire $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB}$ est nul si et seulement si $K = A$ ou $K = B$.

Exercice 41 Corr. page 110

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. par rotation d'un triangle équilatéral et de son cercle inscrit, autour d'une hauteur, on obtient un cône et sa boule inscrite. Démontrer que si le volume de la boule est de quatre litres celui du cône vaut neuf.
2. A, B, C et D sont 4 points de l'espace.
   a. montrer que : $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}$.
   b. pour tout point M de l'espace on définit : $f(M) = \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MD} \wedge \overrightarrow{MB}$. Démontrer que $f(M)$ est normal au plan (BCD).

Exercice 42 Corr. page 111

Dans l'espace muni du repère orthonormal $(0; i; j; k)$. On considère les points $A(4; 0; 6)$, $B(2; 4; 0)$, $S(0; 0; 4)$, $E(6; 0; 0)$ et $F(0; 8; 0)$.

1. placer sur une figure les points A, B, C, S, E et F. Cette figure sera complétée au fur et à mesure par les points définis dans les questions suivantes.
2. on admettra que F est le point d'intersection des droites (AB) et (OC) et E le point d'intersection des droites (BC) et (OA).

a. Déterminer les coordonnées d'un vecteur V orthogonal aux vecteurs SE et EF. Donner une équation cartésienne du plan (SEF).

b. calculer les coordonnées du point A' barycentre des points $(A, 1)$ et $(S, 3)$. cř) on considère le plan p parallèle au plan (SEF) et passant par A'. Donner une équation cartésienne de p.

3 le plan p coupe les arêtes $[SO]$, $[SA]$, $[SB]$, et $[SC]$ de la pyramide $SOABC$ respectivement aux points O', A', B', et C'.
Déterminer les coordonnées de O', B' et C'.

4 vérifier que $O'A'B'C'$ est un parallélogramme. $O'A'B'C'$ est-il un carré, un losange, un rectangle ?

Exercice 43 Corr. page 111

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; I; J; k)$. on considère les points $A(4; 1; 5)$, $B(-3; 2; 0)$, $C(1; 3; 6)$ et $F(-7; 0; 4)$.

1 **a.** démontrer que les points A, B, et C définissent un plan P et que ce plan a pour équation cartésienne : $x+2y-z=0$.

b. déterminer la distance d du point F au plan.

2 le but de cette question est de calculer la distance d par une autre méthode. On appelle (Δ) la droite qui passe par le point F et qui est perpendiculaire au plan P.

a. déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b. déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point F sur le plan P.

c. retrouver le résultat de la question *1.b)*

3 soit S la sphère de centre F et de rayon 6.

a. justifier que le point B appartient à la sphère.

b. préciser le centre et déterminer le rayon du cercle C, intersection de sphère S et du plan P.

Épreuve ENS

.

9 ENS 2012 (Géométrie-Analyse)

Exercice 44 Corr. page 112

Soient A, B, C trois points non alignés de l'espace,

$$\begin{aligned} G &= barycentre\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\} \\ G_1 &= barycentre\{(A,-\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\} \\ G_2 &= barycentre\{(A,\alpha),(B,-\beta),(C,\gamma)\} \\ G_3 &= barycentre\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,-\gamma)\} \end{aligned}$$

(On suppose que toutes les conditions nécessaires sont satisfaites)

1 Montrer que $(AG_1) \cap (AG_2) \cap (CG_3) = G$.

2 Montrer que chacun des côtés du triangle $G_1G_2G_3$ passe par l'un des trois points A, B ou C.

Exercice 45 Corr. page 112

1 Ecrire le nombre $(e^{i\frac{\pi}{4}})^4$ sous forme algébrique.

2 Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^4 + 9 = 0$. On note Z_A,Z_B,Z_C et Z_D les solutions de cette équation telles que $Re(Z_A) > Re(Z_B)$; $Im(Z_A) > 0$; $Im(Z_B) > 0$ et $Re(Z_D) > Re(Z_C)$.

3 Soit $S : z \mapsto S(z) = az + b$, la transformation du plan telle que $S(z_A) = S(z_B)$, $S(z_C) = S(z_D)$. Déterminer les nombres complexes a et b.

4 Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation S.

Exercice 46 Corr. page 112

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3 + x)e^{-\frac{x}{2}}$

1 Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

2 Construire la courbe représentative (C_f) de f.

3 Calculer l'aire du domaine défini par les couples (x, y) tels que $0 \leq y \leq f(x)$ et $x \leq O$.

4 Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α appartenant à $]-2; -\frac{3}{2}[$

5 On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 3e^{\frac{x}{2}} - 3$. Montrer que $f(x) = 3$ si et seulement si,$F(x) = x$.

6 Calculer $F'(x)$ et $F''(x)$.Montrer que $F'(\alpha) = \frac{?+3}{2}$. Etudier le sens de variation de F',puis de F.

7 On pose $I = [-2; \alpha]$;Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ $F(x)$;

a. $\frac{1}{2} \leq F'(x) \leq \frac{3}{4}$;

b. $0 \leq \frac{1}{2}(\alpha - x) \leq F(\alpha) - F(x) \leq \frac{3}{4}(\alpha - x)$ On considère la suite (u_n) définie par la relation de recurrence $u_0 = -2$; $u_{n+1} = F(u_n)$.Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ tel que $0 \leq \alpha ... u_n \leq (\frac{3}{4})^n$.
En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie

III

« Ne vous laissez point
abattre à la douleur »
Fénelon

Filière Mathématiques

Épreuves-Yaoundé

François de Salignac de La Mothe-Fénelon dit Fénelon, né le 6 août 1651 au château de Fénelon à Sainte-Mondane, mort le 7 janvier 1715 à Cambrai, est un homme d'Église, théologien et écrivain français

Épreuve ENS

.

10 ENS 2005

Exercice 47 Corr. page 114

Pour chaque question une seule réponse est exacte. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif la note est ramenée à 0. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne le point $S(1,-2,0)$ et le plan (P) d'équation $x+y-3z+4=0$.

1 Une représentation paramétrique de la droite D passant par le point S et perpendiculaire au plan P est :

a. $\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 1-2t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z &= -3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x &= 2+t \\ y &= -1+t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z &= 1-3t \end{cases}$

c. $\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= -2-2t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z &= 3t \end{cases}$

d. $\begin{cases} x &= 2+t \\ y &= -1+t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z &= -3-3t \end{cases}$

2 Les coordonnées du point d'intersection H de la droite D avec le plan P sont :

a. (-4 ;0 ;0)

b. $(\frac{6}{5};-\frac{9}{5};-\frac{3}{5})$

c. $(\frac{7}{9};-\frac{2}{3};\frac{1}{3})$

d. $(\frac{8}{11};-\frac{2}{11};\frac{9}{11})$

3 La distance du point S au plan P est égale à :

a. $\frac{\sqrt{11}}{3}$

b. $\frac{3}{\sqrt{11}}$

c. $\frac{9}{\sqrt{11}}$

d. $\frac{9}{11}$.

4 On considère la sphère (S) de centre S et de rayon 3. L'intersection de la sphère (S) et du plan P est égale :

a. au point I(1 ;-5 ;0)

b. au cercle de centre H et de rayon $r=3\sqrt{\frac{10}{11}}$

c. au cercle de centre S et de rayon 2.

d. au cercle de centre H et de rayon $r=\frac{3\sqrt{10}}{11}$.

Exercice 48 Corr. page 114

1000 boules numérotées de 0 à 999 sont placés dans une urne. On tire une boule au hasard et on note X le numéro sorti :

1 Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « X est divisible par 5 »

B : « X se termine par 0 »

C : « X est multiple de 2 »

D : « X est divisible par 3 »

2 Déterminer la probabilité des événements :

$A\cap C$; $A\cup C$;$B\cup D$;$B\cap D$;$A\cap D$;$A\cup D$; puis, $A\cap B$ et $C\cup D$.

Exercice 49 Corr. page 115

Le but de ce problème est d'étudier pour x et y éléments distincts de l'intervalle $]0;+\infty[$. Les couples solutions de (E) : $x^y = y^x$ et en particulier, les couples constitués d'entiers.

1 Montrer que l'équation (E) est équivalente à : $\frac{\ln y}{y} = \frac{\ln x}{x}$.

2 Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- **a.** Dresser le tableau de variations de h.
- **b.** déduire que h admet un maximum sur $]0;+\infty[$.
  On pose x_0 l'abscisse de ce maximum.
- **c.** Déterminer l'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.
- **d.** Représenter (C).
- **e.** déduire l'aire du domaine délimité par (C) et les droites d'équations respectives : $x = 1; x = e; y = x$

3 Soit λ un élément de l'intervalle $]0;\frac{1}{e}[$.

Prouver l'existence d'un unique nombre réel a de l'intervalle $]0;e[$ et d'un unique nombre réel b de $]e;+\infty[$ tel que $h(a) = h(b) = \lambda$.

Ainsi le couple (a, b) est solution de (E).

4 On considère la fonction S qui à tout nombre réel a de l'intervalle $]1;e[$ associe l'unique nombre réel b de l'intervalle $]e;+\infty[$ tel que $h(a) = h(b)$. (on ne cherche pas à exprimer $S(a)$ en fonction de a).

Par lecture graphique uniquement et sans justification, répondre aux questions suivantes :

- **a.** Quelle est la limite de S quand a tend vers 1 par valeurs supérieures ?
- **b.** Quelle est la limite de S quand a tend vers e par valeurs inférieures ?
- **c.** Déterminer les variations de la fonction S. dresser son tableau de variations.

5 Déterminer les couples d'entiers distincts solutions de (E).

Épreuve ENS

.

11 ENS 2006

Exercice 50 Corr. page 117

1 Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \int_n^{n+1} (2^3 x - 3^[- 2x) dx$

a. $I_n = \frac{1}{9(2\ln 3 + 3\ln 2)} \left(\frac{8}{9}\right)^n$

b. $I_n = \frac{9}{9(2\ln 3 + 3\ln 2)} \left(\frac{8}{9}\right)^n$

c. $I_n = \left(2^{-3} \times 2^{3n}\right) \times \left(3^2 \times 3^{-2n}\right)$

2 La fonction f définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = \ln(2\cos x - 1)$ a pour ensemble de définition

a. $\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left]\frac{\pi}{3}, 5\frac{\pi}{3}\right[$

b. $\left]\frac{\pi}{3}, 5\frac{\pi}{3}\right[$

c. $\left[0, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]5\frac{\pi}{3}; 2\pi\right[$

3 Le nombre de couple d'entiers (x, y) vérifiant $\begin{cases} 3x - 17y = 5 \\ -50 \leq x \leq 50 \end{cases}$ est de :

a. 50

b. 6

c. 17

4 (E) est l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z vérifiant $\arg(z^3) = 0$

a. (E) est l'axe des abscisses

b. (E) est un cercle

c. (E) est la réunion de 3 segments de droite

5 (C) est l'ensemble des points d'affixe Z vérifiant $4\,|z - 1 - i| = \sqrt{2}\,|z + \overline{z} + 4|$

a. (C) est un cercle de centre $O'(1,1)$ $\sqrt{2}/4$;

b. (C) est une ellipse de foyer $O'(1,1)$ et d'excentricité ;

c. (C) est une ellipse de foyer $O'(1,1)$ et de directrice la droite $(D) : x = -2$

6 SABCD est une pyramide de base carrée, de sommet S et dont toutes les arrêtes ont la même longueur a.

a. $\left\|\overrightarrow{AS} \wedge \overrightarrow{AB}\right\| = a^2$

b. $\left\|\overrightarrow{SA} \wedge \overrightarrow{SC}\right\| = a^2$

c. $\left\|\overrightarrow{SA} \wedge \overrightarrow{SB}\right\| = a^2$

7 ABCDEFGH étant un cube, la composée des demi-tours d'axes (AD) et (DC) est :

a. Le demi-tour d'axe (AC) ;

b. La réflexion de plan (ADC) ;

c. Le demi-tour d'axe (DH)

8 Dans une population, 15% des individus sont atteints d'une maladie A. Parmi les individus atteints de A, 20% ont une maladie B et parmi les individus non atteints de A, 4% ont la maladie B. On choisit au hasard un individu de cette population.A 0,01 près...

a. La probabilité qu'il soit atteint des deux maladies est 0,20

b. La probabilité pour qu'il souffre de A sachant qu'il de B est 0,47

c. La probabilité pour qu'il n'ait aucune des deux maladies est 0,61

Exercice 51 Corr. page 118

Pour tout couple d'entiers naturels (n, m), on pose : $I(n,m) = \int_0^1 t^n(1-t)^m dt$

1 Démontrer que $I(n+1,m) = \frac{n+1}{m+1}I(n,m+1)$

2 En déduire que $I(n,n) = \frac{n!}{(2n+1)!}$

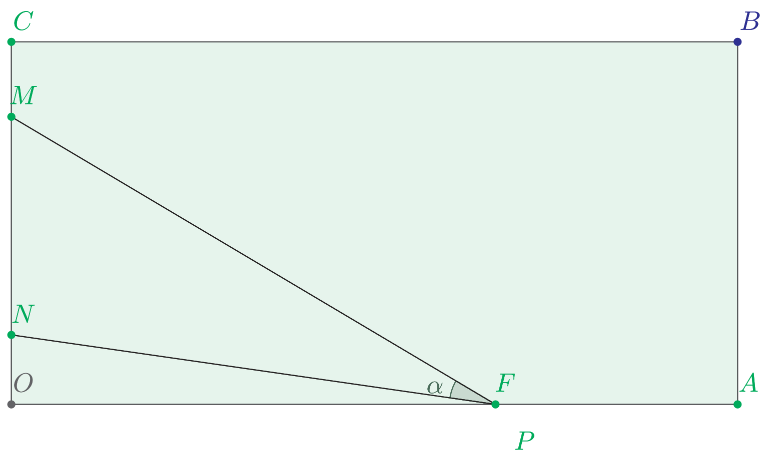
3 Comparer t et $t-1$, puis dresser le tableau de variation $t \longrightarrow t^n(1-t)^n$ sur [0,1].

4 En déduire que $\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq I(n,n) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

5 Démontrer que la suite de terme générale $U_n = \frac{3^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ est convergente.

Exercice 52 Corr. page 119

ABCD est un rectangle de longueur



$OA = 120m$ et de largeur $OC = 30m$. Un cameraman cherche la position Du point P pour lequel la mesure de L'angle α est minimale. On pose
$OP = x$, $ON = 12m$, et $MN = 6m$

1 Exprimer les distances PN et PM en fonction de x

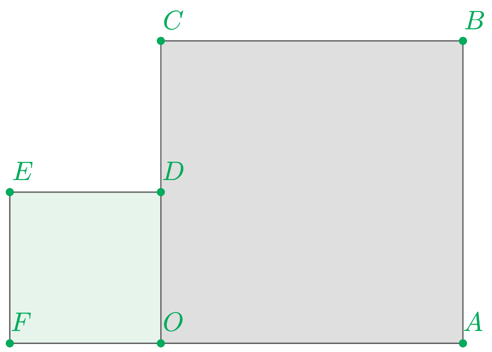
2 Démontrer que $\cos\alpha = \frac{PN^2+PM^2-MN^2}{2\times PN\times PM}$

3 En déduire que $(\cos\alpha)^2 = f(\alpha^2)$ où $f(x) = \frac{x^2+432x+46656}{x^2+468x+46656}$

4 Etudier les variations de f sur [0,120]

5 Déterminer la valeur maximale de α à 0,01 près par défaut ainsi que la position du point P correspondant.

Exercice 53 Corr. page 120



3

Ci-contre : OABC et ODEF sont des carrées de Sens direct. Le point D est milieu de [OC]. On Désigne par S la similitude directe qui transforme O en E et B en O. On prendra $OA = 4cm$

1 Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S.

2 On désigne par I le centre de la similitude S.

a. Montrer que I appartient aux deux de diamètre [OB] et [OE].

b. Reproduire la figure précédente et y placer le point I.

3 Donner la forme complexe de S dans $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ supposé orthonormé.

4 On considère l'ensemble (H) des points M vérifiant $OM - AM = 2$. Reconnaître (H) et le construire sur la figure précédente.

Exercice 54 Corr. page 121

On définit la fonction f de la variable réelle x par $f(x) = x - (1 + e^{-x})\ln(1 + e^{x})$.

1 Vérifier que la fonction f est variable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = e - x\ln(1 + e^{x})$.

2 En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à préciser.

3 Montrer que la courbe de f admet deux asymptotes que l'on déterminera.

4 Construire la courbe (C) de f et la courbe (C') de sa réciproque dans le même repère (unité graphique $2cm$).

Épreuve ENS

.

12 ENS 2007

Exercice 55 Corr. page 123

Dans un repère (O,I,J), on désigne par l'ensemble (E) des points M(x ,y) vérifiant : (E) : $x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$

1. Montrer que (E) est une ellipse dont on donnera le centre I et l'excentricité.
2. Déterminer les points d'intersection de (E) avec les axes du repère (O,I,J).
3. Déterminer l'aire de l'ellipse (E).
4. Construire (E) par rapport au repère (O,I,J).

Exercice 56 Corr. page 124

On considère les suites (u_n) définies par :

Pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 2 \times 3\sqrt{U_n}$ avec $U_0 = 7$; $V_n = \ln(U_n)$ et $W_n = \ln(V_n - \frac{3\ln 2}{2})$

1. Démontrer que la suite (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\ln(3)$ et en déduire l'expression de (v_n) en fonction de n.
2. Monter que la suite (v_n) est convergente en déterminant sa limite.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_n = 2\sqrt{2}\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^{(}\frac{1}{3})^n$
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente en précisant sa limite l.
5. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que (u_n) est une valeur approchée de 1 à 0.01 près.

Exercice 57 Corr. page 125

Dans un plan P rapporté à un repère orthonormé direct (O,I,J), on considère l'application affine f_m qui transforme I en J et ayant pour matrice :
$A_m = \begin{bmatrix} m+1 & m \\ -m & -m^2+1 \end{bmatrix}$, m étant un paramètre réel.

1. L'application f_m est-elle bijective pour toute valeur de m ? Justifier.
2. Déterminer m sachant que f_m est une translation.
3. Pour quelles valeurs de m f_m est-elle une similitude ? Caractériser fm dans ces cas.
4. Déterminer l'expression analytique de l'application f1.
5. Existe-il des droites globalement invariables par f1 ? Si oui les déterminer.

Exercice 58
Corr. page 126

On considère un tétraèdre régulier ABCD d'arrête 2.

1 Déterminer l'aire totale : aire (ABCD) des surfaces latérales de ABCD.

2 Exprimer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

3 Déterminer les axes et les plans de symétrie de ABCD.

4 Déterminer le volume de ABCD.

5 Déterminer, s'il existe, une sphère à la fois tangentielles aux 4 faces de ABCD.

Figure...........................

Exercice 59
Corr. page 126

On considère la fonction f définie par $f(x) : \begin{cases} \ln(x+1)x \text{ si } x \in]0;+\infty[\\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

1 Déterminer le domaine D de la fonction.

2 Démontrer que pour tout réel x de D, on a : $1 - x < \frac{1}{1+x} < 1 - x + x^2$

3 En déduire que la fonction f est dérivable. On donnera le nombre dérivée et la tangente en $x = 0$.

4 Dresser le tableau de variations de f en justifiant le cheminement.

5 Construire la courbe C de f dans le repère orthonormé (O,I,J) (unité $1cm$)

6 Déterminer une valeur approchée ou un encadrement semblable à celui de la question 2.

Exercice 60
Corr. page 127

1 Résoudre dans R les équations :
(E_1) :$3^{3x+2} + 9^{x-1} = 1458$ et (E_2) :$2^{2x-1} + 3^x + 4^{x+0,5} - 9^{0,5x+1}$

2 Recopier et compléter les opérations :
$21^3 \times \overline{221}^3 = \overline{...}^3$ et $\overline{101}^2 \times \overline{221}^3 = \overline{...}^6$

3 A l'aide d'intégrations par parties, calculer les intégrales :
$I = \int_0^\pi e^x(\sin x)^2 dx$ et $J = \int_0^\pi (e^x)(\ln x)^2 dx$

.

13 ENS 2008

Exercice 61 Corr. page 129

On considère dans un P rapporté à un repère orthonormé R=(O,I,J) l'ensemble (E) des points $M(x, y)$ tels que : $x^4 - 16(y^2 - 2y)^2 = 0$.

1. Montrer que (E) est la réunion d'une ellipse (E_1) et d'une hyperbole (E_2) dont on donnera les équations réduites respectives.
2. Déterminer l'intersection de (E_1) et (E_2).
3. Déterminer les foyers de (E_1) par rapport au repère R.
4. Déterminer l'excentricité et l'axe focal de (E_2).
5. La droite (d) : $\sqrt{3}x - 2y + 2 = 0$ est-elle tangente en au moins un point de (E) ? Si oui déterminer un tel point.
6. Construire (E) par rapport au repère R (unité $1cm$)

Exercice 62 Corr. page 130

Dans cet exercice, les candidats répondront aux questions par VRAI (V) ou FAUX (F) uniquement en recopiant et en complétant le tableau suivant :

Questions		A.1	A.2	A.3	A.4	A.5	B.1	B.2	B.3	B.4	B.5
Réponses											

A
Dans le plan complexe, on considère :

- L'ensemble (S) des solutions de l'équation : $z^3 + 4z^2 + (8 - 4i)z + 8 - 8i = 0$.
- L'ensemble E des points M d'affixe z tel que $(z - |z|)^3$ soit imaginaire pur.
- Le nombre complexe j de module 1 et dont un argument est $2\pi/3$.

1. (S) contient un nombre complexe imaginaire pure.
2. (S) admet un élément dont un argument est $13\pi/4$.
3. Tous les points de la droite (d) : $\sqrt{3}x - y = 0$ appartiennent à E.
4. $(1 + j)310 = -1$
5. Le point image de j est un élément de E.

B
On considère dans l'espace un carré ABCD de sens direct dans le plan (ABC) de centre O d'arête $\sqrt{2}a$ (avec a?0). On désigne aussi par S le point tel que : $\overrightarrow{OS} = \frac{\sqrt{3}}{2a}\left(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right)$

1 Toute similitude plane qui transforme A en D et B en A est une isométrie.

2 On peut exprimer le milieu de [SD] comme barycentre des points A, B, C, et S.

3 ACS est équilatéral.

4 $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{BD} = \sqrt{2}a^2$

5 La composée des réflexions $S_{(ABC)}$ et $S_{(ACS)}$ de plans respectifs (ABC) et (ACS) est le demi-tour d'axe (AS).

Exercice 63 Corr. page 131

On définit les fonctions f et g définies de R vers R par :

$$f(x) = x - \ln(1+x) \text{ et } g(x) = x + \ln(1-x)$$

(C) et (C') désignent les courbes respectives de f et g par rapport à un repère orthonormé (O.I.J) du plan P (unité graphique $2cm$)
A

1 Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

2 En déduire le signe de $f(x)$.

3 Montrer que (C') est le symétrique de (C) par rapport à l'origine O.

4 En déduire que pour tout réel dans $]0,1[$, on a $\ln(1+x) < x < -\ln(1-x)$

B

1 Déterminer l'ensemble (E) des points $M(a,b)$ tels que la tangente à (C) en A et la tangente en B soit parallèles.

2 Construire (E), (C) et (C').

3 On désigne par L l'aire du domaine plan délimité par (C) et (C') d'une part et d'autre part par les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 0,8$.

a. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur exacte de L.

b. Donner une valeur approchée de L à 0,001 près.

C
Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... \frac{1}{5n}$

1 Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\ln(5 + \frac{1}{n}) < u_n < \ln(5 + \frac{5}{n-1})$

2 La suite (U_n) est-elle convergente ? Justifier.

3 Peut-on déterminer un rang n_0 entier naturel, à partir duquel Un est une valeur appropriée de... à 0.001 près ? Si oui déterminer une valeur possible de n_0 en justifiant.

.

14 ENS 2009

Exercice 64 Corr. page 133

On de finit la fonction numérique f de la variable réelle x par $f(x) = \ln(\sqrt{1+e^{2x}} - 1)$
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

1. Montrer que pour tout réel x,
   $f(x) = \ln(\sqrt{1+e^{2x}} + 1)$ et $f(x) = \ln(\sqrt{1+e^{-2x}} - e^{-2x})$
2. Montrer que (C) admet deux asymptotes obliques (d) et (d') sécantes en $A(\ln 2, \ln 2)$
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Construire la courbe (c) ainsi que ses asymptotes.
5. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et exprimer $f^{-1}(x)$ en fonction de x

Exercice 65 Corr. page 134

A
On désigne par [AB] un segment de milieu O du plan (P)et on se propose de déterminer l'ensemble E de toutes les isométries planes de(P) laissant [AB] globalement invariant .

1. Citer tous les types d'isométries planes.
2. Etant donné un élément f de E , déterminer en justifiant $f(0)$.
3. A partir des valeurs possibles de l'image du point A par un élément f de E.
   - **a.** Montrer que E contient exactement deux déplacements à préciser
   - **b.** Montrer que E contient exactement deux antidéplacements à préciser
4. Conclure

B
Dans l'espace E rapporte à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(-1,1,1), B(3,1,1), C(1,1,1+2$\sqrt{3}$).

1. Déterminer
   - **a.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, $mes\widehat{AOB}$
   - **b.** Le point D tel que ABC Doit un tétraèdre régulier et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ direct.
   - **c.** Chacun des ensembles des points E_1 et E_2 définis par
     E_1 : $AM = 2BM$ et E_2 : $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{CM}$

Exercice 66 Corr. page 135

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1 Déterminer le sens de variation de (u_n).

2 Montrer que (u_n) est majoré par 1. Qu'en conclure ?

3 Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{n}$

4 En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \frac{1}{2n}$

5 Montrer rigoureusement que (u_n) converge vers une limite l à préciser.

Exercice 67 Corr. page 136

1 Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes,
l'équation : $z^4 - 12iz^2 - 100$

2 Etant donné un réel $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$, on considère l'équation(E) :$z^2 - 2z\tan 2\alpha + 1$

a. Résoudre l'équation(E).
b. Etant donne le point M_α dont l'affixe est la solution de (E) d'ordonnée positive, montrer que est point du conique (Γ) : $-x^2 + y^2 = 1$.
c. Déterminer la nature, un foyer et l'excentricité de (Γ).
d. Construire l'ensemble des M_α lorsque α parcourt $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 68 Corr. page 137

1 A l'aide deux intégrations par parties, calculer chacune des intégrales suivantes :
$I = \int_1^e (\ln x)^2 dx$, $J = \int_0^\pi e^{-x} \sin x dx$, $K = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

2 On pose $A_n = \frac{2n+76}{n+1}$ où n est un entier relatif distinct de -1.

a. Vérifier que $A_n = 2 + \frac{14}{n+1}$ puis citer tous les diviseur de 74.
b. E_n déduire les valeurs de l'entier n pour lesquelles A_n est aussi un entier.

15 ENS 2010

Exercice 69 Corr. page 139

1 Soit ABCD un carré de sens direct de centre O et d'arete $\sqrt{2}a$ avec $a > 0$. On considère une simitude qui tansforme A en B et B en A

a. On suppose que f est une similitude directe. Déterminer la nature exacte de f et la caractériser.
b. On suppose que f est une similitude indirecte. Déterminer la nature exacte de f et la caractériser.

2 ABCD un carré ci-dessus, soit S le point de l'espace tel que $\overrightarrow{OS} = \frac{\sqrt{3}}{2a}\left(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right)$

a. Exprimer le milieu I de [SD] comme berycentre des points A,B,C,S
b. ACS est-il équilatéral ? justifier.
c. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BD}$ en fonction de a

3 On désigne par $\mathrm{S}_{(ABC)}$ et $\mathrm{S}_{(ACS)}$ les réflexions de plans respectifs (ABC) et (ACS)
Sans calculs, donner la nature de la composée $\mathrm{S}_{(ABC)}o\mathrm{S}_{(ACS)}$ et la carctériser.

Exercice 70 Corr. page 139

On considère le plan P rapporté à un repère orthonormé R=(O,I,J) l'ensemble des ponts tels que $x^4 - 16(y^2 - 2y^2)^2$=0

1 Montrer que (E) est réunion d'une élipse (E_1) et d'un hyperbole (E_2) dont on déterminera les équations réduites respectives.

2 Déterminer l'intersection de (E_1) et (E_2).

3 Déterminer le foyer de (E_1) par apport au repère R.

4 Déterminer l'excentricité de l'axe focal de (E_2).

5 La droite (d) : $\sqrt{3}x - 2y + 2 = 0$ est-elle tangente en au moins un point de de (E) ? Si oui déterminer un tel point.

6 Construire (E) par rapport eu repère R (unité $1cm$).

Exercice 71 Corr. page 139

1 Soit dans l'espace de nombres complexes, l'équation (E) : $z^3 + az^2 + (8 - 4i) + 8 - 8i = 0$

a. L'équation (E admet-elle une solution imaginaire pure ? Justifier).
b. Résoudre l'équation (E).
c. Ecrire les solution de (E) sous la forme exponentielle.

2 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O,I,J), on note par (L) l'ensemble despoints (M) d'affixe z tel que $(z - |z|)^3$ soit un nobre complexe imaginaire pur. Déterminer er construire l'ensemble (L).

3 On désigne par j le nombre complexe de module l et dont un argument est $\frac{2\pi}{3}$. Exprimer sous forme algébrique et en fonction des valeurs e l'entier neturel n, $(1 + j)^n$

Épreuve ENS

.

16 ENS 2011 (Géométrie)

Exercice 72 Corr. page 140

Soient ABC un triangle, G le centre de gravité du triangle ABC et J le barycentre de $(B,1)$ et $(C,4)$. La droite (GJ) coupe la droite (AB) au point K.

1. faire une figure et placer les points G et J.
2. On souhaite déterminer le réel x tel que $\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{AB}$.

   a. Justifier sans calculs l'existence d'un réel y tel que $JK = y\overrightarrow{JG}$.
   b. Exprimer $\overrightarrow{JG}$, puis $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   c. En déduire la valeur de x et exprimer G comme barycentre de J et K.

Exercice 73 Corr. page 140

Soit ABCD un tétraèdre de sens direct tel que ABC est isocèle rectangle en A, la droite (CD) est orthogonale au plan (ABC), $AB = 1$ et $CD = \sqrt{2}$.

1. Déterminer le périmètre et le volume de ABCD.
2. Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$ et le produit vectoriel $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{BC}$

Exercice 74 Corr. page 141

Soit $(O,\vec{u},\vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan complexe P. soient f et g deux applications de P dans P telles que pour tout point M de P, g(M) est le milieu de $[M, f(M)]$.

1. On suppose que f est une symétrie centrale de centre I.

   a. Déterminer $g(M)$ pour tout $M \in$ P.
   b. Peut-on dire que : si f est une similitude alors g est aussi une similitude. Justifier.

2. On suppose que f est une isométrie de forme complexe $z' = az + b$, $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

   a. Déterminer la forme complexe de g.
   b. En déduire que g est aussi une isométrie si et seulement si f est une translation.

3. On suppose que f est une application affine.
   Montrer que g est aussi une application affine.
4. On suppose que f a pour forme complexe $z' = iz - 4$.
   Déterminer la nature exacte et les éléments caractéristiques de f et g.
5. On suppose que f est la projection orthogonale d'axe l'axe des abscisses.

   a. Exprimer $\overrightarrow{f(M)g(M)}$ en fonction de $\overrightarrow{f(M)M}$.

b. En déduire la nature exacte et les éléments caractéristiques de g.

Exercice 75 Corr. page 143

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace (ε). On considère le point $A(3,1,-2)$,

le plan (P) :$x-2y-2z=1$ et l'ensemble (Γ) des points $M(x,y,z)$

tels que $-9x^2+16y^2+25z^2=0$

1. Etant donné le plan (P_1) : $x=1$, montrer que $(\mathrm{P}_1)\cap(\Gamma)$ est une conique dont on donnera la nature, l'excentricité et l'axe focal.
2. Etant donné le plan (P_2) : $y=1$, montrer que $(\mathrm{P}_2)\cap(\Gamma)$ est une conique dont on donnera la nature, l'excentricité et l'axe focal.
3. Soit (d) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(1,2,2)$.
   a. Donner une représentation paramétrique de (d).
   b. En déduire que (d) intercepte (Γ) en deux points à déterminer.
4. Déterminer l'expression analytique du demi-tour d'axe (d).

Épreuve ENS

.

17 ENS 2011 (Algèbre)

Exercice 76 Corr. page 144

Pour tout nombre réel m, on désigne par (C_m) la courbe représentative de la fonction f_m définie de $[0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par

$f_m(x) = \ln(\frac{mx-1}{m-x})$.

1 Déterminer l'intersection de toutes les courbes (C_m).

2 Déterminer, suivant les valeurs de m, le domaine de définition D_m de f_m.

3 On suppose que $m \neq 0$.

a. Montrer que pour tout $x \in D_m$, $f_m(x) = -f_{1/m}(x)$.
b. En déduire une méthode de construction de $(C_{1/m})$ à partir de (C_m).

4 On pose $f = f_2$ et $g = f_{-10}$.

a. Dresser les tableau de variations de f et g.
b. Construire (C_2) et (C_{10}) dans un même repère orthonormé (unité : $2cm$).
c. Déterminer l'aire du domaine (E) des points $M(x;y)$ tels que $\begin{cases} 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$
d. Montrer que f est une bijection de D_2 vers $\mathbb{R}$, puis déterminer $f^{-1}(x)$.

5 On pose $h(x) = min?(f(x), g(x))$. Par simple lecture graphique,

a. Déterminer le domaine de définition D de h.

Exercice 77 Corr. page 146

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x+(-1)^{n-1}(\sin x)^n}{1+\sin x} dx$.

Soit $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$.

1 Déterminer L.

2 Montrer que $u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin x)^n \cos x dx$; puis calculer $u_{n+1} - u_n$.

3 Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

4 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - \ln 2| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \cos x dx$.

5 En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

6 On pose $a_n = (2n+2)(u_{n+1} - u_n)$ et $b_n = \frac{(-1)^n}{u_{n+1}-u_n}$.
Montrer que (a_n) est géométrique et que (b_n) est arithmétique.

Exercice 78 Corr. page 147

1 Montrer que 2011 est un nombre premier.

2 Déterminer le plus petit nombre premier plus grand que 2011.

3 On pose $Z = \left(\frac{3-2\sqrt{3}+\left(2+3\sqrt{3}\right)i}{12+8i}\right)^{2011}$.

a. Ecrire $\frac{3-2\sqrt{3}+\left(2+3\sqrt{3}\right)i}{12+8i}$ sous forme algébrique.

b. En déduire la partie réelle et la partie imaginaire de Z (sans cosinus, ni sinus).

Exercice 79 Corr. page 148

Dans une population, 55% des familles (groupe A) ont une voiture, 80% des familles (groupe B) ont un téléviseur et 15% des familles (groupe C) n'ont ni voiture, ni téléviseur.

1 On choisit au hasard une famille de cette population. Déterminer la probabilité que :

a. Cette famille ait une voiture et un téléviseur.

b. Cette famille ait un téléviseur sachant qu'elle a une voiture.

2 On suppose que 5% des familles du groupe A (groupe B non compris) abandonnent leurs voitures, 5% des familles du groupe B (groupe A non compris) abandonnent leurs téléviseurs et 10% des familles du groupe C achètent chacune un téléviseur et une voiture. Reprendre le calcul des probabilités ci-dessus.

Épreuve ENS

.

18 ENS 2012 (Algèbre)

Exercice 80 Corr. page 149

Exercice 81 Corr. page 149

1 soit (U_n) la suite définie comme suit ; $U_n = n - 2011$ si $n \geq 4026$; et $U_n = U_n + 2012$ si $n \leq 4025$.

a. déterminer U_{5000} et U_{4024}.
b. montrer que si $2014 \leq n \leq 4025$, alors $U_n = U_n - 1$.
c. déterminer U_0.

2 soit (V_n) une suite telle que $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $V_n + m = |V_n|.|V_m|$

a. démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ V_n \geq 0$.
b. en déduire que (V_n) est une suite géométrique.
c. déterminer V_0 et exprimer V_n en fonction de n , sachant que $V_3 = 64$.

Pour tout couple de réels, on définit la fonction $h_{A,B}$ de R vers R par :

$$h_{A,B}(x) = (ax + b).e^{-2x}$$

On désigne par E l'ensemble de toutes les fonctions $h_{a,b}$ pour $(a; b) \in R^2$.

1 montrer que $\forall (a; b), (c; d) \in \mathbb{R}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $h_{a,b} + h_{c,d} \in E$ et $\lambda h_{a,b} \in E$.
On admet que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel réel.

2 on pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $U(x) = e^{-2x}$ et $V(x) = xe^{-2x}$.
Montrer que $B = (u; v)$ est une base de E.

3 soit $\phi l'applicationquitouth \in E$, associe $\phi(h) = h' - h$, ou h' est la dérivée de h.

a. montrer que pour tout $h \in E$, $\psi(h) \in E$.
b. montrer que ψ est un endomorphisme de E.
c. déterminer la matrice M de ψ par rapport à la base B.

4 déterminer l'élément g de E solution de l'équation différentielle :$y' - y = (-3x + 4)e^{-2x}$

Exercice 82 Corr. page 150

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la fonction F_λ $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$F_\lambda(x) = \lambda x - \lambda^2 x^2 \ln(\lambda x)$$

.
A

1. Déterminer l'ensemble de définition de $F_\lambda(x)$ en fonction de λ

2. Déterminer la dérivée F_1' de la fonction F_1 et exprimer $F(x)$ en fonction de $F_1(x)$.

3. Monter que $F'1(x)$ garde un signe constant sur tout intervalle de D_1 1.

4. En déduire le tableau de variation de F_λ suivant les valeurs de λ

B
Soit C_λ la courbe de $F_\lambda(x)$ dans un repère orthonormé (unité $1cm$).

1. Montrer que l'équation $F_1(x) = 0$ admet une unique solution X_1.

2. Construire (C_1) et $(C_{1/2})$ dans le même repère.

3. Soit (D) le domaine délimité d'une part par (C_1) et l'axe des abscisses, puis d'autre part par les droites d'équations respectives $X = 1$ et $X = X_1$.

   Montrer que $d = A(x_1)^3 + B(x_1)^2$ ou A, B et C sont des rationnels à déterminer.

Exercice 83 Corr. page 151

1. On considère dans C l'équation $(E) : x^4 + 2x^2 + 4 = 0$.

   a. Résoudre l'équation (E) ; on mettra les solutions sous forme algébrique.

   b. En déduire que pour tout réel x, $x^4 + 2x^2 + 4 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ ou a, b, c et d sont des réels à déterminer.

2. Une urne contient 20 billes indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 20. Une expérience consiste à tirer au hasard une bille de l'une et à calculer $(\sqrt{2} + i\sqrt{6})n$ où n est le numéro de la bille tirée.la bille est remise dans l'urne avant le tirage suivant.

   a. Déterminer la probabilité d'obtenir en un tirage un réel strictement positif.

   b. Déterminer la probabilité un réel strictement positif en trois tirages au plus.

Épreuve ENS

.

19 ENS 2012 (Géométrie)

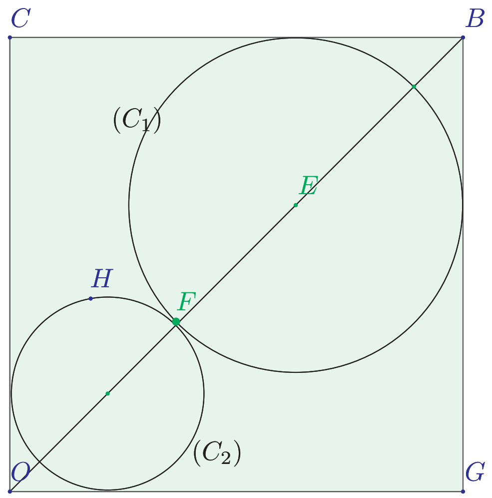
Exercice 84 Corr. page 152

Soient O, A, B, et C 4 points du plan complexe P tels que ABC est de sens direct et isocèle en C, OAC est équilatéral de sens direct et C est le milieu de $[OB]$.

1. Faire une figure et placer les points O, A, B et C.
2. Montrer qu'il existe exactement deux isométries qui transforment O en B et A en C.
3. Soit r le déplacement transformant O en B et A en C.
   - **a.** Montrer que r est rotation dont on donnera l'angle.
   - **b.** Construire sur la figure ci-dessus le centre Ω de r .justifier.
4. Soit $S_{(AC)}$ la réflexion d'axe (AC) et S l'antidéplacement appliquant O en B et A en C.
   - **a.** Montrer que S est une symétrie glissée d'axe (AC).
   - **b.** En déduire que $S = t_{\overrightarrow{AC}} o S_{(AC)}$. Où $t_{\overrightarrow{AC}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
5. Soient $(O; \vec{u}; \vec{v})$ un repère orthonormé direct de P tel que A ait pour affixe $z = 2$.
   Déterminer l'affixe du point Ω.

Exercice 85 Corr. page 152

Données :



1 OABC est un carré d'arête 1 ;

2 $(C1)$ est tangent à (OC) et à (OA) ;

3 $(C2)$ est tangent à (AB) et à (BC) ;

4 $(C1)$ et $(C2)$ sont tangents en F ;

5 $(C1)$ a pour centre D et pour rayon x ;

6 $(C2)$ a pour centre E et pour rayon ;

7 $x < y$ et la somme des aires de $(C1)$ et $(C2)$ est maximale.

1 On voudrait déterminer OD et OE.

a. Montrer que $OD = x\sqrt{2}$, $BE = y\sqrt{2}$ et que $x + y = 2 - \sqrt{2}$.
b. Déterminer la somme des aires de $(C1)$ et $(C2)$; puis OD et OE.

2 Soit P la parabole de foyer F et de directrice (BC).

a. Montrer que E appartient à P et déterminer le paramètre de P.
b. Reproduire la figure précédente pour $OA = 2cm$.
c. Construire sur la figure précédente la parabole P, son sommet et son axe.

Exercice 86 Corr. page 153

1 Le plan (P) étant rapporté à un repère orthonormé $(O; i; j)$.
on considère l'application F qui à tout point $M(x; y)$ de (P), associe le point $M'(x'; y')$ tel que

$$x' = x - y + 2 \text{ et } y' = 2y - 1$$

.

a. L'application F est-elle une isométrie ? justifier.
b. L'application F admet-elle un point invariant ? Justifier.
c. Déterminer les droites globalement invariantes par F.

2 Etant donné un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ de l'espace (). On considère le plan $(Q) : x = y + z + 1$ et la droite (d) de repère $(O; \vec{i}; -\vec{j}; -\vec{k})$.

a. Montrer que (Q) et (d) sont orthogonaux en un point I à déterminer.
b. Déterminer l'expression analytique de la réflexion S par rapport à (Q).
c. Déterminer sans calculs, la nature de $S \circ S$ ou S est le demi-tour d'axe (d).

Partie

IV

« Le mensonge est la seule et facile ressource de la faiblesse »
Stendhal

Filière Mathématiques

Épreuves-Maroua

20 ENS 2009 (Géométrie-Analyse)

Exercice 87 Corr. page 155

1 Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} \sqrt{x+\frac{1}{y}}+\sqrt{y+\frac{1}{x}} & = 2\sqrt{2} \\ (x^2+1)y+(y^2+1)x & = 4xy \end{cases}$$

2 Résoudre l'équation trigonométrique : $\frac{8\sin^{-2}x+1}{\cos^{-2}x+\tan^2 x} = \text{cotg}^2 x + \frac{4}{3}$

Exercice 88 Corr. page 155

Soit le nombre complexe $u = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$ $(i^2 = -1)$

1 Calculer u_2 et u_4. Calculer le module et un argument de u_4.

2 On considère un plan P muni d'un repère orthonormé. A tout point M de coordonnées (x, y), on associe son affixe $z = x + iy$. Déterminer l'ensemble des points M de P pour lesquels le module du produit uz est égal à 8.

Exercice 89 Corr. page 155

1 Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{1-x}$

a. Dresser le tableau de variation de f.

b. Soit Γ_1 la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à la courbe Γ_1 au point d'abscisse $1/2$. Tracer la courbe Γ_1 et la droite T.

c. Sur un même graphique, tracer Γ_2 courbe symétrique de Γ_1 par la symétrie orthogonale d'axe Ox.

d. Soit $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Montrer que Γ a pour équation cartésienne :
$x(x^2+y^2) - y^2 = 0$.

2 Interprétation géométrique de (4).

I est un point de coordonnées (1,0) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre $[OI]$ et Δ est la tangente à $\mathcal{C}$ au point I. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par O de coefficient directeur t, $t \in \mathbb{R}$.

a.
  i. Déterminer les coordonnées de M tel que $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{O, M\}$.
  ii. Déterminer les coordonnées de M' tel que $\Gamma \cap \mathcal{D} = \{O, M'\}$.
  iii. Déterminer les coordonnées de M' tel que $\Delta \cap \mathcal{D} = \{N\}$.

b. Montrer que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MN}$.

c. Déterminer l'intersection de Γ et de $\mathcal{C}$.

3 Propriétés géométriques.

Soit M un point de $\mathcal{C}$, N le point d'intersection de (OM) et de (Δ) et M' le point d'intersection de (OM) et Γ. On considère le point P tel que $OINP$ soit un rectangle.

a. Montrer que les rectangles INM et $OM'P$ se transforment par une symétrie centrale à déterminer.

b. En déduire que le triangle $PM'N$ est rectangle.

c. Soit F le symétrique de I par rapport à O. On considère la parabole Ω de foyer F et de directrice Δ. La droite (FP) coupe Δ en R. Construire géométriquement le point K de Ω qui se projette orthogonalement en R sur Δ.

.

21 ENS 2010

Exercice 90 Corr. page 156

1. Montrer l'inégalité $|x + x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \geq |x| - (|x| + |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)$ est vraie.

2. Résoudre le système d'équation suivant $\begin{cases} x^2 - y^2 - ax + ay & = 0 \\ xy & = a^2 \end{cases}$

3. Montrer que le l'inagalité $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} < 3$

4. ésoudre les inégalités suivantes : $\frac{A_4^{n+4}}{(n+2)!} < \frac{15}{(n-1)!}$
$\log_2\left(\sqrt{x^2 - 4x} + 3\right) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2-4x} + \sqrt{x+1}+1}\right) + 1$

5. Calcuer la somme suivante :

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin(2n-1)x, \quad x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 91 Corr. page 157

1. Soient a, b, c, d des nombres reels, déterminer tous les nombres complexes z qui satisfont chacune des égalités.

   a. $a.|z|^2 + 2iz + 2a(1+i) = 0$
   b. $b.z|z| - az - i = 0$

Exercice 92 Corr. page 158

1. Calculer l'inégalté suivante : $j = \int \frac{2x^3 - 13x^2 + 29x - 20}{x^2 - 6x + 11} dx$

2. Soent $a > 0$ et $b > 0$. Calculer la valeur de l'expression $A = \frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x - \sqrt{x^2-1}}$ pour

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$$

Exercice 93 Corr. page 158

Dans un triangle ABC, la mesure de l'angle au sommet A est le double de celle de l'angle au sommet C, le coté BC est pus long que le coté AB de $2cm$, et $AC = 5cm$.

Déterminer les longueurs des cotés AB et BC

Épreuve ENS

.

22 ENS 2012 (Géométrie-Analyse)

Exercice 94 Corr. page 159

Soient A, B, C, et D quatre points distincts de l'espace.

1. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

2. On considère un tétraèdre $ABCD$ tel que la droite (AB) soit orthogonale à (CD) et (BC) soit orthogonale à (AD). Montrer que (BD) est orthogonale à (AC).

Exercice 95 Corr. page 159

1. Montrer que $5^2n - 3^n$ est divisible par 11.

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{N}$ le système $\begin{cases} x & \equiv 5[8] \\ x & \equiv 4[11] \end{cases}$

3. **a.** Déterminer (x_0, y_0) solution de l'équation $45x - 19y = 0$
   b. Résoudre dans Z^2 l'équation $45x - 19y = 7$

Exercice 96 Corr. page 159

1. Un endomorphisme f du plan vectoriel $\vec{P}$ vérifie $f \circ f = \widehat{0}$ où $\widehat{0}$ est l'endomorphisme nul.
   Montrer que $Imf \subseteq kerf$ et que $g = f + Id_{\vec{P}}$ est un endomorphisme de $\vec{P}$.

2. Un endomorphisme f du plan vectoriel $\vec{P}$ vérifie $\forall \vec{u} \in \vec{P}$, $f \circ f(\vec{u}) = -\vec{u}$.
   Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul de$\vec{P}$.
   Montrer que $E = (\vec{v}, f(\vec{v}))$ est une base de $\vec{P}$ et exprimer la matrice de f dans cette base.

Exercice 97 Corr. page 159

On considère les suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$ définies respectivement par :

$$\begin{cases} u_o & = 7 \\ u_{n+1} & = 2 \times \sqrt[2]{u_n} \end{cases} \quad v_n = \ln(u_n), \quad \text{et} \quad w_n = \ln(v_n - \frac{3\ln(2)}{2})$$

1. Démontrer que la suite $(w_n)_n$ est arithmétique de raison $-\ln 3$ et en déduire l'expression de w_n en fonction de n.

2. Montrer que la suite $(v_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\sqrt{2}\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

.

23 ENS 2013 (Algèbre-Analyse)

A

Exercice 98 Corr. page 160

Pour chacun des enonces suivant , indiquer si la proposition correspondante est vraie ou fausse et proposer une justification de la reponse choisie.

1. Le plan complexeest rapporte a un repere orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

   Soit (E) l'ensemble des points m d'affixe z different de 1 du plan telle que $\left|\frac{z}{1-z}\right| = 1$.

   Proposition : "L'ensemble (E) est une droite parallele à l'axe des reels"

2. Le plan complexe est rapporte a un repere orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
   On considere l'equation (E) suivante : $z^2 + 2\cos(\frac{\pi}{5})z + 1 = 0$.

   Proposition : "L'equation (E) a deux solutions complexes de module egaux a 1"

3. Dans le plan complexe d'origine O , on considere pour tout entier naturel non nul n, les points M_n d'affixe $z_n = e^{\frac{2in\pi}{3}}$.
   Proposition : "Les points O, M_1 et M_{20} sont alignes ".

4. Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. soient A le point d'affixe $2 - 5i$ et B le point d'affixe $7 - 3i$.

   Proposition : " Le triangle OAB est isocèle rectangle"

5. Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

   Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$.

   Proposition : "Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur".

6. Soit X une variable aleatoire qui suit la loi exponentielle de parametre λ, où λ ? est un nombre strictement positif .On rappelle que ,pour tout reel t strictement positif , la probabilite de l'evenement $(X \leq t)$ s'exprime par
   $P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

   Proposition : "Sachant que $X \geq 2$, la probabilite que X appartienne a l'intervalle $[2; 3]$ est egale a $1 - e^{-\lambda}$"

7. On considere la suite U_n definie par $U_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n,

   $$U_{n+1} = \sqrt{7U_n}$$

   .

   Proposition : "Pour tout entier naturel n , $0 \leq U_n \leq 7$"

8. On considere trois points A, B et C non alignes de l'espace .Le point G est le centre de gravite du triangle ABC. On note F l'ensemble des points M verifiant :

   $$\|MA + MB + MC\| = 6$$

   .

   Proposition : "S est la sphere de centre G et de rayon 2"

9. On appelle S l'ensemble des couples (x, y) d'entiers relatifs solutions de l'equation :
   $3x - 5y = 2$.

10 **Proposition :** "l'ensemble S est l'ensemble des couples $(5k-1, 3k-1)$ ou k est un entier relatif"

11 Soit n un entier naturel superieur ou egal a 3.

12 **Proposition :** "Pour tout entier naturel $k(2 \leq k \leq n)$, le nombre $n! + k$ n'est pas un nombre premier"

B

Exercice 99

Corr. page 161

Soit f la fonction definie et derivable sur $[0,1]$ telle que :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{pour tout } x \in [0,1]$$

On ne cherchera pas a determiner f

1 Determiner le sens de variation de f sur $[0,1]$

2 Soit g la fonction definie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par $g(x) = f(\tan(x))$.

- **a.** Justifier que g est derivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, puis que pour tout x de $[0, \frac{\pi}{4}]$, $g'(x) = 1$.
- **b.** Montrer que, pour tout x de $[0, \frac{\pi}{4}]$, $g(x) = x$. En deduire que $f(1) = \frac{\pi}{4}$.

3 Montrer que pour tout x de $[0,1]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}$

Soit (I_n) la suite definie par $I_0 = \int_0^1 f(x)dx$ et pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_0^1 x^n f(x)dx$.

4 Calculer a l'aide d'une integration par partie I_0.

5
- **a.** Montrons que pour tout entier naturel non nul n, $I_n \geq 0$.
- **b.** Monter que pour tout entier naturel n non nul, $I_n \leq \frac{\pi}{4(n+1)}$
- **c.** En deduire la limite de la suite (I_n).

Exercice 100

Corr. page 161

Le plan complexe est rapporte a un repere orthonorme . Soit S la transformation du plan qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = 5iz + 6i + 4$

1 Determiner la nature et les elements caracteristiques de la transformation S.

2 On note x et x' , y et y' les parties reeles et imaginaires respectives de z et z'.

Demonter que $x' = -5y + 4$ et $y' = 5x + 6$.

Dans cette partie , on se place dans le cas ou les coordonnees x et y du point M sont des entiers relatifs tels que $-3 \leq x \leq 5$ et on note E l'ensemble de ces points M. On rappelle que l'ensemble des couples (a, b) d'entiers relatifs tels que $4a + 3b = 5$ est : $(a = 3k + 5; b = -4k - 5)$ ou k est un entier relatif.

3 Determiner l'ensemble des points M de E de coordonnees (x, y) tels que

$-3x' + 4y' = 37$

4 Soient M un point de l'ensemble E et M' son image par la transformation S.

- **a.** Demontrer que $x' + y'$ est un multiple de 5.
- **b.** Demonter que $x' - y'$ et $x' + y'$ ont la meme parite.
- **c.** Determiner l'ensemble des points M de E tels que : $x'^2 - y'^2 = 20$

24 ENS 2013 (Géométrie)

L'epreuve comporte 10 volets independants de 2 points chacun

Exercice 101 Corr. page 163

1 Soient A, B et C trois points non alignes dans un plan , I milieu de $[BC]$ et J le point tel que $AJ = -\frac{1}{3}AB$

a. Determiner une equation catesienne de la droite (IJ) dans le repere (A, AB, AC)

b. Exprimer le point K d'intersection de (IJ) et (AC) comme barycentre de A et C.

2 $ABCDEFGH$ est un cube de sens direct et d'arete 2. Soit I le milieu de $[GC]$.

a. Determiner la distance du point A au plan (EFI)

b. Determiner la distance du point B a la droite (AI)

Dans les questions 3 a 7 , $R = (O, i, j)$ est un repere orthonorme direct du plan (P)

3 Soit P la parabole de sommet $I(0, 1)$ et de foyer $F(-1, 0)$

a. Determiner l'equation reduite de la parabole P dans un repere a preciser.

b. Retrouver une equation cartesienne de P dans le repere R.

4 Soit f la transformation du plan d'expression analytique dans R :

$$\begin{cases} x' &= 2x - y + 1 \\ y' &= -x + 2y - 1 \end{cases}$$

a. Determiner l'ensemble des points invariants par f.

b. Determiner les droites globalement invariantes par f.

5 Soit $S_{(d)}$ la symetrie orthogonale d'axe la droite (d)

a. Determiner l'expression analytique analytique de $S_{(d_1)}$ ou $(d_1) : x - y\sqrt{3} - 1 = 0$

b. Determiner la nature et les elements caracteristiques de $S_{(d_1)} \circ S_{(d_2)}$ ou : $(d_2) : x = 1$

6 Soit S la transformation du plan dont la forme complexe $z' = (-1 + i)z - 1 - 2i$

a. Determiner la nature et les elements caracteristiques de S.

b. Determiner et caracteriser la transformation T du plan telle que $S \circ T = t_{2\vec{i}}$ où $t_{2\vec{i}}$ désigne la translation de vecteur $2\vec{i}$

7 Soit (C) la courbe dont une equation cartesienne dans R est : $-4x^2 - 8x + 2y + y^2 = 2$

a. Determnier la nature exacte de (C), puis donner le centre et ses sommets dans R

b. Construire (C) dans le repere R.

Dans les questions 8 a 10 , $R = (O, i, j, k)$ est un repere orthonormé direct de l'espace (ε)

8 Soient $ABCD$ un carre de (ε) et (E_m) l'ensemble des points M de (ε) verifiant la relation :

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + mDM^2 = 0$$

a. Lorsque $A \in (E_m)$,determiner le reel m et caracteriser (E_m).

b. Lorsque $B \in (E_m)$, determiner le reel m et caracteriser (E_m).

9 Soient $A(1, 1, -1)$ et $B(2, -2, 1)$ deux points de (ε)

a. Determiner l'ensemble (ε_1) des points m tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

b. Determiner l'ensemble (ε_1) des points m tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 3$

10 Pour $m \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$, h_m est l'application qui, a tout point m de (ε), associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = -(m + 1)(\overrightarrow{OM} + \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})$

a. Monter que h_m est une homothetie de centre Ω_m et de rapport k_m a determiner.

b. Monter que Ω_m decrit une droite privee de deux points lorsque m varie dans $\mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$.

.

25 ENS 2013 (Algèbre-Analyse)

Exercice 102 Corr. page 166

Pour chacun des énoncés suivants, indiquer si la proposition correspondante est vraie ou fausse et proposerune justification de la réponse choisie.

1 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormale direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z différent de 1 du plan telle que $\left|\frac{x}{1-x}\right| = 1$
Proposition : "L'ensemble (E) est une droite parallèle à l'axe des réels".

2 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormale direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'équation (E) suivante : $z^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) z + 1 = 0$
Proposition : "L'équation (E) a deux solutions complexes de modules egaux à 1".

3 Dans le plan complexe d'origine O, on considère, pour tout entier naturel non nul n, les points M_n d'affixe $z_n = e^{\frac{2in\pi}{3}}$
Proposition : " Les point O, M_1 et M_{20} sont alignés".

4 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormale direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. soient A le point d'affixe $2-5i$ et B le point d'affixe $7-3i$
Proposition : "Le triangle OAB est rectangle isocèle ".

5 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormale direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soit $z = 3 + i\sqrt{3}$
Proposition : "Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur ".

6 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un nombre strictement positif. On rapelle que, pour tout réel t strictement positif , la probabilité de l'événement $(X \leq t)$ s'exprime par $P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
Proposition : "sachant que $X \geq 2$, la probabilité de X appartienne à l'intervalle [2 ;3] est égale à $1 - e^{-\lambda t}$".

7 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$.
Proposition : "Pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq 7^n$ ".

8 On considère trois points A, B et C non alignés de l'espace. Le point G est le centre de gravité du triangle ABC. On note F l'ensemble des points M vérifiant $\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = 6$
Proposition : "F est la sphère de centre G et de rayon 2".

9 On appelle S l'ensemble des couples (x, y) d'entiers relatifs solutions de l'équation $3x - 5y = 2$
Proposition : "L'ensemble S est l'ensemble des couples $(5k-1; 3k-1)$ où k est un entier relatif ".

10 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Proposition : "Pour tout entier naturel $k(2 \leq kn)$, le nombre $n! + k$ n'est pas un nombre premier ".

Exercice 103 Corr. page 167

soit f la fonction définie et dérivable sur [0,1] telle que :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in [0,1]$$

On ne cherche pas à déterminer f.

1 Déterminer le sens de variation de f sur [0,1].

2 soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $g(x) = f(\tan(x))$.

a. Justifier que g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, puis que, pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $g'(x) = 1$

b. Montrer que, pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $g(x) = x$. En déduire que $f(1) = \frac{\pi}{4}$

3 Montrer que, pour tout x de [0,1], $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}$
Soit (I_n) la suite définie par $I_0 = \int_0^1 f(x)dx$ et pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_0^1 x^n f(x)dx$

4 Calculer à l'aide d'une intégration par parties I_0.

5 **a.** Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $I_n \geq 0$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $I_n \leq \frac{\pi}{4(n+1)}$.

c. En déduire la limite de la suite (I_n).

Exercice 104 Corr. page 169

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormale direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Soit S la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = 5iz + 6i + 4$.

1 Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation S.

2 On note x et x', y et y' les parties réelles et imaginaires respectives de z et z'. Démontrer que $x' = -5y + 4$ et $y' = 5x + 6$.
dans cette partie, on se place dans le cas où les coordonnées x et y du point M sont des entiers relatifs tels que $-3 \leq x \leq 5$ et $-3 \leq y \leq 5$. On note E l'ensemble de ces points M. On rapelle que l'ensemble des couples (a, b) d'entiers relatifs tels que $4a + 3b = 5$ est : $(a - 3k + 5, b = -4k - 5)$ où k est un entier relatif.

3 Déterminer l'ensemble des points M de E de coordonnées (x, y) tels que $-3x' + 4y' = 37$.

4 Soient M un point de l'ensemble E et M' son image par la transformation S.

a. Démontrer que $x' + y'$ est un multiple de 5.

b. Démontrer que $x' - y'$ et $x' + y'$ ont la même parité.

c. Déterminer l'ensemble des points M de E tels que : $x^{2\prime} - y^{2\prime} = 20$.

26 ENS 2013 (Géométrie)

Exercice 105 Corr. page 170

L'épreuve comprend 10 volets indépendants de 2 points chacun.

1 Soient A, B et C trois points non alignés dans un plan, I milieu de $[BC]$ et J le point tel que $\overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

- **a.** Déterminer une équation cartésienne de la droite (IJ) dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- **b.** Exprimer le point d'intersection K de (IJ) et (AC) comme barycentre de A et C.

2 $ABCDEFGH$ est un cube de sens direct et d'arète 2. Soit I le milieu de $[GC]$.

- **a.** Déterminer la distance du point A au plan (EFI).
- **b.** Déterminer la distance du point B à la droite (AI).

Dans les questions 3 à 7, $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un repère orthonormé direct du plan (P)

3 Soit $\mathcal{P}$ la parabole de sommet $I(0,1)$ et de foyer $F(-1,0)$;

- **a.** Déterminer l'équation réduite de la parabole $\mathcal{P}$ dans un repère à préciser.
- **b.** retrouver une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ dans le repère $\mathcal{R}$.

4 Soit f la transformation du plan d'expression analytique dans $\mathcal{R}$: $\begin{cases} x' = 2x - y + 1 \\ y' = -x + 2y - 1 \end{cases}$

- **a.** Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
- **b.** Déterminer les droites globalement invariantes par f.

5 Soit $S_{(d)}$ la symétrie orthogonale d'axe la droite (d).

- **a.** Déterminer l'expression analytique de $S_{(d_1)}$ où $(d_1) : x - \sqrt{3}y - 1 = 0$
- **b.** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $S_{(d_1)} \circ S_{(d_2)}$ où $(d_2) : x = 1$.

6 Soit S la transformation du plan dont la forme complexe $z' = (-1 + i)z - 1 - 2i$.

- **a.** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.
- **b.** Déterminer et caractériser la transformation T du plan telle que $S \circ T = t_{2\vec{i}}$ où $t_{2\vec{i}}$ désigne la translation de vecteur $2\vec{i}$.

7 Soit (C) la courbe dont une équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ est $-4x^2 - 8x + 2y + y^2 = 2$.

- **a.** Déterminer la nature exacte de (C) ; puis donner le centre ey ses sommets dans $\mathcal{R}$.
- **b.** Construire (C) dans le repère $\mathcal{R}$.

Dans les questions 8 à 10, $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est un repère orthonormé direct de l'espace (ε).

8 Soient $ABCD$ un carré de (ε) et (E_m) l'ensemble des points M de (ε) vérifiant la relation : $AM^2 + BM^2 + CM^2 + mDM^2 = 0$.

- **a.** Lorsque $A \in (E_m)$, déterminer le réel m et caractériser (E_m).

b. Lorsque $B \in (E_m)$, déterminer le réel m et caractériser (E_m).

9 Soient $A(1, 1, -1)$ et $B(2, -2, 1)$ deux points de (ε).

a. Déterminer l'ensemble (ε_1) des points M tels que : $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

b. Déterminer l'ensemble (ε_2) des points M tels que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 3$

10 Pour $m \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$, h_m est l'application qui, à tout point M de (ε), associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = (m + 1)\left(\overrightarrow{OM} + \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right)$

a. Montrer que h_m est une homothétie de centre Ω_m et de rapport k_m à déterminer.

b. Montrer que Ω_m décrit une droite privée de deux points lorsque m varie dans $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$

27 ENS 2014 (Analyse-Algèbre-Probabilité)

Exercice 106 Corr. page 176

Résoudre l'équation $x^6 - 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2 = 0$ sahant qu'elle admet i comme double racine.

Exercice 107 Corr. page 176

Considération l'équation d'équations que voici, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} ax + y + z = a^2 \\ 2ax + ay = 2a^2 \\ ax + y + az = 1 \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles ce système possède :

1. Aucune solution
2. Une solution unique
3. infinité de solution
justifier

Exercice 108 Corr. page 177

Partage malin
Un homme meurt en laissant son héritage à sa famille comprenant 3 femmes (notée A, B et C) et 15 enfants répartis comme suit : A a 6 enfants, B a 5 enfants et C en a 4.
Pour attribuer la maison, bien principal et indivisible de la famille, l'homme dans son testament décide que l'on procède de la manière suivante.

- L'aîné des femmes A, donnera un numéroà chaque enfant (de 1 à 15) ;
- Les enfants seront placé autour d'un cercle et rangés par ordre croissant (du numéro 1 au numéro 15) ;
- En partant du numéro 1, on élimine de manière successive le troisième enfant rencontré (ainsi le premier éliminé est 3, le second est 6...) ;
- Le dernier enfant (non éliminé) hérite de la maison.

Après la répartition des numéros par A et la fin de la procédure, on constate que :

- Tous les enfants de B sont éliminés en premier (il ne reste que ceux de C et A dans le cerlce).
- Tous les enfants de C sont éliminés avant ceux de A (il ne reste que ceux de A dans le cercle).
- Le fils ainé de A hérite de la maison.

Partie I : Déterminer

1. Les numéros attribués aux enfants de B
2. Les numéros attribués aux enfants de BC
3. Les numéros attribués aux deux derniers enfants de A qui seront dans le cercle.

4 Le numéro attribué à l'aîné de A

Partie II
On constate que l'on a oublié de prendre en compte un enfant nommé Alain et qui est né hors mariage. Le nombre total d'enfant est donc de 16 et la procédure d'héritage de la maison rest identique.
Après la répartition des numéros par A et la fin de a procédure on constate que :

- Tous les enfants de C sont éliminés en premier (il ne reste Alain, les enfants de B et A dans le cerlce).
- Tous les enfants de B sont éliminés avant ceux de A (il ne reste que Alain, et les enfants de de A).
- Alain et l'ainé de A sont les deux derniers qui restent dans le cercle.

1 Les numéros attribués aux enfants de B

2 Les numéros attribués aux enfants de BC

3 Les numéros attribués à Alain et à l'aîné des enfants de A.

Exercice 109 Corr. page 178

Problème
Partie A
La fonction f est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = (20x+10)e^{(-1/2)x}$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité graphique $1cm$)

1 Etudier la limite de f en $+\infty$

2 Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations

3 Etablir que l'équation $f(x) =$ admet une unique solution strictement positive a dans l'intervalle $]0;+\infty[$ donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de a

4 Tracer la courbe $\mathcal{C}$

5 Calculer l'intégrale $I = \int_0^3 f(x)dx$.

Partie B
On note $y(t)$ la valur en degré Celsius de la température d'une réaction chimique à 'instant t t étant exprimé en heures. La valeur initiale à l'instant $t = 0$ est $y(0) = 10$
On admet que la fonction qui à tout réel t appartient à l'intervalle $]0;+\infty[$ associe $y(t)$ est solution de l'équation différentielle (E) :$y' + \frac{1}{2}y = 20e^{(-1/2)t}$

1 Vérifier que la fonction f étudiée dans la première partie du problème est solution de l'équation différentielle (E) appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$.

2 On se propose de démontrer que cette fonction f est l'uniue solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), definie sur $[0;+\infty[$, vérifiant $g(0) = 10$. Démontrer que la fonction $g - f$ est solution sur l'intervalle $[0;+\infty[$, l'équation différentielle (E') : $y' + \frac{1}{2}y = 0$

b. Résoudre l'équation différentielle (E')

c. Conclure

3 La valeur θ en dégrés Celsius de a température moyenne à cette réaction chimique durant les tois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;3]$.

Calculer la valeur exacte de θ, puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondi au dégré.

28 ENS 2014 (Géométrie)

Exercice 110 Corr. page 180 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J) on considère l'ensemble (E) des points M d'affixe z vérifiant l'égalité $z(z+i)=0$ ou la relation

$$(\mathcal{R}) : 2\left(\arg(z+i)\right) - \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \pi$$

1. Montrer que $(\mathcal{R})$ équivaut à $Re\left(\frac{Z^2}{z}\right) = 0$ où Z est une expression en z à déterminer.
2. En déduire que $(E) = (d) \cup (\mathcal{C})$ ou (d) est une droite et $\mathcal{C}$ un cercle à déterminer.
3. Construire (E) et la droite $(\Delta) : 2x + 2\left(\sqrt{3}-1\right)y + 1 = 0$
4. Vérifier que (Δ) rencontre (E) en trois points A, B et C à préciser.
5. Soient z_A, z_B et z_C les affixes respectives de A, B et C avec $Im(z_B) < Im(z_A)$
   - **a.** Mettre A et B sous forme exponentielle.
   - **b.** Déterminer un argument de z_C à 0,01 près en degré.
   - **c.** Déterminer la valeur exacte de l'aire du triangle OAC

Exercice 111 Corr. page 181

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté au repère orthonormé (O, I, J). Pour toute partie non vide $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{P})$, lorsqu'un point A de $\mathcal{C}$ minimise la distance OM lorsque M parcourt $(\mathcal{C})$, on dit que la disrance O à l'ensemble $(\mathcal{C})$ vaut $d(O, (\mathcal{C})) = OA$

1. On suppose que $(\mathcal{C})$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $y = -2x + 1$
   - **a.** Quelle est la noture de $(\mathcal{C})$?
   - **b.** En déduire la valeur exacte de $d(O, (\mathcal{C}))$.
   - **c.** Déterminer le point H de $(\mathcal{C})$ tel que $d(O, (\mathcal{C})) = OH$.
2. On suppose que $(\mathcal{C}) : y = 2x^2 - 1$ (courbe de f définie par $f(x) = 2x^2 - 1$) pour $x \in \mathbb{R}$
   - **a.** M étant un point de $(\mathcal{C})$ d'abcisse x exprimer $g(x) = OM^2$ en fonction de x
   - **b.** Déterminer les extréma de g.
   - **c.** Déduire la valeur exacte de $d(O, (\mathcal{C}))$ et les points M de $(\mathcal{C})$ tels que $d(O, (\mathcal{C})) = OM$.
3. Déterminer $d(O, (\mathcal{C}))$ lorsque $(\mathcal{C})$ est un cercle d'équation $(\mathcal{C}) : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$

Exercice 112 Corr. page 181

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct (O, I, J). On considère la transformée F de $(\mathcal{P})$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' etl que $2z' = z + i\bar{z} + 2 - 2i$

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par F
2. Montrer que M' décrit une droite (D) à préciser lorsque M varie dans $(\mathcal{P})$.

3 Montrer que $z' - z = \lambda(1 - i)$ où λ est un réel dépendant de z à déterminer

4 En déduire que $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à tout vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de (D).

5 Déduire la nature et les éléments caractéristiques de F

6 Détrminer l'image de F

a. Da la droite $(d) : y = -x$

b. Du cercle $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 = 1$

Partie

V

Le scélérat a ses vertus, comme l’honnête homme a ses faiblesses »

François de La Rochefoucauld

Filière Informatique

Corrections-Maroua

François VI, duc de la Rochefoucauld, né le 15 septembre 1613 à Paris et mort le 17 mars 1680, est un écrivain, moraliste et mémorialiste français, surtout connu pour ses Maximes

Épreuve ENS

.

29 ENS 2007

Corrigé 01

Résolution dans $\mathbb{C}$

$$(S)\left\{\begin{array}{l} z^4+t^4=17 \\ zt=-2 \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} zt=-2 &\Rightarrow t=-\frac{2}{z} \\ z^4+t^4=17 &\Rightarrow z^4+\left(\frac{-2}{z}\right)^4=17 \\ &\Rightarrow z^4+\frac{16}{z^4}-17=0 \\ &\Rightarrow z^8-17z^4+16=0 \end{aligned}$$

Posons $z^4=X$, on a :

$$\begin{aligned} X^2-17X+16 &= 0 \\ \Delta=225 &= (15)^2 \\ X_1 &= \frac{17-15}{2}=1 \\ X_2 &= \frac{17+15}{2}=1 \end{aligned}$$

On a $z^4=1$ ou $z^4=16$

- $z=1$ ou $z=-1$ ou $z=i$ ou $z=-i$
- $z=2$ ou $z=-2$ ou $z=2i$ ou $z=-2i$.

On trouve respectivement :

- $t=-2$ ou $t=2$ ou $t=2i$ ou $t=-2i$
- $t=-1$ ou $t=1$ ou $t=i$ ou $t=-i$

.

Corrigé 02

$$\left\{\begin{array}{l} U_0=2 \\ U_{n+1}=-\frac{1}{2}U_n+2 \end{array}\right. \qquad V_n=U_n-\frac{4}{3}$$

1 Montrons que (V_n) est géométrique.

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - \frac{4}{3} \\ &= -\frac{1}{2}U_n + 2 - \frac{4}{3} \\ &= -\frac{1}{2}U_n + \frac{2}{3} \\ &= -\frac{1}{2}(U_n - \frac{4}{3}) \\ &= -\frac{1}{2}V_n \end{aligned}$$

$V_{n+1} = -\frac{1}{2}V_n$ donc (V_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = \frac{2}{3}$

$$V_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n V_n \qquad V_n = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$U_n = \frac{4}{3} + V_n \qquad U_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

2

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k &= U_1 + U_2 + ... + U_n \\ &= -\frac{4}{3}n + \sum_{k=1}^{n} V_k \\ &= -\frac{4}{3}n + V_1\left(\frac{1-(-\frac{1}{2})^n}{1-(-\frac{1}{2})}\right) \\ &= -\frac{4}{3}n - \frac{1}{3}\left(\frac{1-(-\frac{1}{2})^n}{1-(-\frac{1}{2})}\right) \\ S_n &= \frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4n}{3} \\ \lim_{x\to+\infty} S_n &= -\infty \end{aligned}$$

Corrigé 03

1 Posons $a = 2\sqrt{3} + i$ et $b = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$

$$\begin{aligned} b &= \frac{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}-i)}{10} = \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{3}}{5}i \\ |b| &= \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{3}{25}} = \frac{\sqrt{7}}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} b = \frac{\sqrt{7}}{5}e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^5 &= \left(\frac{\sqrt{7}}{5}\right)^5 e^{i\frac{5\pi}{3}} \\ &= \frac{(\sqrt{7})^5}{3125}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

2 $(2+i)^2 = 5+4i$
$z^4 - 8(1+i)z^2 + 16i - 12 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 8(1+i) + 16i - 12 = 0$
Avec $X^2 = z^2$ on trouve $X_1 = 2i$ et $X_2 = 8+6i$.

$$\begin{aligned} z^2 = 2i &\quad\Rightarrow\quad z = \sqrt{3}+i \text{ ou } z = -\sqrt{3}-i \\ z^2 = 8+6i &\quad\Rightarrow\quad z = 3+i \text{ ou } z = -3-i \end{aligned}$$

$$S = \left\{-3-i; -\sqrt{3}-i; 3+i; \sqrt{3}+i\right\}$$

Corrigé 04

$$f(x) = x + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$$

1 Tableau de variation

* $Df =]-\infty; 2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$
* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ to $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
* $\lim_{\substack{x\to -2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{\to \\ x>-2}} f(x) = +\infty$
* $\lim_{\substack{x\to 2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{\to \\ x>2}} f(x) = -\infty$
* $f'(x) = -1 + \frac{4}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2}{(x+2)(x-2)}$

tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||		$-$		||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

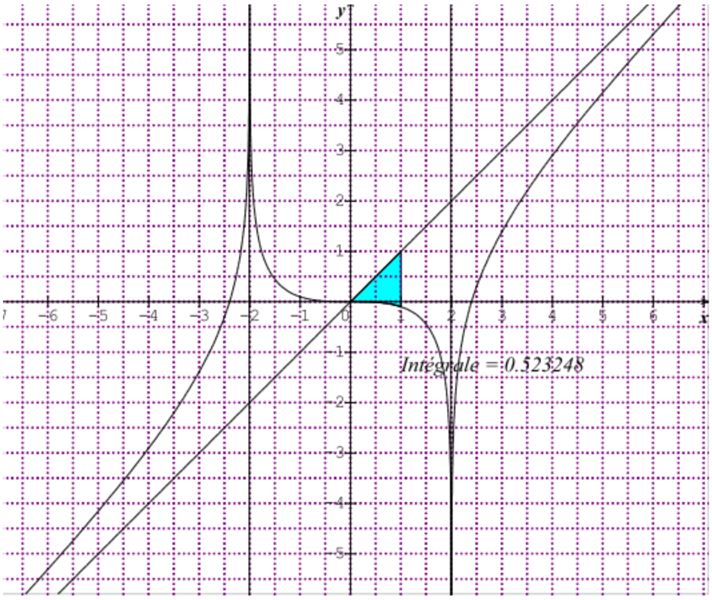
2

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x + \ln(x-2) - \ln(x+2)x = 1$$

De même, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$
Donc la droite d'équation $y = x$ est asymtopte à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{x^2}{(x+2)(x-2)} \Rightarrow f''(x) &= \frac{-8x}{(x^2-4)^2} \\ f''(x) &= 0 \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

donc C_f admet un point d'inflexion en $x = 0$.
Graphe :



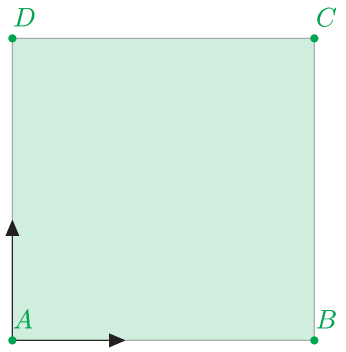
A = domaine hachuré.

$$A = \int_0^1 \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) dx$$

Posons

$$\begin{array}{rcl} u' = 1 & \Rightarrow & u = x \\ v = \ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right) & \Rightarrow & v' = \dfrac{4}{(2-x)(2+x)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} A & = & \left[x\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{4x}{(2-x)(2+x)} \\ & = & \left[x\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right) + 2\ln(4-x^2)\right]_0^1 \\ A & = & \ln\left(\dfrac{27}{16}\right) \end{array}$$



6

1 Coordonnées des points :

$$A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \quad C\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} \quad D\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix}$$

2 2- Forme complexe de T :
Pn pose $T : z' = az + b$

$$\begin{cases} T(B) = D \Rightarrow z_D = az_B + b \\ T(C) = I \Rightarrow z_I = az_C + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 3i \\ a(3+3i) + b = \frac{3}{2} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 - \frac{1}{2}i \\ b = 3 + \frac{9}{2}i \end{cases}$$

$$T : z' = \left(-1 - \frac{1}{2}i\right) z + 3 + \frac{9}{2}i$$

Eléments caractéristiques de T :

- Centre Ω :

$$z_\Omega = \left(-1 - \frac{1}{2}i\right) z_\Omega + 3 + \frac{9}{2}i$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow z_\Omega &= \frac{3 + \frac{9}{2}i}{2 + \frac{1}{2}i} = \frac{33 + 30i}{17} \\ z_\Omega &= \frac{33}{17} + \frac{30}{17}i \end{aligned}$$

$$\Omega\begin{pmatrix}\frac{33}{17}\\ \\ \frac{30}{17}\end{pmatrix}$$

- Rapport k :

$$\begin{aligned} a &= -1 - \frac{1}{2}i \\ k &= |a| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

- Angle α

$$\alpha = arg\left(-1-\frac{1}{2}i\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{-1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \sin\alpha = \frac{-\frac{1}{5}}{\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5}$$

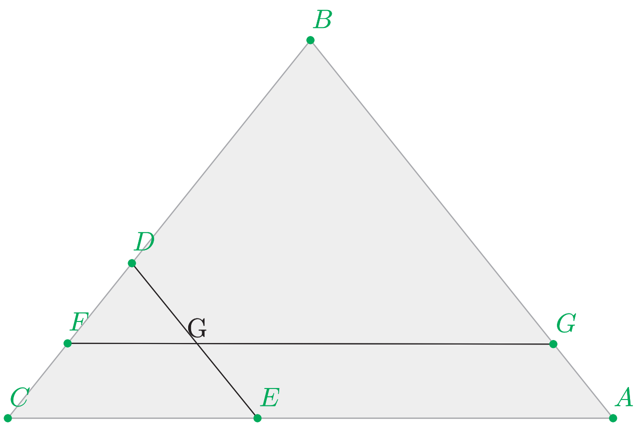
$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \sin\alpha = \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{cases} \Rightarrow \alpha =$$

3 Image par T de la droite : $2x - y + 1 = 0$ expression analytique de T :

$$\begin{aligned} z' &= \left(-1-\frac{1}{2}i\right)z + 3 + \frac{9}{2}i \\ &\Rightarrow \begin{cases} x' = -x + \frac{1}{2}y + 3 \\ y' = -\frac{1}{2}x - y + \frac{9}{2} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{5}x' - \frac{2}{5}y' + \frac{21}{5} \\ y = \frac{2}{5}x' - \frac{4}{5}y' + 2 \end{cases} \end{aligned}$$

En remplaçant x et y par ces valeurs on obtient $-2x' + \frac{37}{5} = 0$ qui est la droite d'équation $x = \frac{37}{10}$.

Corrigé 06



7

1 Construction de G :

$$G = bar\left\{(A,1);(B,1);(C,2)\right\}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} &\Rightarrow 4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &\Rightarrow AG^2 = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = 7 \\ &\Rightarrow AG^2 = 7 \end{aligned}$$

De même on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BG} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ BG^2 &= \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = 7 \\ BG^2 &= 7 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CG} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\\ CG^2 &= \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)=7\\ CG^2 &= 7\end{aligned}$$

2 Détermination des ensembles.

$(E_1) : MA^2+MB^2+MC^2=40 \quad (1)$

$$\begin{aligned}(1) \quad \Rightarrow \quad MG^2 &= \frac{48-(GA^2+GB^2+2GC^2}{4}=7\\ MG &= \sqrt{7}\end{aligned}$$

(E_1) est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{7}$, donc passant par A et B

$(E_2) : MA^2+MB^2-2MC^2=8 \quad (2)$

(E_2) est la droite passant par G et parallèle à (AB) (ou encore perpendiculaire à (GC)). En effet

$$\begin{aligned}(2) \quad &\Rightarrow \quad GA^2+GB^2-2GC^2(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC})=8\\ &\Leftrightarrow \quad 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC})=0\\ &\Leftrightarrow \quad -8\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{GC}=0\\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{GM}.\overrightarrow{GC}=0\end{aligned}$$

Corrigé 07

$$(E) : y''+y'+y=x \quad (E') : y''+y'+y=0$$

1 Montrons que f est solution de (E) si et seulement si $y-(x-1)$ est solution de (E').
Supposons $y-(x-1)$ solution de (E') : on a

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \quad y''+y'-1+y-x+1+0\\ &\Rightarrow \quad y''+y'+y=x\end{aligned}$$

Donc y est de (E').

$$\begin{aligned}(y-x+1)''+(y-x+1)'+(y-x+1) &= y''+y'-1+y-x+1\\ &= (y''+y'+y)-x\\ &= x-x\\ &= +\end{aligned}$$

Donc $y-x+1$ est solution de (E') d'où l'équivalence.

2 • Résolution de (E')

$$\begin{aligned}r^2+r+1 &= 0\\ \Delta &= 1-4=-3\\ &= (i\sqrt{3})^2\end{aligned}$$

$$y=A\cos(x\sqrt{3}) \quad + \quad B\sin(x\sqrt{3}) \quad A,B\in\mathbb{R}$$

- On en déduit que la solution de (E) est :

$$y = A\cos(x\sqrt{3}) + B\sin(x\sqrt{3}) + x - 1 \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Corrigé 08

Soit Ω l'ensemble des résultats possibles $card\Omega = C_7^1 \times C_7^1$.

1 (E_1) : obtenir 2 boules de même couleur c'est avoir soit 2 boules noires soit 2 boules blanches.

$$\begin{aligned} P(E_1) &= \frac{C_3^1 \times C_5^1 + C_4^1 \times C_2^1}{49} \\ &= \frac{23}{49} \\ P(E_2) &= \frac{C_4^1 \times C_2^1}{49} \\ &= \frac{8}{49} \end{aligned}$$

2 Désignons par E_3 l'événement obtenir 2 boules noires :

$$P(E_3) = \frac{C_3^1 \times C_5^1}{49} = \frac{15}{45}$$

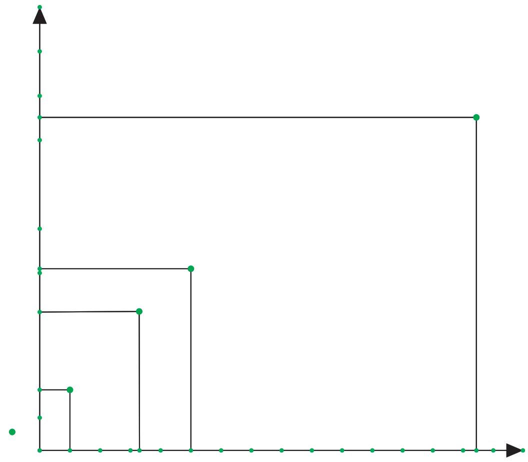
Il s'agit de déterminer la probabilité $P = P(E_3/E_1)$

$$\begin{aligned} P &= P(E_3/E_1) = \frac{P(E_3 \cap E_1)}{P(E_1)} \\ &= \frac{P(E_3)}{P(E_1)} \\ &= \frac{15}{49} \times \frac{49}{23} \\ &= \frac{15}{23} \end{aligned}$$

Corrigé 09

1 Nuage des points de la serie

X1	10	15	9	11	29	18
Y1	79	110	72	88	212	120



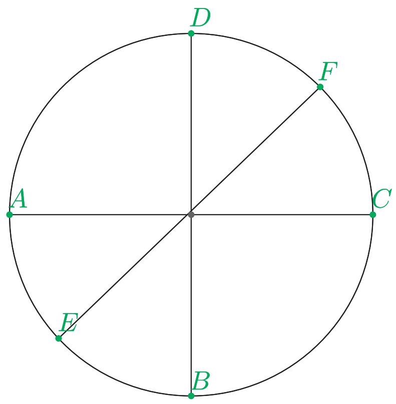
2 Point moyen G :

$$
\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{10+15+9+11+11+29+18}{6} = 17 \\
\overline{y} &= \frac{79+110+72+88+212+120}{6} = 113,5
\end{aligned}
$$

$$\Omega \begin{pmatrix} 17 \\ 113,5 \end{pmatrix}$$

Calcul du coefficient de corrélation :

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \frac{10^2+15^2+9^2+11^2+11^2+29^2+18^2}{6} = 282 \\
E(Y) &= \frac{79^2+110^2+72^2+88^2+212^2+120^2}{6} = 15102,16 \\
\\
V(X) &= E(X^2) - E(X) = 266,67 \\
V(Y) &= E(Y^2) - E(Y) = 14988,66 \\
\\
cov(X,Y) &= \sum \frac{x_i y_i}{6} = 2060,66 \\
\\
\sigma_x &= \sqrt{V(Y^2)} = 16,33 \\
\sigma_y &= \sqrt{V(X^2)} = 122,42 \\
\\
r &= \frac{cov(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y} = 1,030
\end{aligned}
$$



9

Corrigé 10

1 Le volume de la sphère est :

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\pi \times 43}{3} \\ V &= \frac{256\pi}{3} \end{aligned}$$

Calcul de la sur face de la sphère :

$$S = 4\pi r^2$$

Épreuve ENS

.

30 ENS 2008

Corrigé 11

Résolution du système : $\begin{cases} 2x - 3y + z = 3 \\ x - 2y + 3z = 4 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 452 \end{cases}$

- Dans la seconde équation $x = 2y - 3z + 4$
- En remplaçant dans la première, on obtient $y = 5(z-1)$.
- Si on remplace x et y par leur valeur dans la 3ème équation, on obtient :

$$\begin{aligned} & (7z-6)^2 + 2(5z-5)^2 + 3z^2 = 452 \\ \Rightarrow\ & 102z^2 - 184z - 366 = 0 \\ \Rightarrow\ & 51z^2 - 92z - 183 = 0 \\ & \Delta = 92^2 + 4 \times 51 \times 183 = 45796 = (214)^2 \end{aligned}$$

$$z_1 = \frac{92-214}{102} = -\frac{122}{102} \text{ et } z_2 = \frac{92+214}{102} = 3$$

Si $z = 3$ alors $x = 7 \times 3 - 6 = 15$ et $y = 5 \times 3 - 5 = 10$

$$S = \{(16, 10, 3)\}$$

Corrigé 12

$U_1 = 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{4n-4}{n(n+1)(n+2)} \quad V_n = U_n - \frac{6}{n(n+1)}$

1 Montrons que la suite (V_n) est géométrique.
On a $V_{n+1} = U_{n+1} - \frac{6}{(n+1)(n+2)}$

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \frac{1}{3}U_n + \frac{4n-4}{n(n+1)(n+2)} - \frac{6}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{3}U_n + \frac{4n-4-6n}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{3}U_n - \frac{(2n-4)}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{3}U_n - \frac{2(n-2)}{n(n+1)(n+2)} \\ V_{n+1} &= \frac{1}{3}U_n - \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

En multipliant chaque membre de cette égalité par 3 on a :

$$\begin{aligned}
3 \times V_{n+1} &= 3 \times \frac{1}{3} U_n - \frac{6}{n(n+1)(n+2)} \\
&= U_n - \frac{6}{n(n+1)(n+2)} \\
3 \times V_{n+1} &= V_n
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $V_1 = 2$. Exprimons V_n et U_n en fonction de n.

$$\begin{aligned}
V_n &= q^n V_1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \\
U_n &= V_n + \frac{6}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{6}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

2 Calculons la limite de S_n. On peut écrire

$$\begin{aligned}
S_n &= V_1 + \frac{6}{1(1+1)} + V_2 + \frac{6}{2(2+1)} + ... + V_n + \frac{6}{n(n+1)} \\
&= V_1 + V_2 + ... + V_n + \frac{6}{1(1+1)} + \frac{6}{2(2+1)} + ... + \frac{6}{n(n+1)} \\
S_n &= \sum_{k=1}^{n} V_k + \sum_{k=k}^{n} \frac{6}{k(k+1)}
\end{aligned}$$

Cherchons d'abord a et b tel que

$$\frac{6}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$

Par identification

$$\frac{(a+1)k + a}{k(k+1)} = \frac{6}{k(k+1)}$$

$$a = 6 \quad a + b = 0 \Rightarrow b = -6$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} V_k + \sum_{k=k}^{n} \left(\frac{6}{k} - \frac{6}{k+1}\right) \\
S_n &= \frac{V_1(1-q^n)}{1-q} + 6\sum_{k=k}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{2\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{\frac{2}{3}} + 6\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right]
\end{aligned}$$

Lorsque n tend vers plus l'infini $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ tend vers zéro et $\left(\frac{1}{n} + 1\right)$ tend vers zéro.

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = 3 + 6 \lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 9$$

Corrigé 13

1 Mettons $q = 2-\sqrt{3}+i$ sous forme trigonométrique.

$$\begin{aligned} |q|^2 &= (2-\sqrt{3})^2+1 \\ &= 4-4\sqrt{3}+3+1 \\ &= 8-4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Si θ est l'argument de q :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{12} rad$$

$$q = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

- Mettons $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^5$ sous forme algébrique.

posons $p_1 = \sqrt{3}-i$ et $p_2 = \sqrt{3}+i$

$$|p_1| = 2 \text{ et } |p_2| = 2$$

$$\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin\theta_1 = -\frac{1}{2} \quad \theta_1 = -\frac{\pi}{6} rad \\ \cos\theta_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin\theta_1 = \frac{1}{2} \quad \theta_1 = \frac{\pi}{6} rad \end{aligned}$$

$$arg\frac{p_1}{p_2} = \theta_1 - \theta_2 = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$$

$$\left|\frac{p_1}{p_2}\right| = 1 \quad arg\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^5 = -\frac{5\pi}{3} rad \quad \left|\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right|^5 = (1)^5 = 1$$

Donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^5 &= 1.e^{-\frac{5\pi}{3}} \\ &= \cos-\frac{5\pi}{3} + \sin-\frac{5\pi}{3} \\ &= \cos\frac{5\pi}{3} - \sin\frac{5\pi}{3} \\ \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^5 &= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

2 Résoudre $z^2-(1+\sqrt{2})z+1=0$

$$\begin{aligned} \Delta &= (1+\sqrt{2})z-4=0 \\ &= 1+2\sqrt{2}+2+4 \\ &= -1+\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \\ z_2 &= \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \end{aligned}$$

Corrigé 14

On considère la fonction définie par $f(x) = x + \frac{9}{1+e^x}$

1 Dressons le tableau de variation de f.

- Domaine de définition : $Df = x \in \mathbb{R}/1 + e^x \neq 0, 1 + e^x = 0$ impossible $Df = \mathbb{R}$.
- Limites aux bornes de Df.

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) & = & +\infty \end{array}$$

.

- Continuité et dérivabilité.
f est continue et dérivable sur son Df comme somme de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Dérivée. $\forall x \in Df \quad f'(x) = 1 - \frac{9e^x}{(1+e^x)^2}$
.
- Signe de la dérivée.

$$\begin{array}{rcl} f'(x) = 0 & \Rightarrow & (1 + e^x)^2 - 9e^x = 0 \\ & \Rightarrow & 1 + 2e^x + e^{2x} - 9e^x = 0 \\ & \Rightarrow & e^{2x} - 7e^x + 1 = 0 \end{array}$$

Posons $X = e^x$ on a :

$$\begin{array}{rcl} X^2 - 7X + 1 & = & 0 \\ \Delta & = & 49 - 4 = 45 \\ & = & (3\sqrt{5})^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} X_1 & = & \dfrac{7 - 3\sqrt{5}}{2} \quad X_2 = \dfrac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \\ x_1 & = & \ln\left(\dfrac{7 - 3\sqrt{5}}{2}\right) \quad x_2 = \ln\left(\dfrac{7 + 3\sqrt{5}}{2}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{pour } x & \in &]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[\quad f'(x) > 0 \\ \text{Pour } x & \in &]x_1, x_2[\qquad f'(x) < 0 \end{array}$$

Tableau de variations

x	-1		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

2 Existence des asymptotes et points d'inflexion.

- Il y a pas d'asymptote verticale et horizontale.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+infty}\frac{x+\frac{9}{1+e^x}}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=0$$

Donc la droite (D) d'équation $y=x$ est asymptote oblique à (C).

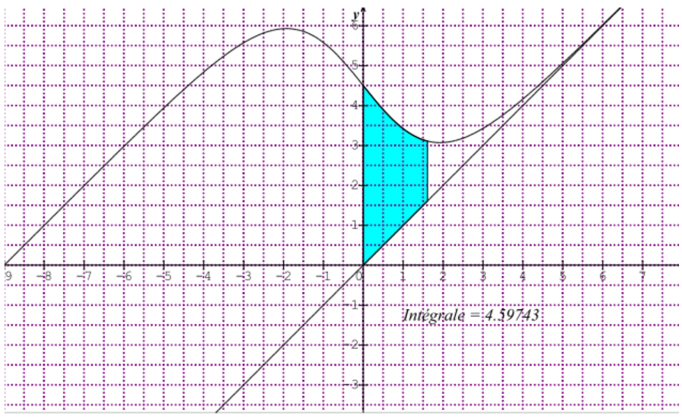
- points d'inflexion

$$f''(x) = \frac{-9e^x(e^{2x}+2e^x+1)+9e^x(2e^{2x}+2e^x)}{(1+e^x)^4}$$

$$\begin{aligned} f''(x)=0 &\Rightarrow 9e^x(e^{2x}+2e^x+1)+9e^x(2e^{2x}+2e^x)=0\\ &\Rightarrow e^{2x}-1=0\\ &\Rightarrow e^{2x}=1\\ &\Rightarrow x=0 \end{aligned}$$

Au point $x=0$ la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe, donc la courbe de f admet en ce point une inflexion de coordonnée $I(0,4.5)$.

Construction de la courbe :



10

3 Calcul de l'aire du domaine plan (D)

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\ln 5}(f(x)-x)\,dx\\ &= \int_0^{\ln 5}\frac{9}{1+e^x}dx\\ &= 9\int_0^{\ln 5}\frac{1}{1+e^x}dx \end{aligned}$$

Changement de variable. Posons $X=e^x \Rightarrow x=\ln X$.

$$dx=\frac{1}{X}dX$$

$$\begin{array}{lllll} x & \to & \ln 5 & \qquad & x\to 0\\ X & \to & 5 & & X\to 1 \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
A &= 9\int_1^5 \frac{1}{X(1+X)}dX \\
&= 9\int_1^5 \left(\frac{1}{X}-\frac{1}{X+1}\right)dX \\
&= 9\left[\ln X-\ln(X+1)\right]_1^5 \\
&= 9(\ln 5-\ln 6)+9\ln 2 \\
&= 9(\ln 5-\ln 6+\ln 2) \\
A &= 9(\ln 5-\ln 3)cm^2
\end{aligned}
$$

Corrigé 15

Soit T la transformation complexe définie par $z'=(-1-i)z+4-3i$.

1 Nature et éléments caractéristiques de T.

$|-1-i|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, T est une similitude directe plane de rapport $k=\sqrt{2}$, d'angle $arg(-1-i)=\frac{5\pi}{4}rad$ et de centre le point I d'affixe $z_I=\frac{4-3i}{2+i}$.

$$
\begin{aligned}
z_I &= \frac{4-3i}{2+i}\times\frac{2-i}{2-i} \\
&= \frac{8-4i-6i-3}{4+i} \\
&= \frac{5-10i}{5} \\
z_I &= 1-2i \Rightarrow I(1,-2)
\end{aligned}
$$

2 Détermination de l'image par T de la droite d'équation $(D): 2x-y-1=0$.
Soient $A(0,-1)$ et $B(1,1)$ deux points de (D).

$$
\begin{aligned}
z_{A'} &= (-1-i)(-i)+4-3i=-2i+3 \text{ donc } A'(3,-2). \\
z_{B'} &= (-1-i)(1+i)+4-3i=-5i+4 \text{ donc } B'(4,-5).
\end{aligned}
$$

A' et B' sont les images respectives de A et de B par T. La droite $(A'B')$ est donc l'image de (D) par T. $M\in(A'B')\Rightarrow$ $\overrightarrow{A'M}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires avec $M(x,y)$

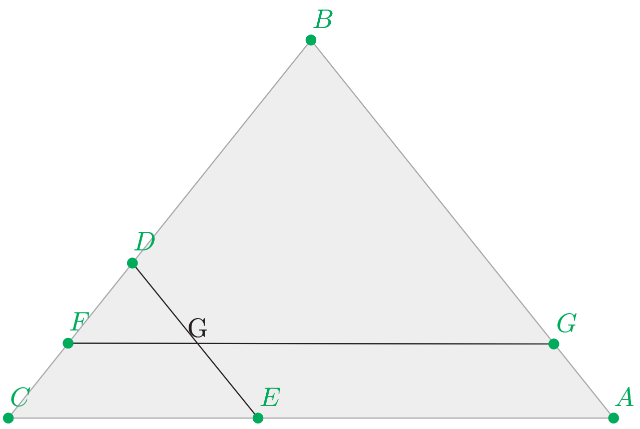
$$
\overrightarrow{A'M}\begin{pmatrix} x-3 \\ y+2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
det(\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{A'B'})=0 &\Rightarrow -3x+9-y-2=0 \\
&\Rightarrow 3x+y-7=0
\end{aligned}
$$

La droite $(A'B')$ a pour équation : $3x+y-7=0$.

Corrigé 16



11

1 Construction de G
$G = bar\left\{(A,1),(B,1),(C,2)\right\}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC} &= \vec{0}\\
4\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC} &= \vec{0}\\
\overrightarrow{AG} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\
AG^2 &= \left(frac14\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\left(frac14\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\\
AG^2 = 7
\end{aligned}$$

De même on a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BG} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\
BG^2 &= \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)\\
BG^2 &= 7
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CG} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\\
CG^2 &= \left(frac14\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)\left(frac14\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)\\
CG^2 &= 7
\end{aligned}$$

2 Détermination des ensembles.

$$(E1) : MA^2+MB^2+MC^2 = 40 \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Rightarrow \quad MG^2 = \frac{48-(GA^2+GB^2+2GC^2)}{4}\\
&\Rightarrow \quad MG^2 = 7\\
&\Rightarrow \quad MG = \sqrt{7}
\end{aligned}$$

$(E1)$ est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{7}$, donc passant par A et B

$$(E2) : MA^2+MB^2-2MC^2 = 8 \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad &\Rightarrow \quad GA^2 + GB^2 - 2GC^2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC}) = 8 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC}) = 0 \\
&\Rightarrow \quad -8\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{GC} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{GM}.\overrightarrow{GC} = 0
\end{aligned}$$

Corrigé 17

$$(E) : y'' + y' + y = x \qquad (E') : y'' + y' + y = 0$$

1 Montrons que f est solution de (E) si et seulement si $y-(x-1)$ est solution de (E').

Supposons $y-(x-1)$ solution de (E') : on a

$$\begin{aligned}
y'' + y' - 1 + y - x + 1 &= 0 \\
\Rightarrow y'' + y' + y &= x
\end{aligned}$$

Donc y est une solution de (E').

$$\begin{aligned}
(y-x+1)'' + (y-x+1)' + (y-x+1) &= y'' + y' - 1 + y - x + 1 \\
&= (y'' + y' + y) - x \\
&= x - x \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc : $y - x + 1$ est solution de (E') d'où l'équivalence.

2
- Résolution de (E')

$$\begin{aligned}
r^2 + r + 1 &= 0 \\
\Delta &= 1 - 4 = -3 \\
&= (i\sqrt{3})^2 \\
y &= A\cos(\sqrt{3}x) + B\sin(\sqrt{3}x) \quad A, B \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

- On en déduit que la solution de (E) est :

3 Déterminons la solution f de (E) dont la courbe est tangent à $(D) : x - 2y = 0$
$(D) : y = \frac{1}{2}x$

On a $f'(x) = 0$ et $f(0) = 0 \quad f'(x) = -A\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}) + B\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x) + 1$

$$\begin{aligned}
f'(0) = B\sqrt{3} + 1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad B = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\
f(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad A = 1
\end{aligned}$$

On a

$$f(x) = \cos(\sqrt{3}x) - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\sqrt{3}x) + X - 1$$

Corrigé 18

Soit un dé cubique. 2 faces vertes et 4 faces rouges.

1 Soit A l'événement "obtenir autant de faces verte que de faces rouges lorsqu'on lance 6 fois ce dé ". Déterminons $P(A)$.
Cette épreuve est une épreuve dite de Bernouilli, car l'on ne peut obtenir que deux résultats possibles.

$$P(A) = C_6^3 \times \left(\frac{2}{6}\right)^5 \times \left(\frac{4}{6}\right)^3$$

.

2 Soit X la variable aléatoire.

La loi de probabilité de X est comme suit :

$$\begin{aligned} P(X=10) &= C_6^6 \times \left(\frac{2}{6}\right)^6 \times \left(\frac{4}{6}\right)^0 + C_6^6 \times \left(\frac{4}{6}\right)^6 \times \left(\frac{2}{6}\right)^0 \\ P(X=10) &= 1 - P(X=100) \end{aligned}$$

Corrigé 19

Considérons la série statistique comme définie.

1 Nuage des points :

2
- Point moyen G :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{12+17+11+13+31+20}{6} = 17,33 \\ y_G &= \frac{89+120+82+98+22+130}{6} = 123,5 \end{aligned}$$

- Coefficient de corrélation linéaire.

$$r = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

Où σ_x et σ_y sont les écart type de la serie marginale X et Y.

$$cov(X,Y) = \frac{12 \times 89 + 17 \times 120 + 11 \times 82 + 13 \times 98 + 31 \times 222 + 20 \times 130}{6} - 17,33 \times 123,5$$

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= 320,75 \\ \sigma_x &= 6,85 \\ \sigma_y &= 97,11 \\ r &= \frac{320,75}{97,11 \times 6,85} = 0,48 \end{aligned}$$

Corrigé 20

$ABCDEFGH$ est un cube de sens direct et d'arête 4 cm.
Déterminons $\left\|\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{DB}\right\|$

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{DB}\right\| &= \left\|\overrightarrow{AF}\right\| \times \left\|\overrightarrow{DB}\right\| \times \sin(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{DB}}) \\ &= \sqrt{4^2+4^2} \times \sqrt{4^2+4^2} \times \sin\frac{\pi}{4} \\ &= 16\sqrt{2} \end{aligned}$$

.

31 ENS 2009

Corrigé 21

1 **a.** Montrons que la suite $(U_n - V_n)$ est géométrique :

$$\begin{aligned}
U_{n+1} - V_{n+1} &= \frac{1}{3}U_n + \frac{2}{3}V_n - \frac{1}{4}U_n - \frac{3}{4}V_n \\
&= (\frac{1}{3} - \frac{1}{4})U_n + (\frac{2}{3} - \frac{3}{4})V_n \\
&= \frac{1}{12}(U_n - V_n)
\end{aligned}$$

La suite $(U_n - V_n)$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{12}$ et de premier terme : $U_0 - V_0 = 3$.

b. Montrons que la suite $(U_n + \frac{8}{3}V_n)$ est une suite constante :

$$\begin{aligned}
U_{n+1} + \frac{8}{3}V_{n+1} &= \frac{1}{3}U_n + \frac{2}{3}V_n + \frac{8}{3}(\frac{1}{4}U_n + \frac{3}{4}V_n) \\
&= (\frac{1}{3} + \frac{2}{3})U_n + (\frac{2}{3} + 2)V_n \\
&= U_n + \frac{8}{3}V_n
\end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} + \frac{8}{3}V_{n+1} = U_n + \frac{8}{3}V_n$ donc la suite $(U_n + \frac{8}{3}V_n)$ est constante.

c. Donnons les expressions de U_n et V_n en fonction de n.
D'après *a)*

$$U_n - V_n = (U_0 - V_0).\left(\frac{1}{12}\right)^{n+1} = 3.\left(\frac{1}{12}\right)^{n+1}$$

Et d'après *b)*,

$$U_n + \frac{8}{3}V_n = U_0 + \frac{8}{3}V_0 = 1 - \frac{8}{3} \times 2 = -133$$

On a :

$$\begin{aligned}
U_n - V_n &= 3\left(\frac{1}{12}\right)^{n+1} \text{ et } U_n + \frac{8}{3}V_n = -\frac{13}{3} \\
\frac{8}{3}V_n + V_n &= -\frac{13}{3} - 3\left(\frac{1}{12}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

En multipliant l'égalité par 3, on a :

$$\begin{aligned} 8V_n + 3V_n &= -13 - 9\left(\frac{1}{12}\right)^{n+1} \\ \Rightarrow 11V_n &= -13 - 9\left(\frac{1}{12}\right)^{n+1} \\ V_n &= \frac{-13 - 9\left(\frac{1}{12}\right)^{n+1}}{11} \\ \text{Donc } U_n &= V_n + \left(\frac{1}{12}\right)^{n+1} \\ &= \frac{-13 - \left(\frac{1}{12}\right)^{n+1}}{11} + 3\left(\frac{1}{12}\right) \end{aligned}$$

d. Les suites (U_n) et (V_n) sont-elles convergentes ?

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} < 1 &\Rightarrow \left(\frac{1}{12}\right)^{n+1} < 1 \\ &\Rightarrow -9 < -9\left(\frac{1}{12}\right)^{n+1} \\ &\Rightarrow -22 < -13 - 9\left(\frac{1}{12}\right)^{n+1} \\ &\Rightarrow -2 < V_n. \end{aligned}$$

Et $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} < V_n$, la suite (V_n) est décroissante et minorée donc elle est converge et

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = -\frac{13}{11}$$

de même, la suite (U_n) est décroissante et minorée

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = -\frac{13}{11}$$

2 **a.** Démonstration par récurrence :

Soit $P(n)$ la proposition " $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{(n+1)!} \leq 2^{-n}$ est vraie au rang n".
Pour $n = 0, \frac{1}{(0+1)!} = 1$ et $2^0 = 1$ donc on a $P(0)$
Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

$$\begin{aligned} P(n+1) &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{(n+2)!} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \\ P(n) &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Pour $n \geq 0 \quad n+2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{2} \end{cases} &\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} \times \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{(n+2)!} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$

b. Montrons que la suite (e_n) est majorée par 3 :
Faisons une itération de l'inégalité :

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 & \leq & 1 \\ \frac{1}{2!} & \leq & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3!} & \leq & \frac{1}{2^2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{(n+1)!} & \leq & \frac{1}{2^n} \end{array}$$

additionnons membre à membre ces inégalités :

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(n+1)!} \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}$$

$$\begin{array}{rcl} e_n - 1 & \leq & \dfrac{1 \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow e_n - 1 \leq 2\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \\ e_n & \leq & 1+2-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \\ e_n & \leq & 3-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \\ e_n & \leq & 3 \end{array}$$

c. Montrons que (e_n) est une suite convergente :
(e_n) est majorée par 3 $\forall n \in \mathbb{N}, e_{n+1} \geq e_n$ donc (e_n) est croissante.
(e_n) est croissante et majorée donc (e_n) est convergente.

Corrigé 22

1 **a.** Calculons la probabilité $P1$ de tirer deux billes de même couleur au deuxième tour :
Soit A l'évènement « *tirer deux billes de même couleur au deuxième tirage.* » $N1$ l'évènement « *tirer la bille noir au premier tirage.* » $B1$ l'évènement « *tirer la bille blanche au premier tirage.* » $R1$ l'évènement « *tirer la bille rouge au premier tirage.* »
La famille $N1, B1, R1$ forme une partition de l'univers Ω. D'après la probabilité totale, on a :

$$P(A) = P(A/N1) \times P(N1) + P(A/B1) \times P(B1) + P(A/R1) \times P(R1)$$

où $P(A/N1)$ est la probabilité de tirer deux billes de même couleur au deuxième tirage sachant que la première bille tirée est noire.
Donc :

$$P(A) = \frac{C_5^2+C_2^2+C_2^2}{C_9^2} \times \frac{C_6^1}{C_{10}^1} + \frac{C_6^2+C_2^2}{C_9^2} \times \frac{C_2^1}{C_{10}^1} + \frac{C_6^2+C_2^2}{C_9^2} \times \frac{C_2^1}{C_{10}^1} = \frac{17}{45}$$

b. Calculons la probabilité $P2$ d'avoir au moins deux billes de même couleur au cours d'un essai :
Soit B cet évènement, on a : $A \subset B$.
Il suffit d'inclure aussi les cas où les deux billes de même couleur ne sont pas tirer au second tirage et enfin quand les trois billes sont de même couleur.

$$P(B) = \frac{C_6^1.C_5^1.C_4^1+2.C_2^1.C_8^1+C_6^1.C_5^1}{C_{10}^1.C_9^2} + P(A) = \frac{348}{360}.$$

c. calculons la probabilité $P3$ de tirer trois billes de même couleur au cours d'un essai :
Cet évènement est noté C. Ici, $\overline{C} = B$ (évènement contraire de C). Donc

$$P(C) = 1 - P(B) \Rightarrow P(C) = 1 - \frac{348}{360} = \frac{12}{360}$$

.

2 **a.** Représentation graphique des observations :

b. Déterminons le point G :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{3+4+5+7+8}{5} = 5,4 \\ y_G &= \frac{5,1+11,5+15+21,37+24,4}{5} = 15,47 \end{aligned}$$

d'où $G(5.4, 15, 47)$

c. Déterminons le coefficient de corrélation linéaire :

$$r = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Corrigé 23

1 Montrons que : $e^{4x} - 14e^{2x} + 1 = (e^{2x} + 4.e^x + 1)(e^{2x} - 4.e^x + 1)$

$$\begin{aligned} (e^{2x} + 4.e^x + 1)(e^{2x} - 4.e^x + 1) &= e^{4x} - 4e^{3x} + e^{2x} + 4e^{3x} - 16e^{2x} + 4e^{3x} + e^{2x} - 4e^x + 1 \\ &= e^{4x} - 14e^{2x} + 1 \\ \Rightarrow e^{4x} - 14e^{2x} + 1 &= (e^{2x} + 4.e^x + 1)(e^{2x} - 4.e^x + 1) \end{aligned}$$

2 Résolvons l'équation : $e^{4x} - 14e^{2x} + 1 = 0$
ie $(e^{2x} + 4.e^x + 1)(e^{2x} - 4.e^x + 1) = 0$

Posons : $X = e^x$, on a :

$$\begin{aligned} (X^2 + 4X + 1)(X^2 - 4X + 1) &= 0 \Rightarrow (X^2 + 4X + 1) = 0 \text{ ou } (X^2 - 4X + 1) = 0 \\ \Delta = 16 - 4 &= 12 \\ \Rightarrow X_1 &= -2 - \sqrt{3}; X_2 = -2 + \sqrt{3}; \\ X_3 &= 2 - \sqrt{3}; X_4 = 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 = \ln(2 - \sqrt{3}) \text{ et } x_2 = \ln(2 + \sqrt{3})$$

d'où :

$$S = \ln(2 - \sqrt{3}); \ln(2 + \sqrt{3}))$$

a. Calculons $f'(x)$:

$$f'(x) = 1 - \frac{16.e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2}$$

b. Déterminons les limites de f :

$$Df = \mathbb{R} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

c. Dressons le tableau de variation :
- Signe de f' :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad (1 + e^{2x})^2 - 16.e^{2x} = 0 \\ &\Rightarrow \quad e^{4x} - 14e^{2x} + 1 = 0 \\ &\Rightarrow \quad x_1 = \ln(2 - \sqrt{3}) et x_2 = \ln(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Tableau de variations

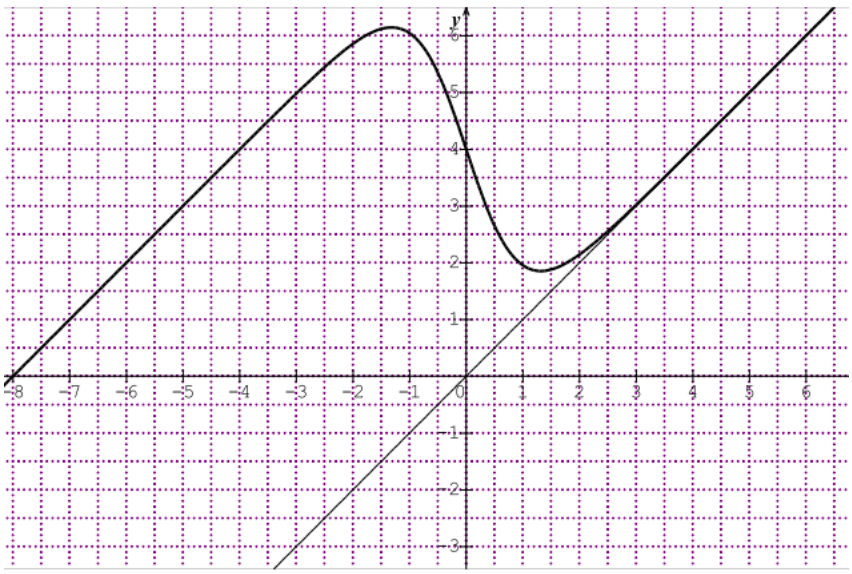
x	-1		$\ln(2-\sqrt{3})$		$\ln(2+\sqrt{3})$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	6.15	$\searrow$	1.31	$\nearrow$	$+\infty$

d. Déterminons l'asymptote oblique (D) :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)-x=0$$

Donc la droite (D) d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe de f.

e. Courbe :



12

f. Montrons que : $f(x)=x+\frac{8.e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$:
On a :

$$f(x)=x+\frac{8}{1+e^{2x}}\times\frac{e^{-2x}}{e^{-2x}}=x+\frac{8.e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

g. Calculons la primitive F de f qui s'annule en 0 :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x+\frac{8.e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=x-4\times\frac{-2.e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\\
\Rightarrow F(x) &= \frac{x^2}{2}-4.\ln(1+e^{-2x})+C\\
F(0) &= -4.\ln 2+C\\
\text{or } F(0) &= 0\Rightarrow C=4.\ln 2
\end{aligned}$$

D'où :

$$F(x)=\frac{x^2}{2}-4.\ln(1+e^{-2x})+4.\ln 2$$

Corrigé 24

1 Calcul des intégrales :

$$A = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

$$\begin{aligned}
\text{posons : } u'(x) &= e^{-x} \text{ et } v(x) = x^2 \\
\Rightarrow u(x) &= -e^{-x} \text{ et } v'(x) = 2x \\
A &= \left[-x^2.e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 2x.e^{-x}dx = \left[-x^2.e^{-x}\right]_0^1 + 2\int_0^1 x.e^{-x}dx \\
&= -e^{-1} + 2\int_0^1 x.e^{-x}dx
\end{aligned}$$

Posons : $(u_1'(x) = e^{-x}$ et $v_1(x) = x) \Rightarrow (u_1(x) = -e^{-x}$ et $v_1'(x) = 1)$
Par la suite, on :

$$\begin{aligned}
A &= -e^{-1} - e^{-1} + \left[-e^{-x}\right]_0^1 \\
A &= -\frac{3}{e} + 1
\end{aligned}$$

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^3 dx$$

Considérons : $a = \cos x + i\sin x$ et $a = \cos x - i\sin x$

$$\begin{aligned}
a + \overline{a} &= 2\cos x \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}(a + \overline{a}) \\
\Rightarrow (\cos x)^3 &= \frac{1}{8}(a + \overline{a})^3 \\
&= \frac{1}{8}\left(a^3 + a^{-3} + 3(a + \overline{a})\right) \\
\text{or } a^3 + a^{-3} &= 2.\cos 3x \\
(\cos x)^3 &= \frac{1}{8}(2\cos 3x + 6\cos x) \\
&= \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)
\end{aligned}$$

Par suite, on a :

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x dx + \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\
&= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{4}\left[-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
B &= -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

2 Soit $ABCD$ un carré de centre O :

a. Exprimons le milieu I de $[OD]$ comme barycentre des points A, B et C.

On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{DI}=\vec{0} &\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{DI}=\vec{0}\\
&\Rightarrow -\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AI}+\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}=\vec{0}\\
&\Rightarrow -\frac{1}{2}\overrightarrow{AI}-\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{AI}+\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}=\vec{0}\\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}+\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}=\vec{0}\\
&\Rightarrow 6\times\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AI}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CI}\right)=\vec{0}\times 6\\
&\Rightarrow 3\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI}+3\overrightarrow{CI}=\vec{0}
\end{aligned}$$

I est barycentre des points A,B et C affectés des coefficients 3, -2 et 3.

b. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant $AM^2 + BM^2 = 5$
Soit G le milieu de $[AB]$.

$$\begin{aligned}
AM^2+BM^2 &= (\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM})^2+(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GM})^2\\
&= AG^2+2\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GM}+GM^2+BG^2+2\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GM}+GM^2\\
&= AG^2+BG^2+2GM^2+2\overrightarrow{GM}(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}) \text{ or } \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}=\vec{0}\\
\text{Donc } AM^2+BM^2 &= AG^2+BG^2+2GM^2=5\\
2GM^2 &= 5-AG^2-BG^2=5-1-1\Rightarrow GM^2=\frac{3}{2}\\
GM &= \sqrt{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Donc : (E) est un cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\frac{3}{2}}$

Épreuve ENS

.

32 ENS 2010

Corrigé 25

1 Montrons que pour tout $x > 0$

$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$

Pour tout $t > 0$ on a $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$

ainsi $\int_0^x (1-t)dt \leq \int_x^0 \frac{dt}{1+t} \leq \int_x^0 dt$

$$\text{D'où } x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$$

2 Déduisons en que $\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^3} \leq V_n \leq \frac{n+1}{2n}$

L'encadrement démontré à la question 1) est aussi vrai pour $x = \frac{k}{n^2}$

Ainsi, $\frac{k}{n^2} - \frac{1}{n^4}\frac{k^2}{2} \leq \ln\left(\frac{k}{n^2}+1\right) \leq \frac{k}{n^2}$ $n \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{n^2}\sum_1^n k - \frac{1}{n^4}\sum_1^n \frac{k^2}{2} \leq \sum_1^n \ln(\frac{k}{n^2}+1) \leq \frac{1}{n^2}\sum_1^n k$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^4}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \leq \sum_1^n \ln(1+\frac{k}{n^2})\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}$

$\Leftrightarrow$ $\frac{(n+1)}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n+3} \leq V_n \leq \frac{n+1}{2n}$

3 La suite (V_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$ elle converge donc, et sa limite est $\frac{1}{2}$ (d'après la question 2.).

4 Comme la suite (V_n) est croissante, la suite (U_n) l'est aussi (du fait de la croissance de la fonction ln) et de ce fait majorée par $\sqrt{e}$ qui est en fait sa limite.

Corrigé 26

1 Déterminons la loi de probabilité de X

On distingue parmi les 27 cubes :

- 8 ayant trois faces peintes
- 12 ayant deux faces peintes
- 6 ayant une face peinte
- 1 n'ayant aucune face peinte

Ainsi on a le tableau suivant :

x	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{39}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{80}{351}$	$\frac{38}{117}$	$\frac{32}{117}$	$\frac{28}{351}$

2 Espérance mathématique de X

$E(x) = \sum_1^6 k \times p(X = k)$

$$\text{Ainsi, } E(x) = 4,0085$$

Calcul de l'écart-type : $\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x-\overline{x})}{n-1}}$

Ou ici, x est une probabilité et $\overline{x}$ la moyenne des probabilités ; ainsi $\sigma =$

Corrigé 27

1 Déterminons en fonction de r et θ le module de $f(Z)$ et son argument lorsqu'il est défini.

On sait que $z\overline{z}$=r^2 ; ainsi lorsque $r \neq 0,\ f(Z) = \frac{8-r^2}{r}e^{i\theta}$

$$\text{D'où } |f(Z)| = \frac{8-r^2}{r} \text{ et } \arg(f(Z)) = \theta$$

2 Calculons en fonction de ρ et φ le module$ret l'argument\theta$ des complexes non nuls z tels que $f(Z) = w$.

On a $f(Z) = w = \rho e^{i\theta}$

Ainsi $\frac{8-r^2}{r}e^{i\theta} = \rho e^{i\theta}$ et par identification, on obtient $\frac{8-r^2}{r} = \rho$ et $\varphi = \theta$

Ce qui conduit à l'équation du second degré suivante $r^2 + \rho r - 8 = 0$ et pudique $r \geq 0$,

La solution est la suivante :

$$r = \frac{\sqrt{\rho^2+32}-\rho}{2}$$

3 Résolution dans $\mathbb{C}^*$ de l'équation $f(z) = z$

Résoudre cette équation revient à aller à la question 2., et remplacer ρ par r et

$$\text{On obtient } r = 2 \text{ et } \theta \in [-\pi;\pi]$$

4 Calcul du module et de l'argument de $f(z)$

$$\begin{aligned} \text{On a } z+\overline{z} = 4 \quad &\Leftrightarrow r\cos\theta + \mathbb{R}\sin\theta - \mathbb{R}\sin\theta = 4 \\ &\Leftrightarrow 2r\cos\theta = 4 \\ &\Leftrightarrow r = \tfrac{2}{\cos\theta} \end{aligned}$$

$$\text{Finalement, } |f(Z)| = \frac{4\cos^2\theta - 2}{\cos\theta} \text{ et } \arg(f(z)) = \theta$$

Corrigé 28

1

a. Lorsque a=2 et b=-3 on a

(E)→ $y'' + 2y'^{-3y=0}$

L'équation caractéristique de cette équation différentielle est la suivante :

$r^2 + 2r - 3 = 0$ qui pour solutions $r_1 = -3$ et $r_2 = 1$

Ainsi, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y(x) = Ae^{-3x} + Be^{x}$

b. Lorsque a=2 et b=1 on a

(E)→ $y'' + 2y' + y = 0$

L'équation caractéristique de cette équation différentielle est la suivante :

$r^2 + 2r + 1 = 0$ qui pour solutions $r = -1$

Ainsi, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y(x) = (Ax+B)e^{-x}$

c. Lorsque $a = 1$ et $b = 1$ on a

(E)$\rightarrow$ $y'' + y' + y = 0$

L'équation caractéristique de cette équation différentielle est la suivante :

$r^2 + r + 1 = 0$ qui pour solutions $r_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

Ainsi, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + B\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\right)$$

2 **a.** Avec $y(x) = 2x^2e^x$

On a : $y'(x) = 2xe^x(2+x)$ et $y''(x) = 2e^x(x^2+4x+2)$

$$\text{On a bien } y'' - 2y' + y = 4e^x$$

b. Montrons que y est solution de l'équation (1) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle suivante $y'' - 2y' + y = 0$

$$\begin{aligned} \text{On sait que } u'' - 2u' + u = 4e^x \quad & (y-z)'' - 2(y-z)' + (y-z) = 4e^x \\ \leftrightarrow \quad & y'' - 2y' + y - 4e^x = z'' - 2z' + z \end{aligned}$$

$$\text{Donc si } z'' - 2z' + z = 0 \text{ alors } y'' - 2y' + y = 4e^x \text{ et vice versa}$$

c. Déduisons en les solutions de (1)

L'équation caractéristique de l'équation (2) est la suivante : $r^2 - 2r + 1 = 0$

Ainsi, $r = 1$ d'où , on en déduit que les solutions de l'équation (1) sont les fonctions de la forme $y(x) = 2x^2e^x + (Ax+B)e^x$

d. Déterminons f qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = -3$

$$\begin{aligned} f'(0) = 0 \Leftrightarrow \quad & B = 0 \\ f'(0) = -3 \Leftrightarrow \quad & A = -3 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } f(x) = 2x^2e^x - 3xe^x = \left(-3x + 2x^2\right)e^x$$

3 **a.** Etude de f

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

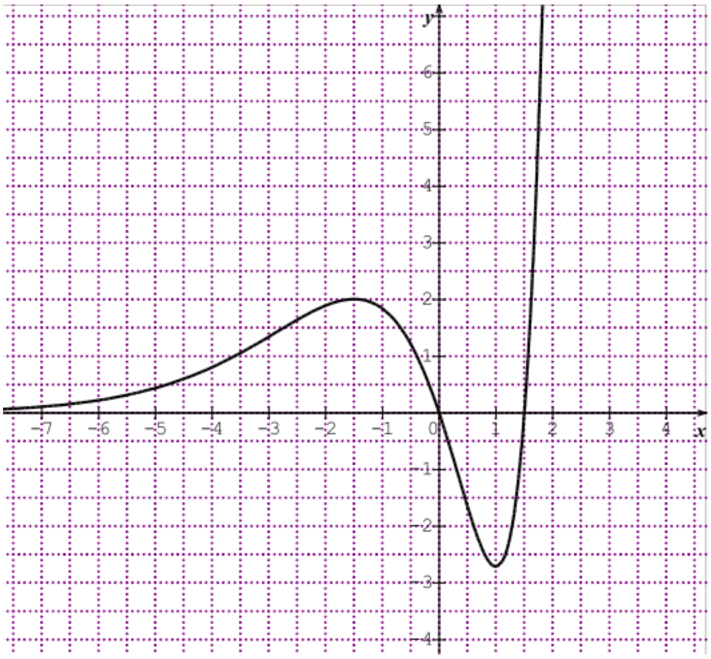
La dérive de f est la suivante : $f'(x) = e^x(2x^2 + x - 3)$

Puis le tableau de variation :

Tableau de variations

x	-1		$-3/2$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$9e^{-3/2}$	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative de :



13

b. Pour la vérification, on constate que la fonction f est exactement celle trouvée à la question 2) d)

Épreuve ENS

33 ENS 2011 (Géométrie)

Corrigé 29

Corrigé 30

Corrigé 31

Corrigé 32

34 ENS 2011 (Algèbre)

Corrigé 33

1 Montrons que :

a. L'élément a n'est pas neutre pour $\oplus$.
On a : $a \oplus a = c (a \oplus b = a)$ donc a n'est pas neutre.

b. L'élément c n'est pas neutre pour $\oplus$.
On a : $c \oplus b = c$ donc c n'est pas neutre pour $\oplus$.

2 Montrons que $e = b$

L'élément neutre d'un groupe est dans ce groupe donc $e \in E$. Puisque $e \neq a$ et $e \neq c$ alors, $e = b$.

$\oplus$	a	b	c
a	c	a	
b	a	b	c
c		c	

3 Montrons que $\overline{a} = c$

On a : $a \oplus a \neq e$ et $b \oplus a \neq e$ donc $a \notin a, b$ ainsi, puisque $\overline{a} \in E$ alors, $\overline{a} = c$

4 Montrons que $c \oplus a = b$

$c \oplus a = \overline{a} \oplus a = e = b$ (car $\overline{a} = c$)

5 Montrons que $c \oplus c = a$

$$\begin{array}{rlll} \text{On a : } c \oplus c = & c \oplus (a \oplus a) & (\text{d'après le tableau, } a \oplus a = c) \\ = & (c \oplus a) \oplus a & (\text{ associativité }) \\ = & b \oplus a & (\text{ d'après 4.}) \\ = & a & (\text{car } b = e) \end{array}$$

6

$\oplus$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

Corrigé 34

1 (E) : $z^3 + iz^2 - 12iz + 36 - 18i = 0$

a. Déterminons la forme algébrique de $(3 + 2i)^2$.
$(3 + 2i)^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i$.

b. Montrons que (E) admet une solution imaginaire pure :
Supposons que $z_0 = ib$ est une solution de (E),
Alors, $(ib)^3 + i(ib)^2 - 12i(ib) + 36 - 18i = 0$
$-ib^3 - ib^2 + 12b + 36 - 18i = 0$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} -b^3 - b - 2 - 18 = 0 \\ 12b + 36 = 0 \end{array} \right.$$

$12b + 36 = 0 \Rightarrow b = -3$
-3 est solution de $-b^3 - b^2 - 18 = 0$.
Ainsi $z_0 = 3i$ est une solution imaginaire pure de (E).

c. Je déduis que : $z^3 + iz^2 - 12iz + 36 - 18i = (z + i\mu)(z^2 + \alpha z + \beta + i\gamma)$.
On a : $z^3 + iz^2 - 12iz + 36 - 18i = (z + 3i)(z^2 - 2iz - 6 - 12i)$,

$$\text{d'où } \alpha = -2; \beta = -6; \gamma = -12; \mu = 3.$$

d. Résolution de l'équation (E) .

$$\begin{aligned} z^3 + iz^2 - 12iz + 36 - 18i = 0 \Leftrightarrow &\quad (z + 3i)(z^2 - 2iz - 6 - 12i) = 0 \\ \Leftrightarrow &\quad z + 3i = 0 ou z^2 - 2iz - 6 - 12 = 0 \end{aligned}$$

Pour $z^2 - 2iz - 6 - 12$, $\Delta = -4 - 4(1)(-12i - 6) = 4(3 + 2i)^2$.
On en déduit que : $z_1 = -3 - i$ et $z_2 = 3 + 3i$ d'où,

$$S = \{-3i; -3 - i; 3 + 3i\}$$

2 $Z = -\sqrt{2 + \sqrt{2}} - i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

a. Déterminons la forme algébrique de Z^4

$$\begin{aligned} Z^2 = &\quad \left(-\sqrt{2 + \sqrt{2}} - i\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)^2 = 2 + \sqrt{2} + 2i\sqrt{2 + \sqrt{2}} \times \sqrt{2 - \sqrt{2}} - (2 - \sqrt{2}) \\ = &\quad 2\sqrt{2}(1 + i) \\ Z^4 = &\quad \left(Z^2\right)^2 = \left(2\sqrt{2}(1 + i)\right)^2 = 8(1 + 2i - 1) = 16i \end{aligned}$$

b. Forme exponentielle de Z^4 et Z
$Z^4 = 16i = 16e^{i\frac{\pi}{2}}$
Posons : $Z = re^{i\theta}$ alors, $Z^4 = 16e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow 16e^{i\frac{\pi}{2}} = r^4e^{4i\theta}$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} r^4 = & 16 \\ 4\theta = & \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array} \right. (k \in \{0; 1; 2; 3\}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} r = & 2 \\ \theta = & \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{array} \right. (k \in \{0; 1; 2; 3\})$$

Puisque $\left\{ \begin{array}{l} \cos\theta < 0 \\ \sin\theta < 0 \end{array} \right.$ alors, $Z = re^{i\theta}$ avec $k = 2$ d'où,

$Z = 2e^{i\frac{9}{8}} = 2e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right)} = 2e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{3}} = -2e^{i\frac{\pi}{8}} = -2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

Ainsi $-2\cos\frac{\pi}{8} = -\sqrt{2\sqrt{2}}$ d'où, $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

De même on aura $-2\sin\frac{\pi}{8} = -\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

On a : $\sin\frac{5\pi}{8} = \sin\left(\frac{4\pi+\pi}{8}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8}$ donc $\sin\frac{5\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Corrigé 35

$$\text{(S)} : \left\{ \begin{array}{lll} x + 2y + 3z + 4t & = 1 & (E_1) \\ 4x + y + 2z + 3t & = 2 & (E_2) \\ 3x + 4y + z + 2t & = 3 & (E_3) \\ 2x + 3y + 4z + t & = 4 & (E_4) \end{array} \right. \text{ et on pose } \left\{ \begin{array}{ll} X & = x + 2y + 3z + 4t \\ Y & = -7y - 10z - 13 \\ Z & = -\frac{36}{7}z - \frac{44}{7}t \\ T & = -2t \end{array} \right.$$

$$(E_1) \text{ et } (E_2) \left\{ \begin{array}{ll} x + 2y + 3z + 4t & = 1 \\ 4x + y + 2z + 3t & = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} -4x - 8y - 12z - 16t & = -4 \\ 4x + y + 2z + 3t & = 2 \end{array} \right.$$

$$\text{on obtient donc :} -7y - 10z - 13t = -2 (L_1)$$

(E_1) et (E_3) $\begin{cases} x+2y+3z+4t &= 1 \\ 3x+4y+z+2t &= 3 \end{cases}$ on obtient aussi, $-2y-8z-10t=0(L_2)$

(E_1) et (E_4) $\begin{cases} x+2y+3z+4t &= 1 \\ 2x+3y+4z+t &= 4 \end{cases}$ on obtient $-y-2z-7t=2(L_3)$

$$\begin{cases} -7y-10z-13t &= -2 \\ -2y-8z-10t &= 0 \\ -y-2z-7t &= 2 \end{cases}$$

$L_1)$ et (L_3) $\begin{cases} -7y-10z-13t &= -2 \\ 7y+14z+49t &= -14 \end{cases}$ on obtient $4z+36t=-16(F_1)$

(L_1) et (L_2) $\begin{cases} -14y-20z-26t &= -4 \\ 14y+56z+70t &= 0 \end{cases}$ on obtient $36z+44t=-4(F_2)$

$$\begin{cases} 36z+44t &= -4 \\ 4z+36t &= -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36z+44t &= -4 \\ -36z-324t &= 144 \end{cases} \text{ d'où, } t=-\tfrac{1}{2}$$

$$\text{Ainsi, on a : } \begin{cases} x+2y+3z+4t &= 1 \\ -7y-10z-13t &= -2 \\ 36z+44t &= -4 \\ -2t &= 1 \end{cases}$$

En remontant, on obtient, $t=-\frac{1}{2}$; $z=\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{2}$; $x=\frac{1}{2}$

$$\text{Donc : } S=\{(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2})\}$$

Épreuve ENS

.

35 ENS 2012 (Algèbre)

Corrigé 36

1 Faux

Contre exemple

Posons $z = x + iy$, $z^2 = x^2 - y^2 2ixy$ et $Re(z^2) = x^2 - y^2 \neq (Re(z))^2 = x^2$.

2 Vrai

Preuve.

Soit $z = x + iy$, supposons que $I_1 + izI = I_1 - iZI(*)$ et montrons que $y = 0$.
(*) équivaut à : $(1-y)^2 + x^2 = (1+y)^2 + x^2 \leftrightarrow y = 0$.

3 Faux

Contre exemple

Une forme exponentielle de Z^{3n} est : $Z^{3n} = \left(24\sqrt{3}\right)^{3n} e^{i\frac{n\pi}{2}}$ n'est pas un imaginaire pur, car $\forall n = 2k \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$ on a $\cos(k\pi) = \pm 1$ et $\sin(k\pi) = 0$.

4 Faux

Contre exemple

Trivial ! Car vous supposez un nombre complexe non nul ayant un argument de 90° et vous vérifier la relation donnée. (Prendre par exemple $Z = re^{i\frac{\pi}{2}}$).

5 Vrai

Preuve

Supposons un nombre complexe non nul (prendre par exemple $Z = e^{i\theta}$), après calcul au préalable vous obtiendrez : $\frac{1}{Z^2} + Z^2 = 2\cos 2\theta \in \mathbb{R}$.

Corrigé 37

1 Nombre d'enfants et de billes qu'ils ont obtenu.

Dans cette question nous vous donnerons le résultat brute, sans explication, ceci, dans le but d » e vous amener à réfléchire par vous-même.

$U = k + 1 + \frac{1}{10}(9\frac{U_k}{10} - k) = 9\frac{k}{10} + 9\frac{U_k}{10^2} + 1$, ainsi nous avons :

$$U_n = \left(\frac{9}{10}\right)^{n-k_0} U_{k_0} + \frac{9^{n-k_0}}{10^{n+1-k_0}} + 9^{n-(k_0+1)}$$

par la suite $\sum_{n=1}^{p} U_n = n$.

2 Résolvons dans $\mathbb{R}$.

$\frac{\log_2\left(\sqrt{(x-1)(x+3)}\right)}{\log_8 3+\log_8(x+1)} = \log_9 27$, pour la résolution de cette équation, il fallait juste savoire ceci : $\left(\log_x y = \frac{\ln y}{\ln x}\right)$, et après un long développement toutefois en utilisant les formule du logarithme népérien, vous trouverez ceci :

$\ln(x-1)(x+3) = \ln(3x+3)$, en posant les contraintes et en résolvant normalement, on aboutit à : $S = \{3\}$.

3 Résolvons l'équation suivante.

$4X^3 - 24X^2 + 23X + 18 = 0$. Commençons par remarquer que, une racine de l'équation est 2. De ce fait on en déduit les racines suivantes :

$$2 - \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ et } 2 + \frac{\sqrt{7}}{2}$$

.

D'où les solutions sont en progression arithmétique de raison $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

$$S = \{2; 2 - \frac{\sqrt{7}}{2}; 2 + \frac{\sqrt{7}}{2}\}$$

.

Corrigé 38

Déterminons l'ensemble des valeurs du paramètre c. $\left(\frac{z-c}{2}\right)^5 = 1.(*)$

Posons $h = \frac{z-c}{2}$ et $Z = x + iy$. On de ce fait, $h^5 = 1 \Rightarrow \left(\left(re^{i\theta}\right)^5 = e^{i2k\pi}\right.$,

en procédant par identification, on obtient :

$\begin{cases} r &= 1 \\ \theta &= \frac{2k\pi}{5} \end{cases}$ $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\} \Rightarrow h \in \{1; e^{i\frac{2\pi}{5}}; e^{i\frac{4\pi}{5}}; e^{i\frac{6\pi}{5}}; e^{i\frac{8\pi}{5}}\}$.
Or $z - c = 2h \Rightarrow C = Z - 2h$,

or la plus grande valeur est l'abscisse de $e^{i\frac{8\pi}{5}} \Rightarrow 2\left(\cos\frac{8\pi}{5}\right) - C < O \Rightarrow C > 2\left(\cos\frac{8\pi}{5}\right)$.

Ensuite voire aussi pour $e^{i\frac{6\pi}{5}}$ et conclure.

Corrigé 39

1 Montrons que $(1+i)6 = -8i$.

Question facile mais embêtante, pour ce faire rapidement, mettre $(1+i)^6$ sous la forme exponentielle (vous obtiendrez ceci : $(1+i)^6 = 8e^{i\frac{3\pi}{2}}$), ensuite vous mettez sous la forme trigonométrique et vous obtenez immédiatement $-8i$.

2 **a.** Déduisons-en de 1. une solution de (E).
D'après 1. on a $Z_2 = -8i = (1+i)6 = ((1+i)3)2$,
ainsi une solution de (E) est $Z = (1+i)3$.

b. Ecrivons l'autre solution sous forme algébrique.
L'autre solution est : $Z = -(1+i)3$, après un développement rigoureux,
on obtient : $Z = 2(1-i)$.(d'où la forme trigonométrique).

3 Déduisons-en les solutions de l'équation (E').

En raisonnant de manière analogue que dans la question 2., on obtient les solutions suivantes :

$Z = \pm(1+i)^2$.

4

a. Déterminons l'affixe de b et c.

$r(A) = B \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} OA & = OB \\ mes & = \frac{2\pi}{3} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{Z_B - Z_O}{Z_A - Z_O} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (*)

en remplaçant Z_0 et Z_A par leur valeurs dans (*), on obtient : $Z_B = b = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

De manière analogue, on trouve aussi : $Z_C = c = 2e^{i\frac{11\pi}{6}}$.

b. Montrons que b et c sont solutions de (E').

(Question évidente !).

5

a. Représentons les points A, B et C : (faites-le vous-même).

b. Nature de la figure :(triangle isocèle).

c. Déterminer le centre de gravité de cette figure : (amusez-vous).

36 ENS 2012 (Géométrie)

Corrigé 40

Dans cet exercice nous respectons la consigne, de ce fait le lecteur qui trouvera une ambigüité avec les réponses qui suivront pourra entrer en contact avec nous pour que nous puissions dessiller ce doute.

1 Vrai

2 Faux

3 Vrai

4 Faux

5 Vrai

6 Faux

7 Faux.

Corrigé 41

1 Démontrons que si le volume de la boule est de $4L$, alors celui du cône en vaut $9L$.

Le rayon de la boule vaut $\frac{1}{3}a$ où $a = \frac{\sqrt{3}}{2R}$, avec R la longueur d'un coté.

Nous avons d'une part, $V_B = \frac{4}{3}^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^3 = \frac{\pi\sqrt{3}}{2\times 3^3}R^3$, et d'autre part,

$V_{cone} = \frac{\pi r^2}{3}H$, où $r = \frac{R}{2}$ et $H = \frac{\sqrt{3}}{2}R$, en remplaçant r et H par leur valeurs dans le volume du cône, on obtient :

$V_{cone} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3\times 2^3}R^3$, en effectuant le rapport des deux volumes, on obtient :

$$\frac{V_{cone}}{V_B} = \frac{9}{4} \text{ , or } V_B = 4L \text{ Donc : } V_{cone} = 9L.$$

2 **a.** Montrons l'égalité du produit vectoriel.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \wedge \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) &= \left(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}\right)\end{aligned}$$

b. $\forall M i \in$, $f(M) = \left(\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}\right) + \left(\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}\right) + \left(\overrightarrow{MD} \wedge \overrightarrow{MB}\right)$ la relation a. est vraie.

$$\forall M \in \epsilon,\ f(M) = \left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right) \text{ or } \begin{cases} \left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right) \perp \overrightarrow{BD} \\ \left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right) \perp \overrightarrow{BC} \end{cases} \text{ donc}$$

$f(M)$ est normal au plan (BCD) (car orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan).

Corrigé 42

Pour des raisons d'ambigüité de lecture des coordonnées du point A, nous ne pouvez-vous proposer une résolution de cet exercice. Mais nous essayerons de trouver ces coordonnées et la solution vous sera donnée au fil du temps des cours de préparation.

Corrigé 43

1 **a.** Démontrons que les points A, B et C établissent un plan et déterminons l'équation du plan (ABC).

- D'abord, Il est facile de vérifier que les points A, B et C sont non alignés.
- Ensuite, Il est aussi évident de vérifier que les points A, B et C appartiennent au plan ?.
- Enfin, il est facile de vérifier : $x + 2y - z = 0$ est l'équation du plan (ABC).

b. Déterminons la distance d du point D au plan.
Amusez-vous à vérifier que ($d = 2\sqrt{6}$).

2 **a.** Déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ).
Un vecteur normal $\Rightarrow \vec{n}(1, 2, -1)$ du plan est un vecteur directeur de la droite (Δ). Soit un point $M(x, y, z)$ de l'espace et λ un scalaire tel que ; $\overrightarrow{FM} = \lambda\vec{n}$, on a

$$\begin{cases} x &= \lambda - 7 \\ y &= 2\lambda \\ z &= -\lambda + 4 \end{cases}$$ (qui est la représentation paramétrique de la droite (Δ)).

b. Coordonnées du point H.
H est le projeté orthogonal de F sur le plan P, or la droite est perpendiculaire au plan P, d'où H est l'intersection du plan p et de la droite (Δ). Soit $H(x, y, z)$, en remplaçant x, y et z de la représentation paramétrique de la droite (Δ) par leur valeur dans l'équation du plan, on obtient : $\lambda = 2$ et en revenant dans l'équation paramétrique pour remplacer λpar sa valeur, on a les coordonnées de $H(-5, 4, 2)$.

c. Retrouvons le résultat de la question 1.b.
La distance d du point F au plan P n'est rien d'autre que la distance FH, ayant les coordonnées de F et H on calcule et on trouve $FH = 2\sqrt{6}$.

3 **a.** Justifions que le point appartient à la sphère S.
B appartient à S si et seulement si : $BF = R$ (où R est le rayon de la sphère). Par calcul immédiat, on obtient : $BF = 6 = R$, Donc : $B \in S$.

b. Déterminons les caractéristiques de C intersection de P et S.
Le centre de C est le projeté orthogonal de F sur le plan P, autrement dit c'est le point H. par ailleurs, d'après la question 2.c n a ;
$FH = 2\sqrt{6}$. Ainsi, le rayon de C est $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2}$
C'est-à-dire $r = 2\sqrt{3}$. Donc : C = cercle de centre H et de rayon $r = 2\sqrt{3}$.

37 ENS 2012 (Géométrie-Analyse)

Corrigé 44

Corrigé 45

Corrigé 46

Partie

VI

« L'inspiration ne se dit point ;
c'est l'oeuvre qui la dit »

Alain-Fournier

Filière Mathématiques

Corrections-Yaoundé

Alain-Fournier, demi-pseudonyme d'Henri Alban Fournier est un écrivain français, mort à l'âge de 27 ans après avoir écrit un unique roman, le Grand Meaulnes

38 ENS 2005

Corrigé 47

1 Le repère (O,I,J,K) est orthonormé. $S(2;-1;-3)$; $(P): x+y-3z+4=0(1)$

Un vecteur normal à P est $\vec{n}(1;1;-3)$, ce vecteur dirige $(D)\perp(P)$.

Comme (D) passe par S, on a :(D) : $\begin{cases} x &= 2+t \\ y &= -1+t \\ z \end{cases}$ (2) d'où : (1-D)

2 Coordonnée de $\{H\}=(D)\cap(P)$

$H(x,y,z)\in(D)$ donc x,y,z vérifient (2) d'où

$X=1+t$; $y=-2+t$ et $z=-3t$.

$Mais H\in(P)$ donc $x+y-3z+4=0$ $\Leftrightarrow 2+t-1+t+9+9t+4=0$
$\Leftrightarrow 14+11t \Rightarrow t=-14/11$

D'où : $x=\frac{8}{11}$; $y=-\frac{25}{11}$ et $z=\frac{9}{11}$

donc $H\left(\frac{8}{11};-\frac{25}{11};\frac{9}{11}\right)\Rightarrow$ (2-D)

3 $d(S,(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ où $S(x_0;y_0;z_0)\Rightarrow d(S,(P))=\frac{3}{\sqrt{11}}\Rightarrow$ (3.B)

4 $(s;3)\cap P=(H;3\sqrt{\frac{10}{11}})\Rightarrow$ (4-B)

Corrigé 48

1 Calcul de la probabilité :

$0\leq x\leq 999$

Card(A) =200 ; Card(B) = 100 ; Card(C)= 500 ; Card(D)= 334 et Card (Ω)= 1000.

D'où : P(A)= 200/1000= $\frac{1}{5}$; P(B)= 100/1000= $\frac{1}{10}$;

P(C)= 500/1000= $\frac{1}{2}$; P(D)=334/1000= 0,334

2 A∩C=B donc P(A∩C)=P(B)= $\frac{1}{10}$

P(A∪C)=P(A)+ P(C) - P(A∩C) ⇒ P(A∪C)= $\frac{3}{5}$

Card(B∩D)=34 ⇒ P(B∩D)=34/1000=0,034

P(B∪D)=P(B) +P(D) - P(B∩D) ⇒ P(B∪D)= $\frac{2}{5}$

A∩D multiple de 15. ⇒ Card(A∩D)=67 ⇒ P(A∩D)=67/1000=0,067

P(A∪D)=P(A) + P(D) - P(A∩D) ⇒ P(A∪D)=0,467

C∩D = multiple de 6 ⇒ Card(C∩D)=167 ⇒ P(C∩D)=0,167

Et P(C∪D)=0,0667

Corrigé 49

1 Montrer que $(E) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$

$(E) \Leftrightarrow e^{x \ln y} = e^{y \ln x} \Rightarrow x \ln y = y \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$

2 Soit $h :]0; +\infty[\,;\ x \vdash \frac{\ln x}{x}$ et (ε) sa courbe :

a. Dresser le tableau de variation de h :

h est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ et de dérivée $h'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$

Dans $]0, e]$, $h'(x) \geq 0$ donc h croissante

Dans $[e; +\infty[$, $h'(x) \leq 0$ donc h décroissante

x	0		e		$+\infty$
$H'(x)$	$+$		0		$-$
$H(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

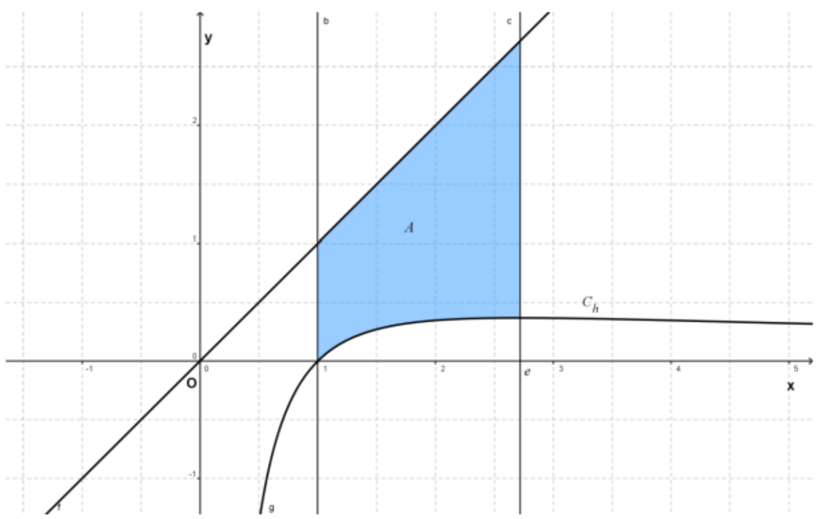
b. h' s'annule en $X_0 = e$ en changeant de signe donc h admet un extrémum en X_0,
mais $\forall x \in]0; +\infty[$, $h(x) \leq h(e)$ donc $X_0 = e$ est un maximum de h (d'après le tableau de variation).

c. Déterminer $(\varepsilon) \cap (OI)$:

C'est le point $A(x, 0)$, trouvons x.

$h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$. D'où : $A(1, 0)$

d. Représentation de (E)



14

e. Déterminer de A

$A = \int_1^e y - h(x)dx = \int_1^e x - \frac{\ln x}{x}dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \ln^2 x\right]_1^e$

$\Rightarrow A = \frac{e^2}{2} - 1 unité\ d'aire$

3 Soit $\lambda \in \left]0; \frac{1}{e}\right[$, prouver l'existence unique de $a \in]1; e[$ et d'un unique $b \in]e; +\infty[$

h est continue sur $]1; e[$, et $h(0) = 1$ et $h(e) = \frac{1}{e}$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique (car h est strictement croissante dans $]1; e[$) $a \in]1; e[$ tel que $h(a) = \lambda$.

De même, on cherche l'existence de b.

On a : $h(a) = h(b) \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$

Donc (a, b) est solution de (E).

4 $S :]1; e[\vdash]e; +\infty[$

$a \vdash s(a) = b$ tel que $h(a) = h(b)$

a. $\lim_{a \to 1^+} S = +\infty$

b. $\lim_{a \to e^-} S = e$

c. Tableau de variation de S :

d. Tableau de variation

x	1		e
S	$+\infty$	$\searrow$	e

5 Couples d'entiers solutions de (E) : $(4\,;\,2)$ et $(2\,;\,4)$

Épreuve ENS

.

39 ENS 2006

Corrigé 50

Tableau des réponses :

Numéro de la question	1	2	3	4	5	6	7	8
Réponse	A	C	B	A	C	B	C	B

Justifications des réponses :

1 $I_n = \int_n^{n+1} 2^{3x}.3^{-2x}dx$

On sait que :

$$\begin{aligned} \ln(2^{3x}.3^{-2x}) &= \ln(2^3x + \ln(3^{-2x}) \\ &= 3x\ln 2 - 2x\ln 3 \end{aligned}$$

$\leftrightarrow 2^{3x}.3^{-2x} = e^{x(3\ln 2 - 2\ln 3)}$ or $3\ln 2 - 2\ln 3 = \ln(\frac{8}{9})$

$\leftrightarrow I_n = \int_n^{n+1} e^{x\ln(\frac{8}{9})}dx = \left[\frac{e^{x\ln(\frac{8}{9})}}{\ln(\frac{8}{9})}\right]_n^{n+1}$ Le calcul de ceci conduit à :

$\leftrightarrow I_n = \frac{1}{9(2\ln 3 - 3\ln 2)}\left(\frac{8}{9}\right)^n$

2 $f(x)$ existe si et seulement si :

$2\cos x - 1?0 \leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

Résolvons cette équation dans $[0, 2\pi]$, à l'aide du cercle trigonométrique.

$\leftrightarrow I = [0; \frac{\pi}{3}[\cup]5\frac{\pi}{3}; 2\pi[$

3 $\left\{\begin{array}{l} 23x - 17y = 5 \\ -50 \leq x \leq 50 \end{array}\right. \quad (1)$

$\rightarrow$ solution particulière de (1) :

23(-2)-17(-3)= 5

$\leftrightarrow (-2, 3) = (x_0; y_0)$ est solution particulière

$\rightarrow$ Solution de l'équation caractéristique :

$23x - 17y = 0 \leftrightarrow 23x = 17y$

$\left\{\begin{array}{ll} x & = 17K \\ y & = 23K \end{array}\right.$

$\rightarrow$ Solution générale de (1) :

$(S) = \{(x, y) = (17K - 2; 23K - 3), K \in \mathbb{Z}\}$ or $x = 17K - 2 \in [-50; 50]$

$-50 \leq 17K - 2 \leq 50 \leftrightarrow -2 \leq K \leq 3$

On a $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Donc 6 valeurs de K d'où 6 valeurs de x et 6 valeurs de y.

4 $\arg(z^3) = 3\arg(z) = 0 \rightarrow \arg(z) = 0$

$\leftrightarrow z = r(\cos 0 + i.\sin 0) = r = |z| \in \mathbb{R}$

$\leftrightarrow z \in (0, I)$, l'axe des abscisses

5 $4|z-(1+i)| = 2\sqrt{2}|x+2| \leftrightarrow 4MF = 2\sqrt{2}d(M,D)$

Où $(D) : x+2=0$

$\leftrightarrow \frac{MF}{d(M,D)} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ comparé à : $\frac{MF}{d(M,D)} = e < 1$

(ε) est une ellipse de foyer $F(1,1)$ et de directrice $(D) : x=-2$

D'où C est juste.

6 $mes(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}) = \frac{\pi}{2}$ $SA = SB = a$

$\leftrightarrow \left\|\overrightarrow{SA} \wedge \overrightarrow{SB}\right\| = SA \times SB \times |\sin\frac{\pi}{2}| = a^2$

7 Justification venant directement du cours

8
a. Soient $P_{A\cap B}$ la probabilité qu'un individu soit atteint de A et de B et P_A^B la probabilité qu'il soit atteint de B sachant qu'il est atteint de A :
$P_{A\cap B} = P_A^B \times P_A = \frac{20}{100}\left(\frac{15}{100}\right) = \frac{3}{100} = 0,03 \neq 0,2$
Donc la proposition a)est fausse

b. Soit P_B^A la probabilité qu'il soit atteint de A sachant qu'il est atteint de B :
$P_{A\cap B} = P_B^A \times P_B \leftrightarrow P_B^A = \frac{P_{A\cap B}}{P_B}$ or $P_B = \frac{4}{100}\left(\frac{85}{100}\right) + \frac{20}{100}\left(\frac{15}{100}\right) = \frac{6,4}{100}$
$\leftrightarrow P_B^A = \frac{3}{100} \times \frac{100}{6,4} = 0,468 = 0,47$
D'où la proposition b) est juste.

Corrigé 51

On donne : $I(n,m) = \int_0^1 t^n(1-t)^m dt$

1 Démontrons que $I(n+1,m) = \frac{n+1}{m+1}.I(n,m+1)$

$I(n+1,m) = \int_0^1 t^{n+1}(1-t)^m dt$ posons : $U = t^{n+1}$ et $V' = (1-t)^m$

$\leftrightarrow U' = (n+1).t^n$ et $V = -\frac{(1-t)^{m+1}}{m+1}$ à l'aide de ceux-ci, on trouve en appliquant la formule de l'intégration par partie :

$\leftrightarrow I(n+1,m) = \frac{n+1}{m+1}.\int_0^1 t^n(1-t)^{m+1}dt$

$\leftrightarrow I(n+1,m) = \frac{n+1}{m+1}.I(n,m+1)$

2 Deduction :

On a : $I(n,n) = \frac{n}{n+1}.\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{n+1}dt$ d'après 1.

Or $\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{n+1}dt = \frac{n-1}{n+2}.\int_0^1 t^{n-2}(1-t)^{n+2}dt$

Donc $I(n,n) = \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}.\int_0^1 t^{n-2}(1-t)^{n+2}dt \quad \leftrightarrow I(n,n) = \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}.I(n-2;n+2)$

$\leftrightarrow I(n,n) = \frac{n(n-1)...[n-(n-1)]}{(n+1)(n+2)...[(n+1)+(n-1)]}.I(0,2n)$

$\leftrightarrow I(n,n) = \frac{n!}{(n+1)(n+2)...2n}.I(0,2n)$

Mais $I(0,2n) = \frac{1}{2n+1}$

Donc : $I(n,n) = \frac{n!}{(n+1)(n+2)...2n}.\frac{1}{2n+1} = \frac{n!}{(2n+1)(2n)(2n-1)...(n+1)}$

$I(n,n) = \frac{n!}{\frac{(2n+1)!}{n!}} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ d'où le résultat.

3 Comparaison et tableau de variation :

tableau de variation

Γt	0		$1/2$		1
Ff'_n	$+$		0		$-$
f_n	0	$\nearrow$	$\left(\frac{1}{4}\right)^n$	$\searrow$	0

On a : $t-(1-t)=2t-1$

$2t-1=0 \leftrightarrow t=1/2$

Pour $t\in\left[0;\frac{1}{2}\right[$; $2t-1<0 \leftrightarrow t-(1-t)<0$

Donc pour $t\in\left[0;\frac{1}{2}\right[$, on a $t<1-t$

Pour $t\in\left]\frac{1}{2};1\right]$, $t?1-t$

Posons : $f_n(t)=t^n(1-t)^n \quad \leftrightarrow f'_n(t)=nt^{n-1}(1-t)^n-nt^n(1-t)^{n-1}$

$\leftrightarrow f'_n(t)=nt^n(1-t)^n.\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}\right)$

Dans $\left[0;\frac{1}{2}\right[$, $t<1-t \leftrightarrow \frac{1}{t}?\frac{1}{t-1} \rightarrow \frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}?0$

D'où $f'_n(t)?0$ et f_m est croissante.

Dans $\left]\frac{1}{2};1\right]$, $t?1-t \rightarrow \frac{1}{t}<\frac{1}{t-1} \rightarrow \frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}<0$

D'où : $f'_n(t)<0$ et f_n est décroissante.

4 Démonstration par récurrence :

On sait que :

$\rightarrow I(n,n)$ est l'aire délimité par $f_m(t)$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$

Donc $I(n,n)=\int_0^1 f_n(t)dt \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ (1)

$\rightarrow$ Montrons que : $\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq I(n,n)$

On a : $I(n,n)=\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}=\frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{2n\times\ldots n\times 1}.\frac{1}{2n+1}$

Minorons ce produit des rapports, il suffit de minorer le numérateur et de majorer le dénominateur.

On a : $n(n-1)\times\cdots\times 1\leq 1\times 1\times\cdots\times 1=1$

$2n\times(2n-1)\times\cdots\times(n+1)\geq 2n\times 2n\times\ldots 2n\geq 4\times 4\times 4\times\cdots\times 4$

Donc $\frac{n!}{2n\times\cdots\times(n+1)}\geq\frac{1}{4^n}$

Ainsi : $\frac{n!}{2n\times\cdots\times(n+1)}\frac{1}{2n+1}\geq\frac{1}{2n+1}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$ (1)

D'où : $\frac{1}{2n+1}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\leq I(n,n)$ (2)

(1) et (2) $\rightarrow \frac{1}{2n+1}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\leq I(n,n)\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$ (3)

5 Montrer la convergence :

(3) $\rightarrow \frac{1}{2n+1}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\leq\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$

En multipliant par 3^n membre à membre, on obtient :

$\frac{1}{2n+1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^n\leq\frac{3^n.(n!)^2}{(2n+1)!}\leq\left(\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow \frac{1}{2n+1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^n\leq U_n\leq\left(\frac{3}{4}\right)^n$

D'après le théorème des gendarmes, on a :

$\lim_{n\to\infty}U_n?=0$ donc (U_n) converge.

Corrigé 52

1 Calcul de PM et PN en fonction de x :

En utilisant le théorème de Pythagore, on trouve aisément :

$PM=\sqrt{x^2+324}$ et $PN=\sqrt{x^2+144}$

2 Démonstration :

$\alpha = \beta - \gamma$ où $\beta = mesDPM$ et $\Gamma = mesDPM$

$\cos\alpha = \cos(\beta - \gamma) = \cos\beta.\cos\gamma + \sin\beta.\sin\gamma$

$\cos\alpha = \frac{DP^2}{PM \times PN} + \frac{DM.DN}{PM.PN}$

Or $\begin{cases} DP^2 & = PN^2 - DN^2 \\ DP^2 & = PM^2 - DM^2 \end{cases}$ d'après Pythagore

$\leftrightarrow DP^2 = \frac{1}{2}(PN^2 + PM^2 - DN^2 - DN^2)$

Ainsi : $\cos\alpha = \frac{PN^2+PM^2-DN^2-DN^2}{2PN \times PM} + \frac{DM \times DN}{MP \times PN}$

D'où : $\cos\alpha = \frac{PN^2+PM^2-MN^2}{2PN \times PM}$

3 Déduire que $(\cos\alpha)^2 = \frac{x^2+432x+46656}{x^2+468x+46656}$:

On a : $\cos\alpha = \frac{PN^2+PM^2-MN^2}{2PN \times PM}$ et $MN^2 = 36$; $PN = \sqrt{x^2+144}$; $PM^2 = \sqrt{x^2+324}$

$\cos\alpha = \frac{x^2+324+x^2+144-36}{2\sqrt{x^2+144} \times \sqrt{x^2+324}} = \frac{2x^2+432}{2\sqrt{(x^2+144)(x^2+324)}} = \frac{x^2+216}{\sqrt{(x^2+144)(x^2+324)}}$

$(\cos\alpha)^2 = \frac{x^4+432x^2+46656}{x^4+468x^2+46656}$ Posons : $f(x) = \frac{x^2+432x+46656}{x^2+468x+46656}$

D'où : $f(x^2) = (\cos\alpha)^2$

4 Etude des variations de f sur $[0; 120]$:

Posons : $g(x) = f(x^2)$ alors $g'(x) = 2x.f'(x^2)$

$f'(x) = \frac{36.(x^2-46656)}{(x^2+468x+46656)^2}$ et $g'(x) = \frac{72x(x^4-16^4)}{(x^4468x^2+46656)^2}$

x	0		4		120
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0.098	$\nearrow$	

Valeur maximale de x :

$g(x) \geq Y_m \Rightarrow \cos^2\alpha \geq Y_m \Rightarrow \cos\alpha \geq \sqrt{Y_m} \Rightarrow \alpha \leq \arccos\sqrt{Y_m}$

D'où : $\alpha_M = \arccos\sqrt{Y_m} = 11,47°$ et alors : $x = OP = 4m$.

Corrigé 53

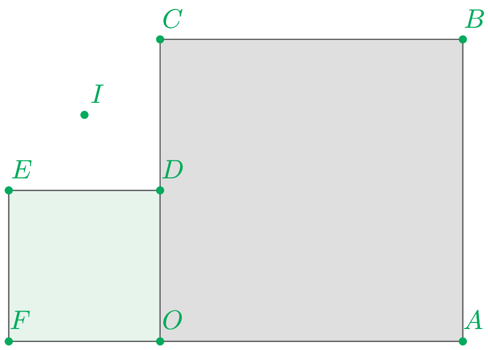
1 Rapport et angle de S : $\frac{OD}{OB} = \frac{OD\sqrt{2}}{OA\sqrt{2}} = \frac{OD}{OA} = \frac{1}{2}$ d'où : $k = \frac{1}{2}$

$mes(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}) = -\frac{\pi}{2}$ d'où son angle $\alpha = -\frac{\pi}{2}$

2 **a.** Montrer que I appartient aux cercles de diamètres [OB] et [OE] :

$mes(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IE}) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow IOE$ est rectangle en I donc I appartient au cercle de diamètre [OE]
De même on montre que I appartient au cercle de diamètre [OB]

b. Reproduire la figure précédent et y placer I :



15

3 Forme complexe de S :

Soient $M(z)$ et $M'(z')$ tel que $M' = S(M)$ alors $z' = az + b$

$Z' = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}z + b = -\frac{1}{2}iz + b$

Mais $S(B) = 0 \Leftrightarrow Z_0 = -\frac{1}{2}iZ_B + b \Rightarrow b = \frac{1}{2}i(1+i) = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

$S : z' = -\frac{1}{2}iz - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

4 L'ensemble (H) des points m vérifiant $OM - AM = 2$ est une partie de l'hyperbole de foyers O et A

(En effet : $< M/|MF - MF'| = 2a >$ est une hyperbole de foyers F et F' et là, $FF' = 2C$)

Considérons le repère (O, i, j) orthonormé où O' est milieu de [OA], $O'(0,0)$; $A(2,0)$ et $O(-2,0)$

Eléments caractéristiques $F'F = OA = 4 = 2C \Rightarrow C = 2$

$a = 1$ et $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3}$; $e = \frac{c}{a} = 2$; $(D) : y = cx/a = x/2$ et $(D') : y = -x/2$ (Directrices)

Asymptotes : $(D) : y = \sqrt{3}x$ et $(D') : y = -\sqrt{3}x$.

Corrigé 54

1 Vérification :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonction dérivables sur R de dérivée :

$f'(x) = 1 + e^{-x}\ln(1+e^x) - \frac{e^x}{1+e^x}(1+e^{-x}) = 1 + e^{-x}.\ln(1+e^x) - \left(\frac{1+e^x}{1+e^x}\right)$

D'où : $f'(x) = e^{-x}.\ln(1+e^x)$

2 Déduction :

$f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante et f continue de plus sur $\mathbb{R}$ d'où f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]\lim_{x\to-\infty} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]0; +\infty[$

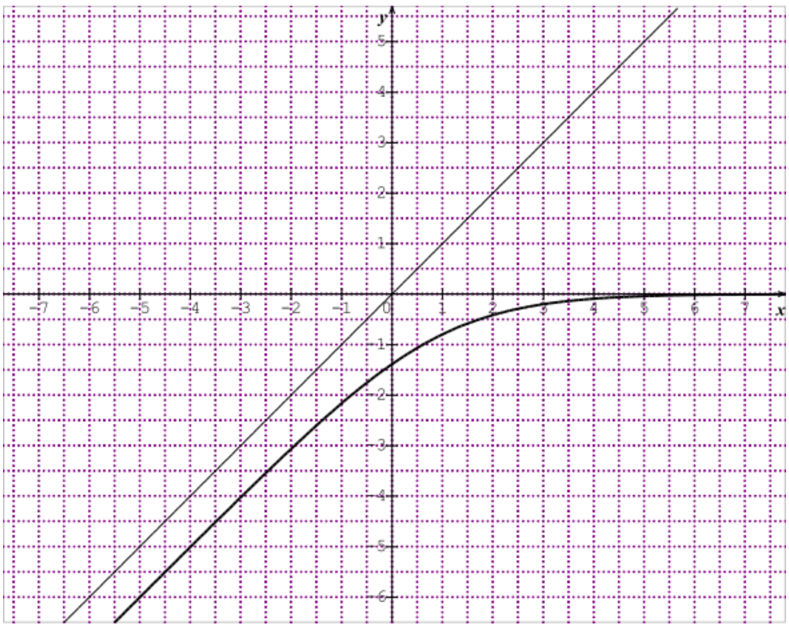
En effet : $\lim_{x\to-\infty} = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} = \lim_{x\to-\infty} x - \frac{(1+e^x)\ln(1+x)}{e^x}$ Posons : $X = e^x \Rightarrow x = \ln x$

$\lim_{X\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty}(\ln X - \frac{1+X}{X}\ln(1+X)) = \lim_{X\to+\infty}(\ln X - \ln(1+X) - \frac{\ln(1+X)}{X}) = \lim_{X\to+\infty}(\ln\frac{x}{X+1} - \frac{\ln(1+X)}{X}) = 0$

3 Montrer que la courbe de f admet deux asymptotes :

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc (OI) asymptote horizontale à (C_f).
- De plus, $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$ donc $(D) : y = x$ est asymptote oblique en $-\infty$.

4 construction de (C_f) et (C_f^{-1}) :



16

La courbe de f^{-1} se déduit de celle de f symétriquement par rapport à la droite d'équation

Épreuve ENS

.

40 ENS 2007

Corrigé 55

1 Montrer que (E) est une ellipse et déterminer son centre I et son excentricité :

$$\begin{aligned}(E): \quad &\Leftrightarrow (x+1)^2+4(y-1)^2-4-1+1=0\\ &\Leftrightarrow (x+1)^2+4(y-1)^2-4=0\\ &\Leftrightarrow \tfrac{(x+1)^2}{2^2}+\tfrac{(y-1)^2}{1^2}=1\end{aligned}$$

son centre est $I(-1,1)$

$a=2; b=1; c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}\ e=c/a=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2 Intersection de (E) avec les axes du repère (O,I,J) : Avec (Ox) : On sait que y=0

(E) devient $x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=-1$

On a : Le point $M\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

Avec (Oy) : On sait que $x=0$

(E) devient $4y^2-8y+1=0 \Leftrightarrow y=\frac{2-?3}{2}$ ou $y=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

Donc $P\begin{pmatrix}0\\\frac{2-\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ et $Q\begin{pmatrix}0\\\frac{2+\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$

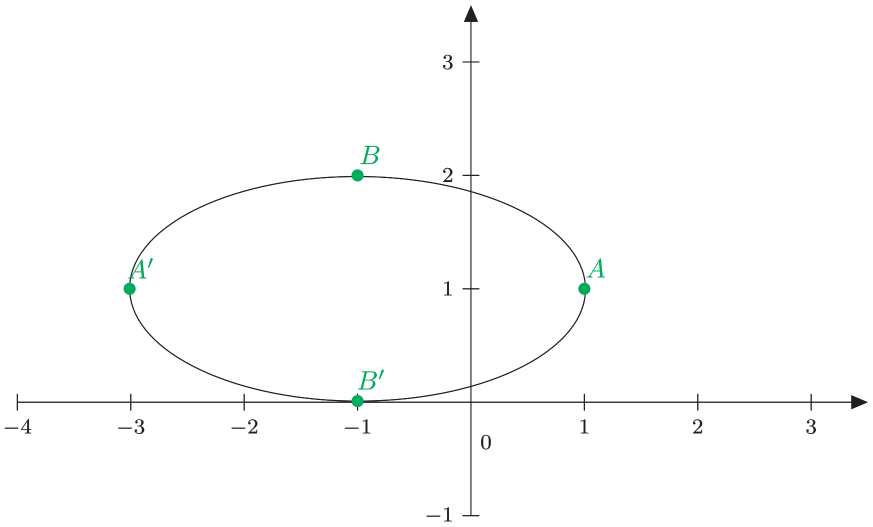
3 Déterminons l'aire de l'ellipse (E) :

Si l'ellipse est d'équation : $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$

L'aire est : $A=\pi ab$ d'où $A=\pi\times 2\times 1 \Leftrightarrow A=2\pi UA$

4 Construction de (E) :

$A(1,1), A'(-3,1); B(-1,2)$ et $B'(-1,0)$



17

Corrigé 56

1 Démontrer que (w) est arithmétique de raison $-\ln 3$:

i.e $W_{n+1} = w + a$ (où a indépendant de n)

$$W_{n+1} = \ln(V_{n+1} - \tfrac{3\ln 2}{2}) = \ln(\ln U_{n+1} - \tfrac{3\ln 2}{2}$$
$$= \ln(\ln 2.\sqrt[2]{U_n} - \tfrac{3\ln 2}{2})$$
$$= \ln(\ln 2 + \tfrac{\ln U_n}{3} - \tfrac{3\ln 2}{2}$$

$\Leftrightarrow W_{n+1} = \ln(\frac{\ln U_n}{3} - \frac{\ln 2}{2}) = \ln(\frac{1}{3}.(\ln U_n - \frac{3\ln 2}{2}) = \ln\frac{1}{3} + \ln(\ln U_n - \frac{3\ln 2}{2})$

$\Leftrightarrow W_{n+1} = -\ln 3 + \ln(V_n - \frac{3\ln 2}{2}) = W_n - \ln 3$

D'où : $W_{n+1} = W_n - \ln 3)$ Suite arithmétique de raison $-\ln 3$ et de premier terme : $W_0 = \ln(ln\frac{7}{2\sqrt{2}})$

Déduction de v en fonction de n :

D'après ce qui précède, on peut écrire :

$W_n = W_0 + n(-\ln 3)$

D'où : $W_n = \ln(\ln\frac{7}{2\sqrt{2}}) - n\ln 3$

Mais $W_n = \ln(V_n - \frac{3\ln 2}{2}) = \ln(\ln\frac{7}{2\sqrt{2}}) - n\ln 3$

$\Leftrightarrow \ln(V_n - \frac{3\ln 2}{2}) = \ln((\frac{7}{2\sqrt{2}})^{\left(\frac{1}{3}\right)^n})$

$\Leftrightarrow V_n - \frac{3\ln 2}{2} = \left(\frac{7}{2\sqrt{2}}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

D'où : $V_n = \ln((\frac{7}{2\sqrt{2}})^{\left(\frac{1}{3}\right)^n}) + \frac{3\ln 2}{2}$

2 Montrer que (V_n) est convergente en déterminant sa limite :

$V_n = \ln((\frac{7}{2\sqrt{2}})^{\left(\frac{1}{3}\right)^n}) + \frac{3\ln 2}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^n.\ln(\frac{7}{\sqrt{8}}) + \frac{3\ln 2}{2}$

Comme : $1/3 < 1$, $\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$ quand $n \to +\infty$

D'où : $\lim_{n\to\infty} V_n = \frac{3\ln 2}{2}$

Comme $\lim_{n\to\infty} V_n \in \mathbb{R}$, on conclut que (V_n) converge.

3 Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2\sqrt{2}.\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

$$V_n = \ln U_n \quad \Rightarrow U_n = e^{V_n} = e^{\ln\sqrt{8}}.e^{\ln(\frac{7}{8})\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$
$$\Rightarrow U_n = \sqrt{8}.\left(\frac{7}{8}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

D'où : $U_n = 2\sqrt{2}.\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

4 En déduire que (U_n) converge et trouver sa limite l :

$\lim_{n\to\infty} U_n = 2\sqrt{2} = l$ car $\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$ quand $n \to +\infty$

5 Déterminer le plus petit entier naturel n tel que (U_n) ait une valeur approchée de l à 0,01 près :

$$\left|U_n - 2\sqrt{2}\right| < 0,01 \Leftrightarrow \left|2\sqrt{2}.\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^n} - 2\sqrt{2}\right| < 0,01 \Rightarrow \left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^n} < 1 + \frac{0,01\times\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{\ln(1+\frac{0,01\times\sqrt{2}}{4})}{\ln(\frac{7\sqrt{2}}{4})} = 0,003894658 \Rightarrow n > 5,05$$

D'où : $n_0 = 6$

Corrigé 57

1 f_m est-il bijectif pour toute valeur de m ?

Non ! Preuve :

Déterminons le déterminant def_m :

$detA_m = (m+1)(-m^2+1) + m^2 \Rightarrow detA_m = -m^3 + m + 1$

Le polynôme $-m^3+m+1$ admet trois racines dans $\mathbb{R}$. Ainsi $detA_m$ s'annule pour 3 valeurs. Donc f_m n'est pas bijectives pour ces trois valeurs de m.

2 Déterminons m sachant que f_m est une translation :

Soient $M(x,y)$ et $M'(x',y') = f_m(M)$ (1)

f_m est une translation si et seulement si $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.

$$(1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x' & = x(m+1) + my \\ y' & = -mx + (-m^2+1)y) \end{array}\right. \quad \overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} m(x+y) \\ m(x+my) \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{MM'}$ dépendent de x, y et m donc il n'existe pas de valeurs de m pour lesquels f_m est une translation.

3 Valeurs de m pour que f_m soit une similitude :

Soient $A(x,y)$ et $B(x',y')$, f_m est une similitude si et seulement si $K \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$d(f(A), f(B)) = K.AB$. On a : $AB = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}$

$f(A).f(B) = \sqrt{(2m^2+2m+1)(x'-x)^2 + (m^4-m^2+1)(y'-y)^2 + 2m^2(1+m)(x'-x)(y'-y)}$

$f(A).f(B) = K.AB$ si et seulement si $m = 0$ ou $m = -1$

a. Pour $m=0$, $f_0 = Idp$: $\begin{cases} x' &= x \\ y' &= y \end{cases}$

b. Pour $m=-1$, $A_m = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{cases} x' &= -y \\ y' &= x \end{cases}$

L'ensemble des points invariants est tel que : $\begin{cases} x &= -y \\ y &= x \end{cases} \Rightarrow x=y=0$

Donc l'unique point invariant est le point $O(0,0)$.

f^{-1} est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

4 Expression analytique de f_1 :

$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ Soient $M(x,y)$ et $M'(x',y') = f_1(M)$, on a : $\begin{cases} x' &= 2x+y \\ y' &= -x \end{cases}$

5 Invariant de f_1 : $f_1(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x' &= 2x+y \\ y' &= -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y &= 0 \\ x+y &= 0 \end{cases} \Rightarrow x+y=0$

D'où $(D) : y=-x$ est l'ensemble des invariants de f_1.

Corrigé 58

1 Déterminer l'aire totale des faces latérales :

Les faces sont des triangles équilatéraux de côté 2, de hauteur $2\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}$.

D'où l'aire totale est $(A = 4\sqrt{3})$

Expression de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$:

Considérons O le centre du triangle ABC.

$d(D,(ABC)) = OD = \frac{\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|}$ or $OB = 2/3h$ où h est la hauteur de ABC. d'où $OB = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

D'après Pythagore, $OD = \sqrt{4+\frac{12}{9}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

Donc $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{\sqrt{3}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{AB}\right|}{4}$

2 Déterminons les plans et les axes de symétries de ABCD : Désignons par I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments [AB],[AC],[AD],[DB],[DC] et [BC] , A' ; B' ; C' ; D' centre de gravité respectifs des triangles BCD, ACD, ABD et ABC.

- Axes de symétries : Droite (AA') ; (BB') ; (CC') et (DD').
- Plan de symétrie : (ACI) ; (ADN) ; (ABM) ; (DBJ) ; (DCI) et (BCK).

3 Volume de ABCD :

$V = 1/3B \times h$ où $B = \sqrt{3}$ et $h = OD = 4\sqrt{3}/3$

$V = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow V = \frac{4}{3}U.V$

4 Oui, il existe belle et bien une sphère tangente aux quatre faces de ABCD ; elle a pour centre le point de concours des axes de symétries G et de rayon

$r = \frac{OD}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{4}{\sqrt{3}}3 = \frac{4\sqrt{3}}{9}$

$S(G, \frac{4\sqrt{3}}{3})$

Corrigé 59

1 $D_f = [0,+\infty[= D$

2 Démontrer que $\forall x \in D_f, 1-x < \frac{1}{1+x} < 1-x+x^2$

$$\begin{array}{rcll} (1-x)-\frac{1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} & \leq 0 & \text{donc} & 1-x<\frac{1}{1+x} \quad (1)\\ \frac{1}{1+x}-(1-x+x^2) = \frac{-x^3}{1+x} & \leq 0 & \text{donc} & \frac{1}{1+x}<1-x+x^2 \quad (2)\end{array}$$

(1) et (2) $\Rightarrow 1-x < \frac{1}{1+x} < 1-x+x^2$

3 Déduire que f est dérivable et donner le nombre dérivée en O :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = & \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}\\ & = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\\ & = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}\\ & = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

D'où : $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

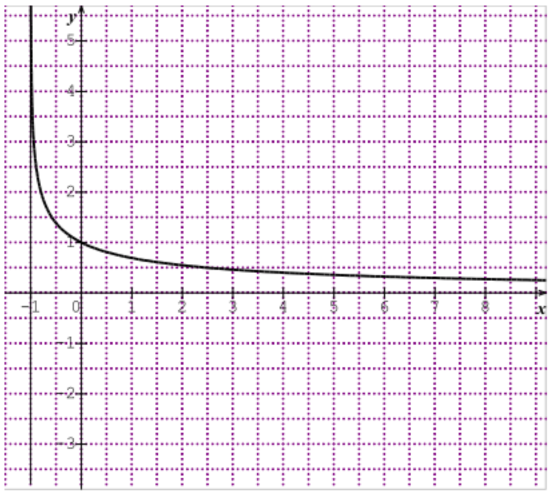
Tangente en O : $y = f'(0)(x-0)+f(0) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x+1$

4 Tableau de variation : $f'(x) = \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	0	$+\infty$
$F'(x)$	$-$	
$F(x)$	$1 \searrow$	0

La construction :



18

5

Corrigé 60

1 Résoudre

$$\begin{aligned}3^(3x+1)+9^(x-1) = 1458 & \Leftrightarrow 9.3^{3x}+\frac{9^x}{9} = 1458\\ & \Leftrightarrow 9\times\left(^3\right)^3+\frac{(3^x)^2}{9} = 1458\end{aligned}$$

$\Rightarrow 9X^3 + 1/9X^2 = 1458$ où $X = 3x \Rightarrow X > O$

$$(E_2) : 2^{2x-1} + 3^x + 4^{x+0,5} - 9^{0,5+1} = 0 \quad \begin{aligned} &\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\left(2^x\right)^2 + 3^x + 2 \times \left(2^x\right)^2 - 93^x = 0 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{5}{2}\left(2^x\right)^2 - 8\left(\left(3^x\right) = 0\right. \\ &\Leftrightarrow 5\left(2^x\right)^2 = 163^x \\ &\Leftrightarrow \ln 5 + 2x.\ln 2 = \ln 16 + x.\ln 3 \end{aligned}$$

D'où : $x = \frac{\ln(16/5)}{\ln(4/3)}$

2 Recopier et compléter :

$$\overline{21}^3\overline{221}^3 = \overline{?}^3 \quad \begin{aligned} &\Leftrightarrow \overline{21}^3 = 1 \times 30 + 2 \times 31 = 1 + 6 = \overline{7}^{10} \\ &\Leftrightarrow \overline{221}^3 = 1 \times 30 + 2 \times 31 + 2 \times 3^2 = 1 + 6 + 18 = \overline{25}^{10} \end{aligned}$$

$\overline{21}^3 \times \overline{221}^3 = \overline{175}^1 0 \Rightarrow \overline{175}^1 0 = \overline{20111}^3$

De même, on aura : $\overline{101}^2 \times \overline{221}^3 = \overline{325}^6$

On passe par base 10 et on revient en base 6.

3 $I = \int_0^\pi e^x.(\sin x)^2.dx$ Posons : $V' = e^x$ et $U = (\sin x)^2 \Rightarrow V = e^x$ et $U' = \sin 2x$

$I = \left[e^x((\sin x)^2 - \sin 2x + 2)\right]_0^\pi - 4I$

$I = \frac{2(e^\pi - 1)}{5}$

De même, on aura : $J = \frac{1}{32}(5e^4 - 1)$

Épreuve ENS

.

41 ENS 2008

Corrigé 61

1 Montrer que E est la réunion d'une ellipse (E1) et d'une hyperbole E2 dont on donnera les équations réduites :

$$\begin{array}{rcl} M \in E & \Rightarrow & x^4 - 16(y^2 - 2y)^2 = 0 \\ & \Rightarrow & x^2 - 4(y^2 - 2y)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + 4(y^2 - 2y)^2 = 0 \\ & \Rightarrow & -\dfrac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1 \quad \text{ou} \quad \dfrac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1 \\ & \text{Donc} & \text{Ellipse E1 : } \dfrac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1 \\ & & \text{Hyperbole E2 : } \quad -\dfrac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1 \end{array}$$

2 Intersection de E1 et E2 :

$M(x,y) \in E1 \cap E2 : \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1 \\ \end{array} \right.$

En résolvant ce système, on obtient les points O(0 ,0) et A(0, 2)

3 Déterminer les foyers de E1 par rapport au repère R : Posons : $\left\{ \begin{array}{l} X = x \\ Y = y - 1 \end{array} \right.$ Alors (E1) : $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{1} = 1$ dans le repère (S,I,J) où S(0,1)

a = 2 ; b=1 et $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$

Dans (S,i,j) les foyers sont F($\sqrt{3}$, 0) et FŠ(-$\sqrt{3}$, 0) Dans le repère (O,I,J)

F($\sqrt{3}$, 1) et FŠ(-$\sqrt{3}$, 1)

4 Déterminer l'excentricité de (E2) :

(E2) : $-\frac{x^2}{a} + (y-1)^2 = 1$ Dans le repère (O, i, j)

(E2) : $-\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{1} = 1$ $a = 2;$ $b = 1$ $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$

Et l'excentricité est : $e = \frac{C}{b}$ **A.N :** $e = \sqrt{5}$

5 (d) : $\sqrt{3}x2y + 2 = 0$ est-elle tangente en au moins un point de E ?

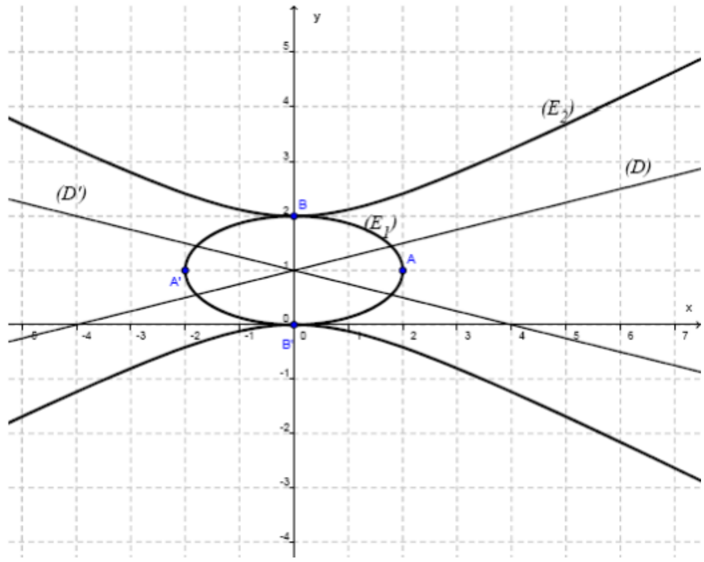
Non :En effet M(x, y) ∈ (d) ∩ E ⇒ $\left\{ \begin{array}{l} M \in (d) \cap E1 \\ M \in (d) \cap E2 \end{array} \right.$

M ∈ (d) ∩ E1 ⇒ $\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{2+\sqrt{3}x}{2} \\ \frac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1 \end{array} \right.$ on a : $M_1\left(\sqrt{2}; \frac{2+\sqrt{6}}{2}\right)$; $M_2\left(-\sqrt{2}; \frac{2-\sqrt{6}}{2}\right)$

M ∈ (d) ∩ E2 ⇒ $\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{2+\sqrt{3}x}{2} \\ -\frac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1 \end{array} \right.$ on a : $M_3\left(1; \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$; $M_4\left(-1; \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$

On constate que (d) coupe (E) en 4 points donc (E) et (d) ne sont pas tangentes.

6 Tracer de (E) dans R :



19

Corrigé 62

Questions	A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	B4	B5
Réponses	V	F	F	F	V	V	F	F	F	F

Explications :

A

(s) $= \text{Z} \in \mathbb{C}/Z^3 + 4z^2 + (8-4i)Z + 8 - 8i = 0 \quad (1)$
(E) $= \text{Z} \in \mathbb{C}?/(z+|z|)^3 \in i\mathbb{R}$
j$=$ $\text{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$

1 En résolvant (1) on obtient S = -2 ; 2i ; 2(1+i)
Par conséquent on répond aisément aux questions 1 et 2.

2

3 (d) : y $= \sqrt{3}x$. En prenant le point $\text{M}\big(1, \sqrt{3}\big)$ on constate qu'avec $\text{Z} = 1 + \text{i}\sqrt{3}$, $|z| = 2$ et $(z - |z|)^3 = 8 \notin i\mathbb{R}$
D'où le résultat FAUX.

4 $(1+j)^{310} = (1 + e^{i\frac{2\pi}{3}})^{310} = e^{i\frac{310\pi}{3}} - 1$
D'où 4-FAUX

5 On a : $(j - |j|)^3 = (-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = i24\sqrt{3} \in i\mathbb{R}$
D'où 5- VRAI

B

1 Remarquons que l'application qui transforme A en B et B en A est la rotation de centre O et d'angle -$\frac{\pi}{2}$ qui est une isométrie. D'où proposition **VRAI**

2 **FAUX** car A, B, C, S et G sont non coplanaires, G étant milieu de [DS]

3 Calculons OS sachant que AC $= \sqrt{2}(\sqrt{2}a) = 2a$ et AO = a,
OS $= \sqrt{3}2a.\text{OA.OB.sin}?\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$
D'après Pythagore AS $= \sqrt{AO^2 + OS^2} \rightarrow$ AS = a$\frac{\sqrt{7}}{2}$
D'où AS $\neq$ AC et CS non équivalent **(3-FAUX)**

4 Remarquez $\overrightarrow{AS} \perp \overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{BD} = 0$ d'où 4 est **FAUX**

5 Remarquez que (ABC) [(ACS) donc $S_{(ABC)} \circ S_{(ACS)}$ est un demi-tour d'axe (AC)= (ABC) $\cap$ (ACS) D'où **5- FAUX.**

Corrigé 63

On considère f et g deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, par
$f(x) = x - (1 + x)$; $g(x) = x + (1 - x)$.

A

1 Etude des variations de f et tableau de variation
f est définie ; continue et dérivable sur $]-1;+\infty[$ de dérivée $f'(x) = \frac{x}{1+x}$
Pour x $\in]-1;0]$, $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante.
Pour x $\in [0;+\infty[$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante.
Tableau de variation

x	-1		0		$+\infty$
$F'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$F(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2 Déduction du signe de f(x)
D'après le tableau de variation, on constate que $f(x) \geq 0 \quad \forall \quad x \in]-1;+\infty[$

3 Montrons que $\xi' = S_0(\xi)$
Notons que g est défini et continue sur $]-\infty;1[$, donc Df et Dg sont symétrique par rapport à O.
Soit $M(x, y) \in (\xi)$ et $M'(x', y')$ son image par S_0
Alors $\left\{\begin{array}{l} x' = -x \\ y' = -y \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -x' \\ y = -y' \end{array}\right.$

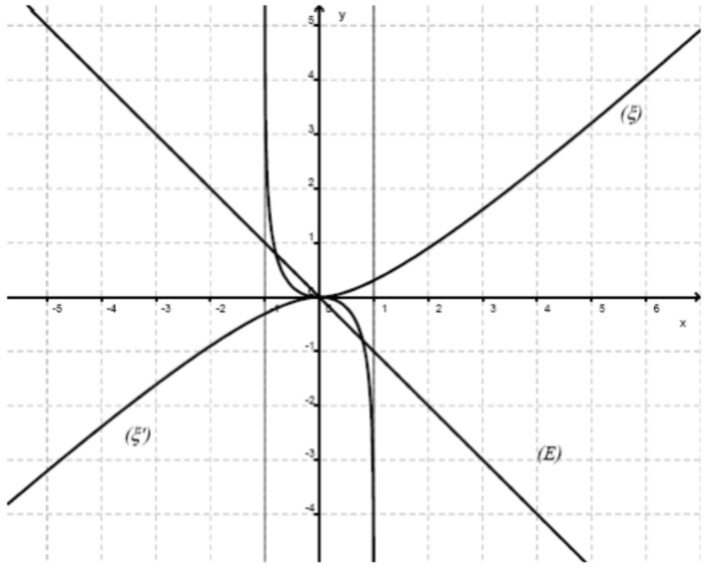
$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow -y = f(-x') \\ &\Leftrightarrow -y = -x' - \ln(1 - x') \\ &\Leftrightarrow y' = x' + \ln(1 - x') \\ &\Leftrightarrow y' = g'(x) \\ &\Leftrightarrow M' \in (\xi') \end{aligned}$$

4 Déduisons que $\forall x \in]0;1[$, $\ln?(1 + x) < x < -\ln(1 - x)$
Dans $]0\,;\,1[$, $f(x) > 0$ et $g(x) < 0$
$\left\{\begin{array}{l} x - \ln?(1 + x) > 0 \\ x + ln?(1 - x) < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \ln?(1 + x) < x \\ x < -\ln?(1 - x) \end{array}\right.$
D'où : $\ln(1 + x) < x < -\ln(1 - x)$

B

1 Soit M(a ;b) les tangentes à (ξ) en A et en B sont parallèle si et seulement si :
$f'(a) = g'(b) \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{1+a} = \frac{-b}{1-b} \quad \Rightarrow \quad a + b = 0$
Donc cet ensemble est la droite (D) : y = -x (E=D)

2 Construction de (ξ), (ξ') et E



20

3 **a.** $I = \int_0^{0,8} f(x).g(x)dx = -\int_0^{0,8} \left(\ln(1+x) + \ln(1-x)\right) dx = -\int_0^{0,8} \ln(1-x^2)dx$

Posons : $\begin{cases} u = \ln(1-x^2) \\ v' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{-2x}{1-x^2} \\ v = x \end{cases}$

$I = -\left\{ \left[x\ln(1-x^2)\right]_0^{0,8} + \int_0^{0,8} 2 + \frac{2}{x^2-1} dx \right\}$ (Par division euclidienne de $\frac{2x^2}{x^2-1}$)

Finalement, on obtient après calculs :

$I = 0,8\ln(0,36) + 1,6 + \ln\left(\frac{0,2}{1,2}\right)$

b. Valeur approché à 0,001près

I = 0,220

C

1 Montrer que $\forall n \geq 2, \quad \ln\left(5 + \frac{1}{n}\right) < U_n < \ln\left(5 + \frac{5}{n+1}\right) \qquad (1)$

Voir raisonnement Exercice 3 de 2009

2 En utilisant le théorème des gendarmes, dans l'expression de (1), on conclut que **Un converge vers ln5**

3 **oui**, Un converge vers $\ln 5$ donc

$\exists N_\xi \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > N_\xi \quad \Rightarrow \quad |U_n \ln 5| < \xi$ or $U_n < \ln\left(5 + \frac{5}{n-1}\right)$ donc

$|U_n - \ln 5| < 0,001 \quad \Rightarrow \quad |\ln\left(5 + \frac{5}{n-1}\right) - ln5| < 0,001$

Donc $n > 1 + \frac{1}{e^{-0,001}-1}$ ie $n > 1000,5$

Prendre $n_0 = 1001$

Donc pour $n_0 = 1001$, U_n à une valeur de $\ln 5$ à 10^{-3} près.

Épreuve ENS

.

42 ENS 2009

Corrigé 64

$f(x)=\ln?\left(\sqrt{1+e^{2x}-1}\right)$, (C) la courbe représentative de $f(x)$ dans un repère orthonormé.

1 Montrer que $f(x)=2x-\ln?\left(\sqrt{1+e^{2x}}+1\right)$ et $f(x)=x+\ln?\left(\sqrt{1+e^{2x}}-e^{-x}\right)$

$$\begin{aligned}
\text{On a} \quad : \quad & \ln?\left(\sqrt{1+e^{2x}}-1\right)-\left(2x-\ln?\left(\sqrt{1+e^{2x}}+1\right)\right)\\
= \quad & \ln?\left(\sqrt{1+e^{2x}}-1\right)+\ln?\left(\sqrt{1+e^{2x}}+1\right)-2x\\
= \quad & \ln(1+e^{2x}-1)-2x \quad (\text{car} \ln ab=+)\\
= \quad & 0\\
\text{D'oú} \quad & f(x)=\ln?\left(\sqrt{1+e^{2x}}+1\right)
\end{aligned}$$

Montrons que $f(x)=x+\ln?\left(\sqrt{1+e^{2x}}-e^{-x}\right)$

$$\begin{aligned}
\text{On a} \quad : \quad & f(x)=\ln?\left(\sqrt{1+e^{2x}}-1\right)\\
= \quad & \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^{-2x}}}{e^{-x}}-1\right)\\
= \quad & \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^{-2x}}-e^{-x}}{e^{-x}}\right)\\
= \quad & f(x)=x+\ln\left(\sqrt{1+e^{-2x}}-e^{-x}\right)
\end{aligned}$$

2 Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes obliques (d) et(d') sécantes en A$(\ln 2;\ln 2)$

D'apres 1) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{\ln(\sqrt{1+e^{2x}}+1)}{x}\right)=2$

et $\lim?_{x\to-\infty}f(x)-2x=-\ln 2$

D'où (d) :$y=2x-\ln 2$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $-\infty$

De même $\lim_{x\to+\infty}?\frac{f(x)}{x}=1$ et $\lim f(x)-x=o$

D'où (d') :y = x est asymptote oblique en $+\infty$ à $\mathcal{C}$

Par ailleurs $M(x;y) \in (d)\cap(d') \Rightarrow 2x-\ln 2=x \Rightarrow x=\ln 2$

D'oú (d) $\cap$ (d') = A avec $A(\ln 2;\ln 2)$

3 Dresser le tableau de variation de f

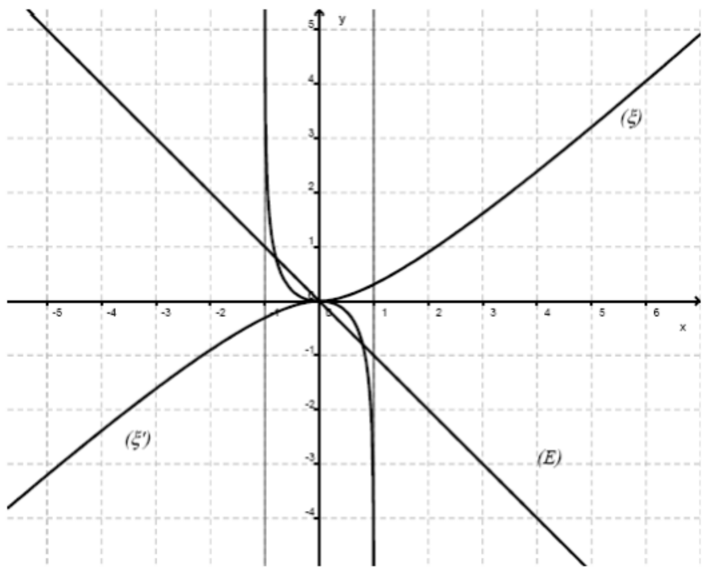
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}-\sqrt{1+e^{2x}}}$ ou encore $f'(x)=\frac{1+e^{2x}+\sqrt{1+e^{2x}}}{1+e^{2x}}$

$\forall \quad x\in\mathbb{R},\quad f'(x)>0, quad$ Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$f(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{\ln 3}{2}$ et $f(0)=\ln(\sqrt{2}-1)$

x	$-\infty$	$\ln\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

4 Construction de $\mathcal{C}$



21

5 Démontrer que $f(x)$ est une bijection et exprimer $f^{-1}(x)$ en fonction de (x).
f est continu et strictement croissante sur R donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
posons :

$$\begin{aligned}
y = f(x) &\Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{1+e^{2x}} - 1\right) \\
&\Leftrightarrow (e^y+1)^2 = 1 + e^{2x} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left((e^y+1)^2 - 1\right) \\
\text{D'oú} \quad & f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left((e^y+1)^2 - 1\right)
\end{aligned}$$

Corrigé 65

A

1 Types d'isométries planes
Rotations, symétries et translations.

2 Déterminons $f(0)$ en justifiant.
$f(0) = 0$ car si $f(0) \neq 0$, alors f ne laisse [AB] invariant.
A partir des valeurs possibles de A par un élément de E.

3 Montrer que E contient exactement deux déplacements à préciser
On a $f(A) = A$ ou $f(A) = B$

- Si $f(A) = A$ les isométries possibles sont : S_{AB} et id_p.
- si $f(A) = B$ les isométries possibles sont :S_o et S_{Delta} où $D =$ Med [AB]

$S_{(AB)}$ et S_Δ sont deux antidéplacements de E.
S_o et S_Δ sont deux déplacements de E.

4 **Conclusion :** $E = \{id_p; S_o; S_{(AB)}; S_\Delta$ où D = Med [AB] }

B

On considère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct. A(-1,1,1),B(3 ,1, 1) ,C(1,1, 1+2$\sqrt{3}$).

1 Déterminer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et mes$\widehat{AOB}$

On a $\overrightarrow{AB}(4, 0, 0,)$; $\overrightarrow{AC}(2, 0, 2\sqrt{3})$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 8$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 4 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \left(0; -8\sqrt{2}; 0\right)$$

Comme $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = c\cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ on a :

$||\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}|| = ||\overrightarrow{OA}||.||\overrightarrow{OB}||.\sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ or $||\overrightarrow{OA}|| = \sqrt{3}$ et $||\overrightarrow{OB}|| = \sqrt{11}$

$||\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}|| = 4\sqrt{2}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -1$

Donc $\cos ??\widehat{AOB} = -\frac{1}{\sqrt{33}}$ et $\sin ??\widehat{AOB} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{33}}$

2 Trouver le point D tel que ABCD soit tétraèdre régulier et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$ direct.

$$\begin{aligned} \text{ABCD régulier} &\Leftrightarrow \text{les faces sont les triangles équilatéraux} \\ &\Leftrightarrow AB = AC = BC = AD = BD = CD = 4 \quad (*) \end{aligned}$$

Supposons D (x ; y ;z)

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 16 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1-2\sqrt{3})^2 = 16 \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 16 \end{cases}$$

Apres calcul on obtient : $x = 1$; $z = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ et $y = 1 + 4\sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $y = 1 - 4\sqrt{\frac{2}{3}}$.

La seule valeur de y pour laquelle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$ soit direct est : $y = 1 + 4\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\text{D'où : } D\left(1; 1 + 4\sqrt{\frac{2}{3}}; \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}\right).$$

3
- $E_1 = \{M \ / \ AM = 2BM\}$

$$\begin{aligned} M \in E_1 &\Rightarrow AM^2 = 4BM^2 \qquad M(x; y; z;) \\ &\Rightarrow (x - 13/3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 64 \qquad \text{(après calcul)} \end{aligned}$$

$$\text{D'oú} \quad E_1 = \varepsilon(\Omega \begin{pmatrix} 13/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; 8)$$

ε : Sphère de centre$\Omega(13/3; 1; 1)$et de rayon r= 8

-

$$\begin{aligned} M \in E_1 &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{CM} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} \wedge C\overrightarrow{BM} - 2\overrightarrow{CM} = \vec{0} \end{aligned}$$

Posons I = bar $\left\{ \begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 1 & -2 \end{array} \right\}$

$M \in E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{IM} = \vec{0}$ d'oú $E_2 = (AI)$

Corrigé 66

$$U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1 Sens de variation de (U_n)

$$\begin{aligned} U_{n+1}-U_n &= \sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{n+p}-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{n+p} \\ &= \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{n+p}+\frac{1}{2n+1}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{n+p} \\ &= \frac{1}{2n+1}>0 \end{aligned}$$

D'où (U_n) est croissante.

2 Montrer que (U_n) est majorée par 1 et conclure
(Un) est évidement majorée par 1 ,ainsi (Un) est croissante et majorée donc convergente.

3 Montrer que $\forall n \geq 1; \quad \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1}\frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} \text{Soit t} \in [n;n+1] \quad \text{alors} \quad & n \leq t \leq n+1 \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n} \\ \Rightarrow \quad & \int_n^{n+1}\frac{1}{n+1}dt \leq \int_n^{n+1}\frac{1}{t}dt \leq \int_n^{n+1}\frac{1}{n}dt \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1}\frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{n} \qquad (1) \end{aligned}$$

4 Déduire que $\forall n \geq 1, \quad U_n \leq \ln 2 \leq U_n + \frac{1}{2n}$

$$\begin{aligned} (1) \quad \Rightarrow \quad & \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{n+p} \leq \int_n^{n+1}\frac{1}{t}dt \leq \sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n} \\ \Rightarrow \quad & U_n \leq \int_n^{2n}\frac{1}{t}dt \leq \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{n+p}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{n} \\ \Rightarrow \quad & U_n \leq \int_n^{2n}\frac{1}{t}dt \leq U_n+\frac{1}{2n} \\ \text{Or} \quad & \int_n^{2n}\frac{1}{t}dt = [\ln t]_n^{2n} = \ln(2n)-\ln(n) = \ln 2 \\ \text{D'oú} \quad & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n \leq \ln 2 \leq U_n+\frac{1}{2n} \qquad (2) \end{aligned}$$

5 Montrer que U_n converge vers ln?2

$(2) \quad \Rightarrow \begin{cases} U_n \leq \ln 2 \\ U_n \geq \ln 2 - \frac{1}{2n} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \ln 2 - \frac{1}{2n} \leq U_n \leq \ln 2$

D'apres le theoreme de gendarme $\quad \lim_{n\to+\infty} U_n = \ln 2$

Corrigé 67

1 Résoudre dans $\mathbb{C} \quad z^4 - 12iz^2 - 100 = 0 \qquad (1)$
pose $\quad Z = z^2$

$$\begin{aligned} (1) \quad \Leftrightarrow \quad & Z^2 - 12iZ - 100 = 0 \qquad \Delta = 544 \\ \Leftrightarrow \quad & Z = 6i + 2\sqrt{34} \quad \text{ou} \quad Z = 6i - 2\sqrt{34} \\ & \text{Apres calcul on obtient :} \\ & S = \left\{ \pm\left(\sqrt{86+\sqrt{34}}+i\sqrt{86-\sqrt{34}}\right); \pm\left(\sqrt{86-\sqrt{34}}+i\sqrt{86+\sqrt{34}}\right) \right\} \end{aligned}$$

2 Etant donne $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et (E) : $\quad Z^2 - 2Z\tan\alpha + 2\tan^2\alpha + 1 = 0$

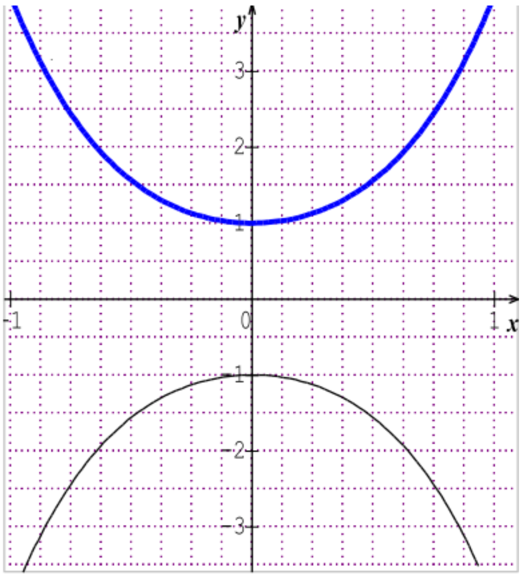
a. Résoudre (E)
$\Delta = -4(\tan^2\alpha + 1) = \left(\frac{2i}{\cos\alpha}\right)^2$ et apres calcul on obtient

$$S = \left\{\frac{i+\sin\alpha}{\cos\alpha}; \frac{-i+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right\}$$

b. $ZM\alpha = \frac{i+\sin\alpha}{\cos\alpha}$; Montrer que M $\alpha \in (\Gamma)$ où $(\Gamma) : -x^2+y^2 = 1$.
On a : $-\tan^2\alpha + 1 + \tan^2\alpha = 1$. D'où M $\alpha \in (\Gamma)$

c. Nature, un foyer et l'excentricité de (Γ)
$a = b = 1$ et $c = \sqrt{2}$;
(Γ) est une hyperbole equilatere d'excentricite e $= \sqrt{2}$ Foyer :F$\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

d. Construire (Γ) pour $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$
Asymptotes : $(D) : y = x$ et $(D') : y = -x$
sommets : $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et$A'\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$



22

Corrigé 68

1 Calcul à l'aide deux integration par partie
$I = \int_1^e (\ln x)^2 dx$ pose $\begin{cases} u = (\ln x)^2 \\ v' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{2\ln x}{x} \\ v = x \end{cases}$
en suite pose $\begin{cases} u = \ln x \\ v' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = x \end{cases}$
Nous obtenons $I = \left[x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x\right]_1^e$ D'où $I = e + 2$

$$j = \int_0^e e^{-x}\sin x dx$$

pose d'abord $\begin{cases} u = e^{-x} \\ v' = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = -e^{-x} \\ v = -\cos x \end{cases}$

en suite pose $\begin{cases} u' = e^{-x} \\ v = \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = -e^{-x} \\ v = -\sin x \end{cases}$

Nous obtenons donc $j = \left[-e^{-x}(\cos e + \sin e)\right]_0^e - j$

$$\Rightarrow \quad j = -\frac{1}{2}e^{-e}(\cos e + \sin e) \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

Pose $\left\{\begin{array}{l} u' = x^2 \\ v' = e^{-x}x \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} u = 2x \\ v' = -e^{-x} \end{array}\right.$

Pose ensuite $\left\{\begin{array}{l} u = x \\ v' = e^{-x}x \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} u' = 1 \\ v = -e^{-x} \end{array}\right.$

Nous obtenons $K = \left[-e^{-x}(x^2 + 2x + 2)\right]_0^1 \quad K = 2 - 5e^{-1}$

2 $A_n = \frac{2n+76}{n+1}$ avec $n \neq -1$

a. Vérification évidente
$A_n = 2 + \frac{74}{n+1}$ Diviseurs de 74 ;
$\mathcal{D}(74) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 37; \pm 74\}$

b. Déduire les valeurs de l'entier n pour les quelles A$_n$ est aussi entiers.
A_n entier $\Leftrightarrow$ $n + 1$ divise 74
$(n+1) \in \mathcal{D}(74) \quad \Leftrightarrow \quad n \in \{0; 1; 36; 73; -2; -3; -38; -75\}$

Épreuve ENS

.

43 ENS 2010

Corrigé 69

Confere Yaounde session de 2008

Corrigé 70

Confere Yaounde session de 2008

Corrigé 71

1 Soit dans l'ensemble des nombres complexes, l'equation $(E) : Z^3 + 4Z^2 + (8-4)Z + 8 - 8i = 0$

a. L'equation (E) admet une solution imaginaire pure qui est $Z_0 = 2i$.Pour avoir cela, on suppose que (E) admet une solution imaginaire pure et on ecrit cette solution sous la forme ai ou a est un nombre réel. Ensuite, on remplace dans (E) Z par ai et on obtient :
$(ai)^3 + a(ai)^2 + (8-4i)ai + 8 - 8i = 0 \Leftrightarrow (-4a^2 + 4a + 8) + i(-a^3 + 8a - 8) = 0$
Ce qui donne le systeme $\begin{cases} -4a^2 + 4a + 8 = 0 \\ -a^3 + 8a - 8 = 0 \end{cases}$
qui a pour unique solution $a = 2$

b. On peut alors ecrire (E) : $(Z-2i)(Z^2 + bZ + c) = 0$
avec $b = 4 + 2i$ et $c = 4 + 4i$ que l'on obtient soit par identification, soit par division euclidienne. Enfin, l'equation $Z^2 + (4+2i)Z + (4+4i) = 0$ a pour solution $Z_2 = -2$ et $Z_3 = -2 - 2i$. Les solutions de (E) sont alors :

$$Z_1 = 2i \quad Z_2 = -2 \quad Z_3 = -2 - 2i$$

c. On a facilement :

$$Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad Z_2 = 2e^{i\pi}, \quad Z_3 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

2 Ecrivons Z sous la forme polaire $Z = re^{i\theta}$, alors on a :

$$Z - |Z| = re^{i\theta} - r = r\left(e^{i\theta} - 1\right) = re^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2ir\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

On en deduit que :

$$(Z - |Z|)^3 = \lambda i e^{\frac{3\theta}{2}} \quad \text{avec} \quad \lambda = 8r^3\sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \in \quad \mathbb{R}$$

Ainsi, $(Z - |Z|)^3$ est un imaginaire pur si $\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \in \mathbb{R}$ donc si $\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) = 0$, alors $\theta = \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0; 1; 2$. On a alors

$$S = \{Z = r, r > 0\} \cup \left\{Z = r(-1 + i\sqrt{3}), r > 0\right\} \cup \left\{Z = r(-1 - i\sqrt{3}), r > 0\right\}$$

On obtient la representation suivante :

3 On commence par remarquer que $1 + j + j^2 = 0$ donc $1 + j = -j^2$. D'ou
$(1+j)^n = (-j^2)^n = (-1)^n\left(\cos\frac{4\pi n}{3} + i\sin\frac{4\pi n}{3}\right)$.
On en deduit alors les valeurs recherchees pour $n = 3k$, $n = 3k+1$ et $n = 3k+2$, $k \in \mathbb{N}$.

.

44 ENS 2011 (Géométrie)

Corrigé 72

J = bar{(B,1),(C,4)} G = bar{(A,1),(B,1),(C,1)} $\{K\} = (GJ) \cap$ (AB)

1 Construction évidente.

2 **a.**

$$\begin{aligned}\{K\} = (GJ)\cap (AB) &\Rightarrow K \in (Gj)\\ &\Rightarrow K, G \quad \text{et} \quad J \quad \text{sont alignés}\\ &\Rightarrow \overrightarrow{JK} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{JG} \quad \text{sont colinéaires,}\\ &\Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} / \overrightarrow{JK} = y\overrightarrow{JG}\end{aligned}$$

b. Exprimons $\overrightarrow{JG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JG} &= \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AG} \quad \text{or} \quad \overrightarrow{JG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{ainsi :}\\ \overrightarrow{JG} &= \overrightarrow{JA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\ &= -\frac{4}{5}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{15}\overrightarrow{AB} - \frac{7}{15}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Exprimons $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} + y\overrightarrow{JG} = \left(\frac{3+2y}{15}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{12-7y}{15}\right)\overrightarrow{AC}$$

c. Déduisons la valeur de x :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{AB} &\Rightarrow \left(\frac{3+2y}{15}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{12-7y}{15}\right)\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB}\\ &\Rightarrow \left(\frac{3+2y}{15} - x\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{12-7y}{15}\right)\overrightarrow{AC} = \vec{0}\\ &\Rightarrow \begin{cases}\frac{3+2y}{15} - x = 0\\ \frac{12-7y}{15} = 0\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Car}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\text{est libre.} \quad \text{D'où} \quad & y = \frac{12}{7} \quad \text{et} \quad x = \frac{3}{7}\\ \textit{Donc} \quad & \overrightarrow{JK} = \frac{12}{7}\overrightarrow{JG} \quad \Rightarrow \quad 7\overrightarrow{JK} = 12\overrightarrow{JG}\\ \Rightarrow \quad & 5\overrightarrow{GJ} + 7\overrightarrow{GK} = \vec{0}\\ \text{d'où} \quad & \text{G} = \text{bar}\{(J,5),(K,7)\}\end{aligned}$$

Corrigé 73

1 Périmètre et volume de ABCD

- Périmètre

$$\begin{aligned} P &= AB+BC+CA+AD+DC+DB \\ &= AB+\sqrt{AB^2+AB^2}+AB+AD+DC+DB \\ &= 2AB+AB\sqrt{2}+\sqrt{AC^2+CD^2}+DC+\sqrt{BC^2+DC^2} \\ &= 2AB+AB\sqrt{2}+\sqrt{AB^2+CD^2}+DC+\sqrt{2AB^2}+DC^2 \\ & \text{on trouve donc} \\ & P = 4+2\sqrt{2}+\sqrt{3} \quad \text{unité de longueur} \end{aligned}$$

- Volume de ABCD
  $V_{ABCD} = \frac{1}{3}\mathcal{A}(ABC)\times DC$ or $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\times AB\times AC = \frac{AB^2}{2}$
  $V_{ABCD} = \frac{1}{3}\times\frac{AB^2}{2}\times DC = \frac{\sqrt{2}}{6}$ unité de volume

2 $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}).\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\times\cos\widehat{ACB} = 1$
$\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}$ est un vecteur normal du plan (ABC) et est tel que
$\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{DC}$(car il est colinéaire à $\overrightarrow{DC}$)

$$\begin{aligned} ||\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}|| = ||\lambda\overrightarrow{DC}|| \quad &\Rightarrow \quad BA\times BC\times\sin(\widehat{ABC}) = ||||\overrightarrow{DC}|| \\ &\Rightarrow \quad 1\times 1\times\sqrt{2}\times\sin 45^0 = |\lambda|\sqrt{2} \Rightarrow |\lambda| = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

En tenant compte de lŠorientation, $\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont même sens donc :

$$\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{DC} \qquad (\lambda > 0)$$

Corrigé 74

1 **a.** Déterminons g(M) pour tout M $\in$ P
Soit $M\in P$. Par définition $g(M)$ est le milieu de $[M; f(M)]$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Mg(M)} = \overrightarrow{g(M)f(M)} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{Mg(M)} = \overrightarrow{g(M)I}+\overrightarrow{If(M)} \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{Mg(M)} = \overrightarrow{g(M)I}+\overrightarrow{IM} \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{Mg(M)}+\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{g(M)I} \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{g(M)I} = \overrightarrow{Ig(M)} \\ &\Leftrightarrow \quad 2\overrightarrow{Ig(M)} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \quad g(M) = I \\ \text{Ainsi} \quad & g: \begin{array}{l} P \longrightarrow P \\ M \longmapsto I \end{array} \end{aligned}$$

b. **Non :** en effet considérons la similitude f d'écriture complexe $Z' = -Z+1$
l'écriture complexe de g sera : $Z = \frac{Z+Z'}{2} = \frac{Z-Z+1}{2} = \frac{1}{2}$ qui n'est pas une similitude.

2 **a.** Déterminons la forme complexe de g.
Notons z l'affixe de g(M) pour tout $M(Z)\in P$. On a :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{z+z'}{2} \qquad \text{car g(M) est le milieu de [M ;f(M)]} \\ &= \frac{z+az+b}{2} \\ &= \left(\frac{a+1}{2}\right)z+\frac{b}{2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

b. Supposons que g est une isométrie,
Montrons que f est une translation.

$$\begin{aligned} \text{g isométrie} \quad &\Rightarrow \quad \left|\frac{a+1}{2}\right| = 1 \\ &\Rightarrow \quad |a+1| = 2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Posons a = x + iy

$$\begin{array}{rcl} |a+1| = 2 & \Rightarrow & |x+iy+1| = 2 \\ & \Rightarrow & (x+1)^2 + y^2 = 4 \\ & \Rightarrow & x^2+y^2+2x = 3 \\ \text{Mais f isométrie} & \Rightarrow & |a| = 1 \\ & \Rightarrow & x^2+y^2 = 1 \\ \text{Ainsi} x^2+y^2+2x = 3 & \Rightarrow & 1+2x = 3 \\ & \Rightarrow & 2x = 2 \\ & \Rightarrow & x = 1 \\ & \text{D'ou} & (1+1)^2+y^2 = 4 \quad \text{ie} \quad y = 0 \\ & \text{on a} & a = 1 \quad \text{donc f est une translation.} \end{array}$$

c. Supposons maintenant que f est une translation.
Montrons que g est une isométrie.

$$\begin{array}{rcl} \text{f translation} & \Rightarrow & a = 1 \\ & \Rightarrow & Z = \dfrac{(1+1)}{2}z + \dfrac{b}{2} \\ & \Rightarrow & Z = z + \dfrac{b}{2} \\ & \Rightarrow & \text{gest une isométrie} \end{array}$$

3 On suppose que f est une application affine.
Montrons que g est aussi une application affine.
Il suffit de montrer que g conserve le barycentre de deux points.
Soit G = bar$\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ $\quad \alpha+\beta \neq 0$
Par définition de G, $\quad g(A) = bar\{(A;1);(f(A);1)\}$ $\quad$ et $\quad g(B) = bar\{(B;1);(f(B);1)\}$
Par ailleurs, f étant affine, $g(G) = bar\{(G;1);(f(G);1)\}$

$$\begin{array}{rcl} g(G) & = & bar\{(G;1);(f(G);1)\} \quad \text{par définition de g} \\ & = & bar\{(G;\alpha+\beta)(f(G);\alpha+\beta)\} \\ & = & bar\{(A;\alpha);(B;\beta)(f(A);\alpha);(f(B);\beta)\} \\ & = & bar(g(A);2\alpha);(g(B);2\beta) \\ & & \text{Donc g est une application affine.} \end{array}$$

4 f : z' = iz -4

- Nature et élément caractéristiques de f.
  On a : $\quad a = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\quad$ donc f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω d'affixe ω tel que :
  $\omega = i\omega - 4 \quad \Rightarrow \quad \omega(1-i) = -4 \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{-4}{1-i} = \frac{-4(1+i)}{2} = -2-2i$
- Nature et éléments caractéristique de g
  LŠécriture complexe de g est : $\quad z = \frac{i+1}{2}z - 2$
  On a : $\quad \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$
  Donc g est une similitude de rapport $\quad k = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\quad$ d'angle $\quad \frac{\pi}{4}$ $\quad$ et de centre c d'affixe γ tel que :

$$\gamma = \frac{1+i}{2}\gamma - 2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = -2-2i$$

5 **a.** Exprimons $\overrightarrow{f(M)g(M)}$ $\quad$ en fonction de $\quad \overrightarrow{f(M)M}$
g(M) étant le milieu de [M ;f(M)] alors $\quad \overrightarrow{f(M)g(M)} = \frac{1}{2}\overrightarrow{f(M)M}$

b. Nature et éléments caractéristiques de g.
f(M) est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et on a :
$\overrightarrow{f(M)g(M)} = \frac{1}{2}\overrightarrow{f(M)M}$ $\quad$ Donc g est l'affinité orthogonale de rapport $\frac{1}{2}$ et d'axe l'axe des abscisses.

$$\text{on a :} \quad Z - z' = \frac{i+1}{2}z - 2 - (iz-4) = \left(\frac{i+1}{2} - i\right)z^2 + 4$$

Corrigé 75

45 ENS 2011 (Algèbre)

Corrigé 76

$m \in \mathbb{R}$ $D(f_m) = [0; +\infty[$ $f_m(x) = \ln(\frac{mx-1}{m-x})$.

1 Intersection :

$$\begin{aligned} y = \ln(\tfrac{mx-1}{m-x}) &\Rightarrow \tfrac{mx-1}{m-x} = e^y \\ &\Rightarrow mx - 1 = me^y - xe^y \\ &\Rightarrow mx - me^y = 1 - xe^y \\ &\Rightarrow m(x - e^y) + xe^y - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x - e^y &= 0 \\ xe^y - 1 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= e^y \\ e^y e^y - 1 &= 0 \end{cases} \Rightarrow e^2 y = 1$$

$x = 1$ et $y = 0$ donc toutes les courbes (C_m) passent par le point $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2 $D_m = \{x \in [0; +\infty[, x \neq m$ et $\frac{mx-1}{m-x} > 0$

Si $m = 0$ alors $f_0(x) = \ln \frac{1}{x}$ ainsi, $D_0 = \left\{x \in [0; +\infty[, x \neq 0 \text{ et } \frac{1}{x} > 0\right\}$

donc $D_0 =]0; +\infty[$

Si $m \neq 0$

- Si $m \in [-1; 0[$

  Etudions le signe de $\frac{mx-1}{m-x}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{m}$		m		$+\infty$
$mx - 1$		$+$	0	$-$		$-$	
$m - x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{mx-1}{m-x}$		$+$	0	$-$		$+$	

  $D_m = \left(]-\infty; \frac{1}{m}[\cup]m; +\infty[\right) \cap [0; +\infty[$ donc $D_m = [0; +\infty[$.

- Si $m \in]-\infty; -1[$

x	$-\infty$		m		$\frac{1}{m}$		$+\infty$
$mx - 1$		$+$		$+$	0	$-$	
$m - x$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{mx-1}{m-x}$		$+$		$-$	0	$+$	

  $D_m = [0; +\infty[$

- Si $m \in]0; 1]$

x	$-\infty$		m		$\frac{1}{m}$		$+\infty$
$mx - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$m - x$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{mx-1}{m-x}$		$-$		$+$	0	$-$	

  $D_m =]m; \frac{1}{m}[$

- si $m \in]1; +\infty[$

x	$-\infty$		$\frac{1}{m}$		m		$+\infty$
$mx-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$m-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{mx-1}{m-x}$		$-$	0	$+$		$-$	

$D_m = \left]\frac{1}{m}; m\right[$

3 On suppose $m \neq 0$

a. Montrons que $\forall x \in D_m\ f_m(x) = -f_{\frac{1}{m}}(x)$
Soit $x \in D_m$

$$\begin{aligned} f_m(x) &= \ln\left(\frac{mx-1}{m-x}\right) \\ f_{\frac{1}{m}} &= \ln\left(\frac{\frac{x}{m}-1}{\frac{1}{m}-x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\frac{x-m}{m}}{\frac{1-mx}{m}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{x-m}{1-mx}\right) \\ &= \ln\left(\frac{m-x}{mx-1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{\frac{mx-1}{m-x}}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{mx-1}{m-x}\right) = -f_m(x) \end{aligned}$$

donc $\forall x \in D_m\ f_m(x) = -f_{\frac{1}{m}}(x)$

b. Comme $\forall x \in D_m\ f_m(x) = -f_{\frac{1}{m}}(x)$ alors, $(C_{\frac{1}{m}})$ se déduira de (C_m) symétriquement par rapport à (OI).

4 $f = f_2 et g = f_{-10}$ $\begin{cases} f(x) &= \ln\left(\frac{2x-1}{2-x}\right) \\ g(x) &= \ln\left(\frac{10x+1}{x+10}\right) \end{cases}$

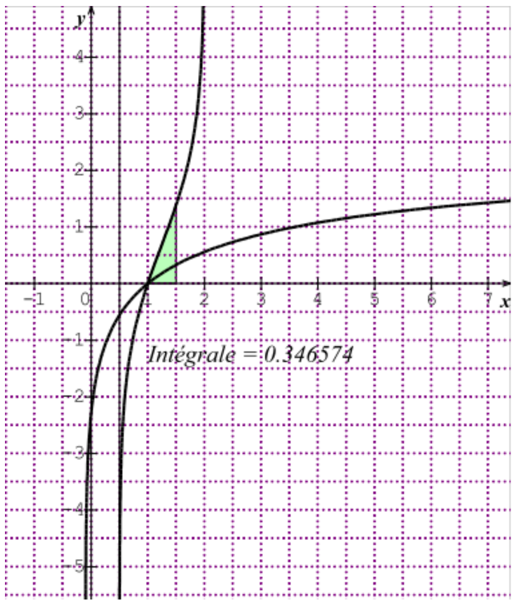
a. D'après ce qui précède, $D_f = \left]\frac{1}{2}; 2\right[$ et $D_g = [0; +\infty[$
$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{2x-1}{2-x}\right) = -\infty$
$\lim_{x\to 2} g(x) = +\infty$
f est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}; 2\right.$ comme composée de fonctions dérivables sur $\left]\frac{1}{2}; 2\right[$ et on a :
$f'(x) = \frac{3}{(2-x)(2x-1)}$ donc $\forall x \in \left]\frac{1}{2}; 2\right[\ f'(x) > 0$.
Tableau de variations de f

x	$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$g(x) = \ln\left(\frac{10x+1}{x+10}\right)$
$g(0) = -\ln 10$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ln 10$
$g'(x) = \frac{99}{(x+10)(10x+1)}$
Ainsi $\forall x \in]0; +\infty[\ g'(x) > 0$
Tableau de variations de g

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\ln 10$	$\nearrow$	$+\ln 10$

Représentation graphique :



23

b. Calcul de l'aire :
$A = 4\int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx = 4\int_1^{\frac{3}{2}}(\ln(2x-1) - \ln(2-x))dx$
$A = 4\int_1^{\frac{3}{2}} \ln(2x-1)dx - 4\int_1^{\frac{3}{2}} \ln(2-x)dx$
On trouve alors, $A = 2\ln 2cm^2$.

c. $f(x) = \ln(\frac{2x-1}{2-x})$
i.e. $y = \ln(\frac{2x-1}{2-x}) \Rightarrow e^y = \frac{2x-1}{2-x} \Rightarrow (2-x)e^y = 2x-1 \Rightarrow x = \frac{2e^y+1}{e^y+2}$
f est donc surjective.
Injectivité : soient $,x' \in D_2 f(x) = f(x')$.
$f(x) = f(x') \Rightarrow \ln(\frac{2x-1}{2-x}) = \ln(\frac{2x'-1}{2-x'}) \Rightarrow \frac{2x-1}{2-x} = \frac{2x'-1}{2-x'}$
(car la fonction ln est injective)
D'où, $x = x'$ (car toute fonction homographique est injective).
f est donc bijective et on a : $f^{-1}(x) = \frac{2e^x+1}{e^x+2} D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

5 $h(x) = min(f(x), g(x))$

a. domaine de h. $D_h =]\frac{1}{2}; +\infty[$.

b. La courbe de h est la réunion de la courbe de f située en dessous de l'axe des abscisses avec celle de g situé au dessus de l'axe des abscisses.

Corrigé 77

$\forall n \geq 1$ on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x + (-1)^{n-1}(\sin x)^n \cos x}{1+\sin x}\right) dx$

1 $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}})(\frac{\cos x}{1+\sin x})dx$
$L = \ln 2$.

2 Montrons que $u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin x)^n \cos x dx$

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{(-1)^n(\sin x)^{n+1}\cos x}{1+\sin x} - \frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{(-1)^n(\sin x)^n \cos x}{1+\sin x}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^n(\sin x)^n \cos x}{1+\sin x}(\sin x + 1)dx$$

donc $u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin x)^n \cos x dx$ CQFD.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(-\sin x)^n dx \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x(-\sin x)^n dx \\ &= -\frac{1}{n+1}(-1)^{n+1} = \frac{1}{n+1}(-1)^{n+2} \end{aligned}$$

d'où $u_{n+1} - u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

3 Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^* u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

- Pour $n = 1, u_1 = \frac{(-1)^{1-1}}{1} = 1$. Ce qui est vrai.
- Supposons cette égalité vraie jusqu'au rang n, i.e. $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ or d'après ce qui précède $u_{n+1} - u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

  Donc $u_{n+1} = u_n + \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1}$ cette égalité reste donc vraie au rang $n+1$.

  Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^* u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

4
$$\begin{aligned} |u_n - \ln 2| &= \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{(-1)^{n-1}(\sin x)^n \cos x}{1+\sin x}\right) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right) dx\right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{(\sin x)^n \cos x}{1+\sin x}\right| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^n \cos x}{1+\sin x} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \cos x dx \end{aligned}$$

(car $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 1 + \sin x \geq 1$)

Donc $|u_n - \ln 2| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \cos x dx$ CQFD !

5 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \cos x dx = \frac{1}{n+1}$ ainsi, $-\frac{1}{n+1} \leq u_n - \ln 2 \leq \frac{1}{n+1}$

i.e. $\ln 2 - \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \ln 2 + \frac{1}{n+1}$

en passant à la limite, on obtient $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$ d'où (u_n) est une suite convergente.

6 Montrons que (a_n) est géométrique :

$a_n = 2(n+1)(u_{n+1} - u_n) = 2(n+1) \times \frac{(-1)^n}{n+1} \Rightarrow a_n = (-1)^n \times 2$

(a_n) est donc une suite géométrique de premier terme $a_0 = 2$ et de raison, $q = -1$.

D'autre part, $b_n = (-1)^n \times \frac{(n+1)}{(-1)^n} = n + 1$ et $b_0 = \frac{1}{u_1 - u_0} = 1/1 = 1$

Donc (b_n) est une suite arithmétique de premier terme $b_0 = 1$ et de raison, $r = 1$.

Corrigé 78

1 Montrons que 2011 est premier :

On a : $\sqrt{2011} = 44,84$

Enumérons tous les nombres premiers plus petits que $\sqrt{2011}$; ils sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43.

Après vérification, on se rend compte qu'aucun de ces nombres ne divise 2011. Ce que nous permet de conclure que 2011 est un nombre premier.

2 Déterminons le plus petit nombre premier plus grand que 2011.

On vérifie aisément que 2012, 2013, 2014, 2015 et 2016 ne sont pas premiers.

3 Montrons que 2017 est un nombre premier :

$\sqrt{2017} = 44,91$

Après vérification, on voit qu'aucun des nombres premiers plus petits que $\sqrt{2017}$ ne divise 2017.

Conclusion : 2017 est le plus petit nombre premier plus grand que 2011.

4 On pose $Z = \left(\frac{3-2\sqrt{3}+(2+3\sqrt{3})i)}{12+8i}\right)^{2011}$

a. On veut écrire $Z = \left(\frac{3-2\sqrt{3}+(2+3\sqrt{3})i)}{12+8i}\right)^{2011}$ sous forme algébrique :

On a, $z = \frac{(3-2i)(3-2\sqrt{3}+2i+3i\sqrt{3})}{4(3+2i)(3-2i)} = \frac{13+13i\sqrt{3}}{4\times 13} = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$

Donc $z = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$.

b. De ce qui précède, $|z| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{1}{2}$.

$z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

ainsi, $Z \quad = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2011} = \frac{1}{2^{2011}}e^{i2011\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2^{2011}}\left(\cos(\frac{2010\pi}{3}+\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{2010\pi}{3}+\frac{\pi}{3})\right)$
$= \frac{1}{2^{2011}}\left(\cos(670\pi+\frac{\pi}{3}) + i\sin(670\pi+\frac{\pi}{3})\right)$

En utilisant les formules d'addition, on obtient : $Z = \frac{1}{2^{2011}}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Donc $Re(Z) = \frac{1}{2^{2012}}$ et $Im(Z) = \frac{\sqrt{3}}{2^{2012}}$.

Corrigé 79

1 Etant donné une famille de cette population, la probabilité p_1 qu'elle ait une voiture est 0.55 ; la probabilité p_2 qu'elle ait un téléviseur est 0.8 ; la probabilité p_3 qu'elle n'ait ni voiture ni téléviseur est 0.15

a. Soit p la probabilité que cette famille ait une voiture et un téléviseur ;
alors, $p_3 + (p_1 - p) + p + (p_2 - p) = 1 \Longrightarrow p_3 + p_2 + p_1 - p = 1 \Longrightarrow p = 0.5$

b. Considérons les événements :
A « la famille a un téléviseur »
B « la famille a une voiture »
Alors, $p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{0.5}{0.55}$
$p(A/B) = 0.9090.$

2 $p' = p + 0.1$ déterminons p.

On sait que $p_1 - p - 0.05 + p + 0.1 + p_2 - p - 0.05 + p_3 = 1$

$p = p_1 - 0.05 + 0.1 + p_2 - 0.05 + p_3 - 1 = p_1 + p_2 + p_3 - 1 = 0.5$

Donc $p' = 0.5 + 0.1 = 0.6$

$p'(A/B) = \frac{p'}{p_1+0.05} = \frac{0.6}{0.55+0.05} = 1$

Autre méthode : On pouvait aussi remarquer que dans cette question, la probabilité d'avoir une voiture sans avoir de téléviseur est nulle ; autrement dit, toute famille ayant une voiture a aussi un téléviseur. Par conséquent l'événement « avoir un téléviseur sachant qu'elle a une voiture » devient certain.

Épreuve ENS

.

46 ENS 2012 (Algèbre)

Corrigé 80

1 **a.** Déterminons U_{5000} et U_{4024}. Il est clair que : $U_{5000} = 2989$ et $U_{4024} = 4025$.

b. Montrons que si $2014 \leq n \leq 4025$, alors $U_n = U_{n+1}$.
$2014 \leq n \leq 4025$, équivaut à $4026 \leq n + 2012 \leq 6037$ ce qui implique
$U_n = U_n + 2012 = n + 2012 - 2011 = n + 1$.
Par ailleurs, $2014 \leq n \leq 4025$ équivaut à $2015 \leq n + 1 \leq 4026$
$2014 \leq n \leq 4025$ ou $n + 1 = 4026$
$4027 \leq n + 1 + 2012 \leq 6037$ *ou* $n + 1 = 4026$
$U_{n+1} = U_{n+1+2012} = (n + 1) + 1$.
D'où : si $2014 \leq n \leq 4025$, alors $U_n = U_{n+1}$

c. Déterminons U_0.
Ii est clair que $U_0 = 4025$

2 **a.** Démontrons que V_n est positive pour tout n.
Par définition de V_n, on a $V_n = V_{n+1-1} = |V_{n-1}|.|V_1| \geq 0$. D'où pour tout n, V_n est positive.

b. Déduisons-en que (V_n) est une suite géométrique.
$\forall n \in \mathbb{N} \quad V_{n+1} = |V_n|.|V_1| = V_n.V_1$ car $Vn \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
Posons $q = V_1$, alors an a $V_{n+1} = qV_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
donc : (V_n) est une suite géométrique de raison $q = V_1$.

c. Déterminons V_0 et exprimons V_n en fonction de n.
On a $V_0 = V_0^2$ équivaut à $V_0 = 0$ ou $V_0 = 1$.

- Si $V_0 = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N} V_n = V_{n+0} = |Vn|.|V_0| = 0$.
- Si $V_0 = 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N} V_{n+1} = V_n.V_1 = V_1^n$ car $q = V_1$ or $V1 = 64$, et $V_1^3 = 4$ **d'où :** $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = 4n$ et $V_0 = 1$.

Corrigé 81

$h_{a,b}(x) = (ax + b)e^{-2x}, \quad E = \{h_{a,b}, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

1 Montrons que pour tout (a,b), (c, d) de $\mathbb{R}^2$ et pour α de $\mathbb{R} h_{a,b} + h_{c,d}, \alpha ha, b$ appartiennent à E.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
(h_{a,b} + h_{c,d})(x) &= h_{a,b}(x) + h_{c,d}(x) \\
&= (ax + b)e^{-2x} + (cx + d)e^{-2x} \\
&= (ax + b + cx + d)e^{-2x} \\
&= ((a + c)x + b + d)e^{-2x} \\
&= (Ax + B)e^{-2x} \quad \text{ou} \quad A = a + c \quad \text{et} \quad B = c + d \\
&= h_{A,B}(x)
\end{aligned}$$

On a aussi Pour tout x et $\alpha \in \mathbb{R}$;

$$\begin{aligned}
\alpha \times h_{a,b}(x) &= \alpha(ax + b)e^{-2x} \\
&= (a'x + b')e^{-2x} \quad \text{ou} \quad a' = \alpha \times a \quad \text{et} \quad b' = \alpha \times b
\end{aligned}$$

Donc : pour tout (a,b), (c, d) de $\mathbb{R}^2$ et pour α de $\mathbb{R}$, $h_{a,b} + h_{c,d}, \alpha h_{a,b}$ appartiennent à E.

2 Montrons que B est une base de θ.
$\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h_{a,b}(x) &= (ax+b)e^{-2x} \\ &= axe^{-2x} + be^{-2x} \\ &= av(x) + bu(x) \\ &= (a \times v + b \times u)(x) \end{aligned}$$

Donc : $h_{a,b} = a \times v + b \times u \in < u, v >$, par conséquent B est une famille génératrice de θ. (i).
Remarquons que , pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,
$u(x) = e^{-2x} = (0x+1)e^{-2x}$, $(0,1) \in \mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ u appartient à θ, de même
$v(x) = xe^{-2x} = (1x+0)e^{-2x}$, $(1,0) \in \mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ v appartient à θ,
On montre aisément que ces couple de vecteurs sont linéairement indépendants et ensuite on conclut que B est une base de θ.

3 **a.** Montrons que pour tout h appartenant à E, ψ appartient aussi à θ.
h appartient à θ équivaut à ; $(a,b) \in \mathbb{R}^2/h = h_{a,b}$, ainsi pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ $h_{a,b}(x) = (ax+b)e^{-2x}$, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.et on a :
$h'_{a,b}(x) = ((-2ax) + (a-2b))e^{-2x} = h_{-2a,a-2b}(x)$.
Ainsi $h' = -2av + (a-2bu)$ appartient à E.
Donc : $h' - h$ appartient à θ, car E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, par conséquent stable pour toute combinaison linéaire de ces éléments. D'où : pour tout h appartenant à E, ψ appartient aussi à θ.

b. Montrons que ψ est un endomorphisme de θ.
- On vient de voir que ψ est une application de θ dans θ.
- Pour tout h_1 et $h_2 \in \theta$ on a : $\psi(h_1+h_2) = (h'_1 - h_1) + (h'_2 - h_2) = \psi(h_1) + \psi(h_2)$
- Pour tout h_1 de θ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il est clair que $\psi(\alpha h_1) = \alpha\psi(h_1)$. Ainsi ψ est un endomorphisme de θ.

c. Matrice M de ψ par rapport à la base B.
Soit $u(x) = e^{-2x}$ c'est-à-dire $u'(x) = -2e^{-2x}$, on a de ce fait
$\psi(u) = u'u$ ce qui veut dire que $\psi(u)(x) = -3e^{-2x} = -3u(x)$ d'où :
$\psi(u) = -3u$, de même on trouve $\psi(v) = u - 2v$.

$$\text{donc : } MB = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

4 Elément g de E solution de l'équation différentielle :$y - y = (-3x+4)e^{-2x}$.
En posant $g(x) = (ax+b)e^{-2x}$ qui est du même type que la fonction du second membre, en dérivant une fois et en remplaçant dans l'équation différentielle et en procédant par identification avec le second membre, on trouve les valeurs de a et b suivantes : (a = 1 et b = -1) on a donc :

$$g(x) = (x-1)e^{-2x}$$

Corrigé 82

A

1 Ensemble de définition D_λ de F_λ

$$D_\lambda = \begin{cases}]0;+\infty[, & si\lambda > 0 \\ ]-\infty;0[, & si\lambda < 0 \end{cases}$$

2 **a.** Déterminons F'_1
Trivial !

b. Expression de F_λ en fonction de F_1.
Trivial !

3 Montrons que $F'_1(x)$ garde un signe constant sur tout intervalle de $D_{1(1]}$.
Trivial !

4 Déduisons-en le tableau de variation de F_λ suivant les valeurs de λ.
Trivial !

B

1 Montrons que l'équation $F_1(x) = 0$ admet une unique solution notée x_1.
Evident !

2 Aisé !

3 Montrons que $d = A(x_1)^3 + B(x_1)^2 + c$.
On a : $d = \int_1^{x_1}(x - x^2 \ln x)dx = \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3}\ln x_1\right)x_1^3 + \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{11}{18}$.

Corrigé 83

1 Question évidente.

2 **a.** Probabilité de tirer en un tirage un réel strictement positif.
$\sqrt{2} + i\sqrt{6} = 2\sqrt{2}e^{i\pi/3}$ D'où : $(\sqrt{2} + i\sqrt{6})^n = (2\sqrt{2})^n(e^{i\pi/3})^n$

$$
\begin{array}{rcl}
(\sqrt{2}+i\sqrt{6})^n \in \mathbb{R}_+^* & \text{équivaut à} & \begin{cases} \sin?\frac{n\pi}{3} = 0 \\ \cos?\frac{n\pi}{3} > 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{n\pi}{3} = k\pi; \quad k \in \mathbb{Z} \\ \cos?\frac{n\pi}{3} = \cos?k\pi > 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow & \begin{cases} n = 3k \\ n = 6k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \\
& \Leftrightarrow & n\text{est un multiple commun à 3 et 6.} \\
& \Leftrightarrow & n \in \{6 : 12; 18\}. \\
& \text{Donc :} & Pa = \dfrac{3}{20}.
\end{array}
$$

b. Probabilité d'obtenir un réel strictement positif en trois tirages au plus.
On a soit un tirage, soit deux tirages, soit trois tirages. Donc : $P_b = \frac{3}{20} + \left(\frac{3}{20}\right)^2 + \left(\frac{3}{20}\right)^3$

.

47 ENS 2012 (Géométrie)

Corrigé 84

1 Construction : (évidente).

2 Montrons qu'il existe deux isométries qui transforment O en B et A en C.
Soit f une application du plan dans lui-même telle que : f(O) = B et f(A) = C, comme OA = BC, alors f est isométrie car conserve les distances, donc f est soit une rotation, soit une symétrie orthogonale, soit une translation, soit une symétrie glissée. Puisque le vecteur OA est différent du vecteur BC et que le quadrilatère n'est pas un trapèze donc f n'est ni une translation, ni une symétrie orthogonale.

3 R(O) = B et r(A) = C.

a. Montrons que r est une rotation dont-on donnera l'angle.
D'après la question 2-) le seul déplacement susceptible de transformer O en B et A en C est la rotation. Soit λ? l'angle de rotation. On a $\lambda ?= (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA}), = -\frac{5\pi}{6}.Constructionde\Omega$. Ω est le point de rencontre des médiatrices des segments OB et AC.

4 S(O) = B et S(A) = C.

a. Montrons que S est une symétrie glissée d-axe (AC).
D'après la question 2-) le seul antidéplacement qui applique O en B et A en C est une symétrie glissée. Soit (Δ) l'axe de S et $\vec{u}$ u un vecteur directeur de (Δ) tel que :
S = $t_{\vec{u}}\circ$ S. (rappelez- cette question à l'enseignant).

b. Déduisons-en que S = $t_{\overrightarrow{OA}} \circ S_{(AC)}$.
Il suffit de montrer que $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.
On a S(A) = $t_{\overrightarrow{OA}} \circ S_{(AC)}(A) = t_{\vec{u}}(A) = C,$ car $S_{(AC)}(A) = A.$
donc : $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$

5 Affixe du point Ω.
$Z_A = 2$ ce qui implique (AC) est l'axe des abscisses. On a :
$x_e = 1$ et $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{x_C}{Y_c}$ C'est-à-dire $Y_c = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3},$ ainsi : $Z_c = 1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}.$

Corrigé 85

1 **a.** Montrons que $OD = x\sqrt{2},$ $BE = y\sqrt{2}$ et $x + y = 2 - \sqrt{2}.$

- Soit H le projeté orthogonal de D sur (OA). Alors ODH est rectangle en H d'où
$OD^2 = OH^2 + DH^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$ donc : $OD = x\sqrt{2}.$
- Soit H le projeté orthogonal de O sur (BC). Alors ODH est rectangle en H d'où :
$BE^2 = BH^2 + EH^2 = Y^2 + Y^2 = 2Y^2$ donc : $BE = y\sqrt{2}.$
- le triangle OAB est rectangle en A. on a ; $OB^2 = OA^2 + AB^2$ ce qui équivaut à :
$(OD+DF+FE+BE)^2 = 2$ par remplacement de OD, DF, FE, et BE par leur valeur et après développement on obtient la valeur de $x + y = 2 - \sqrt{2}.$

b.
- Somme des aires de C_1 et C_2.
$A = A_1 + A_2 = \pi x^2 + \pi y^2 = \pi(x^2 + y^2)$
- Déterminons OD et OE.
L'aire du cercle inscrit dans le carré ABCO est $\frac{\pi}{4}$. Donc ; $\pi(x^2 + y^2) = \frac{\pi}{4}.$
On a donc le système suivant : $\begin{cases} x + y = 2 - \sqrt{2} \\ (x^2 + y^2) = \frac{1}{4} = (x + y)^2 - 2xy \end{cases}$

Une résolution logique et adéquate de ce système nous donne les valeurs de x et y suivantes : $x = 0,1$ et $y = 0,5$.
Donc d-après le a-) on déduit les valeurs : $OD = 0,14$ et $OE = 0,7$.

2 **a.** Montrons que E appartient à P et trouvons le paramètre de P.
Soit H' le projeté orthogonal de O sur (BC), alors,
$\frac{EH'}{EF} = \frac{y}{y} = 1$ (car définition géométrique de l'hyperbole). Donc : E appartient à P.
Le paramètre est $P = d(F,(EC)) = 1z$ on a de ce fait ; $Z^2 = OF^2$.

b. Figure. (une esquisse de figure sera donnée par le lecteur car triviale).

c. Il en est de même que la question b-).

Corrigé 86

1 **a.** $F : M \longmapsto M'$ / $\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = 2y - 1 \end{cases}$
Soient O(0,0) on a O'(2, -1) de plus A (1, -1) on a A'(4, -3) .on a OA différent de O'A' de ce fait on conclut que F ne conserve pas les distances donc : F n'est pas une isométrie.

b. Point invariant.
Par définition l'ensemble de tous les points invariants par sont les points dont les coordonnées vérifient le système suivant : $\begin{cases} x = x - y + 2 \\ y = 2y - 1 \end{cases}$ ce qui est équivaut à $\begin{cases} y = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ (ce qui est absurde). Donc : F n'admet pas de point invariant.

c. Droites globalement invariantes par F.
D'après le b-) on déduit que ces droites ont pour équations respectives : $y = 2$ et $y = 1$.

2 **a.**
- Montrons que le plan et la droite sont orthogonaux.
  Un vecteur normal du plan est : $\vec{v}(1, -1, -1)$ et un vecteur directeur de la droite est : $\vec{u}(1, -1, -1)$ nous constatons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires par conséquent ils sont bel et bien orthogonaux.
- Coordonnées du point d'intersection.
  (d) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.
  En remplaçant x, y et z par leurs valeurs dans l'équation du plan, on a t = 1/3 d'où : I(1/3, -1/3, -1/3).

b. Expression analytique de la réflexion S par rapport à (Q).
Soient M et M' deux point tels que M' = S(M), alors (Q) est le plan médiateur de [MM']. Donc $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur normal à (Q). On a :
$\overrightarrow{MM'} = \alpha\vec{u}$ ce qui équivaut à : $\begin{cases} x = x + \alpha \\ y = y - \alpha \\ z = z - \alpha \end{cases}$ $(\alpha \in \mathbb{R}).(*)$
Soit T milieu de [MM'] appartient à (Q). T a pour coordonnées
$\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right)$ équivaut à $\left(\frac{2x-\alpha}{2}, \frac{2y-\alpha}{2}, \frac{2z-\alpha}{2}\right)$. en remplaçant ces coordonnées dans l'équation du plan (Q) on obtient : $\alpha = \frac{2}{3}(1 - x + y + z)$
en remplaçant dans (*) précédemment, on obtient :

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} + \frac{2y}{3} + \frac{2}{3} \\ y' = \frac{y}{3} + \frac{2x}{3} - \frac{2z}{3} - \frac{2}{3} \\ z' = \frac{z}{3} + \frac{2x}{3} - \frac{2y}{3} - \frac{2}{3} \end{cases}$$

c. Nature de S∘S.
(d) et (Q) sont orthogonaux ce qui implique que $S \circ S$ est la symétrie centrale de centre Ω(qui est le point d'intersection de (d) et (Q).

Partie

VII

« La tolérance est la vertu du faible »
Donatien Alphonse François

Filière Mathématiques

Corrections-Maroua

Né le 2 juin 1740, mort le 2 décembre 1814 il est un homme de lettres français, romancier et philosophe, longtemps voué à l'anathème en raison de la part accordée dans son œuvre à l'érotisme, associé à des actes impunis de violence et de cruauté

Épreuve ENS

48 ENS 2009 (Géométrie-Analyse)

Corrigé 87

Corrigé 88

Corrigé 89

.

49 ENS 2010

Corrigé 90

1 Etablissons l'inégalité $|x+x_1+x_2+\cdots+x_n| \geq |x|-(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)$. Nous faisons une preuve par reccurence.
Evidement, pour $n=1$, on a $|x+x_1| \geq |x|+|x_1|$
Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, supposons que pour n réels, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on a
$|x+x_1+x_2+\cdots+x_n| \geq |x|-(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)$
Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ n+1 réels :

$$\begin{aligned}
|x+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}| &= |(x+x_{n+1}+x_1+x_2+\cdots+x_n=| \\
&\geq |x+x_{n+1}|-|x|-(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|) \\
&\geq |x|-|x_{n+1}|-(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|) \\
&\geq |x|-(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|+|x_{n+1}|)
\end{aligned}$$

D'où l'inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

2 Soit à résoudre le système $\begin{cases} x^2-y^2-ax+ay & =0 \\ xy & =a^2 \end{cases}$

On a $x^2-y^2-ax+ay=0 \Rightarrow (x-y)(x+y-a)=0$, d'où la système à résoudre équivaut à $\begin{cases} x=y \text{ ou } x+y=a \\ xy=a^2 \end{cases}$ on en déduit que $x=y=a$ ou $x=xy=-a$. Les solutions du système sont alors (a,a) et $(-a,-a)$

3 Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a l'inégalité :

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}<3$$

Il suffir de montrer que $frac11+2+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}<1$
Posons $u_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$; on doit montrer que $u_1+u_2+\cdots+u_n<1$. En utilisant le résultat $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, on a $u_n=\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}$. Posoons ensuite $w_n=\frac{2}{n}$.
Alors $u_n=w_n-w_{n+1}$.

$$\begin{aligned}
\text{Alors on a : } u_1+u_2+\cdots+u_n &= (w_2-w_3)+(w_4-w_3)+\cdots+(w_n-w_{n+1}) \\
&= w_2-w_{n+1}=1-\tfrac{2}{n+1}<1
\end{aligned}$$

4 Pour l'équation (3), il est clair que $S=\varnothing$, pour l'équation (4), on a :

$$(4) \quad \Leftrightarrow \frac{\ln(\sqrt{x^2-4x}+3)}{\ln 2} > -\frac{\ln\left(\frac{2}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1}\right)}{\ln 2}+\frac{\ln 2}{\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(\sqrt{x^2-4x}+3)}{\ln 2} - \frac{\ln\left(\frac{2}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1}\right)+\ln 2}{\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(\sqrt{x^2-4x}+3)}{\ln 2} > -\frac{\ln\left(\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1\right)}{\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow \ln(\sqrt{x^2-4x}+3) > \ln(\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{s^2-4x}+3 > \sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$$

D'autres part la condition d'existence pour l'équation (4) est $(x^2 - 4x) \geq 0$ et $x + 1 \geq 0$,
Soit $x \in [-1; 0] \cup [4; +\infty]$. Finalement l'quation (4) a pour solution $S = [-1; 0]$

5 Posons $A = \sin x + \sin 3x + \cdots + \sin(2n-1)x$ et $B = e^{ix} + e^{3ix} + \cdots + e^{(2n-1)ix}.A = Im(B)$
B est clairement la somme des termes d'une suite géométique de premier terme e^{ix} et de raion e^{2ix}. On déduit $B = e^{ix}\frac{1-e^{2inx}}{1-e^{2ix}}$
On factorise le numérateur et le dénominateur de B par « l'angla mirroir » et on a :

$$e^{ix}\frac{1-e^{2inx}}{1-e^{2ix}} = e^{ix}\frac{e^{inx}}{e^{ix}}\frac{e^{inx}-e^{inx}}{e^{ix}-e^{ix}} = \frac{\sin nx}{\sin x}(\cos nx + i \sin nx)$$

On déduit que la somme recherchée est

$$\sin x + \sin 3x + \cdots + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$$

Corrigé 91

1 On sait que pour tout nombre réel, $a^2 + b^2 \geq 2ab$, ainsi, pour tout $a, b \geq 0$ on a $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. De même pour tout $c, d \geq 0$ on a $c + d \geq 2\sqrt{cd}$, d'où on obtient en faisant la somme membre à membre de l'inégalité et on obtient :

$$(a+b+c+d)^2 \geq 4(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})^2 = 4(ab + cd + 2\sqrt{abcd})$$

ensuite, on utilise la relation $ab + cd \geq 2\sqrt{abcd}$ pour avoir

$$(a+b+c+d)^2 \geq 4^2\sqrt{abcd}$$

On en déduit de l'inégalité ci-dessus que $(a+b+c+d)^4 \geq 4^4 abcd$ d'où en prenant la racine 4-ième de chaque membre de l'inégalité et en divisant membre à membre par 4 on obtient $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$

2 **a.** En posant $z = x + iy$, l'équation $|z|^2 + 2iz + 2a(1+i) = 0$ est équivalente à
$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y + 2a &= 0 \\ x + a &= 0 \end{cases}$ on en déduit que $x = -a$. En remarçant x dans la première équation par $-a$, on obtient $y^2 - 2y = -(a^2 - 2a)$, soit $(y-1)^2 = 2 - (a-1)^2$. Ainsi :

- Si $a \in]\infty; 1-\sqrt{2}[\cup]1+\sqrt{2}; +\infty[$, $2 - (a-1)^2 < 0$ et y n'existe pas c'est à dire $S = \varnothing$
- Si $a = 1 - \sqrt{2}$ ou $a = 1 + \sqrt{2}$,
  alors $y =$ et $S = \{(-1+\sqrt{2}, 1)\}$ ou $S = \{(-1-\sqrt{2}, 1)\}$
- Si $a \in \left]1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\right[$, on a $y = 1 + \pm\sqrt{2-(a-1)^2}$. Ainsi,
  $S = \{(-a; 1 - \sqrt{2-(a-1)^2}); (-a; 1 + \sqrt{2-(a-1)^2})$

b. La relation $z|z| - az - i = 0$ donne $z = \frac{1}{|z|-a}i$, donc z est un imaginaire pur.
Posons alors $z = yi$. Alors $y|y| - ay - i = 0$

- Si $y \geq 0$, Aollors on a $y^2 - ay - 1 = 0$ donc $y = \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$
- Si $y \leq 0$, Alors on a $-y^2 - ay - 1 = 0$, donc $y_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}$ et $y_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}$

à condition que $a \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$
On conclut que

- Si $a \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$, l'ensemble solution est

$$S = \left\{\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}i; \frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}i; \frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}i\right\}$$

- $a \in]-2; 2[$, l'ensemble solution est

$$S = \left\{\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right\}$$

Corrigé 92

1 On vérifie que
$\frac{2x^3-13x^2+29x-20}{x^2-6x+11} = 2x-1+\frac{x-9}{x^2-6x+11} = 2x-1+\frac{1}{2}\frac{2x-6}{x^2-6x+11} - \frac{1}{2}\frac{12}{x^2-6x+11}$
On déduit que
$\int \frac{2x^3-13x^2+29x-20}{x^2-6x+11}dx = x^2-x+\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+11) - \frac{1}{2}\int \frac{12}{x^2-6x+11}dx$
En posant un chahgement de variable $X = \frac{\sqrt{2}}{4}(2x-3)$, on montre que

$$\frac{1}{2}\int \frac{12}{x^2-6x+11}dx = \frac{12}{4}\sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{4}(2x-6)\sqrt{6}\right)$$

2 Pour commencer, remarquons que $x = \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$ donc,

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4ab}} = \frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}$$

Ainsi on a :

$$A - \frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{2b\frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}}{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} - \frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}} = \frac{2b|a-b|}{a+b+|a-b|} = \begin{cases} a-b & \text{si } a \geq b \\ \frac{b(b-a)}{a} & \text{si } a \leq b \end{cases}$$

Corrigé 93

1 Posons $mes\widehat{A} = 2\alpha$, alors $mes\widehat{C} = \alpha$ et $mes\widehat{B} = \pi - 3\alpha$
Posons ensuite $AB = c = x = b$ et $BC = a$; alors $a = x+2$. D'après le théorème des sinus, on a :

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} \text{ c'est à dire } \frac{x+2}{\sin 2\alpha} = \frac{5}{\sin(\pi-3\alpha)} = \frac{x}{\sin\sin\alpha}$$

Remarquons ensuite que

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \text{ et } \sin(\pi-\alpha) = \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

Pour avoir $x = \frac{x+2}{2\cos\alpha} = \frac{5}{4\cos^2\alpha-1}$
L'égalité $x = \frac{x+2}{2\cos\alpha}$ donne $\cos = \frac{x+2}{2x}$ et alors on obtient l'équation $x = \frac{5}{4\left(\frac{x+2}{2x}\right)^2-1}$
qui est équivalent à $x^2-4x=0$, soit $x=0$ ou $x=4$. Evidemment x ne peut pas être égal 0 donc $x=4$, par suite $c=4$ et $a=6$.

Épreuve ENS

50 ENS 2012

Corrigé 94

Corrigé 95

Corrigé 96

Corrigé 97

.

51 ENS 2013 (Algèbre-Analyse)

A

Corrigé 98

1 Proposition fausse

Justification :

En effet (E) est la médiatrice de la droite formée par les points $O(0,0)$ et $A(1,0)$; par conséquent (E) est perpendiculaire a la droite (OA) donc a l'axe des reels.

2 Proposition juste

Justification :

En effet les solutions sont : $Z_1 = e^{-\frac{i4\pi}{5}}$ et : $Z_2 = e^{\frac{i4\pi}{5}}$ par conséquent $|Z_1| = |Z_2| = 1$

3 Proposition fausse

Justification :

On a $Z_{20} = e^{\frac{i40\pi}{3}} = e^{\frac{i4\pi}{3}} = e^{-\frac{i2\pi}{3}} = \overline{Z_1}$

Ce qui entraine : $S_{(ox)}(M_1) = M_{20}$, or $M_i \notin (oy)$ donc $O \notin (M_1M_2)$

Conclusion : les points O, M_1 et M_2 ne sont pas alignes.

4 Proposition juste

Justification :

En effet $AO^2 = 29$, $OB^2 = 58$ et $AB^2 = 29$ ainsi : $OA^2 + OB^2 = OB^2$

5 Proposition fausse

Justification :

En effet $z = 2\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^{\times} z^{3n} = e^{\frac{i\pi}{2}}$ ainsi pour $n = 2$, $z^6 = -\left(2\sqrt{3}\right)^6 \in i\mathbb{R}$

6 Proposition fausse

Justification :

En effet, $$\begin{aligned} P(2 \le X \le 3) &= p(X \le 3) - P(X \le 2) \\ &= \left(1 - e^{-3\lambda}\right) - \left(1 - e^{-2\lambda}\right) \\ &= e^{-2\lambda} - e^{-3\lambda} \ne 1 - e^{-\lambda} \end{aligned}$$

7 Proposition juste

Justification : On procede par recurrence sur l'entier n.

Soit $P(n) =<< \forall n \in \mathbb{N}?, 0 \le U_n \le 7 >>$

- Pour $n = 0$ on a : $0 \le U_0 = 2 \le 7$ donc $P(0)$ est vrai
- Soit n tel que $P(n)$ soit vrai, on a :
$$\begin{aligned} 0 \le U_n \le 7 &\Rightarrow 0 \le 7U_n \le 7^2 \\ &\Rightarrow 0 \le \sqrt{7U_n} \le \sqrt{7^2} \\ &\Rightarrow 0 \le U_{n+1} \le 7 \end{aligned}$$

Donc P(n+1) est vrai

8 Proposition juste

Justification :

En effet $F = \{M \in E / \|MG = 2\| = 2\}$

9 Proposition juste

Justification :

En effet : $3(5k-1) - 5(3k-1) = 2$

10 Proposition juste
En effet, $n!+k = 1\times 2\times 3\times\cdots\times k\times\ldots n$+k car $k\in\mathbb{N}$ tel que $2\leq k\leq n$ et $n\geq 3$
ainsi : $n!+k = k(1+1\times 2\times\cdots\times(k-1)\times(k+1)\cdots\times n)$
$n!+k$ admet deux diviseurs deux diviseurs differents de 1

B

Corrigé 99

Soit f la fonction definie et derivable sur [0,1] telle que :
$$\begin{cases} f(0) & = 0 \\ f'(x) & = \frac{1}{1+x^2} \text{ pour tout } x[0,1] \end{cases}$$

1 Sens de variation de f sur [0,1] :
On a : $\forall x\in[0,1]$ $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}>0$ donc f est strictement croissante sur [0,1].

2 Justifications :

a. la fonction definie sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ par $g(x)=f(\tan x)$

b. La fonction est derivable sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ et f est derivable sur [0,1] ,
or $[0,\frac{\pi}{4}]\subset[0,1]$; donc g est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{4}]$
$\forall x\in[0,\frac{\pi}{4}]$, $g'(x)=\tan'(x)f'(\tan(x))=(1+\tan^2(x))\times\frac{1}{(1+\tan^2(x))}=1$

c.
- Montrons que $\forall x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ $g(x)=x$
$g'(x)=1\Rightarrow k\in\mathbb{R}$ tel que $g(x)=x+k$
Or $g(x)=f(\tan(x))$ et $f(0)=0\Rightarrow g(0)=0\Rightarrow k=0$
Ainsi $\forall x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ $g(x)=x$
- Deduisons que $f(1)=\frac{\pi}{4}$
On a : $\forall x\in[0,\frac{\pi}{4}]$, $g(x)=f(\tan(x))=\frac{\pi}{4}$ or $\tan(\frac{\pi}{4})=1$
ainsi : $f(1)=\frac{\pi}{4}$

3 Montrons que $\forall x\in[0,1]$, $0\leq f(x)\leq\frac{\pi}{4}$
f étant strictement croissante alors $\forall x\in[0,1]$, $f(0)\leq f(x)\leq f(1)$
or $f(0)=0$ et $f(1)=\frac{\pi}{4}\to\forall x\in[0,1]$ $0\leq f(x)\leq\frac{\pi}{4}$

4 Calcul de $I_0=\int_0^1 f(x)dx$
Posons $g'(x)=1$ et $f(x)=f(x)$ on a :
$$I_0=[f'(x)g(x)dx]_0^1-\int_0^1 f'(x)g(x)dx \quad \begin{aligned}&\Rightarrow I_0=[xf(x)]_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx\\ &\Rightarrow I_0=\frac{\pi}{4}-\ln(1+x^2)_0^1\\ &\Rightarrow I_0=\frac{\pi}{4}-\ln(2)\end{aligned}$$

5 Montrons que $\forall n\in\mathbb{N}^\times$, $I_n\geq 0$

a. On a : $\forall x\in[0,1]$, $0\leq f(x)\leq\frac{\pi}{4}$ ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^\times$, car $x^n\geq 0$ et d'après le théorème de la positivité de l'intégrale on a : $\int_0^1 f(x)dx\geq 0$ d'où : $\forall n\in\mathbb{N}^\times$, $I_n\geq 0$

b. Montrons que $\forall n\in\mathbb{N}^\times$, $I_n\leq\frac{\pi}{4(n+1)}$
On a : $\forall x\in[0,1]$, $0\leq f(x)\leq\frac{\pi}{4}$ $\quad\Rightarrow x^nf(x)\leq\frac{\pi}{4}f(x)$ car $x^n\geq 0$ $\forall n\in N^\times$
$\quad\Rightarrow\int_0^1 x^nf(x)dx\leq\int_0^1\frac{\pi}{4}x^ndx=\frac{\pi}{4(n+1)}$
D'où $\forall n\in\mathbb{N}^\times$, $I_n\leq\frac{\pi}{4(n+1)}$

c. Deduisons en $\lim_{n\to+\infty}?I_n$
$\forall n\in\mathbb{N}^\times 0\leq I_n\leq\frac{\pi}{4(n+1)}$ $\quad\Rightarrow 0\lim I_n\leq\lim\frac{1}{4(n+1)}$
$\quad\Rightarrow 0\leq 0\lim I_n\leq 0$
D'apres le theoreme des gendarmes $\lim I_n=0$

Corrigé 100

$s(M)=M'$ tel que $z'=5iz+6i+4$

1 Determination de s et de ses caracteristiques

On a : $z' = 5iz + 6i + 4 = 5e^{i\frac{\pi}{2}}z + 6i + 4$

Donc s est une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{2}$, de rapport 5 et de centre $\Omega(z_\Omega)$

tel que $Z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{6i+4}{1-5i} = 1 - i$, ainsi $s = s(\Omega; \frac{\pi}{2}; 5)$

2 Demontrons que :

$$\begin{cases} x' & = -5y + 4 \\ y' & = 5x + 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z' = 5iz + 6i + 4 \quad & \Rightarrow x' = iy' = 5i(x + iy) + 6i + 4 \\ & \Rightarrow x' + iy' = i5x - 5y + 6i + 4 \\ & \Rightarrow x' + iy' = (-5y + 4) + i(5x + 6) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{cases} x' & = -5y + 4 \\ y' & = 5x + 6 \end{cases}$$

3 Détermination de l'ensemble des points M de E tels que : $-3x' + 4y' = 37$

Posons $F = \{M \in E \text{ tels que } -3x' + 4y' = 37\}$

$$\begin{aligned} M \in F \quad & \Rightarrow -3(-5y + 4) + 4(5x + 6) = 37 \\ & \Rightarrow 20x + 15y = 25 \\ & \Rightarrow 4x + 3y = 5 \end{aligned}$$

Apres resolution de l'equation diophantienne on obtient :

$F = \{M \in E \text{ tels que : } x = 3k + 5 \text{ et } y = -4k - 5,\ k \in Z\}$

4 $M' = s(M)$

a. Demontrons que $x' + y'$ est un multiple de 5

$$\begin{cases} x' & = -5y + 4 \\ y' & = 5x + 6 \end{cases}$$

on obtient $x' + y' = 5[(x - y) + 2] = 5k$ puisque x et y sont des entiers

b. Montrons que : $x' - y'$ et $x' + y'$ sont de même parité

On a : $x' - y' = 5(-x - y) - 2$ et $x' + y' = 5[(x - y) + 2]$

- Premier cas : supposons $(x' - y')$ pair
  $\Rightarrow m \in \mathbb{Z}$ tel que $5(x - y) = 2m$
  $\Rightarrow x' + y' = 2m + 10 = 2(m + 5)$
  $\Rightarrow x' + y' = 2m'$
  Avec $m' \in \mathbb{Z}$.
  Donc $x' + y'$ et $x' - y'$ sont pairs
- Deuxieme cas :supposons $(x' - y')$ impair (Faites le vous-même)

c. Determination de $(G) = \left\{M \in E / x'^2 - y'^2 = 20\right\}$

On a : $(x' - y')(x' + y') = 20$ or ces deux facteurs sont de même parité on obtient :

$\{(x' + y'), (x' - y')\} \in \{(2, 10); (10, 2); (-10, -2); (-2, -10)\}$

Apres resolution , seul le couples (-10,-2) conduit a un résultat interressant, et tenant compte du fait que $x' = -5y+4$ et $y' = 5x + 6$ on obtient finalement $y = 2$ et $x = -2$

Conclusion : $(G) = \{M(x, y)/x = -2 \text{ et } y = 2\}$

Épreuve ENS

.

52 ENS 2013 (Géométrie)

Corrigé 101

1 $I = mil[BC]$, $\overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

a. Déterminer une équation de (IJ) dans $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, on a :
$A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$, $J(-\frac{1}{3}, 0)$ et $I(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
Soit $M(x,y) \in (IJ)$, alors $\overrightarrow{JI}//\overrightarrow{JM}$ soit $det(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JM}) = 0$

$$Det(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JM}) = 0 \quad \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{5}{6} & x + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & y \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6}y - \frac{1}{2}(x + \frac{1}{3}) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{5}{3}y - x - \frac{1}{3} = 0$$

D'où $(IJ) : x - \frac{5}{3}y = -\frac{1}{3}$

b. Exprimons $K = (JI) \cap (AC)$ comme barycentre de A et C.
Soit $K = (x, y)$

$$\text{Alors } K = (JI) \cap (AC) \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K \in (IJ) \\ K \in (AC) \end{array} \right.$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x - \frac{5}{3}y = -1/3 & (1) \\ \exists q \in \mathbb{R}/\overrightarrow{AK} = qAC & (2) \end{array} \right.$$

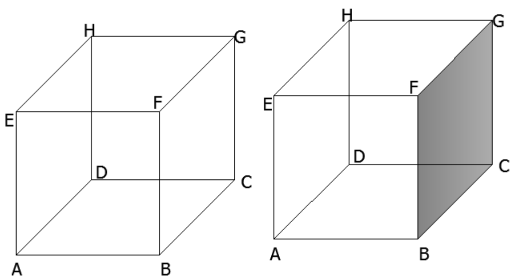
$$(2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\} = q \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = q \end{array} \right.$$

$$\text{Ainsi, } (1) \quad \Rightarrow 0 - \frac{5}{3}q = -\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow q = \frac{1}{5}$$

$$\text{Alors, } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow 5\overrightarrow{AK} - \left(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC}\right) = 0$$
$$\Rightarrow -4\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{KC} = 0$$

Soit $4\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC} = 0$

2 schema



a. Déterminons $d(A, (EFI))$
Considérons le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, alors on a : $A(0,0,0)$, $B(0,0,1)$, $F(1,0,1)$ et $I(1,1,\frac{1}{2})$
Une équation cartésienne du plan (EIF) est $y + 2z - 2 = 0$

Ainsi, $d(A,(EFI)) = \frac{|0+0-2|}{\sqrt{(1+2^2+0}} \times 2$ car l'arrêt est 2 ; d'où $d(A,(EFI)) = \frac{2}{5}\sqrt{5}u.m$

b. Déterminons $d(B,(AI))$
Posons H le projeté orthogonale de B sur (AI) alors $BH = d(B,(AI))$
On a ABC rectangle en B
$\Rightarrow BH \times AI = BA \times BI$
$\Rightarrow BH = \frac{BA \times BI}{AI}$
Or $AI = \sqrt{AB^2 + BI^2}$ et $BI^2 = BC^2 + CI^2 = 5$
$AI = \sqrt{AB^2 + BC^2 + CI^2} = \sqrt{9} = 3u.m$

3 **a.** considérons le repère (I, i', j') orthonormé avec $i' = \frac{\overrightarrow{IF}}{\|IF\|}$
on a : $(P) : y^2 = -4x$

b. Déterminons dans $R(O, \vec{i}, \vec{j})$
Soit $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_R$ et $M = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{(I,\vec{i}',\vec{j}')}$ alors $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OM}$
$\Rightarrow x'\vec{i}' + y'\vec{j}' = -\vec{j} + (x\vec{i} + y\vec{j})$
Or $i' = \frac{\overrightarrow{IF}}{\|IF\|} = \frac{-\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}}$ et $\vec{j}' = \frac{i-j}{\sqrt{2}}$
$\Rightarrow x'\left(\frac{-\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}}\right) + y'\left(\frac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}}\right) = -\vec{j} + x\vec{i} + y\vec{j}$
$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y')\,\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')\,\vec{j} = x\vec{i} + (y-1)\vec{j}$
Ainsi $\begin{cases} X &= \frac{1}{\sqrt{2}(-x'+y')} \\ Y - 1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}(x'+y')} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x' + y' &= x\sqrt{2} \\ x' + y' &= -(y-1)\sqrt{2} \end{cases}$
$\Rightarrow y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y + 1)$ et $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x - y + 1)$ de plus $y^2 = -4x$
$\Rightarrow (x - y + 1)^2 = -4(-x - y + 1)$
$\Rightarrow Y^2 - 2(x+1)y + (x^2 + 2x + 1) = 4x + 4y - 4$
D'où on a :
$(p) : x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 6y + 3 = 0$

4 $R(o, \vec{i}, \vec{j})$
$f : \begin{cases} x' &= 2x - y + 1 \\ y' &= -x + 2y - 1 \end{cases}$

a. Déterminons $Inv(f)$
Soit $M(x,y)$ $M \in Inv(f) \quad \Rightarrow f(M) = M$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 &= x \\ -x + 2y - 1 &= y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y + 1 &= 0 \\ -x + y - 1 &= 0 \end{cases}$$

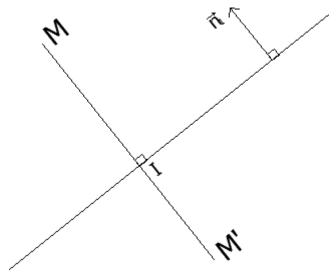
Soit $x - y + 1 = 0$
D'où $Inv(f) = (D) : -y + x + 1 = 0$

b. Déterminons les droites globalement invariantes par f :
Soit $(d) : ax + by = c$ $a, b, c \in \mathbb{R}$; une droite globalement invariante par f (avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$)
Alors $f((d)) = (d') = (d)$
Soit $M'(x', y') \in f(d) \quad \Rightarrow M' \in (d)$
$\Rightarrow ax' + by' = c = ax + b$
Or $x' = 2x - y + 1$ et $y' = -x + 2y - 1$
$\Rightarrow a(2x - y + 1) + b(-x + 2y - 1) = ax + by$
$\Rightarrow 2a - bx + (-a + 2b)y + a - b = ax + by$
$\Rightarrow \begin{cases} 2a - b &= a \\ -a + 2b &= b \\ a - b &= 0 \end{cases}$ soit $a = b \neq 0$ (car $a \neq 0$ ou $b \neq 0$)
ainsi, il vient : $ax + by = c \quad \Rightarrow a(x+y) = c$
$\Rightarrow x + y = \frac{c}{a}$ car $a \neq 0$
Posons $\frac{c}{a} = k, k \in \mathbb{R}$.
Donc, l'ensemble des droites globalement invariantes par f est l'ensemble $(\mathbb{E})$ des droites d'équation $x + y = k$, $k \in \mathbb{R}$

5 $(s(d))$ symétrie orthogonale d'axe (d)

a. déterminons l'expression analytique de $s(d_1)$ où $(d_1) : x - y\sqrt{3} - 1 = 0$
soit $M(x,y) \in \mathbb{P}/M' = s_{(d_1)}(M)$ alors, $I = mil[MM'] \in (MM') \cap (d_1)$
Posons n_1 un vecteur normal de (d_1)
Alors $MM'//n_1 \to$ il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $MM' = an_1$
$(d_1) : x - y\sqrt{3} - 1 = 0 \to n_1(1, -\sqrt{3})$
Ainsi, $(x' - x; y' - y) = a(1, -\sqrt{3})$
Soit $\begin{cases} x' &= x + a \\ y' &= y - a\sqrt{3} \end{cases}$
De plus, I appartient a (d_1)
$\Rightarrow \frac{1}{2}(x + x') - \frac{1}{2}(y + y')\sqrt{3} - 1 = 0$
$\Rightarrow y - \sqrt{3}y + x' - y'\sqrt{2} = 0$
$\Rightarrow y - y\sqrt{3} + (x + a) - (y - a\sqrt{3})\sqrt{3} - 2 = 0$
$\Rightarrow y - y\sqrt{3} + x + a - y\sqrt{3} + 3a - 2 = 0$
$\Rightarrow 2x - 2\sqrt{3}y + 4a - 2 = 0$
Soit $a = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{3}y + 1)$
Alors $\begin{cases} x' &= x + \frac{1}{2}(-x + y\sqrt{3} + 1) \\ y' &= y - \frac{\sqrt{3}}{2}(-x + y\sqrt{3} + 1) \end{cases}$
D'ou $S : \begin{cases} x' &= \frac{1}{2}(x + y\sqrt{3} + 1) \\ y' &= \frac{1}{2}(x\sqrt{3} - y - \sqrt{3}) \end{cases}$

b.
- Nature de $S_1 \circ S_2(d_2) : x = 1$
  On a $\vec{n}_2(1;0) \to \vec{n}_1.\vec{n}_2 = 1 \neq 0$
  $Det(n_1; n_2) = \sqrt{3} \neq 0$
  Ainsi n_1 et n_2 ne sont ni colineaires, ni orthogonaux. D'ou $S_1 \circ S_2$ est une rotation de centre $\Omega = (d_1) \cap (d_2)$ et d'angle $\theta = (n_2; n_1)$



25

- Determinons Ω
  $\Omega = (d_1) \cap (d_2) \to \Omega \in (d_1) \to x = 1 \to x = 1$
  $\Omega \in (d_2) \to x - y\sqrt{3} - 1 = 0 \to y = 0$
  D'ou $\Omega(1, 0)$
- Determinons θ
  $\sin\theta = \frac{det(n_1, n_2)}{\|n_1\|.\|n_2\|} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
  $\cos\theta = \frac{n_1.n_2}{\|n_1\|.\|n_2\|} = \frac{1}{2} \to \theta = -\frac{\pi}{6}$
  d'ou $S(d_1) \circ S(d_2) = R_{(\Omega, -\frac{\pi}{6})}$

53 ENS 2013 (Algèbre-Analyse)

Corrigé 102

1

$$\begin{array}{rcl} M(z)\in(E) & \Leftrightarrow & |z|=|z-1| \\ \text{Posons}\quad A(1) & \text{alors} & M(z)\in(E)\Leftrightarrow OM=AM \\ & \Leftrightarrow & (E)\equiv \text{Médiatrice de [OA]} \\ \text{Or}\quad z_A=1\in\mathbb{R} & \Rightarrow & A\in(O;\vec{u})\Rightarrow(OA)\equiv(O;\vec{u}) \\ & \text{Donc} & (E)\perp(O;\vec{u}) \\ & & \textbf{Proposition fausse} \end{array}$$

2 $(E): \quad z^2+2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)z+1=0$

$$\begin{array}{rcl} z_1 \quad \text{et} \quad z_2 \quad \text{solutions de } (E) & \Rightarrow & z_1=\overline{z_2} \\ & \text{Donc} & |z_1|=|z_2| \\ & \text{Or} & \begin{cases} z_1+z_2=-2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \\ z_1.z_2=1 \end{cases} \\ & \Rightarrow & |z_1|^2=1 \quad \text{soit} \quad |z_1|=|z_2|=1 \\ & & \textbf{Proposition vraie} \end{array}$$

3

$$\begin{array}{rcl} z_n=e^{\frac{2i\pi n}{3}} & \Rightarrow & \begin{cases} z_1=e^{\frac{2i\pi}{3}} \\ z_{20}=e^{\frac{40i\pi}{3}}=e^{\frac{-2i\pi}{3}} \end{cases} \\ & \Rightarrow & O, M_1 \quad \text{et} \quad M_{20} \quad \text{sont alignés} \\ & & \textbf{Proposition vraie} \end{array}$$

4

$$A(2-5i),\quad B(7-3i)\quad \text{Donc}\quad \begin{cases} OA^2=|2-5i|=29 \\ OB^2=|7-3i|=58 \\ AB^2=|2i-5|=29 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Donc}\quad AB^2+OA^2=58=OB^2 & \Rightarrow & OAB \quad \text{est un triangle rectangle} \\ \text{Et}\quad AB^2=OA^2 & \Rightarrow & OAB \quad \text{est isocèle} \\ & & \textbf{Proposition vraie} \end{array}$$

5

$$\begin{array}{rcl} z=3+i\sqrt{3} & \Rightarrow & z=2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}\right)=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \\ & \text{Ainsi} & z^{3n}=(2\sqrt{3})^{3n}e^{i\frac{\pi n}{2}} \\ & \Rightarrow & \begin{cases} z^{3n}\in\mathbb{R} & \text{si n pair} \\ z^{3n}\in i\mathbb{R} & \text{si n impair} \end{cases} \\ & & \textbf{Proposition fausse} \end{array}$$

6

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt \quad \text{Ainsi} \quad P(2 \leq X \leq 3) = e^{-2\lambda}(1 - e^{-\lambda})$$

Proposition fausse

7

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{7u_n} \end{cases} \qquad \text{Pour} \quad n = 0, u_0 = 2 \quad \text{et} \quad 7^0 = 1$$

$$\text{Or} \quad 2 > 1 \quad \Rightarrow \quad u_0 > 7^0$$

Proposition fausse

8

$$\begin{aligned} M \in F \quad &\Leftrightarrow \quad ||3\overrightarrow{MG}|| = 6 \\ &\Leftrightarrow \quad ||3\overrightarrow{MG}|| = 2 \\ \text{D'ou} \quad & F = \mathcal{C}(G, 2) \end{aligned}$$

Proposition vraie

9

$$\begin{aligned} (S) : 3x - 5y = 2 \qquad & (x_0, y_0) = (-1, -1) \\ \Rightarrow \quad & \begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 3(-1) - 5(-1) = 2 \end{cases} \\ \Rightarrow \quad & 3(x+1) - 5(y+1) = 0 \\ \Rightarrow \quad & 3(x+1) = 5(y+1) \quad \text{or} \quad 5 \wedge 3 = 1 \\ \Rightarrow \quad & \exists k \in x / x = 5k - 1 \quad \text{et} \quad z = 3k - 1 \\ \text{Soit} \quad & S = \{(5k-1, 3k-1), k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Proposition vraie

10

$$\begin{aligned} &\text{Soit} && n > 3, n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{N}, 2 \leq k \leq n \\ n! + k \quad &= && 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times k \times (k+1) \times \ldots \times (n-1)n + k \\ &= && k(1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (k-1) \times (k+1) \times \ldots \times (n-1)n + 1) \\ &\text{Or} && k \geq 2 \Rightarrow k \neq 1 \\ &\Rightarrow && 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (k-1) \times (k+1) \times \ldots \times n + 1 \neq 1 \\ &\text{Ainsi} && n! + k \quad \text{est composé (non premier)} \end{aligned}$$

Proposition vraie

Corrigé 103

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases} \qquad \text{sur} \quad [0, 1]$$

1 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ est strictement croissante.

2 $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] ; g(x) = f(\tan(x))$

a. la fonction tan est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et f est dérivable sur [0,1].
D'où g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$\begin{aligned} g'(x) \quad &= \quad \tan'(x).f'(\tan(x)) \\ &= \quad (1 + \tan^2(x)) \times \frac{1}{1 + \tan^2(x)} \\ \text{D'où} \quad & g'(x) = 1 \qquad \forall x \in [0, 1] \end{aligned}$$

b.

$$\begin{array}{rcl}
\forall x \in [0,1], g'(x) = 1 & \Rightarrow & \displaystyle\int_0^x g'(t)dt = \int_0^x dt \\
& \Rightarrow & g(x) - g(0) = 1 \\
& \text{Or} & g(0) = f(\tan(0)) = f(0) = 0 \\
& \text{D'où} & \forall x \in [0,1], g(x) = x \\
g(x) = x & \Rightarrow & g\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4} \\
& \text{Or} & \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\
& \text{D'où} & f(1) = \frac{\pi}{4}.
\end{array}$$

3 Montrer que, pour tout x de [0,1], $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}$
f est croissante sur [0,1], alors $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$
or $f(1) = \frac{\pi}{4}$
D'où $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}$

4 Soit $I_n = \int_0^1 x^n f(x)dx$, Calculons I_0

$$\begin{array}{rcl}
I_0 & = & \displaystyle\int_0^1 f(x)dx \quad \text{posons} \quad \begin{cases} u = f(x) \Rightarrow u' = f'(x) \\ v' = 1 \Rightarrow v = x \end{cases} \\
& = & [xf(x)]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 xf'(x)dx \\
& = & \dfrac{\pi}{4} - \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx \quad \text{car} \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\
& = & \dfrac{\pi}{4} - \left[\dfrac{1}{2}\ln|1+x^2|\right]_0^1 \\
\text{D'où} & & I_0 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2
\end{array}$$

5 **a.**

$$\begin{array}{rcl}
\forall x \in [0,1], \begin{cases} x \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} & \Rightarrow & x^n f(x) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\
& \Rightarrow & \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx \geq 0 \\
& \text{Soit} & I_n \geq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*
\end{array}$$

b. Montrer que l $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \leq \frac{\pi}{4(n+1)}$

$$\begin{array}{rl}
\text{On a} & \begin{cases} x^n \geq 0 \\ 0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad \forall x \in [0,1] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\
\Rightarrow & \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx \leq \int_0^1 \frac{\pi}{4}x^n dx \\
\Rightarrow & I_n \leq \left[\dfrac{\pi}{4(n+1)}x^{n+1}\right]_0^1 \\
\text{D'où} & I_n \leq \dfrac{\pi}{4(n+1)}
\end{array}$$

c.

$$\begin{array}{rl}
\text{D'après ce qui précède} & 0 \leq I_n \leq \dfrac{\pi}{4(n+1)} \\
\text{Ainsi} & 0 \leq \lim I_n \leq 0 \\
\text{D'où} & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0
\end{array}$$

Corrigé 104

1 Nature et les éléments caractéristiques de la transformation S
$z' = 5e^{i\frac{\pi}{2}}z + 6i + 4 \quad \Rightarrow \quad S = S\left(\Omega, \frac{\pi}{2}, 5\right)$
avec$z_\Omega = \frac{6i+4}{1-5} = -\frac{3}{2}\left(i + \frac{2}{3}\right) = -1 - i\frac{3}{2}$

2 Démontrons que $x' = -5y + 4 \quad \text{et} \quad y' = 5x + 6$

$$\begin{aligned} z' = 5iz + 6i + 4 \quad &\Rightarrow \quad x' + iy' = 5i(x + iy) + 6i + 4 \\ &\Rightarrow \quad x' + iy' = (-5y + 4) + i(5x + 6) \\ \text{D'où} \quad &\left\{ \begin{array}{l} x' = -5y + 4 \\ y' = 5x + 6 \end{array} \right. \end{aligned}$$

3 $\{-3 \leq x \leq 5; -3 \leq y \leq 5\} = (E)$
Déterminons E tels que $-3x' + 4y' = 37$

$$\begin{aligned} -3x' + 4y' = 37 \quad &\Rightarrow \quad -3(-5y + 4) + 4(5x + 6) = 37 \\ &\Rightarrow \quad 15y - 12 + 20x + 24 = 37 \\ &\Rightarrow \quad 20x + 15y = 25 \\ &\Rightarrow \quad 4x + 3y = 5 \\ \text{Ainsi} \quad & x = 3k + 5 \quad \text{et} \quad y = -4k - 5 \qquad k \in \mathbb{Z} \\ \text{Or} \quad &\left\{ \begin{array}{l} -3 \leq x \leq 5 \\ -3 \leq y \leq 5 \end{array} \right. \\ \Rightarrow \quad &\left\{ \begin{array}{l} -3 \leq 3k + 5 \leq 5 \\ -3 \leq -4k - 5 \leq 5 \end{array} \right. \\ \Rightarrow \quad & k \in \{-2, -1\} \\ \text{Ainsi} \quad & (E) = \{(-1, 3); (2, -1)\} \end{aligned}$$

4 $M' = S(M)$

a. Montrons que $x' + y' \equiv 0[5] \qquad (x' + y' = 5k)$

$$\begin{aligned} x' + y' = -5y + 4 + 5x + 6 \quad &\Rightarrow \quad x' + y' = 5(x - y + 2) \\ \text{D'où} \quad & x' + y' \equiv 0[5] \end{aligned}$$

b. Montrons que $x' - y'$ et $x' + y'$ ont la même parité.
Il suffit de montrer que $(x' - y') + (x' + y') \equiv 0[2]$

$$\begin{aligned} (x' - y') + (x' + y') = 2x' \quad \text{Or} \quad & x' \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \quad & (x' - y') + (x' + y') \equiv 0[2] \\ \text{D'où} \quad & x' - y' \quad et \quad x' + y' \quad \text{ont la même parité} \end{aligned}$$

c. Déterminons E tel que : $x^{2\prime} - y^{2\prime} = 20$.

$$\begin{aligned} x^{2\prime} - y^{2\prime} = 20 \quad &\Rightarrow \quad (x' - y')(x' + y') = 20 \\ &\Rightarrow \quad (x' - y')(x' + y') = 2 \times 10 = 4 \times 5 = 1 \times 20 \\ \text{Or} \quad & x' - y' \quad et \quad x' + y' \quad \text{ont la même parité} \\ \Rightarrow \quad &\left\{ \begin{array}{l} x' - y' = 2 \\ x' + y' = 10 \end{array} \right. \text{ ou } \begin{array}{l} x' - y' = 10 \\ x' + y' = 2 \end{array} \text{ ou } \begin{array}{l} x' - y' = -2 \\ x' + y' = -10 \end{array} \text{ ou } \begin{array}{l} x' - y' = -10 \\ x' + y' = -2 \end{array} \\ \Rightarrow \quad &\left\{ \begin{array}{l} x' = 6 \\ y' = 4 \end{array} \right. \text{ ou } \begin{array}{l} x' = 6 \\ y' = -4 \end{array} \text{ ou } \begin{array}{l} x' = -6 \\ y' = -4 \end{array} \text{ ou } \begin{array}{l} x' = -6 \\ y' = 4 \end{array} \\ \text{Ainsi} \quad &\left\{ \begin{array}{l} -5y = 6 - 4 \\ 5x = 4 - 6 \end{array} \right. \text{(impossible)} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} 5x = -6 - 4 \\ -5y = 6 - 4 \end{array} \right. \text{(impossible)} \\ & \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} 5y = 6 + 4 \\ 5x = -6 - 4 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} 5x = 6 + 4 \\ 5x = -6 + 4 \end{array} \right. \text{(impossible)} \\ \text{D'où} \quad & (x, y) = (-2, 2) \\ \text{Soit} \quad & (E) = \{(-2, 2)\} \end{aligned}$$

54 ENS 2013 (Géométrie)

Corrigé 105

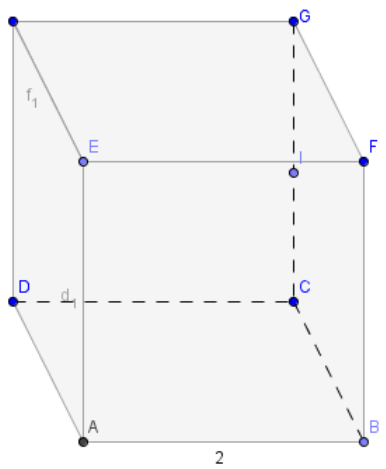
1 A, B et $C \in (\mathcal{P})$, I milieu de $[BC]$ et $\overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

a. Déterminons une équation de la droite (IJ) dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$$\begin{array}{rcl} I = mil[BC] & \Rightarrow & \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \\ & \Rightarrow & 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \\ & \Rightarrow & \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ & \text{Ainsi} & I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} \qquad J = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}_{(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} \\ \text{Soit} \quad M(x, y) \in (IJ) & \Rightarrow & \overrightarrow{IM} \parallel \overrightarrow{IJ} \\ & \Rightarrow & det(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IJ}) = 0 \\ & \Rightarrow & \begin{vmatrix} x - \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \\ y - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \\ & \Rightarrow & -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6}\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0 \\ & \Rightarrow & -\frac{1}{2}x + \frac{5}{6}y + \frac{1}{4} - \frac{5}{12} = 0 \\ & \text{D'où} & (IJ) : 3x - 5y + 1 = 0 \end{array}$$

b. Exprimons le point d'intersection K de (IJ) et (AC) comme barycentre de A et C

$$\begin{array}{rcl} \text{Posons} \quad K = bar\{(A, \alpha); (C, \lambda)\} & \Rightarrow & K\left(0, \frac{\lambda}{\alpha + \lambda}\right)_{(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} \\ K = (IJ) \cap (AC) & \Rightarrow & \frac{5\lambda}{\alpha + \lambda} = 1 \quad \text{soit} \quad \alpha = 4\lambda \\ & \text{D'où} & K = bar\{(A, 1); (C, 4)\} \end{array}$$



2

a. Calculons $d(A,(EFI))$
Soit le repère $(A,B.D,E)$

$$\begin{array}{ll} \text{On a} & A(0,0,0) \quad B(1,0,0) \quad D(0,1,0) \quad E(0,0,1) \\ & C(1,1,0) \quad G(1,1,1) \quad F(1,0,1) \quad H(0,1,1) \quad I(1,1,\frac{1}{2}) \\ & (EFI) : ax+by+cz+d=0 \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{EF}\wedge\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\overrightarrow{EF}\wedge\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (EFI) : y+2z+2d=0$$

$$\begin{array}{ll} \text{Or} & E\in(EFI)\Rightarrow d=-1 \\ \text{Soit} & (EFI) : y+2z-2=0 \\ \text{Ainsi} & d(A,(EFI)) = \dfrac{|-2|}{\sqrt{1+4}}\times 2 \quad \text{car} \quad AB=2 \\ \text{D'où} & d(A,(EFI)) = 2\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}\times u.l = \dfrac{4}{\sqrt{5}}.u.l \end{array}$$

b. Calculons $d(B,(AI))$

3 $I(0,1) \quad F(-1,0)$
Soit le repère $(F,\vec{v},\vec{u})$

a.

$$\text{On a} \quad : \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} +\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}_{(O,\vec{i},\vec{j})} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}_{(O,\vec{i},\vec{j})}$$

$$\overrightarrow{FI} = \vec{i}+\vec{j} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{v} \quad \Rightarrow \quad I = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{(F,\vec{v},\vec{u})}$$

Ainsi le paramètre de $(\mathcal{P})$ est $p=\sqrt{2}$. Alors on a dans le repère $(I,\vec{v},\vec{u})$: $Y^2-2\sqrt{2}X=0$

$$\text{Soit} \quad \mathcal{P}_{(I,\vec{v},\vec{u})} : Y^2-2\sqrt{2}X=0$$

b. Equation de $(\mathcal{P})$ dans $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{ll} \text{On a bien} & \left\{\begin{array}{l} X\vec{u}+Y\vec{v}=\overrightarrow{FM} \\ x\vec{i}+y\vec{j}=\overrightarrow{OM} \end{array}\right. \qquad M\in\mathcal{P} \\ \Rightarrow & \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FM}=x\vec{i}+y\vec{j}=-\vec{i}+X\vec{u}+Y\vec{v} \\ \Rightarrow & X(\sqrt{2}\vec{i}-\sqrt{2}\vec{j})+Y(-\sqrt{2}\vec{i}-\sqrt{2}\vec{j})=(x+1)\vec{i}+y\vec{j} \\ \Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} \sqrt{2}(X-Y)=x+1 \\ -\sqrt{2}(X+Y)=y \end{array}\right. \\ \Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} Y=-\frac{\sqrt{2}}{4}(x+y+1) \\ X=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y+1) \end{array}\right. \\ \text{Ainsi} & \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{4}(x+y+1)\right]^2-2\sqrt{2}\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-y+1)\right]=0 \\ \Rightarrow & \dfrac{1}{8}(x^2+y^2+2xy+2x+2y+1)-2x+2y-2=0 \\ \text{Soit} & \mathcal{P}_{\mathcal{R}} : x^2+y^2+2xy-14x+18y-15=0 \end{array}$$

4 $f : \left\{\begin{array}{l} x'=2x-y+1 \\ y'=-x+2y-1 \end{array}\right.$

a. $Inv(f)=\{M(x,y)\in\mathcal{P}/f(M)=M\}$

$$\begin{aligned} M\in Inv(f) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=2x-y+1\\ y=-x+2y-1\end{cases}\\ \text{Soit} \quad & x-y+1=0\\ \text{Donc} \quad & Inv(f)=(D): x-y+1=0\end{aligned}$$

b. Posons $G_{Inv(f)}$ l'ensemble des droites globalement invariantes par f.

$$\begin{aligned} \text{Soit} \quad (D): ax+by+c=0 &\\ (D)\in G_{Inv(f)} \quad &\Rightarrow \quad f((D))=(D)\\ &\Rightarrow \quad \forall M\in(D), \quad f(M)\in(D)\\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} ax+by+c=0\\ ax'+by'+c=0\end{cases}\\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} ax+by+c=0\\ a(2x-y+1)+b(-x+2y-1)+c=0\end{cases}\\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} ax+by+c=0 \qquad (D)\\ (2a-b)x+(2b-a)y+(a-b+c)=0 \qquad (D)\end{cases}\\ \text{Or} \quad (D)=(D) \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} 2a-b=a\\ 2b-a=b\\ a-b+c=c\end{cases}\\ \text{Soit} \quad a=b \quad & \begin{cases} (D): x+y+\frac{c}{a}=x+y+\lambda=0 \quad \text{si} \quad a\neq 0\\ (D): c=\lambda=0 \quad \text{si} \quad a=0\end{cases}\\ \text{Ainsi} \quad G_{Inv(f)} \quad &= \quad \{(D)\in(P)/(D): \lambda=0 \quad \text{ou} \quad x+y+\lambda=0, \quad \lambda\in\mathbb{R}\}\end{aligned}$$

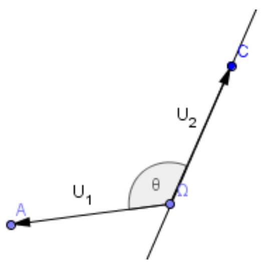
5 $S_d=S_{(d)}$

a. Expression analytique de $S_{(d_1)}$ où $(d_1): x-\sqrt{3}y-1=0$
Soit $M(x,y)$ et $M'(x',y')\in(P)/M'=S_{(d_1)}(M)$

$$I=mil[MM']\begin{pmatrix}\frac{x+x'}{2}\\ \frac{y+y'}{2}\end{pmatrix}\in(d_1) \qquad \overrightarrow{MM'}=\lambda\vec{n},\lambda\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad \vec{n}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}\perp(d_1)$$

$$\begin{aligned} \text{Soit} \quad & \begin{cases} x'=x+\lambda\\ y'=y-\lambda\sqrt{3}\\ \frac{x+x'}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}(y'+y)-1=0\end{cases}\\ \Rightarrow \quad & 2x+\lambda-\sqrt{3}(2y-\lambda\sqrt{3})-2=0\\ \Rightarrow \quad & 4\lambda+2x-2\sqrt{3}y-2=0\\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{4}(-2x+2\sqrt{3}y+2)\\ \text{Alors} \quad & S_{(d_1)}: \begin{cases} x'=\frac{1}{2}(x+\sqrt{3}y+1)\\ y'=\frac{1}{2}(x\sqrt{3}-y+\sqrt{3})\end{cases}\end{aligned}$$

b. nature et les éléments caractéristiques de $S_{(d_1)}\circ S_{(d_2)}$ avec $(d_2): x=1$.



$$\begin{array}{rcl}
(d_1)\cap(d_2)=\{\Omega\}\neq\emptyset & \Rightarrow & S_{(d_1)}\circ S_{(d_2)}=R_{(\Omega,2\theta)} \quad \text{avec} \quad \Omega(1,0)\\
\text{Cherchons} \quad \theta & & \\
\overrightarrow{u_2}(0,1), \quad \overrightarrow{u_1}(-\sqrt{3},-1) & & \overrightarrow{u_2}\wedge\overrightarrow{u_1}\\
\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_1}=||\overrightarrow{u_2}||.||\overrightarrow{u_1}||.\cos\theta & \Rightarrow & 2\cos\theta=-1\\
& \Rightarrow & \cos\theta=-\dfrac{1}{2}\\
& \Rightarrow & \theta=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\\
& \text{Or} & \theta>\dfrac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \theta<\pi\\
& \text{Soit} & \theta=\dfrac{2\pi}{3}\\
& \text{D'où} & S_{(d_1)}\circ S_{(d_2)}=R_{(\Omega,\frac{4\pi}{3})}=R_{(\Omega,-\frac{2\pi}{3})}
\end{array}$$

6 $S : z'=(-1+i)z-1-2i$

a.

$$\begin{array}{l}
z'=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}z-1-2i\\
\text{Ainsi,} \quad S=S_{(\Omega,\frac{3\pi}{4},\sqrt{2})} \qquad \text{avec} \quad z_\Omega=\dfrac{-1-2i}{1-(-1+i)}=-i
\end{array}$$

b. $S\circ T=t_{2\vec{i}}$

$$\begin{array}{rcl}
S : z'=(-1+i)z-1-2i & \Rightarrow & x'+iy'=(-1+i)(x+iy)-1-2i\\
& \Rightarrow & x'+iy'=-x-iy+ix-y-1-2i\\
& \Rightarrow & (S) : \begin{cases} x'=-x-y-1\\ y'=x-y-2\end{cases}\\
& \text{Posons} & T : \begin{cases} x'=ax+by+c\\ y'=a'x+b'y+c'\end{cases}\\
& \text{Alors} & S\circ T : \begin{cases} x'=ax-by-c-a'x-b'y-c'-1\\ y'=ax+by+c-a'x-b'y-c'-2\end{cases}\\
& \Rightarrow & S\circ T : \begin{cases} x'=-(a+a')x-(b+b')y-(c+c'+1)\\ y'=(a-a')x+(b-b')y+(c-c'-2)\end{cases}\\
& \text{Or} & S\circ T=t_{2\vec{i}} : \begin{cases} x'=x+2\\ y'=y\end{cases}\\
& \text{Ainsi} & \begin{cases} -(a+a')=1\\ a-a'=0\end{cases} ; \begin{cases} -(b+b')=0\\ b-b'=1\end{cases} ; \begin{cases} -(c+c'+1)=2\\ c-c'-2=0\end{cases}\\
& \Rightarrow & \begin{cases} a=a'=-\frac{1}{2}\\ b=-b'=\frac{1}{2}\\ c=-\frac{1}{2}\\ c'=-\frac{5}{2}\end{cases}\\
& \text{Alors} & T : \begin{cases} x'=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}\\ y'=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{5}{2}\end{cases}\\
& \Rightarrow & x'+iy'=-\dfrac{1}{2}(x+iy)+\dfrac{1}{2}(-ix+y)-3\\
& \Rightarrow & x'+iy'=-\dfrac{1}{2}(x+iy)-i\dfrac{1}{2}(x+iy)-3\\
& \Rightarrow & x'+iy'=\dfrac{1}{2}(-1-i)(x+iy)-3\\
& \Rightarrow & z'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}z-3\\
& \text{Alors} & T=S_{(\Omega',\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{3\pi}{4})} \quad \text{avec} \quad z_{\Omega'}=\dfrac{-3}{1-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)}
\end{array}$$

7 $(\mathcal{C}) : \quad -4x^2-8x+2y+y^2=2.$

a.

$$
\begin{array}{lll}
(\mathcal{C}) & : & -4x^2 - 8x + 2y + y^2 = 2 \\
 & \Rightarrow & -4\left[(x+1)^2 - 1\right] + \left[(y+1)^2 - 1\right] = 2 \\
 & \Rightarrow & -4(x+1)^2 + 4 + (y+1)^2 - 1 = 2 \\
 & \Rightarrow & -4(x+1)^2 + (y+1)^2 = -1 \\
 & \Rightarrow & \dfrac{(x+1)^2}{(a)^2} - \dfrac{(y+1)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{avec} \quad a = \dfrac{1}{2}, b = 1 \\
 & \text{Donc} & \mathcal{C} \quad \text{est une Hyperbole.}
\end{array}
$$

b. Construction à faire!!!

8 $ABCD$ un carré et (E_m) tel que $AM^2 + BM^2 + CM^2 + mDM^2 = 0$

a.

$$
\begin{array}{lll}
A \in E_m & \Rightarrow & AB^2 + AC^2 + mAD^2 = 0 \\
 & \text{Donc} & ABCD \quad \text{carré} \Rightarrow \begin{cases} AD = AB \\ AC = AB\sqrt{2} \end{cases} \\
 & \Rightarrow & AB^2 + 2AB^2 + mAB^2 = 0 \\
 & \Rightarrow & 3 + m = 0 \quad \text{car} \quad AB \neq 0 \\
 & \text{Soit} & m = -3 \\
 & \text{Ainsi} & \text{On a :} \quad AM^2 + BM^2 + CM^2 - 3DM^2 = 0 \\
 & & \text{Soit le point} \quad O \quad \text{le centre du carré.} \\
 & \Rightarrow & OA^2 + OM^2 - 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{CM} + 3BO^2 + OM^2 + \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{OM} + CO^2 + OM^2 + \overrightarrow{CO}.\overrightarrow{OM} + (-3OD^2 - 3OM^2 + \\
 & \Rightarrow & \overrightarrow{OM}.(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OD}) = 0 \\
 & \Rightarrow & \overrightarrow{OM}.(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) = 0 \\
 & \Rightarrow & \overrightarrow{OM}.(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB}) = 0 \\
 & \Rightarrow & \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{DB} = 0 \\
 & \text{Ainsi} & (E_{(-3)}) \quad \text{est la droite} \quad (AC)
\end{array}
$$

b.

$$
\begin{array}{lll}
B \in (E_m) & \Rightarrow & AB^2 + BC^2 + mBD^2 = 0 \\
 & \Rightarrow & AB^2 + 2AB^2 + mAB^2 = 0 \\
 & \Rightarrow & (2m+2)AB^2 = 0 \Rightarrow \quad m = -1 \\
 & \text{Ainsi} & (E_{(-1)}) : AM^2 + BM^2 + CM^2 - DM^2 = 0 \\
 & \text{Soit} & G = bar\left(\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \\
 & \Rightarrow & AG^2 + BG^2 + CG^2 - DG^2 + 2GM^2 = 0 \\
 & \Rightarrow & GM^2 = \dfrac{1}{2}(DG^2 - AG^2 - BG^2 - CG^2)
\end{array}
$$

$$Or \quad \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} - \overrightarrow{DG} = \vec{0}$$

Alors il suffit de calculer $\lambda = \frac{1}{2}(DG^2 - AG^2 - BG^2 - CG^2)$

- Si $\lambda = 0 \rightarrow (E_{-1}) = \{G\}$
- Si $\lambda > 0 \rightarrow (E_{-1}) = \mathcal{C}_{(G,\sqrt{\lambda})}$
- Si $\lambda < 0 \rightarrow (E_{-1}) = \emptyset$

9 $A(1,1,-1)$ et $B(2,-2,1)$ deux points de (ε)

a. $(\varepsilon_1) = \{M \in \varepsilon / \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}\}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} &= \left[(x-1)\vec{i} + (y-1)\vec{j} + (z-1)\vec{k}\right] \wedge (1,-3,2) \\
&= 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\
&\Rightarrow (x-1)(-3\vec{k} - 2\vec{j}) + (y-1)(-\vec{k} + 2\vec{i}) + (z-1)(\vec{j} + 3\vec{i}) = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\
\text{Ainsi} &\left\{\begin{array}{l} 2y - 2 + 3z - 3 = 3 \\ -2x + 2 + z - 1 = 1 \\ -3x + 3 - y + 1 = -1 \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2y + 3z = 8 \\ -2x + z = 0 \\ -3x - y = -5 \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2y + 3z = 8 \\ 2x = z \\ -3x - y = -5 \end{array}\right. \qquad \text{impossible} \\
\text{D'où} &\quad (\varepsilon_1) = \emptyset
\end{aligned}$$

b. $(\varepsilon_2) = \{m \in \varepsilon / \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 3$

$$\begin{aligned}
&\text{Soit} \quad H = P_{(AB)}(M) \\
&\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 3 \Rightarrow \overline{AH}.\overline{AB} = 3 \\
&\Rightarrow \overline{AH} = \frac{3}{\overline{AB}}
\end{aligned}$$

Orientons la droite (AB) de A vers

$$\text{Ainsi} \quad (\varepsilon_2) = (H, \vec{u}) \qquad \text{avec} \quad \vec{u} \perp \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overline{AH} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

10 $\forall m \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}, \quad h_m = \{M \mapsto M' / \overrightarrow{OM'} = (m+1)\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}\right)$

a.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM'} &= (m+1)(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}) \\
&= (m+1)((x+1)\overrightarrow{i} + (y+2)\overrightarrow{j} + (z+3)\overrightarrow{k}) \quad \text{avec} \quad M(x,y,z) \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x' = (m+1)x + (m+1) = (m+1)x + \frac{m+1}{-m}(1-(1+m)) \\ y' = (m+1)y + 2(m+1) = (m+1)y + \frac{2(m+1)}{-m}(1-(1+m)) \\ z' = (m+1)z + 3(m+1) = (m+1)z + \frac{3(m+1)}{-m}(1-(1+m)) \end{array}\right. \\
&\text{D'où} \quad h_m = m+1 \quad \text{et} \quad \Omega_m\left(-\frac{m+1}{m}; -\frac{2(m+1)}{m}; -\frac{3(m+1)}{m}\right)
\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}
\text{On a} \quad &: \left\{\begin{array}{l} x_m = -\frac{m+1}{m} \\ y_m = -2\frac{m+1}{m} \\ z_m = -3\frac{m+1}{m} \end{array}\right. \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_m = 2x_m \\ z_m = 3x_m \end{array}\right. \\
&\Rightarrow x_m = \frac{y_m}{2} = \frac{z_m}{3} \\
&\text{D'où} \quad \Omega_m \in (\Delta) : x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \quad \text{privé du point O}
\end{aligned}$$

.

55 ENS 2014 (Analyse-Algèbre-Probabilité)

Corrigé 106

Corrigé 107

$$\begin{cases} ax + y + z = a^2 \\ 2ax + ay = 2a^2 \\ ax + y + az = 1 \end{cases}$$

- Le déterminant du système est

$$\begin{aligned} det(S) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2a & a & 2 \\ a & 1 & a \end{vmatrix} &= (a^3 + 2a + 2a) - (a^2 + 2a + 2a^2) \\ &= a^3 - 3a^2 - 2a \\ &= a(a-1)(a-2) \end{aligned}$$

- Celui de x est

$$\begin{aligned} det(x) = \begin{vmatrix} a^2 & 1 & 1 \\ 2a^2 & a & 2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} &= (a^4 + 2 + 2a^2) - (a + 2a^2 + 2a^3) \\ &= a^4 - 2a^3 - a + 2 \\ &= a(a-1)(a-2)(a^2 + a + 1) \end{aligned}$$

- Celui de y est

$$\begin{aligned} det(y) = \begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ 2a & 2 & 2a^2 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} &= (2a + 2a^3 + 2a^4) - (2a^3 + 2a^4 + 2a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Celui de z est

$$\begin{aligned} det(z) = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ a & 2a^2 & 2a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} &= (2a^3 + 2a^3 + a^2) - (2a^3 + 2a + a^4) \\ &= -a^4 + 2a^3 + a^2 - 2a \\ &= -a(a-1)(a-2)(a+1) \end{aligned}$$

1 Aucune solution

Si $a = 0 \Rightarrow det(S) = 0, det(x) \neq 0$ d'où $S = \varnothing$

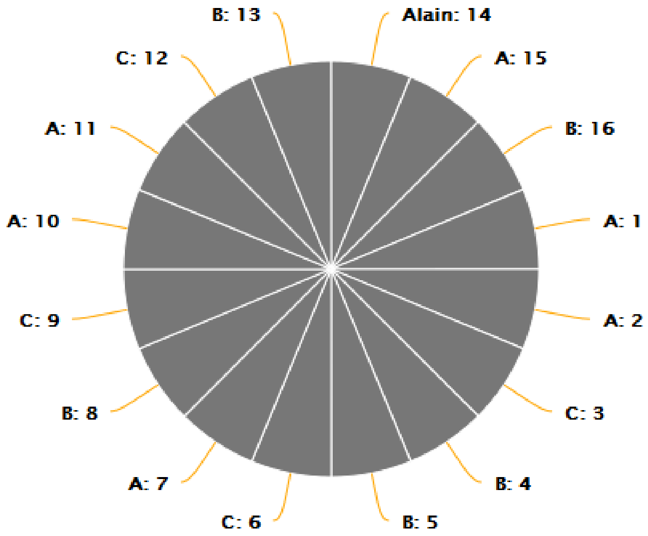
Donc $S = \varnothing$ si $a = 0$

2 Une solution si $det(S) \neq 0$
$det(S) \neq 0$ Si $a \neq 0$, $a \neq 1$ et $a \neq 2$

Soit $a \in R\{0, 1, 2\}$

3 Une infinité de solution $\Rightarrow det(S) = det(x) = det(y) = det(z) = 0$
Cela est réalisé si $a = 1$ ou $a = 2$
Donc $S = \varnothing$ si $a = 0$

Corrigé 108 Partie I



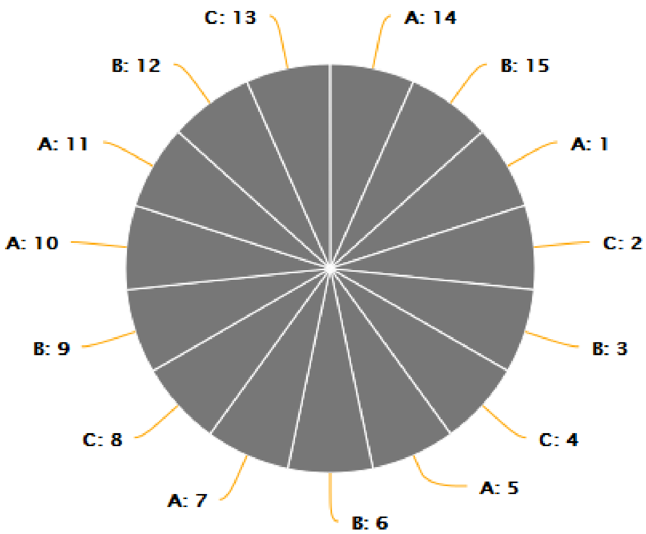
1 Les numéros attribués aux enfants de B sont : 3, 6, 9, 12 et 15.

2 Les numéros attribués aux enfants de C sont : 2, 4, 8et 13.

3 Les numéros attribués aux deux derniers enfants de A sont : 11 et 1.

4 l'aîné de A a pour numéro 1

Partie II



1 B : 4, 5, 8, 13 et 16

2 C : 3, 6, 9 et 12

3
- *Alain* : 14
- A : 1, 2, 7, 10, 11 et 15

Corrigé 109

Problème
$f(x) = (20x+10)e^{-(1/2)x}$

1 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2 $f'(x) = \left[20 + (20x+10)\left(-\frac{1}{2}\right)\right] e^{-(1/2)x} = (-10x+15)e^{-(1/2)x}$
$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$
- Si $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ alors $f'(x) \geq 0$ soit f croissante
- Si $x \geq \frac{3}{2}$ alors $f'(x) \leq 0$ soit f décroissante

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	10	$\nearrow$	$f(\frac{1}{2})$	$\searrow$	0

3 Posons $g(x) = f() - 10$, On a $f'(x) = g'(x)$, d'où le tableau de variation :

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$f(\frac{3}{2}) - 10$	$\searrow$	-10

d'après le tableau de variation, $\exists x_1, x_2, \quad x_1 < x_2 / \; g(x_1) = g(x_2) = 0$
car $f(0) \times g(3/2) = 0$ et $g(3/2) \times \lim_{x\to+\infty} g(x) < 0$. Ainsi $x_1 = 0$; donc $x_2 > 0$
D'où $\exists! a \in]0; +\infty[/ \; f(a) = 10$
Encadrons a : en utilisant la méhode de dichotomie on trouve très rapidement une valeur de a à 10^{-3} près.

4 Tracé de la courbe

5 Cacul de l'intégrale $I = \int_0^3 f(x)dx$

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^3 f(x)dx \\
&= \int_0^3 (20x+10)e^{(-1/2)x}dx \\
&= -\left[e^{(-1/2)x} \times \frac{4}{2}(20x+10)\right]_0^3 + 20 \times (+2) \int_0^3 (20x+10)e^{(-1/2)x}dx \\
&= -2\left[e^{(-1/2)x} \times (20x+10)\right]_0^3 - 80\left[e^{(-1/2)x}\right]_0^3 \\
&= 140e^{(-3/2)x} - 80e^{(-3/2)x} + 20 + 80
\end{aligned}$$

d'où $I = -220e^{(-3/2)x} + 100$

Partie B :
$y(0) = 10 \; y' + \frac{1}{2}y = 20e^{(-1/2)t} \; (E)$

érifions que f est solution de l'équation (E) Il suffit de montrer que $f' + \frac{1}{2}f = 20e^{(-1/2)t}$

$$\begin{aligned} f(t) = (20t+10)e^{(-1/2)t} \quad &\Rightarrow \quad f'(t) = 20e^{(-1/2)t} - \frac{1}{2}(20t+10)e^{(-1/2)t} \\ &\Rightarrow \quad f'(t) = -\frac{1}{2}f(t) + 20e^{(-1/2)t} \end{aligned}$$

Soit $f'(t) + \frac{1}{2}f(t) = 20e^{(-1/2)t}$ Donc f vérifie l'équation $(E)g(0) = 10$

1 **a.** Démontrons que la fonction $g - f$ est solution sur l'intervalle $[0; +\infty[$, de l'équation différentielle (E')

On a : $\begin{cases} f' + \frac{1}{2}f = 20e^{(-1/2)t} & \text{car } f \text{ solution de } (E) \\ g' + \frac{1}{2}g = 20e^{(-1/2)t} & \text{car } g \text{ solution de } (E) \end{cases}$

$\Rightarrow g' - f' + \frac{1}{2}g - \frac{1}{2}f = 0 \Rightarrow (g' - f') + \frac{1}{2}(g - f) = 0$ D'où

$g - f$ solution de (E')

b. Résolvons (E')

$$\begin{aligned} (E') : y + \frac{1}{2}y = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = -1/2 \\ &\Rightarrow \quad \ln y = -1/2t + Cte \\ &\Rightarrow \quad y = Ae^{(-1/2)t} \quad A \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

D'où $S' = \left\{t \mapsto Ae^{(-1/2)t\ ;\ A\in\mathbb{R}}\right\}$

c. Conclusion

$$\begin{aligned} y = Ae^{(-1/2)t} \quad &\Rightarrow \quad g - f = Ae^{(-1/2)t}, \quad A \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \quad g = f + Ae^{(-1/2)t}, \quad A \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi $S' = \left\{t \mapsto (20t + 10 + A)e^{(-1/2)t\ ;\ A\in\mathbb{R}}\right\}$

Or $g(0) = f(0) = 10 \Rightarrow 10 = 10 + Ae^0 = 10 + A \Rightarrow A = 0$ alors $g = f$

On conclut que f est l'unique solution de (E) telle que $f(0) = 10$

2 On a bien $u = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ sur $[a, b]$, $a < b \Rightarrow \theta = \frac{1}{3-0}\int_0^3 f(x)dx = \theta = \frac{1}{3}\int_0^3 f(x)dx$. Or $I = \int_0^3 f(x)dx$

D'où $\theta = \frac{1}{3}I$

56 ENS 2014 (Géométrie)

Corrigé 110

$(E) : z(z+i) = 0$ ou $(\mathcal{R})$ avec $(\mathcal{R}) : 2\left(\arg(z+i)\right) - \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \pi$

1 Montrons que $(\mathcal{R}) \Leftrightarrow Re\left(\frac{z^2}{z}\right) = 0$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}) \quad &\Leftrightarrow \quad 2\arg(z+i) - \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \text{k} \ \in \mathbb{Z}\\
&\Leftrightarrow \quad \arg(z+i)^2 - \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \text{k} \ \in \mathbb{Z}\\
&\Leftrightarrow \quad \arg\left(\frac{(z+i)^2}{z}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \text{k} \ \in \mathbb{Z} \text{ avec } z \neq 0\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(z+i)^2}{z} \in i\mathbb{R} \text{ avec } z \neq 0\\
&\Leftrightarrow \quad Re\left(\frac{Z^2}{z}\right) = 0 \text{ avec } Z = z+i \text{ avec } z \neq 0
\end{aligned}$$

D'où $(\mathcal{R}) \Rightarrow Re\left(\frac{Z^2}{z}\right) = 0$ avec $Z = z+i$ et $z \neq 0$

2 $(E) = \left\{M(z) \in (\mathcal{P}) / z(z+i) = 0 \text{ ou } Re\left(\frac{(z+i)^2}{z}\right) \text{ et } z \neq 0\right\}$

$$\begin{aligned}
M(z) \in (E) \quad &\Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} z(z+i) = 0 \\ ou \\ Re\left(\frac{(z+i)^2}{z}\right) \end{array}\right. \quad z \neq 0\\
&\Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{cl} z = -i \text{ car } z \neq 0 & (1) \\ ou & \\ Re\left(\frac{(z+i)^2}{z}\right) = 0 & (2) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$(1) \Rightarrow M(z) \in (d_1) : y = -1$

$$\begin{aligned}
\text{Posons } z = x+iy \quad &\Rightarrow \quad z+i = x + (y+1)i\\
&\Rightarrow \quad (z+i)^2 = x^2 - (y+1)^2 + 2x(y+1)i
\end{aligned}$$

Ainsi $\forall z \neq 0$, $(2) \Rightarrow Re\left(\frac{x^2-(y+1)^2+2x(y+1)i}{x+iy}\right) = 0$

Alors $\Rightarrow Re\left(\frac{x\left(x^2-(y+1)^2\right)+2xy(y+1)+Ai}{x^2+y^2}\right) = 0 \ A \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x\left(x^2 - y^2 - 2y - 1\right) + 2xy^2 + 2xy = 0$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 0 \\ x^2+y^2+1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 0 \\ Ou \\ x^2+y^2 = 0 \end{array}\right.$

$(2) \Rightarrow M \in \mathcal{C}_{(0,1)} \cup (d_2)$, $(d_2) : x = 0$

Donc $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{(0,1)}$ et $d = d_1$ ou $d = d_2$

3 A vous la construction

4 Soit $M \in (E) \cap (\Delta)$

Corrigé 111

$d(0,\mathcal{C}) = OA$

1 $\mathcal{C} : y = -2x + 1$

a. $\mathcal{C}$ est une droite affine.

b. $d(0,\mathcal{C}) = \frac{|0+2\times 0-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}$

d'où $d(0,\mathcal{C}) = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}u.l$

c. Déterminons $H \in \mathcal{C}$ tel que $d(0,\mathcal{C}) = OH$

$H(x,y) \in (\mathcal{C})\ \ y = -2x + 1$ (*)

Or

$$\begin{aligned} d(0,\mathcal{C}) = OH \quad & \Rightarrow \quad \overrightarrow{OH} // \overrightarrow{n} \quad (\overrightarrow{n}(2,1) \perp (\mathcal{C})) \\ & \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x & z \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ & \Rightarrow \quad x - 2y = 0 \quad (**) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } (*) \text{ et } (**) \quad & \Rightarrow \quad \begin{cases} y = -2x + 1 \\ x = 2y \end{cases} \\ & \Rightarrow \quad 5y = 1 \\ & \Rightarrow \quad y = \frac{1}{5} \text{ et } x = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

D'où on a $H\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$

2 $\mathcal{C} : y = 2x^2 - 1$ et $f(x) = 2x^2 + 1$

a. Exprimons $g(x) = OM^2 = f^n(x)$

$$\begin{aligned} g(x) &= OM^2 \\ &= x^2 + y^2 \quad \text{Or } y = 2^2 - 1 \left(y^2 = 4x^4 - 4x^2 + 1\right) \\ &= 4x^4 - 3x^2 + 1 \end{aligned}$$

D'où $g(x) = 4x^4 - 3x^2 + 1$

b. Extréma de g

$g(x) = 4x^4 - 3x^2 + 1 \Rightarrow g'(x) = 16x^3 - 6x$

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 \quad & \Rightarrow \quad 2x(8x^2 - 3) = 0 \\ & \Rightarrow \quad x^2 = 0 \quad \text{Ou} \quad x^2 = \frac{3}{8} \\ & \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{Ou} \quad x = \pm\frac{\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$g(0) = 1$ $g(\frac{\sqrt{6}}{4})$ et $g(-\frac{\sqrt{6}}{4})$ sont les extréma, soit 1 et $\frac{7}{16}$ sont les extréma

c. Les points $A_1\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{7}{16}\right)$ et $A_2\left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{7}{16}\right)$ minimisent OM

Ainsi $d(0,\mathcal{C}) = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\frac{7}{16}\right)^2} = \sqrt{\frac{16\times 16+49}{16^2}} = \sqrt{\frac{145}{16^2}}$

D'où $d(0,\mathcal{C}) = \sqrt{\frac{145}{16^2}}$

* Ces points sont A_1 et A_2

Corrigé 112

$2z' = z + i\bar{z} + 2 - 2i$

1 $= \{M(z = x+iy) \in \mathcal{P} / F(M) = M\}$

$$\begin{aligned} F(M) = M &\Leftrightarrow 2z' = z + i\bar{z} + 2 - 2i \quad (z' = z) \\ &\Leftrightarrow 2(x' + iy) = (x+y)(1+i) + 2(1-i) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}(x+y+2) \\ y' = -\frac{1}{2}(x+y-2) \end{cases} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} z' = z &\Rightarrow x' = x \quad \text{et} \quad y' = y \\ &\Rightarrow 2(x' + iy) = (x+y)(1+i) + 2(1-i) \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2x &= x+y+2 \\ 2y &= x+y-2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x-y &= 2 \\ x-y &= 2 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où $Inv(F) = (\Delta) : x - y = 2$

2 On a bien $\begin{cases} 2x' &= (x+y)+2 \\ 2y' &= (x+y)-2 \Rightarrow (x+y) = 2+2y' \end{cases}$

Alors $2x' = 2y' + 2 + 2$

D'où $M \in (D) : 2x' - 2y' = 4 \ (x' - y' = 2)$

3 $2z' = z + iz' + 2 - 2i$ or $z + i\bar{z} = (x+y) + i(x+y)$

$\Rightarrow 2z' - 2z = x + y - 2x + i(x+y) - 2y + 2 - 2i$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } 2z' - 2z &= (-x+y) + i(x-y) + 2(1-i) \\ &= (-x+y)(1-i) + 2(1-i) \\ &= (-x+y+2)(1-i) \end{aligned}$$

$\Rightarrow z' - z = \frac{1}{2}(-x+y+2)(1-i)$ Posons $\lambda = \frac{1}{2}(-x+y+2) \in \mathbb{R}$

Ainsi $z' - z = \frac{1}{2}\lambda(1-i) \ \lambda \in \mathbb{R}$

4 Déduisons ainsi que $\forall \overrightarrow{u} // (D)$, $\overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{u}$

Soit $\overrightarrow{n}(1,-1)$ alors $\overrightarrow{MM'} = \lambda \overrightarrow{n} \ \left(\overrightarrow{MM'} // \overrightarrow{n}\right)$

Or un vecteur directeur de (D) est $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{De plus } \overrightarrow{n}.\overrightarrow{u} = 0 &\Rightarrow \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{u} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{u} \quad (car \quad \overrightarrow{MM'} // \overrightarrow{n}) \end{aligned}$$

Donc $\forall \overrightarrow{u} // (D)$, $\overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{u}$

5 De tout ce qui précède, F est la projection affine d'axe (D) et de direction $\overrightarrow{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

6 Image par F

a. $(d) : y = -x$

On a : $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}(x+y+2) \\ y' = -\frac{1}{2}(x+y-2) \end{cases}$

Or $y = -x \Rightarrow y + x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = -1 \end{cases}$

Soit $F(d) = \{A(1,-1)\}$

b. $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 = 1$

1 - ENS 2015 (Géométrie)

Exercice 1 (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J), on considère la transformation affine T de forme complexe $z' = (-1+i)z - 5i$.

1 Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T.

2 Etant donnée la droite $(d) : y = -2x + 1$, déterminer

a. une équation cartésienne de la droite (d') image de (d) par (T).

b. une équation cartésienne de la droite (d'') dont (d) est l'image par T.

3 Etant donné le cercle $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$, déterminer

a. une équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C}')$ image de $(\mathcal{C})$ par T.

b. une équation cartésienne de $(\mathcal{C}'')$ dont $(\mathcal{C})$ est l'image par T.

Exercice 2 (5 points)

Soient ABD un triangle, O le milieu de $[BD]$, I, le symétrique de A par rapport à O et C le point tel que $\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DI}$.

1 Faire une figure et placer les points C, I et O.

2 Déterminer la nature du quadrilatère $ABID$.

3 En déduire une expression de $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

4 La perpendiculaire à (OB) passant par A et la perpendiculaire à (OA) passant par B se coupe en H. La perpendicuaire à (BD) passant par C et a perpendiculaire à (AC) passant par D sz coupe en H'.

a. Construire les points H et H' sur la figure précédente.

b. Démontrer que les points O, H et H' sont alignés.

Exercice 3 (autour du théorème d'Al Kashi sur un triangle quelconque)

On rapelle que :

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, $\vec{u}.\vec{v} = \| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{v} \| \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$
- Pour tout points A, B et C du plan, $\| \overrightarrow{AB} \|^2 = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2$.

Dans un triangle ABC, on désigne les angles par $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ et les longueurs des côtés respectivement opposés aux sommets A, B, C par a, b et c.

1 Démontrer que : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$ **(théorème d'Al Kashi de 1380 à 1429)**

2 On appelle A' le milieu du segment $[BC]$ et on pose $m = AA'$.

a. Démontrer que : $b^2 + c^2 = 2m^2 + \dfrac{1}{2}a^2$. **(théorème de la médiane)**

b. Déduire de **a.** et du théorème d'Al Kashi que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = m^2 - \dfrac{1}{4}a^2$.

3 En utilisant le théorème d'Al Kashi, démontrer le théorème de Pythagore **(de -595 à -480 avant JC)** et sa réciproque.

4 En utilisant le théorème d'Al Kashi, démontrer que $| b - c | < a < b + c$. **(inégalité triangulaire généralisé)**

5 **a.** Démontrer que $b^2 - c^2 = a(b\cos\widehat{C} - c\cos\widehat{B})$. (On pourra utiliser la question précédente)

b. En déduire que $b = c$ si et seulement si $\cos\widehat{B} = \cos\widehat{C}$. **(caractérisation des triangles isocèles)**

6 On note p le demi-périmètre du triangle ABC et $\mathcal{A}$ son aire.

a. Après avoir exprimé $\sin^2\widehat{A}$ en foncton de a, b et c, démontrer que $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. **(formule de Héron d'Alexandrie-1er siècle avant JC).**

b. On note r le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC. Démontrer que $r = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

c. On note R le rayon du cercle circonscrit au triqngle ABC. Calculer R en fonction de a, b et c.

Exercice 4 (Construction géométriques)

On considère trois cercles concentriques $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$ de centre O et de rayon respectifs 6 unités, $4,4$ unités et 3 unités et un point A du cercle $(\mathcal{C}_1)$.
Le but de cet exercice est de construire un triangle ABC équilatéral tel que le point B appartienne au cercle $(\mathcal{C}_2)$ et que le point C appartienne au cercle $(\mathcal{C}_3)$.

1 Déterminer et construire un tel triangle. Combien y a-t-il de solution ? (Expliquer clairement la démarche de résolution)

2 Reprendre la question précédente en conservant les rayons des cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_3)$ et en considérant un cercle $(\mathcal{C}_2)$ de rayon r (r réel strictement positif quelconque).
Discuter alors, en fonction de r, l'existence et le nombre des solutions.

2 - ENS 2015 (Anayse-Algèbre)

Exercice 1

1 Soit a, un entier tel que $a \equiv 1[10]$. Montrer que $a^9 + a^8 + ... + a + 1 \equiv 0[10]$; puis en déduire que $a^{10} \equiv 1[10^2]$.

2 Soit b un entier. Déterminer les restes possibles de b^4 dans la division euclidienne par 10. En déduire que $b^4 \equiv 0[10]$ si et seulement si b est premier avec 10.

3 Soit b un entier premier avec 10. Montrer que $b^{40} \equiv 1[10]$. Déterminer les deux derniers chiffres de 67^{42}.

Exercice 2

On considère la foncton numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$ et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A.

1 Dresser le tableau des variations de f.

2 Déterminer les branches infinies de $(\mathcal{C})$ puis tracer $(\mathcal{C})$.

3 Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x > 0$ puis construire la courbe représentative $(\mathcal{C}')$ de la fonction réciproque f^{-1} de f.

4 Soit λ un réel strictement négatif. Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine limité par la courbe $(\mathcal{C}')$, l'axe des ordonnées et les droites d'équations respectives $y = \lambda$ et $y = 0$. On vérifiera au préalable que : pour tout réel x, on a : $f(x) = e^x - \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

B. Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel négatif x, on pose : $F_n(x) = \displaystyle\int_x^0 \frac{e^{nt}}{1+e^t} dt$.

1 Calculer $F_1(x)$; en déduire que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F_1(x) = \ln 2$, puis déterminer $\lim_{x\to-\infty} F_2(x)$.

2 Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $F_{n+1}(x) - F_n(x) = \dfrac{1}{n}(1 - e^{nx})$. Montrer par récurrence sur n que $F_n(x)$ admet une limite finie lorsque $x \to -\infty$.
Dans la suite de l'exercice, on pose $R_n = \lim_{x\to-\infty} F_n(x)$.

3 Vérifier que pour tout réel $t \leq 0$, on a : $2e^t \leq 1 + e^t \leq 2$, puis montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, et pour tout réel $x \leq 0$, on a : $\dfrac{1}{2n}(1 - e^{nx}) \leq F_n(x) \leq \dfrac{1}{2(n-1)} \dfrac{1}{2n}(1 - e^{(n+1)x})$. En déduire alors un encadrement de R_n.

4 Pour tout réel négatif x et pour tout entier naturel non nul n, on pose $G_n(x) = (-1)^n \int_x^0 e^{nt} dt$.

- **a.** Calculer $G_n(x)$ et montrer que $\lim_{x\to-\infty} G_n(x) = \dfrac{(-)^n}{n}$
- **b.** Montrer que $G_1(x) + G_2(x) + ... + G_n(x) = -F_1(x) + (-1)^n F_{n+1}(x)$

5 On pose, pour entier naturel non nul n, $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

- **a.** Montrer que $U_n = \ln 2 + (-1)^{n+1} R_{n+1}$.
- **b.** Montrer que la suite (U_n) converge et trouver sa limite.

Exercice 3 (le facteur distribue les colis)

I. Un facteur doit distribuer le courrier dans une rue. Celle-ci ne comporte qu'une seule rangée de maison régulièrement espacées et numérotées 1, 2, ..., n, où n et un entier supérieur ou égal à 1. Le facteur doit distribuer une lettre par maison.

Pour cela, il commence par laisser son vélo à la maison 1 et y dépose la lettre correspondante ; puis il distribue les autres lettres dans les autres maisons, et reviens enfin à la maison 1 récupérer son vélo.

Il effectue ainsi un trajet, représenté par les numéros successifs des maisons où il à déposé le courrier.

Par exemple, si $n = 5$, un trajet possible est a, 1, 5, 2, 4, 3, 1. La distance totale parcourue, appelée longueur du trajet vaut 12 dans ce cas car $| 5 - 1 | + | 2 - 5 | + | 4 - 2 | + | 3 - 4 | + | 1 - 3 | = 12$. Un trajet possible est 1, 3, 5, 4, 2, 1, de longueur 8.

1 Combien y a-t-il de trajets possibles ?

2 **a.** Montrer que tout trajet est de longueur supérieur ou égale à $2(n-1)$.

b. Donner un exemple de trajet de longueur minimale.

c. Décrire le principe conduisant à un trajet de longueur minimale et en déduire le nombre de trajets de longueur minimale ?

3 **a.** Dans chacun des cas $n = 5$ et $n = 6$, déterminer la longueur maximale d'un trajet et donner un exemple de trajet de longueur maximale.

b. Pour n quelconque, déterminer la longueur maximale d'un trajet.

II. On suppose maintenant que lefacteur a un régistre de décharge des courriers ayant un poids de 1 et que chaque lettre a un poids de 1. On s'interresse alors à l'énergie dépensée par le facteur, qui est le produit du poids transporté par la distance parcourue.

Par exemple, si $n = 5$, pour le trajet 1, 5, 2, 4, 3, 1, l'énergie dépensée appelée énergie du trajet vaut 42 dans ce cas car $5 \mid 5-1 \mid +4 \mid 2-5 \mid +3 \mid 4-2 \mid +2 \mid 3-4 \mid + \mid 1-3 \mid = 42$.

Un autre trajet possible est 1, 3, 5, 4, 2, 1, d'nergie 26.

1 **a.** Montrer que tout trajet est d'énergie supérieur ou égale à $\dfrac{1}{2}(n^2+3n-2)$.

b. Donner un exempe de trajet d'énergie minimale. Combien y a-t-il de tels trajets ?

2 Dans chacun des cas $n = 4$ et $n = 5$, déterminer l'énergie maximale d'un trajet et donner un exemple de trajet d'énergie maximale.

Exercice 4 (Quelle fonction ?)

On veut déterminer l'ensemble S des fonctions à une variable réelle vérifiant l'équation (E) suivante :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ [f(x)+f(y)][f(u)+f(v)] = [f(xu-yv)+f(xv+yu)]$$

On pose $A = \{0_\square\}$ où $0_\square$ est la fonction nulle ($0_\square(x) = 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$) ;
$B = \{\dfrac{1}{2_\square}\}$ où $\dfrac{1}{2_\square}$ est la fonction constante ($\dfrac{1}{2_\square}(x) = \dfrac{1}{2}\ \forall\, x \in \mathbb{R}$).
C l'ensemble des fonctions telles que $f(0) = 0$.

1 Montrer que $\forall\, f \in S$, $2f(u)f(0) = f(0)\ \forall\, u \in \mathbb{R}$.

2 Déduire de **a.**, une comparaison de S avec C et B.

3 Montrer que $\forall\, f \in S, f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = 0\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

4 En déduire que $S \cap C \subseteq A$ puis comparer S avec B et A.

5 Déterminer S.

3 – Corrigé ENS 2015 (Géométrie)

Exercice 1 (Quelle fonction ?)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J), on considère la transformation affine T de forme complexe $z' = (-1+i)z - 5i$.

1 Nature et éléments caractéristiques de T.

- **Nature :** T a une expression complexe de la forme $z' = az + b$ où $a = -1+i$ et $b = -5i$ avec $\mid a \mid \neq 1$; T est donc une similitude directe.
- **Elément caractéristiques :**
  - → **Rapport :** le rapport de T est $k = \mid a \mid = \sqrt{2}$.
  - → **Centre :** T a pour centre $\Omega(\omega = \dfrac{b}{1-a} = 1-2i)$.
  - → **Angle :** $\theta = arg(a) = -\dfrac{3\pi}{4}$.

  T est une similitude directe de centre $\Omega(\omega = 1-2i)$, de rapport $k = \sqrt{2}$ et d'angle $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

2 $(d) : y = -2x + 1$.

a. Equation cartésienne de la droite (d') image de (d) par (T).
(d) passe par $A(0,1)$ et $B(-\frac{1}{2}, 0)$ d'images respectives par T $A'(-1,-6)$ et $B'(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2})$; d'où : $(d') = (A'B')$.
$M(x,y) \in (A'B') \Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'B'}) = 0$; d'où $(d) : 3x - y - 3 = 0$.

b. Equation cartésienne de la droite (d'') tel que $T((d'')) = (d)$.
Expression analytique de T.
Posons $z' = x' + iy'$, $z = x + iy$. Alors :

$$\begin{aligned} x' + iy' &= (-1 + i(x+iy)) - 5i \\ &= (-x-y) + i(x-y-5) \end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} x' &= -x-y \\ y' &= x-y-5 \end{cases}$

Ainsi, $\forall M(x,y) \in (d'')$, $M'(x',y') \in (d)$ tel que $M'(x',y') = T(M) \Leftrightarrow y' = -2x'+1 \Leftrightarrow x-y-5 = -2(-x-y)+1$; soit $x + 3y + 6 = 0$.
Ainsi $\boxed{(d'') : x + 3y + 6 = 0}$

3 $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$:

a. Equation cartésienne de $(\mathcal{C}')$ image de $(\mathcal{C})$ par T.
$(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2^2$; d'où $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre $A(1-1)$ et de rayon 2.
Ainsi , $(\mathcal{C}') = T((\mathcal{C})) \Rightarrow (\mathcal{C}')$ est le cercle de centre $A' = T(A)$ et de rayon $r' = 2k = 2\sqrt{2}$. On a : $z_{A'} = (-1+i)z_A - 5i = -3i$; donc $A'(0,-3)$;
D'où $\boxed{(\mathcal{C}) : x^2 + (y+3)^2 = 8}$.

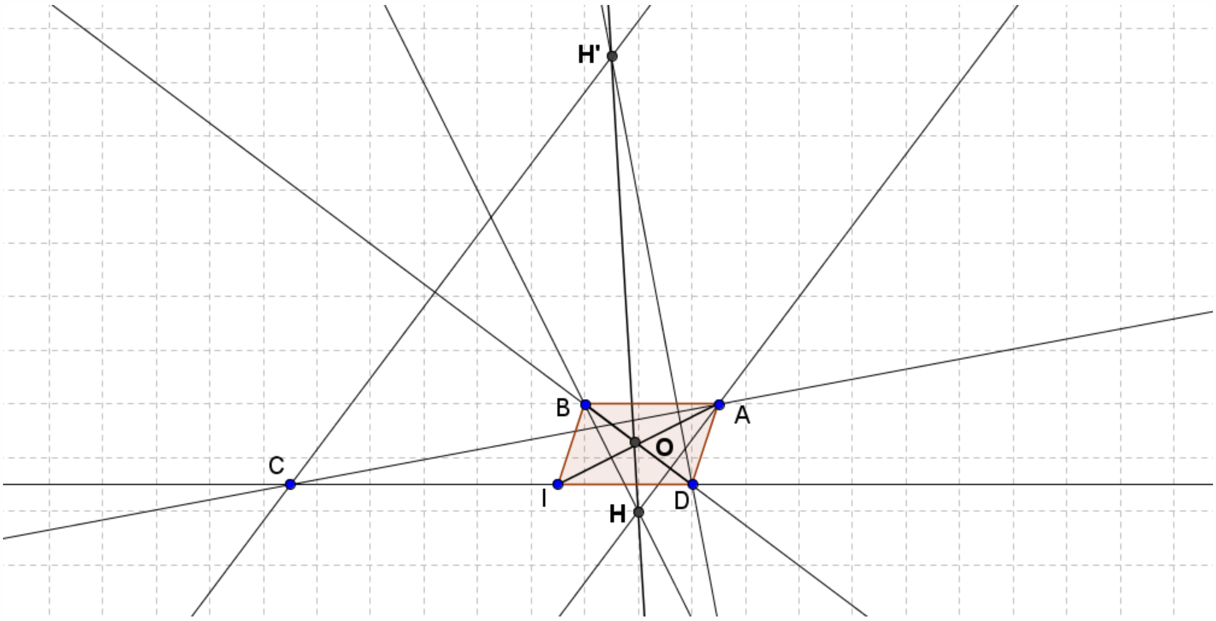
b. Equation cartésienne de $(\mathcal{C}'')$ tel que $(\mathcal{C}) = T((\mathcal{C}''))$.
$(\mathcal{C}) = T((\mathcal{C}'')) \Leftrightarrow (\mathcal{C}'') = T^{-1}((\mathcal{C}))$; or $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre A et de rayon 2. Donc $(\mathcal{C}'') = \mathcal{C}(A_1, \dfrac{1}{k} \times 2)$; avec $z_A = (-1+i)z_{A_1} - 5i$ et $k = \sqrt{2}$? D'où $z_{A_1} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{2}i \Rightarrow A_1(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{5}{2})$.

Ainsi, $\boxed{(\mathcal{C}'') : (x - \dfrac{3}{2})^2 + (y + \dfrac{5}{2})^2 = 2}$

Exercice 2 (5 points)

ABD est un triangle, O le milieu de $[BD]$, I, le symétrique de A par rapport à O et C le point tel que $\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DI}$.

1 **Figure :**



2 Nature du quadrilatère $ABID$:
D'après la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ $(*)$
I, image de A par symétrie de centre $O \Rightarrow \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OI}$. d'autrepart, O = milieu de $[BD] \Rightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$. Ainsi $(*)$ devient : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DI}$; soit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DI}$.
Conclusion : le quadrilatère $ABID$ est un **parallélogramme.**

3 Expression de $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} \text{ (relation de Chasles)}\\
&= \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{DI} \text{ (car } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BA})\\
&= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AB} \text{ (car } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BI} \text{ et } \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AB})\\
&= \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}$

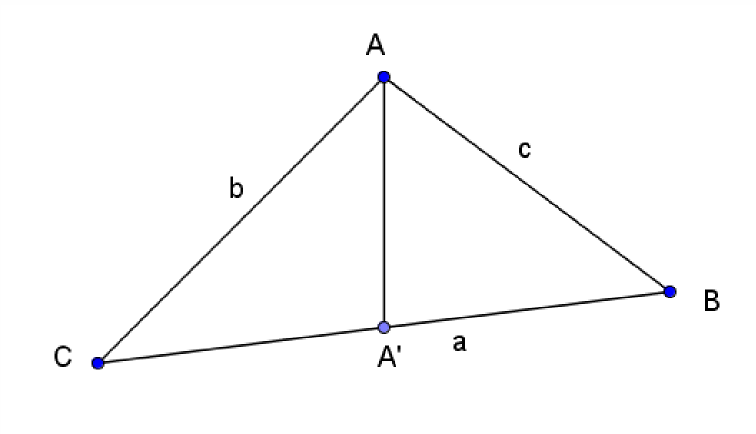
4 **a.** Construction des points H et H' : ***Voir figure précédente***

b. Démontrons que les points O, H et H' sont alignés.

Exercice 3

1 Démontrer que : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$ **(théorème d'Al Kashi de 1380 à 1429)**
On a : $a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
Donc $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$. (i)

2 On appelle A' le milieu du segment $[BC]$ et on pose $m = AA'$.



a. Démontrons que : $b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{1}{2}a^2$. **(théorème de la médiane)**

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{0} &\Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\
&\Rightarrow 4\overrightarrow{AA'}^2 = AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \quad (1) \;\; or \;\; BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \quad (2) \\
(1) + (2) &\Rightarrow BC^2 + 4AA'^2 = 2(AB^2 + AC^2) \\
&\Rightarrow b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{1}{2}a^2 \quad (ii).
\end{aligned}$$

b. Déduisons que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = m^2 - \frac{1}{4}a^2$.

$$\begin{aligned}
(i) \text{ et } (ii) &\Rightarrow a^2 = 2m^2 + \frac{1}{2}a^2 - 2bc\cos\widehat{A} \\
&\Rightarrow bc\cos\widehat{A} = m^2 - \frac{1}{4}a^2 \\
&\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = m^2 - \frac{1}{4}a^2
\end{aligned}$$

3 Démontrons le théorème de Pythagore **(de -595 à -480 avant JC)** et sa réciproque.
$\boxed{\Rightarrow}$. Supposons ABC rectangle en A ; alors :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$. (Théorème de pythagore)
$\boxed{\Leftarrow}$. Reciproquement, supposons que $a^2 = b^2 + c^2$; alors :
$a^2 = b^2 + c^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ (théorème d'Al Kashi) $\Rightarrow 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. D'où ABC est rectangle.

Conclusion : un triangle ABC est rectangle en $A \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$

(Théorème de Pythagore)

4 Démontrons que $|\, b - c \,| < a < b + c$. **(inégalité triangulaire généralisé)**

D'après le théorème d'Al Kashi, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = (b+c)^2 - 2bc(1 + \cos\widehat{A}) \\ a^2 = (b-c)^2 - 2bc(1 - \cos\widehat{A}) \end{cases} \quad (a)$

or ABC est un triangle $\Rightarrow \cos\widehat{A} \neq 1$ et $\cos\widehat{A} \neq -1$;

donc $\begin{cases} 1 + \cos\widehat{A} > 0 \\ 1 - \cos\widehat{A} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -(1 + \cos\widehat{A}) < 0 \\ -(1 - \cos\widehat{A}) > 0 \end{cases}$ (b)

(a) et $(b) \Rightarrow \begin{cases} a^2 < (b + C)^2 \\ a^2 > (b - c)^2 \end{cases} \Rightarrow |\, b - c \,| < a < b + c.$

5 **a.** Démontrons que $b^2 - c^2 = a(b\cos\widehat{C} - c\cos\widehat{B})$.
D'après le théorème d'Al Kashi,

$$\begin{cases} b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{A} \\ b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C} \end{cases} \Rightarrow b^2 - c^2 = -(b^2 - c^2) + 2a(b\cos\widehat{C} - c\cos\widehat{B})$$

$$\Rightarrow b^2 - c^2 = a(b\cos\widehat{C} - c\cos\widehat{B})$$

b. Déduisons que $b = c$ si et seulement si $\cos\widehat{B} = \cos\widehat{C}$. **(caractérisation des triangles isocèles)**
$\boxed{\Rightarrow}$

$$\begin{aligned} b = c &\Rightarrow b^2 = c^2 \\ &\Rightarrow b^2 - c^2 = a(b\cos\widehat{C} - c\cos\widehat{B}) = 0 \\ b = c &\Rightarrow \cos\widehat{C} = \cos\widehat{B} \end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$

$$\begin{aligned} \cos\widehat{B} = \cos\widehat{C} &\Rightarrow a(b\cos\widehat{C} - c\cos\widehat{B}) = a(b-c)\cos\widehat{B} \\ &\Rightarrow b^2 - c^2 = (b-c)(b+c) = a(b-c)\cos\widehat{B} \\ &\Rightarrow b + c = a\cos\widehat{B} \;\text{ si } b - c \neq 0 \end{aligned}$$

Or $a\cos\widehat{B} \leq a < b + c$. Donc $b - c \neq 0$ est une absurdité. Ainsi, $\cos\widehat{B} = \cos\widehat{C} \Rightarrow b = c$
Conclusion : $\boxed{b = c \Leftrightarrow \cos\widehat{B} = \cos\widehat{C}}$

6 On note p le demi-périmètre du triangle ABC et $\mathcal{A}$ son aire.

a. Expression de $\sin^2\widehat{A}$ en foncton de a, b et c
D'après Al Kashi,

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} \Rightarrow \cos^2\widehat{A} &= \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2} \\ \Rightarrow 1 - \cos^2\widehat{A} &= \frac{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2} \\ \Rightarrow \sin^2\widehat{A} &= \frac{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2} \end{aligned}$$

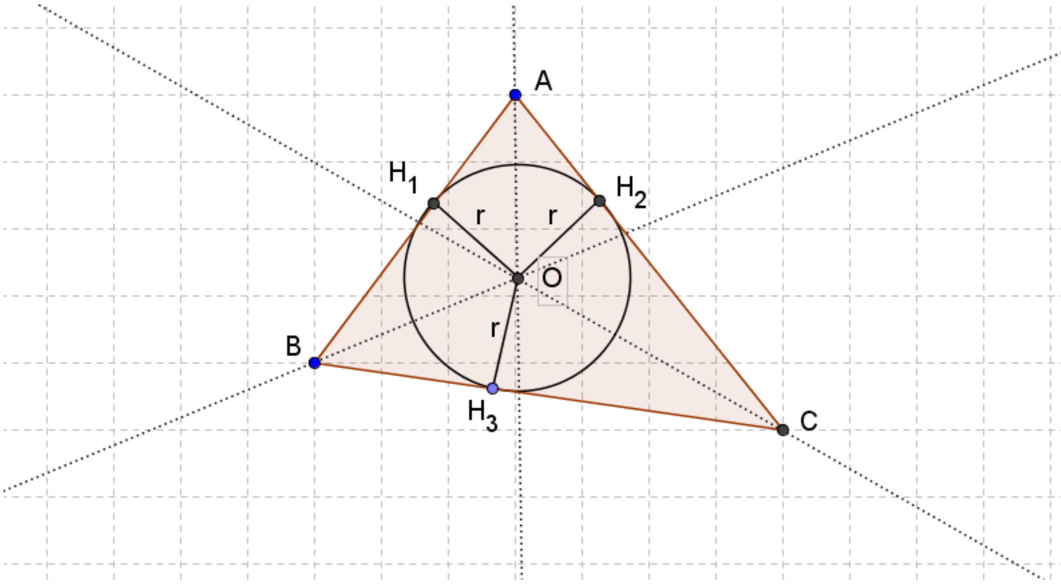
Démontrons que $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. **(formule de Héron d'Alexandrie-1er siècle avant JC).**

On sait que : $\mathcal{A} = \dfrac{bc\sin\widehat{A}}{2} \Rightarrow \mathcal{A}^2 = \dfrac{b^2c^2\sin^2\widehat{A}}{4}$; or

$$\begin{aligned} \sin^2\widehat{A} &= \frac{[2bc - (b^2+c^2-a^2)][2bc + (b^2+c^2-a^2)]}{4b^2c^2} \\ &= \frac{[a^2 - (b^2+c^2-2bc)][b^2c^2 + 2bc - a^2]}{4b^2c^2} \\ &= \frac{[a^2 - (b-c)^2][(b+c)^2 - a^2]}{4b^2c^2} \\ &= \frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{4b^2c^2} \\ &= \frac{(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)(a+b+c-2a)(b+c+a)}{4b^2c^2} \quad \textit{or}\;\; 2p = a+b+c \\ &= \frac{16(p-b)(p-c)(p-a)p}{4b^2c^2} \\ &= \frac{4(p-b)(p-c)(p-a)p}{b^2c^2} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{A}^2 = 4 \times b^2c^2\dfrac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{4b^2c^2}$. Par suite, $\boxed{\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

b. On note r le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC. Démontrons que $r = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

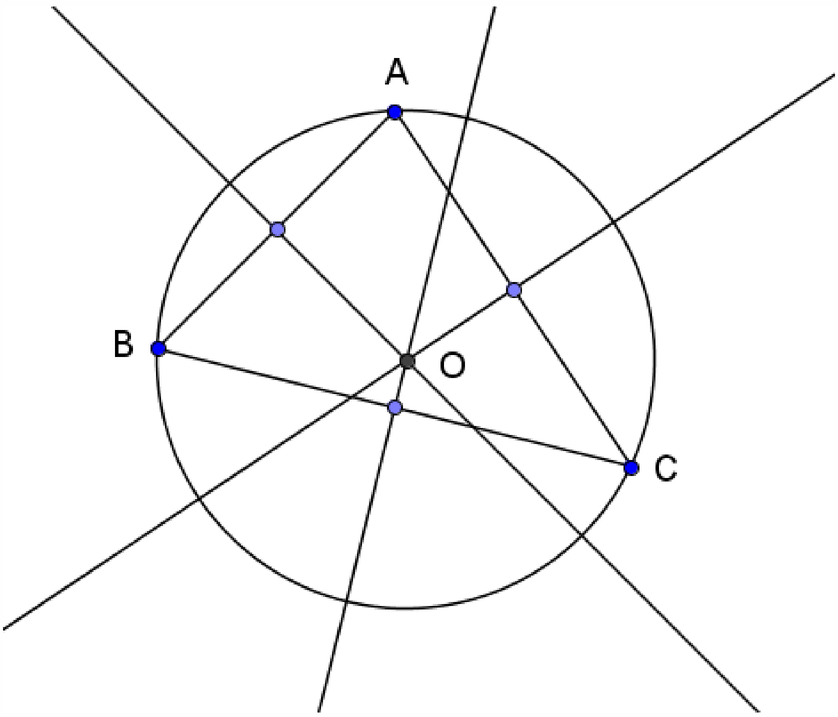


Le centre du cercle inscrit O est le point équidistant aux trois supports du triangle ; H_1, H_2 et H_3 représentent les pieds des hauteurs respectives des triangles OAB, OAC et OBC issus de O. D'autrepart,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = \mathcal{A}(ABC) &= \mathcal{A}(AOB) + \mathcal{A}(AOC) + \mathcal{A}(BOC)\\ &= \frac{r \times c}{2} + \frac{r \times b}{2} + \frac{r \times a}{2}\\ &= rp \Rightarrow r = \frac{\mathcal{A}}{p}\end{aligned}$$

Ainsi, $r = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

c. On note R le rayon du cercle circonscrit au triqngle ABC. Calculons R en fonction de a, b et c.



D'après le théorème des sinus, on a : $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin \widehat{C}} = \dfrac{abc}{2\mathcal{A}} = 2R$

D'où : $\boxed{R = \dfrac{abc}{4\mathcal{A}}}$

Exercice 4 (Construction géométriques)

1 Déterminons et construisons un tel triangle.
ABC est un triangle équilatéral.
Supposons ABC direct. Alors : $C = R_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}(B) \Rightarrow B = R_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)}(C)$. Puisque $B \in (\mathcal{C}_2)$, $c \in R_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}((\mathcal{C}_2))$; or $C \in (\mathcal{C}_3) \Rightarrow C = R_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}((\mathcal{C}_2)) \cap (\mathcal{C}_3)$. D'où le programme de construction suivant :

- construction de $R_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}(\mathcal{C}_2)$
- repérer $R_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}(\mathcal{C}_2) \cap (\mathcal{C}_3) = C$
- Puis repérer $R_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)}(C) = B$.

Remarquons que C n'est pas toujours unique ; un cas de construction est présenté à la figure 1.

Nombre de solutions.
On raisonne en tenant compte de toutes les restrictions faites faites.
Lorsque ABC est direct, il y a deux points C et par conséquent deux tels triangles ; dans le cas indirect, on aurait également 2 triangles. D'où : $\boxed{N = 4 \text{ triangles}}$.

2 $r > 0$.
Existence et nombre de solutions
D'après la question 1, il existe une soluion si et seulement si : $(\mathcal{C}_1) \cap R_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}((\mathcal{C}_2))$; c-à-d $OO' \leq r_1 + r$; or $OO' = 6cm$ et $r_1 = 3cm$ donc $6cm \leq 3cm + r \Rightarrow r \geq 3cm$.
Donc :

- Si $r > 3cm$, alors $(\mathcal{C}_1) \cap R_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}((\mathcal{C}_2)) = \{C_1, C_2\}$.
- si $r = 3cm$, (le soin est laissé au lecteur la discussion).

4 - Corrigé ENS 2015 (Anayse-Algèbre)

Exercice 1

1 Soit a, un entier tel que $a \equiv 1[10]$.

- Montrons que $a^9 + a^8 + ... + a + 1 \equiv 0[10]$;

  En effet, puisque $a \equiv 1[10]$, alors $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $a^k \equiv 1[10]$. Ainsi, $\sum_{k=1}^{9} a^k \equiv 9[10]$; d'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{9} a^k \equiv \sum_{k=1}^{9} a^k + 1 &\equiv 9+1[10] \\ &\equiv 10[10] \\ &\equiv 0[10]\end{aligned}$$

  Ainsi, $a^9 + a^8 + ... + a + 1 \equiv [0[10]]$

- Déduire que $a^{10} \equiv 1[10^2]$.
  Il suffit de montrer que $a^{10} - 1 \equiv 0[10^2]$.
  On a : $a^{10} - 1 = (a-1)(a^9 + a^8 + a^7 + ... + a + 1)$; or par hypothèse, $a \equiv 1[10] \Rightarrow a - 1 \equiv 0[10]$
  on a donc $\left\{\begin{array}{r} a^9 + a^8 + ... + a + 1 \equiv [0[10]] \\ a - 1 \equiv 0[10] \end{array}\right. \Rightarrow a^{10} - 1 \equiv 0[10^2]$; soit $a^{10} \equiv 1[10^2]$.

2 Soit b un entier.

- Déterminons les restes possibles de b^4 dans la division euclidienne par 10.
  Tableau des restes possibles dans la division euclidienne par 10.

Reste modulo 10 de b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Reste modulo 10 de b^4	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

  On constate donc que les restes possibles sont : 0 ; 1 ; 5 et 6.

- Déduisons que $b^4 \equiv 0[10]$ si et seulement si b est premier avec 10 ! ! ! !

3 Soit b un entier premier avec 10.

- Montrons que $b^{40} \equiv 1[10]$.
  D'après la question précédnte, b premier avec 10 $\Rightarrow b^4 \equiv 1[10]$; or $b^4 \equiv 1[10] \Rightarrow (b^4)^{10} \equiv 1^{10}[10]$. Par suite, $b^{40} \equiv 1[10]$

- Déterminons les deux derniers chiffres de 67^{42}. c-à-d son reste modulo 10^2.

$$\begin{aligned}67 \wedge 10 = 1 &\Rightarrow 67^4 \equiv 1[10] \\ &\Rightarrow (67^4)^{10} \equiv 1[10^2] \quad \text{d'après 1} \\ &\Rightarrow 67^{40} \times 67^2 \equiv 67^2[10^2] \\ &\Rightarrow 67^{42} \equiv 49[10^2]\end{aligned}$$

  d'où ces deux derniers chiffres sont 4 et 9 dans cet ordre.

Exercice 2

f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A.

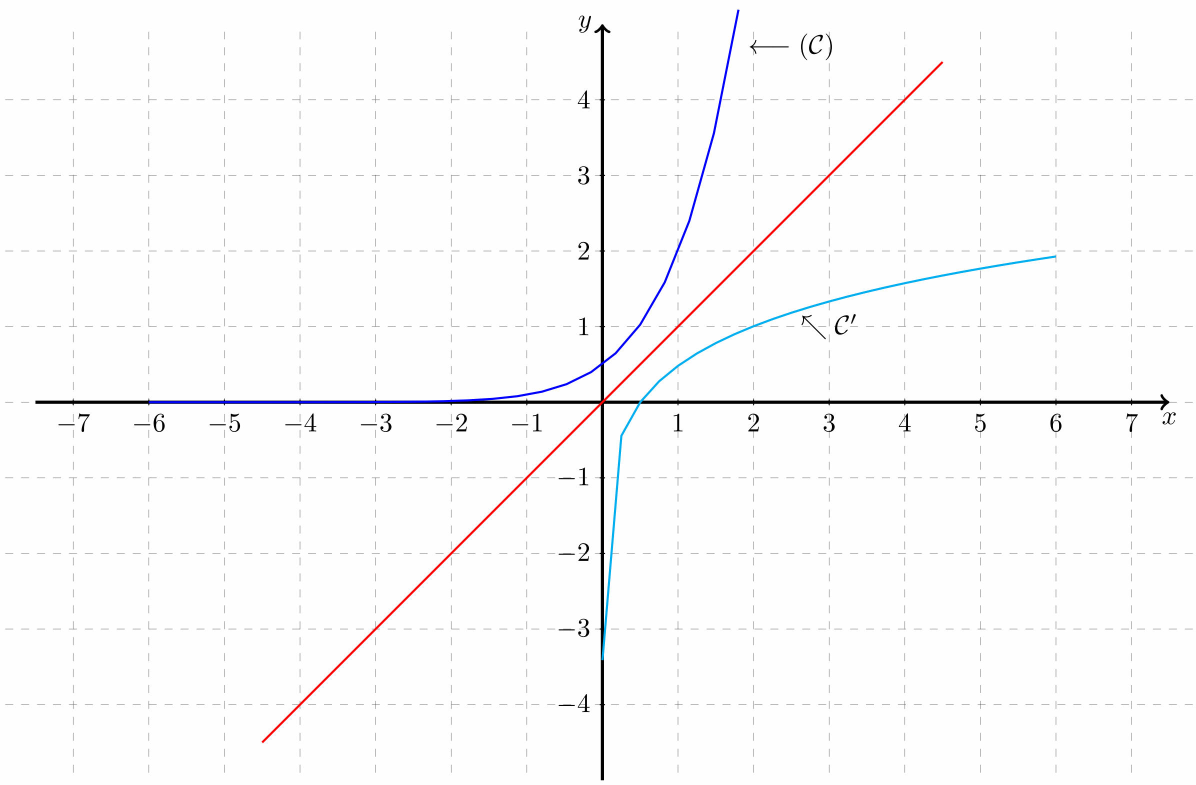
1 Tableau des variations de f.
f est dérivable comme rapport de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2e^{2x}(1+e^x) - e^x e^{2x}}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{2e^{2x} + e^{3x}}{(1+e^x)^2} > 0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; d'où le tableau de variation de f suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
Variations de $f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2 **Branches infinies de $(\mathcal{C})$ et graphe de $(\mathcal{C})$.**
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow (OI)$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow (\mathcal{C})$ admet une branche parabolique en $+\infty$ de direction celle de (OJ).
Courbe représentative de $(\mathcal{C})$:



3 ■ **Montrons que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.**
f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$.

■ **Expression de $f^{-1}(x)$ pour $x > 0$.**
Soit $(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ tel que $y = f(x)$

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{e^{2x}}{1+e^x} \\ &\Leftrightarrow y + ye^x = e^{2x} \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - ye^x - y = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Posons $X = e^x$, $(*)$ devient : $x^2 - yX - y = 0$; $\Delta = y^2 + 4y > 0$ car $y > 0$;
et donc $X_1 = \dfrac{y - \sqrt{y^2+4y}}{2}$, $X_2 = \dfrac{y + \sqrt{y^2+4y}}{2}$. Or $X > 0$ d'où $X = \dfrac{y + \sqrt{y^2+4y}}{2}$; et comme $X = e^x$, on obtient : $x = \ln(y + \sqrt{y^2+4y}) - \ln 2 = f^{-1}(y)$

Conclusion : $\boxed{f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4x}) - \ln 2 \ \ \forall x > 0}$

Pour la construction de $(\mathcal{C}')$, il suffit de faire le symétrique de $(\mathcal{C})$ par raport à la première bissectrice(la droite d'équation $y = x$) (voir figure 1)

4 Soit λ un réel strictement négatif. Calculons l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine limité par la courbe $(\mathcal{C}')$, l'axe des ordonnées et les droites d'équations respectives $y = \lambda$ et $y = 0$.
Cette surface correspond par symétrie à l'aire du domaine délimité par $(\mathcal{C})$, les droites d'équation $x = \lambda$ et $x = 0$;D'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\lambda) &= -\int_0^\lambda f(x)dx \\
&= \int_\lambda^0 f(x)dx \\
&= \int_\lambda^0 \frac{e^{2x} + e^x - e^x}{e^x + 1}dx \\
&= \int_\lambda^0 \left(e^x - \frac{1}{e^x + 1}\right) dx \\
&= [e^x - \ln(1 + e^x)]_\lambda^0 \\
\mathcal{A}(\lambda) &= 1 - \ln 2 - e^\lambda + \ln 1 + e^\lambda
\end{aligned}$$

B. Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel négatif x, on pose : $F_n(x) = \displaystyle\int_x^0 \frac{e^{nt}}{1 + e^t}dt.$

1 Calcul de $F_1(x)$;
$F_1(x) = \displaystyle\int_x^0 \frac{e^t}{1 + e^t}dt = [\ln(1 + e^t)]_x^0 = \ln 2 - \ln(1 + e^x)$; et $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F_1(x) = \ln 2.$

On a :

$$\begin{aligned}
F_2(x) &= \int_x^0 \frac{e^{2t}}{1 + e^t}dt = \mathcal{A} \\
&= 1 - \ln 2 - e^x + \ln(1 + e^x)
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F_2(x) = 1 - \ln 2$

2 Montrons que pour tout entier naturel non nul n, on a : $F_{n+1}(x) - F_n(x) = \dfrac{1}{n}(1 - e^{nx}).$
On a :

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(x) &= \int_x^0 \frac{e^{(n+1)t} + e^{nt} - e^{nt}}{1 + e^t}dt \\
&= \int_x^0 e^{nt}dt - \int_x^0 \frac{e^{nt}}{1 + e^t}dt
\end{aligned}$$

Donc $F_{n+1}(x) + F_n(x) = \displaystyle\int_x^0 e^{nt}dt = \left[\frac{1}{n}e^{nt}\right]_x^0 = \frac{1}{n}(1 - e^{nx})$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $, F_{n+1}(x) + F_n(x) = \dfrac{1}{n}(1 - e^{nx}).$

Montrons par récurrence sur n que $F_n(x)$ admet une limite finie lorsque $x \to -\infty$.
– Pour $n = 1$, on a : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F_1(x) = \ln 2 \in \mathbb{R}.$

– Soit $n \geq 1$. Supposons que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F_n(x) = l \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F_{n+1}(x) = \frac{1}{n} - l \in \mathbb{R}$. D'où le résultat.

Dans la suite de l'exercice, on pose $R_n = \lim_{x \to -\infty} F_n(x)$.

3 **Vérifions que pour tout réel $t \leq 0$, on a : $2e^t \leq 1 + e^t \leq 2$**
Soit $t \in \mathbb{R}$
$t \leq 0 \Rightarrow e^t \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} e^t + e^t \leq 1 + e^t \\ 1 + e^t \leq 2 \end{cases}$
Donc $\forall t \leq 0$, on a : $2e^t \leq 1 + e^t \leq 2$

Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, et pour tout réel $x \leq 0$, on a : $\frac{1}{2n}(1-e^{nx}) \leq F_n(x) \leq \frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{2n}(1-e^{(n+1)x})$**.**
On a $t \leq 0$,

$$\begin{aligned}
2e^t \leq 1+e^t \leq 2 &\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+e^t} \leq \frac{1}{2e^t}\\
&\Rightarrow \frac{e^{nt}}{2} \leq \frac{e^{nt}}{1+e^t} \leq \frac{e^{nt}}{2e^t} \quad \forall\, n \geq 2\\
&\Rightarrow \int_x^0 \frac{e^{nt}}{2} \leq F_n(x) \leq \int_x^0 \frac{e^{nt}}{2e^t}\\
&\Rightarrow \left[\frac{1}{2n}e^{nt}\right]_x^0 \leq F_n(x) \leq \left[\frac{1}{2(n-1)}e^{(n-1)t}\right]_x^0\\
&\Rightarrow \frac{1}{2n}(1-e^{nx}) \leq F_n(x) \leq \frac{1}{2(n-1)}(1-e^{(n-1)x}) \quad (*)
\end{aligned}$$

Encadrement de R_n.
$(*) \Rightarrow \frac{1}{2n} \leq R_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$

4 Pour tout réel négatif x et pour tout entier naturel non nul n, on pose $G_n(x) = (-1)^n \int_x^0 e^{nt}dt$.

a. Calcul de $G_n(x)$:

Ainsi $G_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}(1-e^{nx})$; et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} G_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$

b. Montrons que $G_1(x)+G_2(x)+...+G_n(x) = -F_1(x)+(-1)^n F_{n+1}(x)$
On a :

$$\begin{aligned}
\forall\, n \in \mathbb{N}^*, F_{n+1}(x)+F_n(x) = \frac{1}{n}(1-e^{nx})&\\
&\Rightarrow (-1)^n F_{n+1}(x)+(-1)^n F_n(x) = G_n(x)\\
&\Rightarrow (-1)^n F_n(x)-(-1)^{n+1}F_{n+1}(x) = G_n(x)\\
&\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} G_k(x) = (-1)^1 F_1(x)-(-1)^{n+1}F_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

5 On pose, pour entier naturel non nul n, $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

a. Montrons que $U_n = \ln 2 + (-1)^{n+1}R_{n+1}$.
D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} G_k(x) = -F_1(x)+(-1)^n F_{n+1}(x) &\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\sum_{k=1}^{n} G_k(x) = -\lim_{x\to-\infty} F_1(x)+(-1)^n R_{n+1}\\
&\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2+(-1)^n R_{n+1}\\
&\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2+(-1)^{n+1} R_{n+1}
\end{aligned}$$

b. Montrons que la suite (U_n) converge et trouvons sa limite.
$\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} R_{n+1} = 0$. D'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ln 2$.

Exercice 3 (le facteur distribue les colis)

I.

1 Nombre de trajets possibles :
Le distributeur a $n-1$ choix possibles pour la deuxième maison, $n-2$ pour la troisième, ..., 2 pour la $(n-1)me$ maison ; d'où : $N = (n-1)!$

2 **a.** Montrons que tout trajet est de longueur supérieur ou égale à $2(n-1)$.
Le trajet minimum se fait dans croisement , c'est-à-dire sans repasser devant une maison où il a déjà déposé le journal car dans un tel cas, il repète des tronçons de trajets. Ainsi tout trajet est de longueur supérieure à $2(n-1)$.

b. Exemple de trajet minimal.

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow ... \longrightarrow n-1 \longrightarrow n$$

c. Principe conduisant à un trajet de longueur minimale
Un trajet minimal est réalisé en passant devant une maison qu'une seule fois lors de la distribution car lorsqu'il saute une maison, il revient tout en emprumtant un tronçcon de route déjà emprunté, ce qui accroît inutilement son trajet. Donc les seuls trajets minimums sont :

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow ... \longrightarrow n-1 \longrightarrow n$$

$$n \longrightarrow n-1 \longrightarrow n-2 \longrightarrow ... \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$$

Il y a donc deux trajets minimums possibles.

3 **a.** Dans chacun des cas $n=5$ et $n=6$, déterminons la longueur maximale d'un trajet et donnons un exemple de trajet de longueur maximale.

- **Cas $n=5$.**
Longueur du trajet maximal : un trajet est maximal lorsque le nombre de croisements est maximal. Un croisement étant le saut le saut d'une maison puis le retour pour y déposer le journal. Pour $n=5$, il y a 4 croisement d'une maison au plus. En effet, plus de 4 passages devant une maison suppose que le facteur est arrivé à au moins 5 maisons après son départ de la maison numéro 1. Ce qui est impossible pour $n=5$. Un trajet offrant 4 croisements de la maison numero 3 est : 1 4 2 3 5 1 : t_1
longueur$(t_1) = |4-1|+|2-4|+|3-2|+|5-3|+|5-1| = 3+2+1+2+4 = 12$
longueur$(t_2) = 12 =$ longueur maximale. On ne peut croiser 2 ou 4 que 3 fois, 5 une seule fois d'où ce trajet est maximal.

- **Cas $n=6$.**
On ne peut croiser 2 ou 5 que 3 fois au plus, 6 une seule fois ; pour contre, on peut croiser 3 et 4 5 fois. Voici un exemple : 1 6 2 5 3 4 1 (5 croisement de 4)
longueur$(t) = |1-6|+|6-2|+|5-2|+|5-3|+|3-4|+|1-4| = 5+4+3+2+1+3 = 18$
Donc longueur$(t) = 18 =$ longueur maximale.

b. Longueur maximale d'un trajet Pour n quelconque.
Pour $n \in \mathbb{N} \setminus 0, 1$, il y a $n-1$ croisements au plus de la maison numéro $E\left(\frac{n}{2}\right)+1$ et ces croisements sont effectifs en réalisant le trajet : $1\ n\ 2\ (n-1)\ 3\ (n-2)\ 4\ ...\ E\left(\frac{n}{2}\right)\ (E\left(\frac{n}{2}\right)+1)\ 1$ si n est pair.
Exemple : pour $n=6$, on a : 1 6 2 5 3 4 1 / $E\left(\frac{n}{2}\right)+1 = 4$.
où $1\ n\ 2\ (n-1)\ 3\ (n-2)\ 4\ ...\ E\left(\frac{n}{2}\right)+2\ (E\left(\frac{n}{2}\right)+1)\ 1$ si n est impair.
Exemple : Pour $n=5$: on a : 1 5 2 4 3 1 : $E\left(\frac{n}{2}\right)+2 = 4$ et $E\left(\frac{n}{2}\right)+1 = 3$
Ces deux trajets sont de longueurs maximales car offre le plus nombre de croisements possibles de $E\left(\frac{n}{2}\right)+1$ qui est $(n-1)$ croisements et sa longueur est :

$$\begin{aligned} l &= |n-1|+|2-n|+|n-1-2|+|3-n+1|+...+|E\left(\frac{n}{2}\right)-E\left(\frac{n}{2}\right)-1|+|E\left(\frac{n}{2}\right)+1-1| \\ &= (n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4)+...+1+E\left(\frac{n}{2}\right) \end{aligned}$$

D'où $l_{max} = \dfrac{n(n-1)}{2} + E\left(\dfrac{n}{2}\right)$

II.

1 **a.** Montrons que tout trajet est d'énergie supérieur ou égale à $\frac{1}{2}(n^2+3n-2)$.
Cette énergie est minimale pour un trajet minimal. Or il rxiste deux trajets minimums : $1\ 2\ 3\ ...\ n\ 1$ et $1\ n\ (n-1)\ ...\ 2\ 1$.

$-$ 1 2 2 ... n 1 : Energie E_1.

$$\begin{aligned} E_1 &= n|2-1| + (n-1)|3-2| + (n-2)|4-3| + ... + 2|n-(n-1)| + 1|n-1| \\ &= n + n - 1 + (n-2) + ... + 2 + n - 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n - 2 \\ E_1 &= \frac{1}{2}(n^2 + 3n - 4) \end{aligned}$$

n $(n-1)$ ... 2 1 : Energie E_2.

$$\begin{aligned} E_2 &= n|1-n| + (n-1)|n-(n-1)| + (n-2)|n-2-(n-1)| + ... + 2|3-2| + 1|2-1| \\ &= n(n-1) + n - 1 + (n-2) + ... + 2 + 1 \\ &= \frac{n(n-1)}{2} + n(n-1) \\ E_2 &= \frac{3}{2}n(n-1) \end{aligned}$$

$E_2 - E_1 = n^2 - 3n + 2 > 0$ $\forall n \geq 2$, d'où : $E_2 - E_1 > 0$. L'énergie est donc toujours supérieure ou égale à : $E_1 = \frac{1}{2}(n^2 + 3n - 4)$

b. Exemple de trajet d'énergie minimale : 1 2 3 ... n 1.
D'après le raisonnement précédent, il y a un seul trajet d'énergie minimale.

2 Dans chacun des cas $n = 4$ et $n = 5$, déterminons l'énergie maximale d'un trajet et donnons un exemple de trajet d'énergie maximale.
L'energie est maximale lorsque le trajet est maximal.
$-$ cas $n = 5$:
1 5 2 4 3 1 : $E = 5|5-1| + 4|5-2| + 3|2-4| + 2|4-3| + |3-1| \Rightarrow E = 20 + 12 + 6 + 2 + 2 = 42$.
Donc $E_{max} = 42$

Exercice 4 (Quelle fonction ?)

On veut déterminer l'ensemble S des fonctions à une variable réelle vérifiant l'équation (E) suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ [f(x) + f(y)][f(u) + f(v)] = [f(xu - yv) + f(xv + yu)]$$

On pose $A = \{0_\square\}$ où $0_\square$ est la fonction nulle ($0_\square(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$) ;
$B = \{\frac{1}{2_\square}\}$ où $\frac{1}{2_\square}$ est la fonction constante ($\frac{1}{2_\square}(x) = \frac{1}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$).
C l'ensemble des fonctions telles que $f(0) = 0$.

a. Montrons que $\forall f \in S$, $2f(u)f(0) = f(0)$ $\forall u \in \mathbb{R}$.
Soit $f \in S$. On a : $[f(u) + f(u)][f(0) + f(0)] = f(0 \times u - 0 \times v) + f(0 \times v - 0 \times u) \Rightarrow 4f(u)f(0) = 2f(0)$; donc $2f(u)f(0) = f(0)$

b. Déduisons de **a.**, une comparaison de S avec C et B.
$\forall f \in S$, $2f(u)f(0) = f(0)$ $\forall u \in \mathbb{R}$; deux cas se présentent :

- Si $f(0) = 0$, alors l'égalité est toujour vrai ;
- Si $f(0) \neq 0$, alors $f(u) = \frac{1}{2}$ $\forall u \in \mathbb{R}$. d'où $S = C \cup B$.

c. Montrons que $\forall f \in S, f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
Soit $f \in S$. Supposons que $f(0) = 0$; alors, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} [f(x) + f(0)][f(1) + f(0)] = f(x.1 - 0.0) + f(x.0 + 1.0) &\Rightarrow f(x).f(1) = f(x) \\ &\Rightarrow f(\frac{1}{2}).f(1) = f(1) \quad (i) \end{aligned}$$

D'autre part,
$[f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})][f(1) + f(1)] = f(\frac{1}{2}.1 - \frac{1}{2}.1) + f(\frac{1}{2}.1 + \frac{1}{2}.1) \Rightarrow 4f(\frac{1}{2}).f(1) = f(1) \quad (ii)$
(i) et $(ii) \Rightarrow$ $3f(\frac{1}{2}).f(1) = 0 \Rightarrow f(1).f(\frac{1}{2}) = 0$; donc $f(1) = 0$ ou $f(\frac{1}{2}) = 0$.

- Si $f(1)=0$, $f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2}.f(1))\Rightarrow f(\frac{1}{2})=0$
- Si $f(\frac{1}{2})=0$, $f(1)=4f(\frac{1}{2}).f(1)=0$

  Dans tous les cas, $f(1)=0$. Or $f(x)=f(x).f(1)\ \forall x\in\mathbb{R}$. Donc $f(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

  conclusion : $\boxed{\forall f\in S, f(0)=0\Rightarrow f(x)=0\ \ \forall x\in\mathbb{R}.}$

d. Déduisons que $S\cap C\subseteq A$ puis comparons S avec B et A.
D'après **c.**, $f\in S$ et $f\in C\Rightarrow f\in A$; donc $S\cap C\subseteq A$
D'autre part, $A\subseteq S$ et $B\subseteq S$; donc $A\cup B\subseteq S$.

e. Déterminons S.
Soit $f\in S/f(0)\neq 0$. Alors : $[f(0)+f(0)][f(0)+f(0)]=f(0)+f(0)\Rightarrow 4(f(0))^2=2f(0)\Rightarrow f(0)=\frac{1}{2}$. Or $\forall u\in\mathbb{R}$, $2f(u).f(0)=f(0)\Rightarrow 2f(u)=1$; soit $f(u)=\frac{1}{2}$.

Note de l'éditeur

AsTEX Edition est un groupe d'experts dans les traitements de textes à base du logiciel LaTeX. Ce groupe, constitué de jeunes professeurs des lycées, a été mis sur pieds pour satisfaire de façon efficace tous ceux et celles qui désireraient monter des documents (livres, anales, magazines, journaux etc) de nature scientique ou pas de qualité et unique en leurs genre.

Avec AsTEX Edition, donnez plus de couleur à vos documents, présenter votre modèle et nous ferons le reste ! ! !

La maison AsTEX Edition.