

Avant propos

Ce document pratique est un outil indispensable de travail en vue de la préparation du concours de L'ENSET de Douala, car il comblera le vide, les incompréhensions longtemps ressenties par les candidats de la série F2-F3, les sujets de mathématiques et surtout des matières professionnelles considérés comme inabordables. Ce manuel mis à votre disposition traite des épreuves antérieures du concours d'entrée en 1^{ère} année du premier cycle de l'E.N.S.E.T (Ecole Normale Supérieure d'Enseignement Technique) de Douala. Nonobstant, les candidats ne devront pas bucher les corrections afin de les utiliser comme « mot de passe » mais plutôt essayer de comprendre la logique de résolution des différents problèmes afin de corroborer à cette dernière, et par conséquent aux épreuves du concours de l'E.N.S.E.T car il s'agit de la science « il faut résonner ». Notre ambition première à travers cet ouvrage est de mettre à la disposition des élèves et étudiants qui préparent ce concours, un outil indéniable qui leur assurera un succès certain. Les éditions futures pourront d'avantage approfondir les connaissances ici contenues et la majoration du nombre de sujet.

Comme toute œuvre humaine, cette 2^{ème} édition est loin de tendre vers la perfection comme l'avait souligné Shakespeare dans le marchand de Venise. Elle n'est qu'un premier pas vers l'idéal. Nous restons donc ouverts à des éventuelles critiques constructives et suggestions en vue d'améliorer les prochaines éditions.

Notre ultime souhait c'est que les candidats ne gardent pas du concours de l'ENSET leurs souvenirs les plus exécrables. Les élèves et les étudiants trouveront en ce document un joyau de réussite.

Nous ne saurions terminer sans remercier tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de la collection les 2T.

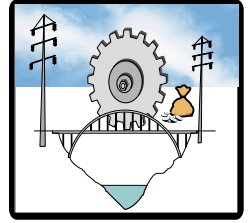
Première partie

Sujets de mathématiques et de spécialité

SUJETS DE MATHEMATIQUES



UNIVERSITE DE DOUALA
CONCOURS D'ENTREE A L'ENSET
EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM. 2013
CONCOURS ENSET 2013

**EXERCICE 1 : 5 points**

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct (O, U₁, U₂).

1.i) Montrer qu'il existe un unique réel a tel que $a^2 - (1 + i\sqrt{3})a + i\sqrt{3} = 0$ dans l'ensemble C des nombres complexes.

ii) En utilisant le réel trouvé, déduire l'autre solution de l'équation $z^2 - (1 + i\sqrt{3})z + i\sqrt{3} = 0$ dans C

2) Déterminer les complexes a, b et c tels que $z^3 - i\sqrt{3}z^2 - z + i\sqrt{3} =$

$(z + 1)(az^2 + bz + c)$ et en déduire les solutions de l'équation (E) : $z^3 - i\sqrt{3}z^2 - z + i\sqrt{3} = 0$ dans C.

3) on désigne par A, B et C les points images respectifs des complexes 1; -1 et $i\sqrt{3}$. S est la similitude plane directe qui transforme A en B et B en C.

i) Donner l'écriture complexe de S et en déduire que S est une rotation que l'on caractérisera.

ii) soit Ω le centre de cette rotation, en utilisant Ω , déterminer l'ensemble des points M de (P) tels que $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 0$

EXERCICE 2 : 4 points

Une région est constituée de 40% de femmes et 60% d'hommes, 45% des hommes de cette région fument ainsi que 20% des femmes. On choisit une personne au hasard dans cette région.

1.i) Montrer que la probabilité P de choisir un fumeur est $P = 7/20$

ii) Quelle est la probabilité d'avoir une femme sachant que la personne choisie fume

2) on s'est intéressé à la durée hebdomadaire au travail des personnes de cette région et l'enquête étalée sur 12 semaines a conduit aux résultats suivants :

Semaine (xi)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Durée moyenne en heure (yi)	40,7	40,67	40,68	40,68	40,6	40,54	40,49	40,45	40,33	40,29	40,24	40,16

2. on admet que la covariance de la série (x,y) = -0,616, les variances respectives en x et y sont $V(x)=11,916$ et $V(y) = 0,033$.

i) calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y et l'interpréter

ii) déterminer une équation de la droite de régression de y en x et estimer à 10^{-2} près la durée moyenne de travail qu'on aurait à la 20^{ème} semaine.

PROBLEME : 11 points

On considère les fonctions f et g définie dans $]0; +\infty[$ respectivement par
 $f(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x - 2 \ln x + \frac{1}{2} x^2$; $g(x) = x^2 + \ln x - 2$ et on désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J).

PARTIE A : 5,5 points

- 1.a Calculer $g'(x)$ et en déduire que g est une bijection de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.
- 1.b Justifier qu'il existe un unique réel $\alpha \in]1,3 ; 1,35[$ tel que $g(x) = 0$
- 1.c Vérifier que dans $]1,3 ; 1,35[$ $g(x) = 0 \iff \sqrt{2 - \ln x} = x$
2. Soit k la fonction définie dans $]1,3 ; 1,35[$ par $k(x) = \sqrt{2 - \ln x}$
- 2.a) Déterminer le sens de $u : x \rightarrow \sqrt{x}$ et $v : x \rightarrow \sqrt{2 - \ln x}$ et en déduire que k est décroissante.
- 2.b) Justifier que pour tout réel $x \in [1,3 ; 1,35]$, $k(x) \in [1,3 ; 1,35]$
3. on admet que pour tout réel $x \in [1,3 ; 1,35]$, $k'(x) \leq \frac{1}{3}$

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 1,3$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = k(U_n)$.

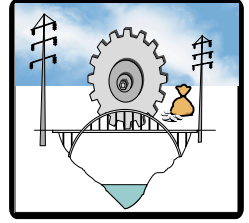
- 3.a Montrer que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_n - \alpha|$
- 3.b En déduire que $|U_n - \alpha| \leq 0,05 \left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour tout entier naturel n et donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près .

PARTIE B : 5,5 points

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Calculer $F'(x)$ et vérifier que pour tout réel $x > 0$, $x F'(x) = g(x)$.
3. En déduire que $f'(x) \geq 0 \iff x \geq \alpha$
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. i) Montrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha^4 + \alpha^2 - 4}{2}$
- ii) Représenter f dans un repère orthonormé. On prendra α égal à sa valeur approché trouvée plus haut et on prendra $f(\alpha) = 0,3$. (unité d'axes : 1,5cm).
6. justifier que la fonction $F : x \rightarrow \frac{1}{2} x \ln^2 x - 3 x \ln x + \frac{1}{6} x^3 + 3x + 1$ est une primitive de f.

En déduire l'aire en cm^2 de la portion plane constituée des points $M(x ; y)$ tels que

$$1 \leq x \leq 3 \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)$$



UNIVERSITE DE DOUALA
CONCOURS D'ENTREE A L'ENSET

EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM. Juillet 2012

CONCOURS ENSET 2012

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x^3 - 4x^2)e^{-x}$

- a- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$
- b- Calculer la dérivée de f et dresser son tableau de variation
- c- Tracer la courbe représentative de f

EXERCICE 2

Calculer les limites

- 1) $I_1 = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^3 - \alpha^3}{x^2 - \alpha^2}$
- 2) $I_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2(x)}$
- 3) $I_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$

EXERCICE 3

Parmi les fonctions suivantes, dites lesquelles sont paires et lesquelles sont impaires?

Démontrer.

$$Y_1 = \frac{\tan x - x}{x^2 \cos x}; Y_2 = \frac{\sin^2(2x) - \cos 3x}{\tan x}; Y_3 = x^2 - 1 + \sin^2(x); Y_4 = \frac{x-1}{\sin(x+1)} + \cos x;$$

$$Y_5 = \frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{x \tan x}; Y_6 = \frac{x^2+1}{x+1} \tan x; Y_7 = \ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$$

EXERCICE 4

On considère l'équation différentielle $y'' + 5y' = 0$ (E)

1- Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $F = f'$ est solution de $y' + 5y = 0$ ($E1$)

2- Résoudre l'équation différentielle (E)

3- Pour tout réel x on pose $g(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$ où a et b sont des réels.

Déterminer les réels a et b tels que g vérifie l'équation différentielle $y'' + 5y' = 26 \cos(x)$ (E')

4- Montrer que f est solution de (E') si et seulement si $f - g$ est solution de (E).

5- Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E').

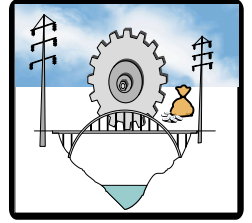
6- Déterminer la solution de (E') vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.



UNIVERSITE DE DOUALA
CONCOURS D'ENTREE A L'ENSET

EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM. Juillet 2011

CONCOURS ENSET 2011



EXERCICE I

Résoudre le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} 3^x 5^y = 10^5 \\ 9^x 25^{x+y} = 100^5 \end{cases}$$

EXERCICE II

Marcel est discret. Quand il part travailler, il oublie parfois de s'habiller et prend le train way entièrement dévêtu. Quand il part à la veille nu, il voyage nu une fois sur cinq le même jour, sinon, une fois sur deux. On note X_n l'événement il voyage le $n^{\text{ième}}$ jour nu et P_n sa probabilité.

- 1) Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n .
- 2) On pose $U_n = P_n - \frac{5}{13}$.
 - a) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n , puis de U_1 et n .
 - b) Exprimer alors P_n en fonction de n .
 - c) Montrer que la suite (P_n) est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE III

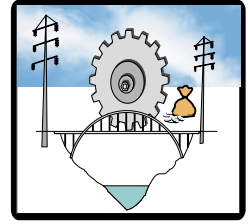
Soit (U_n) la suite définie par $U_1 = e^2$ et $U_n^2 = \frac{U_{n-1}}{e}$

- 1) Montrer que pour tout $n > 1$, on a $U_n \geq 0$. Calculer U_2 ; U_3 ; U_4
- 2) Montrer que pour tout entier $n > 1$, $V_n = \frac{1 + \ln(U_n)}{2}$
 - a) Exprimer V_n et V_{n-1} en fonction de U_{n-1} .
 - b) démontrer que la suite V_n est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - c) En déduire une écriture de U_n et V_n en fonction de n .
 - d) Etudier la convergence de (U_n) .
- 3) On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = \frac{3}{e^{x \ln 2}}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 1cm.
 - a) Calculer les limites aux bornes de D_f ;
 - b) Calculer la dérivée $f'(x)$, en déduire les variations de f ;

- c) Construire C ;
- 4) Montrer que les points de coordonnées $(n; V_n)$ appartiennent à C pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5) Soit λ un réel strictement positif. Calculer en cm^2 l'aire de la surface limitée par C , les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = \lambda$. Calculer la limite de cette aire quand λ tend vers $+\infty$.



UNIVERSITE DE DOUALA
CONCOURS D'ENTREE A L'ENSET
EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM
CONCOURS ENSET 2010

**EXERCICE I**

- 1) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan d'affixe Z tels que : $\frac{2Z-1}{Z^2}$ soit un nombre réel.

Pour nombre complexe z différent de 1, on définit $Z = \frac{z-2i}{z-1}$

- 2) On pose $z = x+iy$ et $Z = X + iY$ avec x, y, X et Y des réels.
- Exprimer X et Y en fonction de x et de y .
 - Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble (I) des points M d'affixe Z tels que Z soit imaginaire pur.
 - Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble © des points M d'affixe z tels que : $|Z| = 2$.

EXERCICE II

Un jardinier amateur tond sa pelouse toutes les semaines, et recueille à chaque fois 120 litres de gazon coupé qu'il stocke dans un bac à composition ou prélèvement, les matières stockées perdent les trois quarts de leur volume.

On désigne par V_n le volume en litres stocké après n tontes. On a $V_0 = 0$

- 1-) a) Vérifier que $V_1 = 120$; $V_2 = 150$ et $V_3 = 157,5$
 b) Déterminer une relation liant V_n et V_{n+1} .
 c) La suite (V_n) est – elle arithmétique ou géométrique ?
- 2-) On définit la suite (a_n) des accroissements de (V_n) par, pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = V_n - V_{n-1}$
- Quelle est la nature de la suite (a_n) ?
 - Exprimer (a_n) en fonction de n.
- 3-) a) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $V_n = V_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$
 b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $V_n = 160[1 - (1/4)^n]$.

EXERCICE III

La courbe (C) ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0, 5]$. (T), (T1) et (T2) sont les tangentes aux points de (C) d'abscisses respectives 0, 1 et 5.

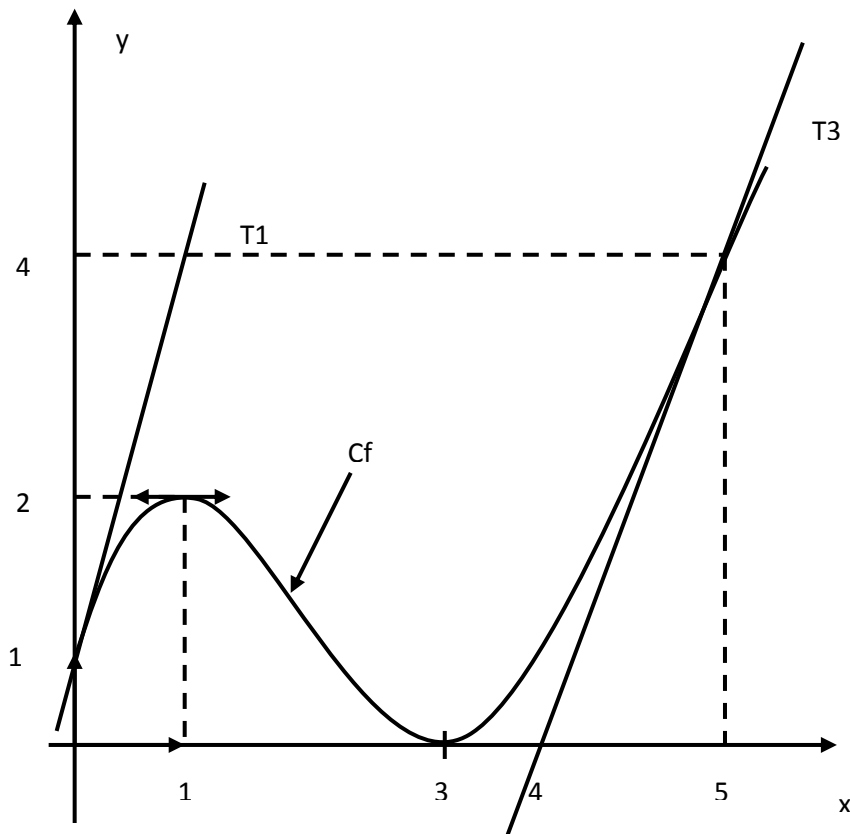
1) Dans cette partie, les réponses seront obtenues par lecture graphique.

- Déterminer les valeurs de ; $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$ et $f(5)$.
- Déterminer les valeurs de $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(5)$.
- Dresser le tableau de variation de f .

2) La notation $\ln$ désigne le logarithme népérien.

Soit g la fonction définie sur $[0, 3[$ par ; $g(x) = \ln f(x)$

- Donner les valeur de $g(0)$ et $g(1)$.
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$.
- Déterminer $g'(x)$. En déduire les valeurs les valeurs de $g'(0)$ et $g'(1)$.
- Dresser le tableau de variation de g .
- Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , proposer un tracé de courbe représentant g en tenant compte des résultats précédents.



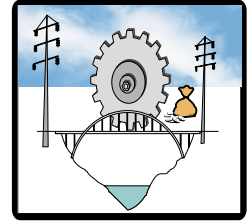
EXERCICE IV

I- Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln(Y+1) - \ln(x+4) = -\ln 8 \\ e^x - e^{2y+1} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} e^{3x} - 3e^x + 2 < 0 \\ 4e^{2x} + 16e^x - 15 \geq 0 \end{array} \right.$$



UNIVERSITE DE DOUALA
CONCOURS D'ENTREE A L'ENSET
EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM
CONCOURS ENSET 2009



EXERCICE I

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0, i, j)$ (unité 3cm). On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$

On note (C) sa courbe représentative dans $(0, i, j)$

Partie 1

- 1-) Justifier que pour tout x , $x^2 - 2x + 2 > 0$
- 2-) Déterminer la fonction dérivée f' de f et étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
- 3-) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$
- 4-) Représenter (C) et la droite (Δ) d'équation $y=x$. on montrera que la droite d'équation $X=1$ est un axe de symétrie de (C) et on placera les points d'abscisse 0 et 2 ainsi que les tangentes à la courbe en ces points.

Partie 2

On s'intéresse à l'intersection de (C) et de (Δ) . On pose pour tout réel x , $\varphi(x) = f(x) - x$

- 1) Déterminer la fonction dérivée φ' de φ . En déduire que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- 2) Déterminer la limite de φ en $-\infty$
- 3) Montrer que pour tout x strictement positif,

$$\varphi(x) = x \left[\frac{2 \ln x}{x} \cdot \frac{\ln \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}{x} - 1 \right]$$

En déduire la limite de $\varphi(x)$ en $+\infty$

- 4) Montrer que la droite (Δ) coupe la courbe (C) en un point d'abscisse α . Vérifier que $0.3 < \alpha < 0.4$

EXERCICE II

Soit BOD un triangle isocèle en O ; on pose $OB=OD=R$

Soit (C) l'ensemble des points M du plan tels que

$$\overrightarrow{MB} \cdot (\overrightarrow{2OM} - \overrightarrow{BM}) = 0$$

- 1) Démontrer que (C) est un cercle de centre O et de rayon R. soit F un point de [BD] différent des extrémités et du milieu de [BD]. la perpendiculaire à [BD] passant par F coupe le cercle en A et C. soit G l'isobarycentre des points A ; B ; C et D. soit M le milieu de [AC] et N le milieu de [BD].
- 2) Montrer que G est le milieu de [MN]. Montrer que G est le milieu de [OF].
- 3) Exprimer de deux manières différentes $\overrightarrow{FM}$ et montrer que

$$FA^2 + FC^2 = 2FM^2 + \frac{1}{2}AC^2$$
 En déduire que $FA^2 + FB^2 + FC^2 + FD^2 = 2(FM^2 + FN^2) + \frac{1}{2}(AC^2 + BD^2)$, puis montrer que $FA^2 + FB^2 + FC^2 + FD^2 = 4R^2$
- 4) Démontrer que $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FC} = FM^2 - AM^2$; $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FC} = OF^2 - R^2$; $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FD}$;
 Soient I ; J ; K et L les milieux respectifs de [AB] ; [DC] ; [BC] et [AD]. (IF) coupe [DC] en G, (KF) coupe [AD] en R, (JF) coupe (AB) en P, (LF) coupe (BC) en S.
- 5) Démontrer que la médiane (IF) du triangle AFB est la hauteur du triangle CFD.
- 6) Démontrer qu'IJKL est un rectangle.
- 7) Démontrer que G est le milieu de (IJ) et de (LK)
- 8) Démontrer que les points I ; J ; K ; L ; Q ; R ; S et P appartiennent à un même cercle (C') de centre G.
- 9) Montrer que le rayon de (C') est $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - OF^2}$

Exercice III

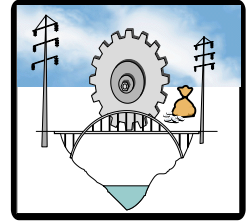
Z et Z' sont deux nombres complexes et on pose $\varphi(Z; Z') = Z\bar{Z}' + \bar{Z}Z'$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (o ; $\vec{u}$; $\vec{v}$)

- 1) Calculer $\varphi(i; 3)$; $\varphi(2 + i; -3 + 2i)$ et $\varphi(e^{\frac{i\pi}{6}}; e^{\frac{i2\pi}{3}})$ montrer que pour tout couple (Z; Z') le nombre $\varphi(Z; Z')$ est réel.
- 2) On pose $Z = x + yi$ et $Z' = x' + y'i$ avec x ; y ; x' et y' des réels
Calculer $\varphi(Z; Z')$ en fonction de x ; y ; x' et y'. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe tels que $\varphi(Z; 1 + i) = 2\sqrt{2}$.
- 3) On pose $Z = re^{i\theta}$ et $Z' = r'e^{i\theta'}$ avec θ et θ' réels ; r et r' réels positifs. Calculer $\varphi(Z; Z')$ en fonction de r ; r' et $\cos(\theta - \theta')$. Exprimer $\varphi(Z; Z')$ en fonction de r. déterminer l'ensemble des points M d'affixe Z tels que $\varphi(Z; Z') = 2$.



UNIVERSITE DE DOUALA
CONCOURS D'ENTREE A L'ENSET
EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM
CONCOURS ENSET 2008



I- Soient les suites (U_n) et (V_n) suivantes :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2}, & U_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \\ V_n = U_n + \frac{1}{n}, & \forall n > 0 \end{cases}$$

- 1) Calculer U_3 et U_4 , puis comparer-les :
- 2) Montrez que (U_n) et (V_n) sont adjacentes et dites si elles sont convergentes ou non.

II- Soit l'équation complexe suivante : $z^3 - (4 + i)z^2 + (3 + 4i)z - 3i = 0$ (7)

- 1) Montrons que i est solution de l'équation ci- dessus.
- 2) Déterminer les nombres réels a, b, c tels que :
- 3) En déduire les solutions de (7) et placer dans un repère orthonormé.

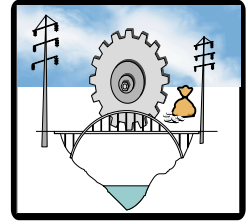
III- FONCTION

Soit f la fonction définie comme suit : $f(x) = x + \ln(1 + \exp(-2x))$.

- 1) Déterminer le domaine de définition D_f de f et calculer les limites aux bornes de ce dernier.
- 2) Calculer la dérivée et déduire le tableau de variation de f .
- 3) Déterminer les asymptotes éventuelles de f .
- 4) Tracer avec soin la courbe représentative de f .
- 5) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m$.



UNIVERSITE DE DOUALA
CONCOURS D'ENTREE A L'ENSET
EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM
CONCOURS ENSET 2007

**EXERCICE 1**

On considère la fonction logarithme suivante $g(x) = \ln(x|\ln x|)$.

- 1- Déterminer le domaine de définition de g et calculer les limites.
- 2- Dresser le tableau de variation de g .
- 3- Déterminer le nombre de racine de l'équation $g(x) = 0$ en précisant les intervalles auxquels elles appartiennent.
- 4- Soit pour tout réel $\alpha > 0$ la fonction $f_\alpha(x) = \ln(\alpha x) + \frac{\alpha}{\ln x}$.
 - a- Montrer que les extrema de f_α appartiennent à la courbe d'équation $Y = 2g(x)$.
 - b- Déterminer le nombre de valeurs de α pour lesquelles ces extrema sont nuls.
 - c- Déterminer les extrema pour $\alpha = 1$.

EXERCICE 2

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe donné d'affixe M .

- 1- On considère le nombre complexe $w = \frac{z+2}{z-4}, z \neq 4$
 - a- Mettre w sous forme algébrique.
 - b- Déterminer l'ensemble des points M tels que w soit un réel.
 - c- Trouver et représenter l'ensemble des points M tels que w soit imaginaire pur.
- 2- On considère l'application complexe du plan suivante : $M(Z) \rightarrow M'(z' = e^z)$
 - a- Déterminer le module et l'argument de z'
 - b- Représenter graphiquement l'ensemble $E = \{M(x, y) / x < 0, 0 \leq y \leq \pi\}$.
 - c- Montrer que l'image par t de E est le domaine du plan délimité par un demi-cercle à préciser ; puis faire sa représentation graphique.
 - d- Déterminer l'image réciproque du cercle de centre l'origine et de rayon 2.

EXERCICE 3

- 1- Un fabricant de tôle reçoit une commande d'une boîte cylindrique (type boîte de conserve) d'un volume V (m^3). Il veut déterminer le rayon et la hauteur de ce cylindre de façon que la surface de tôle à utiliser soit la plus petite possible. On désigne par x le rayon de ce cylindre et par h sa hauteur, mesurées en mètre. L'épaisseur de la tôle est supposé négligeable.
- a- Exprimer V en fonction de x et h puis l'aire $S(x)$ de la tôle à utiliser.
 - b- Déterminer les valeurs possibles de x puis calculer la dérivée et les limites de $S(x)$.
 - c- En déduire que l'ensemble des couples (x, h) pour que la surface de la tôle soit minimum est une droite d'équation $h = ax$ à préciser.
- 2- On considère le triangle rectangle ABC , rectangle en A tel que $AB = x, AC = y$ et dont le périmètre P est constant.
- a- Exprimer P en fonction de x et y et en déduire que $y = \frac{p(p-2x)}{2(p-x)}$.
 - b- Montrer que l'aire de ce triangle est maximum pour $x = y = P \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

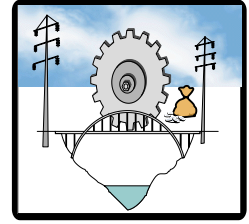
EXERCICE 4

Soit $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ une fonction donnée.

- 1- Montrer que le domaine d'étude de cette fonction peut se ramener à $[0, \pi[$.
- 2- Calculer $f'(x)$ et préciser son signe dans le domaine d'étude.
- 3- Montrer que la courbe de f admet une branche infinie que l'on précisera.
- 4- Etablir le tableau de variation de f et l'équation de la tangente au point $x = 0$.
- 5- Tracer la courbe de f dans l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$
- 6- a) calculer $\int_0^\lambda f(x) dx, 0 < \lambda < \pi$.
b) En déduire que l'aire délimitée par la courbe de f et les droites d'équations $y = 0, x = 0$ et $x = \pi$ est infinie.



UNIVERSITE DE DOUALA
CONCOURS D'ENTREE A L'ENSET
EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM
CONCOURS ENSET 2006

**EXERCICE 1**

Le plan complexe c'est rapporté au repère ortho normal (Unité graphique : 2cm)

On note A le point d'affixe $Z = -1$.

- 1- a) Résoudre l'équation : $Z^2 + 4Z + 5 = 0$ On note Z_2 et Z_3 les solutions, Z_2 étant celle dont la partie imaginaire est positive
- b) Placer le point A et les points B et C d'affixes respectives Z_2 et Z_3
- c) Prouver que $Z_3 - Z_1 = i(Z_2 - Z_1)$.
- d) Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.

2- Soit A' le point d'affixe $Z' = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$

- a) montrer que $|Z_1'| = |Z_1|$. Calculer un argument de Z_1'/Z_1 .
- b) En déduire que A' est l'image de A par la rotation R de centre O et d'angle ϕ à préciser.
- c) Soient B' et C' les images respectives de B et C par R. Calculer les affixes de B' et C', en donnant chaque fois la partie réelle et la partie imaginaire.
- d) Placer les points A', B' et C' dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Quelle est la nature du triangle A'B'C' ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2

On considère les suites de nombres réels $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$U_0 = 6 ; \quad U_{n+1} = U_n/5 + 4/5 \quad \text{et} \quad V_n = U_n - 1 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

- 1) Calculer V_0 et V_1
- 2) Démontrer que (V_n) est une géométrique
- 3) Exprimer V_n et U_n en fonction de n

Problème**Partie A- Questions préliminaires**

Soit g la définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$G(x) = xe^{-x}$$

- I-) a) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
- b) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe, pour x appartenant à $[0, +\infty[$

Dresser le tableau de variation de la fonction g

II-) En utilisant ce qui précède, montrer que pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$ $g(x) < 1$.

Partie B- Etude et représentation graphique d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $F(x) = e^{-x} + \ln x$

On note C sa courbe représentative dans un repère ortho normal $(0, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

1) a) Déterminer la limite de la fonction en 0.

En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe C .

b) Déterminer la limite de la fonction en $+\infty$.

c) Montrer que $f(x) = \frac{1-g(x)}{x}$ En utilisant la question A 2/, montrer que, pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$, $f(x) > 0$

d) Dresser le tableau de variation de la fonction f

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique, notée, dans $]0, +\infty[$

Montrer que $0,5 < \alpha < 0,6$.

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de α

3) Tracer la courbe C dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$

Partie C : Calcul de primitives et d'aire

Soit G la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $G(x) = x \ln x - x$

1) Calculer $G'(x)$.

En déduire les primitives de f sur $]0, +\infty[$

2) Calcul la primitive de f qui s'annule pour $x = 1$.

3) Calculer l'aire en cm^2 , du domaine délimité par la courbe C l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$

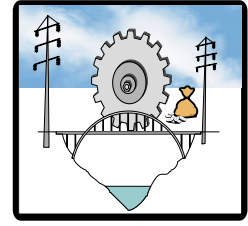
SUJETS DE SPECIALITE



UNIVERSITE DE DOUALA

CONCOURS D'ENTREE A L'ENSET

EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM.

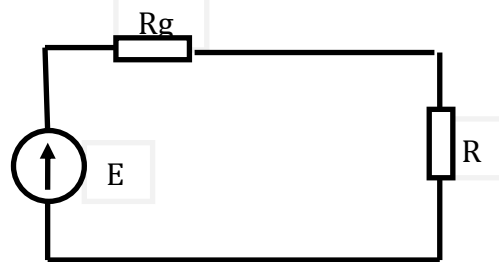


Septembre 2013

EPREUVE D'ELECTROTECHNIQUE(F3)**DUREE : 4H : 00**

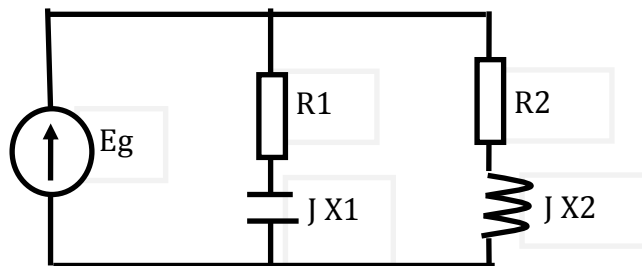
I. Une charge constituée de deux résistors de valeurs R et R_g montés en parallèle est alimentée par une source de tension E_g (voir figure 1). R_g désigne la résistance interne de la source. Soit $P(R)$ la puissance totale délivrée à la charge :

- 1.1 Trouver l'expression de $P(R)$ en fonction de R et E_g
- 1.2 étudier et représenter l'allure de $P(R)$ pour $E_g = 1V$, et $R \in [0, +\infty]$
- 1.3 Déterminer la valeur R_m de R pour laquelle $P(R)$ est maximale
- 1.4 déterminer la puissance maximale $P_{R_{max}}$



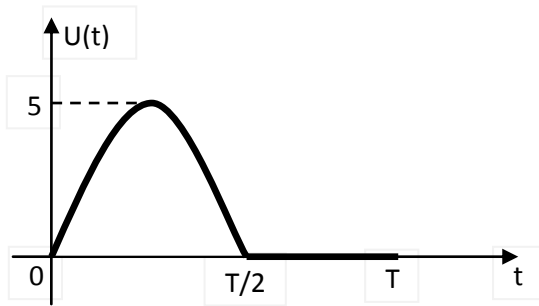
II. Dans le circuit de la figure 2 (avec $R_1 = 2\Omega$, $X_1 = -5\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $X_2 = 1\Omega$), la résistance R_1 dissipe une puissance de 20W. calculer :

- 2.1 La puissance active totale du circuit
- 2.2 La puissance réactive totale du circuit
- 2.3 La puissance apparente totale du circuit
- 2.4 Le facteur de puissance du circuit.



III. La tension $u(t)$ représentée à la figure 3 est utilisée pour alimenter une résistance $R = 25\Omega$ de l'instant $t = 0$ s à l'instant. Calculer :

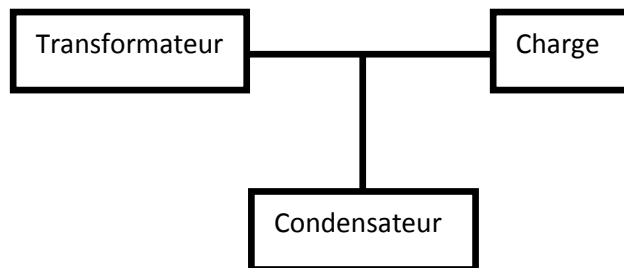
- 3.1 L'expression de la puissance instantanée dissipée pour $0 \leq t \leq T$
- 3.2 La puissance instantanée maximale $0 \leq t \leq T$
- 3.3 la valeur moyenne de la puissance dissipée de l'instant 0 à T.
- 3.4 la valeur efficace de la puissance dissipée de l'instant 0 à T



IV. Le système représenté à la figure 4 admet un transformateur de 500 KVA fonctionnant à pleine charge. La charge inductive alimentée à un facteur de puissance de 0,6.

Calculer :

- 4.1 La puissance active de la charge
- 4.2 La puissance réactive de la charge
- 4.3 La puissance réactive requise pour améliorer le facteur de puissance jusqu'à la valeur 0,9
- 4.4 Le taux de charge du transformateur après correction du facteur de puissance



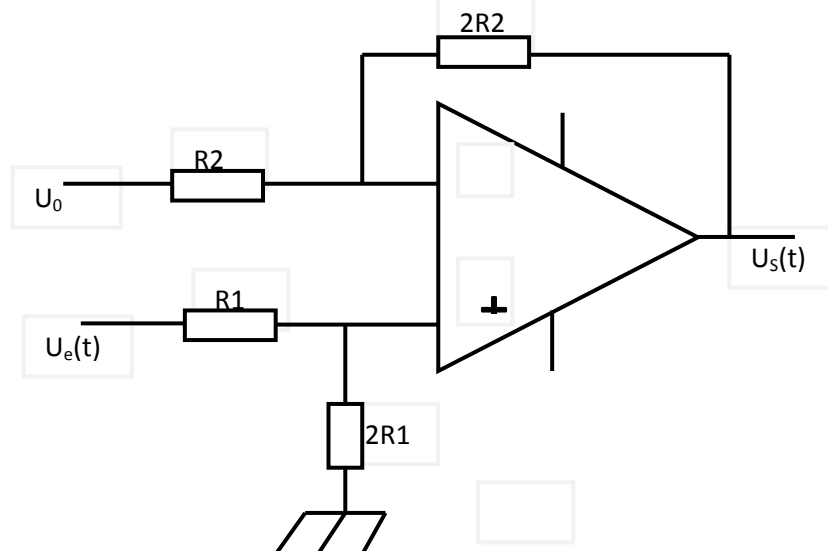
V. On considère le circuit à amplificateur opérationnel t représenté à la figure 5.

5.1 A partir de l'analyse de ce circuit, démontrer que la relation entre la tension de sortie ($U_s(t)$) et $E(t) = U_e(t) - U_0$ est donnée par $U_s(t) = E(t) = K E(t)$, où k est un paramètre à déterminer.

5.2 donner la condition pour que le circuit fonctionne en régime linéaire

5.3 Déterminer l'expression et le graphe de $U_s(t)$ si $U_e(t) = E/2 \sin(100 \pi t)$.

5.4 Donner 2 principales applications de ce circuit en électronique industrielle.





UNIVERSITE DE DOUALA

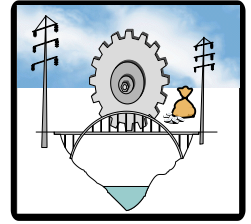
CONCOURS D'ENTREE A L'ENSET

EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM.

JUILLET 2012

EPREUVE D'ELECTROTECHNIQUE(F3)

DUREE : 4H : 00

**I- INSTALLATION ELECTRIQUE**

Une source triphasée équilibrée à 585V alimente trois charges équilibrées en parallèle :

- 01 charge de 30KW avec un facteur de puissance unitaire.
- 01 charge de 40KW avec un facteur de puissance de 0,707 en avance.
- 01 charge en triangle de $36+j15,0 \Omega$ par phase.

- 1- Représenter le schéma unifilaire de l'installation
- 2- Déterminer le courant en ligne de chacune des charges et celui de la source.
- 3- Déterminer la puissance réelle, réactive et apparente de chacune des charges et la puissance réelle, réactive et apparente fournie par la source.
- 4- Déterminer le facteur de puissance vu par la source.

Réponses : 29,6A ; 55,83A ; 25,98A ; 97,62A ; 30Kw ; 0KVAR ; 30KVA ; 40Kw ; -40,012Kvars ; 56,57KVA ; 24.3Kw ; 10,125KVAR ; 26,325KVA ; 94,3Kw ; -29,887KVAR ; 98,92KVA ; 0,95(avance).

II- ELECTRONIQUE DE PUISSANCE

L'inductance L représente l'inductance globale de l'induit et de la bobine de lissage supposée sans pertes. la tension continue V est égale à 500V. La résistance interne du moteur est négligée.

L'interrupteur H (commandable à l'ouverture et à la fermeture) et la diode D sont parfaits.

- H est fermé sur l'intervalle de temps $[0, \alpha T]$,
- H est ouvert sur l'intervalle de temps $[\alpha T, T]$,

• T désigne la période de fonctionnement du hacheur et α son rapport cyclique. L'allure du courant $i(t)$ est représenté sur la figure N°1. Les chronogrammes demandés seront tracés sur ce même document sur l'intervalle $[0, T]$.

- 1- Calculer $T_{off} = f(T, \alpha)$ et son rapport cyclique α .

- 2- Indiquer les intervalles de conduction et de blocage de H et D sur une période.
- 3- Tracer les chronogrammes de $u(t)$ et de $U_H(t)$ sur la figure N°1.
- 4- En déduire la valeur moyenne de $u(t)$ en fonction de α et V .
- 5- Tracer les chronogrammes de $i_d(t)$ et de $i_H(t)$ sur le document réponse

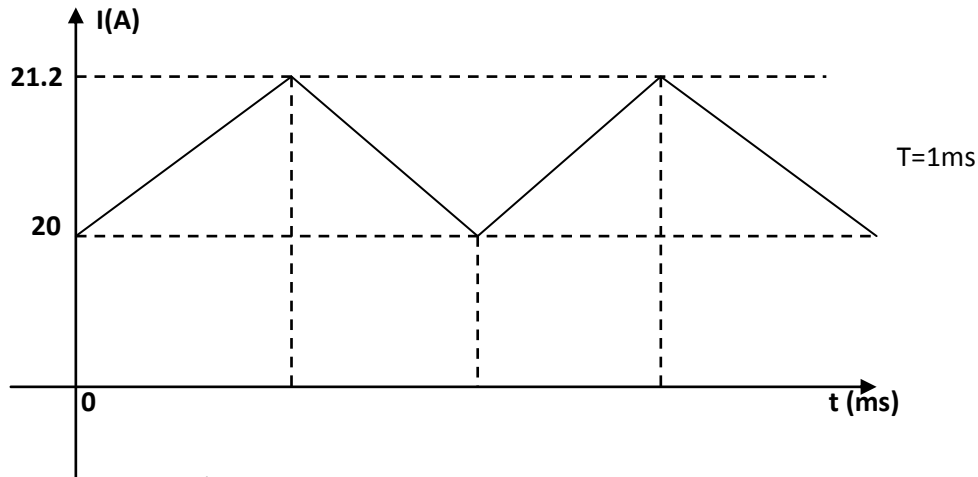


Figure : 1

Réponses : $T_{off} = (1 - \alpha)T$; $\alpha = \frac{T_f}{T}$; $\alpha.V = U_{moy}$.

III - MACHINES ELECTRIQUES

La plaque signalétique d'un moteur asynchrone triphasé porte les indications suivantes :

- puissance mécanique utile nominale : 11 kW;
- vitesse nominale : $N_n = 2850$ tr/min;
- tension nominale entre phases : $U = 380$ V; 50 Hz;
- courant de ligne nominal : $I_n = 21,44$ A;
- rendement pour le fonctionnement nominal : $\eta = 0,90$;
- stator en étoile;
- rotor bobiné en étoile, résistance d'une phase : $r = 0,05 \Omega$.

Les pertes mécaniques ainsi que les pertes joule du stator sont négligées. On admet que le courant absorbé est donné, en fonction du glissement g , de la tension entre phase et neutre V , du courant à vide I_v par la relation : $\underline{I} = \underline{I}_v + k \frac{g}{r} \underline{V}(1)$, k étant un facteur constant.

3.1- Déterminer pour le régime nominal défini ci-dessus : (rotor en court-circuit) :

- 1- La puissance absorbée P_{a_n} ;
- 2- Le facteur de puissance $\cos \varphi_n$ ainsi que le déphasage φ_n ;
- 3- La puissance réactive absorbée Q_{a_n} ;

- 4- Le couple électromagnétique C_{e_n} ;
- 5- Le glissement g_n ;
- 6- Les pertes Joule dans le rotor
- 7- Le courant dans une phase du rotor.

3.2- Calculer les pertes fer du stator ainsi que la composante du courant absorbé correspondante : I_f . Calculer le courant réactif I_r ; le courant magnétisant : I_0 . En déduire le courant absorbé à vide ainsi que le facteur de puissance du moteur à vide : $\cos\varphi_v$ pour une réactance du fer égale à $20,4\Omega$.

3.3- Le moteur entraîne une charge dont le couple résistant est donné par la relation :

$$C_r = 12 + 0,24.N ; \text{ avec } N \text{ en tr/s et } C_r \text{ en N.m.}$$

3.3.1. Le rotor est en court-circuit, déterminer la vitesse de rotation du moteur ainsi que le courant de ligne absorbé. Que vaut le rendement ?

3.3.2. Le rotor est refermé sur un rhéostat triphasé en étoile dont chaque branche présente une résistance égale à $0,05\Omega$. Que devienne la vitesse, le courant, ainsi que le rendement ?

3.4- Au démarrage, le moteur absorbe un courant de ligne $I_d = 110 \text{ A}$ et présente un facteur de puissance $\cos\varphi_d = 0,3$. La relation (1) n'est plus vérifiée mais les puissances restent proportionnelles aux composantes de courant en phase avec la tension.

3.4.1. Calculer le couple au démarrage C_d .

3.4.2. Chaque phase du stator du moteur est équivalente à une impédance Z_d . Déterminer cette impédance (module; résistance R_d ; réactance X_d).

3.4.3. Afin de réduire le courant de ligne à 55 A au démarrage, on insère en série sur chaque fil de ligne une résistance R . Déterminer cette résistance. Quel est la nouvelle valeur du couple au démarrage ?

Réponses :

Solution : 7.1. $P_{an} = 12,22 \text{ kW}$; $\cos\varphi_n = 0,848$; $Q_{an} = 7,13 \text{ kVAR}$; $g_n = 0,05$;

$C_{en} = 36,87 \text{ N.m}$; $P_{Jrot} = 579 \text{ W}$; $I_{phase\ rot} = 62,13 \text{ A}$.

7.2. $P_{f\ stat} = 643 \text{ W}$; $I_f = 0,97 \text{ A}$; $I_0 = 10,8 \text{ A}$; $\cos\varphi_v = 0,0895$.

7.3. $N = 2904 \text{ tr/min}$; $I = 16,32 \text{ A}$; $\eta = 89,1\%$.

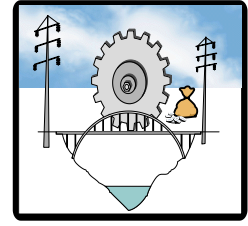
7.4. $C_d = 67,3 \text{ N.m}$; $R_d = 0,6 \Omega$; $X_d = 1,91 \Omega$; $Z_d = 2 \Omega$; $R = 2,91 \Omega$; $C_e = 16,8 \text{ N.m}$.



UNIVERSITE DE DOUALA

CONCOURS D'ENTREE A L'ENSET

EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM.



JUILLET 2011

EPREUVE D'ELECTROTECHNIQUE(F3)

DUREE : 4H : 00

PROBLEME I (9,75PTS)**Première partie : Etude d'un moteur asynchrone 7,25pts**

Un moteur asynchrone triphasé possède 4 pôles. Il est couplé en étoile. Dans tout le problème, il entraîne une machine lui imposant un couple résistant constant de moment $T_r = 50 \text{ N.m}$.

1-) En ne négligeant aucun type de pertes, compléter le schéma du bilan des puissances du moteur (document réponse n°1). Préciser les notations utilisées en nommant toutes les puissances. (0,5pt).

Les pertes mécaniques (p_m) sont suffisamment faibles pour qu'elles puissent être négligées devant les autres puissances mises en jeu ; ainsi, on peut considérer que le moment (T_u) du couple utile est égal à celui (T_{em}) du couple électromagnétique. On négligera également les pertes (p_{fe}) dans le fer du rotor. En résumé, dans la suite du problème, on pourra écrire : $-p_m \approx 0 \text{ W}$; $-T_u \approx T_{em}$; $-p_{fr} \approx 0 \text{ W}$. La résistance mesurée entre deux bornes du stator, les enroulements étant couplés, est $R = 1,0 \Omega$.

2-) Le moteur est alimenté par un réseau de tensions triphasé équilibré 230V/400V, 50Hz. Dans ces conditions, il est traversé par un courant de ligne d'intensité $I = 17 \text{ A}$. les pertes dans le fer du stator ont pour valeur $P_{fs} = 200 \text{ W}$ et la partie utile de la caractéristique du couple utile T_u en (N.m) en fonction de la fréquence de rotation n (en tr.min^{-1}) est donnée sur le document réponse n°5.

2.1-) Déterminer la fréquence n_s de synchronisme en (tr.min^{-1}). 0,25pt

2.2-) En utilisant la caractéristique, déterminer la fréquence n de rotation en charge. 0,5pt

2.3-) En déduire la valeur g du glissement en charge. 0,25pt

2.4-) Calculer la puissance utile P_u du moteur. 0,25pt

2.5-) Calculer les pertes par effet joule P_{js} au stator. 0,25pt

2.6-) Calculer la puissance transmise P_u au rotor. En déduire les pertes par effet joule p_{jr} au rotor. 0,5pt

2.7-) Calculer la puissance P_a reçue par le moteur 0,25pt

2.8-) En déduire son facteur de puissance $\cos\varphi$ et son rendement η 0,5pt

2.9-) Compléter le schéma de montage (document réponse n°2) avec tous les appareils nécessaires pour mesurer, lors de l'essai en charge 0,5pt

L'intensité I du courant de ligne, la tension U entre phases, la puissance P_a reçue par le moteur (on dispose de deux wattmètres w_1 et w_2 qui indiquent des puissances P_1 et P_2).

2.10-) Exprimer la puissance p_a reçue par le moteur en fonction de p_1 et p_2 0,5pt

3-) on se propose maintenant de faire varier la fréquence de rotation du moteur. Pour cela, on utilise un onduleur qui permet de réaliser la condition $\frac{U}{f} = \text{constante}$.

3.1-) Pour une fréquence $f = 35\text{Hz}$, tracer la partie utile de la caractéristique $T_u(n)$ du moteur sur le document réponse n°5. 0,5pt

3.2-) En déduire les nouvelles valeurs de la fréquence de rotation du moteur en charge et du glissement. 0,75pt

3.3-) A quelle fréquence faudrait il alimenter le moteur pour obtenir un point de fonctionnement à $T_u = 50\text{N.m}$. $n = 1200\text{ tr.min}^{-1}$ 1pt

3.4-) En déduire la tension d'alimentation correspondante. 0,75pt

Deuxième partie : connaissance d'un moteur à courant continu 2,5pt

Un moteur à courant continu à aimants permanents est couplé à un volant d'inertie (disque massif) comme l'indique la figure ci-contre :

a) On place le commutateur en position 1 : le moteur démarre et atteint sa vitesse nominale. On place ensuite, le commutateur en position 2 : le moteur s'emballe, le moteur change de sens de rotation, le moteur s'arrête lentement ; le moteur s'arrête rapidement. (choisir la ou les bonnes réponses) 0,5pt

b) On place à nouveau le commutateur en position 1. Puis on commute en position 3.

b.1-) Que se passe-t-il ? 0,5pt

b.2-) Que se passe-t-il si on diminue la valeur de la résistance R ? 0,75pt

b.3-) Donner une application pratique du passage de 1 à 3 0,75pt

PROBLEME II**(11,25 PTS)**

On se propose d'étudier dans un premier temps le fonctionnement d'un onduleur, puis un montage à amplificateurs opérationnels qui permet de contrôler la tension délivrée par la batterie de l'onduleur.

Première partie : Etude de l'onduleur **5,25pts**

On considère l'onduleur de la figure n°1 qui alimente une charge inductive équivalente à L'association en série d'une résistance $R = 100\Omega$ avec une bobine parfaite d'inductance L . On donne $V_{BAT} = 220V$. Les interrupteurs électroniques sont considérés parfaits.

1. On relève la tension $u(t)$ aux bornes de la charge et l'intensité $i(t)$ du courant qui la traverse (cf figure n°3).

Pour cela, on a utilisé oscilloscope à entrées différentielles et une sonde de courant de rapport $100mV/A$. Déterminer la période puis la fréquence de la tension délivrée par l'onduleur. 0,75pt

2. Proposer le schéma de montage qui a permis de relever $u(t)$ et $i(t)$ (on ne représentera que la charge de l'onduleur). Indiquer la correspondance entre $u(t)$ et $i(t)$ et les voies A et B de l'oscilloscope. 1pt

3. Quelle est la valeur efficace U de la tension $u(t)$ (démonstration non exigée) ? 0,5pt

4. Des deux éléments R et L , quel est celui qui consomme de la puissance active ? la valeur efficace de l'intensité du courant dans la charge est $I=0,9A$. Calculer la puissance active consommée par la charge. 0,5pt

5. En utilisant les oscillogrammes de $u(t)$ et $i(t)$, compléter les deux premières lignes du tableau du document réponse n°3 0,5pt

6. Donner l'expression littérale de la puissance instantanée $p(t)$ transférée à la charge. Compléter la dernière ligne du tableau en indiquant son signe pendant les différents intervalles de temps. 0,5pt

7. Exprimer $i_{BAT}(t)$ en fonction de $i(t)$: a) lorsque $u(t) > 0$; b) lorsque $u(t) < 0$ 0,75pt

8. Utiliser la question précédente pour tracer $i_{BAT}(t)$ sur le document réponse n°4. 0,75pt

Deuxième partie : étude du contrôleur de tension **5pts**

Pour contrôler la tension délivrée par la batterie, on utilise le dispositif de la figure n°2 qui permettra de commander un système de recharge de la batterie. Le but est de conserver une tension $V_{BAT} = 220V$ à $\pm 10\%$. La diode zéner Dz permet d'élaborer une tension de référence $V_z = 4,7 V$. Cette diode est limitée en courant à $I_{z_{max}} = 200 mA$. Les amplificateurs opérationnels

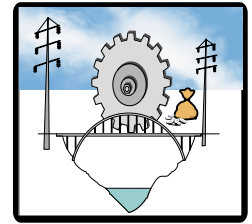
sont supposés parfaits et alimentés en $\pm 15V$ (les tensions de saturations sont $V_{sat+} = + 15V$ et $V_{sat-} = -15V$).

1. Calculer la valeur R_1 qui permet de limiter l'intensité du courant qui traverse Dz à $I_{z_{max}}$ 0,5pt
2. L'amplificateur opérationnel n°1 fonctionne-t-il en régime linéaire ou en régime non linéaire ? justifier la réponse. 0,25pt
3. Exprimer V_{s1} en fonction de V_z 0,5pt
4. L'amplificateur opérationnel n°2 fonctionne-t-il en régime linéaire ou en régime non linéaire ? Justifier la réponse. 0,25pt
5. Exprimer V_- en fonction de V_{BAT} , R_1 et R_3 . En déduire sa valeur numérique ; 0,5pt
6. Exprimer V_+ en fonction de V_{s1} , V_{s2} , R_4 et R_5 . 0,5pt
7. En se référant aux questions précédentes, montrer que V_+ peut s'écrire :

$$V_+ = V_z \frac{R5}{R4+R5} + \frac{R4}{R4+R5} V_{s2}$$
 0,25pt
8. Quelle est la valeur de V_{s2} lorsque $V_+ > V_-$? En déduire l'expression de V_+ correspondante. Calculer sa valeur numérique. on notera cette valeur V_2 . 0,5pt
9. Quelle est la valeur de V_{s2} lorsque $V_+ < V_-$? En déduire l'expression de V_+ correspondante. Calculer sa valeur numérique. On notera cette valeur V_1 0,5pt
10. Quelles sont les valeurs de V_{BAT} qui vont déclencher le changement de la tension de sortie de l'amplificateur opérationnel n°2 ? 0,5pt est-ce correct étant donné le but fixé ? 0,5pt



UNIVERSITE DE DOUALA
CONCOURS D'ENTREE A L'ENSET
EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM.
JUILLET 2010



EPREUVE D'ELECTROTECHNIQUE(F3)

DUREE : 3H : 00

PROBLEME 1: Moteur à courant continu alimenté par un hacheur

Les pages à la fin sont des documents - réponses, et doivent être rendues avec la copie d'examen.

NB : Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A : MOTEUR A COURANT CONTINU

Un monte charge est équipé d'un moteur à courant continu, à excitation indépendante. L'intensité du courant d'excitation est maintenue **constante** pendant tout le problème. Les caractéristiques **nominales** du moteur sont les suivantes :

- PUISSANCE UTILE : **8 KW**
- INDUCTEUR
 - tension aux bornes de l'inducteur : $U_{exN} = 500 \text{ V}$;
 - intensité du courant d'excitation : $I_{exN} = 1 \text{ A}$
- INDUIT
 - tension aux bornes de l'induit : $U_N = 500 \text{ V}$;
 - intensité du courant dans l'induit : $I_N = 20 \text{ A}$;
 - fréquence de rotation : $n_N = 3820 \text{ tr.min}^{-1}$ soit une vitesse angulaire $\Omega_N = 400 \text{ rad/s}$;
 - résistance de l'induit : $R = 1 \Omega$;

1-) A propos de l'inducteur

Calculer la puissance d'excitation absorbée par l'inducteur ?

2-) A propos de l'induit, le moteur fonctionnant à son régime nominal

2.1. Représenter le modèle équivalent de l'induit du moteur.

2.2. Calculer pour le fonctionnement nominal :

- a) la puissance absorbée par le moteur P_{aN} ;
- b) la f.é.m. E_N ;
- c) la puissance électromagnétique P_{emN} ;
- d) le moment du couple électromagnétique T_{emN} ;
- e) les pertes collectives (pertes mécaniques et magnétiques)
- f) le moment du couple utile T_{uN} ;

g) le rendement de l'induit.

3-) Fonctionnement sous tension variable.

L'intensité du courant circulant dans l'induit est constante : $I = I_N = 20 \text{ A}$. Un essai a permis de tracer la caractéristique de vitesse du moteur en fonction de la tension d'alimentation de l'induit (voir annexe 1 page 3).

3.1. Déterminer l'équation de cette caractéristique à partir des équations de base de la machine à courant continu.

3.2. Déterminer graphiquement la tension de démarrage. Vérifier cette valeur par le calcul.

4-) Fonctionnement sous tension nominale et couple variable

4.1. T_r est le moment du couple exercé par la charge mécanique sur le moteur (on supposera que le couple de perte est constant). Montrer que $I = \frac{T_r + 4}{1,2}$.

4.2. Le moteur entraîne un monte charge. Pour une certaine charge, le moment du couple résistant T_r exercé sur le moteur peut être considéré comme indépendant de la vitesse.

- Quelle que soit la vitesse ;
- $T_r = 10 \text{ N.m}$ pour une charge de 500 kg
 - $T_r = 15 \text{ N.m}$ pour une charge de 1000 kg
 - $T_r = 20 \text{ N.m}$ pour la charge nominale de 1500 kg

Les caractéristiques $I = f(T_r)$ et $T_u = f(\Omega)$ pour le moteur sont tracées en annexe 2 page 4.

a) Représenter sur le document réponse n°2 les trois courbes $T_r = f(\Omega)$ pour les trois types de charge.

b) Dédire des graphiques la fréquence de rotation de fonctionnement de l'ensemble moteur machine ainsi que l'intensité du courant absorbée pour les trois charges (500kg, 1000kg, 1500kg).

PARTIE B : ETUDE DU HACHEUR

On étudie le dispositif de la figure 1.

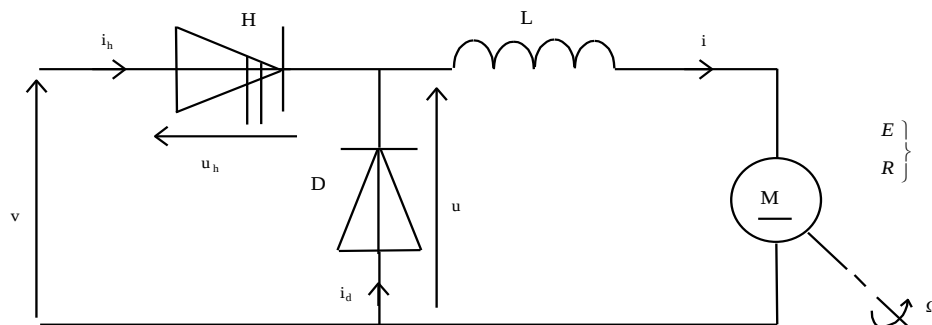


Figure 1

L'inductance L représente l'inductance globale de l'induit et de la bobine de lissage supposée sans perte. La tension continue V est égale à **500 V**.

L'interrupteur H (commandable à l'ouverture et à la fermeture) et la diode D sont parfaits.

⇒ H est fermé sur l'intervalle de temps $[0, \alpha T]$

⇒ H est ouvert sur l'intervalle de temps $[\alpha T, T]$

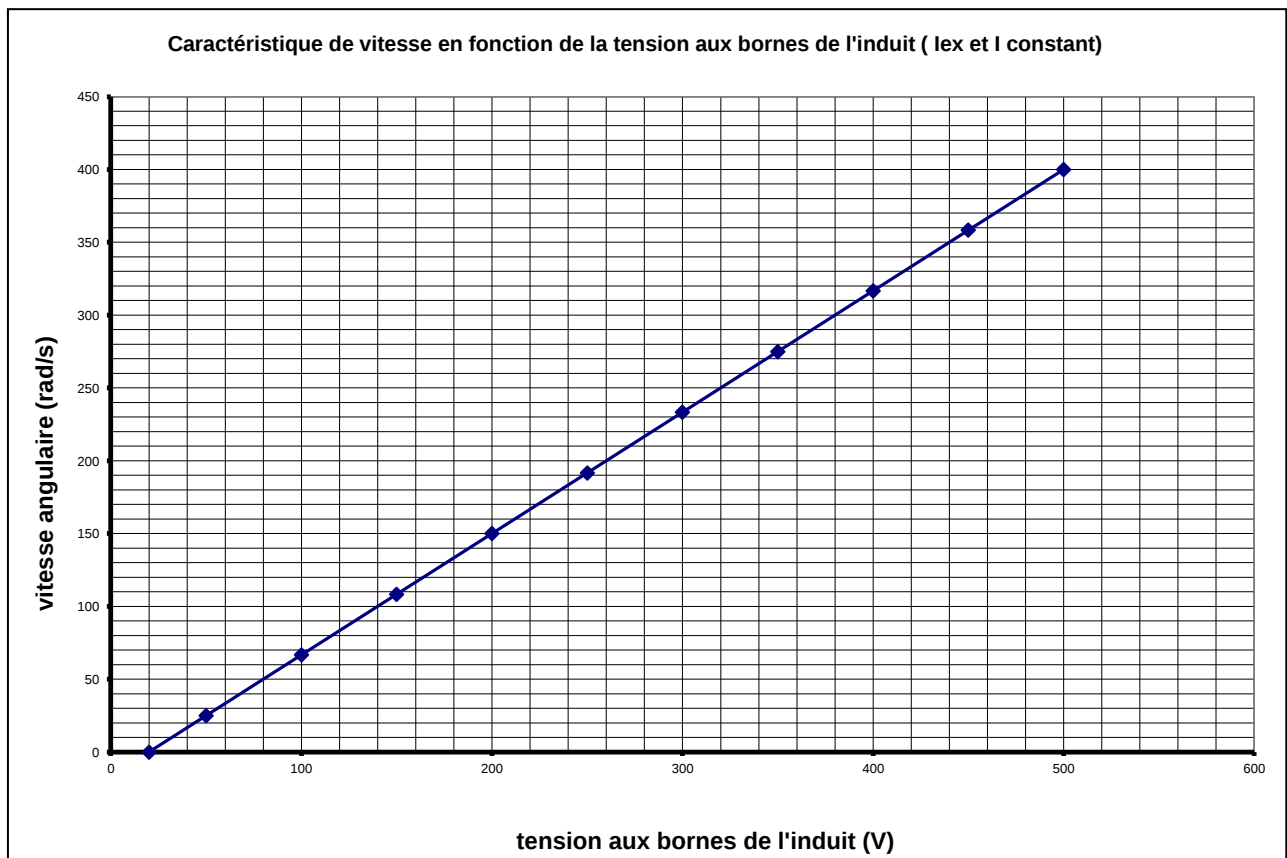
T désigne la période de fonctionnement du hacheur et α son rapport cyclique.

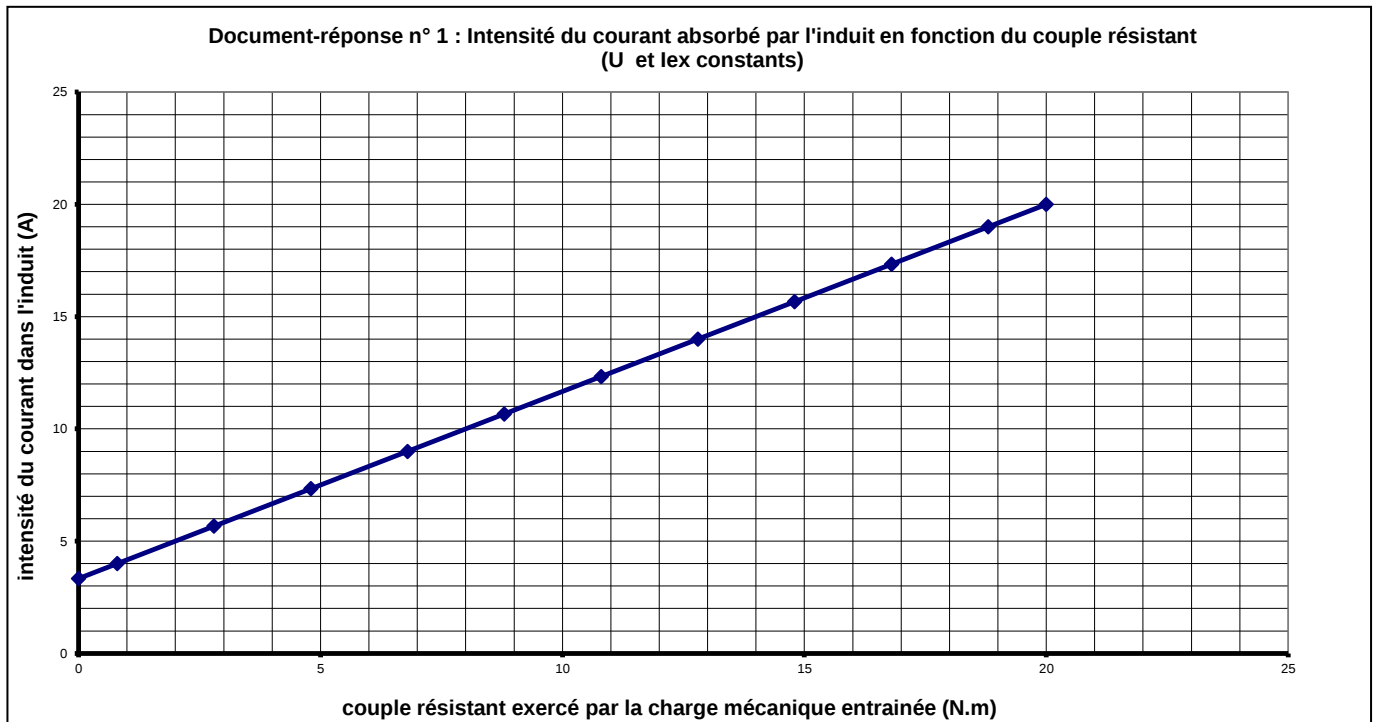
L'allure du courant $i(t)$ est représentée sur le document réponse n° 3 (annexe 2 page 4).

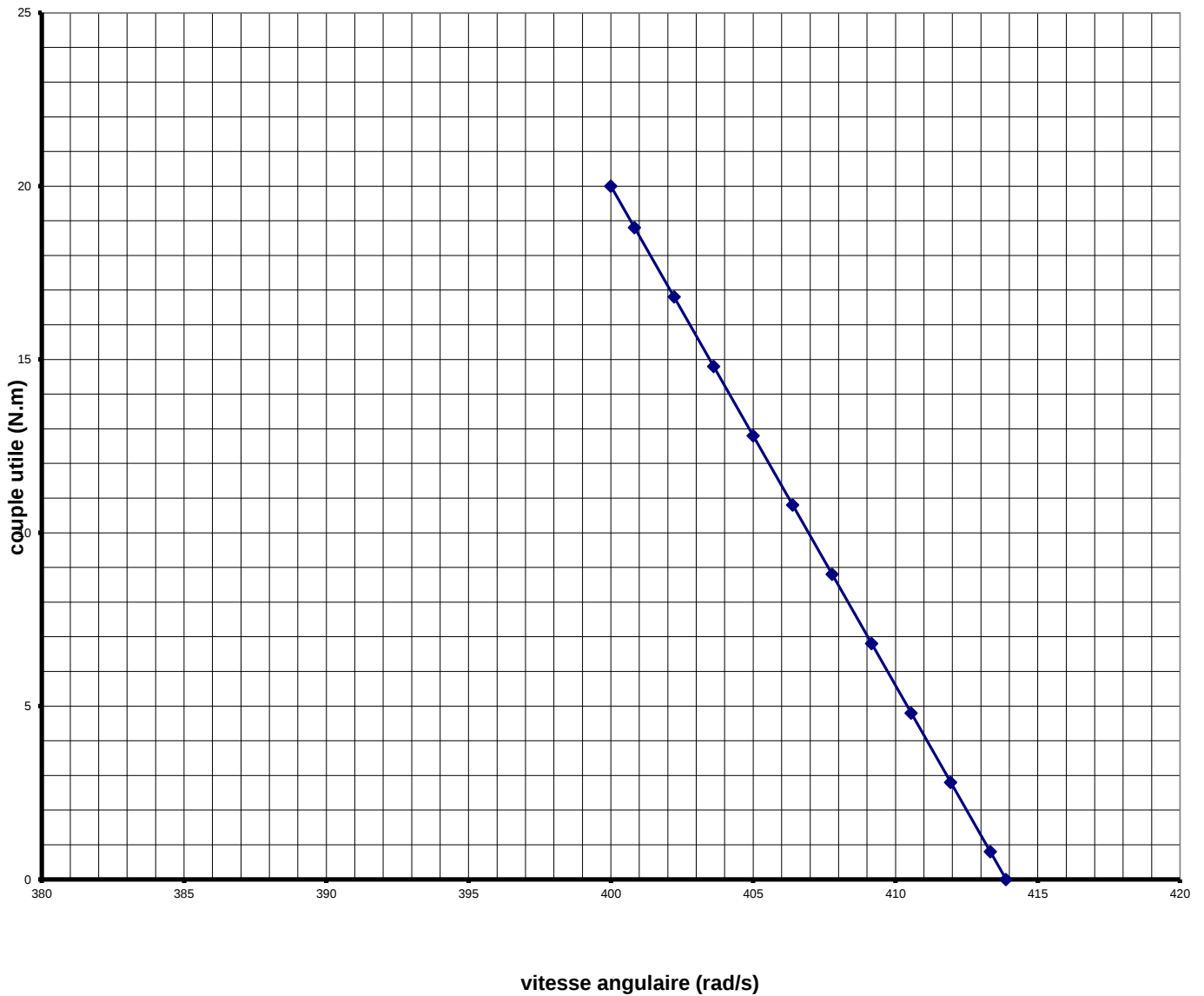
Les chronogrammes demandés seront tracés sur ce même document sur l'intervalle de temps $[0, 2T]$.

- 1.) Calculer la fréquence de fonctionnement f du hacheur et son rapport cyclique α .
- 2.) Indiquer les intervalles de conduction et de blocage de H et D sur une période.
- 3.) Tracer les chronogrammes de $u(t)$ et $u_h(t)$ sur le document réponse n° 3 (annexe 2 page 4)
- 4.) En déduire par le calcul la valeur moyenne $\langle u(t) \rangle$ en fonction de α et V .
- 5.) Tracer les chronogrammes de $i_d(t)$ et $i_h(t)$ sur le document réponse n° 3 (annexe 2)

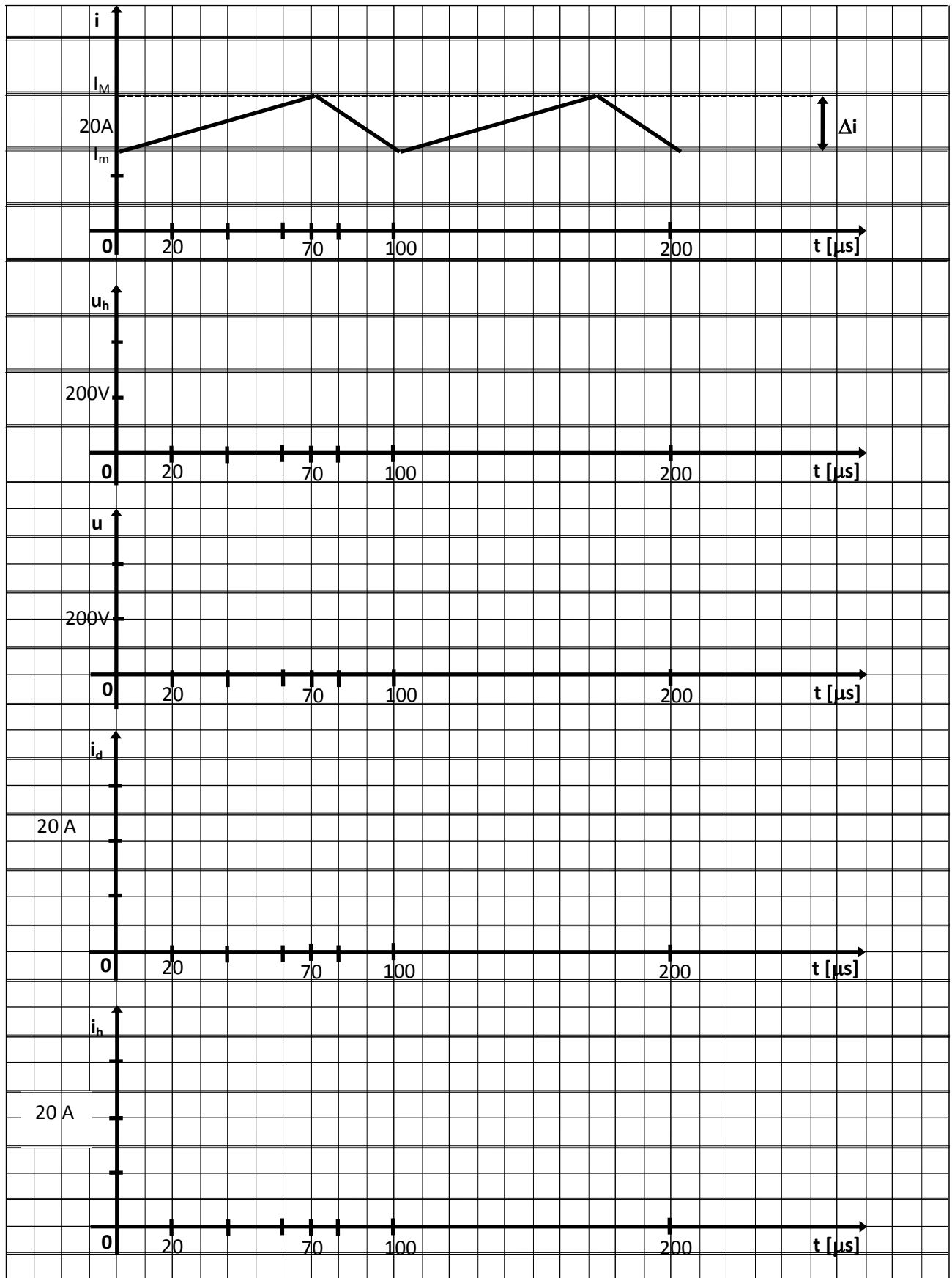
Annexe 1



*Annexe 2*

Document-réponse n° 2 : caractéristique mécanique du moteur (U et I_{ex} constant)

Annexe 2 et document réponse n° 3 (A rendre avec la copie)





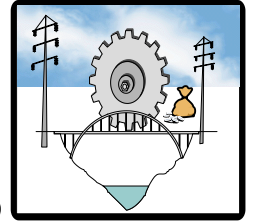
UNIVERSITE DE DOUALA
CONCOURS D'ENTREE A L'ENSET

EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM. Session : 2009

EPREUVE D'ELECTROTECHNIQUE(F3)

DUREE : 5H : 00

Indications : Toutes les figures citées dans le texte sont montrées à la page 3/3



EXERCICE I

L'interrupteur (S) de chacun des circuits électriques des figures respectives 1(a), 1(b) et 1(c) est fermé à l'instant $t=0$. La tension d'alimentation E est constante.

I-1) Dans le cas du circuit de la figure 1(a), le courant $I(t)$ à travers l'inductance est de la forme $I(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, où K et τ sont des constantes, et $E=10\text{volts}$, $R=1\text{K}\Omega$ et $L=1\text{mH}$.

I-1.1) Trouver l'expression et la valeur numérique de K .

I-1.2) Trouver l'expression et la valeur numérique de τ .

I-1.3) Déterminer l'expression de la tension $V(t)$ à partir de $I(t)$.

I-1.4) Déterminer le temps t_r pour lequel $I(t_r)$ atteint $9,5\text{mA}$, ainsi que la tension $V(t_r)$ associée.

I-1.5) Déterminer l'énergie emmagasinée dans l'inductance L à l'instant t_r .

I-2) Etant donné les résultats obtenus précédemment, reprenez les réponses aux cinq questions de la section I-1) dans le cas de la figure 1(b) avec $E=10\text{V}$, $R=1\text{K}\Omega$, $L=1\text{mH}$, $R_1=1\text{K}\Omega$ et $L_1=1\text{mH}$. Les nouvelles questions considérées sont respectivement numérotées I.2.1, I.2.2, I.2.3, I.2.4 et I.2.5.

EXERCICE II

Dans le circuit électronique de la figure 2(a), l'amplificateur opérationnel et la diode D sont supposés idéaux. Les données connues sont : $V_{cc}=10\text{V}$, $E=24\text{V}$, $R=R_1=R_2=1\Omega$, et $V_0=10\text{Volts}$.

II-1) Montrer que le graphe $y(t)$ en fonction de $x(t)$ correspond à la figure 2(b).

II-2) Déterminer, les expressions et les valeurs numériques de Y_m ; Y_M ; X_m et X_M en fonctions des grandeurs connues.

II-3) Trouver la valeur de la résistance R_3 qui procure un courant de 12mA pour la saturation du transistor T .

II-4) Le relais électromagnétique KA peut être modélisé par une inductance $L_s=20\text{mH}$ et une résistance série $R_s=100\Omega$.

Déterminer en régime permanent $I_a(\infty)$ lorsque le transistor est saturé.

II-5) analyser et esquisser l'allure du courant $I_a(t)$ à partir de l'instant de blocage du transistor T.

EXERCICE III

Une charge constituée de deux résistors de valeurs R_s et R_c montés en série, est alimentée par une source de tension constante $X(t)=10V$ (voir figure 3) de résistance interne R_g . En supposant que $R_g=10\Omega$, $R_c=5\Omega$ et R_s étant la résistance variable et P la puissance totale délivrée à la charge.

III.1) Trouver l'expression de la puissance totale P sachant que R_s est variable.

III.2) Etudier et représenter le graphe de P lorsque R_s varie dans l'ensemble $[0, +\infty[$.

III.3) Déterminer la valeur de R_s pour laquelle la puissance P est maximale.

III.4) Déterminer la valeur de la puissance maximale $P_{R_{max}}$.

III.5) Trouver la puissance dissipées par chacun des éléments R_c et R_s lorsque $P = P_{max}$.

EXERCICE IV

Le schéma de principe d'un convertisseur de puissance idéal est représenté à la figure 4 où l'alternance positive du signal $X(t)=10\sin(100\pi t)$ est indiquée. Le circuit de contrôle est réglé pour un angle de retard θ .

IV-1) Etudier et représenter l'allure de V_c pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

IV-2) Trouver l'expression de la tension moyenne $V_{cm}(\theta)$ associée à R_c .

IV-3) Déterminer la valeur numérique correspondante de $V_{cm}(\theta)$ associée à R_c pour $\theta=45^\circ$.

IV-4) Trouver l'expression de la tension efficace $V_{ce}(\theta)$ associée à R_c .

IV-5) Trouver la valeur numérique correspondante de $V_{ce}(\theta)$ pour $\theta=45^\circ$.

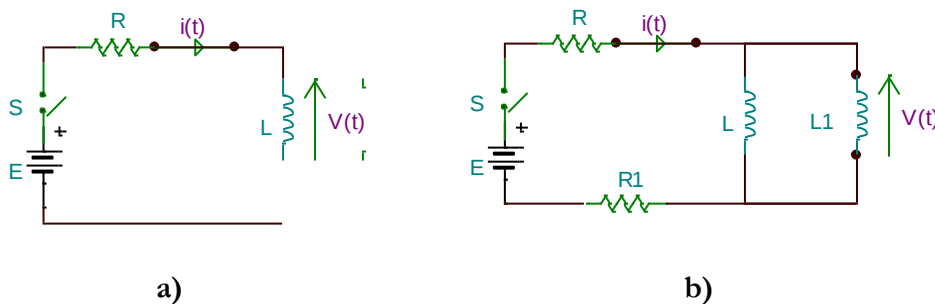


Figure 1

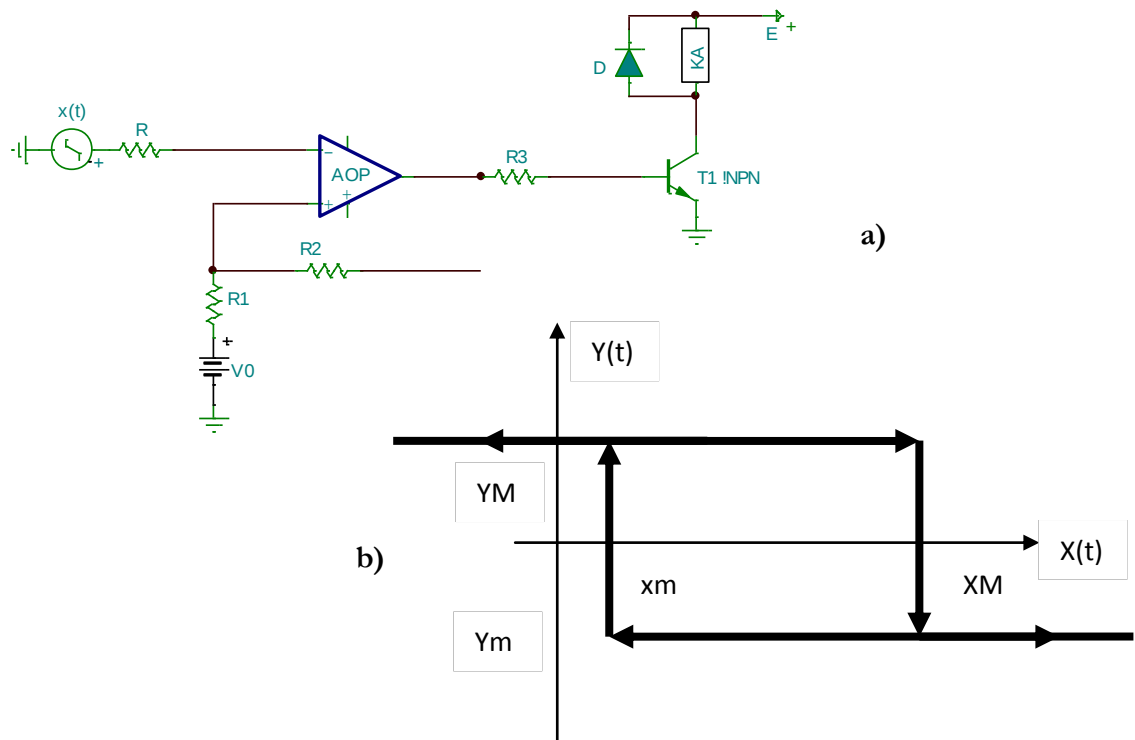


Figure 2

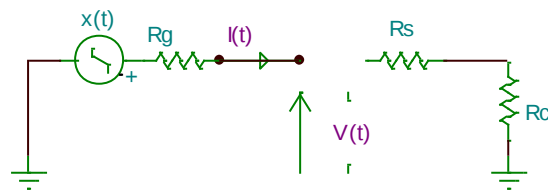


Figure 3

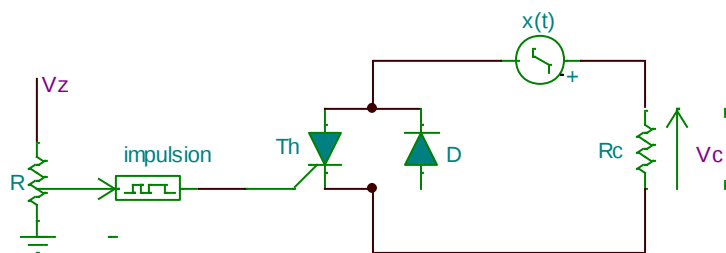


Figure 4

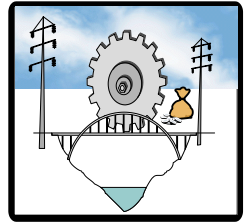


UNIVERSITE DE DOUALA
CONCOURS D'ENTREE A L'ENSET

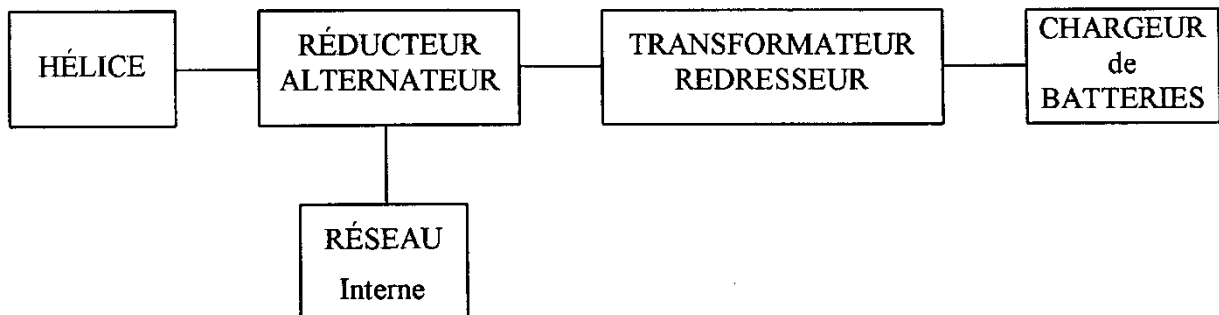
EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM. Session : 2008

EPREUVE D'ELECTROTECHNIQUE(F3)

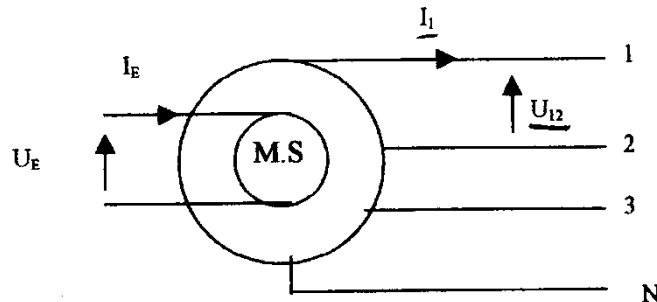
DUREE : 5H : 00



On se propose d'étudier le système de production d'énergie électrique éolienne suivant :



PARTIE A: ÉTUDE DE L'ALTERNATEUR



1.) La plaque signalétique de la machine synchrone triphasée utilisée comme alternateur dans le dispositif étudié, comporte les indications suivantes :

16 kVA, 230 V/400 V, 50 Hz,

1.1.) Cette machine devant pouvoir être couplée à un réseau triphasé (400 V - 50Hz), précisez en justifiant votre réponse, le seul couplage possible pour les enroulements du stator.

1.2.) L'alternateur est relié aux pâles de l'hélice par l'intermédiaire d'un réducteur de rapport de transformation $k = n_s / n_H = 2,5$ (où n_s est la vitesse de rotation de l'alternateur et n_H la vitesse de rotation de l'hélice). Sachant que l'hélice tourne à une vitesse constante de 400 tr.min⁻¹, calculer la vitesse nominale n_s , de l'alternateur, ainsi que son nombre de paires de pôles p .

1.3.) Calculer l'intensité efficace nominale I_N du courant dans un enroulement du stator.

2.) La machine est utilisée en alternateur autonome. Le stator est couplé en étoile. La résistance mesurée à chaud entre deux bornes du stator est : $R = 0,60 \, \Omega$.

Le rotor est entraîné à la vitesse de rotation nominale de l'alternateur $n = 1000 \text{ tr.min}^{-1}$.

La résistance entre deux bornes du stator, est mesurée par une méthode volt-ampèremétrique.

2.1.) Calculer la résistance R_s d'un enroulement du stator, en justifiant votre réponse.

Les résultats des essais à vide et en court-circuit, ont été regroupés sous formes de courbes données à la page 5.

2.2.) En analysant les courbes de la page 5, préciser le coefficient de proportionnalité entre U_0 et I_E pour la partie linéaire de la caractéristique à vide. Donner ensuite la relation entre I_{CC} et I_E . Calculer l'impédance synchrone Z_s du modèle équivalent d'une phase du stator, puis la réactance synchrone X_s correspondante.

3.) L'alternateur alimente maintenant un réseau (**400 V / 690 V ; 50 Hz**) interne à une petite Entreprise. L'installation électrique de cette usine est équivalente à une charge triphasée équilibrée pour l'alternateur. On donne :

- La puissance active consommée par cette entreprise **$P = 12,0 \text{ kW}$**
- Le facteur de puissance **$\cos \varphi = 0,75$ (inductif)**

3.1. Donner la puissance réactive Q consommée par cette usine.

3.2. En déduire la puissance apparente de cette usine.

3.3. Donner l'intensité du courant en ligne.

3.4. Calculer la capacité nécessaire du condensateur à placer aux bornes de l'installation pour ramener le facteur de puissance à 0.95.

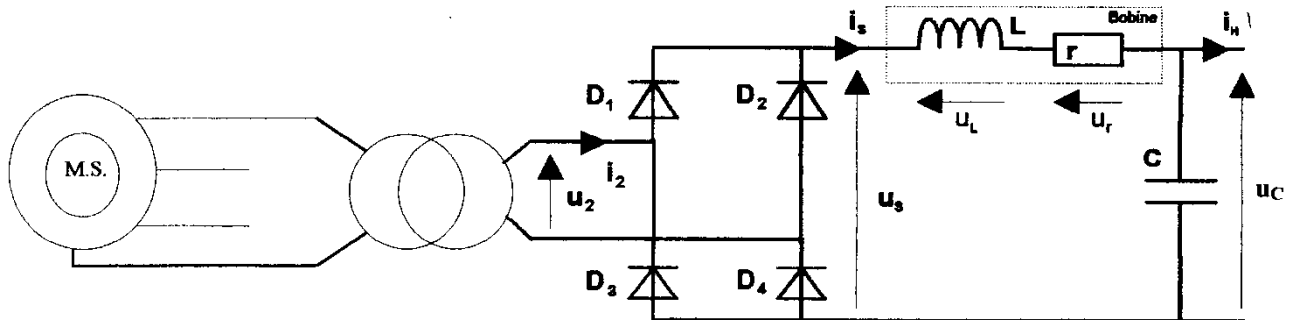
3.5. L'installation est reliée à l'alimentation par une impédance $Z=0,2+0,3j$.

Déterminer la tension réelle à l'entrée de l'installation.

PARTIE B : ÉTUDE DE L'ENSEMBLE TRANSFORMATEUR REDRESSEUR

Dans cette partie, on ne considérera qu'un seul enroulement du stator de l'alternateur. Celui-ci alimentera le primaire d'un transformateur monophasé que l'on se propose d'étudier ici, ainsi qu'un dispositif permettant de redresser et de filtrer la tension transformée. Le dispositif est le suivant.

La plaque signalétique du transformateur donne les indications suivantes



1.) Étude du transformateur

230VA, 230V/25,3V, 50 Hz

Les différents essais réalisés sur le transformateur ont donnés les résultats suivants :

Essai en CONTINU	Essai à VIDE	Essai en Court Circuit
Au primaire: $U=6,0V$ et $I = 1,0A$	$U_{1v} = 230 V$ $I_{1v} = 0,11 A$ $U_{2v} 25,3 V$ $P_{1v} = 6,9 W$	$I_{2CC} = I_{2N}$ $U_{1CC} = 20 V, 50 Hz$ $P_{1CC} = 11 W$

1.1.) Calculer les intensités I_{1N} et I_{2N} des courants nominaux primaires et secondaires.

1.2.) Donner le schéma de montage permettant de réaliser l'essai à vide.

1.3.) On rappelle l'expression $U_{2v} = 4,44 \cdot N_2 \cdot f \cdot B_{max} \cdot S$

1.3.1.) Sachant que la section du circuit magnétique est de 10 cm^2 , et que le nombre de spires au secondaire est $N_2 = 150$ spires, donner la valeur du champ magnétique maximal dans le fer.

1.3.2.) Démontrer l'expression rappelée à la question 1.3.1 ?

1.4.) À l'aide de l'essai en continu calculer la résistance R_1 .

1.5.) À l'aide des résultats de l'essai à vide, calculer :

1.5.1. Les pertes par effet joule à vide P_{jv} ;

1.5.2. Les pertes dans le fer ;

1.5.3. Le facteur de puissance à vide $\cos \varphi_v$.

1.6.) À l'aide de l'essai en court circuit avec $I_{2CC} = I_{2N} = 9,1 A$, calculer :

1.6.1. La résistance des enroulements ramenée au secondaire ;

1.6.2. La réactance X_s des enroulements ramenée au secondaire.

1.7.) Donner un modèle équivalent du transformateur vu du secondaire.

2.) Etude du Redresseur et du Filtre

La résistance r de la bobine vaut **0,50 Ω** et son inductance L a une valeur suffisante pour que l'intensité i_s soit quasiment constante on notera donc $i_s = I_s$.

Le condensateur a une capacité de valeur suffisante pour que la tension u_c soit quasiment constante on notera donc $u_c = U_c$

Pour le fonctionnement envisagé on a **$U_c = 18,5 \text{ V}$ et $I_s = 8,2 \text{ A}$**

2.1.) Sur la figure 5 de la feuille réponse 2, représenter la tension u_s et indiquer les diodes conductrices sur l'axe 0, t.

2.2. Sachant que la base de temps est de 2 ms/div. sur l'oscillogramme de la feuille réponse 2, calculer la fréquence de la tension de sortie u_s .

2.3.) On suppose que les diodes du pont redresseur sont idéales : l'expression de la tension

moyenne $\overline{u_s}$ en fonction de U_2 est alors : $\overline{u_s} = 2 \cdot \frac{U_2}{\pi} \sqrt{2}$

2.3.1. Donner la relation liant $\overline{u_s}$ à U_c , I_s et r .

2.3.2. Calculer $\overline{u_s}$ et en déduire U_2 .

2.4.) Sur la figure 6 de la feuille réponse 2, représenter l'intensité i_2 Déterminer sa valeur efficace I_2 .

2.5.) On remplace le pont à diode par un pont tout thyristor ; déterminer l'angle d'amorçage des thyristors pouvant garantir la même tension $\overline{u_s}$ à U_{2v} .

2.6.) Représenter la tension U_s en indiquant les thyristors conducteurs

3.) Étude du chargeur de batteries

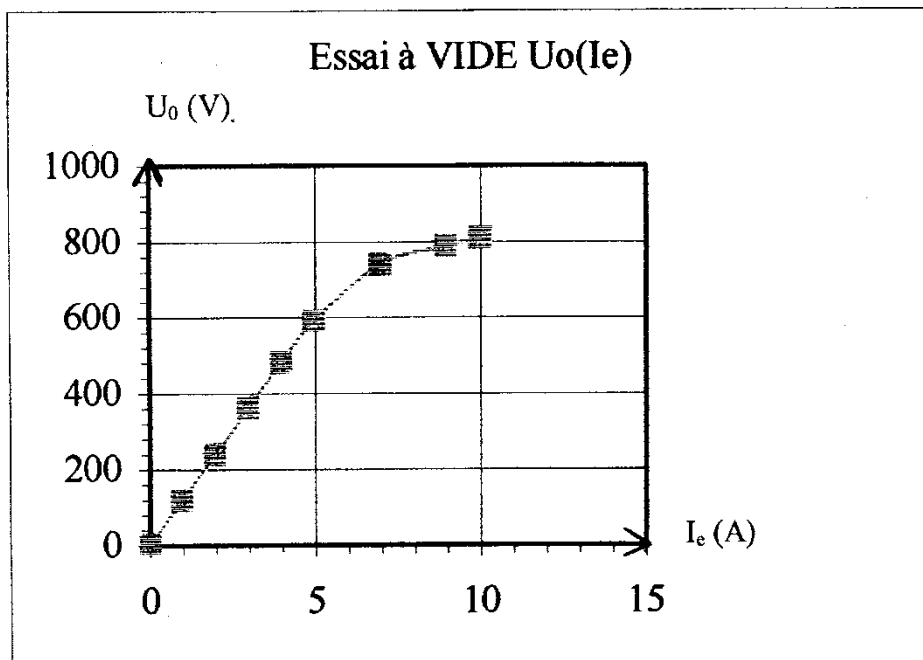
La charge des batteries se fait par l'intermédiaire d'un hacheur La commande varie suivant la valeur de l'intensité du courant dans les batteries. Plus la batterie est faible et plus le courant qui la traverse est élevé. Cette partie est relative au montage de la figure n°7 (feuille réponse n°3). Les amplificateurs utilisés ici sont considérés comme parfaits et sont alimentés sous la tension unique 0 - 10 V. L'amplificateur opérationnel n° 1 fournit la tension $V_3 = V_2 - V_1$

3.1.) Indiquer le régime de fonctionnement de l'amplificateur opérationnel n° 2, en déduire la valeur de V_d , tension de commande du hacheur, en fonction de la tension différentielle d'entrée $V_d = V_3 - V_R$.

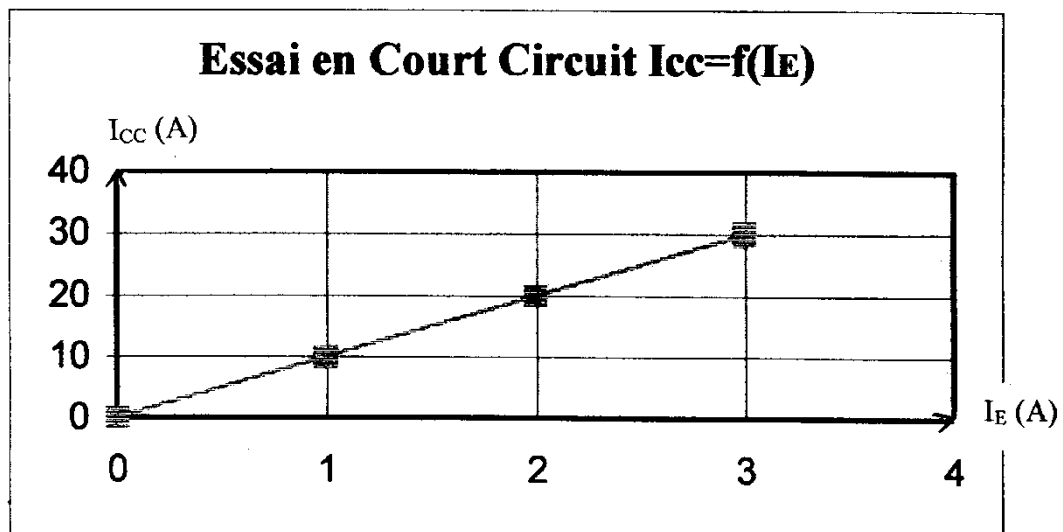
3.2.) Pour $V_3 = 0.8 \text{ V}$, tracer la forme de la tension de commande V_4 , sur la feuille réponse 3. Quand l'interrupteur commandé K est fermé, quelle est la valeur de V_1 ? En déduire la valeur de V_2 . Sachant que $r = 1,0 \, \Omega$, quel est alors la valeur de l'intensité I_B du courant dans la batterie en supposant celui-ci est parfaitement constant ?

RÉSULTATS DES ESSAIS

Essai à vide : On mesure ici les variations de U_0 , la tension mesurée entre deux bornes du stator, pour différentes valeurs de I_e .



Essai en court circuit: On mesure ici les variations de I_{cc} pour différentes valeurs de I_e .



FEUILLE RÉPONSE N° 2

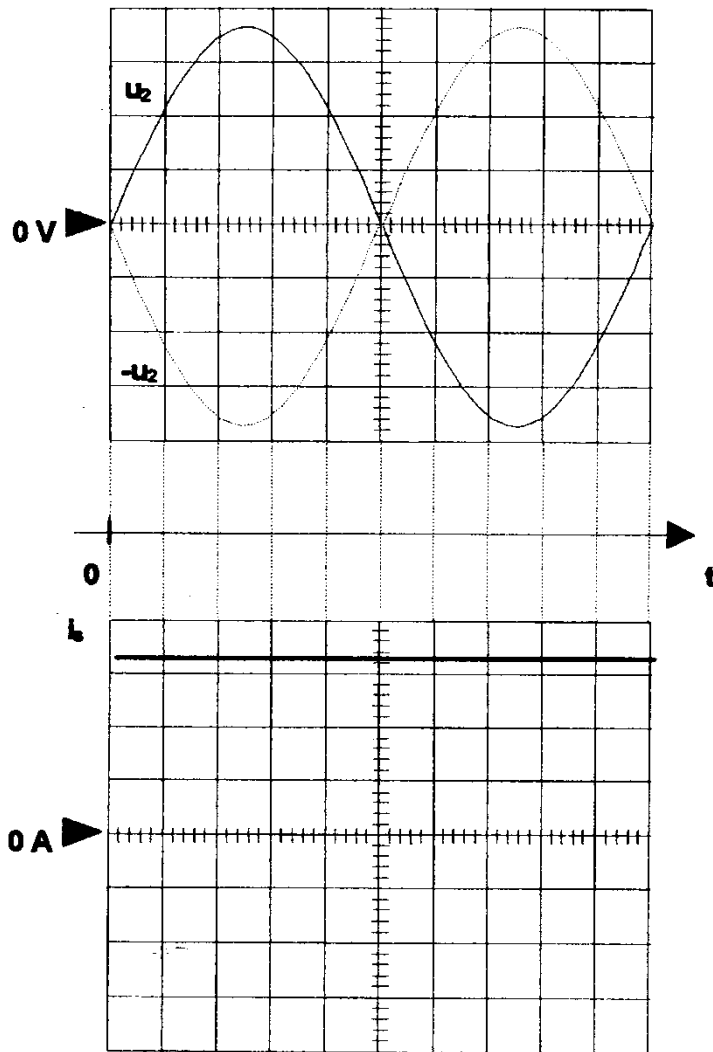


Figure 5

◀ Diodes conductrices

Figure 6

FEUILLE RÉPONSE N° 3

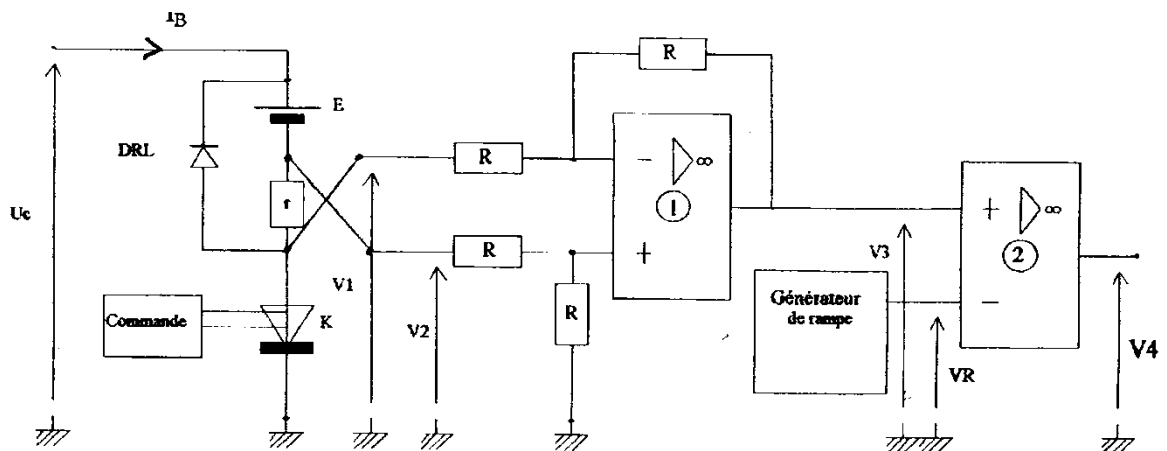
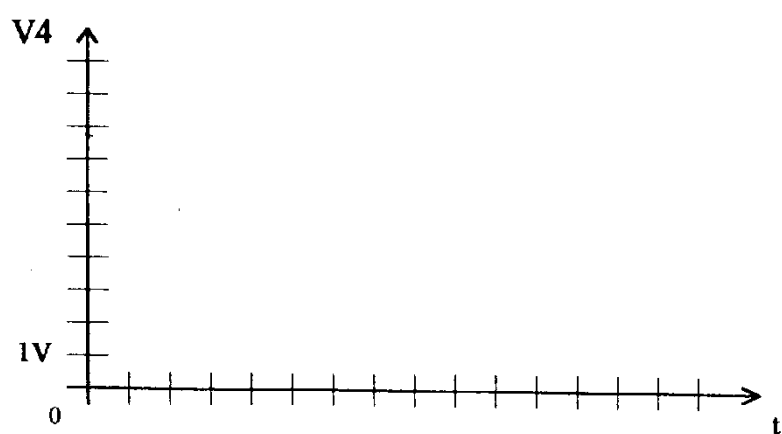
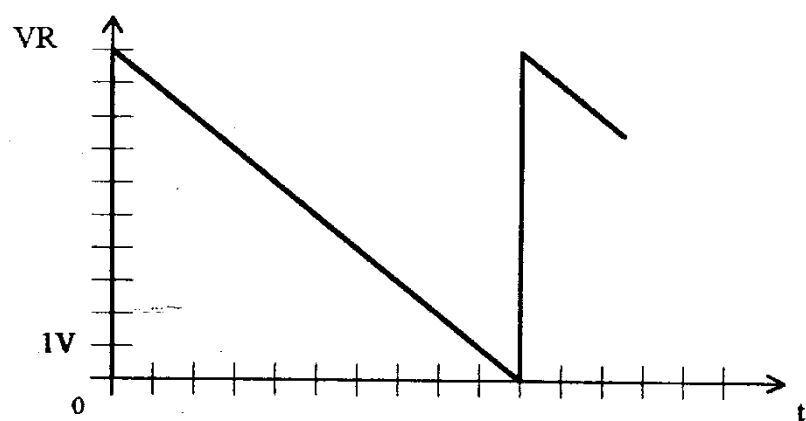


FIGURE 7



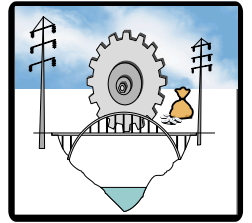


UNIVERSITE DE DOUALA
CONCOURS D'ENTREE A L'ENSET

EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM. Session : 2007

EPREUVE D'ELECTROTECHNIQUE(F3)

DUREE : 5H : 00



I- INSTALLATION ELECTRIQUE : (Transport d'énergie)

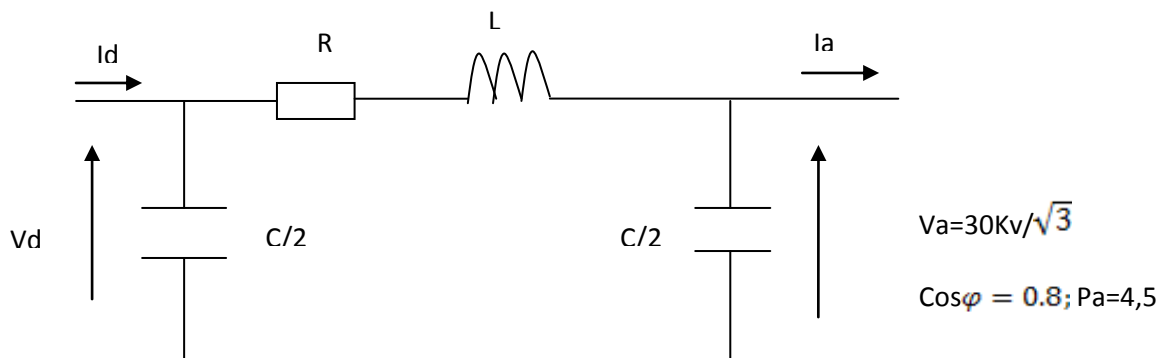
Pour alimenter la ville de SANGMELIMA en énergie électrique, une ligne moyenne tension part du centre de distribution de MBALMAYO, situé à 120km de cette ville.

a-) Si l'effort de traction sur la ligne $T=1250\text{daN}$ et la masse par unité de longueur $P=1\text{daN/m}$. calculer le nombre supports à placer entre SANGMELIMA et le centre de distribution pour que la flèche soit égale à 1m.

b-) Si à l'arrivée on a une tension de 30KV entre phases, une puissance de 4,5Mw avec un facteur de puissance de 0,8. Calculer le courant en ligne.

c-) La résistance, la réactance inductive et la capacité kilométrique valent respectivement : $r=0,01\Omega/\text{km}$; $L_w=0,2\Omega/\text{km}$; $c=10\text{nF}/\text{km}$ (pour chaque conducteur). Déterminer pour chaque phase : la résistance, la capacité et la réactance inductive.

d-) Si le modèle d'une phase par rapport au neutre est donné par la figure ci-dessous.



V_d = tension simple départ de la ligne ; V_a = tension simple à l'arrivée ; $f=50\text{Hz}$

Calculer au départ de la ligne :

- d-1) La tension composée U_d ;
- d-2) La puissance active P_d en kilowatt ;
- d-3) Le courant I_d et le facteur de puissance $\cos\varphi$.

II- COMMANDE DES MACHINES : (La perceuse automatique)

Une perceuse automatique comprend une tête dotée d'un mouvement de translation (montée et descente), et d'une broche dotée d'un mouvement de rotation.

2-1) FONCTIONNEMENT

Une impulsion sur S1 entraîne la rotation de la broche et la descente rapide de la tête. Lors de sa descente, la tête actionne le capteur S2, ce qui entraîne sa descente lente (début de perçage de la pièce). Le fin de course S3 signale la fin du perçage et commande la montée lente de la tête. Le passage à nouveau sur S2 entraîne la montée rapide de la tête. La fin de course S4 arrête la montée de la tête et la rotation de la broche.

2-2) PARTIE OPERATIVE

M1 : moteur montée et descente de la tête 220/380V deux vitesses (enroulements séparés) démarrage direct 2 sens de marche.

M2 : moteur rotation de la broche 220/380V démarrage direct un sens de marche.

2-3) PARTIE COMMANDE

KM1 : contacteur commandant la descente ; KM2 : contacteur commandant la montée

KM3 : contacteur commandant la grande vitesse ; KM4 : contacteur commandant la petite vitesse.

KM5 : contacteur commandant la rotation de la broche.

S0 : bouton poussoir d'arrêt d'urgence ; S1 : bouton poussoir marche ; S2 : fin de course descente rapide et montée lente.

S3 : fin de course descente de la tête ; S4 : fin de course montée de la tête.

2-4) ALIMENTATION

Réseau : AES SONEL 220/380V- 50HZ ; puissance : 380V ; commande : bobine des contacteurs de 24Vac

2-5) TRAVAIL DEMANDE

- a- Etablir le schéma de circuit de puissance de l'installation.
- b- Etablir le schéma de circuit de commande de l'installation.

III- PROJET : (Feux de signalisation routière)

Pour l'avant projet de commande des feux de signalisation d'un carrefour à quatre voies (figure1) , on se propose d'utiliser l'automate programmable « SLC 100 » d'ALLEN BRADLEY. Pour sa programmation, on tiendra compte du GRAFCET (figure2) et des tableaux d'adressage ci-dessous.

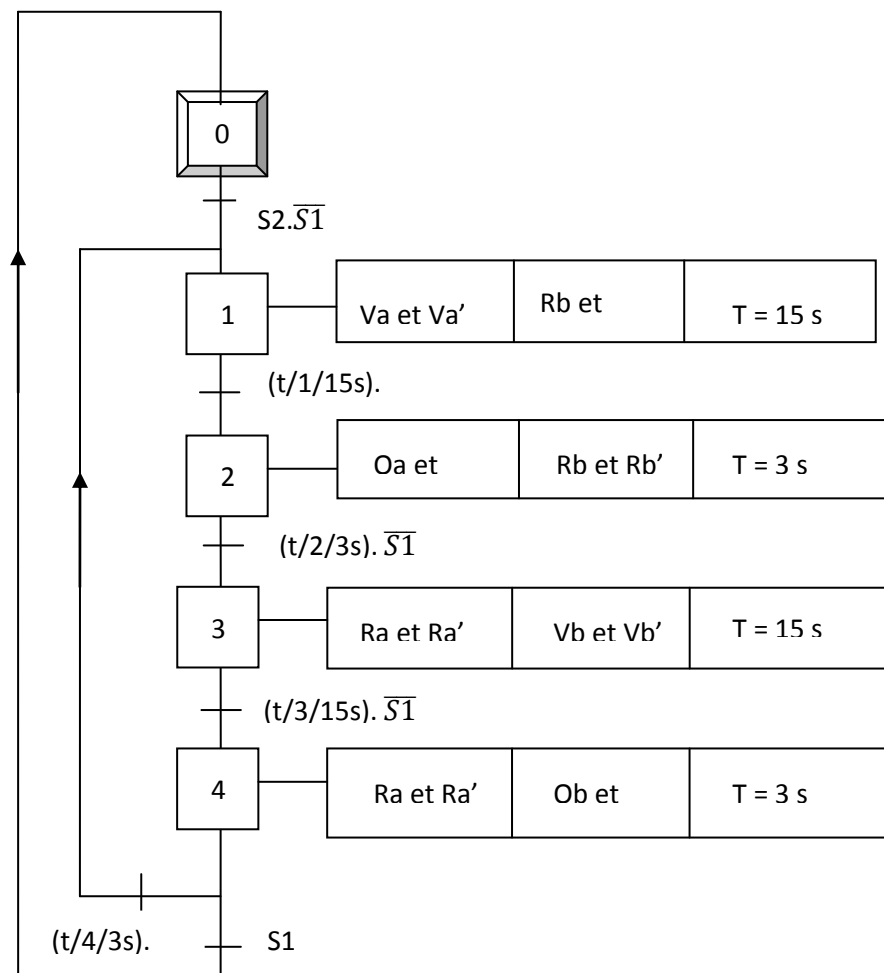
entrées	S1	S2
adresses	001	002

S1 : bouton poussoir d'arrêt d'urgence ; S2 : bouton poussoir mise en marche du système

Sorties	Va et Va'	Rb et Rb'	Oa et Oa'	Vb et Vb'	Ra et Ra'	Ob et Ob'
adresses	011	012	013	014	015	016

Etapes	0	1	2	3	4
Adresses	710	711	712	713	714

NB : 868 = adresse d'initialisation ; 901 à 932 = adresses des temporisateurs.



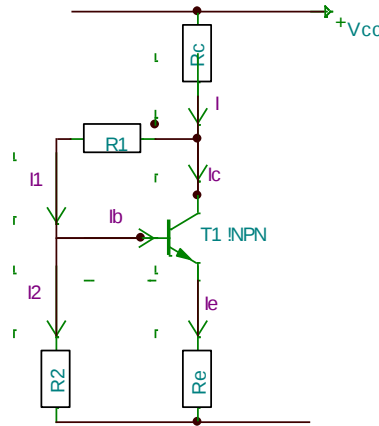
Travail à faire

Proposer un programme permettant de commander ces feux. On procédera de la manière suivante :

- ❖ Traitement séquentiel (GRAFCET).
- ❖ Traitement postérieur (sorties).

IV- ELECTRONIQUE : (Transistor)

Soit le montage suivant :



On donne $R_c=3,9k\Omega$; $R_e=1k\Omega$; $R_1=39k\Omega$; $R_2=18k\Omega$; $\beta = 50$; $V_{be}=0,7\text{ V}$; $V_{cc}=12\text{V}$

Calculer:

- a-) I_b ; I_c ; I_1 ; I_2 et I
- b-) V_{em} ; V_{cm} ; V_{bm} et V_{ce} .

V- MACHINES ELECTRIQUES :(Alternateur monophasé)

Un alternateur a six pôles. Le flux sous un pôle est de 18mWb . L'induit a 90 conducteurs actifs. Sa FEM est $170,1\text{V}$ et sa fréquence 50Hz , pour un courant d'excitation de 1A . Le flux est supposé proportionnel au courant inducteur, et la vitesse de rotation constante dans tout le problème.

- a- Déterminer la vitesse de rotation et le coefficient de Kapp de l'alternateur.
- b- Lors de l'essai en court-circuit, pour un courant d'excitation de $0,441\text{A}$, on a $I_{cc}=25\text{A}$. Calculer la FEM de court-circuit (E_{cc}) et la réactance synchrone (Z_s). (Z_s est supposé constante dans la suite du problème).
- c- Le courant d'excitation étant 1A , l'alternateur débite 10A dans une charge de facteur de puissance 0,8. déterminer la tension aux bornes de la charge dans les cas suivants : -charge inductive ; -charge capacitive. On donnera les diagrammes des tensions relatifs à chaque cas.
- d- L'alternateur, toujours excité par 1A , débite maintenant dans une impédance $Z=16,5 - 2,96j$. Déterminer :
 - d-1) Le courant dans l'induit et la tension aux bornes de Z .
 - d-2) Le déphasage θ entre la FEM et le courant et le déphasage φ entre le courant et la tension.

Nous ne saurions terminer cette partie sans faire un tour dans au moins une des années avant 2000 pour voir à quoi ressemblait le concours de l'ENSET.

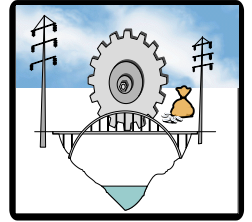


UNIVERSITE DE DOUALA
CONCOURS D'ENTREE A L'ENSET

EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM. Session : 1998

EPREUVE D'ELECTROTECHNIQUE(F3)

DUREE : 5H : 00



Cette épreuve comprend 2 problèmes indépendants :

- Le premier est relatif aux installations électriques ;
- Le deuxième est une étude de convertisseur AC-DC idéal triphasé.

PROBLEME A : ETUDE D'UNE INSTALLATION ELECTRIQUE

Ce problème traite de l'évaluation des caractéristiques d'une installation électrique : Puissances active, réactive et apparente, facteur de puissance, courants... Le schéma unifilaire de cette installation est donné à la figure 01.

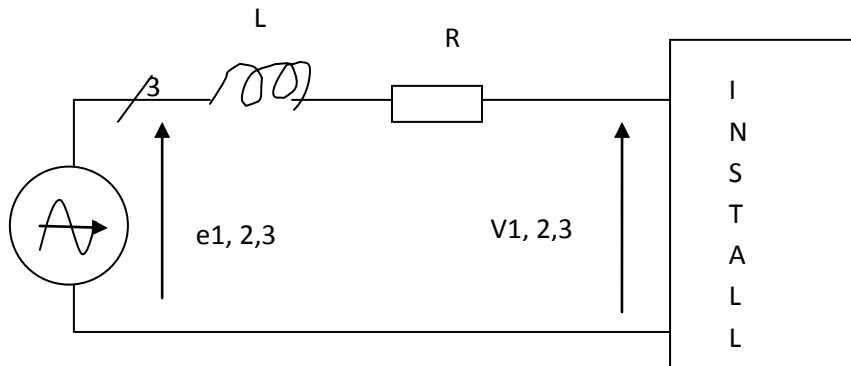


Figure 01

L'installation est alimentée par une ligne triphasée d'impédance par phase $\underline{Z}_p = 0.02 + j0.02$ (Ω). Elle comprend :

- 120 lampes à incandescence de 220 volts-50Hertz de 70Watts chacune ;
- 1 radiateur triphasé monté en étoile ; les caractéristiques d'une de ses résistances sont de 220 Volts-1700Watts
- 36 moteurs asynchrones monophasés ; on peut lire sur la plaque signalétique de chaque moteur les caractéristiques qui suivent :
 - 220 Volts-50Hertz
 - Puissance utile nominale $P_U = 6$ Chevaux

- Rendement nominal $\eta_n = 0.7$
- $\cos \phi_n = 0.6$
- 3 moteurs asynchrones triphasés ; on peut lire sur la plaque signalétique de chaque moteur les caractéristiques qui suivent :
 - 380 Volts-50Hertz
 - Puissance utile nominale $P_U = 20$ Chevaux
 - Rendement nominal $\eta_n = 0.95$
 - $\cos \Phi_n = 0.8$

Dans tout le problème, on considérera que la tension entre phase est de $U = 380$ Volts entre phase et neutre à l'entrée de l'installation.

I - ORGANISATION DE L'INSTALLATION

- I.1)** Comment faut-il câbler cette installation pour avoir globalement une installation triphasée équilibrée.
- I.2)** Faire une esquisse du schéma multifilaire triphasée de cette installation.

II - BILAN DES PUISSANCES

- II.1)** Compléter le tableau ci-dessous

RECEPTEURS	Pabs(Watts)	Qabs(Var)	Quantité	Ptotal	Qtotal
Lampe					
Radiateur					
Moteur 1-phasé					
Moteur 3-phasé					

Tableau 01

- II.2)** Déterminer :

- La puissance active installée ;
- La puissance réactive installée

- II.3)** En déduire :

- La puissance apparente installée ;
- Le facteur de puissance de l'installation.

III - ETUDE DES COURANTS

- III.1)** Calculer le courant appelé par chaque récepteur.
- III.2)** Déterminer le courant de total appelé par l'installation.

IV - PERTES ET CHUTE DE TENSION EN LIGNE

- IV.1)** Calculer les pertes actives puis réactives en ligne.
- IV.2)** Déterminer la chute de tension en ligne.

IV.3) En déduire la tension entête de ligne.

IV.4) Calculer le courant de court-circuit présumé en ligne lors d'un court-circuit triphasé à l'entrée de l'installation. En déduire les caractéristiques de choix en courant du disjoncteur général de l'installation.

V – COMPENSATION DE L'INSTALLATION

V.1) Quelles sont les caractéristiques de la batterie de condensateurs qu'il faut mettre à l'entrée de l'installation pour avoir un $\cos \Phi = 1$:

- Montage Y
- Montage Δ

V.2) Pour l'installation compensée :

- Calculer le nouveau courant en ligne
- Reprendre les questions IV 1, IV.2 et IV.3

V.3) CONCLURE

NB : 1 Cheval=735Watts

PROBLEME B : ETUDE D'UN CONVERTISSEUR TRIPHASE TOUT THYRISTOR

On considère le convertisseur de la figure 02. Sa charge est de type RLE et il est alimenté par un système de tension équilibré V1, 2,3 avec :

$$V1 = V\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t)$$

$$V2 = V\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$V3 = V\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

Où ω est la pulsation et égal à $2\pi F$, $F=50$ Hertz et V la valeur efficace de la tension simple et égal à 220 Volts.

Dans tout ce problème, on considérera que :

- L'inductance L est suffisamment grande pour que l'on puisse considérer le courant dans la charge i_d comme étant constant, $i_d = I = I_{cte}$
- La commande fournie à chacun des thyristors une bonne impulsion avec un angle de retard à l'amorçage α par rapport à l'amorçage naturel de la diode qui l'aurait remplacé.

I - ETUDE QUALITATIVE

I.1) Expliquer le fonctionnement de ce montage pour $\alpha = 0^\circ$ puis 60°

I.2) Tracer les chronogrammes pour $\alpha = 0^\circ$ puis 60° des grandeurs qui suivent :

- V_{AN} ; V_{BN} et $U_d \alpha$
- V_{T1} ; i_{T1} ; i_{T^*1} et i_{s1}

II- ETUDE QUANTITATIVE [α quelconque]

II-1 Etude des tensions

- a- Déterminer la tension moyenne $\langle U_d \alpha \rangle$
- b- Déterminer la tension maximale directe et la tension maximale inverse aux bornes d'un thyristor.

II-2 Etude des courants

- a- Déterminer le courant moyen I dans la charge
- b- Déterminer en fonction de I
 - le courant moyen I dans un thyristor quelconque ;
 - le courant efficace en ligne ;

II - 3 Puissance et facteur de puissance

- a- Calculer en fonction de I
 - la puissance active fournie par le convertisseur ;
 - la puissance active appelée par la charge ;
 - la puissance active appelée par le convertisseur ;
 - la puissance apparente appelée par le convertisseur ;
- c- en déduire le facteur de puissance de l'ensemble convertisseur-charge

III - APPLICATION NUMERIQUE DE L'ETUDE QUANTITATIVE

- $E=220V$; $R=1\Omega$; $L=100mH$; $\alpha = 0^\circ$ puis 60°
- $\omega=2\pi f$; $f=50hz$ et $V=220V$

Deuxième partie

CORRECTION DES SUJETS

*CORRECTION DES SUJETS DE
MATHEMATIQUES*

CONCOURS D'ENTREE EN 1ère année (2013)**CORRECTION EPREUVE DE MATHS****EXERCICE 1**

1- i) montrons qu'il existe un unique a tel que $a^2 - (1 + i\sqrt{3})a + i\sqrt{3} = 0$

$$a^2 - (1 + i\sqrt{3})a + i\sqrt{3} = 0 \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} a^2 - a = 0 \\ -\sqrt{3}a + \sqrt{3} = 0 \end{cases} \text{ d'où } a = 1.$$

ii) Dédudons l'autre solution de $z^2 - (1 + i\sqrt{3})z + i\sqrt{3} = 0$

Une division euclidienne de cette équation par $z - 1$ nous donne $z - i\sqrt{3}$ donc

$$z^2 - (1 + i\sqrt{3})z + i\sqrt{3} = 0 \Rightarrow (z - 1)(z - i\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow z = 1 \text{ ou } z = i\sqrt{3} \text{ d'où}$$

$$S_c = \{1; i\sqrt{3}\}$$

2- détermination des complexes a , b et c tels que :

$z^3 - i\sqrt{3}z^2 - z + i\sqrt{3} = (z + 1)(az^2 + bz + c)$. En effectuant une fois de plus une division euclidienne de cette équation par $z + 1$, nous aurons :

$$z^3 - i\sqrt{3}z^2 - z + i\sqrt{3} = (z + 1)(z^2 - (1 + i\sqrt{3})z + i\sqrt{3}) \Rightarrow$$

$$a = 1; b = -(1 + i\sqrt{3}); c = i\sqrt{3}.$$

Dédudons alors toutes les solutions de (E).

$$(z + 1)(z^2 - (1 + i\sqrt{3})z + i\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow (z + 1) = 0 \text{ ou } (z^2 - (1 + i\sqrt{3})z + i\sqrt{3}) = 0. \text{ en se référant aux équations résolues plus haut on aura : } (z + 1) = 0 \text{ ou } (z - 1)(z - i\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow$$

$$z = 1 \text{ ou } z = i\sqrt{3} \text{ ou } z = -1 \text{ Donc } S_c = \{-1; 1; i\sqrt{3}\}.$$

$$3- z_A = 1; z_C = i\sqrt{3}; z_B = -1.$$

$$S = \left\{ \begin{cases} S_A = B \\ S_B = C \end{cases} \right\};$$

i) Ecriture de la similitude directe plane et déduisons que S est une rotation

$$\text{Toute similitude directe a pour expression } z' = az + b \Rightarrow \begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_C = az_B + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 = a + b \\ i\sqrt{3} = -a + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = (-1 + i\sqrt{3})/2 ; a = (-1 - i\sqrt{3})/2 \text{ d'où } z' = (-1 - i\sqrt{3})/2 z + (-1 + i\sqrt{3})/2$$

Déduisons que S est une rotation que l'on caractérisera

- Son rapport $k=|a| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$
 - Son centre est le point invariant $Z'=Z=Z_{\Omega} = \frac{i\sqrt{3}}{3}$
 - son angle de rotation est $\theta = \arg(a) = \frac{4\pi}{3}$. Or toute application de la forme $z' = az + b$ avec $|a| = 1$ et $b \in \mathbb{C}$ est une rotation d'où $z' = (-1 - i\sqrt{3})/2 z + (-1 + i\sqrt{3})/2$ est une rotation de centre Ω d'affixe $Z_{\Omega} = \frac{i\sqrt{3}}{3}$ et d'angle $\theta = \frac{4\pi}{3}$
- ii) déterminons l'ensemble (P) des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 0$

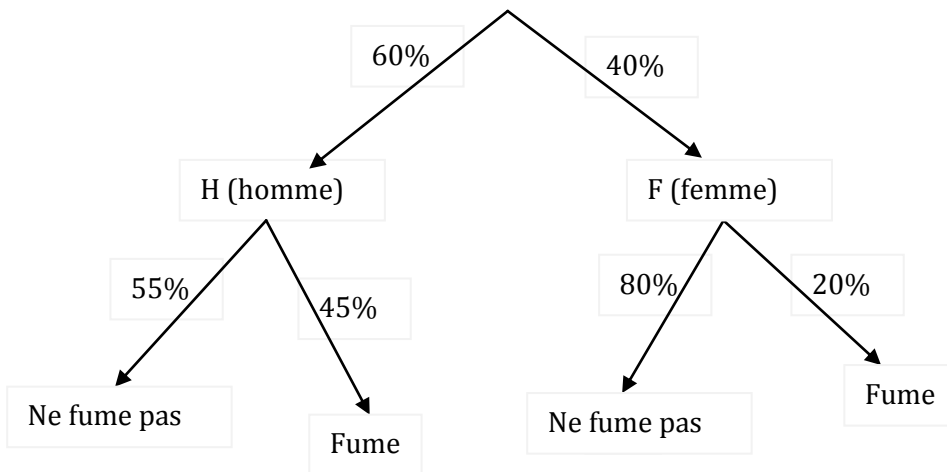
L'ensemble (P) des points M du plan est la droite d'équation $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

EXERCICE II

1-

- i) montrons que la probabilité P de choisir un fumeur est $P=7/20$

Approchons ce problème avec un arbre. l'arbre correspondant à cet exercice est la suivante :



Désignons par F_u l'évènement « l'individu fume » et par $P(F_u)$ sa probabilité ; et aussi $\bar{F}_u$ l'évènement « l'individu ne fume pas » et par $P(\bar{F}_u)$ sa probabilité.

$$\text{On dira alors } P(F_u) = P(F_u/F) + P(F_u/H) = \frac{60}{100} \times \frac{45}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}.$$

- ii) Probabilité d'avoir une femme sachant que la personne choisie fume

$$P(F/Fu) = \frac{P(Fu \cap F)}{P(F)} = \frac{P(Fu) \times P(Fu/F)}{P(F)} = \frac{\frac{20}{100} \times \frac{7}{20}}{\frac{40}{100}} = \frac{7}{40}$$

2- $Cov(x, y) = -0,616$; $V(x) = 11,916$ et $V(y) = 0,033$

i) Calcul du coefficient de corrélation linéaire et interprétation

$$r = \frac{Cov(x, y)}{\sqrt{V(x)} \cdot \sqrt{V(y)}} = \frac{-0,616}{\sqrt{11,916} \times \sqrt{0,033}} = -0,982 ; |r| = 0,982 \cong 1 ; \text{d'où une très forte corrélation entre les différentes semaines et les différentes durées moyenne en heures des travaux.}$$

ii) Droite de régression de y en x.

On sait que : $y - \bar{Y} = \frac{Cov(x, y)}{V(x)}(x - \bar{X})$ or $\bar{X} = \frac{78}{12} = 6,5$ et $\bar{Y} = \frac{485,83}{12} = 40,48$ en substituant ces éléments dans l'équation, on aura :

$$y - 40,48 = \frac{-0,616}{11,916}(x - 6,5) = -0,051x + 40,816 \Rightarrow y = -0,051x + 40,816.$$

Estimation à 10^{-2} de la durée moyenne de travail à la 20^e semaine

$$y = -0,051x + 40,816 = -0,051 \times 20 + 40,816 = 39,796 \text{ D'où } y = 39,79 \text{ heures.}$$

PROBLEME

Partie A

1-

a- calcul de $g'(x)$ et déduire que g réalise une bijection de $]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$g'(x) = (x^2 + \ln x - 2)' = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x}$$

$\forall x \in]0; +\infty[$ $g'(x) > 0$, g est monotone donc strictement croissante d'où réalise une bijection de $]0; +\infty[\rightarrow g(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$.

b- justifions qu'il existe un unique $\alpha \in]1,3; 1,35[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

g réalise une bijection de $]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ d'où $g(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $g(\alpha) = 0$.

De plus $g(1,3) = -0,04$ et $g(1,35) = 0,12$; $g(1,3) \times g(1,35) < 0$ d'où $\alpha \in]1,3; 1,35[$.

c- vérifions que dans $[1,3; 1,35]$ $g(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2 - \ln x}$.

On sait que $\forall x \in]1,3; 1,35[$ $g(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $g(\alpha) = 0$.

Cette solution correspond à $x^2 + \ln x - 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2 - \ln x}$.

2- $\forall x \in]1,3; 1,35[$; $k(x) = \sqrt{2 - \ln x}$.

a- Sens de variation des fonctions $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = \sqrt{2 - \ln x}$

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \quad \forall x \in [1,3; 1,35] \quad \text{D'où } u(x) \text{ est croissante.}$$

$$V'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{2-\ln x}} < 0 \quad \forall x \in [1,3; 1,35] \quad \text{D'où } V(x) \text{ est décroissante.}$$

$k(x)$ est décroissante car $k(x) = v(x)$.

b- Justifions que $0 \quad \forall x \in [1,3; 1,35] ; k(x) \in [1,3; 1,35]$

$$\forall x \in [1,3; 1,35] ; g(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2 - \ln x} \Rightarrow x = k(x) \quad \text{d'où } (x) \in [1,3; 1,35] .$$

3- $\forall x \in [1,3; 1,35]$ on admet $|K'(x)| \leq \frac{1}{3}$.

$$U_n = \begin{cases} U_0 = 1,3 \\ U_{n+1} = K(U_n) \end{cases}$$

a- Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_n - \alpha|$

En appliquant directement le théorème des accroissements finis à la fonction $k(x)$, nous aurons : $|K(U_n) - K(\alpha)| \leq K |U_n - \alpha|$; or $U_{n+1} = K(U_n)$ et $K(\alpha) = \alpha$ d'où

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq k |U_n - \alpha| \Rightarrow |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_n - \alpha|.$$

b- Déduisons que, $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{3})^n 0,05$

$$\text{On sait que } |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_n - \alpha|.$$

$$\Rightarrow |U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_0 - \alpha|.$$

$$|U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_1 - \alpha|. \text{ En faisant le produit membre à membre on aura }$$

$$|U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_2 - \alpha|.$$

$$\begin{array}{c} |U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_2 - \alpha| \\ \vdots \\ |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_{n-1} - \alpha|. \end{array}$$

$$|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{3})^n |U_0 - \alpha| \quad \text{or } |U_0 - \alpha| \cong |1,3 - 1,35| = 0,05 \quad \text{d'où}$$

$$|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{3})^n \times 0,05.$$

- Valeur de α à 10^{-2} près.

$(\frac{1}{3})^n \times 0,05 \leq 10^{-2} \Rightarrow n \geq 1,46 \Rightarrow n = 2$. D'où U_2 est la valeur approchée de α à 10^{-2} près.

$$\text{Avec } U_2 = \sqrt{2 - \ln U_1} \cong 1,31 .$$

Partie B

1- Limites aux bornes de f

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2- Calcul de $f'(x)$ et en déduire que $xf'(x) = g(x)$.

$$f'(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x} + x = \frac{\ln x - 2 + x^2}{x} = \frac{g(x)}{x} \text{ d'où } xf'(x) = g(x).$$

3- En déduisons que $f'(x) \geq 0$ ssi $x \geq \alpha$.

$\forall x \geq \alpha ; f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g(x)$ or au vue de son TV elle est :

$$\begin{cases} g(x) \leq 0 \forall x \in]0; \alpha] \\ g(x) \geq 0 \forall x \in [\alpha; +\infty[\end{cases} \Rightarrow \forall x \in [\alpha; +\infty[f'(x) = \frac{g(x)}{x} \geq 0.$$

4- Tableau de variation de f

X	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		○	
		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

5-

i) Montrons que $f(\alpha) = \frac{\alpha^4 + \alpha^2 - 4}{2}$

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln^2(x) - 2 \ln x + \frac{1}{2} x^2 \text{ or nous savons que } \alpha \text{ est solution de } g(x)=0 \Rightarrow$$

$$g(\alpha) = 0 \text{ donc } \alpha = \sqrt{2 - \ln \alpha} \Rightarrow \alpha^2 = 2 - \ln \alpha \Rightarrow 2 - \alpha^2 = \ln \alpha.$$

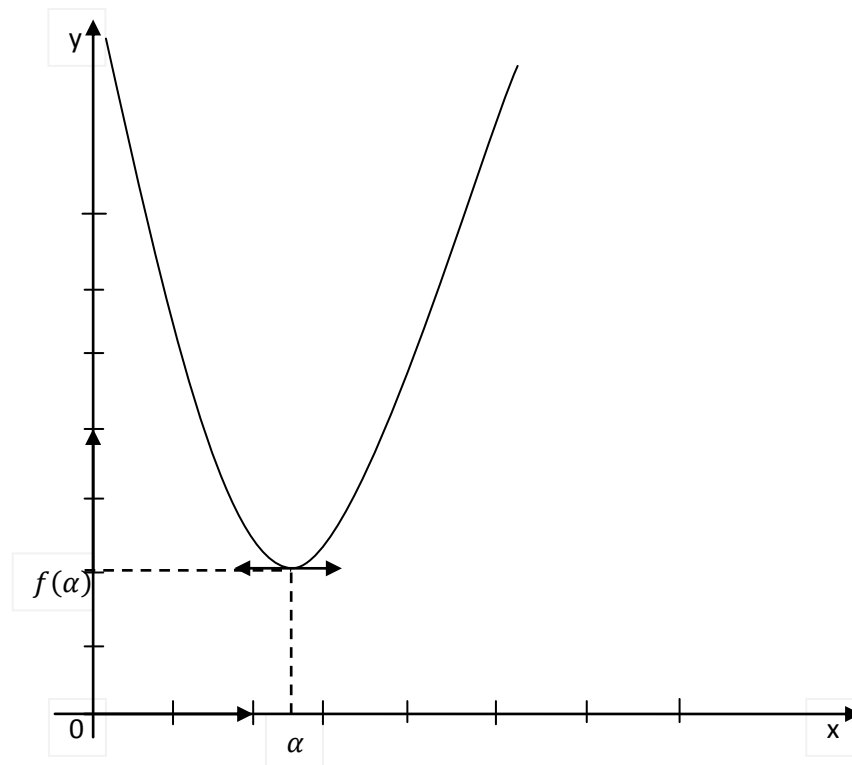
$$f(\alpha) = \frac{1}{2} \ln^2(\alpha) - 2 \ln \alpha + \frac{1}{2} \alpha^2 \text{ en remplaçant } \ln \alpha \text{ par } 2 - \alpha^2 \text{ et en développant vous auriez}$$

$$\text{à la fin } f(\alpha) = \frac{\alpha^4 + \alpha^2 - 4}{2}.$$

ii) Graphe de f avec $\alpha = 1,31$ et $f(\alpha) = 0,3$.

- Branche infinie

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty ; \text{ Branche infinie de direction } (oy).$$



6- Justifions que la fonction $F(x) = \frac{1}{2}x\ln^2(x) - 3x\ln x + \frac{1}{6}x^3 + 3x + 1$ est une primitive de f .

$F(x)$ est une primitive f ssi $F'(x) = f(x)$ or $F'(x) = \frac{1}{2}(\ln^2(x) + 2\ln x) - 3(\ln x + 1) + \frac{3}{6}x^2 + 3$

$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2}\ln^2(x) - 2\ln x + \frac{1}{2}x^2 = f(x)$ D'où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$.

- En déduisons en cm^2 l'aire A définie par :

$$A(x) = \int_1^3 f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x\ln^2(x) - 3x\ln x + \frac{1}{6}x^3 + 3x + 1 \right]_1^3 \mu A \text{ cm}^2$$

$$= \left[\frac{1}{2}x\ln^2(x) - 3x\ln x + \frac{1}{6}x^3 + 3x + 1 \right]_1^3 \text{ x } 1,5^2 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow A = 9,585 \text{ cm}^2.$$

CONCOURS D'ENTREE EN 1^{ère} année (2012)**CORRECTION EPREUVE DE MATHS****Exercice 1**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Soit $x \rightarrow (2x^3 - 4x^2)e^{-x}$

a) Limites en $+\infty$ et $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 4x^2)e^{-x} = -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 4x^2)e^{-x} = 0$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

b) Dérivée et tableau de variation de f

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = (2x^3 - 4x^2)' e^{-x} + (2x^3 - 4x^2)(e^{-x})'$$

$$f'(x) = (-2x^3 + 10x^2 - 8x)e^{-x}$$

○ Signe de f'

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^3 + 10x^2 - 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow -x(2x^2 - 10x + 8) = 0$$

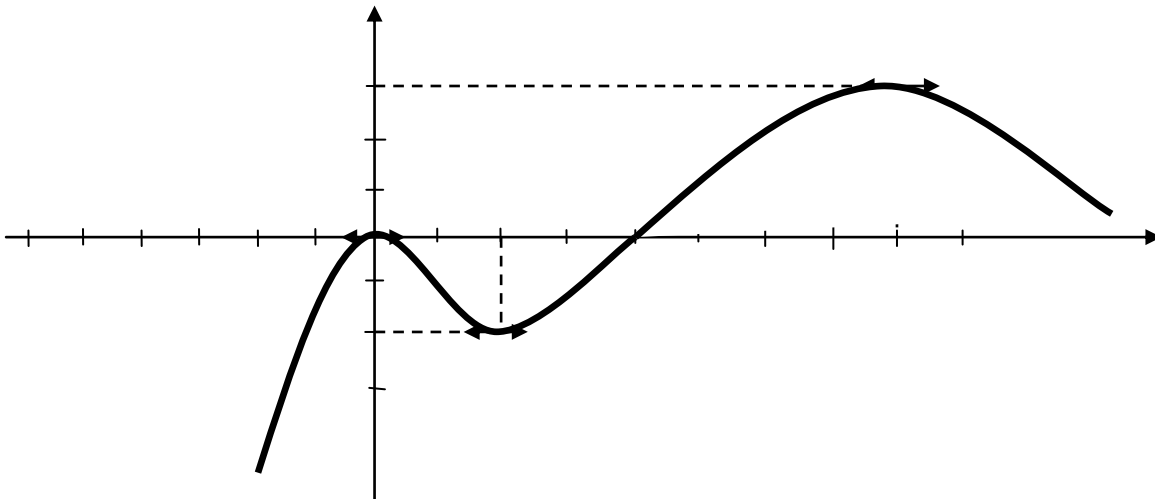
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 4$$

	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$
$-x$	+	0	-	-	-
$x-1$	-	-	0	+	+
$x-4$	-	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+

○ Tableau variation

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 ⁻	0 ⁺	0 ⁻	
$f(x)$	$-\infty$	0	$-2e^{-1}$	$64e^{-4}$	0

c) Tracé de la courbe C_f de f Exercice2 : Calcul des limites

1)

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2}$$

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{(x-a)(x+a)} = \frac{x^2+ax+a^2}{x+a}$$

$$I_1 = \frac{x^2+ax+a^2}{x+a} = \frac{3}{2}a$$

2)

$$I_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$$

Soient $f(x) = \sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}$ et $h(x) = \sin^2 x$ deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$I_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x})'}{(\sin^2 x)'}.$$

$$f'(x) = \left[(\cos x)^{1/2} - (\cos x)^{2/3} \right]' = -\frac{1}{2} \sin x (\cos x)^{-1/2} + \frac{1}{3} \sin x (\cos x)^{-2/3}$$

$$h'(x) = 2 \sin x \cos x$$

$$I_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} \sin x (\cos x)^{-1/2} + \frac{1}{3} \sin x (\cos x)^{-2/3}}{2 \sin x \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} (\cos x)^{-1/2} + \frac{1}{3} (\cos x)^{-2/3}}{2 \cos x}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{2} = -\frac{1}{6 \times 2} = -\frac{1}{12}$$

3)

$$I_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)}$$

$$I_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \frac{1}{2}$$

Exercice 3 : Parité des fonctions

a)

$$y_1 = \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3 \cos x} \quad y_1(-x) = \frac{-\operatorname{tg} x + x}{-x^3 \cos x} = \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3 \cos x} \Rightarrow y_1(x) = y_1(-x)$$

donc y_1 est une fonction paire

b)

$$y_2 = \frac{\sin^2(2x) - \cos(3x)}{\operatorname{tg} x}$$

$$y_2(-x) = \frac{\sin^2(2x) - \cos(3x)}{-\operatorname{tg} x} = \frac{-\sin^2(2x) + \cos(3x)}{\operatorname{tg} x} = -y_2(x)$$

donc y_2 est une fonction impaire

c)

$$y_3 = x^2 - 1 + \sin^2 x$$

$$y_3(-x) = x^2 - 1 + \sin^2 x$$

$$y_3(x) = y_3(-x) \quad \text{donc } y_3 \text{ est une fonction paire}$$

d)

$$y_4 = \frac{x-1}{\sin(x+1)} + \cos x$$

$$y_4(-x) = \frac{-x-1}{\sin(-x+1)} + \cos x$$

y_4 est une fonction ni paire, ni impaire

e)

$$y_5 = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{x \operatorname{tg} x}$$

$$y_5(-x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{-x(-\operatorname{tg} x)} = y_5(x)$$

y_5 est une fonction paire

f)

$$y_6 = \frac{x^3 + 1}{x+1} \operatorname{tg} x$$

$$y_6(-x) = \frac{-x^3 + 1}{-x+1} (-\operatorname{tg} x)$$

y_6 est une fonction ni paire, ni impaire

g)

$$y_7 = \ln \frac{x+3}{x-3}$$

$$y_7(-x) = \ln \frac{-x+3}{-x-3} = \ln \frac{-(x-3)}{-(x+3)} = \ln \frac{x-3}{x+3} = -\ln \frac{x+3}{x-3} = -y_7(x)$$

y_7 est une fonction impaire

Exercice 4 : Equations différentielles

Soit l'équation différentielle $(E) : y'' + 5y' = 0$

- 1) Montrons qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $F = f'$ est solution de $(E_1) : y' + 5y = 0$

Soit une fonction F tel que $F = f'$ solution de l'équation (E_1) on a :

$$(E_1) : F' + 5F = 0 \text{ or } F = f', \text{ soit } F'' = f''$$

$$\Rightarrow f'' + 5f' = 0$$

Reciproquement, si f est une solution de (E) alors :

$$f'' + 5f' = 0 \Rightarrow F' + 5F = 0$$

D'où f est solution de (E) si et seulement si $F = f'$ est solution de (E_1)

- 2) Résolution de l'équation (E)

D'après la question (1), les solutions de

(E) et (E_1) sont liées, on a $F = f'$ soit $f = \int F(x) dx$

$$(E_1) : y' + 5y = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = -5$$

$$\Rightarrow y = ke^{-5x}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int ke^{-5x} dx = -\frac{k}{5}e^{-5x} + cte$$

Donc les solutions de (E) sont de la forme $-\frac{k}{5}e^{-5x} + cte$ ou encore $k'e^{-5x} + cte$,

avec k, k' et la constante appartenants à $\mathbb{R}$ et dépendants des conditions initiales.

- 3) Détermination des réels a et b

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = a \cos x + b \sin x \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Déterminons a et b tel que $g'' + 5g' = 26 \cos x$, on a :

$$g'(x) = -a \sin x + b \cos x$$

$$g''(x) = -a \cos x - b \sin x$$

$$\text{On obtient: } -a \cos x - b \sin x - 5a \sin x + 5b \cos x = 26 \cos x \Rightarrow (5b - a) \cos x - (5a + b) \sin x = 26 \cos x$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} 5b - a = 26 & (1) \\ 5a + b = 0 & \Leftrightarrow b = -5a & (2) \end{cases}$$

La résolution de ce système nous donne

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \end{cases} \text{ soit } g(x) = -\cos x + 5 \sin x$$

- 4) Montrons que f est solution de (E') si et seulement si $f - g$ est solution de (E)

Supposons que f est une solution de

$$(E') : f'' + 5f' = 26 \cos x, \text{ or d'après la question (3) on a } g'' + 5g' = 26 \cos x$$

$$\Rightarrow f'' + 5f' = g'' + 5g'$$

$$\Rightarrow f'' + 5f' - g'' - 5g' = 0$$

$$\Rightarrow (f'' - g'') + 5(f' - g') = 0 \quad \Xi \quad (E)$$

$$\Rightarrow f - g \text{ est solution de } (E)$$

Reciproquement si $f - g$ est solution de (E) , on a :

$$(f - g)'' + 5(f - g)' = 0 \Rightarrow f'' + 5f' - (g'' + 5g') = 0$$

$$\Rightarrow f'' + 5f' - 26 \cos x = 0$$

$$\Rightarrow f'' + 5f' = 26 \cos x \quad \Xi \quad (E')$$

d'où f est solution de (E')

Conclusion : f est solution de (E') si et seulement si $f - g$ est solution de (E)

- 5) Détermination de toutes les solutions de (E')

$(E') : y'' + 5y' = 26 \cos x$, équation du second degré avec second membre variable dont

les solutions sont de la forme $h = h_g + h_p$ $\begin{cases} h_g : \text{solution homogène} \\ h_p : \text{solution particulière} \end{cases}$

d'après la question (4) les solutions homogènes sont de la forme $ke^{-5x} + c, (k, c) \in \mathbb{R}^2$

d'après la question (3) une solution particulière de (E') est $g(x) = -\cos x + 5 \sin x$

d'où les solutions de (E') :

$$h(x) = ke^{-5x} + c - \cos x + 5 \sin x$$

- 6) Déterminons la solution de (E') vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$

CONCOURS D'ENTREE EN 1ère année (2011)**CORRECTION EPREUVE DE MATHS****EXERCICE 1:** Résolvons le système suivant.

$$\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 10^6 \\ 9^x \cdot 25^{x+y} = 100^5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ln(3^x \cdot 5^y) = \ln(10^6) \\ \ln(9^x \cdot 25^{x+y}) = \ln(100^5) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \ln(3^x) + \ln(5^y) = 6\ln 10 \\ \ln(9^x) + \ln(25^{x+y}) = 10\ln(10) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\ln(3) + y\ln(5) = 6\ln 10 \quad (a) \\ 2x\ln(3) + 2(x+y)\ln(5) = 10\ln 10 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x\ln(3) - 2y\ln(5) = -12\ln 10 \\ 2x\ln(3) + 2x\ln(5) + 2y\ln(5) = 10\ln(10) \end{cases} \rightarrow$$

Par addition, on a : $2x(\ln 5) = -2\ln 10 \rightarrow x = -\frac{\ln 10}{\ln 5}$

En considérant l'équation(a) ci-dessus, on a :

$$y = \frac{6\ln 10 - x\ln 3}{\ln 5} = \frac{6\ln 10 + \frac{\ln 10}{\ln 5}\ln 3}{\ln 5}$$

$$y = \frac{\ln 10}{\ln 5} \left(6 + \frac{\ln 3}{\ln 5} \right) \text{ Ainsi, } \mathbf{S} = \left\{ -\frac{\ln 10}{\ln 5}, \frac{\ln 10}{\ln 5} \left(6 + \frac{\ln 3}{\ln 5} \right) \right\}$$

EXERCICE 2:1- Expression de P_{n+1} en fonction de P_n

$$P_{n+1} = \frac{1}{5}P_n + \frac{1}{2}\bar{P}_n \text{ or } \bar{P}_n = 1 - P_n \Rightarrow P_{n+1} = \frac{1}{5}P_n + \frac{1}{2}(1 - P_n) \Rightarrow$$

$$P_{n+1} = \frac{1}{5}P_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}P_n \Rightarrow P_{n+1} = -\frac{3}{10}P_n + \frac{1}{2}$$

2- On pose $U_n = P_n - \frac{5}{13}$ a) Expression de U_{n+1} en fonction de U_n , puis de U_1 et n

$$U_{n+1} = P_{n+1} - \frac{5}{13} = -\frac{3}{10}P_n + \frac{1}{2} - \frac{5}{13} = -\frac{3}{10}P_n + \frac{3}{26} = -\frac{3}{10} \left(P_n - \frac{3}{26} \times \frac{10}{3} \right)$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = -\frac{3}{10} \left(P_n - \frac{5}{13} \right) = -\frac{3}{10}U_n \Rightarrow U_{n+1} = -\frac{3}{10}U_n$$

Est une suite géométrique de premier terme U_1 et de raison $q = -\frac{3}{10} \Rightarrow$

$$U_n = \left(-\frac{3}{10} \right)^{n-1} U_1$$

b) Expression de P_n en fonction de n

$$P_n = U_n + \frac{5}{13} = \left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1} U_1 + \frac{5}{13}$$

c) Montrons que la suite P_n converge et calculons sa limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1} U_1 + \frac{5}{13} \right) = \frac{5}{13} \Rightarrow \text{la suite } P_n \text{ est convergente}$$

et sa limite est $\frac{5}{13}$.

EXERCICE 3 :

soit (U_n) la suite définie par:

$$U_1 = e^2, \quad U_n^2 = \frac{U_n - 1}{e}.$$

1) Montrons que pour tout $n > 1$ on a: $U_n \geq 0$

$$U_n^2 = \frac{U_n - 1}{e}$$

Raisonnons par récurrence.

Pour $n=2$; $U_2^2 = \frac{U_1}{e} = e \rightarrow U_2 = \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \geq 0$ alors $P(2)$ est vrai.

Supposons $P(n)$ vrai c-à-d. $U_n \geq 0$ et montrons que $U_{n+1} \geq 0$

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{e} \text{ or } U_n \geq 0 \rightarrow U_{n+1} \geq 0 \rightarrow p(n) \text{ est vraie et par conséquent } \mathbf{U_n \geq 0}$$

Calculons U_2, U_3, U_4 .

$$U_2 = \sqrt{e}; \quad U_3^2 = \frac{U_2}{e} = \frac{\sqrt{e}}{e}$$

$$\rightarrow U_3 = e^{-\frac{1}{4}}$$

$$U_4^2 = \frac{U_3}{e} = \frac{e^{-\frac{1}{4}}}{e} = e^{-\frac{5}{4}}$$

$$\rightarrow U_4 = e^{-\frac{5}{8}}$$

2) Pour tout $n \geq 0$; $V_n = \frac{1 + \ln(U_n)}{2}$

a) Expression de V_n et V_{n-1} en fonction de U_{n-1} .

$$V_n = \frac{1 + \ln(U_n)}{2} = \frac{1 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{U_n - 1}{e}\right)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{U_n - 1}{e}\right)$$

$$\Leftrightarrow V_n = \frac{1}{4} (1 + \ln(U_n - 1)); \quad V_{n-1} = \frac{1 + \ln(U_{n-1} - 1)}{2}$$

- b) Démontrons que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

$$V_n = \frac{1}{4}(1 + \ln(U_n - 1)); \text{ et } V_{n-1} = \frac{1}{2}(1 + \ln(U_{n-1} - 1))$$

$$\text{Ainsi } \frac{V_n}{V_{n-1}} = \frac{\frac{1}{4}(1 + \ln(U_n - 1))}{\frac{1}{2}(1 + \ln(U_{n-1} - 1))} = \frac{1}{2} \text{ on a } q = \frac{1}{2}$$

$$\text{et } V_1 = \frac{1 + \ln(U_1)}{2} = \frac{1 + \ln(e^2)}{2} = \frac{3}{2}$$

$$V_1 = \frac{3}{2}$$

- c) Ecriture de V_n et U_n en fonction de n .

$$V_n = V_1(q)^n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{D'autre part, } V_n = \frac{1 + \ln(U_n)}{2} \rightarrow \ln(U_n) = 2V_n - 1 \rightarrow U_n = e^{(2V_n - 1)} \text{ comme}$$

$$V_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ alors, } U_n = e^{(3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1)}$$

- d) Convergence de (U_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{(3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1)} = e^{-1} \rightarrow (U_n) \text{ converge vers } \frac{1}{e}$$

$$3) F(x) = \frac{3}{e^{x \ln 2}}$$

- a) Calcul des limites aux bornes de Df.

$$Df =]-\infty, +\infty[$$

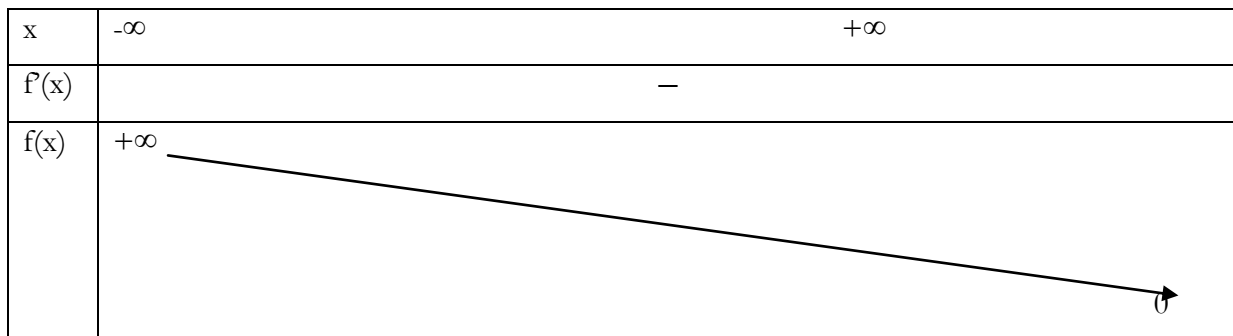
$$\lim_{n \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{3}{e^{x \ln 2}} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{3}{e^{x \ln 2}} = 0.$$

- b) Calcul de la dérivée $f'(x)$ de f et déduisons le T.V.

$$\text{Pour tout } x \in]-\infty, +\infty[,$$

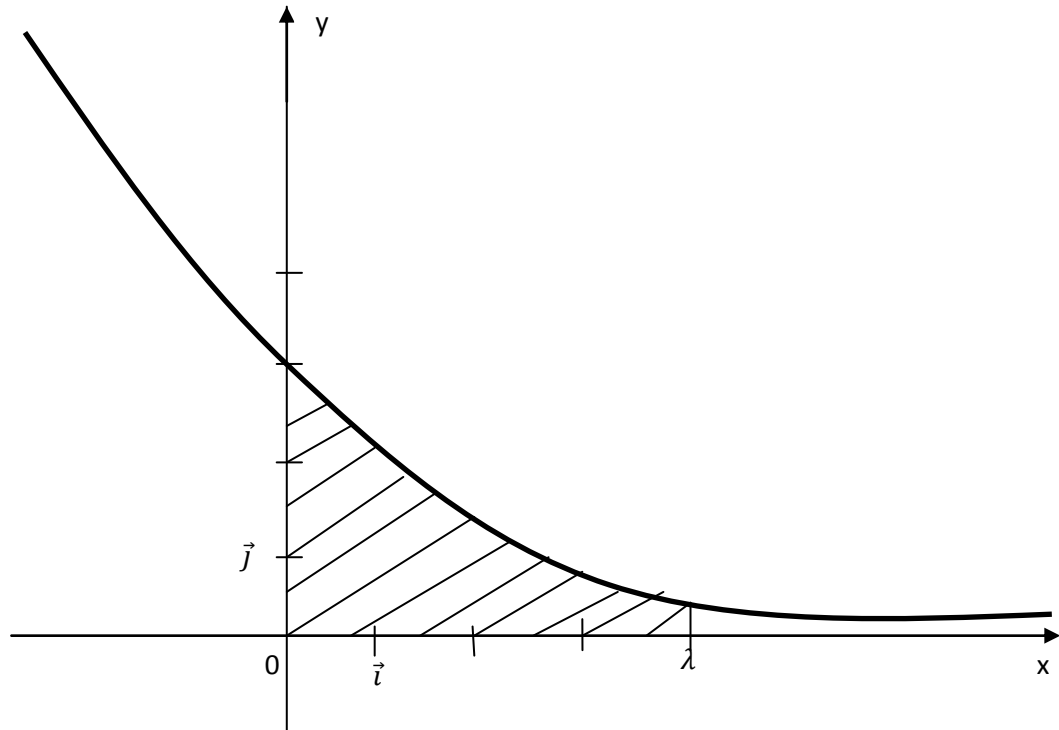
$$f(x) = \frac{3}{e^{x \ln 2}} \rightarrow f'(x) = \frac{-3(\ln 2)e^{x \ln 2}}{(e^{x \ln 2})^2} = \frac{-3 \ln 2}{e^{x \ln 2}} < 0 \rightarrow f \text{ est décroissante.}$$



c) Construction de ©

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{3}{e^{x \ln 2}} = +\infty \rightarrow \text{branche infinie de direction (oy)}.$$

$f(0) = 3$. Intersection avec l'axe (oy) en A (0 ; 3).



4) Montrons que pour tout points (n,Vn) appartenant à © quelque soit n ∈ N*.

(n,Vn) appartenant à © si et seulement si

$$f(n) = V_n. \quad F(n) = \frac{3}{e^{n \ln 2}} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Calcul de l'aire délimitée par λ...

$$A = \int_0^\lambda f(x) d(x) = \int_0^\lambda \frac{3}{e^{x \ln 2}} d(x) = 3 \int_0^\lambda e^{-x \ln 2} d(x) = 3 \left[\frac{-1}{\ln 2} e^{-x \ln 2} \right]_0^\lambda$$

$$A = 3 \left[\frac{-1}{\ln 2} e^{-\lambda \ln 2} + \frac{1}{\ln 2} \right]$$

$$A = \lim_{n \rightarrow -\infty} \int_0^\lambda \frac{3}{e^{x \ln 2}} d(x) = 3 \frac{1}{\ln 2} \text{ cm}^2.$$

CONCOURS D'ENTREE EN 1ère année (2010)**CORRECTION EPREUVE DE MATHS****EXERCICE I**

1-) Déterminons et construisons l'ensemble des points M d'affixe Z tel que :

$$\frac{2z-1}{z^2} \text{ Soit un nombre réel.}$$

$$\text{Soit } Z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \frac{2Z-1}{Z^2} &= \frac{2(x+iy)-1}{(x+iy)^2} = \frac{2x+2iy-1}{x^2+2(xiy)+(iy)^2} = \frac{(2x-1+i2y)}{(x^2-y^2+i2xy)} \cdot \frac{(x^2-y^2-i2xy)}{(x^2-y^2-i2xy)} \\ &= \frac{2x^3-2xy^2-i4x^2y-x^2+y^2+i2xy+i2x^2y-i2y^3+4xy^2}{(x^2-y^2)^2+(2xy)^2} \\ &= \frac{2x^3+2xy^2-x^2+y^2+i(-2y^3-4x^2y+2x^2y+2xy)}{(x^2-y^2)^2+(2xy)^2} \\ &= \frac{2x^3+2xy^2-x^2+y^2+i(-2y^3-2x^2y+2xy)}{(x^2-y^2)^2+(2xy)^2} \end{aligned}$$

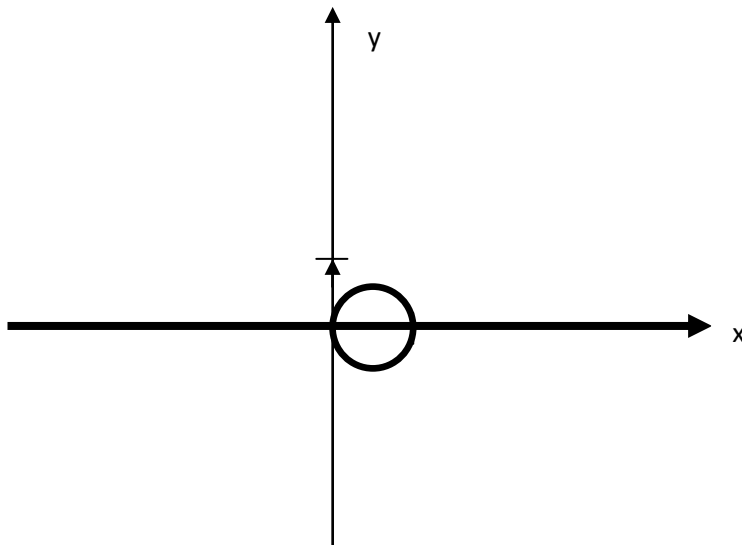
$$\frac{2Z-1}{Z^2} \text{ est un nombre réel si et seulement si } I_m\left(\frac{2Z-1}{Z^2}\right) = 0$$

$$-2y^3 - 2x^2y + 2xy = 0 \quad \rightarrow \quad 2y(-y^2 - x^2 + x) = 0$$

$$2y = 0 \text{ ou } -y^2 - x^2 + x = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ y^2 + x^2 - x = 0 \end{cases}$$

$$y = 0 \quad \text{ou} \quad y^2 + (x - 1/2)^2 = (1/2)^2$$

Ainsi l'ensemble des points M(z) cherché est l'union du cercle de centre $\Omega (1/2,0)$ et de rayon $1/2$ et l'axe des abscisses (droite d'équation $y = 0$).

Construction

2-) On définit $Z = \frac{z-2i}{z-1}$ on pose $z = x + iy$ où $x, y, X, Y \in \mathbb{R}$

a) Exprimons X et Y en fonction de x et de y

$$Z = \frac{x + iy - 2i}{x + iy - 1} = \frac{x + i(y-2)}{x-1 + iy} \cdot \frac{(x-1 - iy)}{(x-1 - iy)}$$

$$= \frac{x^2 - x - ixy + ixy - iy + y^2 - i2x + 2i - 2y}{(x-1)^2 + y^2}$$

$$Z = \frac{x^2 + y^2 - x - 2y + i(-y - 2x + 2)}{(x-1)^2 + y^2}$$

$$X = \frac{x^2 + y^2 - x - 2y}{(x-1)^2 + y^2} \quad \text{et} \quad Y = \frac{-y - 2x + 2}{(x-1)^2 + y^2}$$

b) Déterminons et représentons dans le plan complexe l'ensemble (Γ) des points M(z) tel que Z soit imaginaire pur :

Z est imaginaire pur si seulement si $\text{Re}(Z) = 0$

$$\frac{x^2 + y^2 - x - 2y}{(x-1)^2 + y^2} = 0 \quad \text{or} \quad (x-1)^2 + y^2 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 - x - 2y = 0 \rightarrow x^2 - x + y^2 - 2y = 0$$

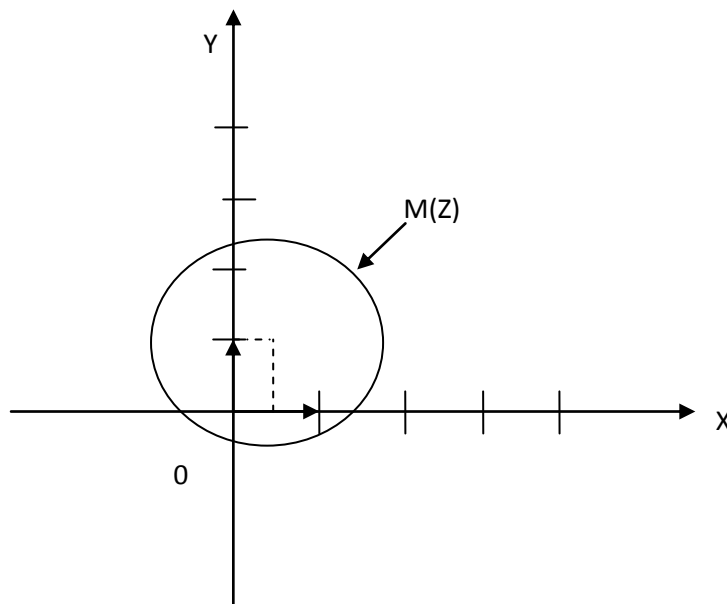
A l'aide de la forme canonique, on obtient :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

L'ensemble (Γ) des points M(z) cherché est un cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Représentation

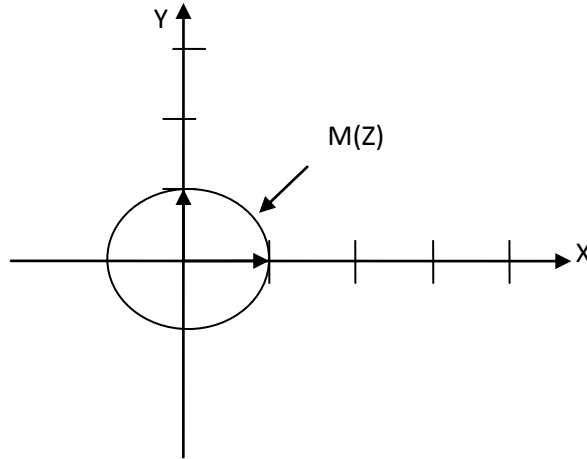


c) Déterminons et représentons l'ensemble (C) des points $M(z)$ tel que $|Z| = 2$

Posons $Z = x + iy$ $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \rightarrow x^2 + y^2 = (2)^2$

L'ensemble (C) des points $M(z)$ cherché est un cercle de centre $\Omega (0, 0)$ et de rayon $R = 2$

Représentation



EXERCICE II

1-) a) Vérifions que $V_1 = 120$, $V_2 = 150$, $V_3 = 157,5$

Soit V_1 le volume du gazon coupé la 1^{ère} semaine

- au début de la 1^{ère} semaine $V_0 = 0$
- à la fin de la 1^{ère} semaine le jardinier recueille 120 de gazon coupé d'où $V_1 = 120$

de plus $V_1 = V_0 - \frac{3}{4}V_0 + 120$ or $V_0 = 0 \rightarrow V_1 = 120$

$$V_2 = V_1 - \frac{3}{4}V_1 + 120 = \frac{1}{4}V_1 + 120$$

$$V_2 = \frac{1}{4}(120) + 120 \quad \quad \quad \mathbf{V_2 = 150}$$

$$V_3 = V_2 - \frac{3}{4}V_2 + 120 = \frac{1}{4}V_2 + 120 = \frac{1}{4}(150) + 120 \quad \quad \quad \mathbf{V_3 = 157,5}$$

b) Déterminons une relation liant V_n et V_{n+1}

$$V_1 = \frac{1}{4}V_0 + 120$$

$$V_2 = \frac{1}{4}V_1 + 120$$

$$V_3 = \frac{1}{4}V_2 + 120$$

⋮

$$V_{n+1} = \frac{1}{4}V_n + 120$$

$$\mathbf{V_{n+1} = \frac{1}{4}V_n + 120}$$

b) Dédudions que pour tout entier $n \geq 1$ $V_n = 160 \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right]$ $V_0 = 0$

$$V_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right)$$

$$\Rightarrow 120 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \right) = \frac{120}{\frac{3}{4}} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right] \text{ d'où } V_n = 160 \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right]$$

EXERCICE III

1-) a) Déterminons par lecture graphique

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 2, \quad f(3) = 0, \quad f(5) = 4$$

b) Déterminons soit A (1,3) B (0,1)

$$f'(0) = \frac{3-1}{1-0} = 2 \quad f'(0) = 2$$

$$f'(1) = 0 \text{ car } (T_2) \text{ est parallèle à } (Ox)$$

$$f'(5) = ? \text{ soient } A(4,0) \quad B(5,4)$$

$$f'(5) = \frac{4-0}{5-4} = 4 \quad f'(5) = 4$$

c) Dressons le tableau de variation

x	0	1	3	5
f'(x)	+	○ ⁻	○ ⁺	
f''(x)		2	0	4

2-) Soit $g(x) = \ln f(x)$ définie sur $[0, 3[$

a) Donnons les valeurs de $g(0)$ et $f(1)$

$$g(0) = \ln f(0) = \ln 1 = 0 \quad g(0) = 0$$

$$g(1) = \ln f(1) \quad \text{or} \quad f(1) = 2 \quad g(1) = \ln 2$$

b) Déterminons $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \ln f(x) \text{ or } f(3) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = -\infty$$

c) Déterminons $g'(x)$ et déduisons $g'(0)$ et $g'(1)$

$\forall x \in [0; 5]; f(x) \in [0; 4]$ on sait que $f(3) = 0$ d'où g est continue et dérivable sur $[0; 3[$ et $]3; 5]$;

Ainsi $\forall x \in [0; 3[\cup]3; 5]$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad g'(0) = \frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{2}{2} = 1 \quad g'(0) = 1$$

$$g'(1) = \frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{0}{2} = 0 \quad g'(1) = 0$$

d) Dressons le tableau de variation de g

Signe de $g'(x)$: $\forall x \in [0; 3[\cup]3; 5]$ $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ or $\forall x \in Dg$, $f(x) > 0$

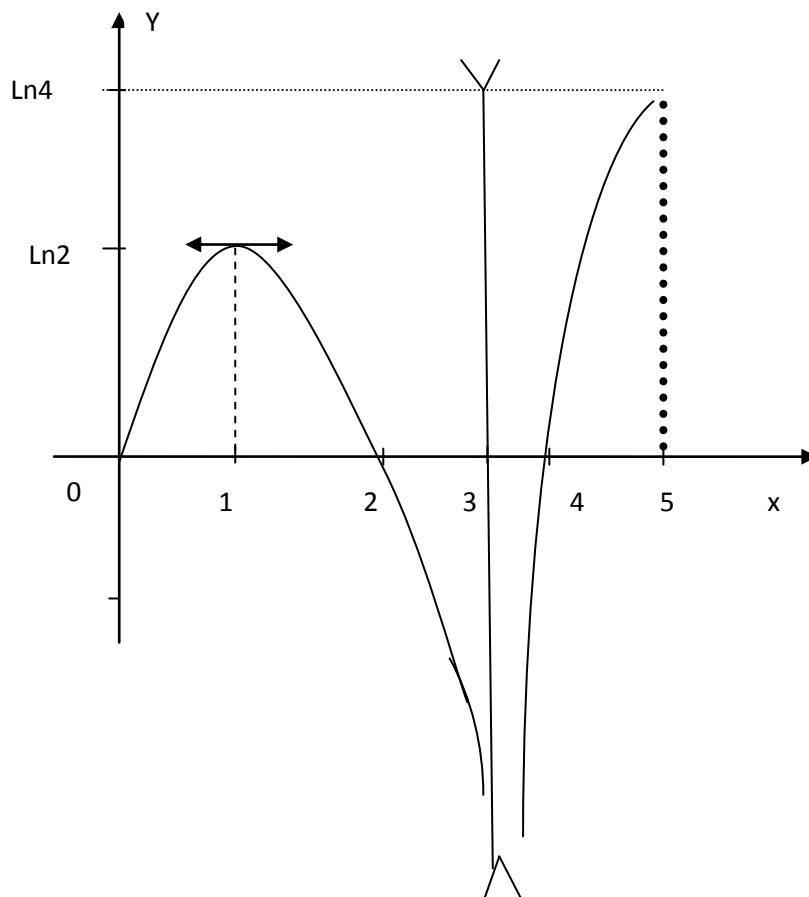
Ainsi $g'(x)$ est du même signe de $f'(x)$ et de plus $g'(1)=0$

x	0	1	3	5
$g'(x)$	+	0	-	+
$g(x)$	0	$\nearrow \ln 2$	$\searrow -\infty$	$\nearrow \ln 4$

e) Traçons C_g dans un repère orthogonal (O, I, J)

Echelle : (0J) = 2cm

$\ln 2 \approx 0,693$



$$f(2) = 1$$

$$g(2) = 0$$

CONCOURS D'ENTREE EN 1ère année (2009)**CORRECTION EPREUVE DE MATHS****EXERCICE I**

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ tel que $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$

PARTIE I

1-) Justifie que pour tout réel x $x^2 - 2x + 2 > 0$ soit $g(x)$ cette fonction

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x + 2) = +\infty$$

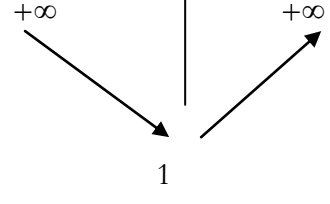
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x + 2) = +\infty$$

$$g'(x) = 2x - 2$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$g(1) = 1 - 2 + 2 = 1 \quad g(1) = 0$$

D'où le tableau suivant :

x	-∞ 1 +∞	
g'(x)	-	+
g(x)		

On constate que g décroît et croît tant en restant supérieure à l'axe des abscisses ;
D'où $x^2 - 2x + 2 > 0$.

Il suffisait aussi de montrer que le discriminant est inférieur à 0 et que $g(x)$ est du signe de son monôme le plus haut degré.

2-) Déterminons f' de f et étudions le sens de variation de f

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2}$$

$$\forall x \in]-\infty, 1] \quad f'(x) \leq 0 \quad \text{D'où } f \text{ est strictement décroissante}$$

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad f'(x) \geq 0 \quad \text{D'où } f \text{ est strictement croissante}$$

3-) Déterminons les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(x^2 - 2x + 2)]$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 2x + 2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ de la même façon } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

4-) Représentons (C), D d'équation $y = x$, T_1 et T_2 respectivement les tangentes en 0 et en 2. Mais avant, montrons que $x = 1$ est axe de symétrie à (C)

Il suffit de montrer que :

$$f(1-x) = f(1+x)$$

$$f(1-x) = \ln[(1-x)^2 - 2(1-x) + 2]$$

$$= \ln(1 - 2x + x^2 - 2 + 2x + 2) = \ln(1 + x^2) \quad f(1-x) = \ln(x^2 + 1)$$

$$f(1+x) = \ln[(1+x)^2 - 2(1+x) + 2]$$

$$= \ln(1 + 2x + x^2 - 2 - 2x + 2) = \ln(x^2 + 1)$$

$$f(1+x) = \ln(x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow f(1-x) = f(1+x) \text{ d'où la droite d'équation } x = 1 \text{ est axe de symétrie à (C)}$$

$$(T_1) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+2} \quad f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$$

$$f'(0) = -1 \quad f(0) = \ln 2$$

$$T_1 : y = -x + \ln 2$$

$$T_2 : y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f'(2) = \frac{4-2}{4-4+2} = \frac{2}{2} \Rightarrow f'(2) = 1$$

$$f(2) = \ln(4-4+2) \quad f(2) = \ln 2$$

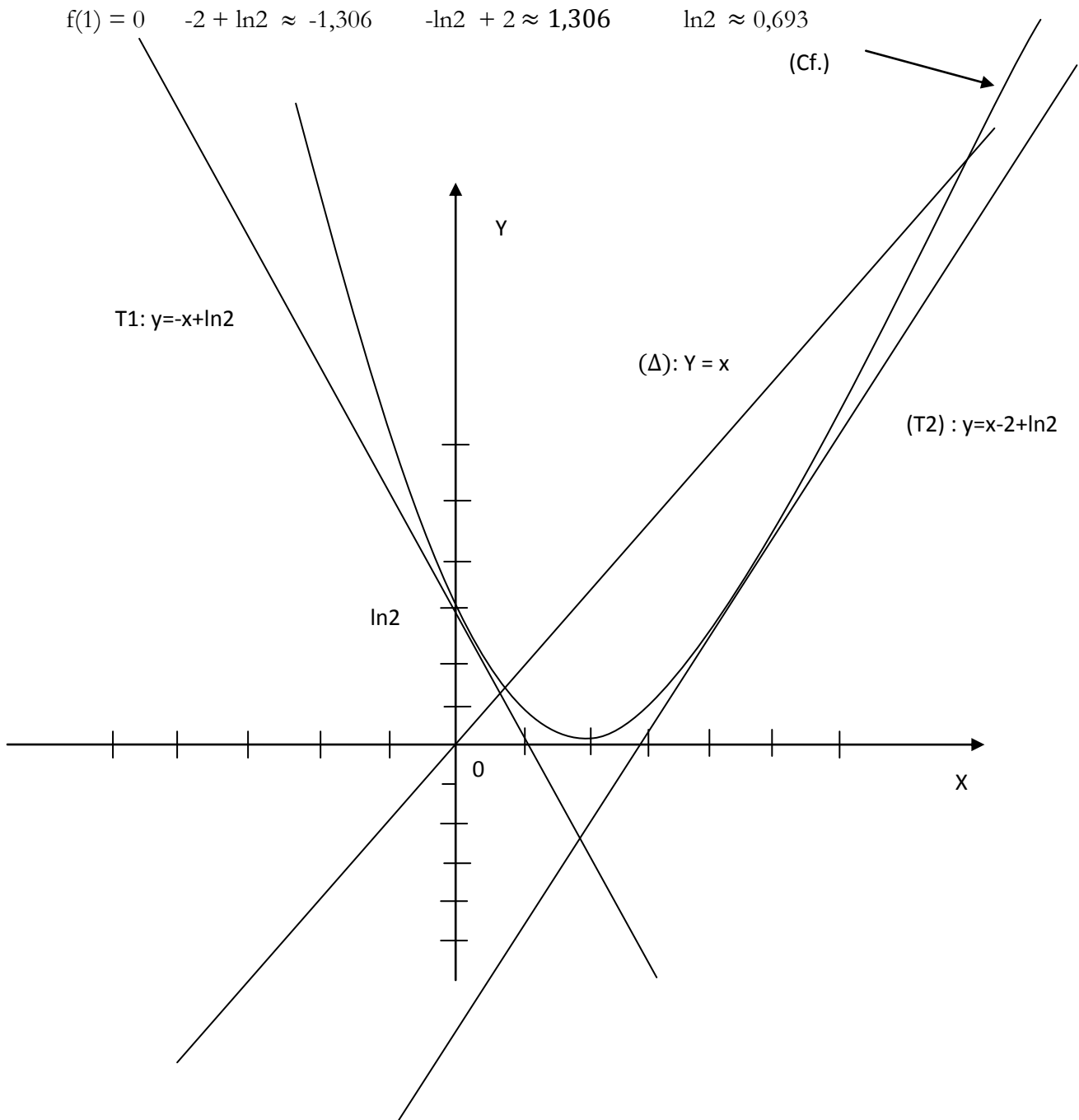
$$(T_2) : y = x - 2 + \ln 2$$

$$(T_1) : y = -x + \ln 2$$

X	0	ln2
y	ln2	0

X	0	-ln2+2
y	-2+ln2	0

$$(T_2) : y = x - 2 + \ln 2$$



PARTIE II

On pose pour tout réel $\varphi(x) = f(x) - x$

1-) Déterminons la fonction dérivée ρ' de φ

$$\varphi'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} - 1$$

$$\varphi'(x) = \frac{2x - 2 - x^2 + 2x - 2}{x^2 - 2x + 2}$$

$$\left[\varphi'(x) = \frac{-(x^2+4)}{x^2-2x+2} \right]$$

Déduisons que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

On constate que $x^2 + 4 > 0$ et

$$x^2 - 2x + 2 > 0 \rightarrow \frac{-(x^2 + 4)}{x^2 - 2x + 2} < 0$$

$\forall x \in \mathbb{R} \varphi'(x) < 0$ D'où φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

2-) Déterminons la limite de φ en $-\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \lim(f(x) - x) \\ &= +\infty \quad \text{car} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \end{cases} \quad \parallel \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{aligned}$$

3-) Montrons que pour tout réel x strictement positif

$$\varphi(x) = x \left[\frac{2\ln x}{x} - \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1 \right]$$

$$\varphi(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) - x$$

$$= \ln x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) - x = \ln x^2 + \ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) - x$$

$$= 2\ln x + \ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) - x$$

$$\boxed{\varphi(x) = x \left[\frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1 \right]}$$

Déduisons la limite de φ en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1 \right] = -\infty$$

$$\text{Car} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$$

4-) Montrons que la droite (Δ) coupe la courbe (C) en un point d'abscisse $0,3 < \alpha < 0,4$

S'il existe un point d'abscisse x tel que la droite (Δ) coupe la courbe (C) alors

$$\begin{cases} f(x) = \alpha \\ f(x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \varphi(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow f(\alpha) - \alpha = 0 \Leftrightarrow F(\alpha) = \alpha$$

D'où (Δ) coupe (C) en un point α vérifions que $0,3 < \alpha < 0,4$

$$\varphi(0,3) = f(0,3) - 0,3$$

$$f(0,3) = \ln((0,3)^2 - 2(0,3) + 2) \cong 0,398 \quad \varphi(0,3) \cong 0,398$$

$$\varphi(0,4) = f(0,4) - 0,4 \cong -0,092 \quad \varphi(0,4) \cong -0,092$$

$$\varphi(0,4) < 0 < \varphi(0,3) \quad \text{D'où} \quad 0,3 < \alpha < 0,4$$

$$\begin{aligned} \leftrightarrow 4\vec{GO} &= \vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OB} + \vec{OD} = \vec{OM} + \vec{MA} + \vec{OM} + \vec{MC} + \vec{ON} + \vec{NB} + \vec{ON} + \vec{ND} \\ &\leftrightarrow 2\vec{OM} + \vec{MA} + \vec{MC} + 2\vec{ON} + \vec{NB} + \vec{ND} \end{aligned}$$

Or $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{0}$ et $\vec{NB} + \vec{ND} = \vec{0}$ car M milieu de AC et N milieu de BD et

$$4\vec{GO} = 2\vec{OM} + 2\vec{ON} \leftrightarrow 2\vec{GO} = \vec{OM} + \vec{ON} \quad \text{et} \quad \vec{OM} + \vec{ON} = \vec{OF} \quad \text{Car nous pouvons encore écrire que } \vec{OM} + \vec{ON} = \vec{OF} \quad (\vec{MF} = \vec{ON}) \leftrightarrow 2\vec{OG} = \vec{OF} \leftrightarrow \vec{OG} = \frac{1}{2}\vec{OF}$$

3-) En exprimant $\vec{FM}$ de 2 manières différentes, montrons que $FA^2 + FC^2 = 2\vec{FM} + \frac{1}{2}AC^2$

$$\begin{cases} \vec{FM} = \vec{FA} + \vec{AM} \\ \vec{FM} = \vec{FC} + \vec{CM} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} FM^2 = (\vec{FA} + \vec{AM})^2 \\ FM^2 = (\vec{FC} + \vec{CM})^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} FM^2 = FA^2 + AM^2 + 2\vec{AM} \cdot \vec{FA} \\ FM^2 = FC^2 + CM^2 + 2\vec{CM} \cdot \vec{FC} \end{cases}$$

$$(1) + (2) \leftrightarrow 2FM^2 = FA^2 + FC^2 + AM^2 + CM^2 + 2\vec{AM} \cdot \vec{FA} + 2\vec{CM} \cdot \vec{FC}$$

$$\text{Or } \vec{AM} \cdot \vec{FA} = AM \cdot FA \cos \pi = -AM \cdot FA = -\frac{1}{2}AC \cdot FA \quad \text{et}$$

$$\vec{FC} \cdot \vec{CN} = FC \cdot CM \cos \pi = -FC \cdot CM = -\frac{1}{2}AC \cdot FC$$

$$\leftrightarrow 2\vec{FM}^2 = FA^2 + FC^2 + AM^2 + CM^2 - AC \cdot FA - AC \cdot FC$$

$$2\vec{FM}^2 = FA^2 + FC^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 - AC(FA + FC)$$

$$2\vec{FM}^2 = FA^2 + FC^2 + \frac{AC^2}{2} - AC^2 \leftrightarrow 2\vec{FM}^2 = FA^2 + FC^2 - \frac{1}{2}AC^2$$

$$FA^2 + FC^2 = 2\vec{FM}^2 + \frac{1}{2}AC^2$$

En déduisons que :

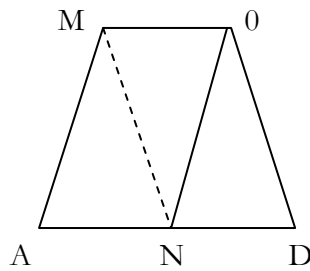
$$FA^2 + FB^2 + FC^2 + FD^2 = 2(FM^2 + FN^2) + \frac{1}{2}(AC^2 + BD^2)$$

De manière analogue comme à la question précédente il faudra exprimer de 2 manières $\vec{FN}$ et en déduire que : $FB^2 + FD^2 = 2FN^2 + \frac{1}{2}BD^2$ puis faire la somme membre à membre

$$\text{de ces 2 équations, nous aurons : } \begin{cases} FA^2 + FC^2 = 2FM^2 + \frac{1}{2}AC^2 \\ FB^2 + FD^2 = 2FN^2 + \frac{1}{2}BD^2 \end{cases}$$

$$\text{D'où } FA^2 + FB^2 + FC^2 + FD^2 = 2(FM^2 + FN^2) + \frac{1}{2}(AC^2 + BD^2)$$

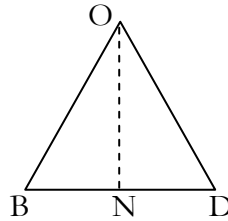
Montrons que $FA^2 + FB^2 + FC^2 + FD^2 = 4R^2$



MONA est un parallélogramme, MODN est aussi un

Parallélogramme

$MN = OD$; $AN = ON$ or ON est la hauteur du triangle OB



$$ON^2 = OB^2 = \left(\frac{OB}{2}\right)^2$$

$$\leftrightarrow ON^2 = R^2 - \frac{BD^2}{4} \text{ or } ON = AM \text{ et } AC = 2AM \quad \leftrightarrow AM = \frac{1}{2}AC \quad (\text{M milieu de } [AC])$$

$$\leftrightarrow AM^2 = R^2 - \frac{BD^2}{4} \leftrightarrow \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{BD^2}{4} \leftrightarrow \frac{AC^2}{4} = R^2 - \frac{BD^2}{4}$$

$$\leftrightarrow R^2 = \frac{AC^2}{4} + \frac{BD^2}{4} \leftrightarrow 4R^2 = AC^2 + BD^2$$

$FM^2 + FN^2 = ?$ FMN est un triangle rectangle en F $\leftrightarrow FM^2 + FN^2 = MN^2$ or $MN = OD$

$$\leftrightarrow FM^2 + FN^2 = OD^2 \text{ or } OD = R \quad \leftrightarrow FM^2 + FN^2 = R^2 \text{ dont}$$

$$\leftrightarrow FA^2 + FB^2 + FC^2 + FD^2 = 2(FM^2 + FN^2) + \frac{1}{2}(AC^2 + BD^2)$$

$$= 2R^2 + \frac{1}{2}(4R^2) = 2R^2 + 2R^2 = 4R^2 \text{ d'où } FA^2 + FB^2 + FC^2 + FD^2 = 4R^2$$

4-) Démontrons que $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FM}^2 - \overrightarrow{AM}^2$

On sait M est milieu de [AC]

$$\leftrightarrow \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FM} = \overrightarrow{MA} \quad \leftrightarrow \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{FM} \quad \leftrightarrow \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{FM}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{FM} \quad \leftrightarrow \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FM} + \overrightarrow{MA}$$

$$\leftrightarrow \overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FC} = (\overrightarrow{FM} + \overrightarrow{MA})(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{FM}) = \overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{FM}^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{FM}$$

$$= FM^2 - AM^2 + \overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{AM} \quad \leftrightarrow \overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FC} = FM^2 - AM^2$$

$$\bullet \quad \overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FC} = OF^2 - R^2$$

$$\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FM}^2 - \overrightarrow{AM}^2 = (\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OM})^2 - (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM})^2$$

$$= FO^2 - AO^2 + 2\overrightarrow{FO} \cdot \overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OM}$$

$$= FO^2 - AO^2 + 2\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{FO} - \overrightarrow{AO})$$

$$= FO^2 - AO^2 + 2\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{FO} - \overrightarrow{AO})$$

$$= FO^2 - AO^2 + 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{FA} \quad \text{or } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{FA} = \vec{0} \quad \text{car } \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{FA}$$

$$\leftrightarrow \overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FC} = OF^2 - AO^2 = OF^2 - R^2 \text{ car } AO = R \text{ or } \overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FD}$$

De manière analogue

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FD} &= FN^2 + BN^2 = (\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{ON})^2 - (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{ON})^2 \\ &= \overrightarrow{FO}^2 + \overrightarrow{FO} \cdot \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{FO} + NO^2 - BO^2 - \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{BO} - ON^2 \\ &= FO^2 - BO^2 + 2\overrightarrow{FO} \cdot \overrightarrow{ON} \cdot 2\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{ON} \\ &= FO^2 - BO^2 + 2\overrightarrow{ON}(\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OB}) \\ &= FO^2 - BO^2 + 2\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{FB} = OF^2 - R^2 \quad \text{D'où } \overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FD} \end{aligned}$$

5-) Démontrons que ILJK est un rectangle

I, J, K et L sont les milieux respectifs de [AB] ; [BC] et [AD] qui sont les cordes du cercle. (LI) et (JK) // (BD) donc (LI) // (JK). I milieu de la corde [AB] et K celui de [AD] donc (IK) // (BD) or (LI) et (JK) ...//.. (BD) comme (BD) // (IK) alors (LI) et (JK) ... $\perp$. (IK) Donc IK = LJ et LI = JK **D'où ILJK est un rectangle.**

6-) Démontrons que G est le milieu de [IJ] et de [KL] on sait que G = bar

A	B	C	D
1	1	1	1

I, J, K et L milieu respectif [AB], [DC], [BC] et [AD]

$$I = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad J = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline D & C \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad K = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline B & C \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline I & J \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \text{et } G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{GK} + 2\overrightarrow{GL} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{GL} = \vec{0}$$

G est le milieu de [IJ]

G est le milieu de [KL]

7-) Démontrons que les points I, J, K, L, R, Q, S, et P $\in$ à un même cercle de centre G.

On sait que G milieu [IJ] ; et [KL], GI = GJ et GK = GL ;

Donc IG = JG = KG = LG = QG = RG = SG = PG d'où I, J, K, L, Q, R, S et P $\in$ à 1 même cercle.

EXERCICE III

On pose $\rho(z, z') = Z\bar{Z}' + \bar{Z}Z'$

1-) Calculons :

$$\begin{aligned} \varphi(i, 3) &= (i)(3) + (-i)(3) \\ &= 3i - 3i = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\varphi(i, 3) = 0$$

$$\begin{aligned}\varphi(1 + 2i - 2 + i) &= (1 + 2i)(-2 - i) + (1 - 2i)(-2 + i) \\ &= -2 - i - 4i + 2 - 2 + i + 4i + 2 = 0 \\ \Rightarrow \|\varphi(1 + 2i, -2 + i) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(2 + i, -3 + 2i) &= (2 + i)(-3 - 2i) + (2 - i)(-3 + 2i) \\ &= -6 - 4i - 3i + 2 - 6 + 4i + 3i + 2 \\ &= -6 + 2 = -8 \\ \Rightarrow \|\varphi(1 + 2i, -2 + i) &= -8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi\left(e^{i\pi/6}, e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) &= \left(e^{i\pi/6}\right)\left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right) + \left(e^{-i\pi/6}\right)\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)} + e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} \\ &= e^{-i\pi/2} + e^{i\pi/2} = -i\sin\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 \\ \|\varphi\left(e^{i\pi/6}, e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) &= 0\end{aligned}$$

Montrons que pour tout le couple (z, z') , le nombre $Q(z, z')$ est réel

$$\text{Posons } z = x + iy, \quad z' = x' + iy'$$

$$x, y, x', y' \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}Q(z, z') &= (x + iy)(x' - iy') + (x - iy)(x' + iy') \\ &= xx' - ix'y' + ix'y + yy' + xx' + ix'y' - ix'y + yy' \\ &= xx' + x'x + yy' + i(-xy' + x'y + xy' - x'y) + yy' \\ &= 2xx' + 2yy' = 2(xx' + yy')\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Le couple } \varphi(z, z') \text{ est réel car } I_m[\varphi(z, z')] = 0$$

2-) On pose $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$ $x', y', x, y, \in \mathbb{R}$; Calcul de $\varphi(z, z')$ en fonction de x, y, x', y'

$$\text{On obtient } \varphi(z, z') = 2(xx' + yy')$$

Déterminons l'ensemble $\mathbb{D}$ des points M d'affixe z tels que $\varphi(z, 1 + i) = 2\sqrt{2}$

$$2(x + y) = 2\sqrt{2} \quad x + y = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad y = -x + \sqrt{2}$$

L'ensemble D des points $M(z)$ cherché est une droite affine de pente $a = -1$ d'ordonnée à l'origine $b = \sqrt{2}$

3-) Expression de $\varphi(z, z')$ en fonction de r, r' et $\cos(\theta - \theta')$

$$\begin{aligned}\varphi(z, z') &= re^{i\theta} \cdot r'e^{-i\theta'} + re^{-i\theta} \cdot r'e^{i\theta'} \\ &= 2rr' \cos(\theta - \theta') \Rightarrow \varphi(z, z') = 2rr' \cos(\theta - \theta')\end{aligned}$$

CONCOURS D'ENTREE EN 1ère année (2008)**CORRECTION EPREUVE DE MATHS F**

IV- Soient les suites (U_n) et (V_n) suivantes :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2}, & U_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ U_2 = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \\ V_n = U_n + \frac{1}{n}, & \forall n > 0 \end{cases}$$

1-) Calculons U_3 et U_4 , puis comparons-les :

$$U_3 = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3+2} + \frac{1}{3+3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{30+24+20}{120} = \frac{74}{120} \Rightarrow U_3 = \frac{37}{60}$$

$$U_4 = \frac{1}{4+1} + \frac{1}{4+2} + \frac{1}{4+3} + \frac{1}{4+4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{336+280+240+210}{1680} = \frac{1066}{1680} \Rightarrow U_4 = \frac{533}{840} \quad \frac{533}{840} > \frac{37}{60} \Leftrightarrow U_4 > U_3$$

2-) Montrons que (U_n) et (V_n) sont adjacentes et disons si elles sont convergentes ou non.

Rappel : 2 suites sont dites adjacentes si et seulement si :

- L'une est croissante et l'autre décroissante
- Elles ont la même limite

$$U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \quad U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{(2n+1)(n+1) + 2n^2 + 2n + 2n + 2 - 4x^2 - 2x - 4x - 2}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} \quad U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)(n+1)}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \quad \text{et } \forall n > 0, \quad \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n > 0 \Leftrightarrow U_{n+1} > U_n \text{ Donc la suite } (U_n) \text{ est croissante.}$$

$$V_n = U_n + \frac{1}{n} \Leftrightarrow V_{n+1} = U_{n+1} + \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow V_{n+1} - V_n = U_{n+1} - U_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$\text{Or } U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n^2+n-4n^2-4n-4n-2n-2}{n(2n+2)(2n+1)(n+1)}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{-(3n^2+5n+2)}{n(2n+2)(2n+1)(n+1)} \quad \text{et } \forall n > 0, \quad \frac{3n^2+5n+2}{n(2n+2)(2n+1)(n+1)} > 0$$

$$\Rightarrow V_{n+1} - V_n < 0 \text{ d'où } V_{n+1} < V_n \text{ Donc la suite } (V_n) \text{ est décroissante}$$

NB : Si elles ont la même limite alors la différence de leur limite est nulle.

$$V_n = U_n + \frac{1}{n} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n + \frac{1}{n}) \leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - U_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

D'où les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

La suite (V_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.

La suite (U_n) est croissante et minorée par 0, donc elle est divergente. Car $0 \leq U_n \leq V_n$

V- Soit l'équation complexe suivante : $z^3 - (4+i)z^2 + (3+4i)z - 3i = 0$ (7)

1-) Montrons que i est solution de l'équation (7) ci-dessus

$$i^3 - (4+i)i + (3+4i)i - 3i = -i + 4 + i + 3i - 4 - 3i = 0 \quad \text{D'où } i \text{ est une solution de (7)}$$

2-) Déterminons les nombres réels a, b, c tels que :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (3+4i)z - 3i = (z-i)(az^2 + bz + c)$$

1^{ère} méthode

$$az^2 + bz + c = \frac{z^3 - (4+i)z^2 + (3+4i)z - 3i}{z-i}$$

$z^3 - (4+i)z^2 + (3+4i)z - 3i$	$z - i$	
$z^3 + iz^2$	$z^2 - 4z + 3$	a = 1
$0 \quad -4z^2 + 3z + 4iz$		b = -4
$\quad +4z^2 \quad -4iz$		c = 3
$\quad \quad 0 \quad \quad 3z - 3i$		
$\quad \quad \quad -3z + 3i$		
$\quad \quad \quad 0 \quad 0$		

2ème méthode

$$\begin{aligned} (z+i)(az^2 + bz + c) &= az^3 + bz^2 + cz - iaz^2 - ibz - ic \\ &= az^3 + z^2(b - ia) + z(c - ib) - ic \end{aligned}$$

Par identification

$$\begin{cases} az^3 = z^3 & (1) \\ (b - ia)z^2 = -(4+i)z^2 & (2) \\ (c - ib)z = (3+4i)z & (3) \\ -ic = -3i & (4) \end{cases} \quad \text{On obtient :}$$

(1) a = 1

(2) b = ia - (4+i) Or a = 1 $\Rightarrow$ b = i - 4 + i = -4 $\Rightarrow$ b = -4

(3) -ic = -3i $\Rightarrow$ c = 3

Ainsi **$z^3 - (4+i)z^2 + (3+4i)z - 3i = (z-i)(z^2 - 4z + 3)$**

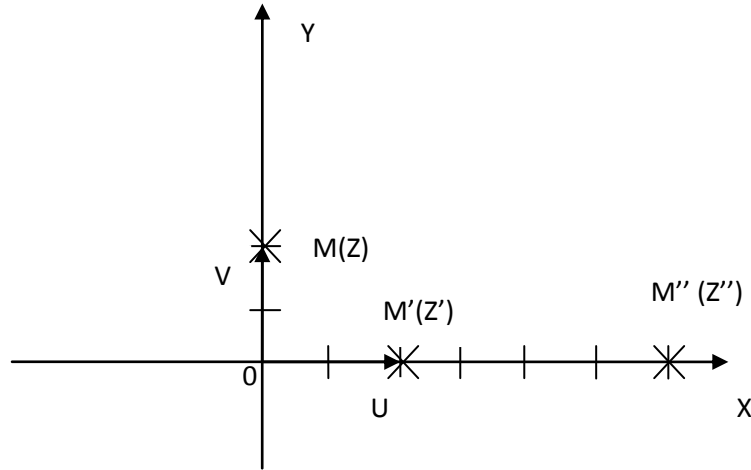
2-) Dédution des solutions de (7) et plaçons les dans un repère orthonormé

$$(7) = 0 \Leftrightarrow (z - i)(z^2 - 4z + 3) = 0$$

$$z - i = 0 \text{ ou } z^2 - 4z + 3 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(3)(1) = 16 - 12 = 4 \quad \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2$$

$$\Rightarrow z' = \frac{4-2}{2} = 1 \quad ; \quad z'' = \frac{4+2}{2} = 3 \quad \text{D'où } z = i, \quad z' = 1 \text{ et } z'' = 3$$



VI- FONCTION

Soit f la fonction définie comme suit : $f(x) = x + \ln(1 + \exp(-2x))$

1-) Domaine de définition D_f de f et calcul des limites aux bornes de ce dernier

f existe si et seulement si $1 + e^{-2x} > 0$ or $e^{-2x} > 0$ d'où $1 + e^{-2x} > 0$

$$D_f = \mathbb{R} =] - \infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + (1 + \ln(1 + e^{-2x})))$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln e^x + \ln(1 + e^{-2x}))$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + e^{-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln(1 + (e^{-2x})))$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-2x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2-) Calcul de la dérivée et déduisons le tableau de variation de f

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$$

$$f'(x) = 1 + \frac{2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1 - \frac{2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 + e^{-2x} - 2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$f'(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

Etude du signe de $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{-2x}}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x}(1 + e^{-2x})} \quad f'(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0 \quad f(0) = \ln 2$$

Tableau de variation

x	$-\infty$ $+\infty$	0
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\ln 2$ ↗ $+\infty$

3-) Déterminons les asymptotes éventuelles de f

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} (x + \ln(1 + e^{-2x}))$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \ln(1 + e^{-2x}))$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln e^{2x} + \ln(1 + e^{-2x})) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(e^{2x} + 1)) = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln 1 = 0 \end{cases}$$

D'où la droite d'équation $Y_1 = -x$ est asymptote à f en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

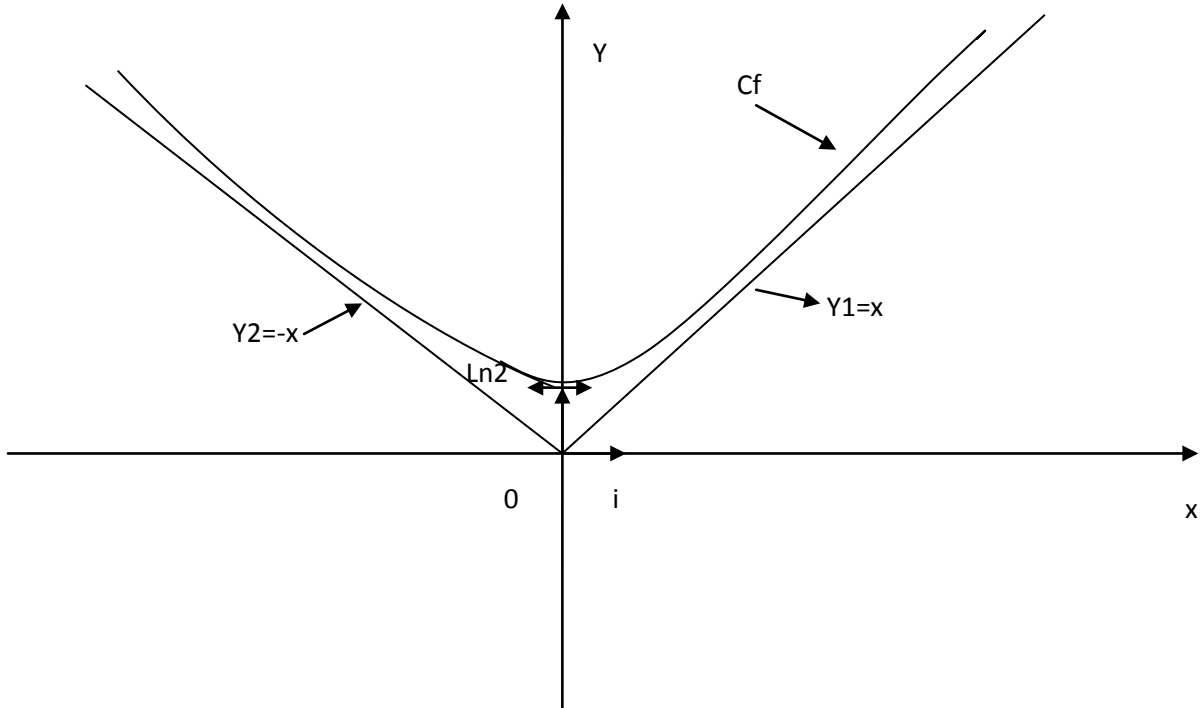
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln(1 + e^{-2x}) - x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-2x}) = 0 \quad \text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-2x}) = 1 \\ \ln 1 = 0 \end{cases}$$

D'où la droite d'équation $Y_2 = x$ est asymptote à f en $+\infty$

4-) Traçons avec soin la courbe représentative de f



5-) Résolvons graphiquement l'équation $f(x) = m$

- Pour $m \in]-\infty, \ln 2[$, $\ln 2$ n'a pas de solution $s = \emptyset$
- Pour $m = \ln 2$, on a une double solution qui est nulle $x = 0$
- Pour $m \in]\ln 2, +\infty[$ on a 2 solutions dont l'une est positive et l'autre négative.

CONCOURS D'ENTREE EN 1ère année (2007)**CORRECTION EPREUVE DE MATHS F****EXERCICE 1**

1- Domaine de g et calcul des limites

x	0	1	$+\infty$
$x \ln x $		+	+

$$Dg =]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g = -\infty \text{ car } x |\ln x| \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} g = -\infty \text{ car } x |\ln x| \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g = +\infty \text{ car } x |\ln x| \rightarrow +\infty$$

2- Tableau de variation de g

x	0	1	$+\infty$
$ \ln x $	$-\ln x$	0	$\ln x$
$g(x)$	$\ln(-x \ln x)$		$\ln(x \ln x)$
$g'(x)$	$\frac{-\ln x - 1}{-x \ln x}$		$\frac{\ln x + 1}{x \ln x}$

$$\text{Donc } \forall x \in Dg, g'(x) = \frac{\ln x + 1}{x \ln x}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

On na le tableau de variations suivants :

x	0	$1/e$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	+
$g(x)$	$-\infty$	-1	$-\infty$	$+\infty$

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = -1$$

3- nombre de racines de l'équation $g(x)=0$

D'après le tableau des variations précédent l'équation $g(x)=0$ admet une racine appartenant à $]1; +\infty[$

4- a) Montrons que les extrema de f appartiennent à la courbe d'équation $y=2g(x)$

$$f'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\alpha x} - \frac{\alpha \left(\frac{1}{x}\right)}{(\ln x)^2} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{\alpha}{(\ln x)^2}\right)$$

$$f'_\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{\alpha}{(\ln x)^2} = 0 \Leftrightarrow (\ln x)^2 = \alpha$$

Les extrema correspondants sont donnés par

$$\begin{aligned} y &= \ln(x (\ln x)^2) + \frac{(\ln x)^2}{\ln x} \\ &= \ln x + 2 \ln |\ln x| + \ln x \\ &= 2 (\ln x + \ln |\ln x|) = 2 \ln(x |\ln x|) \\ &= 2g(x) \end{aligned}$$

Les extrema y appartiennent à la courbe d'équation $y = 2g(x)$

b) D'après les équations 3°/ et 4°/ a) ce nombre est de 1

c)

$$\text{pour } \alpha = 1, (\ln x)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = e \\ \text{ou} \\ x = e^{-1} \end{cases}$$

$$\text{pour } x = e, y = 2 \times 1 = 2$$

$$\text{pour } x = e^{-1}, y = 2 \times (-1) = -2$$

EXERCICE 2

1-

a) Mettre w sous la forme algébrique

$$w = \frac{z+2}{z-4} = \frac{x+iy+2}{x-iy-4} = \frac{[x+2+iy][x-4-iy]}{(x-4)^2 + y^2} = \frac{(x+2)(x-4) + y^2}{(x-4)^2 + y^2} - i \frac{6y}{(x-4)^2 + y^2}$$

b) Déterminer l'ensemble des points M tels que w soit réel

$$w \text{ réel} \leftrightarrow -6y = 0 \leftrightarrow y = 0$$

Les points M concernés appartiennent à la droite d'équation $y=0$

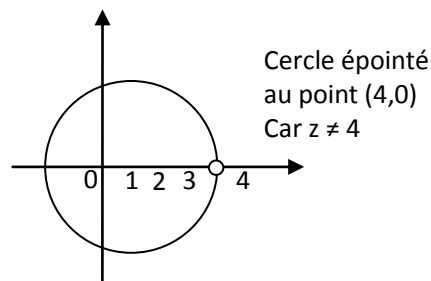
c) Déterminer l'ensemble des points M tel que w soit imaginaire pur.

$$w \text{ imaginaire pur} \leftrightarrow (x+2)(x-4) + y^2 = 0$$

$$\leftrightarrow x^2 - 2x - 8 + y^2 = 0$$

$$\leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 9$$

Les points M concernés appartiennent au cercle de centre A(1,0) et de rayon 3.

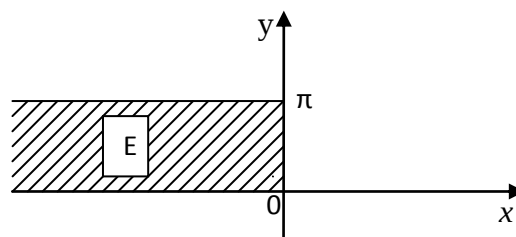


Question 2

$$a) z' = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

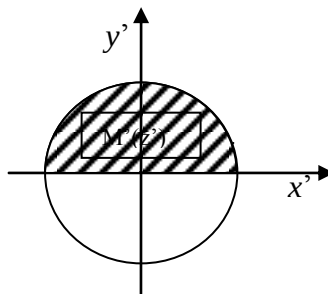
$$\rightarrow |z'| = e^x \text{ et } \arg(z') = y$$

b)



$$c) x < 0 \leftrightarrow e^x < e^0 \leftrightarrow |z'| < 1$$

Etant donné que $0 \leq y \leq \pi$ et sachant que $|Z'| = 1$ est l'équation du cercle de centre l'origine et de rayon 1, les points M appartiennent à la moitié supérieure de ce cercle.



$$d) M' \in \varepsilon(0, 2) \leftrightarrow |z'| = 2 \leftrightarrow e^x = 2 \leftrightarrow \ln e^x = \ln 2 \rightarrow x = \ln 2$$

Les points M concernés appartiennent à la droite d'équation $x = \ln 2$

EXERCICE 3

Question 1

$$a) V = \pi x^2 h$$

$S(x)$ = surface latérale + surface de base

$$= 2\pi x h + 2(\pi x^2) = 2\pi x \left(\frac{V}{\pi x^2} \right) + 2\pi x \text{ d'où } S(x) = 2 \left(\frac{V}{x} + \pi x^2 \right)$$

$$b) x \in]0, +\infty[$$

$$S'(x) = 2 \left(-\frac{V}{x^2} + 2\pi x \right) = \frac{2}{x} (2\pi x^3 - V)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = +\infty$$

$$c) S'(x) = 0 \leftrightarrow 2\pi x^3 = V \leftrightarrow x = \left(\frac{V}{2\pi} \right)^{\frac{1}{3}}$$

On a donc le tableau de variation suivant

x	0	$\left(\frac{V}{2\pi} \right)^{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$S'(x)$	-	$\circ$	+
$S(x)$	$-\infty$	$S\left(\left(\frac{V}{2\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \right)$	$+\infty$

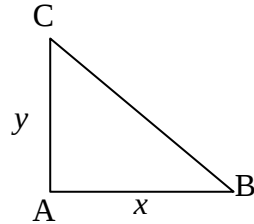
Ce tableau montre que $S'(x)$ est minimum pour $x = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\frac{h}{x} = \frac{V}{\pi x^2} \times \frac{1}{x} = \frac{V}{\pi} \frac{1}{x^3} = \frac{V}{\pi} \frac{1}{\frac{V}{2\pi}} = 2 \quad \rightarrow h = 2x$$

Donc les couples (x, h) appartiennent à la droite d'équation $h = 2x$

Question 2

a)



$$P = x + y + BC \text{ Or } BC = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow P = x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$P - (x + y) = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow (P - (x + y))^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$P^2 - 2P(x + y) + x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$P^2 - 2P(x + y) + 2xy = 0$$

$$d'où y = \frac{p(p-2x)}{2(p-x)}.$$

b) Montrons que l'aire est max pour $x = y = P \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Soit $A(x)$ l'aire de ce triangle

$$A(x) = \frac{1}{2}xy \text{ or } y = \frac{p(p-2x)}{2(p-x)} \Rightarrow A(x) = \frac{1}{4}x \frac{p(p-2x)}{(p-x)} \Rightarrow$$

$$A'(x) = \frac{P}{4} \left(\frac{P^2 - 4Px + 4x^2 - Px + Px - 2x^2}{(p-x)^2} \right); A'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4Px + P = 0$$

$$x_1 = P \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$x_2 = P \frac{2+\sqrt{2}}{2} \text{ et seule la valeur } x_1 < P \text{ d'où } A(x) \text{ est max pour}$$

$$x = x_1 = P \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

la valeur de y correspondante est alors

$$y = \frac{p(p-2P \frac{2-\sqrt{2}}{2})}{2(p-P \frac{2-\sqrt{2}}{2})} = P \frac{2-\sqrt{2}}{2} = x_1$$

EXERCICE 4

1- Montrons que le domaine d'étude de cette fonction peut se ramener à $[0; \pi[$.

- périodicité

$f(x + 2\pi) = \frac{\sin(x+2\pi)}{1+\cos(x+2\pi)} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = f(x)$ dont la fonction f est périodique de période $T = 2\pi$ et on peut désormais l'étudier dans $]-\pi; \pi[$.

- Parité

$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{1+\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{1+\cos x} = -f(x)$ f est donc impaire et l'on peut réduire son domaine d'étude dans $[0; \pi[$.

2- Calcul de $f'(x)$ et précisons son signe dans son domaine d'étude

$$f'(x) = \frac{\cos x(1+\cos x) + \sin^2(x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x} \text{ or } \forall x \in [0; \pi[, -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow f'(x) > 0$$

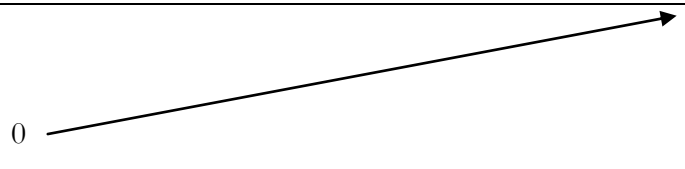
3- Montrons que la courbe admet une branche infinie que l'on précisera

$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \left(\frac{\sin x}{1+\cos x} \right) = \frac{0}{0} = \text{FI}$ effectuons un changement de variable en posant $x = \beta + \pi$, lorsque $x \rightarrow \pi$, $\beta \rightarrow 0$.

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{\beta \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin(\beta + \pi)}{1 + \cos(\beta + \pi)} \right) = \lim_{\beta \rightarrow 0^-} \frac{-\sin(\beta)}{1 - \cos(\beta)} = +\infty$$

D'où $x = \pi$ est asymptote verticale à la courbe de f .

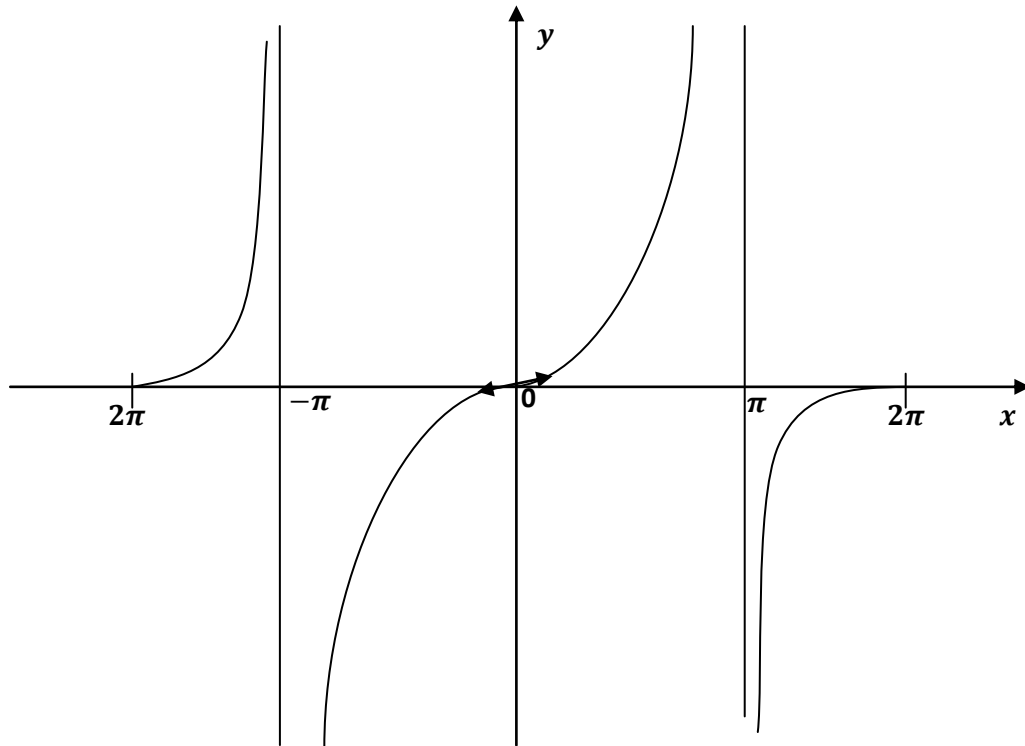
4- Tableau de variation de la fonction f et équation de la tangente en 0

x	0	π
f'	+	
f		

✓ Tangente en 0

$$y = f'(0)(x) + f(0) \text{ Or } f'(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x.$$

5- Tracé de la courbe dans $[-2\pi, 2\pi]$



6- a) calculons $\int_0^\lambda f(x) dx$, $0 < \lambda < \pi$.

$$\int_0^\lambda f(x) dx = \int_0^\lambda \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = [-\ln(1 + \cos x)]_0^\lambda = \ln 2 - \ln(1 + \cos \lambda)$$

b) En déduisons que l'aire délimitée par la courbe de f et les droites d'équations $y = 0$, $x = 0$ et $x = \pi$ est infinie.

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pi} (\ln 2 - \ln(1 + \cos \lambda)) = \ln 2 - (-\infty) = +\infty$$

CONCOURS D'ENTREE EN 1ère année (2006)**CORRECTION EPREUVE DE MATHS****EXERCICE I**

Soit le plan est muni de $(0, u, v)$, $Z_1 = -1$

1-) a) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$Z^2 + 4Z + 5 = 0$$

$$\Delta = 16 - 20 = -4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2i$$

$$Z_2 = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i \quad \Rightarrow Z_2 = -2 + i \quad \text{et} \quad Z_3 = -2 - i$$

$$S = \{-2 + i; -2 - i\}$$

b) Plaçons les points A, B, et C (*voir figure*)

c) Prouvons que $Z_3 - Z_1 = i(Z_2 - Z_3)$

$$Z_3 - Z_1 = i(Z_2 - Z_3)$$

$$\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} = i \quad \text{Or on a: } Z_3 - Z_1 = -2 - i + 1 = -1 - i \quad \text{et} \quad Z_2 - Z_1 = -2 + i + 1 = -1 + i$$

On obtient:

$$\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} = \frac{-1 - i}{-1 + i} = \frac{(-1 - i)(-1 - i)}{2} = \frac{2i}{2}$$

$$D'où \quad \frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} = i$$

$$\text{Ainsi } Z_3 - Z_1 = i(Z_2 - Z_1)$$

d) Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.

$$\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} = i \Rightarrow \frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} = [1, \pi/2]$$

$$\Rightarrow \left| \frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_1} \right| = 1 \text{ et } \arg(Z_3 - Z_1) - \arg(Z_2 - Z_1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow [AC] = [AB] \quad \text{isocèle et } (AC) \perp (AB)$$

Ainsi, le triangle ABC rectangle isocèle.

$$2-) \quad Z'_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

a) Montrons que $|Z'_1| = |Z_1|$ et calculons $\arg(Z'_1/Z_1)$

$$|Z'_1| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 1; \quad |Z_1| = \sqrt{(-1)^2} = 1$$

$$D'où \quad |Z'_1| = |Z_1|$$

$$Z'_1/Z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

$\arg(Z'_1 / Z_1) = \arg(-1 + i) = \theta$, tel que

$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{D'où } \theta = \frac{3\pi}{4}$$

b) En déduisons A' Image de A par la rotation de centre O et d'angle θ

On remarque que :

$$Z'_A = Z_A e^{i\theta} = (-1) e^{i\frac{3\pi}{4}} \Rightarrow Z'_A = -e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i;$$

D'où A' est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{4}$

c) B' et C' Image respectives de B et C par R.

Calcul des affixes de B' et C' en donnant à chaque fois la partie réelle et la partie Imaginaire.

$$* Z'_B = Z_B e^{i\frac{3\pi}{4}} \Rightarrow Z'_B = (-2 + i) e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow Z'_B = (-2 + i) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = +\sqrt{2} - \sqrt{2}i - i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Z'_B = +\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i \Rightarrow Z'_B = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - 3i)$$

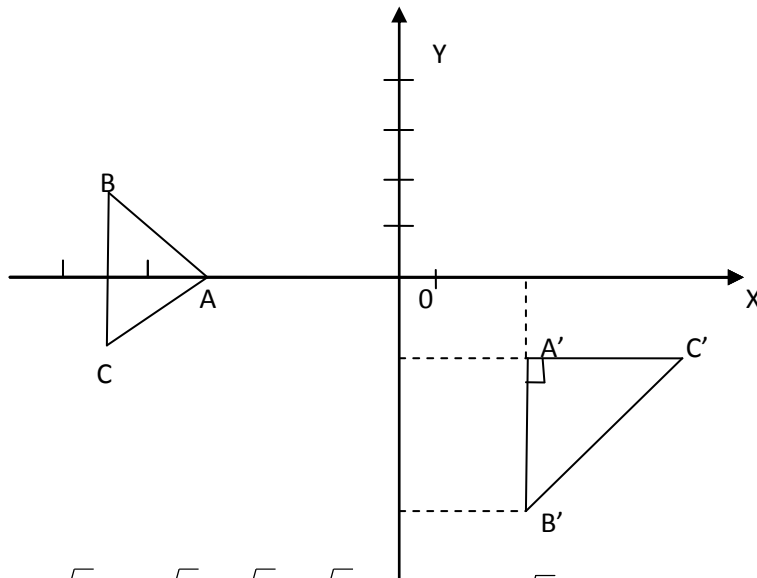
$$* Z'_C = Z_C e^{i\frac{3\pi}{4}} \Rightarrow Z'_C = (-2 - i) e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$Z'_C = (-2 - i) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = +\sqrt{2} - \sqrt{2}i + i\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Z'_B = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

et

$$Z'_C = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$



$$\frac{Z'_B - Z'_A}{Z'_C - Z'_A} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}{\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{2}i}{\frac{2\sqrt{2}}{2}}$$

$$\frac{Z'B - Z'A}{Z'C - Z'A} = -i$$

$$A'B' = A'C' \text{ et } \widehat{B'A'C'} = -\pi/2$$

D'où le triangle $A'B'C'$ est rectangle et isocèle en A

EXERCICE II

$$U_0 = 6; U_{n+1} = \frac{U_n}{5} + 4/5 \text{ et } V_n = U_n - 1$$

1-) Calculons V_0 et V_1

$$V_0 = U_0 - 1 = 6 - 1 = 5$$

$$V_1 = U_1 - 1 \text{ or } U_1 = \frac{U_0}{5} + 4/5$$

$$V_1 = \frac{U_0}{5} + \frac{4}{5} - 1 = \frac{1}{5}U_0 - \frac{1}{5}$$

$$V_1 = \frac{1}{5} \times 6 - \frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

2-) Démontrons que la suite (V_n) est géométrique

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 1 = \frac{U_n}{5} + \frac{4}{5} - 1 = \frac{1}{5}U_n - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(U_n - 1) \text{ Or } U_n - 1 = V_n$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{5}V_n \text{ d'où } V_n \text{ est suite géométrique de 1^{er} terme } V_0 = 5 \text{ et de raison } q = 1/5$$

3-) Expression de V_n et U_n en fonction de n

$$V_n = q^n V_0 = \left(\frac{1}{5}\right)^n \cdot 5 = \frac{1}{5^n}$$

$$U_n = V_{n+1} = \frac{1}{5^{n+1}} + 1.$$

PROBLEME

Partie A: Questions préliminaires

$$Dg =]0; +\infty[; g(x) = xe^{-x}$$

1-) a) Déterminons la limite de la fonction g en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 \text{ car } \frac{x}{e^x} \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

Calculons $g'(x)$ et étudions son signe, $\forall x \in [0, +\infty[$

Dérivée

$$g'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x}(x-1)$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\forall x \in [0; 1] g'(x) \leq 0$$

$$\forall x \in [1; +\infty[g'(x) \geq 0$$

*** Tableau de variation**

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
	0	$\searrow$	$\nearrow$ 0
		$1/e$	

2-) Montrons que $\forall x \in [0, +\infty[, g(x) < 1$

D'après le tableau de variation, pour tout $x \in [0, +\infty[$

$$0 \leq g(x) \leq e^{-1} \text{ ainsi } g(x) < 1 \text{ car } e^{-1} < 1$$

Partie B

$$F(x) = e^{-x} + \ln x \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

1-) a) Calcul de la limite de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{-x} + \ln x)$$

$$x \rightarrow 0 \quad x \rightarrow 0$$

$$= 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \quad x \rightarrow 0$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

Dans ce cas, la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe.

b) Calcul de la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + \ln x)$$

$$= 0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

c) Montrons que $f'(x) = \frac{1 - g(x)}{x}$

$$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = -e^{-x} + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 - xe^{-x}}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1 - g(x)}{x}$$

D'après la question A₂, $g(x) < 1$

$$\text{----- } 1 - g(x) > 0$$

Ainsi, $\forall x \in]0, +\infty[\quad f'(x) = \frac{1 - g(x)}{x} > 0$

d) Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$+\infty$



The graph shows a coordinate system with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. A curve starts at a point labeled $-\infty$ on the y-axis and increases monotonically, passing through the x-axis, towards a point labeled $+\infty$ on the x-axis.

2-) Montrons que $f(x) = 0$ admet une solution unique noté β

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

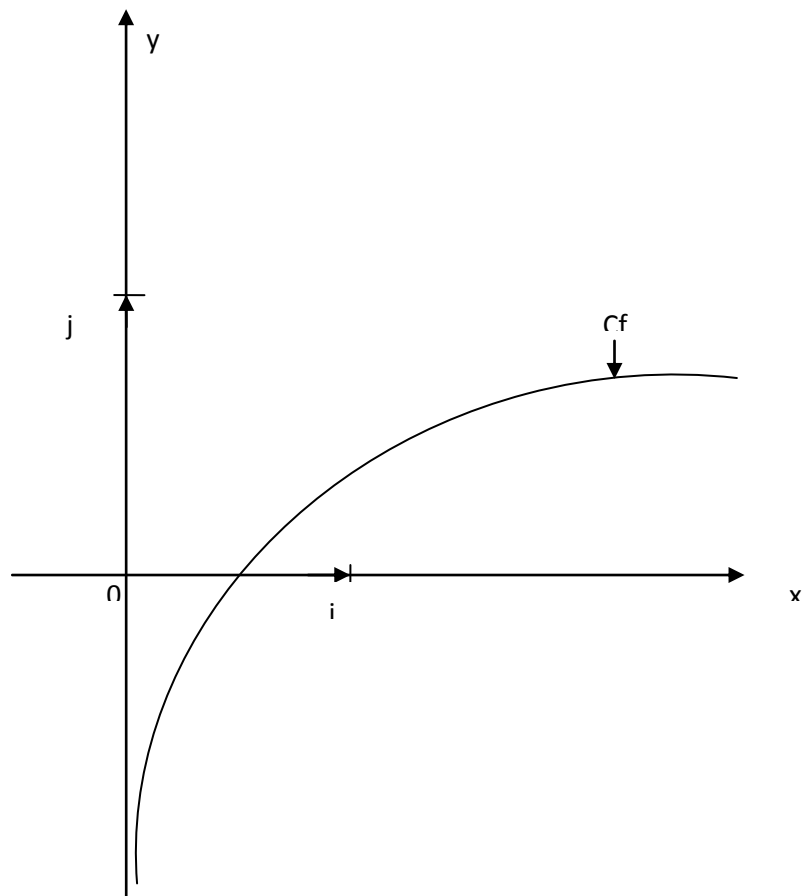
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) > 0$ ainsi, il existe un $\beta \in]0, +\infty[$ tel que $f(\beta) = 0$

De plus f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ d'où l'unicité de β

3-) Tracée de la courbe

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Branche infinie de direction (ox)



Partie C

$$G(x) = x \ln x - x$$

1-) Calcul de $g'(x)$

$$\forall x \in]0, +\infty[, g'(x) = \ln x + 1 - 1$$

$$g'(x) = \ln x$$

Primitive de f

$$\int f = F = \int (e^{-x} + \ln x) dx$$

$$\int f = -e^{-x} + x \ln x - x + c = F$$

2-) Primitive qui s'annule en $x=1$

$$F(1) = 0 \Rightarrow -e^{-1} - 1 + 0 = 0 \Rightarrow C = 1 + e^{-1} \Rightarrow F(x) = -e^{-x} + x \ln x - x + 1 + e^{-1}$$

3-) Calcul d'aire

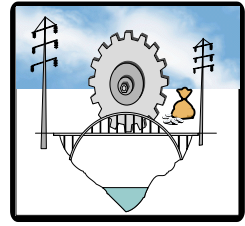
$$A = \int_1^2 f(x) dx = [-e^{-x} + x \ln x - x]_1^2 \Rightarrow A = -e^{-2} + e^{-1} + \ln 4 - 1$$

$$\text{D'où } A = 16[-e^{-2} + e^{-1} + \ln 4 - 1] \text{ cm}^2$$

*CORRECTION DES SUJETS DE
SPECIALITE*



UNIVERSITE DE DOUALA. CONCOURS
D'ENTREE A L'ENSET
EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM.
Correction ENSET 2013



I-

1-1- Expression de $P(R)$ en fonction de R_g , E_g et R

$$P = RI^2 \text{ or } I = \frac{E_g}{R+R_g} \Rightarrow P = R \frac{E_g^2}{(R+R_g)^2} \text{ (W)}.$$

1-2- Etude et représentation de $P(R)$ pour $E_g = 1V$ sur $[0; +\infty[$

$$P = \frac{R}{(R+R_g)^2} \Rightarrow$$

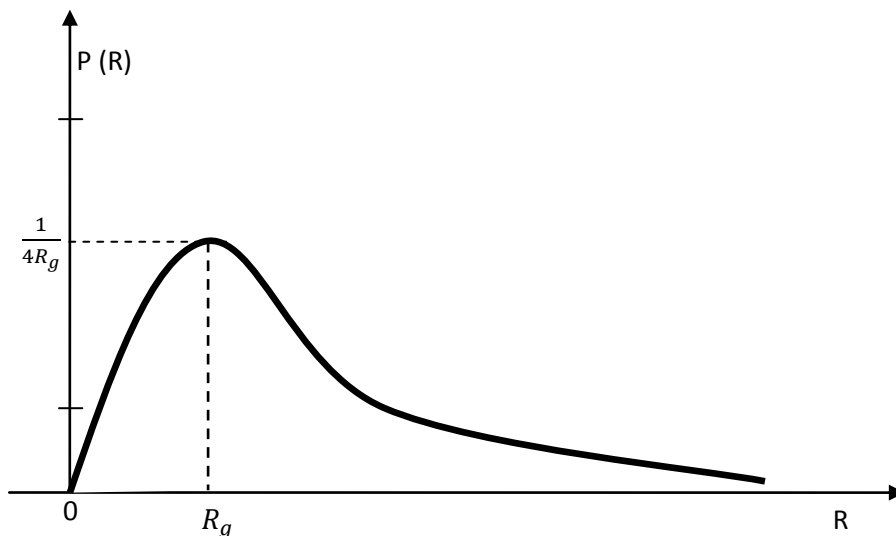
$$\frac{dP}{dR} = \frac{R^2 - R_g^2}{(R+R_g)^4} = \frac{R-R_g}{(R+R_g)^3}. \quad \frac{dP}{dR} = 0 \Rightarrow R = R_g.$$

$$P(R_g) = \frac{R_g}{(R_g+R_g)^2} = \frac{R_g}{(2R_g)^2} = \frac{1}{4R_g}.$$

• Tableau de variation

R	0		R_g		$+\infty$
$\frac{dP}{dR}$		+	$\circ$	-	
$P(R)$	0				

• Allure de la courbe $P = f(R)$



1-3- Valeur R_m de R pour laquelle $P(R)$ est max

$$P(R) \text{ est max pour } R_m = R_g .$$

$$1-4- \quad P_{Rmax} = \frac{1}{4R_g}$$

II-

2.1. Puissance active totale du circuit

$$P_t = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 \quad \text{or} \quad P_1 = R_1 I_1^2 = 0 \quad I_1 = \sqrt{\frac{P_1}{R_1}} = \sqrt{\frac{20}{2}} = \sqrt{10} \text{ (A)} = 3,162 \text{ A}$$

$$\underline{U}_1 = (R_1 + jX_1)\underline{I}_1 = (2 - j5)\underline{I}_1 \quad ; \quad \underline{U}_1 = (2 - j5)\sqrt{10} = 2\sqrt{10} - j5\sqrt{10} = 6,324 - j 15,811$$

$$\underline{U}_1 = 17,029 \angle -68,19^\circ \text{ (V)} \quad \text{or} \quad \underline{U}_1 = \underline{Z}_2 \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_2} \Rightarrow$$

$$\underline{I}_2 = \frac{17,029 \angle -68,19}{1+j} = \frac{17,029 \angle -68,19}{\sqrt{2}}$$

$$\underline{I}_2 = 12,041 \angle -113,19^\circ \text{ (A)}$$

$$\text{Soit } P_t = 20 + 1 \times (12,041)^2 \quad \mathbf{P_t = 164,985W}$$

2.2. Puissance réactive totale du circuit.

$$Q_t = X_1 I_1^2 + X_2 I_2^2$$

$$Q_t = -5(\sqrt{10})^2 + 1(12,041)^2 \quad \mathbf{Q_t = 94,585 VARS}$$

2.3 Puissance apparente totale du circuit

$$S_t = \sqrt{P_t^2 + Q_t^2} = \mathbf{190,373 VA}$$

2.4 Facteur de puissance de la charge

$$\cos \rho = \frac{P_t}{S_t} = \frac{164,985}{190,373} \quad \mathbf{0,866.}$$

III.

3.1 Expression de la puissance instantanée dissipée

$$p(t) = u(t)i(t) = \frac{u^2(t)}{R} = \frac{25}{25} \sin^2 \omega t = \mathbf{\sin^2 \omega t \text{ (W)}}$$

3.2 Puissance instantanée maximale

$$P(t)_{max} = \frac{(5)^2}{25} = \mathbf{1W}$$

3.3 Puissance moyenne dissipée

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt = U_{moy} I_{moy}$$

$$P_{moy} = \frac{U_{moy}^2}{R} \quad \text{avec} \quad U_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 5 \sin \omega t dt$$

$$U_{moy} = \frac{5}{T\omega} [-\cos\omega t]_0^{T/2} = \frac{5}{T\omega} \left[-\cos\frac{2\omega}{T} \cdot \frac{T}{2} + \cos 0 \right] = \frac{5}{T\frac{2\pi}{T}} (1 + 1) = \frac{10}{2\pi} = \frac{5}{\pi}$$

$$P_{moy} = \frac{5^2}{\pi^2 R} = \frac{25}{25(\pi)^2} = \mathbf{0,1014W}$$

3.4 Valeur efficace de la puissance dissipée

$$P = \frac{U^2}{R} \quad \text{or} \quad U^2 = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 25 \sin^2 \omega t \, dt \quad U^2 = \frac{25}{T} \int_0^{T/2} \frac{1 - \cos \omega t}{2} \, dt$$

$$= \frac{25}{2T} \left[t - \frac{1}{2\omega} \sin \omega t \right]_0^{T/2} = \frac{25}{2T} \left[\frac{T}{2} - \frac{1}{2\omega} \sin 2\pi \frac{T}{2} \cdot \frac{T}{2} \right] = \frac{25}{4} \Rightarrow U = \frac{5}{2} \quad P = \frac{25}{4 \times 25} =$$

$$\mathbf{0,25} \quad \mathbf{P = 0,25W}$$

IV-

1- Puissance active de la charge

$$P = S \cos \varphi = 500 \times 0,6 = 300 \text{kw}$$

2- Puissance réactive de la charge

$$Q = S \sin \varphi = P \tan \varphi = 400 \text{kvar}$$

3- puissance réactive requise pour ramener le facteur de puissance à 0,9

$$Q_c = Q - Q' = P(\tan \varphi - \tan \varphi') \Rightarrow Q_c = 300(\tan 53,13^\circ - \tan 125,841^\circ)$$

$$Q_c = 254,703 \text{ kvar}$$

4- taux de charge du transformateur après correction du facteur de puissance

$$T_c = \frac{S'}{S} \quad \text{avec} \quad S' = \sqrt{P^2 + Q'^2} \quad S' = \sqrt{300^2 + 145,296^2} \Rightarrow S' = 333,33 \text{KVA}$$

$$T_c = \frac{333,333}{500} \Rightarrow T_c = 66,66\%$$

V-

5-1-

Par application du théorème de MILLMAN.

$$e^- = \frac{\frac{U_0 + U_s}{\frac{R_2}{2} + \frac{R_2}{2}}}{\frac{1}{\frac{R_2}{2} + \frac{R_2}{2}}} = \frac{\frac{2R_2 U_0 + R_2 U_s}{2R_2^2}}{\frac{2R_2 + R_2}{2R_2^2}} = \frac{1}{3} (U_s + 2U_0)$$

Par application du diviseur de tension, on a :

$$e^+ = \frac{2U_e}{3}.$$

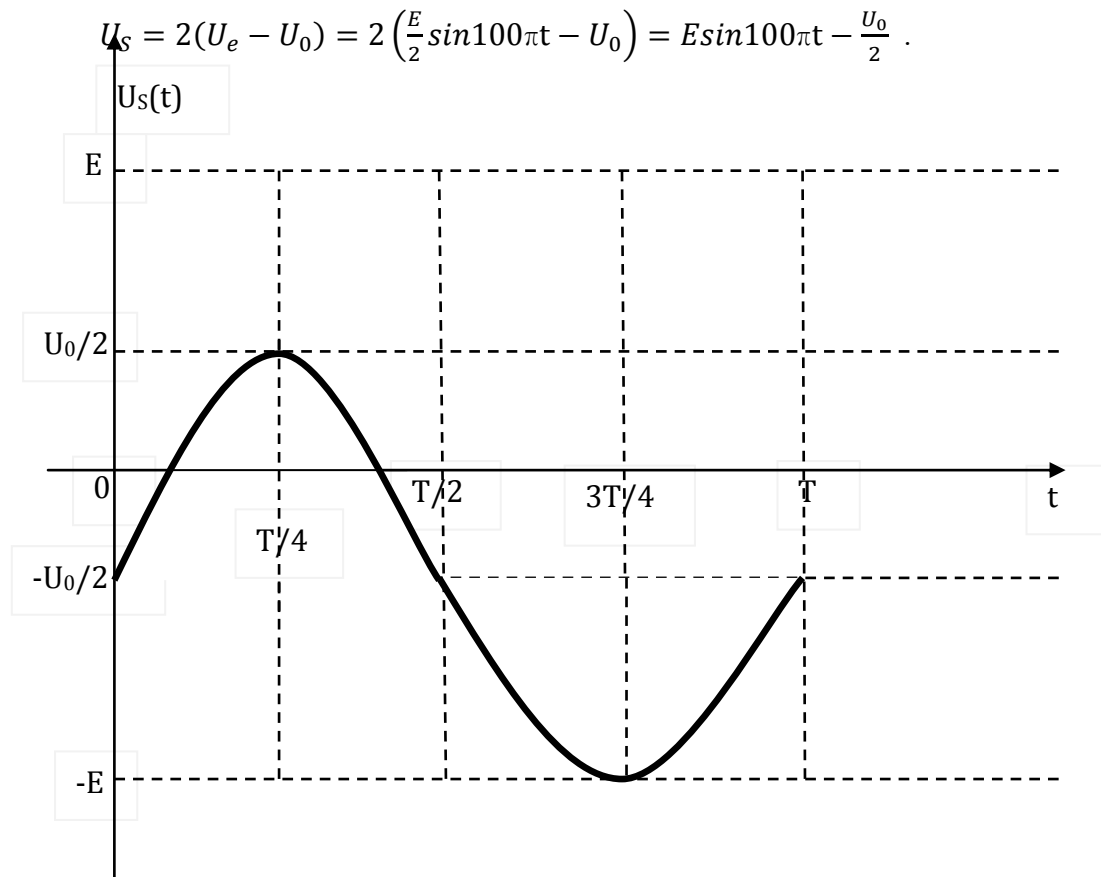
Compte tenue de l'idéalité de l'AOP, on a : $e^- = e^+$

En développant cette égalité, on a : $U_s = 2(U_e - U_0)$ avec $K = 2$ et $E(t) = U_e - U_0$.

5-2- condition pour laquelle le circuit fonctionne en régime linéaire.

Ce circuit fonctionne en régime linéaire s'il existe une contre réaction négative ou contre réaction au niveau de la borne inverseuse.

5-3- expression et graphe de $U_S(t)$.

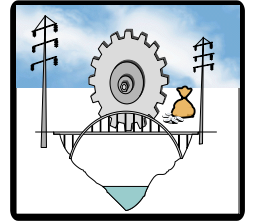


5-4- donnons deux principales applications de ce circuit.

- Soustracteur
- déphaseur.



UNIVERSITE DE DOUALA. CONCOURS
D'ENTREE A L'ENSET
EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM.
Correction ENSET 2011



Problème n° 1 : Etude d'un moteur asynchrone.

1.) Voir document-réponse n°1.

2.1.) Détermination de la fréquence de synchronisme (en tr/min) : $n_s = \frac{60 \cdot f}{p} = \frac{60 \times 35}{2} = 1500$
tr/min

2.2) Détermination de la fréquence n de rotation en charge.

En régime établi ou en régime de fonctionnement nominal (n = constante) : $T_u = T_r = 50$
N.m

Par lecture du document -réponse n°5, pour $T_u = 50$ N.m on a $n = 1440$ **tr/min**.

2.3.) Déduction du glissement

$$g = \frac{n_s - n}{n_s} = \frac{1500 - 1440}{1500} = 4 \%$$

2.4.) $\omega = n \cdot \frac{2\pi}{60} = 1440 \times \frac{2\pi}{60} = 150,8$ rad/s $P_u = T_u \cdot \omega = 50 \times 150,8 = 7,54$ **kW**

2.5.) Calcul des pertes joules au stator

$$p_{js} = \frac{3}{2} R I^2 = 3 \times 1 \times 17^2 = 434$$
 W

2.6.) Puissance transmise au rotor. 2 calculs possibles :

$$a-) P_{tr} = p_{jr} + P_u = g \cdot P_{tr} + P_u \quad (\text{car } p_m = 0 \text{ W}) \Rightarrow P_{tr} = \frac{P_u}{1 - g} = \frac{7540}{0,96} = 7.85$$
 kW

$$b-) P_{tr} = T_{em} \Omega_s = T_u \Omega_s = 50 \times 1500 \times \frac{2\pi}{60} = 7854$$
 W

c-) Déduction des pertes joules rotoriques

$$\text{Pertes par effet Joule au rotor : } p_{jr} = g P_{tr} = 0,04 \times 7854 = 314$$
 W

2.7.) Bilan de puissances : $P_a = P_{tr} + p_{js} + p_{fs} = 7854 + 434 + 200 = 8,49$ **kW**

$$2.8.) P_a = \sqrt{3} U I \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{P_a}{\sqrt{3} U I} = \frac{8488}{\sqrt{3} \times 400 \times 17} = 0,72$$

$$\text{Rendement : } \eta = \frac{P_u}{P_a} = \frac{7540}{8488} = 89 \%$$

2.9.) Voir document-réponse n°2.

2.10.) Par la méthode des 2 wattmètres : $P_a = P_1 + P_2$

3.)

3.1.) Quand on associe un onduleur autonome triphasé à un moteur asynchrone, on obtient des caractéristiques mécaniques $T_u = f(n)$ qui sont des droites parallèles les unes par rapport aux autres.

Pour $f = 35$ Hz, on a une fréquence de synchronisme $n_s = \frac{60 \cdot f}{p} = \frac{60 \times 35}{2} = 1050 \text{ tr.min}^{-1}$

Nous allons tracer le segment de droite parallèle à celui correspondant à $n_s = 1500 \text{ tr/min}$ et passant par le point

($T_u = 0 \text{ N.m}$; $n_s = 1050 \text{ tr/min}$) : voir document-réponse 5.

3.2.) Cette caractéristique coupe $T_r = 50 \text{ N.m}$ pour $n = 990 \text{ tr/min}$

(On vérifie bien que $n_s - n = \text{constante} = 60 \text{ tr/min}$ à couple constant quand $\frac{U}{f} = \text{constant}$).

Nouvelle valeur du glissement : $g = \frac{n_s - n}{n_s} = \frac{1050 - 990}{1050} = 5.7 \%$

3.3.) Nous traçons la caractéristique $T_u = f(n)$ parallèle aux autres segments passant par $T_u = 50 \text{ N.m}$ et $n = 1200 \text{ tr/min}$.

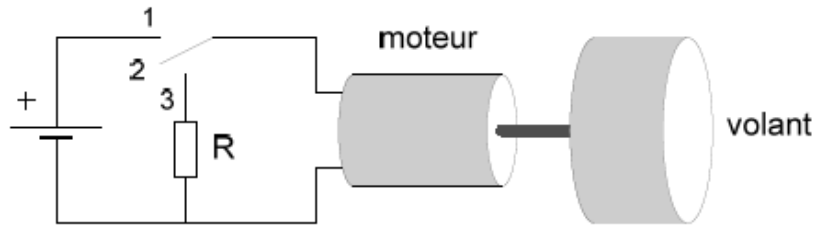
Elle passe par $n_s = 1260 \text{ tr/min}$ (quand $T_u = 0 \text{ N.m}$) : $n_s = \frac{60 \cdot f}{p} \Rightarrow f = \frac{p \times n_s}{60} = \frac{2 \times 1260}{60} = 42$

Hz

$$3.4.) \frac{U}{f} = \text{constant} = \frac{400}{50} = \frac{U}{42} \Rightarrow U = \frac{42}{50} \cdot 400 = 336 \text{ V}$$

Deuxième partie : Connaissance d'un moteur à courant continu

Un moteur à courant continu à aimants permanents est couplé à un volant d'inertie (disque massif) :



1- On place le commutateur en position 1 : le moteur démarre et atteint sa vitesse nominale.
On place ensuite le commutateur en position 2 :

- ☐ Le moteur s'emballe
- ☐ Le moteur change de sens de rotation
- ☒ Le moteur s'arrête lentement
- ☐ Le moteur s'arrête rapidement

2- On place à nouveau le commutateur en position 1.
Puis on commute en position 3.

2-1- Que se passe-t-il ?

Le volant s'arrête rapidement (la machine fonctionne en dynamo, l'énergie cinétique du volant est convertie en chaleur dans la résistance).

2-2- Que se passe-t-il si on diminue la valeur de la résistance R ?

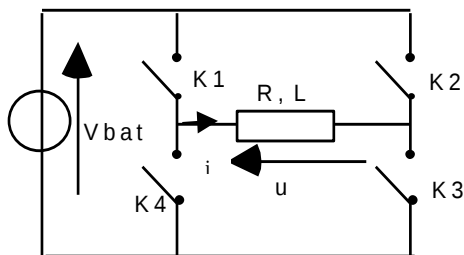
Le volant s'arrête plus rapidement.

2-3- Donner une application pratique.

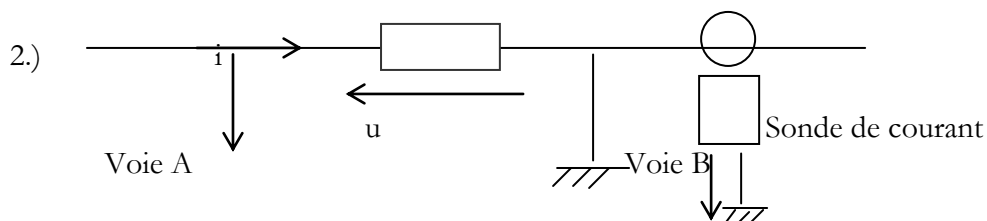
Système de freinage de train.

PROBLEME N° 2 :

Première partie : Étude d'un onduleur.



1.) $T = 10 \text{ div} \times 20 \mu\text{s/div} = 200 \mu\text{s} \Rightarrow f = \frac{1}{T} = 5 \text{ kHz}$



Sur la voie A, on visualise u (le maximum de u correspond bien à $2,2 \text{ div} \times 100 \text{ V/div} = 220 \text{ V} = V_{\text{bat}}$).

Sur la voie B, on visualise i par l'intermédiaire d'une sonde de courant à effet Hall.

3.) $U = \sqrt{u^2} = V_{\text{bat}} = 220 \text{ V}$ (car à tout instant, $u^2 = V_{\text{bat}}^2$)

4.) L'inductance L étant parfaite, elle ne consomme pas de puissance active.

Seule la résistance R absorbera de la puissance active : $P = RI^2 = 100 \times 0,9^2 = 81 \text{ W}$

5.) Voir document-réponse n°3.

$$30 < t < 100 \mu\text{s} : u = V_{\text{bat}} \Rightarrow K1 \text{ et } K3 \text{ fermés.}$$

$$\vee 0 < t < 50 \mu\text{s} : i < 0 \Rightarrow D1 \text{ et } D3 \text{ conduisent.}$$

$$\vee 50 \mu\text{s} < t < 100 \mu\text{s} : i > 0 \Rightarrow T1 \text{ et } T3 \text{ conduisent.}$$

$$300 \mu\text{s} < t < 200 \mu\text{s} : u = -V_{\text{bat}} \Rightarrow K2 \text{ et } K4 \text{ fermés.}$$

$$\vee 100 \mu\text{s} < t < 150 \mu\text{s} : i > 0 \Rightarrow D2 \text{ et } D4 \text{ conduisent.}$$

$$\vee 150 \mu\text{s} < t < 200 \mu\text{s} : i < 0 \Rightarrow T2 \text{ et } T4 \text{ conduisent.}$$

6.) $p = u \cdot i$: puissance absorbée par la charge (convention récepteur).

$p > 0$ quand les transistors sont passants : la charge reçoit de la puissance de la batterie.

* phase d'alimentation.

$p < 0$ quand les diodes sont passantes : la charge fournit de la puissance aux batteries.

* phase de **récupération**.

$$\vee 0 < t < 50 \mu\text{s} : p < 0 : \text{phase de récupération.}$$

$$\vee 50 \mu\text{s} < t < 100 \mu\text{s} : p > 0 : \text{phase d'alimentation.}$$

$$\vee 100 \mu\text{s} < t < 150 \mu\text{s} : p < 0 : \text{phase de récupération.}$$

$$\vee 150 \mu\text{s} < t < 200 \mu\text{s} : p > 0 : \text{phase d'alimentation.}$$

7.) Quand $K1$ et $K3$ sont fermés : $i_{\text{BAT}} = i$.

Quand $K2$ et $K4$ sont fermés : $i_{\text{BAT}} = -i$

8.) Voir l'oscillogramme sur le document-réponse n°4.

Deuxième partie : Etude du contrôleur de tension.

1.) Loi des nœuds : $I_1 - I_Z - I_+ = 0$

L'amplificateur opérationnel est parfait : $I_+ = 0 \Rightarrow I_1 = I_Z$

$$\text{Loi des mailles : } R_1 I_1 + V_Z = V_{\text{CC}} \Rightarrow R_1 = \frac{V_{\text{CC}} - V_Z}{I_1} = \frac{V_{\text{CC}} - V_Z}{I_{Z \text{ max}}} = \frac{15 - 4,7}{0,2} = 51,5 \Omega$$

2.) L'amplificateur opérationnel n°1 fonctionne en régime linéaire car la réaction est négative (on renvoie le signal de Sortie de l'AO sur l'entrée inverseuse).

3.) Loi des mailles : $V_Z - \epsilon - V_{S1} = 0$

$$\text{En régime linéaire : } \epsilon = 0 \text{ V} \Rightarrow V_{S1} = V_Z = 4,7 \text{ V}$$

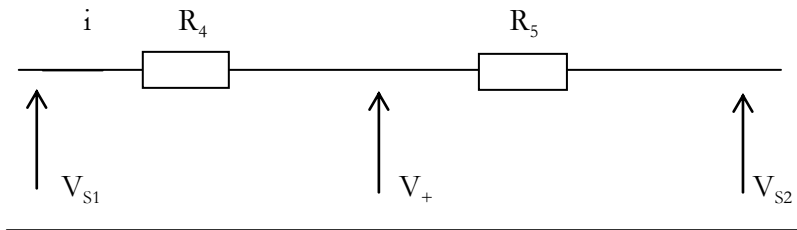
4.) L'amplificateur opérationnel n°2 fonctionne en régime non-linéaire (saturation) car la réaction est positive (on renvoie le signal de sortie de l'AO sur l'entrée non-inverseuse).

$$V_- = \frac{R_3}{R_3 + R_2} V_{BAT} = 2,14 \cdot 10^{-2} V_{BAT} \quad (\text{Diviseur de tension à vide car il n'y a pas de courant}$$

rentrant par l'entrée inverseuse de l'AO : $i_- = 0$ A)

$$\text{A.N. : Si } V_{BAT} = 220 \text{ V} \Rightarrow V_- = 0,021 \times 220 = 4,7 \text{ V}$$

6.) Application du théorème de superposition. Le montage est équivalent à celui-ci (car $i_+ = 0$ A) :



a. On éteint V_{S1} : $V_+ = \frac{R_4}{R_4 + R_5} V_{S2}$ (Diviseur de tension à vide)

b. On éteint V_{S2} : $V_+ = \frac{R_5}{R_4 + R_5} V_{S1}$ (Diviseur de tension à vide)

c. On allume V_{S1} et V_{S2} : $V_+ = \frac{R_5}{R_4 + R_5} V_{S1} + \frac{R_4}{R_4 + R_5} V_{S2}$

7.) Comme $V_{S1} = V_Z$, la formule précédente on a : $V_+ = \frac{R_5}{R_4 + R_5} V_Z + \frac{R_4}{R_4 + R_5} V_{S2}$

8.) $V_+ > V_- \Rightarrow \varepsilon > 0 \Rightarrow V_{S2} = +V_{sat} = +15 \text{ V}$

$$V_+ = \frac{R_5}{R_4 + R_5} 4,7 + \frac{R_4}{R_4 + R_5} 15 = 4,95 \text{ V} = V_2$$

9.) $V_+ < V_- \Rightarrow \varepsilon < 0 \Rightarrow V_{S2} = -V_{sat} = -15 \text{ V}$

$$V_+ = \frac{R_5}{R_4 + R_5} 4,7 + \frac{R_4}{R_4 + R_5} \times (-15) = 4,22 \text{ V} = V_1$$

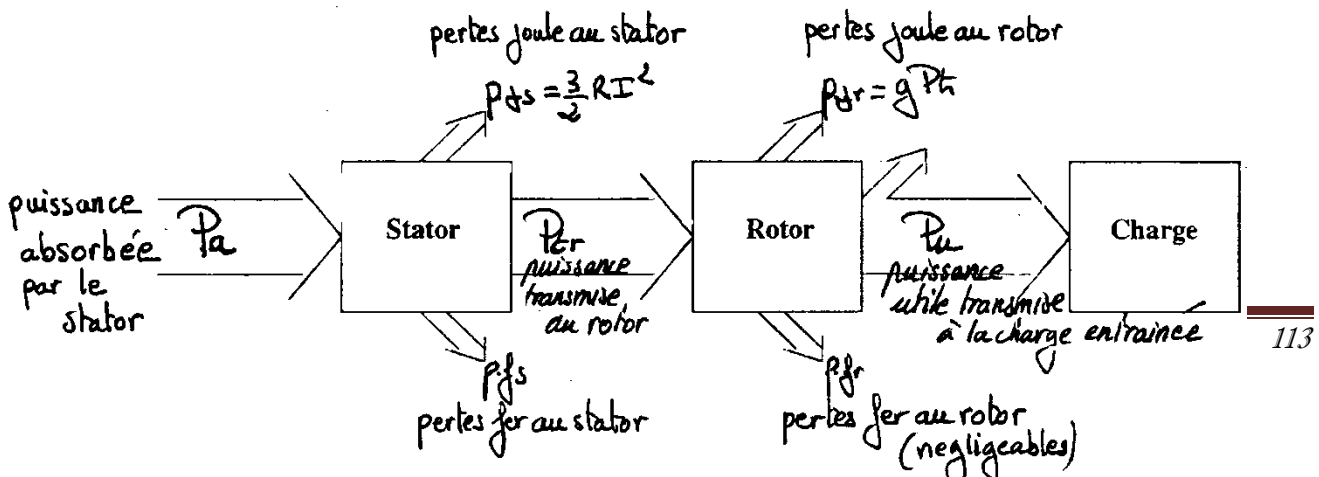
10.) La tension de sortie de l'AO change d'état quand $\varepsilon = 0 \Rightarrow V = V_+$

$$\text{Soit quand } V_- = V_1 = 4,22 \text{ V} = 2,14 \cdot 10^{-2} V_{BAT} \Rightarrow V_{BAT} = 198 \text{ V}$$

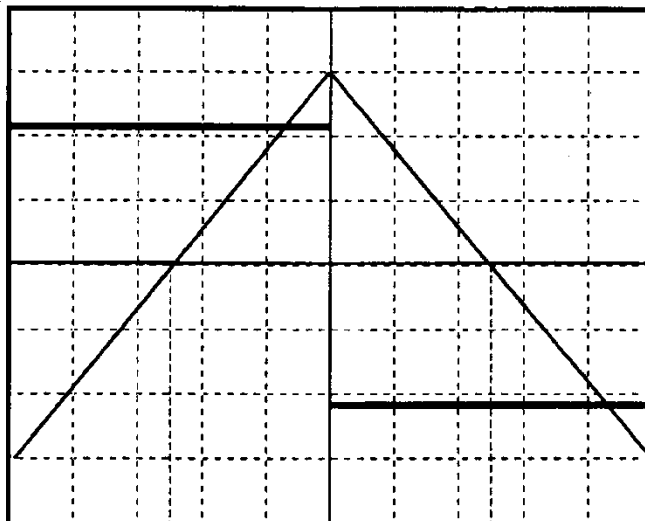
$$\text{Soit quand } V_- = V_2 = 4,95 \text{ V} = 2,14 \cdot 10^{-2} V_{BAT} \Rightarrow V_{BAT} = 232 \text{ V}$$

On reste bien dans l'intervalle de tension désiré 220 V à $\pm 10\%$ (198 V ; 242 V).

DOCUMENT À RENDRE ET À AGRAFER À LA COPIE



DOCUMENT À RENDRE ET À AGRAFER À LA COPIE



Calibres :

Voie A : 100 V/div

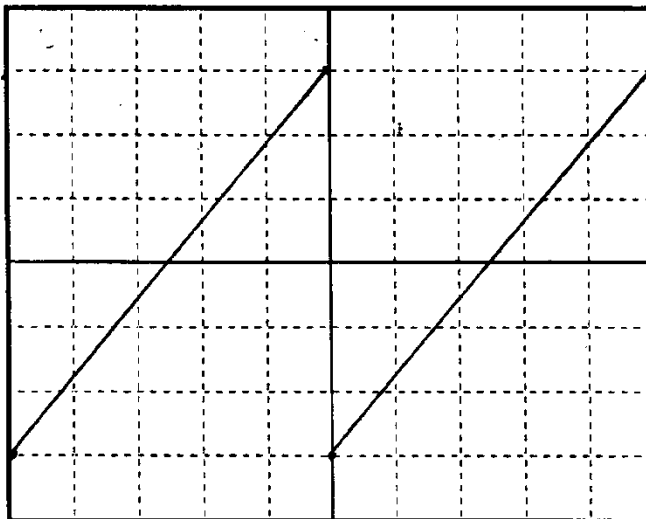
Voie B : 50 mV/div

Base de temps : 20 μ s/div

Figure n°3

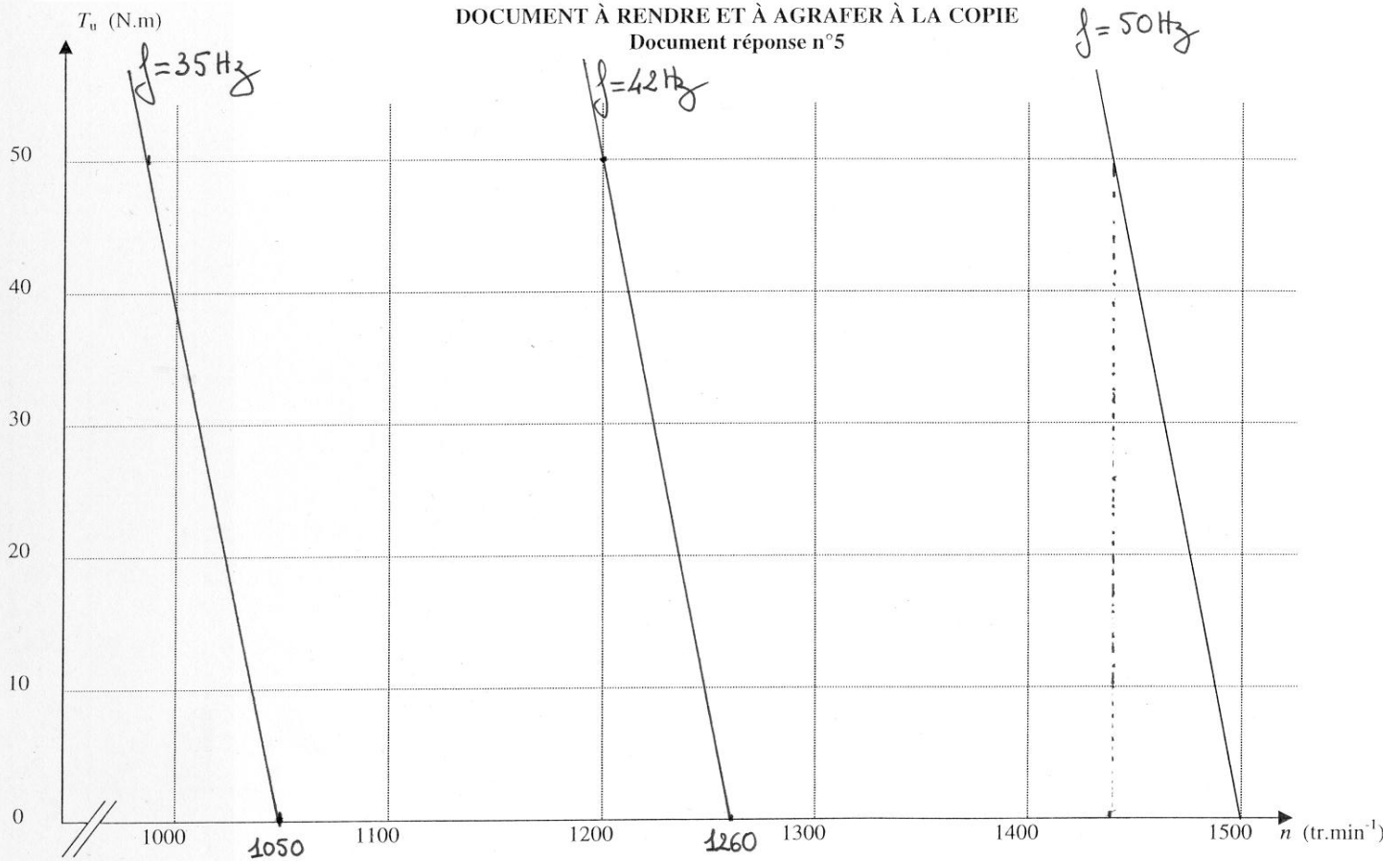
$K_1 K_3$	$K_1 K_3$	$K_2 K_4$	$K_2 K_4$	Interrupteur(s) commandé(s) (K_i)
$D_1 D_3$	$T_1 T_3$	$D_2 D_4$	$T_2 T_4$	Elément(s) passant(s) (T_i ou D_i)
<0	>0	<0	>0	Signe de la puissance $p(t)$

Document réponse n°3



Document réponse n°4

DOCUMENT À RENDRE ET À AGRAFER À LA COPIE
Document réponse n°5

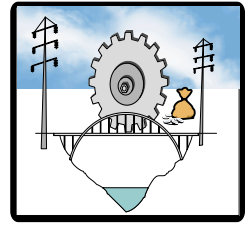


STI Génie Electrotechnique – Sciences Physiques et Physique Appliquée –
REPERE : 1 PYETME1

PAGE : 8/8



**UNIVERSITE DE DOUALA. CONCOURS
D'ENTREE A L'ENSET
EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM. JUILLET 2010
CORRECTION ENSET 2010**



PROBLEME 1: Moteur à courant continu alimenté par un hacheur

PARTIE A : MOTEUR A COURANT CONTINU

1. A propos de l'inducteur

1.1. L'inducteur alimenté en régime continu engendre dans le circuit ferromagnétique de la machine un flux magnétique

♦ L'inducteur correspond au stator.

1.2. Puissance d'excitation absorbée par l'inducteur ; $P_{ex} = U_{exN} \cdot I_{exN} = 500 \cdot 1 = 500 \text{ W}$

$$P_{ex} = 500 \text{ W}$$

♦ Cette puissance est dissipée sous forme de chaleur.

2. A propos de l'induit (en fonctionnement nominal)

2.1. Modèle équivalent de l'induit du moteur. (fig.2)

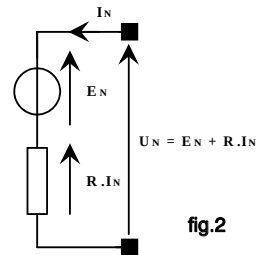


fig.2

2.2. Calcul numérique pour le fonctionnement nominal :

a) Puissance absorbée par le moteur P_{aN} ;

Il faut prendre en compte la puissance absorbée par l'induit $U_N \cdot I_N$ et par l'inducteur $U_{ex} \cdot I_{ex}$

$$P_{aN} = U_N \cdot I_N + U_{ex} \cdot I_{ex} = 500 \cdot 20 + 500 \cdot 1 = 10500 \text{ W} = 10,5 \text{ KW}$$

$$P_{aN} = 10,5 \text{ KW}$$

b) f.é.m. E_N ;

D'après le modèle équivalent :

$$U_N = E_N + R \cdot I_N \text{ soit } E_N = U_N - R \cdot I_N = 500 - 1 \cdot 20 = 480 \text{ V}$$

$$E = 480 \text{ V}$$

c) Puissance électromagnétique P_{emN} ;

$$P_{emN} = E_N \cdot I_N = 480 \cdot 20 = 9600 \text{ W}$$

$$P_{emN} = 9600 \text{ W}$$

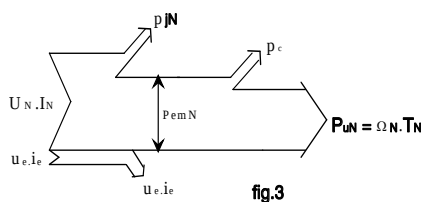


fig.3

Rq. : on vérifie bien que $p_{jN} = R \cdot I_N^2 = 1 \cdot 20^2 = 400 \text{ W} = P_{aN} - P_{emN}$

d) Moment du couple électromagnétique T_{em} ;

$$T_{emN} = \frac{P_{emN}}{\Omega_N} = \frac{9600}{400} = 24 \text{ N.m}$$

$$T_{emN} = 24 \text{ N.m}$$

e) Pertes collectives (pertes mécaniques et magnétiques)

D'après le bilan de puissance (fig.3), $P_c = P_{em} - P_u = 9600 - 8000 = 1600 \text{ W}$

f) Moment du couple utile T_u ;

$$T_{uN} = \frac{P_{uN}}{\Omega_N} = \frac{8000}{400} = 20 \text{ N.m}$$

$$T_{uN} = 20 \text{ N.m}$$

Rq. : on vérifie bien que : $T_{emN} - T_{uN} = 4 \text{ N.m} = T_c = \frac{P_c}{\Omega} = \frac{1600}{400} = 4 \text{ N.m}$

g) Rendement de l'induit ; $\eta_N = \frac{P_{uN}}{U_N \cdot I_N} = \frac{8000}{10000} = 0,80$

$$\eta_N = 0,80$$

Rq. : Le rendement global du moteur serait $\eta_N = \frac{P_{uN}}{U_N \cdot I_N + P_{ex}} = \frac{8000}{10000 + 500} = 0,76$

3. Fonctionnement sous tension variable, $I = I_N = 20 \text{ A} = \text{constante}$;

3.1- Equation littérale de la caractéristique $\Omega = f(U)$

On la déduit des équations (1) : $U = E + R \cdot I$ et (2) : $E = K\Omega$; $\rightarrow$ il vient :

$$\Omega = \frac{U - R \cdot I}{K}$$

Rq. : avec les valeurs numériques de I_N , R et K cela donnerait : $\Omega = \frac{U - 20}{1,2} = 0,8333 \cdot U - 16,67$

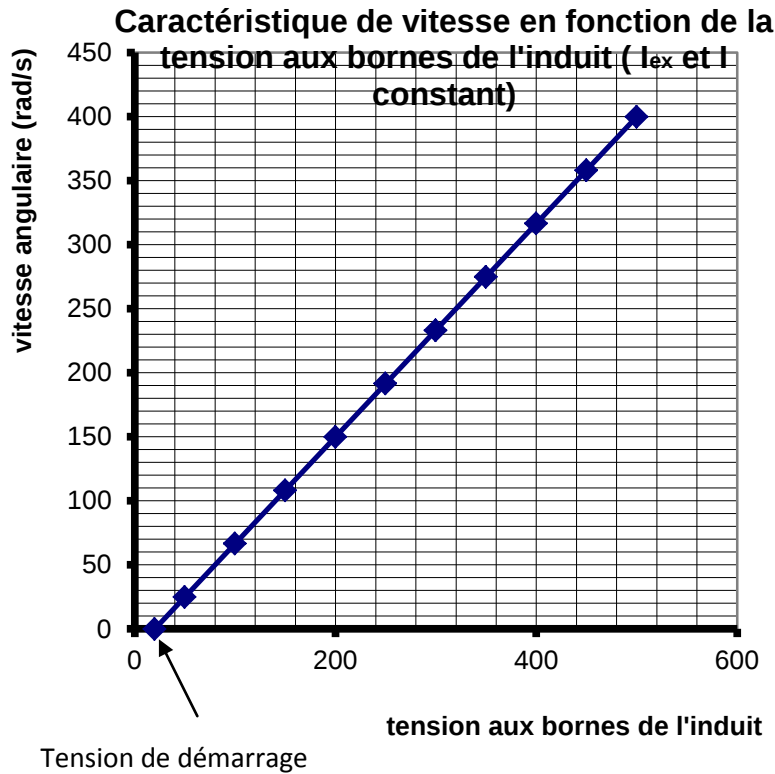
Ce qui correspond bien à une droite croissante indiquant que l'on peut simplement faire varier la vitesse d'un tel moteur en agissant sur la tension (au contraire d'un moteur asynchrone).

3.2- Détermination graphique de la tension de démarrage.

La tension de démarrage correspond graphiquement à la tension U_d pour laquelle la vitesse de rotation est nulle (Point d'intersection de la caractéristique avec l'axe des tensions), on trouve graphiquement : $U_d = 20 \text{ V}$

On retrouve facilement cette valeur par le calcul : au démarrage, $\Omega = 0$ donc $E = 0$ et

$$U_d = R \cdot I_N = 1 \cdot 20 = 20 \text{ V}$$



4.) Fonctionnement sous tension nominale et couple variable

4.1. L'intensité du courant absorbé par l'induit du moteur est fonction du couple électromagnétique T_{em} d'après l'équation $T_{em} = K \cdot I$ soit $I = \frac{T_{em}}{K}$ la constante $K=1,2$

N.m/A est identique à celle de l'équation $E = K \Omega$

➤ En régime établi de vitesse (vitesse constante) $T_u = T_r$

➤ T_u est lié à T_{em} par l'équation $T_{em} = T_u + T_p$

On en déduit que : $I = \frac{T_{em}}{K} = \frac{T_u + T_p}{K} = \frac{T_u + 4}{1,2} = \frac{T_r + 4}{1,2}$

4.2. a) Voir document réponse annexe 2 page 6

b) On peut déduire des graphiques la vitesse de rotation de l'ensemble moteur machine ainsi que l'intensité du courant absorbée pour les trois charges (voir document annexe 2)

charge ascenseur	500 kg	1000 kg	1500 kg
vitesse de rotation (rad/s)	407 rad/s	403,5 rad/s	400 rad/s
intensité absorbée (A)	11,6 A	16 A	20 A

PARTIE B : ETUDE DU HACHEUR

1.) Fréquence de fonctionnement f du hacheur et rapport cyclique α .

L'annexe n°3 représente les variations de l'intensité dans le moteur au cours du temps, on reconnaît les 2 phases de fonctionnement du hacheur :

- $0 < t < 70 \mu s$: Phase d'alimentation (H fermé), l'intensité i augmente (établissement du courant dans une charge inductive).
- $70 \mu s < t < 100 \mu s$: Phase de roue libre (H ouvert), l'intensité i diminue.

On lit la période sur le graphique de l'annexe n°3 : $T = 100 \mu s = 100 \cdot 10^{-6} = 10^{-4} s$

Soit $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{10^{-4}} = 10^4 \text{ Hz}$

$f = 10^4 \text{ Hz}$ Soit $f = 10 \text{ kHz}$

On déduit facilement le rapport cyclique qui représente le rapport entre le temps de fermeture de l'interrupteur

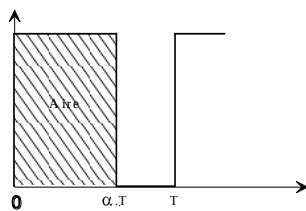
(70μs) et une période T (100μs) : $\alpha = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$ ou $0,7$ $\alpha = \frac{7}{10}$

2.) Les 2 phases de fonctionnement du hacheur sont :

- $0 < t < 70 \mu s$: **Phase d'alimentation (H fermé et D bloquée)**
- $70 \mu s < t < 100 \mu s$: **Phase de roue libre (H ouvert et D passante)**

3.) Voir les chronogrammes de $u(t)$ et $i_h(t)$ sur le document réponse n°2 (annexe 4)

4.) Valeur moyenne $\langle u(t) \rangle$ en fonction de α et V .

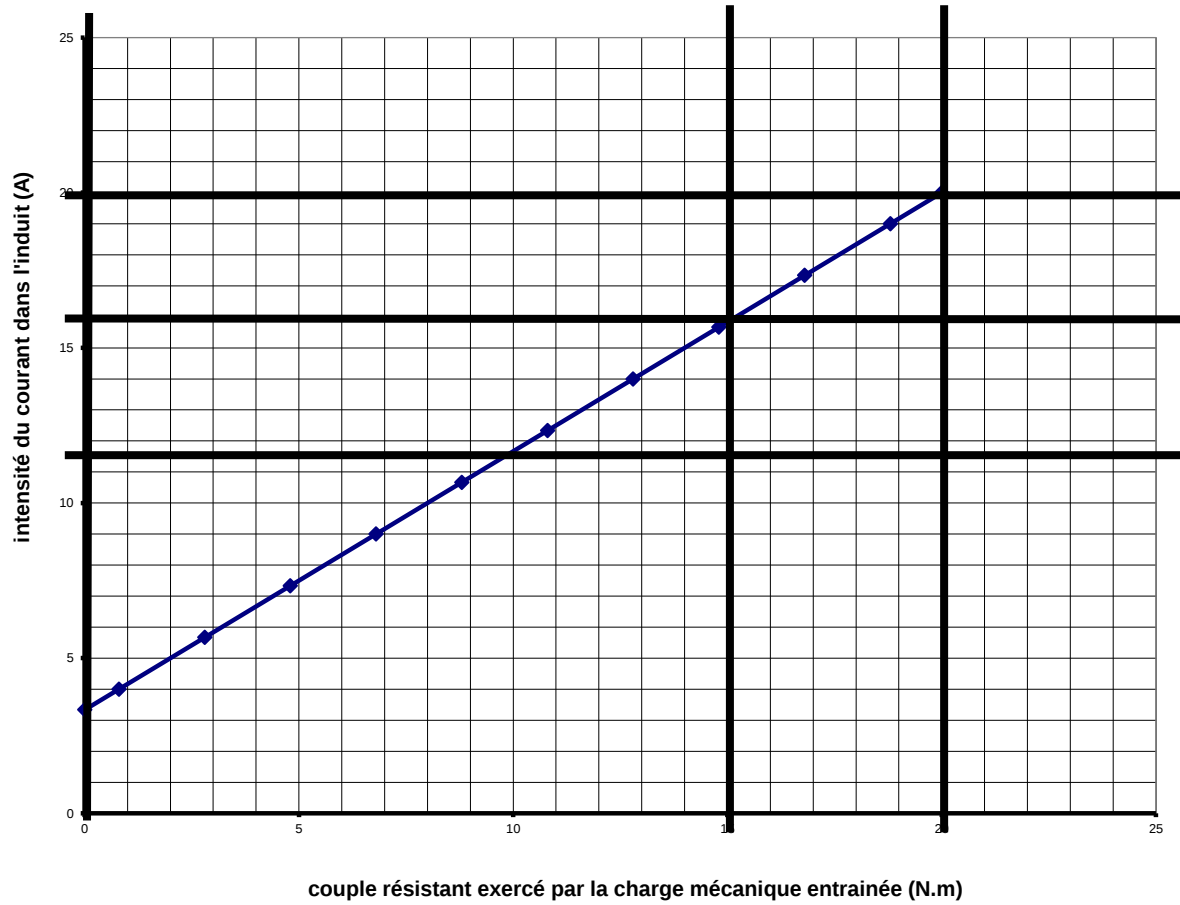


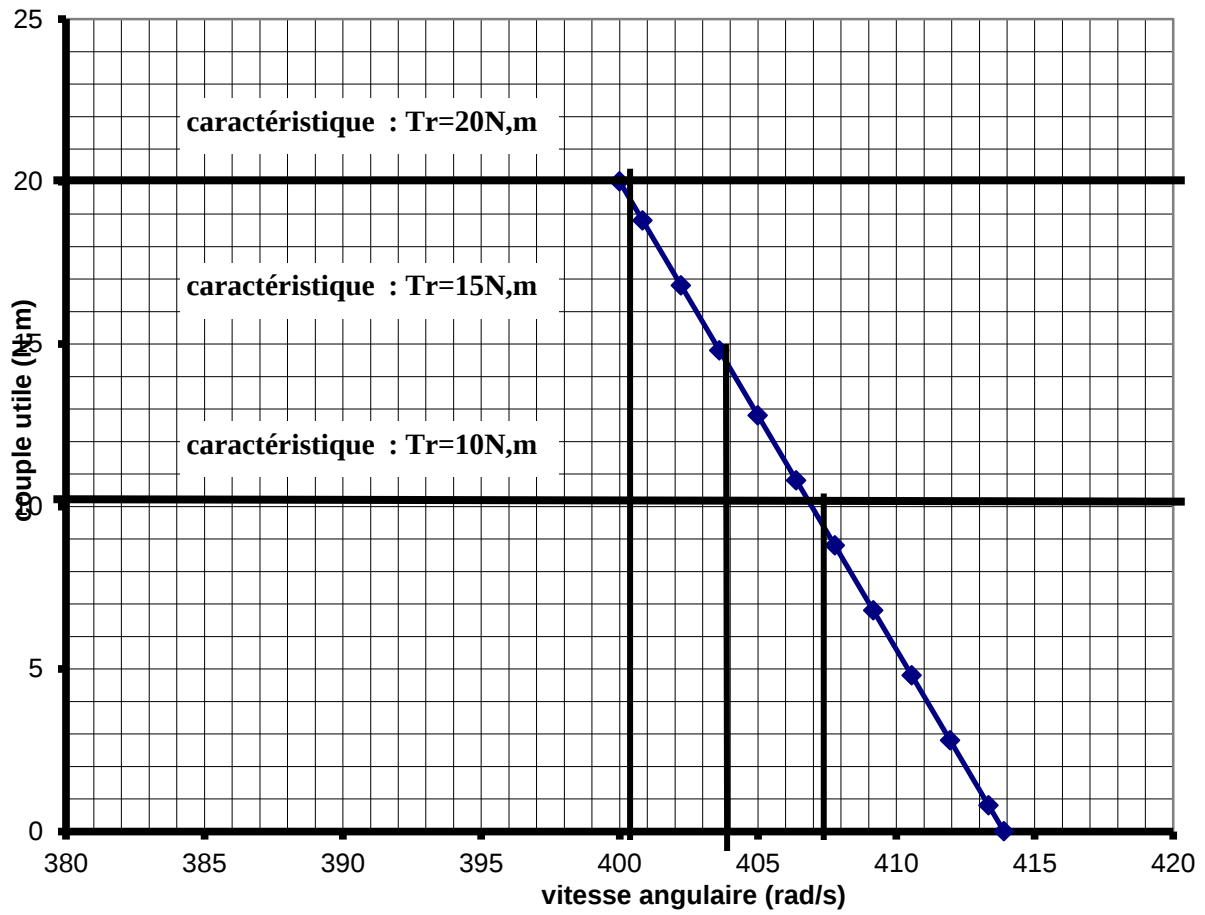
On calcule la valeur moyenne de la tension u par un calcul d'aire :

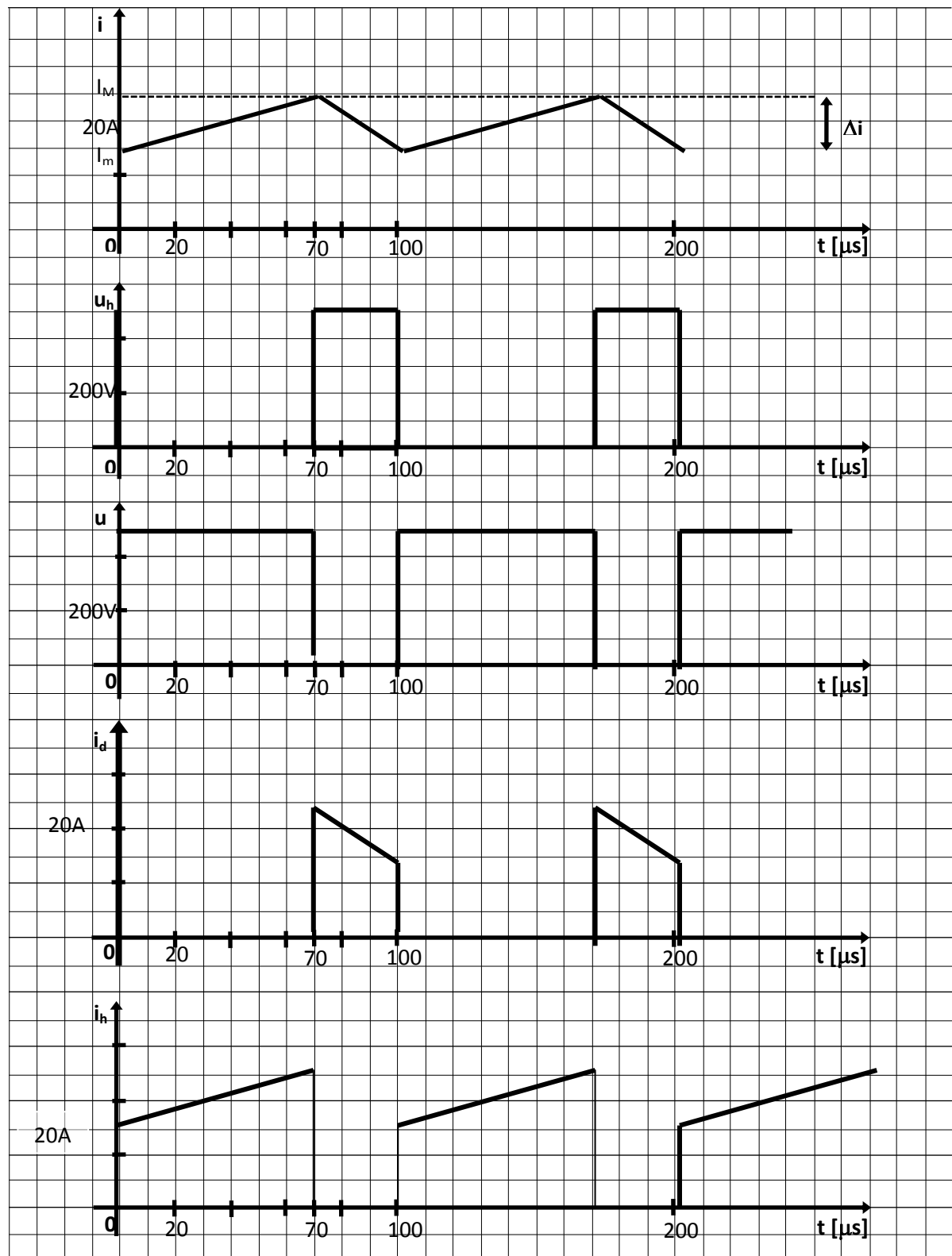
$$\langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot dt = \frac{\text{Aire}}{T} = \frac{V \cdot \alpha T}{T} = \alpha \cdot V = 0,7 \cdot 500 = 350 \text{ V}$$

5. Voir les chronogrammes de $i_d(t)$ et $i_h(t)$ sur le document réponse n°2 (annexe 4)

Document réponse n°1 : Intensité du courant absorbé par l'induit en fonction du couple résistant (U et lex constants)



Document réponse n°2 : caractéristique mécanique du moteur (U et ω constant)

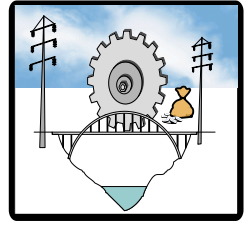




UNIVERSITE DE DOUALA.
CONCOURS D'ENTREE A L'ENSET

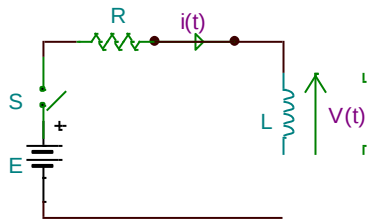
EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM. Mai 2009

Correction ENSET 2009



EXERCICE 1

$E=10V$; $R=1K\Omega$; $L=1mH$; $I(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$



I-1) Expression et valeur numérique de K.

A $t=0$, $I(0) = I_0 = \frac{E}{R} = K \Rightarrow K = \frac{E}{R}$ (solution de l'équation particulière) ; AN : $K = 10/1 = 10mA$.

I-2) Expression et valeur numérique de τ .

$\tau = L/R$; AN : $\tau = 10^{-3}/10^3 = 10^{-6} \Rightarrow \tau = 1\mu s$.

I-3) Expression de $V(t)$ à partir de $I(t)$.

$$V(t) = L \frac{dI(t)}{dt} = L \frac{dK(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}{dt} = K.L. \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = K.R. e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow V(t) = E. e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ Car } K=E/R \text{ et } \tau = L/R ;$$

$$V(t) = 10e^{-10^6 t}.$$

I-4) Temps t_r pour lequel $I(t_r)$ atteint 9.5mA, ainsi que $V(t)$ associée.

$$\Rightarrow I(t) = 10(1 - e^{-10^6 t_r}) \Rightarrow 9.5 = 10(1 - e^{-10^6 t_r}) \Rightarrow -0.95 + 1 = e^{-10^6 t_r} \Rightarrow 0.05 = 1/e^{10^6 t_r}$$

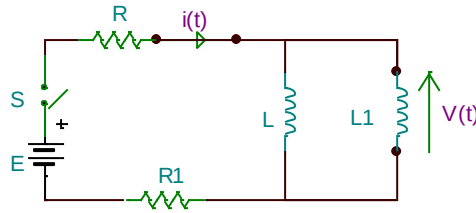
$$\Rightarrow 10^6 t_r = \ln 20 \Rightarrow t_r = \ln 20 / 10^6 = \ln 20 \cdot 10^{-6} \Rightarrow t_r = \ln 20 \mu s = \tau \ln 20 s.$$

$$\Rightarrow V(t_r) = 10e^{-10^6 t_r} = 10e^{-\ln 20} = 10/e^{\ln 20} = 10/20 = 0.5 \Rightarrow V(t_r) = 0.5 V$$

I-5) Energie emmagasinée dans l'inductance L à l'instant t_r .

$$W(t_r) = \frac{1}{2} L I^2(t_r) = (1/2) \cdot 10^{-3} \cdot 9.5^2 \cdot 10^{-6} \Rightarrow W(t_r) = 45.125 \cdot 10^{-9} J.$$

I-2)



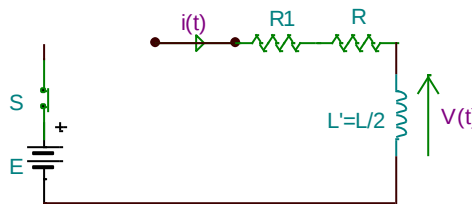
Reprise des 5 questions précédentes

I-2-1) Nouvelle expression et valeur numérique de K.

L'expression de $I(t)$ étant toujours de la forme $I(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, on aura alors $K = E/(R+R1)$ or $R1=R \Rightarrow K = E/2R$; AN : $K = 10/2 = 5\text{mA}$.

I-2-2) Expression et valeur numérique de τ

On peut transformer la figure 1b par la figure ci-dessous lorsqu'un courant circule.



L'équation différentielle régissant ce circuit est donnée par : $E = (R+R1)i + (L/2)\frac{di(t)}{dt}$
 $\Rightarrow \frac{di(t)}{dt} + \frac{2(R+R1)}{L}i = \frac{2E}{L}$; on en déduit ainsi que $\tau = \frac{L}{2(R1+R)} = \frac{L}{4R}$; AN : $\tau = 10^{-3}/4 \cdot 10^3 = 10^{-6}/4$
 $\Rightarrow \tau = 0.25 \mu\text{s}$.

I-2-2) Expression de $V(t)$ à partir de $I(t)$.

$$I(t) = \frac{E}{R1+R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 5 (1 - e^{-4 \cdot 10^6 t}) \text{ mA} \text{ donc } V(t) = L \frac{dI(t)}{dt} = L' \frac{dI(t)}{dt} = L1 \frac{dI2(t)}{dt} \text{ avec}$$

$$I1(t) = I2(t) = I(t)/2. \text{ D'où } I1(t) = 2.5 (1 - e^{-4 \cdot 10^6 t}) \text{ mA.}$$

$$V(t) = 10^{-3} \times 2.5 \times 4 \times 10^6 \times 10^{-3} e^{-4 \cdot 10^6 t} = 10 e^{-4 \cdot 10^6 t} \Rightarrow V(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}} = 10 e^{-4 \cdot 10^6 t} (V)$$

I-2-3) Calcul de τ_r pour lequel $I1(\tau_r) = 9.5\text{mA}/2$.

$$I1(\tau_r) = 5 (1 - e^{-4 \cdot 10^6 \tau_r}) = 4.75 \Rightarrow 1 - 4.75/5 = e^{-4 \cdot 10^6 \tau_r} \Rightarrow 0.05 = e^{-4 \cdot 10^6 \tau_r} \Rightarrow 4 \times 10^6 \tau_r = \ln 20$$

$$\Rightarrow \tau_r = \ln 20 / 4 \times 10^6 = 1/4 \times \ln 20 \times 10^{-6} \text{ d'où } \tau_r = \tau \ln 20 \text{ s.}$$

I 2-4) Tension $V(\tau_r)$ associée.

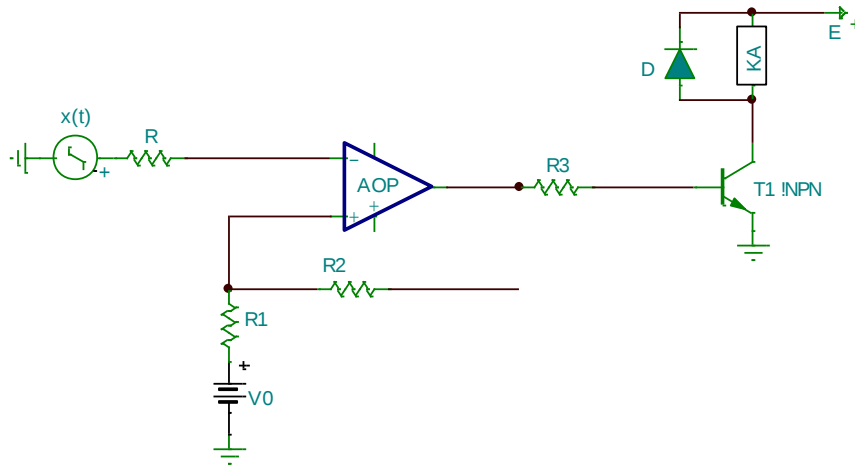
$$V(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}} = 10 e^{-4 \cdot 10^6 \tau_r} = 10 e^{-4 \times 10^6 \times 1/4 \times \ln 20 \times 10^{-6}} = 10 e^{-\ln 20} = 0.5V$$

I-2-5) Energie emmagasinée

$$W(\text{tr}) = \frac{1}{2} L I_1^2(\text{tr}) = \frac{1}{2} \times L_1 I_2^2 = L' \left(\frac{I}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \times 10^{-3} (4.75 \times 10^{-3})^2 = 11.28 \times 10^{-9} \text{J}.$$

EXERCICE2:

$V_{CC}=10\text{V}$; $E=24\text{V}$; $R=R_1=R_2=1\text{K}\Omega$ et $V_0=10\text{Volts}$



II.1) Montrons que le graphe de $y(t)$ en fonction de $x(t)$ correspond à la figure 2b

Par application du théorème de superposition : $V^+ = \frac{y(t)R_1 + R_2V_0}{R_1 + R_2}$ et $V^- = x(t)$

$$V^+ = V^- \Rightarrow x(t) = \frac{y(t)R_1 + R_2V_0}{R_1 + R_2}.$$

- Supposons $x(t)$ très petit, il va croître jusqu'à atteindre le seuil de basculement haut $V_H = X_M$, on aura alors $V_H = X_M = \frac{Y_M R_1 + R_2 V_0}{R_1 + R_2}$ car l'AOP fonctionne en régime de saturation et $y(t) = \pm V_{CC}$.

Le seuil de basculement haut est obtenu pour $y(t) = +V_{CC} = Y_M$.

- Si on suppose maintenant $x(t)$ très grand, il va décroître jusqu'à atteindre le seuil de basculement bas $X_m = V_b$ obtenu pour $y(t) = -V_{CC} = Y_m$.

$$X_m = \frac{Y_m R_1 + R_2 V_0}{R_1 + R_2}; \text{ d'où le cycle d'hystérésis } y = f(x(t)).$$

II.2) Déterminons les expressions et les valeurs numériques de y_m , Y_M , x_m et X_M en fonction des grandeurs connues.

$$+V_{CC} = Y_M = 10\text{V}; -V_{CC} = Y_m = -10\text{V}; X_M = \frac{Y_M R_1 + R_2 V_0}{R_1 + R_2} = 10\text{V}; X_m = \frac{Y_m R_1 + R_2 V_0}{R_1 + R_2} = 0\text{V}.$$

II.3) Trouvons la résistance R_3 qui procure un courant de 12mA pour la saturation du transistor T.

Le transistor est saturé pour $y(t) = Y_M = +10V \Rightarrow Y_M = R_3 I \Rightarrow R_3 = \frac{Y_M}{I} = \frac{10}{12} = 0.833 K\Omega$; $R_3 = 0.84 K\Omega$.

II-4) $L_s = 20mH$ $R_s = 100\Omega$

Déterminons en régime permanent $I_a(\infty)$ lorsque le transistor est saturé.

D'après maille I : $E - R_s I_a(t) - L \frac{dI_a(t)}{dt} = 0 \Rightarrow E = R_s I_a(t) + L \frac{dI_a(t)}{dt}$ (équation différentielle de 1^{er} ordre avec 2nd membre constant) .

La solution générale de cette équation est de la forme $I_a(t) = K (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ avec $K = E/R_s = 0.24A$, la solution particulière est obtenue en régime permanent et

$\tau = L/R_s = \frac{20 \times 10^{-3}}{100} = 0.2ms$, la c^{ste} de temps (confert cours d'équadiff Tle).

D'où $I_a(t) = 0.24 (1 - e^{-5 \times 10^3 t})$ A

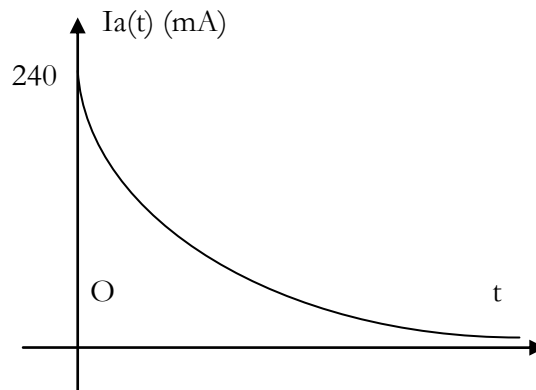
Pour $t \rightarrow \infty$ $I_a(\infty) = 0.24 (1-0) = 0.24A$.

II-5) Analysons et esquissons l'allure du courant $I_a(t)$ à partir de l'instant de blocage du transistor T.

Lorsque le transistor est bloqué, la bobine se décharge à travers la diode de roue libre et nous n'aurons plus qu'à résoudre l'équadiff ci-dessus sans second membre.

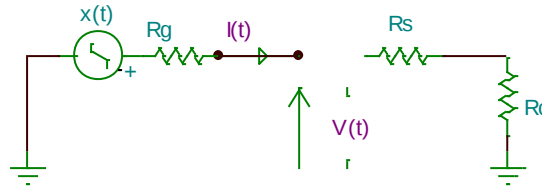
On aura $R_s I_a(t) + L \frac{dI_a(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dI_a(t)}{dt} = \frac{-R_s}{L_s} I_a(t) \Rightarrow I_a(t) = K e^{\frac{-t}{\tau}}$ or à $t=0$, $I_a(0) = I_0 =$

$I_a(\infty) = 0.24A \Rightarrow I_a(t) = 0.24 e^{-5 \times 10^3 t}$ A: qui est une fonction exponentielle décroissante.



EXERCICE 3:

$X(t)=10V$; $R_g=10\Omega$; $R_c=5\Omega$



III-1) Expression de la puissance totale avec R_s variable

$$P=V(t).I(t) \text{ or } V(t)=(R_s+R_c).I(t) \Rightarrow P=(R_s+R_c).I^2(t) \text{ et } I(t)=\frac{x(t)}{R_g+R_c+R_s} \Rightarrow P=\left(\frac{x(t)}{R_g+R_c+R_s}\right)^2(R_s+R_c).$$

$$\Rightarrow P= \frac{100}{(15+R_s)^2} (5 + R_s) \quad \text{ou encore } P=V(t).I(t) \text{ or } V(t)=x(t)- R_g.I(t) \Rightarrow P=$$

$$x(t).I(t) - R_g.I^2(t) \text{ et } I(t)=\frac{x(t)}{R_g+R_c+R_s} \Rightarrow P=10I - 10I^2 = 10.\frac{10}{15+R_s} - 10.\frac{100}{(15+R_s)^2}$$

$$\text{d'où } P= \frac{100}{(15+R_s)^2} (5 + R_s)$$

III-2) Etude et représentation de P lorsque R_s varie de $[0 ; \infty[$

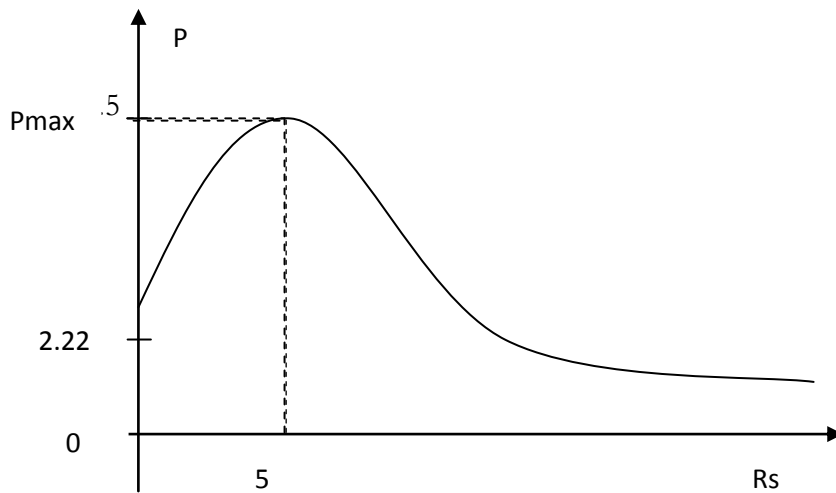
$$\frac{dP}{dR_s} = 100. \frac{R_s^2 \left| \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 30 \end{smallmatrix} \right| + 2R_s \left| \begin{smallmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 225 \end{smallmatrix} \right| + \left| \begin{smallmatrix} 1 & 5 \\ 30 & 225 \end{smallmatrix} \right|}{(15+R_s)^4} = 100. \frac{-R_s^2 - 10R_s + 75}{(15+R_s)^4}$$

$$\frac{dP}{dR_s} = 0 \Rightarrow -R_s^2 - 10R_s + 75 = 0 ; \Delta = 100 - 4(-75) = 400; \sqrt{\Delta} = 20.$$

$$R_s = \frac{10-20}{-2} = 5 \text{ et } R_s = \frac{10+20}{-2} = -15 \text{ d'où } R_s=5\Omega \text{ car } R_s=-15\Omega \text{ n'a aucun sens physique.}$$

➤ Tableau de variation

R_s	0	5	$+\infty$
$\frac{dP}{dR_s}$	+	0	-
P	2.22	2.5	0



III-3) Valeur de R_s pour laquelle p est maximale.

P est $P_{\max}$ pour $R_s=5\Omega$ (extrémum).

III-4) La valeur maximale de cette puissance.

$$P_{R_{\max}}=2.5W$$

III-5) Puissance dissipée par R_c et R_s lorsque $P=P_{\max}$

Lorsque $P=P_{\max}=2.5W$ or $P_{\max}=10I - 10I^2 \Rightarrow 2.5=10I - 10I^2 \Rightarrow 10I - 10I^2 - 2.5 = 0$

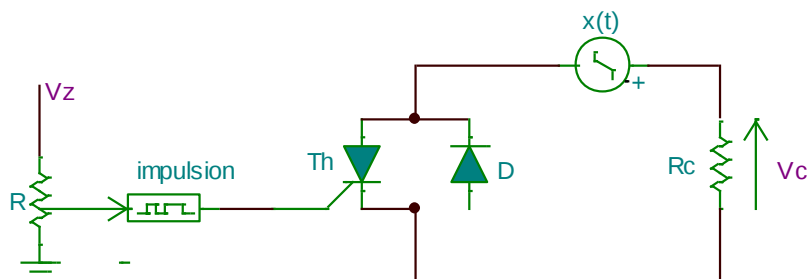
$$\Delta = 100 - 4 \times 25 = 0 \Rightarrow I_1=I_2=I=\frac{10}{2 \times 10} = 0.5A.$$

$P_{R_c}=R_c.I^2=5 \times 0.5^2=1.25W$; $P_{R_s}=5 \times 0.5^2=1.25W$ ou encore $P_{\max} = (R_c+R_s) I^2$ or $R_s=R_c = 5 \Omega$

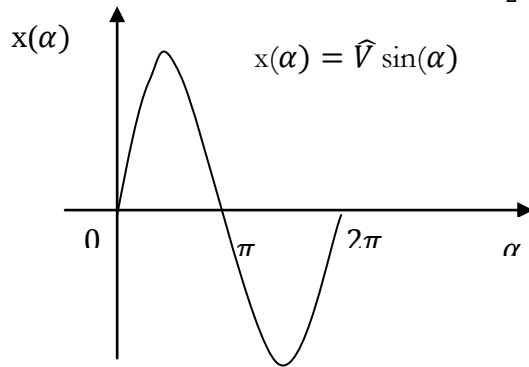
$$\Rightarrow P_{\max}=10I^2 \Rightarrow I_{\max} = \sqrt{\frac{P_{\max}}{10}} = \sqrt{\frac{2.5}{10}} = 0.5A \text{ et } P_{R_c}=P_{R_s}=\frac{P_{\max}}{2} = 1.25W.$$

EXERCICE 4:

$X(t) = 10 \sin (100\pi t)$.



IV-1) Etude et représentation de l'allure V_c pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.



Lorsque $0 < \alpha < \pi$; D off et Th susceptible de s'amorcer.

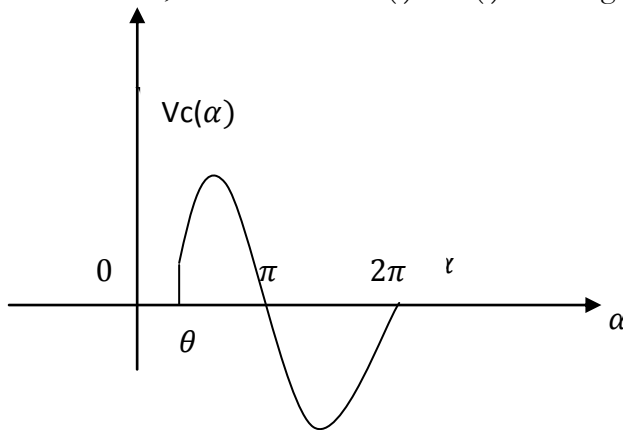
Pour $0 < \alpha < \theta$, Th ne reçoit aucune impulsion de gachette et ne conduit pas. Après avoir dessinée la structure dans cet intervalle, on aura : $V_c=0$ et $i=0$.

Pour $\theta < \alpha < \pi$, Th on et D off car à

$\theta = \alpha$, le thyristor reçoit une impulsion de gachette et conduit. On aura $x(t) = V_c$.

À $\alpha = \pi$, $V(\alpha)$ s'inverse et

Pour $\pi < \alpha < 2\pi$, D on et Th off $x(t) = V(t)$ d'où le graphe ci-dessous



IV-2) Valeur moyenne de V_c (V_{cm}) associée à R_c

$$V_{cmoy} = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\theta}^{\pi} \hat{V} \sin(\alpha) d\alpha + \int_{\pi}^{2\pi} -\hat{V} \sin(\alpha) d\alpha \right]$$

$$V_{cmoy} = \frac{\hat{V}}{2\pi} ([-\cos\alpha]_{\theta}^{\pi} - [-\cos\alpha]_{\pi}^{2\pi})$$

$$V_{cmoy} = \frac{\hat{V}}{2\pi} (1 + \cos\theta - (-1 - 1))$$

$$V_{cmoy} = \frac{\hat{V}}{2\pi} (3 + \cos\theta)$$

Où vous décomposez en 2 signaux, un redressé en simple alternance commandé et l'autre non commandé. On aura :

$$V_{cmoy} = \frac{\widehat{V}}{2\pi}(1 + \cos\theta) - \left(-\frac{\widehat{V}}{\pi}\right) = \frac{\widehat{V}}{2\pi}(3 + \cos\theta)$$

IV-3) Expression de la tension efficace $V_{ce}(\theta)$ associée à Rc

$$\begin{aligned} V_{ce}(\theta)^2 &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\theta}^{\pi} (\widehat{V} \sin(\alpha))^2 d\alpha + \int_{\pi}^{2\pi} (\widehat{V} \sin(\alpha))^2 d\alpha \right] \\ &= \frac{\widehat{V}^2}{2\pi} \left[\int_{\theta}^{\pi} (\sin(\alpha))^2 d\alpha + \int_{\pi}^{2\pi} (\sin(\alpha))^2 d\alpha \right] \end{aligned}$$

$$V_{ce}(\theta) = \frac{\widehat{V}}{2} \sqrt{1 - \frac{\theta}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \sin 2\theta} + \frac{\widehat{V}}{2}$$

$$V_{ce}(\theta) = \frac{\widehat{V}}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\theta}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \sin 2\theta} \right)$$

IV-4) Valeur numérique pour $\theta = 45^\circ$

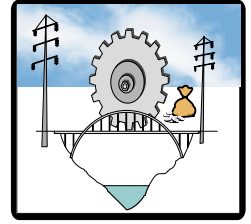
$$V_{ce}(45^\circ) = \frac{\widehat{V}}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\frac{\pi}{4}}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \sin 2\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{10}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\frac{\pi}{4}}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \sin 2\frac{\pi}{4}} \right) = 9.76V$$



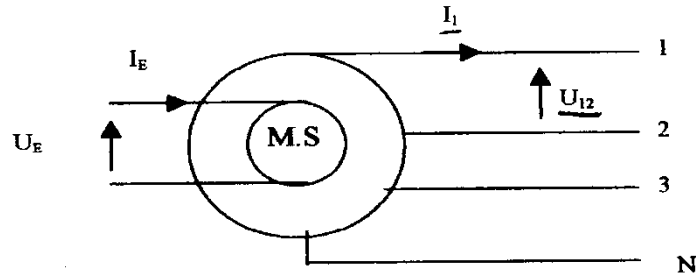
UNIVERSITE DE DOUALA. CONCOURS
D'ENTREE A L'ENSET

EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM. Juillet 2008

Correction ENSET 2008



PARTIE A :



1-) 16KVA ; 230V/400V ; 50Hz

1-1) Mode de couplage des enroulements

Le seul mode de couplage des enroulements est le couplage étoile car chaque enroulement de la machine supporte une tension simple 230V.

1-2)

- Calcul de la vitesse n_s de l'alternateur.

$$K = n_s / n_H \Rightarrow n_s / n_H = 2.5 \Rightarrow n_s = 2.5 n_H \Rightarrow n_s = 2.5 \times 400 = 1000 \text{ d'où } n_s = 1000 \text{ trs/min}$$

- Nombre de paires de pôles

$$n_s = 60f/p \Rightarrow p = 60f/n_s \Rightarrow p = 60 \times 50 / 1000 = 3 \Rightarrow p = 3$$

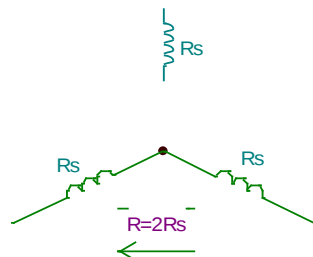
1-3) Intensité efficace nominale I_N du courant dans un enroulement du stator

$$S = UI_N \sqrt{3} \Rightarrow I_N = S / U \sqrt{3} \text{ AN: } I_N = 16 \cdot 10^3 / 400 \sqrt{3} \Rightarrow I_N = 23.09 \text{ A}$$

2-) $R = 0.60 \Omega$; $n = 1000 \text{ trs/min}$

2-1) Calcul de la résistance R_s d'un enroulement du stator

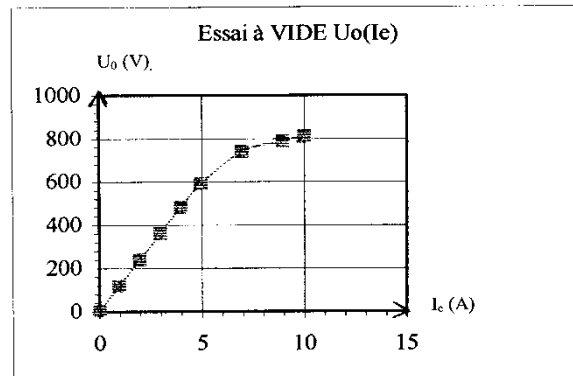
Stator en étoile :



$$R_s = R / 2 = 0.6 / 2 \Rightarrow R_s = 0.30 \Omega.$$

2-2)

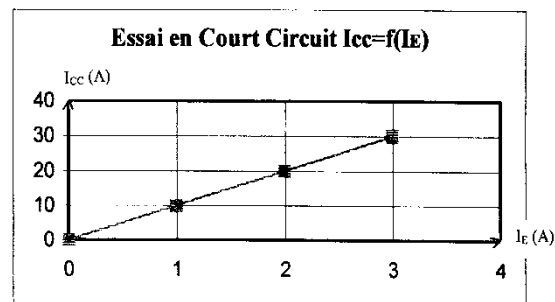
- Précisons le coefficient de proportionnalité entre U_o et I_E pour la partie linéaire de la caractéristique à vide.



La partie linéaire de la caractéristique est une droite d'expression $U_o = a I_E$ (a =pente)

$$a = \frac{\Delta U_o}{\Delta I_E} = \frac{600-0}{5-0} = 120 \Rightarrow U_o = 120 I_E.$$

- Relation entre I_{cc} et I_E



$$I_{cc} = a I_E \text{ or } a = \frac{\Delta I_{cc}}{\Delta I_E} = \frac{30-0}{3-0} = 10 \Rightarrow I_{cc} = 10 I_E$$

- Calcul de l'impédance synchrone Z_s du modèle équivalent d'une phase du stator

$$Z_s = \frac{V_o}{I_{cc}} = \frac{120 I_E}{\sqrt{3} 10 I_E} = 6,928 \Rightarrow Z_s = 6,928 \Omega$$

- Réactance synchrone X_s

$$Z_s^2 = R_s^2 + X_s^2 \Rightarrow X_s = \sqrt{Z_s^2 - R_s^2} \Rightarrow X_s = \sqrt{6,928^2 - 0,3^2} = 6,91$$

$$X_s \approx Z_s = 6,92 \Omega$$

3.) 400V/690V, 50Hz; $P_a = 12,0 \text{ KW}$; $\cos \varphi = 0,75$ (inductif)

3-1) Puissance réactive consommée par cette usine

$$Q = P \cdot \tan \varphi \text{ or } \tan \varphi = 0,88 \Rightarrow Q = 10,58 \text{ KVAR}$$

3-2) Puissance apparente de l'usine

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{12^2 + 10,58^2} = 16 \text{ KVA}$$

3-3) Intensité du courant en ligne

$$S = U I \sqrt{3} \Rightarrow I = S / U \sqrt{3} \quad \text{AN: } I = 16.10^3 / 690 \sqrt{3} \Rightarrow I_N = 13.38 \text{ A}$$

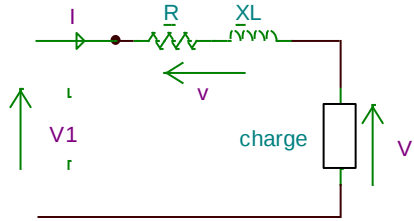
3-4) Capacité du condensateur à placer pour ramener le facteur de puissance à 0.95.

$$Q_c = P (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2) = U^2 C \omega \Rightarrow C = \frac{P (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2)}{U^2 \omega} \quad \text{AN: } C = \frac{12 (\tan 41.4^\circ - \tan 18.19^\circ)}{690^2 \cdot 100\pi} 10^3$$

$$C = 44.33 \mu\text{F}$$

3-5) $Z = 0.2 + 0.3j$

Détermination de la tension réelle à l'entrée de l'installation



$$\underline{\Delta v} = \underline{Z} I = 2.676 + 4.014j \Rightarrow \Delta v = |\underline{\Delta v}| = 4.824 \text{ V}$$

$$V_1 = V + \Delta v = 400 + 4.824 \Rightarrow V_1 = 404.824 \text{ V}$$

$$U_1 = \sqrt{3} V_1 = 701.176 \text{ V}$$

Partie B :

I- Etude du transformateur

230VA ; 230/25.3V ; 50Hz.

1-1) Calcul des intensités I_{1N} et I_{2N} des courants nominaux primaires et secondaires.

$$S = U_1 I_{1N} = U_2 I_{2N} \text{ d'où } S = U_1 I_{1N} \Rightarrow I_{1N} = S / U_1 = 230 / 230 = 1 \Rightarrow I_{1N} = 1 \text{ A}$$

$$S = U_2 I_{2N} \Rightarrow I_{2N} = S / U_2 = 230 / 25.3 = 9.09 \Rightarrow I_{2N} = 9.09 \text{ A.}$$

1-2) Schéma équivalent à l'essai à vide

$$\text{1-3) } U_{2V} = 4.44 N_2 f B_{\max} S$$

1-3-1) Valeur du champ magnétique maximale dans le fer

$$B_{\max} = \frac{U_{2V}}{4.44 f N_2 S} \quad \text{AN: } B_{\max} = \frac{25.3}{4.44 \times 50 \times 150 \times 10 \times 10^{-4}} \Rightarrow B_{\max} = 0.75 \text{ T}$$

1-3-2) Démonstration de l'expression rappelée en 1-3-1).

$$\text{Posons } \phi = \hat{\phi} \sin \omega t ; e = \frac{d\phi}{dt} = \hat{\phi} \omega \cos \omega t \text{ or } \hat{\phi} = N \hat{B} S \Rightarrow e = N \hat{B} S \omega \cos \omega t = N \hat{B} S 2\pi f \cos \omega t$$

$$e \text{ est } e_{\max} \text{ ssi } \cos \omega t = 1 \text{ et } e_{\max} = \sqrt{2} e \Rightarrow \sqrt{2} e = N \hat{B} S 2\pi f \Rightarrow e = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} N \cdot \hat{B} \cdot S \cdot f = 4.44$$

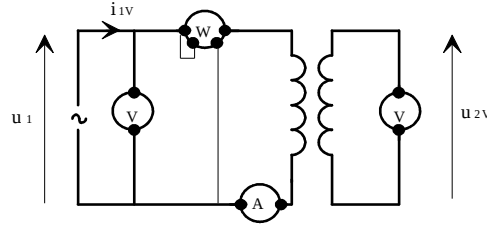
$N \hat{B} S f$, qui est applicable au primaire et au secondaire.

$$\text{D'où } U_{1V} = 4.44 N_1 f B_{\max} S \quad (\text{primaire}) \text{ et } U_{2V} = 4.44 N_2 f B_{\max} S \quad (\text{secondaire})$$

1-4) Calcul de la résistance R_1

$$U = R_1 I \Rightarrow R_1 = U/I = 6/1 = 6 \Rightarrow \mathbf{R_1 = 6\Omega}$$

1-5) A l'aide de l'essai à vide



1-5-1) Pertes joules à vide P_{jv}

$$P_{jv} = R I_{10}^2 \Rightarrow P_{jv} = 6 \times 0.11^2 = 0.0726 \text{ W}$$

1-5-2) Pertes dans le fer

$$P_f = P_{1v} - P_{jv} = 6.9 - 0.0726 \Rightarrow P_{fer} = 6.82 \text{ W}$$

1-5-3) Facteur de puissance à vide.

$$P_{1v} = U_{1v} \cdot I_{1v} \cdot \cos \varphi_{1v} \Rightarrow \cos \varphi_{1v} = P_{1v} / U_{1v} \cdot I_{1v} = 6.9 / 230 \times 0.11 = 0.27 \Rightarrow \mathbf{\cos \varphi_{1v} = 0.27}$$

1-6) $I_{2cc} = I_{2N} = 9.1 \text{ A}$

1-6-1) Résistance des enroulements ramenés au secondaire.

$$P_{cu} = R_s I_{2cc}^2 \text{ or } P_{cu} = P_{1cc} \Rightarrow P_{1cc} = R_s I_{2cc}^2 \Rightarrow R_s = P_{1cc} / I_{2cc}^2 \text{ AN: } R_s = 11 / 9.1^2 = 0.132$$

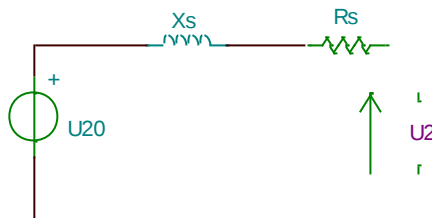
$$\mathbf{R_s = 0.132\Omega}$$

1-6-2) Réactances X_s des enroulements ramenés au secondaire

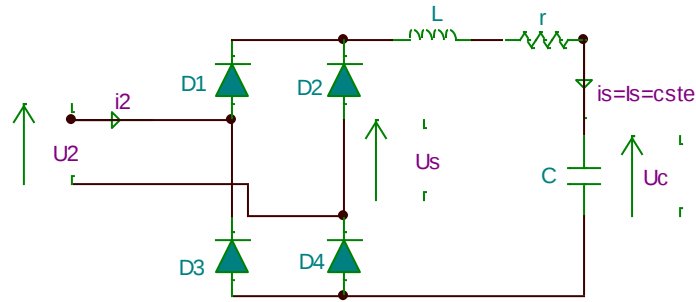
$$Z_s^2 = R_s^2 + X_s^2 \Rightarrow X_s = \sqrt{Z_s^2 - R_s^2} \Rightarrow \text{or } Z_s = \frac{m U_{1cc}}{I_{2cc}}$$

$$\Rightarrow X_s = \sqrt{\left(\frac{25.3}{\frac{230}{9.1} \times 20}\right)^2 - 0.132^2} = 0.202 \Omega \Rightarrow \mathbf{X_s = 0.202\Omega}$$

1-7) Modèle équivalent du transformateur vu du secondaire

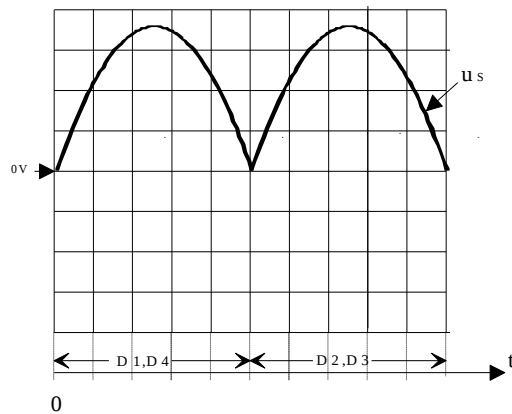


2-) Etude du redresseur et du filtre



$$R=0.50 ; L \rightarrow \infty ; i_s = I_s = \text{cste} ; U_c = 18.5 \text{ V} ; I_s = 8.2 \text{ A}$$

2-1) Représentation de la tension U_s en indiquant les diodes conductrices



2-2) Calcul de la fréquence de la tension de sortie U_s : base de temps 2ms/div

$$F = 1/T \text{ or } T = 5 \times 2 = 10 \text{ ms} \Rightarrow f = 1/10 \times 10^{-3} = 100 \text{ Hz}$$

2-3)

2-3-1) Relation liant $\overline{U_s}$ à U_c , I_s et r

$$\overline{U_s} = \frac{2\sqrt{2} U_2}{\pi} \quad \text{et} \quad \overline{U_s} = \overline{U_c} + \overline{U_l} + \overline{U_r} \text{ or } \overline{U_l} = 0 \text{ car } L \frac{dI(t)}{dt} = 0 \text{ en régime moyen}$$

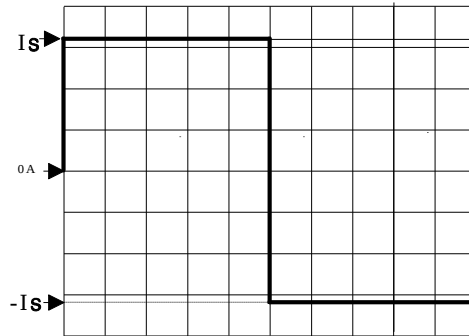
$$\Rightarrow \overline{U_s} = \overline{U_c} + \overline{U_r} = \overline{U_c} + r I_s.$$

2-3-2) Calcul de $\overline{U_s}$ et déduction de U_2 .

$$\Rightarrow \overline{U_s} = \overline{U_c} + r I_s = 18.5 + 0.5 \times 8.2 = 22.6 \text{ V} \quad \text{et} \quad \overline{U_s} = \frac{2\sqrt{2} U_2}{\pi} \Rightarrow U_2 = \pi \frac{\overline{U_s}}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{AN : } U_2 = \pi \frac{22.6}{2\sqrt{2}} = 25.10 \Rightarrow U_2 = 25.1 \text{ V}.$$

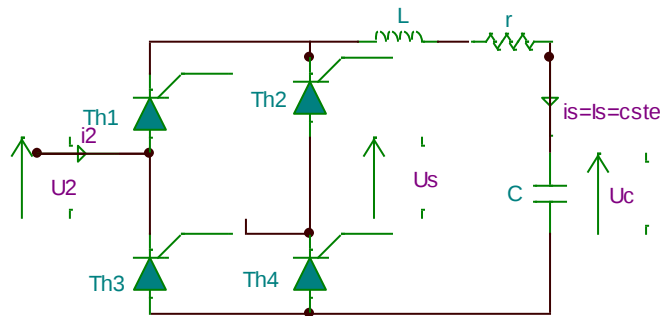
2-4) Représentations de l'intensité i_2 qui transite une phase du secondaire et calcul de sa valeur efficace.



$$\text{Valeur efficace: } I_{2\text{eff}}^2 = [T/2 \cdot (I_s)^2 + T/2 \cdot (-I_s)^2] / T \Rightarrow I_{2\text{eff}}^2 = (I_s)^2 / 2 + (I_s)^2 / 2 = (I_s)^2$$

$$\Rightarrow I_{2\text{eff}} = I_s = 8.2 \text{ A}$$

2-5) Pont “ tout thyristors”

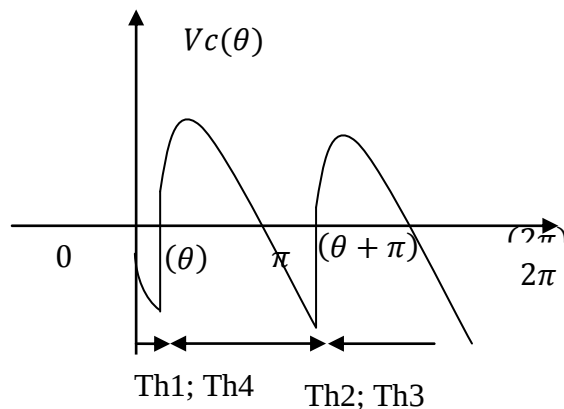


Déterminons l'angle d'amorçage des thyristors pouvant garantir la même tension $\overline{U_s}$ à U_{2v}

$$\text{On sait que } \overline{U_s} = \frac{2\sqrt{2} U_2}{\pi} \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \overline{U_s} \pi \frac{1}{2\sqrt{2} U_{2v}} \text{ car } U_2 = U_{2v}$$

$$\text{D'où } \theta = \cos^{-1} \left(\overline{U_s} \pi \frac{1}{2\sqrt{2} U_{2v}} \right) \text{ AN : } \theta = \cos^{-1} \left(22.6 \pi \frac{1}{2\sqrt{2} \times 25.3} \right) \Rightarrow \theta = 7.16^\circ$$

2-6) Représentation de la tension U_s en indiquant les thyristors conducteurs



3-) Etude du chargeur de batteries**3-1) Type de hacheur utilise**

Le hacheur utilisé est un hacheur série ou dévolteur. Car elle est en série avec la batterie.

3-2) Régime de fonctionnement de L'A.O.P N°2 et déduction de V_4 en fonction de $V_d = V_3 - V_r$

L'A.O.P N°2 fonctionne en régime de saturation.

Valeurs de V_4 .

- $V_d = V_3 - V_r$ si $V_d > 0 \Rightarrow V_3 > V_r$ alors $V_4 = +V_{sat} = +10V$.
- si $V_d < 0 \Rightarrow V_3 < V_r$ alors $V_4 = -V_{sat} = 0V$

3-3) $V_3 = 0.8V$, tracé de la tension de commande V_4

Pour $V_3 > V_r$ alors $V_4 = 10V$.

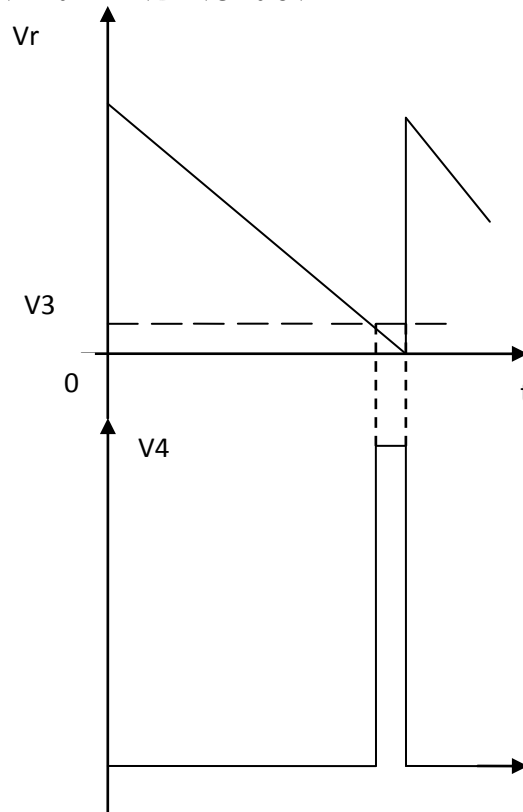
Pour $V_3 < V_r$ alors $V_4 = 0V$ d'où le graphe

- valeur de V_1 lorsque K est fermé

Si K est fermé, alors $V_1 = 0V$

- valeur de V_2

$V_3 = V_2 - V_1$ or $V_1 = 0 \Rightarrow V_2 = V_3 = 0.8V$



- $r = 1\Omega$, calcul de I_B du courant dans la batterie.

V_2 est directement appliquée aux bornes de r d'où

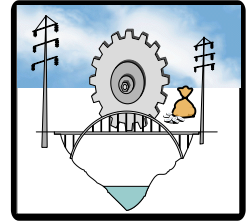
$$I_B = \frac{V_2}{r} \text{ AN: } I_B = \frac{0.8}{1} = 0.8A \Rightarrow I_B = 0.8A .$$



**UNIVERSITE DE DOUALA. CONCOURS
D'ENTREE A L'ENSET**

EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM. Mai 2007

Correction ENSET 2007



I- Installation électrique (transport d'énergie)

- a) Calcul du nombre de supports entre Sangmélina et le centre de distribution pour une flèche $f = 1\text{m}$

On sait que $f = \frac{Pa^2}{8T} \Rightarrow a^2 = \frac{8fT}{P}$

$\Rightarrow a = 2\sqrt{\frac{2fT}{P}}$ si nous désignons par NI le nombre d'intervalle on a :

$$NI = \frac{d}{a} \Rightarrow NI = \frac{d_0}{a} \sqrt{\frac{P}{2fT}}$$

$$NI = \frac{120}{2} \times 10^3 \sqrt{\frac{1}{2 \times 1 \times 1250}} = 1200$$

- ❖ Si les supports aux deux extrêmes sont comptés alors

$$N_s = NI + 1 = 1200 + 1 = 1201 \text{ supports}$$

- ❖ Si un seul est compté alors

$$N_s = NI = 1200 \text{ supports}$$

- ❖ Si aucun support aux extrémités n'est compté alors

$$N_s = NI - 1 = 1200 - 1 = 1199 \text{ supports}$$

- b) $U = 30\text{kV}$ $P = 4,56\text{MW}$ $\cos \varphi = 0,8$

Calculons le courant en ligne (à l'arrivée)

$$P_a = U_a I_a \sqrt{3} \cos \varphi \quad \text{or } U = V\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$P = 3 V_a I_a \sqrt{3} \cos \varphi \Rightarrow I_a = \frac{P_a}{3 V_a \cos \varphi}$$

$$AN : I_a = \frac{4,5 \times 10^6}{3 \frac{30}{\sqrt{3}} 10^3 0,8} = 108,253\text{A}$$

$$I_a = 108,253\text{A}$$

- c) $\Gamma = 0,01\Omega/\text{km}$; $lw = 0,2\Omega/\text{km}$; $c = 10\text{.....}$ (pour chaque conducteur)

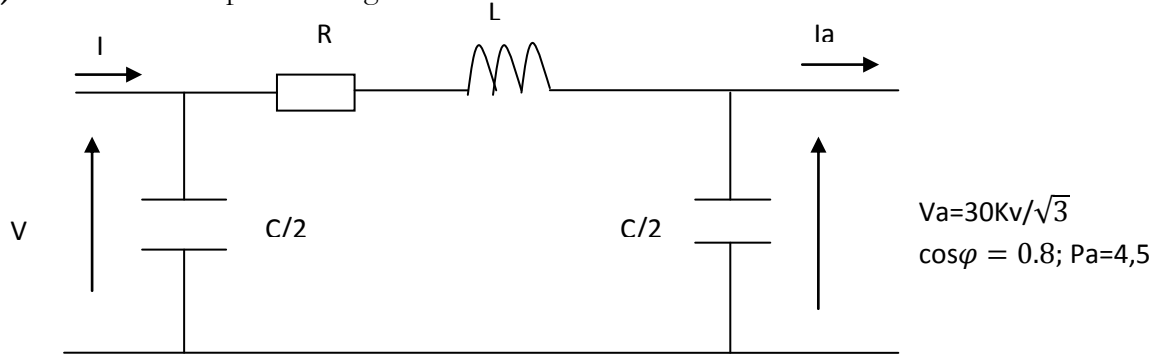
Déterminons pour chaque phase la réactance, la capacité et la réactance inductive.

$$r_t = r \times d \Rightarrow r_t = 0,01 \times 120 = 1,2\Omega$$

$$lw_t = lw \times d \Rightarrow lw_t = 0,2 \times 120 = 24\Omega$$

$$C_t = d \times c \Rightarrow C_t = 10 \times 120 = 1200\text{nF} = 1,2\mu\text{F}$$

d) Calculons au départ de la ligne



d-1) La tension composée Ud

Évaluation des puissances

❖ Entre A et A'

$$P_a = 4,5\text{MW} \quad Q = P \tan \varphi \approx 3,375\text{MVrs}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 5,625\text{MVAS} \quad S = 5,625\text{MVAS}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_a = 4,5\text{MW} \\ Q \approx 3,375\text{MVrs} \\ S = 5,625\text{MVAS} \end{array} \right.$$

❖ Entre B et B'

La puissance active $P_a = 4,5\text{MW}$ ne change pas

$$Q_{BB'} = Q_{AA'} - Q_{42} \text{ or } Q_{42} = 3 \left(\frac{U_a}{\sqrt{3}} \right)^2 c/2 \omega \text{ AN: } Q_{C/2} = (30 \times 10^3)^2 \cdot 0,6 \times 10^{-6} \times 2\pi \times 50$$

$$= 30^2 \times 0,6 \times 100\pi = 0,508\text{MVARs}$$

$$Q_{C/2} = 0,169\text{MVARs}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_a = 4,5\text{MV} \\ Q_{BB'} = 3,205\text{MVARs} \\ S_{BB'} = 5,524\text{MVAS} \end{array} \right.$$

❖ Entre C et B

$$S_{BB'} = U_a I'_a \sqrt{3} \Rightarrow I'_a = \frac{S_{BB'}}{U_a \sqrt{3}}$$

$$I'_a = \frac{5,542 \times 10^3}{3 \times \sqrt{3}} = 106,30\text{A} \quad I'_a = 106,30\text{A}$$

$$P_j = 3R I_a'^2 = 3 \times 1,2 \times 106,3^2 = 0,0405\text{Mw}$$

$$Q = 3X_L I^2 = 3 \times 24 \times 1063^2 = 0,813\text{MVARs}$$

❖ Entre C et C'

$$P_a' = P_a + P_j = 4,5 + 0,0405$$

$$P_a' = 4,45\text{Mw}$$

$$Q_{CC'} = Q_{BB'} + Q_L = 3,205 + 0,813 = 4,018 \text{MVAR}$$

$$S_{CC'} = 6,062 \text{MVAS}$$

$$\text{On peut constater que } S_{CC'} = U_d I_a' \sqrt{3}$$

$$U_d = \frac{S_{CC'}}{I_a' \sqrt{3}} = \frac{6,062 \times 10^6}{106,3 \sqrt{3}} = 32,92 \text{kV}$$

$$\begin{cases} S_{CC'} = 6,062 \text{MVAS} \\ P_a' = 4,45 \text{Mw} \\ Q_{CC'} = 4,018 \text{MVAR} \end{cases}$$

d-2) Puissance active au départ de la ligne

$$P_d = P_a + P_j = 4,54 \text{Mw}$$

d-3) Courant Id et facteur de puissance

$$Q_{C/2} = 3V_d^2 \frac{C}{2} \omega = U_d^2 \frac{C}{2} \omega$$

$$Q_{C/2} = (3 \times 92)^2 \times 10^{-6} \times 0,6 \times 10^{-6} \times 100\pi$$

$$Q_{C/2} = 0,204 \text{MVAR}$$

$$Q_{C/2} = 4,018 - 0,204 = 3,814 \text{MVAR}$$

$$S_d = 5,929 \text{MVAS}$$

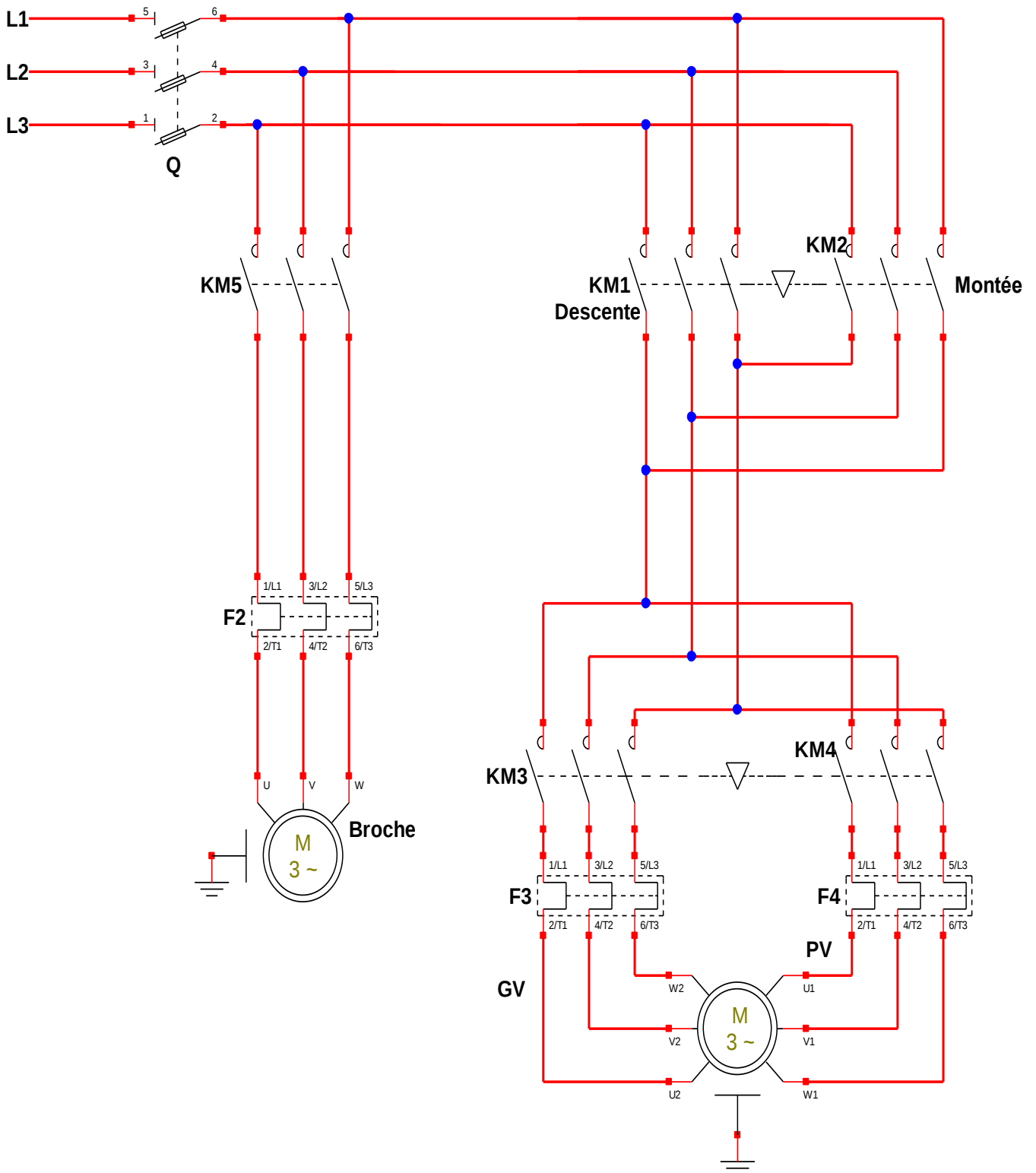
$$S_d = U_d I_d \sqrt{3} \Rightarrow I_d = \frac{S_d}{U_d \sqrt{3}} = \frac{5,929 \times 10^3}{32,92 \times 10^3 \sqrt{3}}$$

$$I_d = 104 \text{A}$$

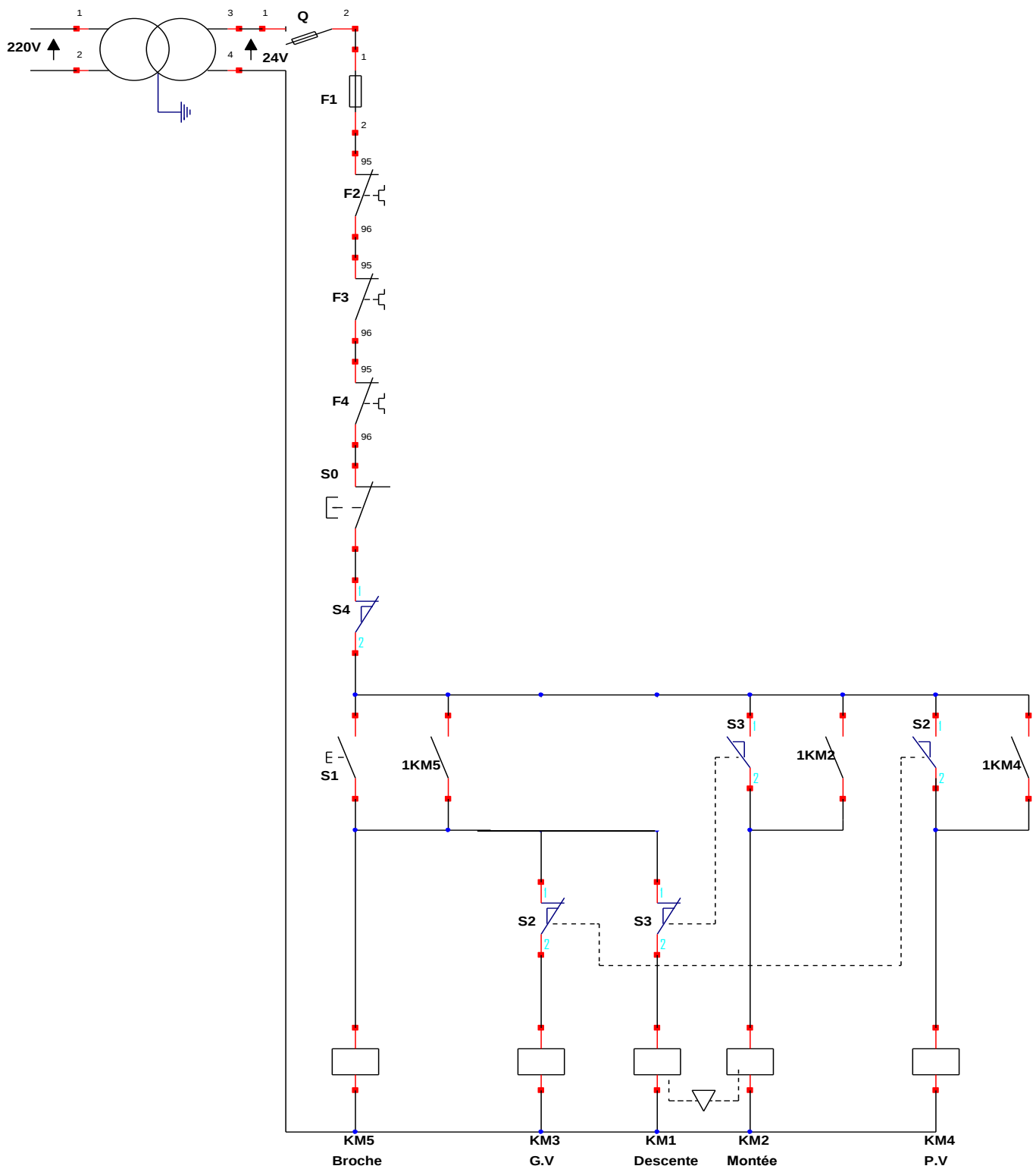
$$\diamond \cos \varphi = \frac{P_a}{S_d} = \frac{4,54}{5,929} = 0,76 \Rightarrow \cos \varphi = 0,76.$$

II- Commande des machines (perceuse automatique)

a) schéma du circuit de puissance



b) Schéma du circuit de commande



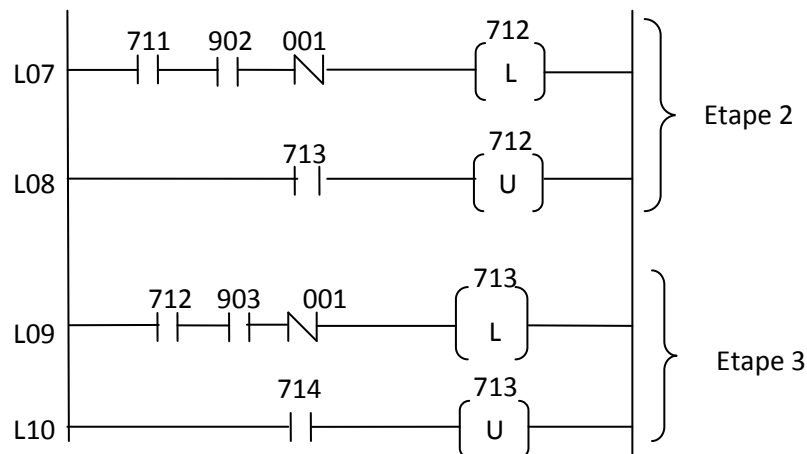
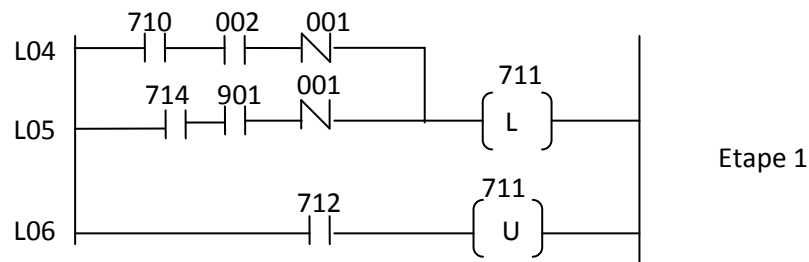
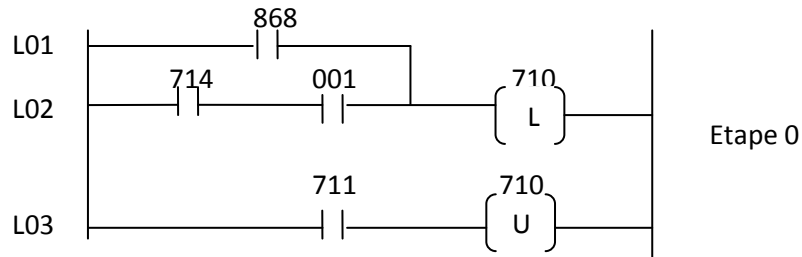
III- PROJET (FEUX DE SIGNALISATION ROUTIERE)

Proposition d'un programme permettant de commander les feux

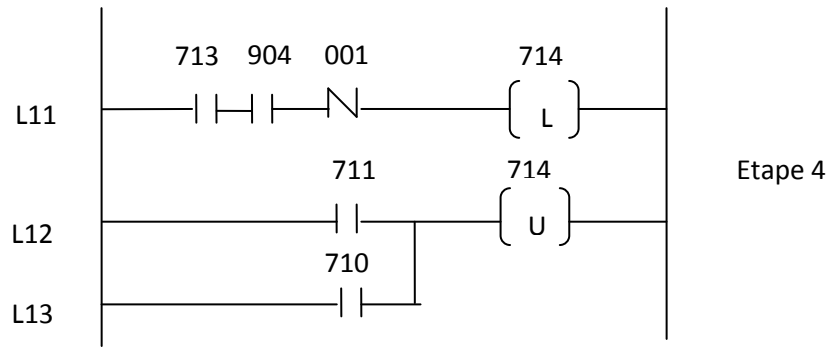
(Langage **SLC100 d'ALLEN BRADLEY**)

❖ Traitement séquentiel

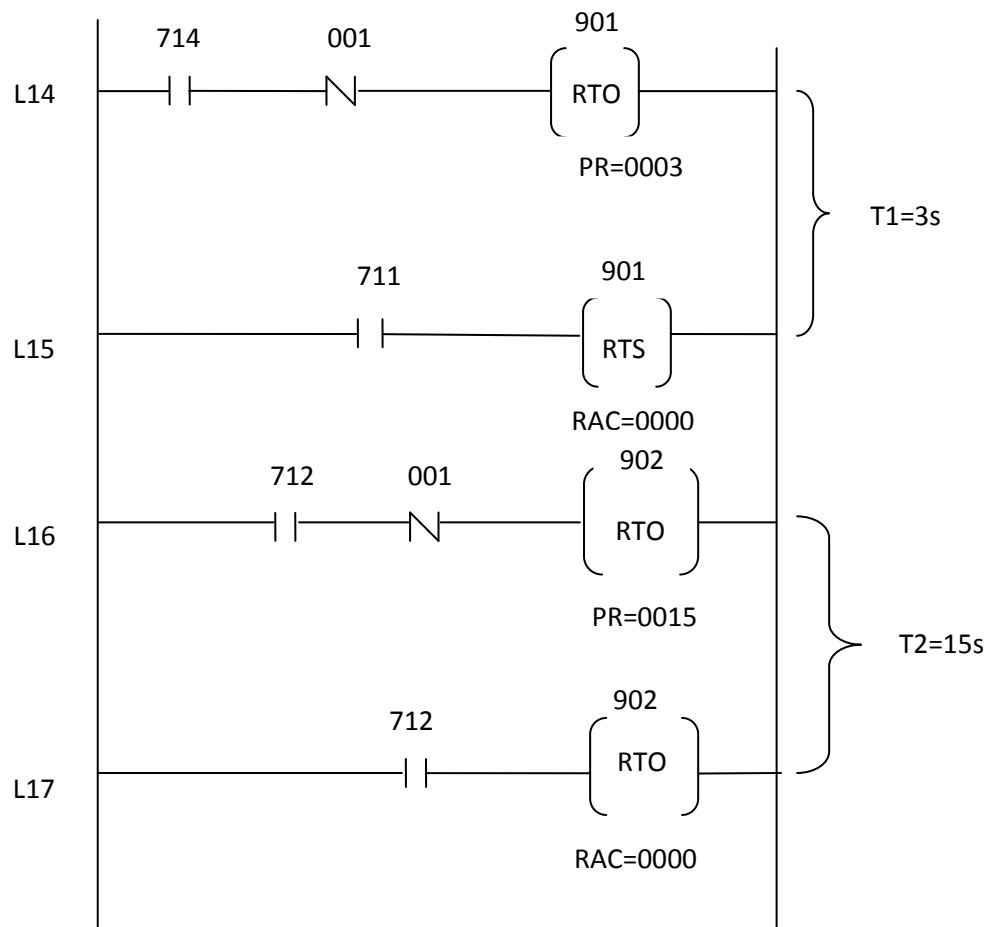
➤ Programmation des étapes du GRAFCET

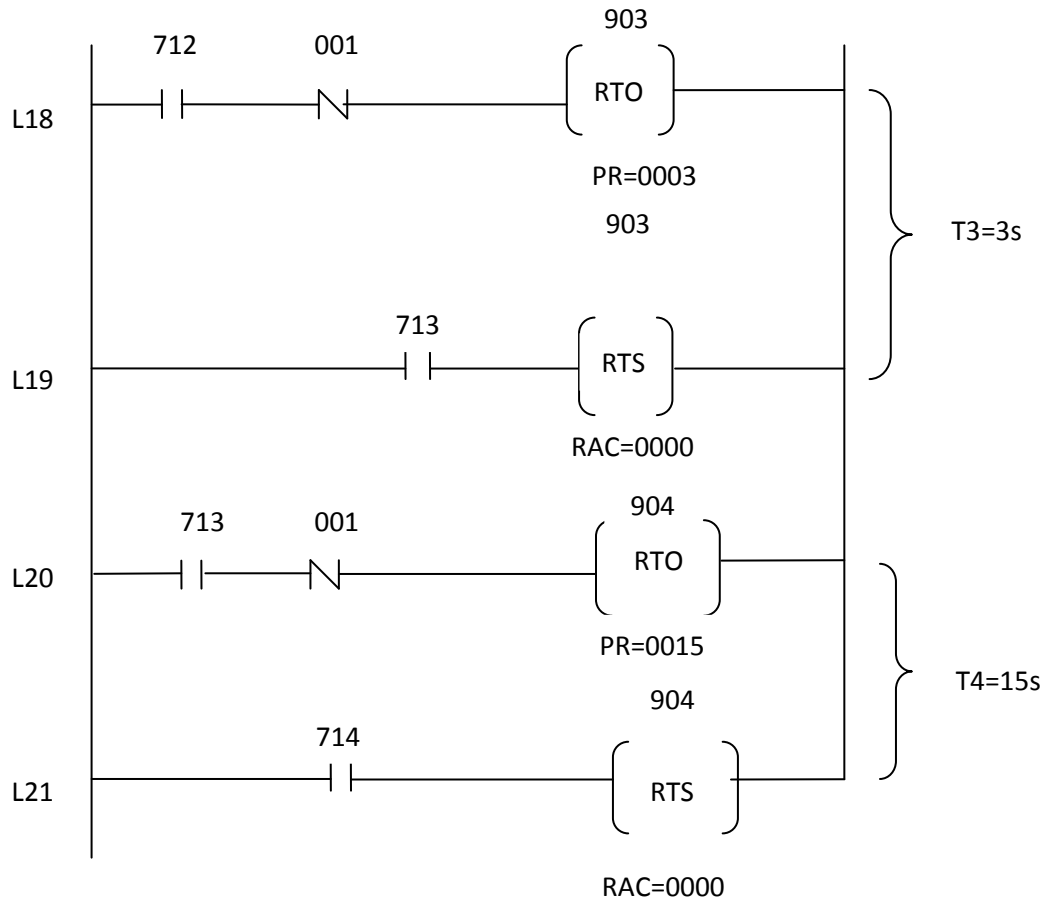


NB : $\left\{ \begin{array}{l} \text{L} : \text{verrouillage sortie (LATCH)} \\ \text{U} : \text{déverrouillage sortie (UNLATCH)} \end{array} \right.$



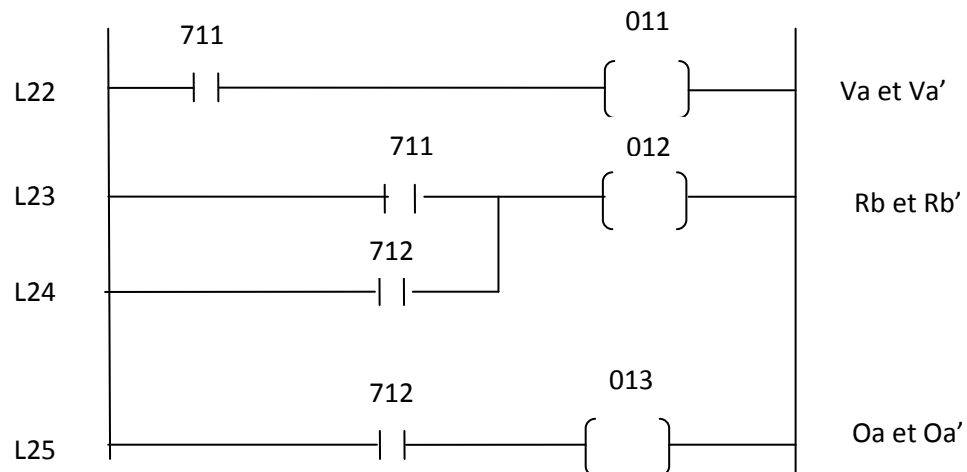
❖ Programmation des temporisateurs

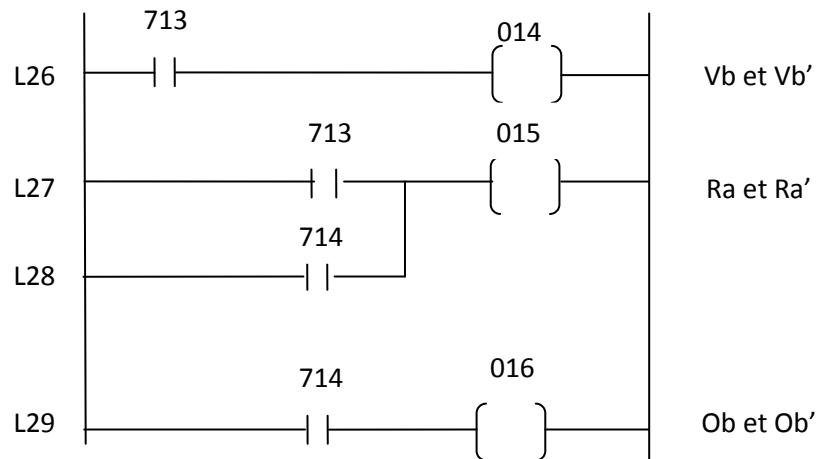




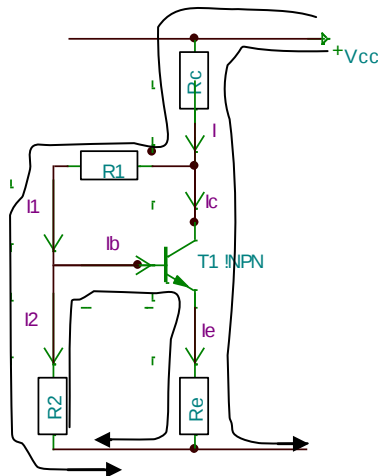
RTO : temporisation mémorisée au travail

❖ Programmation postérieur (sorties)





IV- ELECTRONIQUE (TRANSISTOR)



1- Calcul des courants I_1 ; I_2 ; I_b ; I_c et I_e

D'après la loi des nœuds en A on a :

$$I_1 = I_2 + I_b \Rightarrow I_b = I_1 - I_2 \quad (1)$$

Il sera question de chercher $I_1 = f(I_b)$ et $I_2 = f(I_b)$ puis remplacer dans 1 et trouver l'expression de I_b

D'après maille I : $R_2 I_2 = V_{be} + R_e I_e$ or $I_e = I_b + I_c$ et $I_c = \beta I_b \Rightarrow I_e = I_b(1 + \beta)$

$$\Rightarrow R_2 I_2 = V_{be} + R_e I_b(1 + \beta) \text{ D'où } I_2 = \frac{V_{be} + R_e I_b(1 + \beta)}{R_2} \quad (2)$$

D'après maille II

$$V_{CC} - R_C I - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \Rightarrow V_{CC} - R_C I - R_1 I_1 - R_e I_b(1 + \beta) - V_{be} = 0$$

Or $I = I_1 + I_c$

$$\Rightarrow V_{CC} - R_C I_1 - R_C I_c - R_1 I_1 - R_e I_b(1 + \beta) - V_{be} = 0$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{V_{CC} - R_C I_c - V_{be} - R_e I_b(1 + \beta)}{R_1 + R_C}$$

$$\text{Or } I_c = \beta I_b \Rightarrow I_1 = \frac{V_{CC} - \beta R_C I_b - V_{be} - R_e I_b(1 + \beta)}{R_1 + R_C} \quad (3)$$

$$2 \text{ et } 3 \text{ dans } 1 \quad I_b = \frac{V_{CC} - V_{be} - I_b(\beta R_C + R_e(1+\beta))}{R_1 + R_C} - \frac{V_{be} + R_e I_b(1+\beta)}{R_2}$$

$$I_b \left[1 + \frac{\beta R_C + R_e(1+\beta)}{R_1 + R_C} + \frac{R_e(1+\beta)}{R_2} \right] = \frac{V_{CC} - V_{be}}{R_1 + R_C} - \frac{V_{be}}{R_2}$$

$$I_b \left[1 + \frac{\beta R_C}{R_1 + R_C} + R_e(1+\beta) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_C} \right) \right] = \frac{V_{CC}}{R_1 + R_C} - V_{be} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_C} \right)$$

$$\Rightarrow I_b = \frac{\frac{V_{CC}}{R_1 + R_C} - V_{be} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_C} \right)}{1 + \frac{\beta R_C}{R_1 + R_C} + R_e(1+\beta) \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_C} \right)}$$

$$\text{AN: } I_b = \frac{\frac{12}{42,9} - 0,7 \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{42,9} \right)}{1 + \frac{50 \times 3,9}{42,9} + 51 \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{42,9} \right)}$$

$$\diamond I_b = 0,0234 \text{mA} \simeq 23,4 \mu\text{A}$$

$$\diamond I_b = \beta I_b = 0,0234 \times 50 \simeq 1,171 \text{mA}$$

$$\diamond I_2 = \frac{V_{be} + R_e I_b(1+\beta)}{R_2} = \frac{0,7 + 1 \times 0,234 \times 51}{18}$$

$$I_2 = 0,105 \text{mA}$$

$$\diamond I_1 = I_b + I_2 = 0,105 + 0,0234$$

$$I_1 = 0,128 \text{mA}$$

$$\diamond I = I_1 + I_c = 1,171 + 0,128$$

$$I = 1,3 \text{mA}$$

2-) Calculons V_{em} ; V_{cm} ; V_{bm} ; V_{ce}

$$\diamond V_{em} = R_e I_e = R_e I_b(1+\beta)$$

$$V_{em} = 1 \times 0,023(51) \simeq 1,208 \text{V}$$

$$\diamond V_{cm} = R_1 I_1 + R_2 I_2$$

$$= 39 \times 0,128 + 18 \times 0,105$$

$$V_{cm} = 6,882 \text{V}$$

$$\diamond V_{bm} = R_2 I_2 = 18 \times 0,105 = 1,89 \text{V}$$

$$\diamond V_{ce}$$

$$\text{D'après maille III } V_{CC} - R_C I - V_{ce} - V_{em} = 0$$

$$V_{ce} = V_{CC} - R_C I - V_{em}$$

$$= 12 - 3,9 \times 1,3 - 1,1934$$

$$V_{ce} \simeq 5,73 \text{ V} \quad \text{ou encore } V_{ce} = V_{cm} - V_{em}$$

$$= 6,882 - 1,2$$

$$V_{ce} \simeq 5,68 \text{ V}$$

V- MACHINE ELECTRIQUE (ALTERNATEUR MONOPHASE)

$$2P = 6 ; \phi = 18\text{mwb} ; N = 90 \text{ conducteurs} ; e = 170,1\text{V}$$

$$f = 50\text{hz} ; i = 1\text{A} ; \phi = ki ; n = c^{\text{ste}}$$

a- Vitesse de rotation et coefficient de KApp

$$\diamond n = \frac{60f}{P} \text{ AN : } n = \frac{60 \times 50}{3} = 1000$$

$$\diamond E = KN\phi f \Rightarrow K = \frac{E}{N\phi f} \quad \text{AN: } K = \frac{170,1}{90 \times 50 \times 0,018}$$

$$K = 2,1$$

b- $i' = 0,441\text{A} ; I_{cc} = 25\text{A}$

Calcul la f.e.m de court-circuit et la réaction synchrone...Zs.....

$$\diamond E_1 = K_p N \phi f \text{ or } \phi = ki \Rightarrow E_1 = K_p N k i f$$

$$\Rightarrow E_1 = k_1 i_1$$

$$\Rightarrow \frac{E_1}{E_{cc}} = \frac{i_1}{i'} \Rightarrow E_{cc} = \frac{i'}{i_1} E_1$$

$$\Rightarrow E_{cc} = \frac{0,441}{1} 170,1 = 75,01 \simeq 75\text{V}$$

$$\Rightarrow E_{cc} = 75\text{V}$$

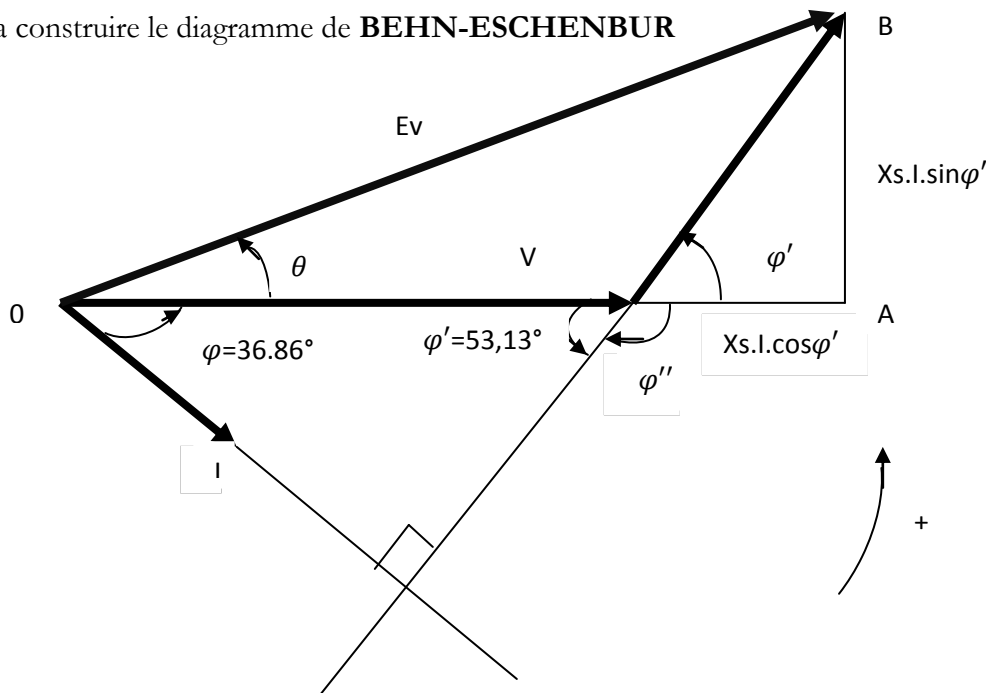
$$\diamond Z_s = X_s = \frac{E_{cc}}{I_{cc}} \quad \text{AN: } Z_s = X_s = \frac{75}{25} = 3; \quad Z_s = 3\Omega$$

c- $i = 1\text{A} ; I = 10\text{A} ; \cos \varphi = 0.8$

Détermination de la tension aux bornes de la charge

1^{er} cas : Si cette charge est inductive

Cette détermination se fera de manière graphique ou analytique. Pour les deux méthodes, il faudra construire le diagramme de **BEHN-ESCHENBUR**



A partir de ce diagramme nous pouvons écrire, par application de la propriété de Pythagore dans le triangle rectangle OAB que

$$E^2 = (V + X_s I \cos \varphi)^2 + (X_s I \sin \varphi)^2$$

$$(170,1)^2 = (V + 3 \times 10 \times 0,6)^2 + (3 \times 10 \times 0,8)^2$$

$$(170,1)^2 = (V + 18)^2 + 24^2$$

$$170,1^2 = V^2 + 36V + 18^2 + 24^2$$

$$\Rightarrow V^2 + 36V - 28034,01 = 0$$

$$\Delta = 336,79^2 \quad \text{d'où} \quad V = 150,40V$$

2° cas : Si la charge est capacitive ($\varphi < 0$)

Nous exploiteront sur ce diagramme de BEHN l'angle $\varphi'' = 180^\circ - 53,13^\circ = 126,87^\circ$ et nous aurons alors.

$$E^2 = (V + IX_s \cos \varphi'')^2 + (IX_s \sin \varphi'')^2$$

$$(170,1)^2 = (V + 3 \times 10 \times 0,6)^2 + (3 \times 10 \times 0,8)^2$$

$$170,1^2 = (V - 18)^2 + 24^2$$

$$V^2 - 36V - 28034,01 = 0 \quad \text{d'où} \quad V = 186,40V$$

Ou encore vous construisez un nouveau diagramme de **BEHN** correspondant avec un φ en avance de phase.

d-

1) Courant d'induit

$$\underline{Z}_T = \underline{Z} + \underline{Z}_s = 16,5 - 2,96j + 3j = 16,5 + 0,04j = 16,5[0,138^\circ] \quad I = \frac{E_V}{|Z_T|} =$$

$$\frac{170,1}{16,5} = 10,3 \Rightarrow I = 10,3A$$

2) Tension aux bornes de Z

$$\underline{V} = \underline{Z}I = 16,76[-10,17^\circ] \times 10,3 \Rightarrow \quad \quad \quad V = 172,628V$$

3) Déduisons θ

A partir du diagramme de BEHN, nous constatons que

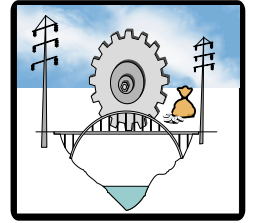
$$E \cos \theta = V + X_s I \sin \varphi \Rightarrow 170,1 \cos \theta = 167,628 - 5,28 \Rightarrow \theta = 10,57^\circ$$



UNIVERSITÉ DE DOUALA. CONCOURS
D'ENTREE A L'ENSET

EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM. Mai 1998

Correction ENSET 1998



Problème A : Etude d'une installation électrique

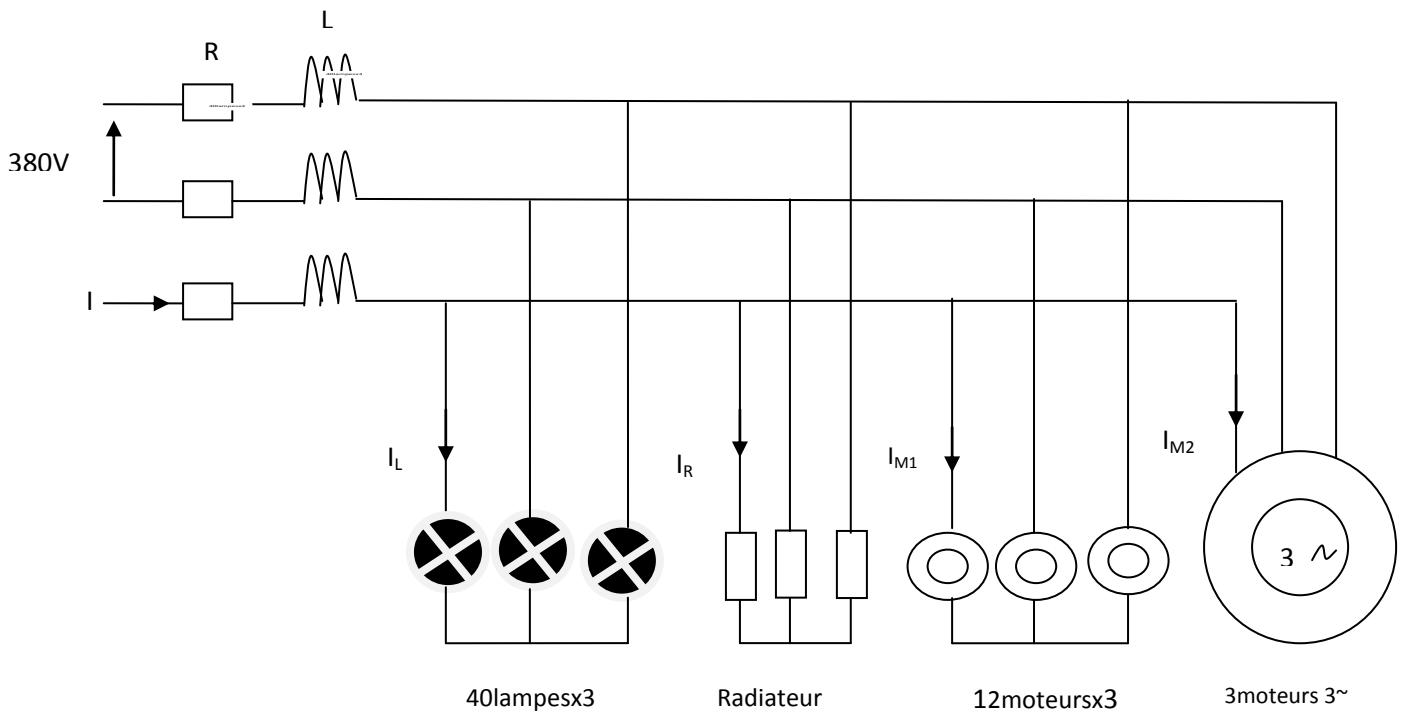
I- Organisation de l'installation

I-1)

Pour câbler cette installation de manière à avoir une installation triphasée équilibrée, il faut :

- L'alimenter par un système de grandeurs triphasées de même valeur efficace et déphasées les unes des autres de 120° ,
- Répartir équitablement les charges sur les trois phases c-à-d pour 120 lampes, mettre 40 lampes par phase et pour 36 moteurs monophasés mettre 12 moteurs par phase.

I-2) Esquisse du schéma multifilaire triphasé de cette installation



II- Bilan de puissance

II-1) Complétons le tableau ci- dessous

❖ Calcul des différentes puissances

- Lampes

$$P_{\text{lampes}} = 120 \times 70 \Rightarrow P_{\text{lampes}} = 8400 \text{ W} ; Q_{\text{lampes}} = 0 \text{ var}$$

- Radiateur

$$P_R = 3 P_{R1} \Rightarrow P_R = 3 \times 1700 \Rightarrow P_R = 5100W ; Q_R = 0 \text{ var}$$

- Moteurs asynchrones monophasés

$$P_{aM} = 36 \times \frac{P_u}{n_n} \Rightarrow P_{aM} = 36 (6 \times 735) / 0.7 \Rightarrow P_{aM} = 226800W$$

$$Q_{AM} = P_{AM} \tan \varphi \Rightarrow Q_{AM} = 226800 \tan \varphi = 302400 \text{ VAR}$$

$$P_{AM} = 226800 \quad Q_{AM} = 302400 \text{ VAR.}$$

❖ Moteurs asynchrones triphasés

$$P_{aM} = 3 \frac{P_u}{n_n} \Rightarrow P_{aM} = 3 \frac{20 \times 735}{0.95} \Rightarrow P_{aM} = 46421,05W$$

$$Q_{AM} = P_{AM} \tan \varphi \Rightarrow Q_{AM} = 46421,05 \tan \varphi = 34815,78 \text{ VAR}$$

$$P_{AM} = 46421,05W \quad Q_{AM} = 34815,78 \text{ VAR.}$$

RECEPTEURS	Pabs(Watts)	Qabs(Var)	Quantité	Ptotal	Qtotal
Lampe	70	0	120	8400	0
Radiateur	1700	0	1(3résistances)	5100	0
Moteur 1-phasé	6300	8400	36	226800	302400
Moteur 3-phasé	15473,68	11605,26	3	46421,05	34815,78

II-2) Détermination de :

- La puissance active installée

$$P_{aT} = \sum Q \Rightarrow P_{aT} = 28672,05W$$

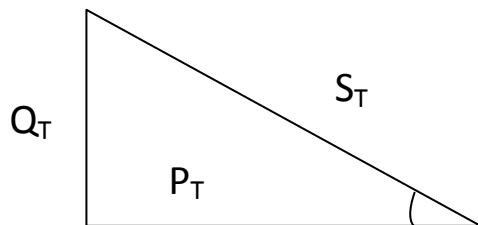
- La puissance réactive installée

$$Q_{aT} = \sum Q \Rightarrow Q_{aT} = 337215,78 = 337215,78 \text{ VAR}$$

II-3) En déduire:

- La puissance apparente installée

D'après Boucherot



$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} \Rightarrow S_T = \sqrt{(28672,05)^2 + (337215,78)^2}$$

$$S_T = 442632,4 \text{ VA}$$

- Le facteur de puissance

$$\cos \varphi = \frac{P_T}{S_T} \text{ AN: } \cos \varphi = \frac{28672,05}{442632,4}$$

$$\cos \varphi = 0,64$$

III- Etude des courants

III-1) Courant appelé par chaque récepteur

❖ Pour les lampes

$$P_{L_{\text{ampes}}} = U I_L \sqrt{3} \Rightarrow I_L = \frac{P_{L_{\text{ampes}}}}{U \sqrt{3}} \quad \text{AN : } I_L = \frac{8400}{380 \sqrt{3}} \Rightarrow I_L = 12,76 \text{ A}$$

❖ Moteurs monophasés

$$I_{M2} = \frac{P_M}{U \sqrt{3} \cos \varphi} \mid \varphi \Rightarrow I_{M2} = \frac{226800}{380 \sqrt{3} \times 0,6} \mid \varphi \Rightarrow I_{M2} = 574,31 \text{ L53,13}^\circ \text{ A}$$

❖ Radiateur

$$I_R = \frac{P_R}{U \sqrt{3}} \Rightarrow I_R = \frac{5100}{380 \sqrt{3}} \Rightarrow I_R = 7,74 \text{ A.}$$

❖ Moteurs triphasés

$$I_M = \frac{P_M}{U \cos \varphi \sqrt{3}} \text{ L} \varphi. \quad I_M = 88,16 \mid 36,86^\circ \text{ A}$$

III -2) Courant total appelé par l'installation

Première méthode (méthode de Boucherot)

$$S_T = U I_T \sqrt{3} \Rightarrow I_T = \frac{S_T}{U \sqrt{3}} \quad \text{AN: } I_T = \frac{442632,4}{380 \sqrt{3}}$$

$$I_T = 672,5 \text{ A}$$

Deuxième méthode : méthode des courants

$$I_T = I_L + I_P + I_{M1} + I_{M2} \Rightarrow I_T = 12,76 + 7,74 + 574,31 \mid 53,13^\circ + 88,16 \mid 36, \dots^\circ$$

$$I_T = 12,76 + 7,74 + 344,586 + 459,448j + 701,52 + 52,896j$$

$$I_T = 435,606 + 512,344j$$

$$\mid I_T \mid = I_T = \sqrt{(435,606)^2 + (512,344)^2} \Rightarrow I_T = 672,5 \text{ A}$$

IV- Pertes et chutes de tension en ligne

IV-1) Calcul des pertes actives puis réactives en ligne

• Pertes actives

$$P_{jr} = 3 \cdot r I^2 = 3 \cdot 0,02 \cdot 672,5^2 \Rightarrow P_{jr} = 27136,2 \text{ W}$$

• Pertes réactives

$$Q_{jr} = 3 \cdot I_m(Z) \cdot I^2 = 3 \cdot 0,02 \times 672,5^2 \Rightarrow Q_{jr} = 27136,2 \text{ VARs}$$

IV-2) Chute de tension en ligne.

$$\underline{U} = \underline{Z} I = 13,45 + 13,45j \Rightarrow U = \mid \underline{U} \mid = 19,02 \text{ V}$$

IV-3) Tension en tête de ligne

$$V_1 = V + u = \frac{380}{\sqrt{3}} + 19,02 \Rightarrow V_1 = 238,41V \text{ soit } U_1 = \sqrt{3}V_1 = 412,94V$$

IV-4) Calcul du courant de court circuit présumé en ligne lors d'un court-circuit à l'entrée.

$$I_{cc} = \frac{U_1}{\sqrt{3}(\sqrt{R_p^2 + X_p^2})} \Rightarrow I_{cc} = \frac{412,94}{\sqrt{3} \times 0,02\sqrt{2}}$$

$$I_{cc} = 8,42KA$$

Choix du disjoncteur

V- Compensation de l'installation

V-1) Caractéristiques des condensateurs qu'il faut mettre à l'entrée de l'installation pour avoir un $\cos \phi = 1$

- Montage triangle (Δ)

$$Q = 3U^2 C_{1w} \text{ car pour } \cos \phi = 1 \quad Q_1 = 0VAR$$

$$Q = |Q_1 - Q_2| \text{ or } Q_1 = 0 \Rightarrow Q = Q_1$$

$$C_{\Delta} = \frac{Q}{3U^2 w} \quad \text{AN: } C_{\Delta} = \frac{337125,78}{380^2 2\pi \times 50 \times 3}$$

$$C_{\Delta} = 2477,15\mu F$$

- Montage étoile (.....)

$$3C_{\Delta} = C_Y \Rightarrow C_Y = 3 \times 2477,15\mu F$$

$$C = 7431,47 \mu F$$

V-2) Installation compensée

- Calcul du nouveau courant en ligne

Lorsque $\cos \phi = 1$ $Q = 0VAR$ et on a $S_T = P_T$

$$P_T = S_T = UI_T \sqrt{3} \Rightarrow I_T = \frac{P_T}{U \sqrt{3}}$$

$$\text{AN: } I_T = \frac{28672,05}{380\sqrt{3}} \Rightarrow I_T = 43,56A$$

- Reprendre les équations IV-1 ; IV-2 ; IV-3

- ❖ Calcul les pertes en lignes

$$P_{jr} = 3 \cdot r I^2 = 3 \cdot 0,02 \times 43,56^2 \Rightarrow P_{jr} = 113,85W$$

$$Q_{jr} = 3 \cdot \text{Im}(Z) \cdot I^2 = 3 \cdot 0,02 \times 43,56^2 \Rightarrow Q_{jr} = 113,85VAR$$

- ❖ Chute de tension en ligne

$$U = Z_p I = 0,8712 + 0,8712j \Rightarrow U = |U| = 1,23V$$

- ❖ Tension en tête de ligne

$$V_1 = \frac{U}{\sqrt{3}} + \Delta U \Rightarrow V_1 = \frac{380}{\sqrt{3}} + 1,23 \Rightarrow V_1 = 220,62V$$

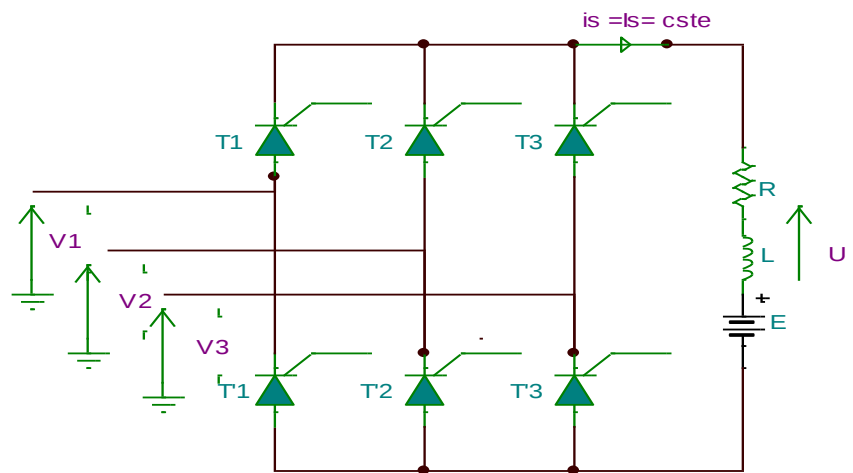
$$U_1 = \sqrt{3} V_1 = 382,13V \Rightarrow U_1 = 382,13V$$

V-3) Conclusion

Après relèvement du $\cos \emptyset$ on constate :

- Une Diminution bien considérée du courant en ligne et par conséquent la diminution des pertes en lignes.
- Une diminution de la chute de tension en ligne

Problème B : Etude d'un convertisseur triphasé tout thyristor



I- Etude qualitative

I-1) Fonctionnement du montage pour $\alpha = 0^\circ$ et $\alpha = 60^\circ$

❖ Fonctionnement pour $\alpha = 0^\circ$

Lorsque $\alpha = 0^\circ$, le pont tout thyristor devient un pont à diode. On a alors un PD3 non commandé.

Considérons le courant i_1 débité par la phase une du réseau.

- Nous avons six phases de fonctionnement

$\theta \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$; La tension V_3 est la tension positive et la tension V_2 est la tension négative, d'où les diodes qui conduisent sont D_3 et D'_2 on a : $U_{AB} = V_3 - V_2 = V_{32}$; $i_{D1} = 0$; $i_{D1'} = 0$; $i_{s1} = 0$; $U_{D1} = V_1 - V_3 = V_{13}$

NB : il est vivement conseillé de dessiner la structure à chaque fois afin de déterminer ces différentes valeurs car « un petit schéma vaut mieux qu'un discours »

De la même façon :

$$\diamond \theta \in [\pi/6 ; \pi/2] \quad D_1 \text{ et } D'_2 \text{ conduisent}$$

$$U_{AB} = V_1 - V_2 = V_{12}; \quad U_{D1} = 0; \quad iD'_1 = 0 \quad iD_1 = I = is_1$$

$$\theta \in [\pi/2 ; 5\pi/6] \quad D_1 \text{ et } D'_3 \text{ conduisent}$$

$$U_{AB} = V_{13}; \quad U_{D1} = 0; \quad iD_1 = is_1 = I; \quad iD'_1 = 0$$

$$\diamond \theta \in [5\pi/6 ; 7\pi/6] \quad D_2 \text{ et } D'_3 \text{ conduisent.}$$

$$U_{AB} = V_{23}; \quad iD_1 = is_1 = 0 \quad U_{D1} = V_{12}; \quad iD'_1 = 0$$

$$\diamond \theta \in [7\pi/6 ; 3\pi/2] \quad D_2 \text{ et } D'_1 \text{ conduisent.}$$

$$U_{AB} = V_{21}; \quad iD_1 = 0; \quad is_1 = -I \quad U_{D1} = V_{12}; \quad iD'_1 = -I$$

$$\diamond \theta \in [3\pi/2 ; 11\pi/6] \quad D_3 \text{ et } D'_1 \text{ conduisent.}$$

$$U_{AB} = V_{13}; \quad U_{D1} = V_{13}; \quad is_1 = iD'_1 = -I; \quad iD_1 = 0$$

- Fonctionnement pour $\alpha = 60^\circ$

Comme dans le cas précédent à la seule différence que les thyristors s'amorcent avec un retard α .

Nous avons toujours six phases de fonctionnement.

$$\diamond \theta \in [0 ; \alpha] \quad th_1 \text{ et } th'_2 \text{ conduisent.}$$

$$U_{AB} = V_{12}; \quad VT_1 = 0; \quad ith_1 = I; \quad is_1 = I \text{ et } IT'_1 = 0$$

$$\diamond \theta \in [\alpha ; \pi/3 + \alpha] \quad T_1 \text{ et } T'_3 \text{ conduisent.}$$

$$U_{AB} = V_{13}; \quad I_{T1} = I; \quad VT_1 = 0; \quad is_1 = I; \quad IT'_1 = 0$$

$$\diamond \theta \in [\pi/3 + \alpha ; 2\pi/3 + \alpha] \quad T_2 \text{ et } T'_3 \text{ conduisent.}$$

$$U_{AB} = V_{23}; \quad I_{T1} = 0; \quad VT_1 = V_{12}; \quad is_1 = 0; \quad IT'_1 = 0$$

$$\diamond \theta \in [2\pi/3 + \alpha ; \pi + \alpha] \quad T_2 \text{ et } T'_1 \text{ conduisent.}$$

$$U_{AB} = V_{21}; \quad I_{T1} = 0; \quad VT_1 = V_{12}; \quad is_1 = I_{T1} = -I$$

$$\diamond \theta \in [\pi + \alpha ; 4\pi/3 + \alpha] \quad T_3 \text{ et } T'_1 \text{ conduisent.}$$

$$U_{d\alpha} = V_{31}; \quad I_{T1} = 0; \quad VT_1 = V_{13}; \quad is_1 = I_{T1} = -I$$

$$\diamond \theta \in [4\pi/3 + \alpha ; 5\pi/3 + \alpha] \quad T_3 \text{ et } T'_2 \text{ conduisent.}$$

$$U_{d\alpha} = V_{32}; \quad I_{T1} = 0; \quad VT_1 = V_{13}; \quad is_1 = I_{T1} = 0$$

I-2) Traçons les chronogrammes pour $\alpha = 0^\circ$ et $\alpha = 60^\circ$ des grandeurs suivantes

- $V_{AN}; V_{BN}; U_{d\alpha}$
- $V_{T1}; I_{T1}; I_{T1}; is_1$.

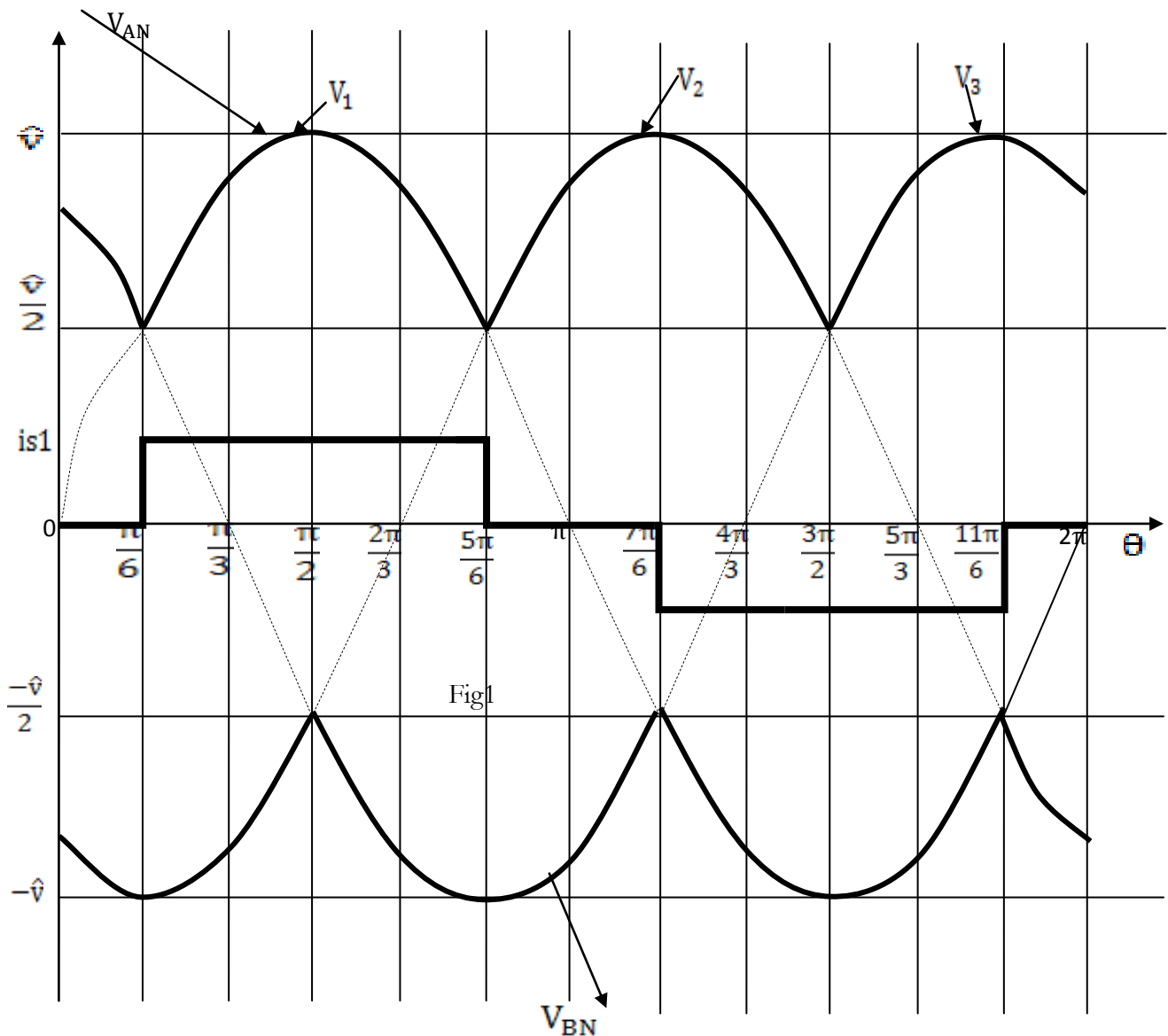
- Pour $\alpha = 0^\circ$

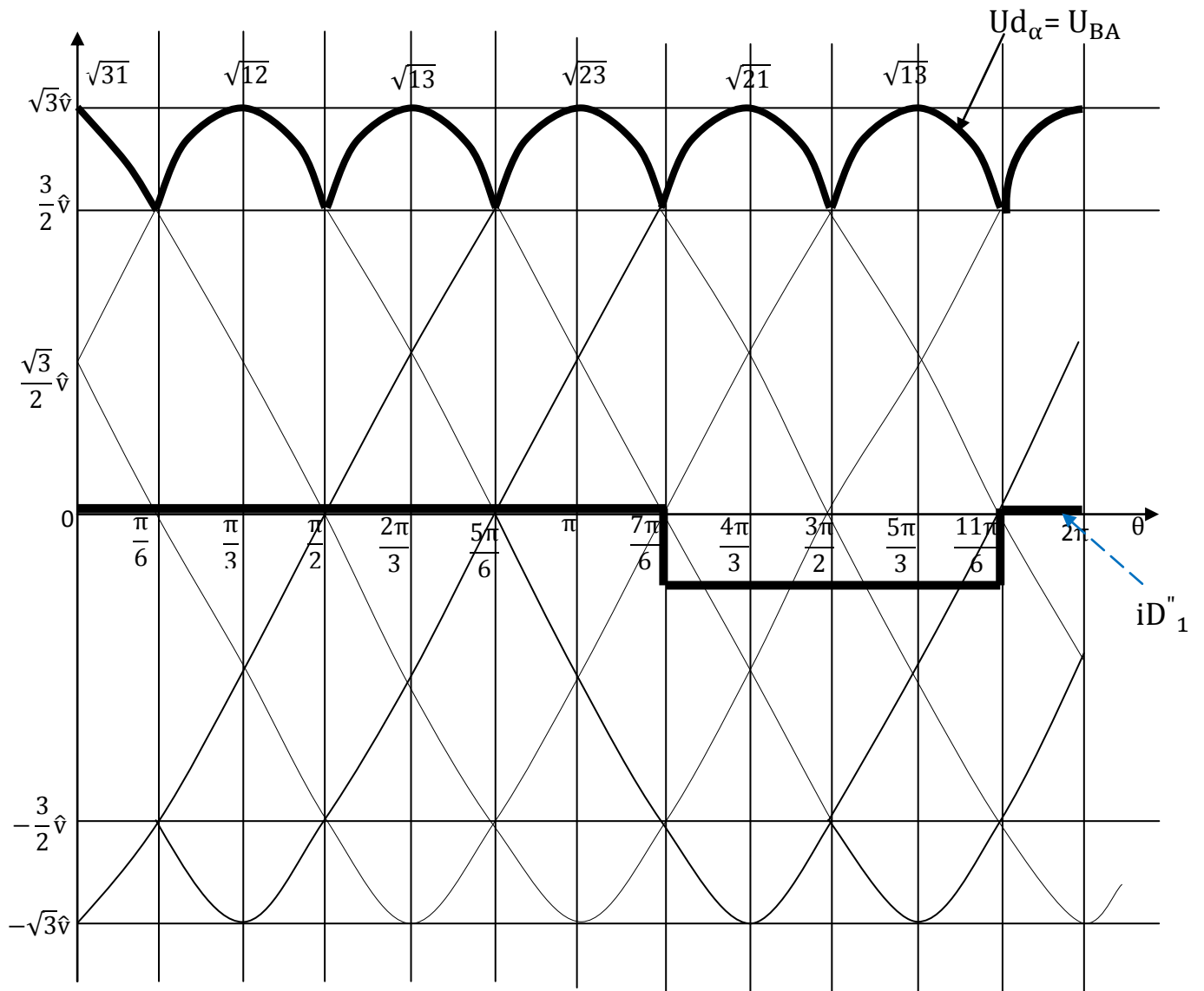
❖ V_{AN} est le potentiel de la phase qui débite le courant i ; elle sera donc égale à (V_1 ; V_2 ou V_3) la plus positive à l'instant considéré, d'où

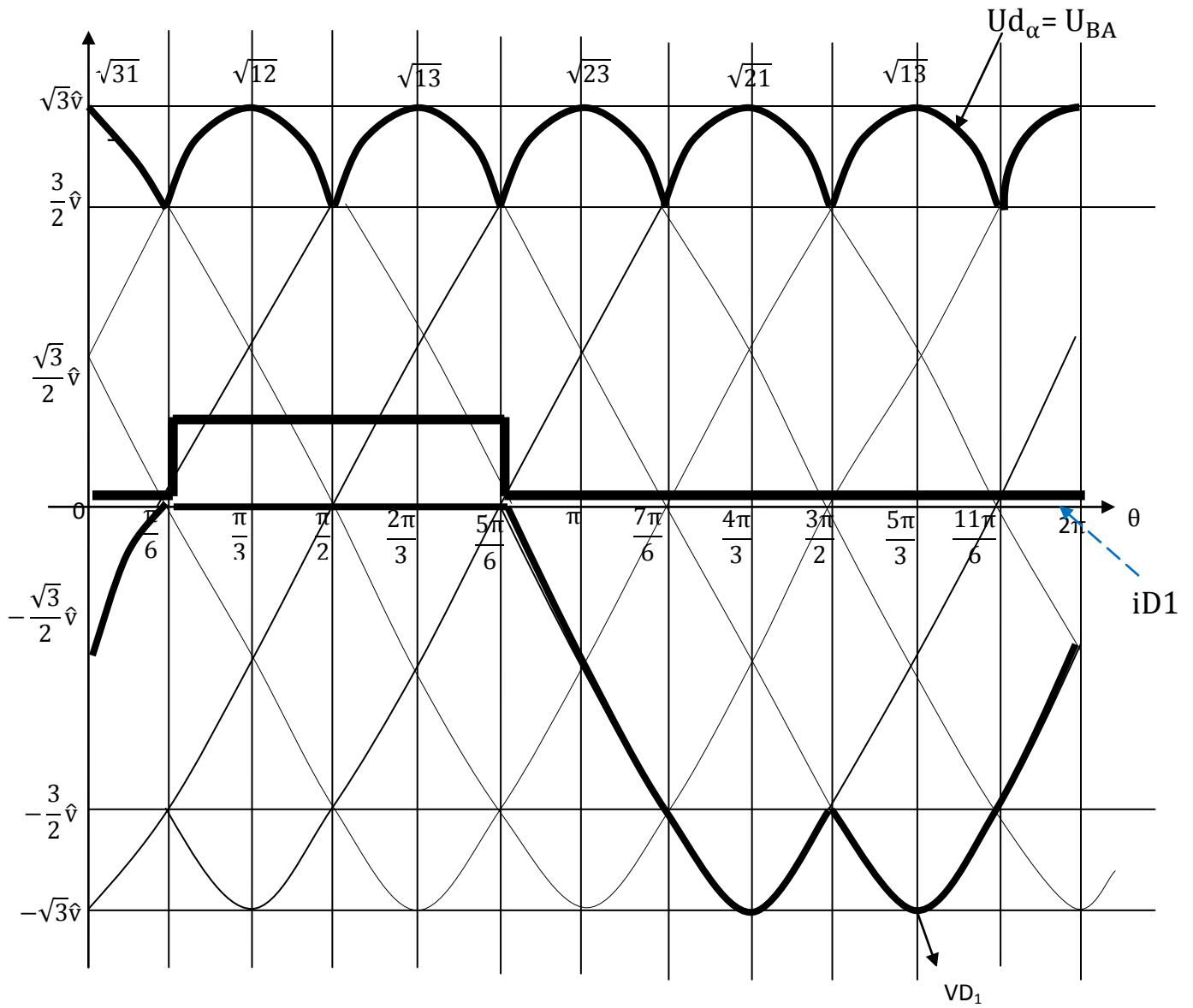
$V_{AN} = \sup (V_1; V_2, V_3)$. Voir (figure 1)

❖ V_{BN} est le potentiel de la phase qui assure le retour du courant i ; elle sera donc égal à (V_1 ; V_2 ou V_3) la plus négative à l'instant considéré d'où

$V_{BN} = \inf. (V_1; V_2, V_3)$. Voir (fig 1)

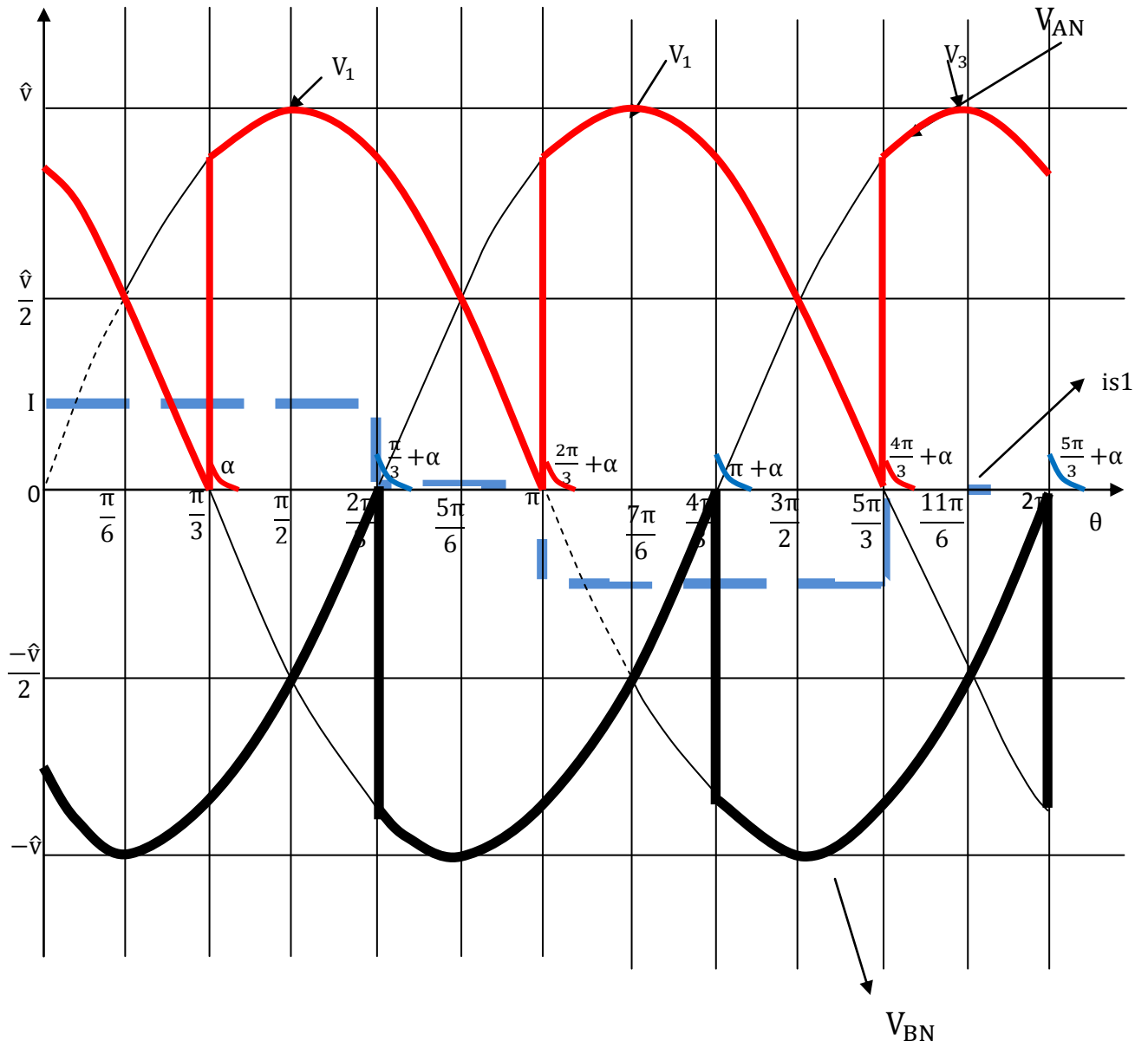


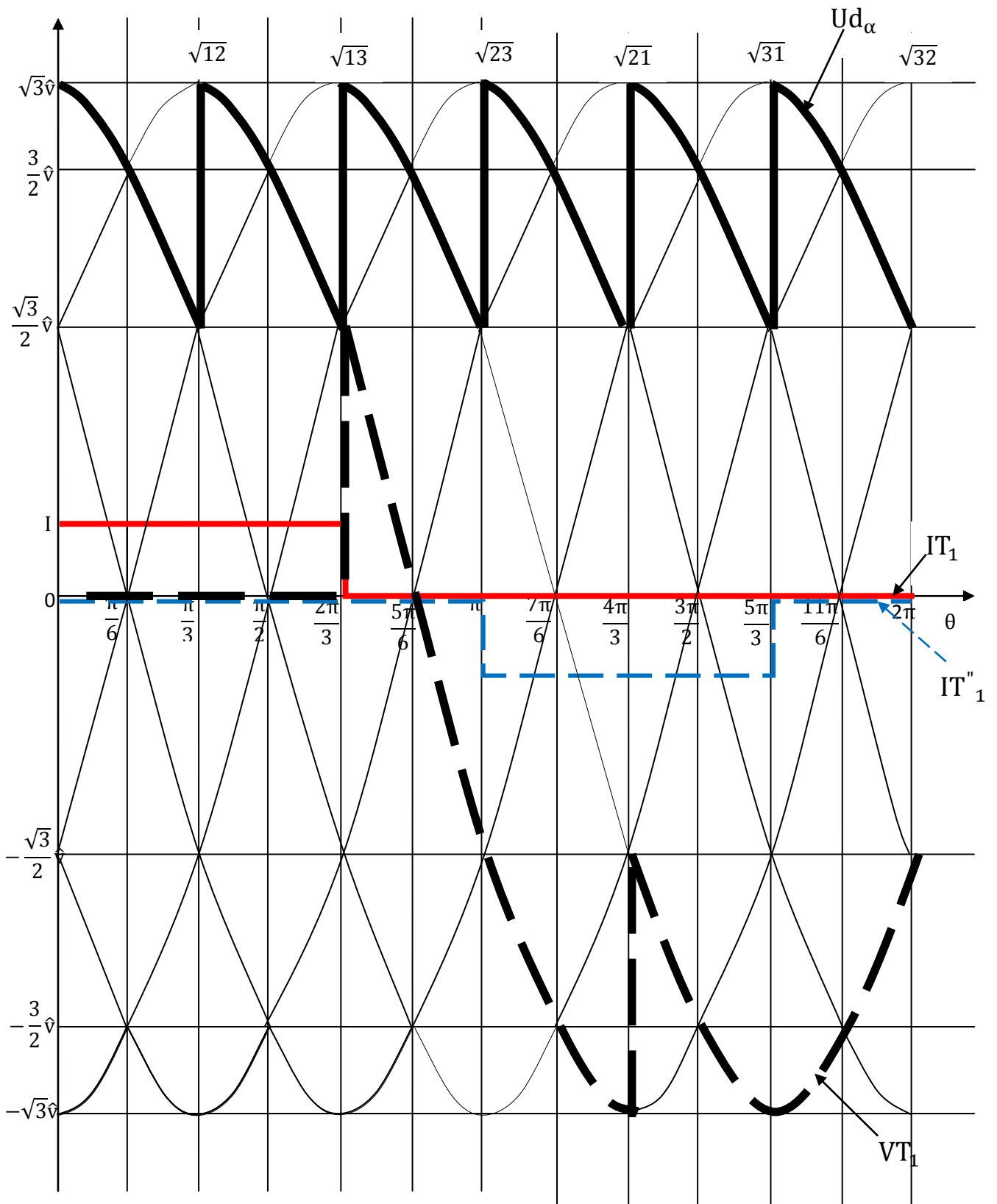




- Pour $\alpha = 60^\circ$

❖ $V_{AN} = \sup(V_1; V_2; V_3)$ et $V_{BN} = \inf(V_1; V_2; V_3)$ mais cette fois ci retardé de α .





I-3) Puissance et facteur de puissance**a) Calcul en fonction de I**

- Puissance active fournie par le convertisseur.

Cette puissance est transportée depuis le secondaire du transformateur par les fondamentaux des courants i_1 , i_2 et i_3

$$P_f = 3 \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}} \frac{\hat{I}_f}{\sqrt{2}} \cos \alpha = \frac{3}{2} \hat{V} 2 \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cos \alpha I \quad \text{car } \hat{I}_f = 2 \frac{\sqrt{3}}{\pi}$$

$$\Rightarrow 3 \frac{\sqrt{3}}{\pi} \hat{V} \cos \alpha I = U_{d\alpha \text{ moy}} I.$$

- Puissance appelée par la charge

$$P_C = EI_{\text{moy}} + RI_{\text{moy}}^2 = (E + RI) I$$

- Puissance active appelée par le convertisseur.

En supposant que le pont est parfait, toute la puissance fournie par celui-ci est celle reçue par la charge

$$P_a = P_f = U_{d\alpha \text{ moy}} I.$$

- Puissance apparente appelée

$$S = V_{\text{eff}} I_{\text{seff}} = 3 \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi + \alpha}{2\pi}} \cdot I$$

b) Facteur de puissance de l'ensemble (convertisseur – charge)

$$K = \frac{P_f}{S} = \frac{3\hat{V}\sqrt{3}}{\pi} \cos \alpha I \cdot \frac{2\sqrt{\pi}}{3\hat{V}I\sqrt{\pi+\alpha}} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cos \alpha \cdot \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi+\alpha}} \Rightarrow$$

$$K = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\pi(\pi+\alpha)}} \cos \alpha$$

II- Etude quantitative (α quelconque)**II-1) Etude des tensions****a) Valeur moyenne de la tension aux bornes de la charge**

$$\begin{aligned} \langle U_{d\alpha} \rangle &= U_{d\alpha \text{ moy}} = \frac{1}{\frac{\pi}{3}} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{3}+\alpha} V_{12} d\theta \\ &= \frac{\pi}{3} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{3}+\alpha} (V_1 - V_2) d\theta \\ &= \frac{\pi}{3} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{3}+\alpha} \left[V\sqrt{2} \sin wt - V\sqrt{2} \sin\left(wt - \frac{2\pi}{3}\right) \right] d\theta \end{aligned}$$

Avec $wt = \theta$. Après tout calcul bien fait

$$U_{\text{moy}} = \frac{3\sqrt{3}\hat{V}}{\pi} \cos \alpha$$

b) Tension maximale directe et inverse aux bornes d'un thyristor

- ❖ En direct, un thyristor supporte $\frac{\sqrt{3}\hat{V}}{2}$
 - ❖ En inverse, un thyristor supporte $\sqrt{3}\hat{V}$
- } Voir graphe

II-2) Etude des courants

a) Courant moyen I dans la charge

$$I_{\text{moy}} = \langle I \rangle = I_{\text{eff}} = I$$

b) Expression en fonction de I du courant moyen dans le thyristor.

$$I_{\text{thmoy}} = \frac{I}{3} \quad (\text{Voir graphe})$$

- Courant efficace en ligne

$$I_{\text{seff}}^2 = \frac{\left(\frac{\pi}{3} + \alpha - 0\right)I^2 + \left(\frac{4\pi}{3} + \alpha - \frac{2\pi}{3} - \alpha\right)(-I)^2}{2\pi} = \frac{I^2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right)}{2\pi}$$

$$I_{\text{seff}}^2 = \frac{I^2(\alpha + \pi)}{2\pi} \Rightarrow I_{\text{seff}} = I \sqrt{\frac{(\alpha + \pi)}{2\pi}}$$

III- Application numérique de l'étude quantitative

❖ $\alpha = 0^\circ$

$$\text{III-1) a) } U_{\text{d}\alpha\text{moy}} = \frac{3\sqrt{3}\hat{V}}{\pi} = \frac{3\sqrt{3} \times 220\sqrt{2}}{\pi} = 514,59 \text{ V} \Rightarrow U_{\text{d}\alpha\text{moy}} = 514,59 \text{ V}$$

b) La diode supporte en inverse

$$\sqrt{3}\hat{V} = \sqrt{3} \times 220\sqrt{2} \Rightarrow U_{\text{dinv}} = 514,59 \text{ V}$$

❖ En direct

$$U_{\text{d1}} = 0 \text{ V}$$

$$\text{III-2) a) On sait que } U_{\text{d}\alpha\text{moy}} = E + \frac{L dI_{\text{moy}}}{dt} + R I_{\text{moy}}$$

$$\text{Or en régime moyen } \frac{L dI}{dt} = 0 \text{ car } I = I_{\text{ste}}$$

$$\Rightarrow U_{\text{d}\alpha\text{moy}} = E + R I_{\text{moy}} \Rightarrow I_{\text{moy}} = \frac{U_{\text{d}\alpha\text{moy}} - E}{R}$$

$$I_{\text{moy}} = \frac{514,19 - 200}{1} = 514,59 \text{ A.}$$

$$\text{b) } I_{\text{thmoy}} = I_{\text{moy}} / 3 = \frac{514,59}{3} = 104,86 \text{ A}$$

❖ Il faudra intégrer le signal de I_s obtenu pour le pont à 6 diodes ($\alpha = 0^\circ$)

$$I_{\text{seff}}^2 = \frac{\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)I^2 + \left(\frac{11\pi}{6} - \frac{7\pi}{6}\right)(-I)^2}{2\pi} = \frac{\left(\frac{2\pi}{3}\right)I^2 + \left(\frac{2\pi}{3}\right)I^2}{2\pi} = \frac{\frac{4\pi}{3}I^2}{2\pi}$$

$$\text{AN: } I_{\text{seff}} = \sqrt{\frac{2}{3}} I = \sqrt{\frac{2}{3}} \times 341,51 = 256,86 \text{ A.}$$

III-3) a) * $P_f = U_{\text{damoy}} I = 514,86 \text{ A} \times 314,59 = 161,881 \text{ kW}$

- $P_c = 200 \times 314,59 + 1(314,59)^2 = 161,884 \text{ kW}$
- $P_a = P_f = P_c = 161,884 \text{ kW}$
- $S = 3200 \times \sqrt{\frac{2}{3}} \times 314,59 = 169,528 \text{ KVA}$

b) $K = \frac{P}{S} = \frac{3}{\pi} = 0,95$

❖ $\alpha = 60^\circ$

c) $U_{\text{moy}} = \frac{3\sqrt{3}\hat{V}}{\pi} \cos\alpha = \frac{3\sqrt{3} \times 220\sqrt{2}}{\pi} \times 0,5 = 257,295 \text{ V}$

- En direct, $U_{\text{thdirect}} = \frac{\sqrt{3}\hat{V}}{\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 220\sqrt{2} = 269,44 \text{ V}$

- En inverse, $U_{\text{thin}} = \sqrt{3}\hat{V} = \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times 220 = 539,88 \text{ V}$

II-2) a) Courant moyen I dans la charge

$$I_{\text{moy}} = \frac{U_{\text{moy}} - E}{R} = \frac{257,295 - 200}{1} = 57,295 \text{ A}$$

b)- $I_{\text{thmoy}} = I/3 = \frac{57,295}{3} = 19,09 \text{ A}$

- courant efficace en ligne

$$I_{\text{seff}} = I \sqrt{\frac{\pi + \frac{\pi}{3}}{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{3}} I = \sqrt{\frac{2}{3}} \times 57,295 = 46,78 \text{ A}$$

II-3) a) Puissance et facteur de puissance

- $P_f = 257,295 \times 57,295 = 14,741 \text{ KW}$
- $P_c = 14,741 \text{ KW}$
- $P_a = 14,741 \text{ KW}$

$$S = 3 \frac{\hat{V}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{3}} I = 3 \frac{220\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{3}} \times 57,295$$

$$S = 30,875 \text{ kVA}$$

b) Facteur de puissance

$$K = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\pi(\pi + \alpha)}} \cos\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\pi(\pi + \pi/3)}} \cos\alpha \Rightarrow K = \frac{3}{\pi} \cos\alpha$$

$$K = \frac{3}{\pi} \times 0,5 = 0,47 \Rightarrow K = 0,47$$

Troisième partie

SUJETS DE CONSOLIDATION

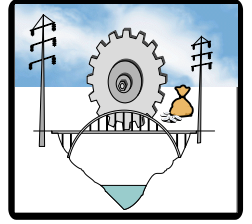


UNIVERSITE DE DOUALA
CONCOURS D'ENTREE A L'ENSET

EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM. Session : 2003

EPREUVE D'ELECTROTECHNIQUE(F3)

DUREE : 4H : 00



EXERCICE 1 : Système triphasé

Un jeu de barre alimente deux départs (circuits) alimentant chacun un récepteur triphasé (récepteur A et B), d'après le schéma donnée a la figure1.

a-) calculer la valeur efficace du courant appelé par l'impédance Z_A . Déterminer en suite graphiquement (par la représentation d'un système triphasée) le déphasage de ce courant par rapport a la tension entre la phase1 et la phase 2.

b-) calculer la valeur efficace des différents courants appelés par les impédances Z_{1B} ; Z_{2B} et Z_{3B} . Déterminer en suite graphiquement (par la représentation d'un système triphasée) le déphasage de ce courant appelé par l'impédance Z_{1B} par rapport a la tension entre la phase1 et la phase 2.

c-) Déterminer graphiquement la valeur efficace I_1 du courant de ligne de la phase1 du jeu de barres.

Rép : a) après tout calcul bien fait et représentation bien faite, $\varphi = 60^\circ$; b) réitérer la même procédure qu'en a) et trouver la 2^{de} valeur $\varphi = 30^\circ$.

EXERCICE 2 : Circuit et courant alternatif

Le circuit d'éclairage d'un train (ou locomotive) est alimentée par un réseau électrique triphasé 230V-16.66Hz ($f = 16^{2/3}$ Hz). Dans une cabine voyageur on a monté en parallèle deux lampes a incandescence de 40W et 125V chacune, avec des résistances additionnelles en série comme illustrée dans la figure2.

Pour empêcher le papillotement des 2 lampes les courants I_1 et I_2 appelés par les 2 lampes doivent être déphasés respectivement $-\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{4}$.

Condensateur idéal C et une inductance idéale L raccordes comme illustre a la figure 2 sont la solution.

a-) Calculer les valeurs de R_1 , R_2 , L et C.

b-) Quelle est la puissance active totale appelée par le montage.

c-) Calculer l'intensité du courant résultant I.

Rép: a) $R_1=117, 18\Omega$; $L=4,85H$; $R_2=117, 18\Omega$; $C=18, 81\mu F$ b) $P_{aT}=104W$ c) $I=0,45A$

EXERCICE 3 : Transformateur monophasé

Le circuit de commande d'un équipement industriel est alimenté par un transformateur de puissance nominale 500VA de tension nominale primaire de 230V et de secondaire de 24V. La fréquence de réseau est de 50Hz.

Un essai à vide sous $U_{10}=230V$ alternatif a permis de mesurer $U_{20}=25.3V$, $I_{10}=0.3A$ et une puissance au primaire de 32W.

Deux autres essais sous tension continu ont permis de mesurer.

- Sous $U_1=1.44V$ continu, secondaire ouvert. $I_1=2.18A$
- sous $U_2=231mV$ continu, primaire ouvert $I_2=21A$

Un essai en court circuit du transformateur a donné pour $U_{1CC}=11.35V$ un courant $I_{2CC}=20.8A$

- a-) Déterminer la résistance et la réactance interne du transformateur ramenées au secondaire.
- b-) le transformateur alimenté sous $U_{1N}=230V$, sachant que le circuit de commande de l'équipement industriel appelle une puissance active de 340W sous $\cos\varphi_2=0.707$ inductif. Déterminer la tension au secondaire du transformateur. Utiliser l'expression approximative de la chute de tension dans le transformateur !

Rép : a) $R_s=0,018\ \Omega$; $X_s=0,05\ \Omega$ b) $U_{2n}=24,3V$

EXERCICE 4 : Questions en Technologie d'Electrotechnique

- a-) Quelle est la différence entre un disjoncteur magnétothermique et un relais magnétothermique ?
- b-) Quelle la différence entre disjoncteur et un sectionneur ?
- c-) pourquoi n'est-il pas nécessaire d'apporter un conducteur neutre au circuit de puissance pour l'alimentation des moteurs.
- d-) Comment se passe la protection des personnes contre les contacts indirects en régime de neutre TT ?
- e-) Un compresseur placé dans un local sec est alimenté à travers un câble d'une longueur de 12m à partir d'un jeu de barre de 230V/400V.50Hz (le transformateur de distribution alimente directement ce jeu de barres). Chaque conducteur du câble a une résistance par unité de longueur de $2\Omega/m$. le puits de terre au neutre présente une résistance de 40Ω et le puits de terre des masses 65Ω .

e-1) Choisir la sensibilité nominale du disjoncteur différentiel (Bloc VIGI) pouvant assurer la protection des personnes contre les contacts indirects d'après les propositions de

SCHNEIDER ELECTRIQUE (EX-TELEMECANIQUE). Justifier votre réponse par calculs.

e-2) Déterminer la tension de contact qui est supposé régner entre la terre et la carcasse du moteur du compresseur si un défaut d'isolement avec $R_d = 500\Omega$ (résistance de défaut) produit dans le moteur. Le disjoncteur différentiel choisis plus haut va-t-il réagir en mettant le moteur hors tension ?

Tableau1 : Extrait du catalogue de SCHNEIDER ELECTRIC. Calibre maximum du DDR

I_N	30mA	300mA	500mA	1A	3A
-------	------	-------	-------	----	----

Rép : 1) 3A ; 2) 24,7V, non

EXERCICE 5 : Variateur de tension

Un récepteur purement résistif est alimenté a travers un pont redresseur composé de 4 diodes et d'un thyristor et suivant le schéma de principe donné a la figure3. Ce variateur électronique est alimenté sous une tension alternative sinusoïdale $u = U_{\max} \sin \omega t$.

Soit α et $(\alpha + \pi)$ les angles d'amorçage du thyristor TH.

a-) Donner les allures de la tension U_{AB} et du courant traversant la résistance R pour $\alpha = \pi/3$ pour une période entière de la tension d'alimentation du variateur.

b-) Tracer le rapport U_s/U_E de la valeur moyenne de la tension aux bornes de la résistance R et de la valeur efficace de la tension d'alimentation du montage (tension entre Ph et N) en fonction de α pour $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Rép : $U_s/U_E = \frac{\sqrt{2}}{\pi} (1 + \cos \alpha)$ nous estimons que la représentation d'une telle fonction en Tle ne causera pas de difficultés.

EXERCICE 6 : Moteur série

Un moteur série a pour fonctionnement nominal : $U_n = 1500V$, $I_{on} = 1500A$, $P_{un} = 2000kW$ et $n_n = 800tr/mn$. Ces caractéristiques sont données à titre d'indication. Un essai a vide en génératrice excitation séparé a 800tr/mn a donné les résultats du tableau 2

Tableau2 : Relevées de la caractéristique à vide de la génératrice

E [V]	0	480	900	1190	1350	1450	1550	1640	1730
I [A]	0	250	500	750	1000	1250	1500	1750	2000

La réaction magnétique d'induit est parfaitement compensée. On donne la valeur des résistances à chaud :

- Résistance du circuit inducteur $R_s = 5m\Omega$

- Résistance du circuit induit (y compris la résistance des enroulements de compensation et des et des pôles auxiliaires) $R_i = 20\text{m}\Omega$

- Le moteur fonctionnant sous tension d'alimentation constante $U = U_n = 1500\text{V}$ et pour un courant induit de 1500A , Calculer :

a-) La vitesse de rotation ;

b-) Le couple électromagnétique ;

c-) Le couple utile. Pour ce moteur, la somme des pertes fer et mécanique est de 125kW à 800tr/mn . Cette somme est supposée proportionnelle à la vitesse.

Rép : a) $n_i = 754,33\text{tr/mn}$; b) $T_{em} = 27752,64\text{N.m}$; c) $C_u = 26261,3\text{N.m}$

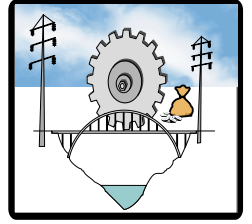


UNIVERSITE DE DOUALA
CONCOURS D'ENTREE A L'ENSET

EPREUVE DE SPECIALITE : SERIES F3 ET MEM. Session : 2002

EPREUVE D'ELECTROTECHNIQUE(F3)

DUREE : 4H : 00



I – CIRCUITS ELECTRIQUES

On considère le circuit électrique ci après alimenté par une source de tension constante $E=70V$. Les autres paramètres du circuit sont : $R_1=R_2=R_3=100\Omega$; $L=50mH$.

Calculer en régime permanent :

I-1) La puissance P_1 consommée par la résistance R_1 ;

I-2) La puissance P_2 consommée par la résistance R_2 ;

I-3) La puissance P_3 consommée par la résistance R_3 ;

I-4) L'énergie emmagasinée dans l'inductance L .

Rép : $P_1=22,1W$; $P_2=5,52W$; $P_3=5,52W$; $W=1.38 \times 10^{-3}J$

II - PUISSANCE

Une charge triphasée équilibrée consomme du réseau une puissance totale $P=3KW$ sous une tension efficace de $120V$ par phase et un courant efficace de $12A$ par phase. Calculer :

2-1) le facteur de puissance de la charge ;

2-2) la capacité C requise par phase pour obtenir un facteur de puissance amélioré de $0,85$.

Rép : $\cos\varphi=0,69$; $C=94,88\mu F$

III - MACHINES

Les paramètres du circuit équivalent monophasé d'une machine asynchrone sont : $R_s=0.294\Omega$, $R_r=0.144\Omega$, $X_s=0.503\Omega$; $X_r=0.209\Omega$; $X_m=13,25\Omega$; $R_m=\infty\Omega$. (S et r indiquent respectivement le stator et le rotor et m la masse ferromagnétique).

3-1) Représenter le schéma par phase de cette machine.

3-2) Calculer l'impédance équivalente Vue du stator.

3-3) Calculer le module du courant statorique I_s par phase ainsi que les pertes de puissance associées

3-4) Calculer le module du courant rotorique I_r par phase ainsi que les pertes de puissance associées

Rép : Les questions 1 et 2 peuvent être résolues mais la question 3 manque de données.

IV - AUTOMATION

Un système logique de commande automatique à quatre variables d'entrées A, B, C, D délivre un signal de commande Y.

$$Y = ABC\bar{D} + AB\bar{C}D + ABCD + ABC\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}CD + A\bar{B}C\bar{D}$$

4-1) représenter le tableau de KARNAUGH associé à Y.

4-2) trouver l'expression simplifiée optimale de Y.

4-3) établissez le schéma associé à Y en utilisant les portes NAND à 4 entrées.

Rép : $Y=A$; 2 portes NAND à 4 entrées suffiront

V - ELECTRONIQUE DE PUISSANCE

Un redresseur en pont (4 diodes) monophasé branché sur un réseau alternatif sinusoïdale de tension $e(t) = 110\sqrt{2}\sin(120\pi t)$ alimente une charge résistive $R=200\Omega$.

5-1) représenter l'allure de la tension V(t) aux bornes de la charge.

5-2) calculer la valeur moyenne de la tension V(t).

5-3) calculer la valeur efficace de la tension V(t).

Rép : $V_{moy}=99,03V$; $V_{eff}=110V$

EXERCICES DE CONSOLIDATION (ENPU)**EXERCICE 1** : Double pont mixte asymétrique

On considère deux ponts mixtes asymétriques montés en série. Et alimentés par les deux secondaires d'un même transformateur monophasé de sorte que $V_{e'}(t) = V_{e''}(t) = V_e(t) = V_{\max} \sin(\omega t)$.

Ce pont alimente une bobine de résistance R et d'inductance L suffisamment grande pour que le courant I dans la bobine soit supposé constant.

- 1) Représenter les intervalles de conduction des différents interrupteurs si les angles de retard à l'amorçage des deux ponts sont respectivement $\alpha' = \pi/3$ et $\alpha'' = 2\pi/3$
- 2) En déduire les graphes de $V_e(t)$, $U_c(t)$, $i_{e'}(t)$, $i_{th1}(t)$ et $i_d(t)$.
- 3) Calculer $V_{\max}$ si le courant I dans la charge vaut 4A et $R = 10\Omega$.
- 4) Quel est le facteur de puissance K dans la charge.
- 5) Calculer la valeur de l'inductance L .

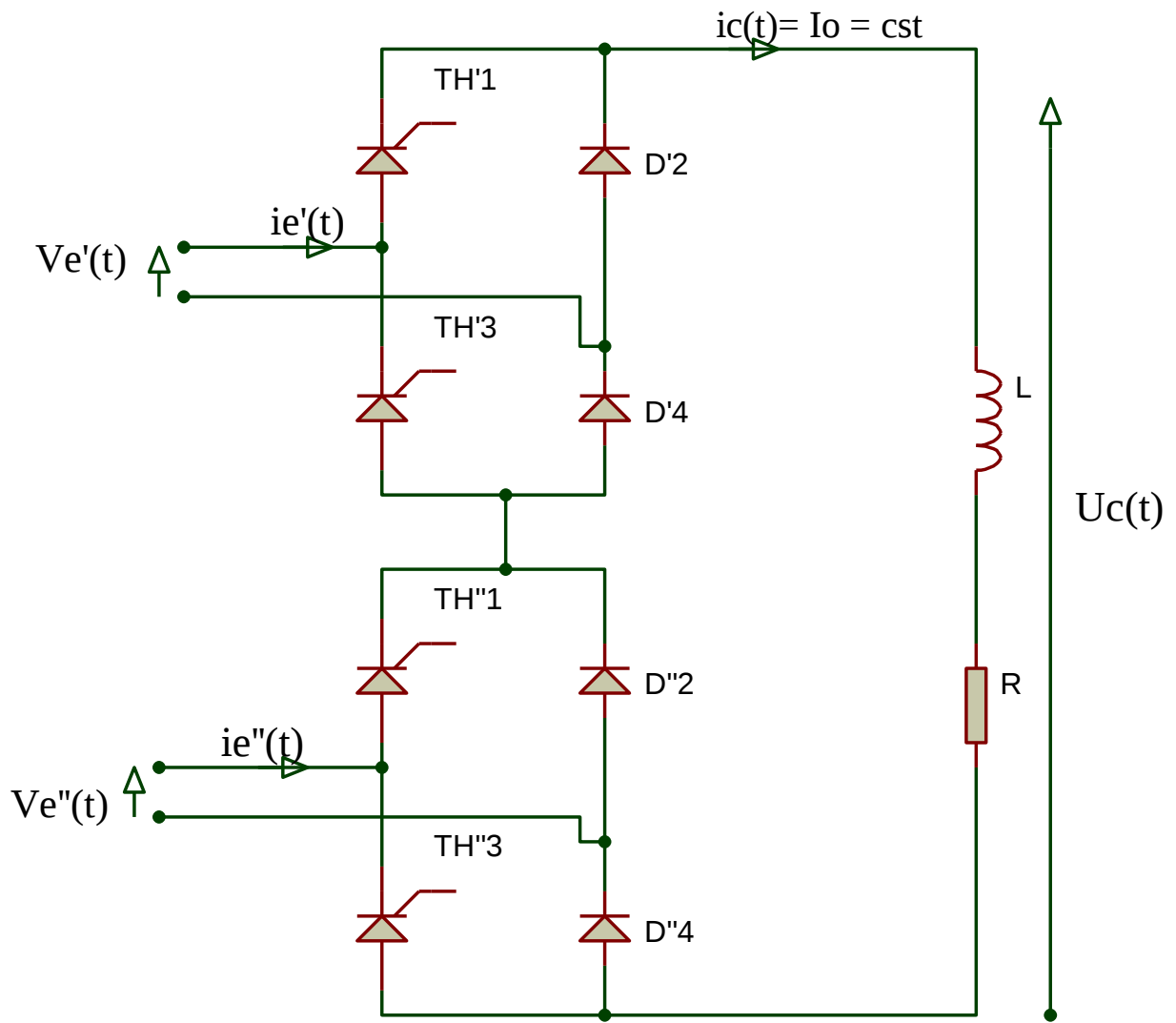


Fig1

EXERCICE2: commande expérimentale de thyristors

Le montage de la figure 2 comprend deux thyristors identiques ayant un courant de maintien de 5mA. Sur chacune des entrées, on va appliquer une impulsion de tension de +10V capable d'amorcer ces thyristors lorsqu'ils sont branchés selon le schéma de la figure précédente.

- 1) Les thyristors étant bloqués, quelles sont les valeurs des tensions V_{a1k1} , V_{a2k2} et V ?
- 2) On applique une impulsion seulement sur $G1$: comment évolue le montage ?
- 3) On applique une impulsion seulement sur $G2$: Reprendre la question précédente.
- 4) On applique enfin une impulsion sur chacune des deux entrées, mais avec un intervalle de temps de plusieurs microsecondes :
 - a) Montrer que le montage peut évoluer de deux façons différentes selon l'ordre d'application des impulsions.
 - b) En déduire l'intérêt du montage.

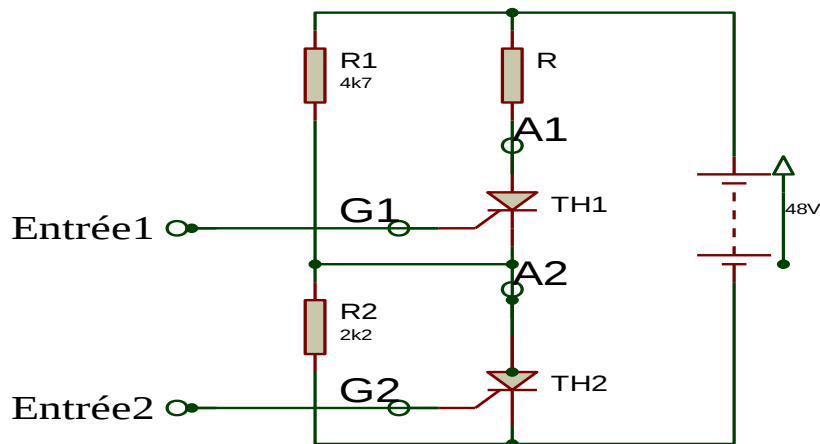


Fig2

EXERCICE3: Commande du thyristor par TUJ

Le thyristor de la figure3 a les spécifications :

$$I_{GT} = 50 \text{ mA}, I_L = 0,20 \text{ A}, I_H = 50 \text{ mA}, t_{gt} = 5 \mu\text{s}; t_q = 100 \mu\text{s}$$

Quand le thyristor est amorcé on a $U_{AK} = 1,5 \text{ V}$; $U_{GK} = 1,0 \text{ V}$; $R_G = 100 \Omega$

- 1) Quelle est la valeur minimale de E_o pour que le thyristor puisse s'amorcer ?
- 2) E_o supposée égale à 1,5 V , donner la valeur minimale de I_o pour faire amorcer le thyristor.

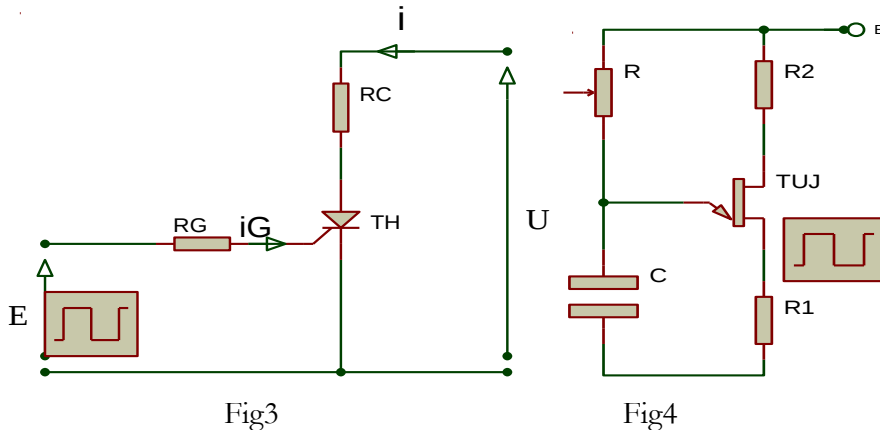
L'impulsion de courant de gâchette est maintenant suffisante :

- 3) Quelle condition doit vérifier R_G pour que l'amorçage du thyristor soit réalisé ?

Le thyristor conduit maintenant et nous voulons l'arrêter. On applique la tension $U_{AK} = -U_{EM}$.

- 4) Calculer la valeur minimale t_o de t_o pour bloquer le thyristor.
- 5) L'impulsion de gâchette est générée par le montage de la figure 4

- Donner les équations de charge et décharge du condensateur C.
- Déduire le temps T_1 d'ouverture du TUJ et la durée q des impulsions.
Q est négligeable devant T_1
- Exprimer la période T des impulsions.
On donne : $E = 20V$; $C = 1\mu F$; $R_1 = 10\Omega$; $R_2 = 100\Omega$; $V_p = 5,5V$ et $V_v = 1,5V$.
- Quelle est la valeur à donner à R pour que le générateur d'impulsion soit synchronisé à 50HZ ?



PROBLEMES DE CONSOLIDATION

THEME I

On se propose d'étudier un moteur à courant continu, de faire varier sa vitesse et d'évaluer cette vitesse.

Les trois parties du problème sont indépendantes

I- Etude du moteur à courant continu

Le moteur est à excitation séparée ; le courant d'excitation constant dans tout le problème a pour intensité $I_E = 1,5A$. La réaction magnétique de l'induit est parfaitement compensée.

1- Que peut-on en déduire pour le flux ?

Les valeurs nominales sont :

- Tension d'induit : $U_N = 110V$
- Intensité du courant induit : $I_N = 20,0A$
- Fréquence de rotation : $n_N = 1200tr/mn$

La résistance de l'induit est $R_A = 0,2\Omega$ et celle de l'inducteur $r_i = 73\Omega$

Un essai à vide a donné les résultats :

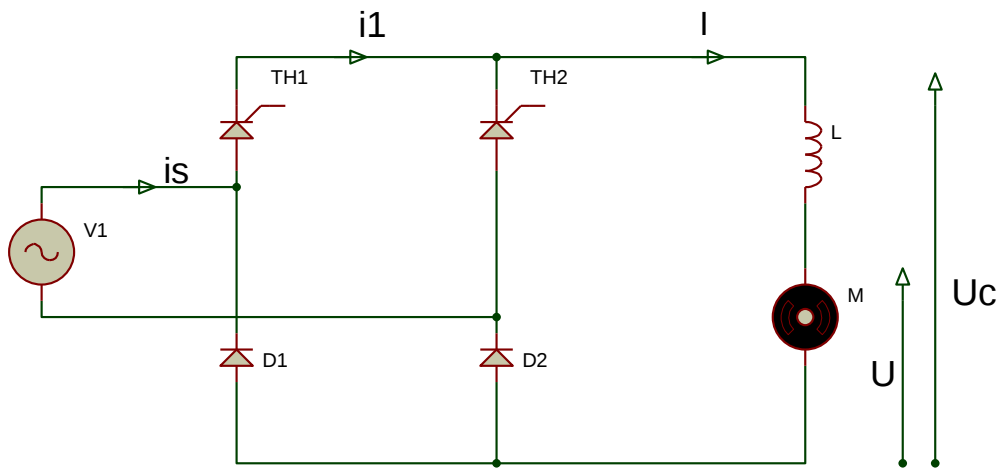
- Tension d'induit : $U_0 = 106,5V$

- Intensité du courant induit : $I_0=2,5A$
 - Fréquence de rotation : $n=1200\text{tr/mn}$
- 2- Pour le fonctionnement à vide déterminer
 - a- La puissance absorbée par l'induit,
 - b- Les pertes par effet joule dans l'induit,
 - c- En déduire la somme des pertes mécaniques et magnétiques (pertes collectives)
 - 3- Pour le fonctionnement nominal, déterminer :
 - a) Les pertes par effet joule dans l'induit et dans l'inducteur ;
 - b) Les pertes collectives ;
 - c) Le rendement du moteur ;
 - d) La Fém. du moteur ;
 - e) Les moments des couples : électromagnétique, pertes, utile.
 - 4- Le moteur entraine une charge dont le moment du couple résistant constant a pour valeur $14,8\text{Nm}$
 - a- Le moment du couple de pertes étant constant, montrer que le moment du couple électromagnétique l'est aussi.
 - b- En déduire que l'intensité du courant d'induit reste égal à $20A$. quelque soit la fréquence de rotation.
 - 5- Exprimer la fréquence de rotation n en fonction de la tension d'induit U .
Présenter le résultat sous la forme $n = a U + b$
Calculer les valeurs numériques des constantes a et b .
 - 6- Tracer la courbe $n=f(U)$ pour U variant entre 0 et $140V$.
Quelle est la valeur minimale de U pour que le moteur démarre ?
Pour quelle valeur de U obtient-on $n=1200\text{tr/mn}$?

II- Etude du pont mixte

La tension d'induit du moteur est réglée par l'intermédiaire d'un pont mixte représenté à la figure 1. les composants du pont sont supposés parfaits.

On a placé en série avec l'induit du moteur une bobine de lissage d'inductance L et de résistance nulle. la tension d'alimentation du pont est $V(t) = \hat{V} \sin \omega t$ avec $\hat{V}=180V$.

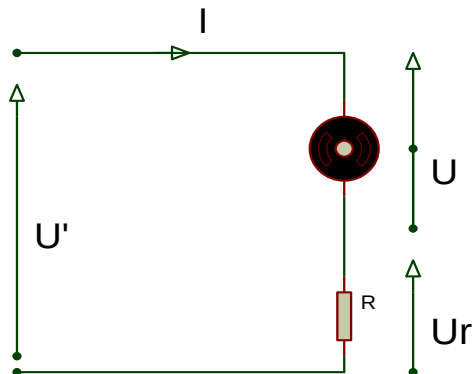


- 1- Faire des schémas permettant de visualiser simultanément i et U_c
- 2- Faire une étude qualitative du montage et déduire les chronogrammes de U_c ; i_s ; i_1 ; U_D .
- 3- Quelle est la valeur de la tension moyenne aux bornes de la charge si le retard à l'amorçage est $t=3ms$.
- 4- Exprimer U tension d'induit en fonction de la tension moyenne $\bar{U}$.
- 5- Sachant que la fréquence rotation du moteur est exprimée en tr/mn est $n = 11,3U - 45,3$. calculer n en fonction de α .
- 6- Calculer la valeur maximale possible pour n .
- 7- Quelle inégalité doit nécessairement vérifier α pour que le moteur démarre ?

III- Etude du capteur de vitesse

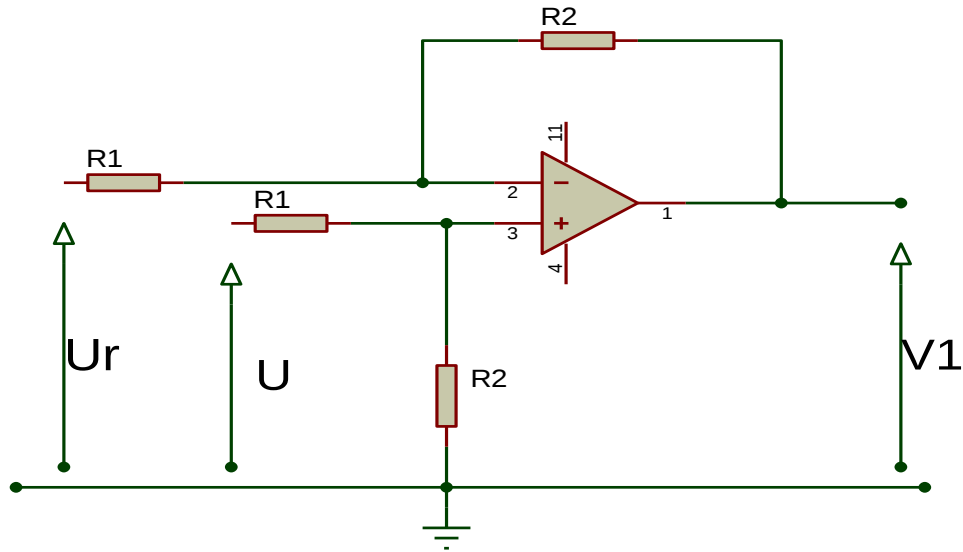
Les amplificateurs opérationnels sont parfaits. Ils sont polarisés par une alimentation symétrique $+15V$ et $-15V$. On admet que leurs tensions de saturation sont $+V_{sat}=+15V$ et $-V_{sat}=-15V$

- 1- Une résistance R est montée en série avec le moteur. (figure3)



- U est la tension aux bornes de l'induit du moteur de fém. E et de résistance R_A
- U' est la tension aux bornes de l'ensemble moteur - résistance

Les tensions U_R et U sont appliquées à l'entrée du montage de la figure 4



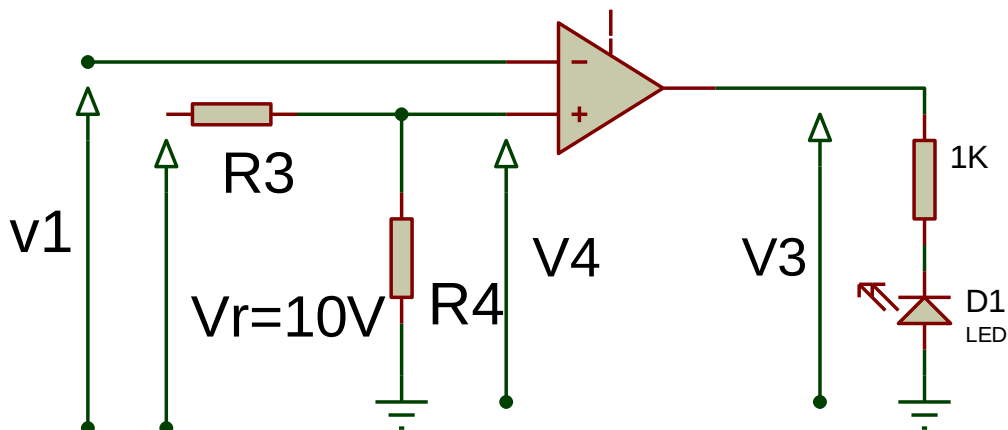
Le circuit amplificateur fonctionne en régime linéaire

- Calculer V^+ en fonction de U ; R_1 et R_2
- Calculer V^- en fonction de U_R ; R_1 ; R_2 et V_1
- Déterminer la relation entre U ; R_1 ; R_2 ; V_1 et U_R

Mettre sous la forme $V_1 = K (U - U_R)$ et déduire l'expression de K en fonction de R_1 et R_2

- Application : $R_A = R = 0,2\Omega$; $K = 1/20$; $E = 8,83 \cdot 10^{-3} n$ (n en tr/mn et E en Volt)
- Exprimer V_1 en fonction de n . quel est l'intérêt du montage ?
- Calculer V_1 pour $n=0$ puis pour $n=1250$ tr/min.

2- La tension V_1 est appliquée à l'entrée du montage de la figure 5



- Calculer la valeur numérique de V_4 .
- Si $V_1 = 3V$, quelle est la valeur de V_3 ? en déduire l'état de la LED (allumée ou éteinte)
- Si $V_1 = 6V$, quelle est la valeur de V_3 ? en déduire l'état de la LED
- Pour quelle valeur de n la LED change t'elle d'état ?

THEME II :**Problème 1: Moteur asynchrone Problème 2: Machine à courant continu****Problème 3: Pont redresseur****Problème 1 : Moteur asynchrone**

Un moteur asynchrone triphasé, dont le stator est couplé en triangle, a les caractéristiques nominales suivantes :

Puissance utile : **40 kW** ; tension aux bornes d'un enroulement : **220 V , 50 Hz** ;

Intensité en ligne : **131 A.** ; vitesse : **1455 tr/min.**

La résistance mesurée à chaud entre 2 bornes du stator est de **0,038 Ω**

Dans tout le problème, le moteur est alimenté par un réseau triphasé **220 V** entre phases, **50 Hz**.

Un essai à vide a donné : puissance absorbée : **$P_v = 1850W$** , intensité en ligne : **$I_v = 31,2 A$** .

Les pertes mécaniques, supposées constantes, sont égales à **$p_m = 740 W$** .

1°) Quel est le nombre de pôles du stator ?

2°) Calculer pour la charge nominale :

2.1. Le glissement

2.2. La puissance transmise au rotor

2.3. Les pertes du stator : - pertes dans le fer
 - pertes par effet Joule

2.4. La puissance absorbée

2.5. Le rendement et le facteur de puissance

2.6. Le moment du couple utile.

3°) La caractéristique mécanique $T_u(n)$ du moteur est assimilable, dans sa partie utile, à une portion de droite passant par les points : **($n = 1500 \text{ tr/min}$; $T_u = 0$)** et **($n = 1425 \text{ tr/min}$; $T_u = 430 \text{ N m}$)**.

3.1. Tracer la portion de caractéristique pour : **$1425 \text{ tr/min} < n < 1500 \text{ tr/min}$**

(échelle : 1 cm : 20 tr/min ; 1 cm : 25 Nm)

3.2. Le moteur fonctionne au-dessous de sa charge nominale : il entraîne une machine présentant un couple résistant indépendant de la vitesse et de moment **$G = 130 \text{ Nm}$** . Quelle est la vitesse du moteur ?

4°) On a connecté par erreur l'enroulement du stator en étoile sur le réseau **(220 V, 50 Hz)**.

4.1. Quelle est la tension aux bornes d'un enroulement du stator ?

4.2. Calculer le moment du couple utile T_u pour **$n = 1425 \text{ tr/min}$** , et tracer la nouvelle caractéristique mécanique **$T_u(n)$**

(On rappelle que, pour un glissement g fixé, le moment du couple utile est proportionnel au carré de la tension aux bornes d'un enroulement du stator).

4.3. Le moteur entraînant la même machine qu'à la question 3.2., quelle est la vitesse du moteur.

Problème 2 : Machine à courant continu

On a relevé, par un essai à vide, à 1800 tr/min, la caractéristique interne d'une machine à courant continu :

I_{ex} (A)	0,5	1	1,5	2	3	3,5	4
E (V)	32	60	83	100	122	130	139

Cette machine est utilisée en moteur à excitation indépendante. La réaction magnétique d'induit est négligeable. La résistance de l'induit est de **0,1 Ω** .

Dans tout le problème, l'induit est traversé par un courant constant d'intensité **$I = 10$ A**.

1°) Le courant d'excitation étant réglé à **$I_{ex} = 2,5$ A**, calculer la vitesse du moteur pour une tension d'alimentation de l'induit **$U = 100$ V**.

2°) Le courant d'excitation est maintenu constant **$I_{ex} = 2,5$ A**. L'induit est alimenté sous une tension U variable de 0 à 120 V.

2.1 Quelle tension minimale mesurera-t-on aux bornes de l'induit lorsque le moteur démarre ?

2.2. Montrer que le moment du couple électromagnétique C_{em} est constant, et calculer sa valeur.

2.3. Trouver la relation numérique entre n et U (n exprimé en tr/min), et préciser les valeurs extrêmes de n .

3°) La tension d'alimentation de l'induit reste maintenant également constante : **$U = 120$** . On fait varier la vitesse du moteur en diminuant l'intensité du courant d'excitation à partir de **2,5 A**.

3.1. Montrer que la f.é.m reste constante et calculer sa valeur.

3.2. Quel est le sens de variation de la vitesse ? Quelle valeur faut-il donner au courant d'excitation I_{ex} pour atteindre une vitesse de **2000 tr/min**, et quel est le moment du couple électromagnétique correspondant ?

Problème 3 : Pont redresseur

Un pont redresseur à 4 thyristors alimente sous tension U_{MN} un récepteur inductif (moteur à courant continu) à partir d'un réseau fournissant une tension sinusoïdale $v = V \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t)$, $V = 220 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$. On admettra que le récepteur est suffisamment inductif pour que le courant i qui le traverse soit considéré comme constant $i = I = 10 \text{ A}$.

Les thyristors TH1 et TH3 reçoivent sur leur gâchette des impulsions aux instants t_0 , $t_0 + T$, les thyristors TH2 et TH4 aux instants $t_0 + T/2$, $t_0 + 3T/2$ les thyristors sont supposés parfaits.

1°) Dans l'intervalle de temps $(t_0, t_0 + T)$, préciser et justifier la durée de conduction de chaque thyristor. On prendra t_0 tel que : $0 < t_0 < T/2$. Exprimer u_{MN} en fonction de v .

2°) Pour $t_0 = T/8$, représenter graphiquement :

- les tensions $v(t)$ et $u_{MN}(t)$;

- les courants i_1 , i_2 , et i_s .

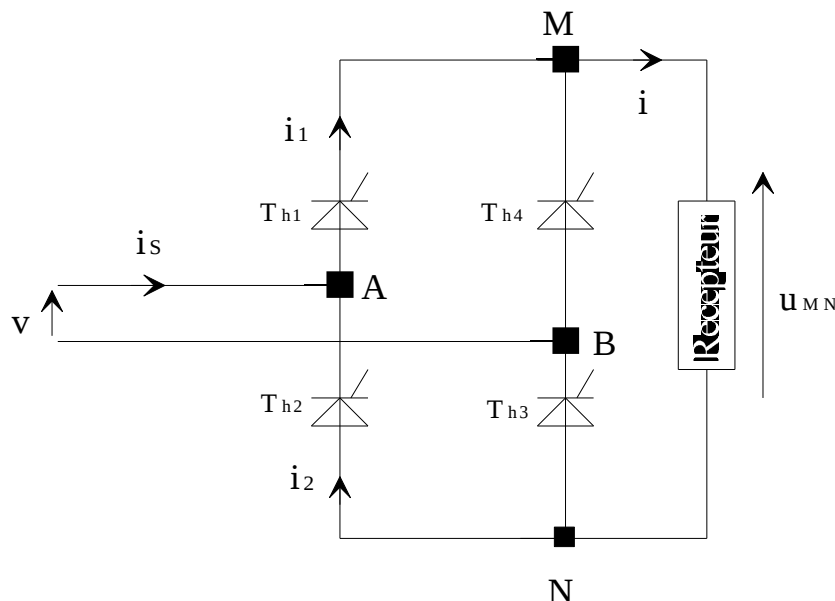
Les courbes seront tracées l'une au-dessous de l'autre, avec axes en correspondance, et même échelle des temps).

3°) Etablir la relation donnant la valeur moyenne $\bar{u}_{MN}$ de la tension u_{MN} en fonction de V et t_0

Calculer u_{MN} pour $t_0 = T/8$

Entre quelles valeurs varie $\bar{u}_{MN}$ lorsque t_0 varie de 0 à $T/4$?

4°) Pour $I = 10 \text{ A}$, $t_0 = T/8$, calculer la puissance absorbée par le récepteur.



THEME : 3**Problème 1 : Transformateur** **Problème 2 : Redressement triphasé****Problème 3 : Moteur asynchrone****Problème 1 : Transformateur monophasé**

Un transformateur monophasé de puissance apparente nominale $S_n = 27,6 \text{ kVA}$, de tension primaire nominale $U_{1n} = 8,6 \text{ kV}$, fonctionne à la fréquence $f = 50 \text{ Hz}$.

L'indice 1 aura trait aux grandeurs primaires et l'indice 2 aux grandeurs secondaires.

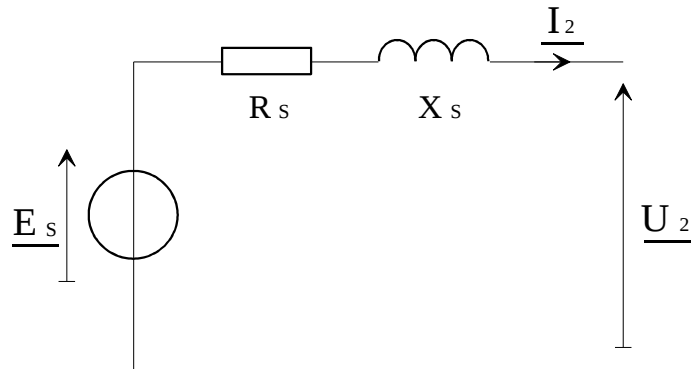
On mesure dans un essai à vide, sous tension primaire nominale, la tension secondaire $U_{20} = 132 \text{ V}$ et la puissance absorbée $P_{10} = 133 \text{ W}$.

On mesure dans un essai en court-circuit : $U_{1cc} = 289 \text{ V}$, $P_{1cc} = 485 \text{ W}$ et $I_{2cc} = 210 \text{ A}$

1°) Le transformateur est alimenté sous U_{1n} , la section du noyau est $S = 380 \text{ cm}^2$, le champ magnétique B maximale dans le noyau vaut $1,2 \text{ T}$, quel est le nombre de spires N_1 de l'enroulement primaire ?

2°) Calculer le rapport de transformation m .

On donne le schéma équivalent au transformateur vu de la charge :



3°) Essai en court-circuit.

3. a) Montrer que les pertes fer sont négligeables, dans cet essai, en supposant qu'elles sont proportionnelles au carré de la tension d'alimentation.

3. b) D'après les valeurs mesurées, calculer R_s et X_s .

4°) On suppose dans cette question que $R_s = 11,0 \text{ m}\Omega$ et $X_s = 18 \text{ m}\Omega$. Le transformateur débite $I_2 = 210 \text{ A}$ sur une charge inductive de facteur de puissance $\cos \Phi = 0,75$. Déterminer la tension secondaire U_2 .

5°) Dédire des essais à vide et en court-circuit, les pertes fer et les pertes joules, pour la charge.

4°. Calculer ensuite le rendement pour la même charge.

Problème 2 : Redressement triphasé**Problème 3 : Moteur asynchrone**

Les deux parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

Un moteur asynchrone à rotor bobiné possède **4 pôles**. Il est couplé en étoile. Dans tout le problème, il entraîne une machine lui imposant un couple constant de moment **$T_r = 40 \text{ N.m}$** . Les pertes mécaniques sont suffisamment faibles pour que l'on puisse les négliger devant les autres puissances mises en jeu et considérer que le couple utile est égal au couple électromagnétique. La résistance de chaque enroulement du stator est **$r = 0,5 \Omega$**

1.) Le moteur est alimenté par un réseau de tension composée 380 V - 50 Hz.

Dans ces conditions :

- il absorbe un courant d'intensité : **$I = 14,5 \text{ A}$** ;

- les pertes magnétiques sont : **$P_{fs} = 150 \text{ W}$** ;

- la caractéristique du couple **T** (en N.m) en fonction de la fréquence de rotation **n** (en tr./min) est donnée figure 1 (page 6/8).

1.1. Dire pourquoi on peut réaliser le démarrage direct du moteur en charge.

1.2. Quelle est la fréquence de rotation de synchronisme en tr./min ?

1.3. Utiliser la caractéristique **$T(n)$** de la figure 3.1 pour trouver la fréquence de rotation en charge. En déduire la valeur du glissement.

1.4. Calculer la puissance utile du moteur.

1.5. Calculer le rendement du rotor et les pertes par effet Joule au rotor. (on rappelle que le couple électromagnétique ou couple transmis au rotor est égal au couple utile) .

1.6. Calculer les pertes par effet Joule au stator.

1.7. Calculer la puissance absorbée par le moteur, son rendement et son facteur de puissance.

2.) On se propose de faire varier la fréquence de rotation du moteur de façon à réaliser le point de fonctionnement suivant : **$T = 40 \text{ N.m}$; $n = 1140 \text{ tr. /min}$** .

On fait varier la fréquence f du réseau d'alimentation, de même que la tension V aux bornes de chaque enroulement du moteur, en imposant le rapport **$V/f = \text{constante}$** .

Les caractéristiques $T(n)$ avec f comme paramètre sont données figure 3.2 (page 7/8).

2.1. Quelle doit être la fréquence f pour réaliser le même point de fonctionnement que ci-dessus (**$T = 40 \text{ N.m}$; $n = 1140 \text{ tr./min}$**) ?

2.2 Calculer le glissement.

PARTIE B

Pour réaliser l'alimentation à fréquence et tension variables du moteur asynchrone, on utilise un onduleur. L'étude porte uniquement sur une phase du réseau. L'onduleur, dont le schéma de principe est donné figure 3.3 est donc monophasé et alimente un enroulement du moteur. La tension v aux bornes de la bobine est représenté figure 4. Le courant i traversant la bobine peut-être considéré comme sinusoïdal de pulsation ω . Les graphes de v et i en fonction de $\theta = \omega.t$ sont représentés figure 3.4 (page 8/8).

1. La valeur efficace V de v doit être $V = 220$ V. Calculer la valeur de la tension continue d'alimentation E .
2. Indiquer sur la figure 3.5 entre 0 et 2π , en suivant le modèle propose pour T_1 et T_2 , T_3 et T_4 , les intervalles pendant lesquels les diodes sont traversées par un courant.
3. Indiquer les différentes phases de fonctionnement :
 - Alimentation ;
 - Roue libre ;
 - Récupération.

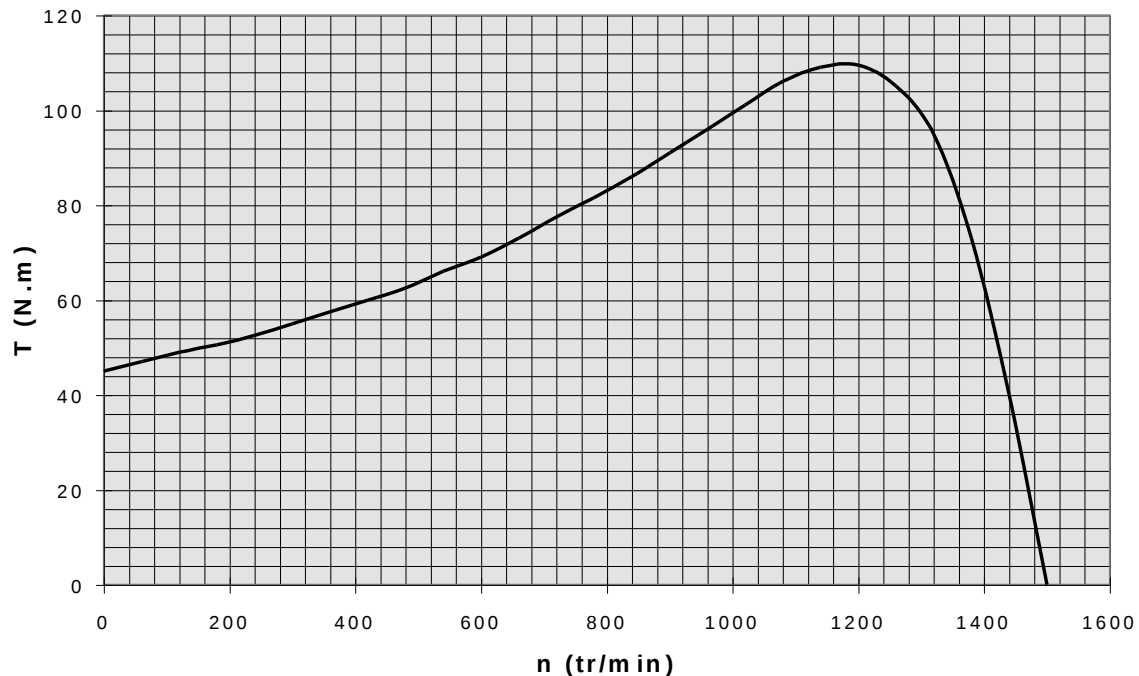
figure 3.1

figure 3.2

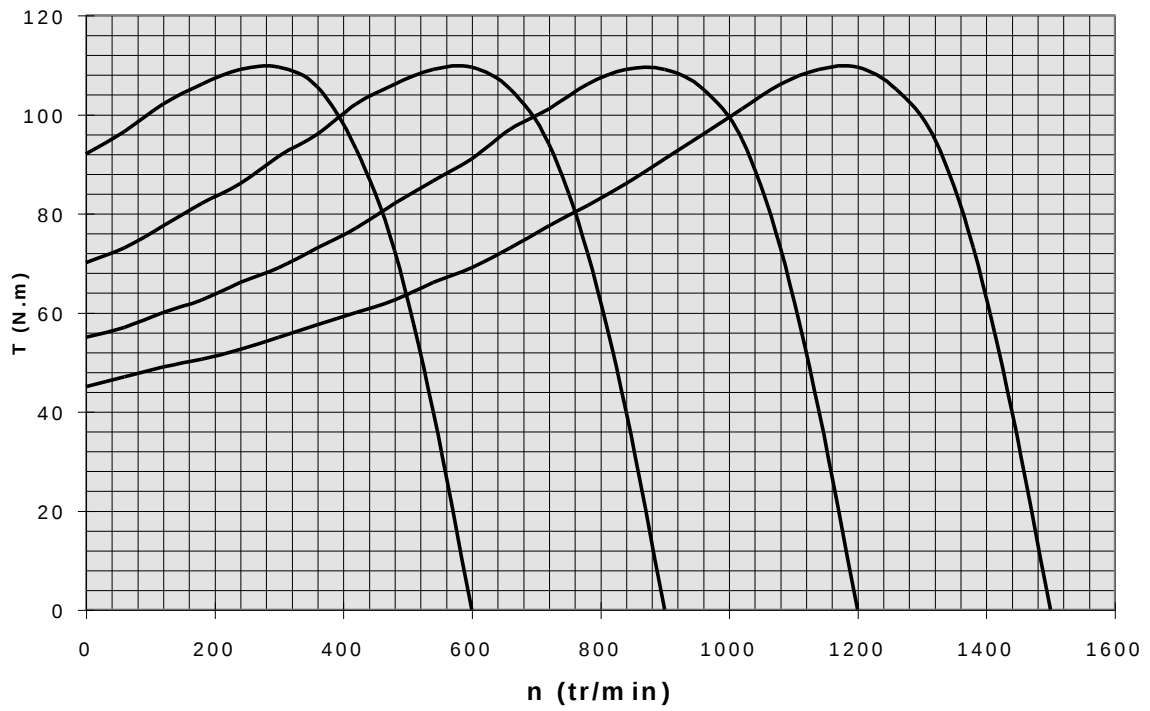
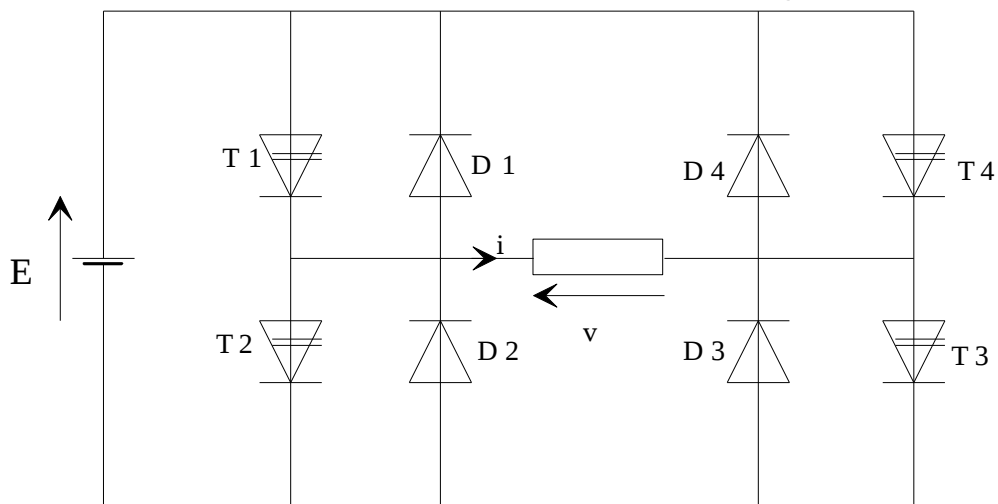
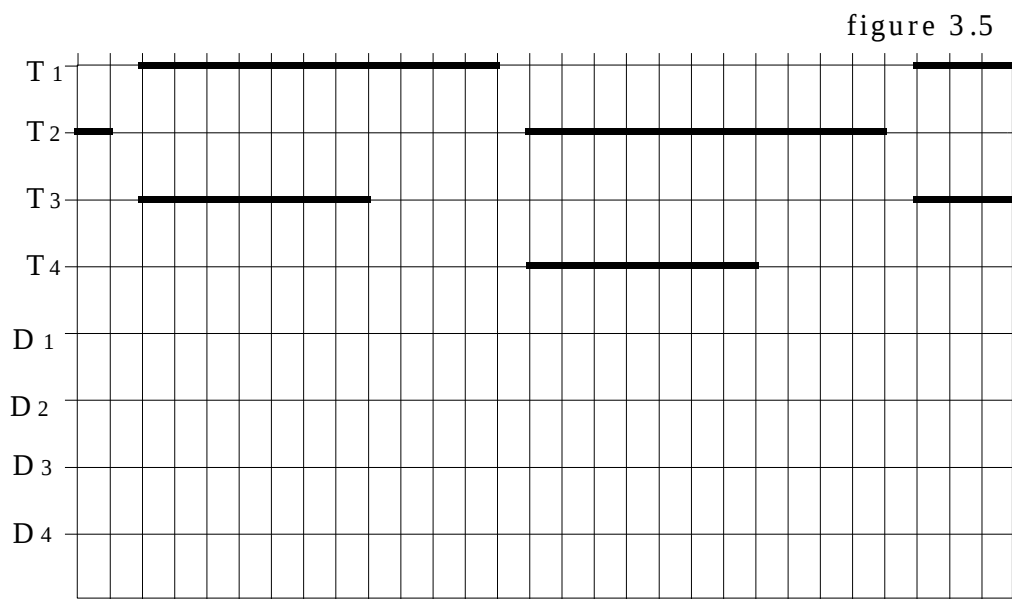
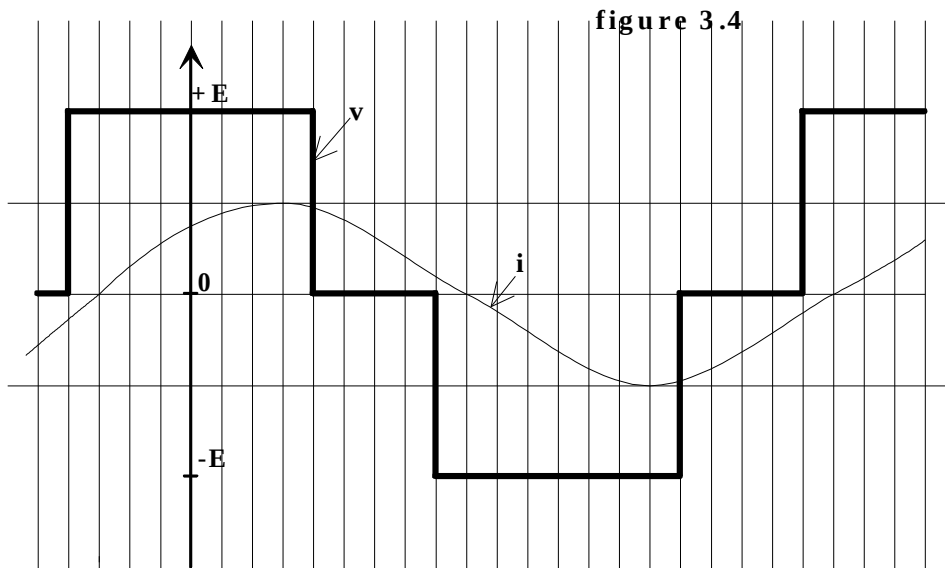


figure 3.3





Epreuve de spécialité**Durée : 4h**

Une automobile électrique est équipée d'un moteur électrique à courant continu parfaitement compensé et dont l'excitation séparée est maintenue constante.

L'induit du moteur est alimenté par des batteries de traction cadmium-nickel.

1. ETUDE DU MOTEUR

Le moteur à courant continu à excitation indépendante, fonctionnant à flux constant, possède les caractéristiques suivantes :

tension d'alimentation de l'induit : $U_N = 100 \text{ V}$
intensité dans l'induit : $I_N = 105 \text{ A}$,
résistance de l'induit : $R = 0,050 \Omega$,
fréquence de rotation : $n_N = 1800 \text{ tr / min}$,
tension d'alimentation de l'inducteur : $u_{ex} = 108 \text{ V}$,
intensité d'excitation : $i_{ex} = 1,5 \text{ A}$,
moment du couple utile nominal : $T_{uN} = 50 \text{ N.m}$.

1.1. Fonctionnement nominal

- 1.1.1. Calculer pour le fonctionnement nominal, la puissance utile du moteur : P_{uN} .
- 1.1.2. Calculer pour le fonctionnement nominal, les pertes collectives : P_c .
- 1.1.3. En déduire le moment du couple associé aux pertes collectives : T_c .
- 1.1.4. En considérant que P_c est proportionnel à la fréquence de rotation, que peut-on conclure pour T_c .

1.2. Fonctionnement sous tension variable

- 1.2.1. Montrer que dans les conditions d'utilisation de ce moteur, l'expression de la f.é.m peut se réduire à $E = k n_{(tr/min)}$; calculer la valeur numérique de k et préciser son unité.
- 1.2.2. Montrer que dans les conditions d'utilisation de ce moteur, l'expression du moment du couple électromagnétique peut se réduire à $T_{em} = K I$; calculer la valeur numérique de K et préciser son unité.
- 1.2.3. Ce moteur entraîne une charge dont le moment du couple résistant à pour valeur $T_r = 50 \text{ N.m}$; calculer la valeur I de l'intensité dans l'induit.
- 1.2.4. Exprimer : $n_{(tr/min)} = f | U |$.
- 1.2.5. Tracer : $n_{(tr/min)} = f | U |$; on précisera la valeur de la tension au démarrage.

2. ETUDE DU MOTEUR SUR L'AUTOMOBILE

L'automobile est équipé d'un groupement de batteries(18) montées en série et présentant une f.é.m globale $E_g = 108 \text{ V}$.

L'inducteur est alimenté directement par le groupement et l'intensité est maintenue constante.

2.1. Alimentation de l'induit par les batteries

Sur le montage représenté ci-après :

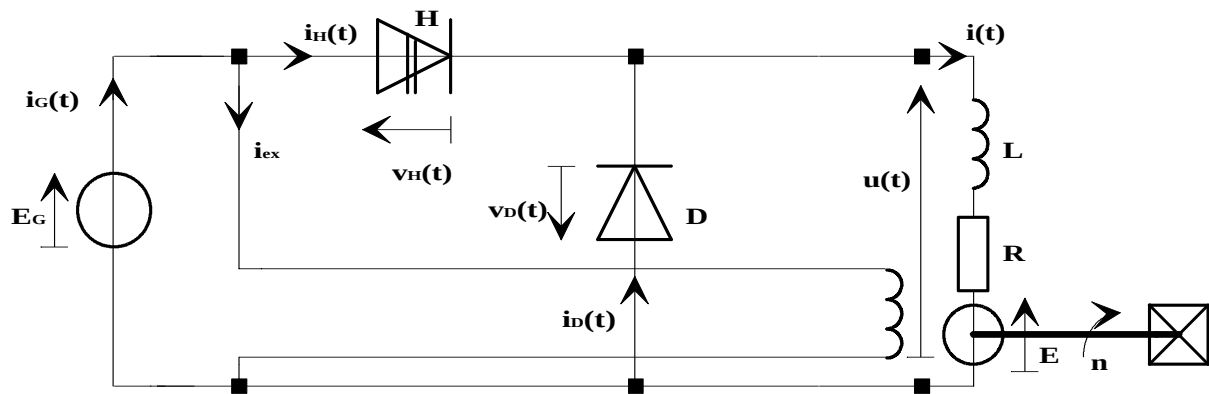
L'interrupteur **H** et la diode de roue libre sont supposés parfaits ; l'inductance de lissage est suffisamment grande pour que l'intensité dans l'induit soit considérée comme parfaitement lissée. L'interrupteur **H** est alternativement fermé et ouvert à la fréquence **f**.

On suppose que sur la durée d'une période **T** :

l'interrupteur **H** est fermé sur l'intervalle de temps $[0, \alpha T]$,

l'interrupteur **H** est ouvert sur l'intervalle de temps $[\alpha T, T]$.

α désigne le rapport cyclique du hacheur $0 \leq \alpha \leq 1$.



On prendra $\alpha = 0,6$ pour les représentations graphiques.

2.1.1. Représenter $u(t)$ sur l'intervalle $[0, 2T]$.

2.1.2. Représenter $i_H(t)$, $i_D(t)$ et $i(t)$ sur l'intervalle $[0, 2T]$.

2.1.3. Donner l'expression des valeurs moyennes de $i_H(t)$, $i_D(t)$ et $i(t)$.

2.1.4. Etablir : $\langle u(t) \rangle = f(\alpha, E_G)$.

2.1.5. Etablir : $\langle u(t) \rangle = f(I, R, E)$.

2.1.6 Etablir : $n_{(tr/min)} = f(\alpha, R, E_G, I, k)$.

2.2. Véhicule à l'arrêt

Le véhicule étant à l'arrêt, le moteur tourne à vide, au ralenti : $n_0 = 400 \text{ tr/min}$.

2.2.1. Déterminer la valeur du couple électromagnétique T_{em0} et l'intensité dans l'induit I_0 .

2.2.2. Calculer la valeur de α_0 correspondant à ce fonctionnement.

2.3. Démarrage

Durant la phase de démarrage le moment du couple utile est égal à sa valeur nominale et reste constant.

La fréquence de rotation passe de $n_1 = 800 \text{ tr/min}$ à $n_N = 1800 \text{ tr/min}$.

2.3.1 Quelle est la valeur de l'intensité durant cette phase ; est-elle constante?

2.3.2 Calculer les valeurs extrêmes du rapport cyclique durant cette phase ; on les notera : α_1 , α_n .

2.4. Déplacement

Durant la phase de déplacement le moment du couple utile est égal à sa valeur nominale et reste constant.

La fréquence de rotation reste constante et égale à sa valeur nominale.

2.4.1. Calculer la puissance moyenne reçue par l'induit du moteur : $\langle p_{IM}(t) \rangle$.

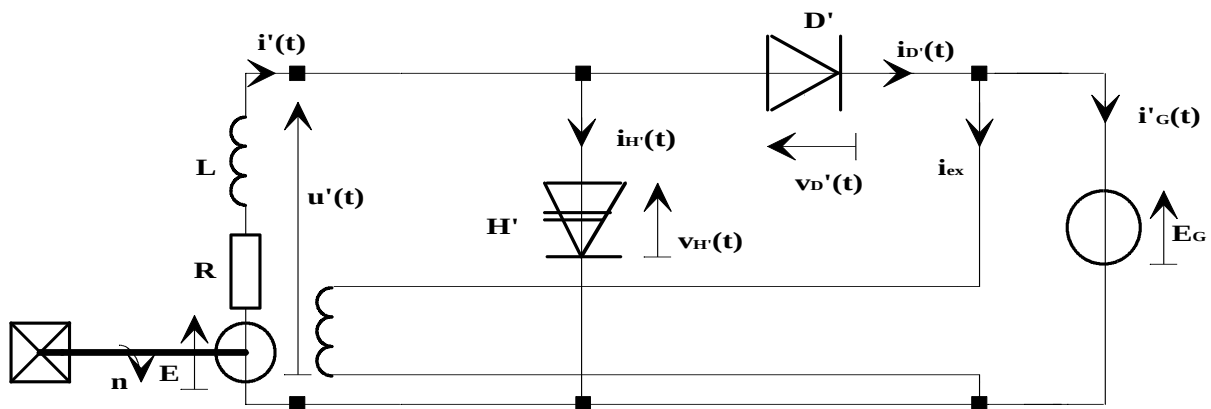
2.4.2. Représenter $i_G(t)$.

2.4.3. Calculer le rendement du montage complet η .

2.5. Freinage par récupération (hors programme)

Pendant un bref ralentissement, l'induit du moteur est entraîné dans sa rotation par le véhicule.

L'induit du moteur est associé au groupement de batteries par l'intermédiaire d'un hacheur parallèle.



L'interrupteur H' et la diode D' sont supposés parfaits ; l'inductance de lissage est suffisamment grande pour que l'intensité dans l'induit soit considérée comme parfaitement lissée.

L'interrupteur H' est alternativement fermé et ouvert à la fréquence f .

On suppose que sur la durée d'une période T :

l'interrupteur H' est fermé sur l'intervalle de temps $[0, \beta T]$;

l'interrupteur H' est ouvert sur l'intervalle de temps $[\beta T, T]$;

β désigne le rapport cyclique du hacheur $0 \leq \beta \leq 1$.

On prendra $\beta = 0,6$ pour les représentations graphiques.

2.5.1. Représenter $u'(t)$ sur l'intervalle $[0, 2T]$.

2.5.2. Représenter $i_H(t)$, $i_D(t)$ et $i'(t)$ sur l'intervalle $[0, 2T]$.

2.5.3. Donner l'expression des valeurs moyennes de $i_H(t)$, $i_D(t)$ et $i'(t)$.

2.5.4. Calculer la valeur moyenne de l'intensité reçue par la batterie si le véhicule fournit le couple utile nominal au moteur et si il tourne à la vitesse nominale au début de la phase de freinage.

2.5.5. Calculer la puissance reçue par la batterie : $\langle p'_G(t) \rangle$.

2.5.6. Représenter $i'_G(t)$.

2.5.7. Calculer le rendement du montage complet η' au début de la phase de freinage.