

Topologie des espaces métriques

Pr Toussaint SOHOU

20 Août 2021

Chapitre I. Espaces métriques

1.1. Distances

1.1.1. Définition : Soit E un ensemble non vide. On appelle *distance* sur E , toute application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les conditions suivantes :

- i) $\forall (x, y) \in E \times E, d(x, y) = 0 \iff x = y$
- ii) $\forall (x, y) \in E \times E, d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
- iii) $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

1.1.2. Définition : On appelle *espace métrique*, tout ensemble E muni d'une distance d .

Exemples :

1) Sur $\mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{C}$), l'application d définie par $d(x, y) = |x - y|$ est une distance appelée la distance usuelle de $\mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{C}$).

2) Soit E un ensemble non vide. On pose $\forall (x, y) \in E \times E$

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Alors d est une distance sur E . Cette distance est appelée *la distance discrète*.

1.1.3. Proposition : Soit (E, d) un espace métrique.

$$\forall (x, y, z) \in E^3, |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y).$$

Preuve :

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \implies d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y)$$

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) \implies d(y, z) - d(x, z) \leq d(y, x). \text{ Or } d(x, y) = d(y, x).$$

$$\text{Alors } |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y).$$

1.1.4. Distances équivalentes

Définition : Deux distances d_1 et d_2 sur un ensemble E sont dites équivalentes s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall (x, y) \in E \times E$

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y).$$

Remarque : De l'inégalité précédente on déduit que $\forall (x, y) \in E \times E$

$$\frac{1}{\beta} d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \frac{1}{\alpha} d_2(x, y).$$

1.1.5. Sous-espaces métriques

Définition : Soit F une partie non vide d'un espace métrique (E, d) . La restriction $d_F = d|_{F \times F}$ de la distance d à $F \times F$ est une distance sur F et (F, d_F) est un espace métrique appelé *sous-espace métrique* de (E, d) .

Exemples : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sont des sous-espaces métriques de $\mathbb{R}$ pour la distance usuelle.

1.1.6. Espaces métriques produits

Proposition et définition : Soient $(E_1, d_1), \dots, (E_n, d_n)$ des espaces métriques. Soit $E = E_1 \times \dots \times E_n$. Soient δ_∞, δ_1 et δ_2 définies par $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E, \forall y = (y_1, \dots, y_n) \in E$

$$\begin{aligned} \delta_\infty(x, y) &= \sup_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i) \\ \delta_1(x, y) &= \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i) \\ \delta_2(x, y) &= \left[\sum_{i=1}^n d_i^2(x_i, y_i) \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Alors δ_∞, δ_1 et δ_2 sont des distances sur E et elles sont équivalentes.

E muni de l'une de ces trois distances est appelé *espace métrique produit* de $(E_1, d_1), \dots, (E_n, d_n)$.

Remarque : Pour l'équivalence des trois distances, on a par exemple

$$\delta_\infty \leq \delta_1 \leq \sqrt{n} \delta_2 \leq n \delta_\infty$$

Exemple : $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) est un espace métrique produit, les distances δ_∞, δ_1 et δ_2 étant définies par $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), $\forall y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$)

$$\begin{aligned} \delta_\infty(x, y) &= \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \\ \delta_1(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \\ \delta_2(x, y) &= \left[\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

1.2. Normes

1.2.1. Définition : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle *norme* sur E toute application $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les conditions suivantes :

$$(i) \quad \forall x \in E, \|x\| = 0 \iff x = 0$$

- (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
 (iii) $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

1.2.2. Définition : On appelle *espace vectoriel normé*, tout espace vectoriel muni d'une norme.

1.2.3. Proposition : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

$$\forall x, y \in E, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

Preuve :

$x = (x - y) + y$. Alors $\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$. Donc $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.

De même $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$. Et comme $\|x - y\| = \|y - x\|$, on conclut que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

1.2.4. Définition : Soit E un espace vectoriel. Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites *équivalentes* s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall x \in E$

$$\alpha N_2(x) \leq N_1(x) \leq \beta N_2(x).$$

1.2.5. Exemples

1) Sur $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'application $x \in E \mapsto |x| \in \mathbb{R}^+$ est une norme appelée la norme usuelle de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2) Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soient ν_∞, ν_1 et ν_2 définies sur E par $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, où $x_i \in \mathbb{K}, \forall i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \nu_\infty(x) &= \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \\ \nu_1(x) &= \sum_{i=1}^n |x_i| \\ \nu_2(x) &= \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Alors ν_∞, ν_1 et ν_2 sont trois normes équivalentes sur E .

1.2.6. Proposition et définition : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On définit une distance d sur E en posant

$$\forall (x, y) \in E \times E, d(x, y) = \|x - y\|.$$

Cette distance d est appelée la *distance associée à la norme $\|\cdot\|$* (ou *distance induite par la norme $\|\cdot\|$*).

On déduit de cette proposition les remarques suivantes :

1.2.7. Remarques :

- 1) Tout espace vectoriel normé est un espace métrique. Mais une distance n'induit pas nécessairement une norme.
- 2) Deux normes sont équivalentes si et seulement si les distances associées sont équivalentes.

1.2.8. Espace vectoriel normé produit

1.2.8.1. Proposition et définition : Soient $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ des espaces vectoriels normés. Soient N_∞, N_1 et N_2 définies sur l'espace vectoriel produit $E = E_1 \times \dots \times E_n$ par $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E$

$$\begin{aligned} N_\infty(x) &= \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_i \\ N_1(x) &= \sum_{i=1}^n \|x_i\|_i \\ N_2(x) &= \left[\sum_{i=1}^n \|x_i\|_i^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Alors N_∞, N_1 et N_2 sont trois normes sur E et elles sont équivalentes.

L'espace vectoriel produit E muni de l'une de ces trois normes est appelé *espace vectoriel normé produit* de $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_n, \|\cdot\|_n)$.

1.2.8.2. Exemple : La structure usuelle d'espace vectoriel normé de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ est obtenue en prenant l'une des trois normes usuelles équivalentes définies par $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} N_\infty(x) &= \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \\ N_1(x) &= \sum_{i=1}^n |x_i| \\ N_2(x) &= \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

1.3. Topologie des espaces métriques

1.3.1. Boules dans un espace métrique

1.3.1.1. Définition : Soit (E, d) un espace métrique. Soit $a \in E$ et soit $r \in \mathbb{R}^+$. On appelle *boule ouverte* de centre a et de rayon r l'ensemble

$$B(a, r) = \{x \in E / d(a, x) < r\}.$$

On appelle *boule fermée* de centre a et de rayon r l'ensemble

$$B_f(a, r) = \{x \in E / d(a, x) \leq r\}.$$

On appelle *sphère* de centre a et de rayon r l'ensemble

$$S(a, r) = \{x \in E / d(a, x) = r\}.$$

1.3.1.2. Remarque : Si $r = 0$, alors $B(a, r) = \emptyset$, $B_f(a, r) = \{a\}$, $S(a, r) = \{a\}$.

1.3.1.3. Exemple : Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle,

$$\begin{aligned} B(a, r) &=]a - r, a + r[\\ B_f(a, r) &= [a - r, a + r] \\ S(a, r) &= \{a - r, a + r\} \end{aligned}$$

1.3.2. Diamètre d'une partie

1.3.2.1. Définition : Soit A une partie non vide d'un espace métrique (E, d) . On appelle *diamètre* de A , et on note $\delta(A)$, l'élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini par

$$\delta(A) = \sup \{d(x, y) \mid (x, y) \in A \times A\}.$$

On dit que A est *bornée* si $\delta(A)$ est fini.

1.3.2.2. Remarque : Si $A = \emptyset$ on pose $\delta(A) = 0$.

1.3.2.3. Proposition : Soit A une partie non vide d'un espace métrique (E, d) .

A est bornée si et seulement si A est contenue dans une boule (ouverte ou fermée) de (E, d) .

Preuve :

CN : Supposons A bornée. Alors $\delta(A) \in \mathbb{R}^+$. Soit $a \in A$. Alors, pour tout $x \in A$, $d(a, x) \leq \delta(A)$.

Donc $A \subset B_f(a, \delta(A))$.

CS : Supposons $A \subset B(a, r)$. Alors $\forall (x, y) \in A \times A$, $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < 2r$.

Donc l'ensemble $\{d(x, y) \mid (x, y) \in A \times A\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Alors il admet une borne supérieure M dans $\mathbb{R}$.

Et comme $\forall (x, y) \in A \times A$, $0 \leq d(x, y) \leq M$, alors $M \in \mathbb{R}^+$. Donc $\delta(A) = M \in \mathbb{R}^+$. Par conséquent A est bornée.

1.3.2.4. Définition : Soit X un ensemble. Soit (E, d) un espace métrique. Soit $f : X \rightarrow E$ une application. On dit que f est une *application bornée* si $f(X)$ est une partie bornée de (E, d) . On dit que f est bornée sur une partie A de X si $f(A)$ est une partie bornée de (E, d) .

1.3.2.5. Proposition et définition : Soit X un ensemble. Soit (E, d) un espace métrique. Soit $\mathcal{F}_b(X, E)$ l'espace des applications bornées de X dans E .

On pose $\forall f, g \in \mathcal{F}_b(X, E)$,

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Alors d_∞ est une distance sur $\mathcal{F}_b(X, E)$ appelée la *distance de la convergence uniforme*.

Preuve : Soient $f, g \in \mathcal{F}_b(X, E)$. Alors

$\exists r_1 > 0$ et $\exists y_1 \in E$ tels que $\forall x \in X$, $d(y_1, f(x)) < r_1$ et

$\exists r_2 > 0$ et $\exists y_2 \in E$ tels que $\forall x \in X$, $d(y_2, g(x)) < r_2$. Donc

$$\forall x \in X, d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), y_1) + d(y_1, y_2) + d(y_2, g(x)) < r_1 + r_2 + d(y_1, y_2).$$

Alors

$$\sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \leq r_1 + r_2 + d(y_1, y_2).$$

Donc $\forall f, g \in \mathcal{F}_b(X, E)$, $d_\infty(f, g) \in \mathbb{R}^+$.

Montrer les autres conditions pour avoir une distance.

1.3.3. Ouverts, fermés d'un espace métrique

1.3.3.1. Définition : Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'une partie O de E est *un ouvert* de (E, d) si pour tout $a \in O$, il existe une boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$ contenue dans O .

On dit qu'une partie F de E est *un fermé* de (E, d) si son complémentaire dans E est un ouvert de (E, d) .

Un ouvert est aussi appelé *une partie ouverte*. Un fermé est aussi appelé *une partie fermée*.

1.3.3.2. Proposition : Soit (E, d) un espace métrique. Alors E et $\emptyset$ sont des ouverts de (E, d) .

Preuve : - $\forall a \in E$, $B(a, 1) \subset E$. Donc E est un ouvert.

(On remarque que $\forall r > 0$, $B(a, r) \subset E$).

- La proposition : " $\forall a \in \emptyset$, $\exists r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \emptyset$ " est vraie car sa négation est fausse. Donc $\emptyset$ est un ouvert.

1.3.3.3. Corollaire : Soit (E, d) un espace métrique. Alors E et $\emptyset$ sont des fermés de (E, d) .

1.3.3.4. Proposition : Toute boule ouverte d'un espace métrique (E, d) est un ouvert de (E, d) .

Preuve : Soit $B(a, r)$ une boule ouverte de (E, d) .

- Si $r = 0$ alors $B(a, r) = \emptyset$ donc c'est un ouvert.

- Si $r > 0$, soit $x \in B(a, r)$. Posons $\epsilon = r - d(a, x)$. Alors $B(x, \epsilon) \subset B(a, r)$.

En effet, $\forall y \in B(x, \epsilon)$, $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + \epsilon = r$.

Donc $y \in B(a, r)$. Par conséquent $B(a, r)$ est un ouvert.

1.3.3.5. Proposition : Toute boule fermée d'un espace métrique (E, d) est un fermé de (E, d) .

Preuve : Soit $B_f(a, r)$ une boule fermée de (E, d) .

- Si $r = 0$ alors $B_f(a, r) = \{a\}$. Soit $x \in C_E^{\{a\}}$. Posons $\epsilon = \frac{1}{3}d(a, x)$. Alors $a \notin B(x, \epsilon)$. Donc $B(x, \epsilon) \subset C_E^{\{a\}}$. Par conséquent $C_E^{\{a\}}$ est ouvert. Donc $\{a\}$ est un fermé.

- Si $r > 0$, soit $x \in C_E^{B_f(a, r)}$. Alors $d(a, x) > r$. Posons $\epsilon = d(a, x) - r$.

$\forall y \in B(x, \epsilon)$, $d(x, y) < \epsilon = d(a, x) - r$.

Alors $r < d(a, x) - d(x, y) = |d(a, x) - d(x, y)| \leq d(a, y)$. Donc $y \in C_E^{B_f(a, r)}$.

Par conséquent $B(x, \epsilon) \subset C_E^{B_f(a, r)}$. Alors $C_E^{B_f(a, r)}$ est ouvert. Donc $B_f(a, r)$ est un fermé.

1.3.3.6. Remarque : Nous venons de montrer que tout singleton $\{a\}$ d'un espace métrique (E, d) est un fermé de (E, d) .

1.3.3.7. Proposition : Dans $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle,

(i) tout intervalle ouvert est un ouvert

(ii) tout intervalle fermé est un fermé.

Preuve : (i) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

- Si $I =]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $I = B(c, r)$ où $c = \frac{a+b}{2}$ et $r = \frac{b-a}{2}$.

Donc I est un ouvert.

- Si $I =]a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$, pour tout $c \in I$ posons $r = \frac{1}{2}d(a, c)$. Alors $B(c, r) \subset I$.

En effet, $\forall x \in B(c, r)$, $d(c, x) < r < d(a, c)$ i.e. $|x - c| < |c - a| = c - a$. Alors $a - c < x - c < c - a$. Donc $a < x$ et ainsi $x \in I$. Alors $B(c, r) \subset I$. Donc I est un ouvert.

- Si $I =]-\infty, a[$ avec $a \in \mathbb{R}$, de façon analogue au cas précédent, on montre que I est un ouvert.

- Si $I =]-\infty, +\infty[$ alors $I = \mathbb{R}$ qui est un ouvert.

(ii) Soit J un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.

- Si $J = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $J = B_f(c, r)$ où $c = \frac{a+b}{2}$ et $r = \frac{b-a}{2}$.

Donc J est un fermé.

- Si $J = [a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors $C_{\mathbb{R}}^J =]-\infty, a[$ qui est un ouvert, donc J est un fermé.

- De même si $J =]-\infty, a]$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors J est un fermé.

1.3.3.8. Remarque : La négation de " A est un ouvert" n'est pas " A est un fermé" !

- Il existe des parties qui ne sont ni ouvertes, ni fermées.

Exemple : Dans $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle, $A = [0, 1[$ n'est ni ouvert, ni fermé.

A n'est pas un ouvert car $\forall r > 0$, $B(0, r) \not\subset A$.

$C_{\mathbb{R}}^A =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$ n'est pas un ouvert car $\forall r > 0$, $B(1, r) \not\subset C_{\mathbb{R}}^A$. Donc A n'est pas un fermé.

- Il existe des parties qui sont à la fois ouvertes et fermées.

Exemple : Dans un espace métrique (E, d) , E et $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés.

1.3.4. Propriétés des ouverts et des fermés

1.3.4.1. Proposition : La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est un ouvert.

Preuve : Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'ouverts d'un espace métrique (E, d) .

Posons $O = \bigcup_{i \in I} O_i$. Si $O = \emptyset$ alors c'est un ouvert.

Si $O \neq \emptyset$, soit $x \in O$. Alors $\exists i \in I$ tel que $x \in O_i$. Comme O_i est un ouvert, $\exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O_i$.

Alors $B(x, r) \subset O$. Donc O est un ouvert.

1.3.4.2. Corollaire : Dans un espace métrique (E, d) , la sphère $S(a, r)$ est un fermé.

Preuve : $C_E^{S(a,r)} = B(a,r) \cup C_E^{B_f(a,r)}$ qui est un ouvert car réunion d'ouverts.
Donc $S(a,r)$ est un fermé.

1.3.4.3. Proposition : L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.

Preuve : Soient $O_1, \dots, O_n$ un nombre fini d'ouverts d'un espace métrique (E, d) .

Posons $O = \bigcap_{i=1}^n O_i$. Si $O = \emptyset$ alors c'est un ouvert.

Si $O \neq \emptyset$, soit $x \in O$. Alors $x \in O_i, \forall i = 1, \dots, n$. Comme O_i est ouvert, $\exists r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset O_i$.

Posons $r = \min_{1 \leq i \leq n} r_i$. Alors $r > 0$ et $B(x, r) \subset O_i, \forall i = 1, \dots, n$. Donc $B(x, r) \subset O$. Par conséquent O est un ouvert.

1.3.4.4. Remarque : Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert.

Par exemple dans $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle, soit $I_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} I_n = \{0\}$.

En effet, soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$. Alors $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Donc en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $0 \leq x \leq 0$. Alors $x = 0$.

$\{0\}$ n'est pas un ouvert car $\forall r > 0, B(0, r) =]-r, r[\not\subset \{0\}$.

En passant aux complémentaires et en utilisant les résultats :

$$C_E \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} C_E^{A_i} \quad \text{et} \quad C_E \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} C_E^{A_i}$$

on obtient :

1.3.4.5. Proposition :

(i) L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.

(ii) La réunion d'un nombre fini de fermés est un fermé.

1.3.4.6. Remarque : Nous avons vu les trois propriétés fondamentales suivantes des ouverts d'un espace métrique (E, d) :

- 1) E et $\emptyset$ sont des ouverts.
- 2) Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
- 3) Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Pour ces trois propriétés, on dit que l'ensemble $\mathcal{O}$ des ouverts d'un espace métrique (E, d) définit une *topologie* sur E ou que $(E, \mathcal{O})$ est un *espace topologique*.

De façon générale, on a la définition suivante :

1.3.4.7. Définition : Soit E un ensemble et $\mathcal{T}$ une famille de parties de E vérifiant les conditions suivantes :

- 1) E et $\emptyset$ sont des éléments de $\mathcal{T}$.
- 2) Toute réunion d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$.
- 3) Toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$.

On dit que $\mathcal{T}$ définit une *topologie* sur E ou que $(E, \mathcal{T})$ est un *espace topologique*.

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les *ouverts* de $(E, \mathcal{T})$.

1.3.4.8. Exemples : 1) Si $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E , alors $(E, \mathcal{P}(E))$ est un espace topologique. La topologie obtenue est appelée la *topologie discrète* de E .

2) Si $\mathcal{T} = \{E, \emptyset\}$ la topologie obtenue est appelée la *topologie grossière* de E .

1.3.5. Voisinages d'un point

1.3.5.1. Définition : Soit (E, d) un espace métrique et soit $a \in E$. On dit qu'une partie V de E est un *voisinage* de a s'il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$.

On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a .

Exemples : 1) $\forall \rho > 0$, $B(a, \rho)$ est un voisinage de a .

2) Tout ouvert contenant a est un voisinage de a .

1.3.5.2. Proposition : Soit (E, d) un espace métrique et soit $a \in E$. Soit V une partie de E .

V est un voisinage de a si et seulement si il existe un ouvert O de E tel que $a \in O \subset V$.

Preuve :

CN : Si V est un voisinage de a , alors il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$. Comme $B(a, r)$ est un ouvert, alors en prenant $O = B(a, r)$, on a bien $a \in O \subset V$.

CS : S'il existe un ouvert O de E tel que $a \in O \subset V$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset O$. Donc $B(a, r) \subset V$. Par conséquent V est un voisinage de a .

1.3.5.3. Propriétés : Soit (E, d) un espace métrique et soit $a \in E$.

(i) Tout voisinage de a contient a .

(ii) Si V est un voisinage de a et si $V \subset W$, alors W est un voisinage de a .

(iii) Une intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a .

(iv) Si a et b sont deux points distincts de l'espace métrique (E, d) , alors il existe un voisinage V de a et un voisinage W de b tels que $V \cap W = \emptyset$.

Pour cette propriété (iv), on dit qu'un espace métrique est un *espace séparé*.

Preuve :

(i) Vraie par définition d'un voisinage.

(ii) Si $V \in \mathcal{V}(a)$ alors il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$. Si $V \subset W$, alors $B(a, r) \subset W$. Donc W est un voisinage de a .

(iii) Soient $V_1, \dots, V_n$ un nombre fini de voisinages de a .

Alors il existe $r_i > 0$ tel que $B(a, r_i) \subset V_i$, $\forall i = 1, \dots, n$.

Posons $r = \min_{1 \leq i \leq n} r_i$. Alors $r > 0$ et $B(a, r) \subset B(a, r_i) \subset V_i$, $\forall i = 1, \dots, n$.

Donc $B(a, r) \subset \bigcap_{i=1}^n V_i$. Par conséquent $\bigcap_{i=1}^n V_i$ est un voisinage de a .

(iv) Soient $a, b \in E$ tels que $a \neq b$. Alors $d(a, b) > 0$. Posons $r = \frac{1}{3}d(a, b)$.

Alors $B(a, r)$ est un voisinage de a et $B(b, r)$ est un voisinage de b .

Supposons qu'il existe $x \in B(a, r) \cap B(b, r)$.

Alors $3r = d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < 2r$. Contradiction.

Par conséquent $B(a, r) \cap B(b, r) = \emptyset$.

1.3.5.4. Proposition : Soit O une partie d'un espace métrique (E, d) .

O est un ouvert si et seulement si O est un voisinage de chacun de ses points.

Preuve :

CN : Si O est un ouvert, alors $\forall x \in O$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O$. Donc O est un voisinage de x , $\forall x \in O$.

CS : Si O est un voisinage de chacun de ses points, alors $\forall x \in O$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O$. Donc O est un ouvert.

1.4. Intérieur, adhérence d'une partie

1.4.1. Intérieur d'une partie

1.4.1.1. Définition : Soit (E, d) un espace métrique et soit A une partie de E .

On dit qu'un point x de E est *intérieur* à A si A est un voisinage de x .

On appelle *intérieur de A* , et on note $\overset{\circ}{A}$, l'ensemble des points de E qui sont intérieurs à A .

Exemple : Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, si $A = [a, b[$ alors $\overset{\circ}{A} =]a, b[$.

Remarque : $\overset{\circ}{A} \subset A$.

1.4.1.2. Propriété : Soit (E, d) un espace métrique et soit A une partie de E . $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert et c'est le plus grand ouvert de E contenu dans A .

Preuve :

- $\forall x \in \overset{\circ}{A}$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$. $\forall y \in B(x, r)$, on a $y \in B(x, r) \subset A$. Alors A est un voisinage de chacun des points de $B(x, r)$. Donc $B(x, r) \subset \overset{\circ}{A}$. Par conséquent $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert.

- $\overset{\circ}{A} \subset A$.

- Soit O un ouvert de E contenu dans A . $\forall x \in O$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O$. Alors $B(x, r) \subset A$. Donc A est un voisinage de x . Alors $x \in \overset{\circ}{A}$. Par conséquent $O \subset \overset{\circ}{A}$.

1.4.1.3. Corollaire : A est un ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$.

Preuve :

- Si A est un ouvert alors dans ce cas le plus grand ouvert de E contenu dans A est A .
Donc $\overset{\circ}{A} = A$.

- Si $\overset{\circ}{A} = A$, alors A est un ouvert car $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne δ_2 si $D(a, r)$ est un disque ouvert, alors $\overset{\circ}{D} = D$.

1.4.2. Adhérence d'une partie

1.4.2.1. Définition : Soit (E, d) un espace métrique et soit A une partie de E .

On dit qu'un point x de E est *adhérent* à A si pour tout réel $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

On appelle *adhérence* de A , et on note $\overline{A}$, l'ensemble des points de E qui sont adhérents à A .

Exemple : Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, si $A =]a, b]$ alors $\overline{A} = [a, b]$.

Remarque : $A \subset \overline{A}$.

1.4.2.2. Proposition : Soient (E, d) un espace métrique, A une partie de E et $x \in E$.
 $x \in \overline{A} \iff$ pour tout voisinage V de x , $V \cap A \neq \emptyset$.

Preuve :

CN : Supposons que $x \in \overline{A}$. Soit V un voisinage de x . Alors $\exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subset V$. Comme $x \in \overline{A}$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Donc $V \cap A \neq \emptyset$.

CS : Supposons que pour tout voisinage V de x , $V \cap A \neq \emptyset$. Alors $\forall r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ car $B(x, r)$ est un voisinage de x . Par conséquent, $x \in \overline{A}$.

1.4.2.3. Proposition : Soit (E, d) un espace métrique et soit A une partie de E . Alors

$$\mathcal{C}_E^{\overline{A}} = \overset{\circ}{\mathcal{C}_E^A}$$

Preuve :

$$x \in \mathcal{C}_E^{\overline{A}} \iff \exists r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \cap A = \emptyset$$

$$\iff \exists r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \subset \mathcal{C}_E^A$$

$$\iff \mathcal{C}_E^A \text{ est un voisinage de } x$$

$$\iff x \in \overset{\circ}{\mathcal{C}_E^A}$$

1.4.2.4. Proposition : Soit (E, d) un espace métrique et soit A une partie de E . Alors $\overline{A}$ est un fermé et c'est le plus petit fermé de (E, d) qui contient A .

Preuve : * On a : $\mathcal{C}_E^{\overline{A}} = \overset{\circ}{\mathcal{C}_E^A}$. Donc $\mathcal{C}_E^{\overline{A}}$ est un ouvert. Par conséquent $\overline{A}$ est un fermé.

* $A \subset \overline{A}$.

* Soit F un fermé de (E, d) tel que $A \subset F$. Alors $\mathcal{C}_E^F \subset \mathcal{C}_E^A$. Donc $\overset{\circ}{\mathcal{C}_E^F} \subset \overset{\circ}{\mathcal{C}_E^A}$.

Or $\mathcal{C}_E^F$ est un ouvert et $\mathcal{C}_E^{\overline{A}} = \overset{\circ}{\mathcal{C}_E^A}$. Alors $\mathcal{C}_E^F \subset \mathcal{C}_E^{\overline{A}}$. Donc $\overline{A} \subset F$.

Par conséquent $\bar{A}$ est le plus petit fermé de E contenant A .

1.4.2.5. Corollaire : A est un fermé ssi $\bar{A} = A$.

Preuve :

CN : Si A est un fermé, alors le plus petit fermé de E contenant A est lui même; donc $\bar{A} = A$.

CS : Si $\bar{A} = A$ alors A est fermé car $\bar{A}$ est fermé.

1.4.2.6. Définition : Soit (E, d) un espace métrique.

Une partie A de E est dite *partout dense* dans E si $\bar{A} = E$.

1.4.2.7. Exemple : Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Donc $\mathbb{Q}$ est partout dense dans $\mathbb{R}$.

1.4.3. Frontière d'une partie

1.4.3.1. Définition :

Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$.

On appelle *frontière* de A l'ensemble $F_r(A) = \bar{A} \cap \overline{\mathbb{C}_E^A}$.

1.4.3.2. Exemple :

Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, si $A = [1, 5[$ alors $F_r(A) = [1, 5] \cap (]-\infty, 1] \cup [5, +\infty[)$
 $F_r(A) = \{1, 5\}$.

1.4.4. Points isolés-Points d'accumulation

1.4.4.1. Définition :

Soient (E, d) un espace métrique et $A \subset E$ tel que $A \neq \emptyset$.

On dit qu'un point $x \in A$ est un *point isolé* de A s'il existe un voisinage V de x tel que $V \cap A = \{x\}$.

On dit qu'un point $x \in E$ est un *point d'accumulation* de A si tout voisinage de x contient une infinité de points de A .

1.4.3.2. Exemple : Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, si $A =]-3, 2[\cup \{7\}$ alors 7 est un point isolé de A , car $]6, 8[$ est un voisinage de 7 tel que $A \cap]6, 8[= \{7\}$;
 -3 est un point d'accumulation de A , car $\forall r > 0,]-3-r, -3+r[\cap A$ est infini.

1.5. Topologie induite - Topologie produit

1.5.1. Topologie induite

1.5.1.1. Définition :

Soient (E, d) un espace métrique, A une partie non vide de E et $d_A = d|_{A \times A}$.

La topologie du sous-espace métrique (A, d_A) est appelée la *topologie induite* sur A .

1.5.1.2. Proposition : Soient (E, d) un espace métrique, A une partie non vide de E et $d_A = d|_{A \times A}$.

Soient $a \in A$ et $r \in \mathbb{R}^+$. Posons $B_A(a, r) = \{x \in A / d_A(a, x) < r\}$. Alors

i) $B_A(a, r) = A \cap B(a, r)$

ii) une partie ω de A est un ouvert de (A, d_A) si et seulement si il existe un ouvert Ω de (E, d) tel que $\omega = A \cap \Omega$.

Preuve :

i) Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in B_A(a, r) &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } d_A(a, x) < r \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } d(a, x) < r \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B(a, r) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B(a, r) \end{aligned}$$

ii) **CN :** Soit ω est un ouvert de (A, d_A) .

Si $\omega = \emptyset$ alors $\Omega = \emptyset$ convient.

Si $\omega \neq \emptyset$, $\forall x \in \omega$, $\exists r_x > 0$ tel que $B_A(x, r_x) \subset \omega$. Alors

$$\omega = \bigcup_{x \in \omega} B_A(x, r_x) = \bigcup_{x \in \omega} (A \cap B(x, r_x)) = A \cap \left(\bigcup_{x \in \omega} B(x, r_x) \right).$$

On pose $\Omega = \bigcup_{x \in \omega} B(x, r_x)$ qui est un ouvert de (E, d) .

CS : Soit Ω un ouvert de (E, d) . Posons $\omega = A \cap \Omega$.

Si $\omega = \emptyset$, alors c'est un ouvert de (A, d_A) .

Si $\omega \neq \emptyset$, soit $x \in \omega$. Alors $\exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$.

Donc $\exists r > 0$ tel que $A \cap B(x, r) \subset A \cap \Omega$.

Ainsi $\exists r > 0$ tel que $B_A(x, r) \subset \omega$. Par conséquent, ω est un ouvert de (A, d_A) .

1.5.2. Topologie produit

1.5.2.1. Définition :

Soient $(E_1, d_1), \dots, (E_n, d_n)$ des espaces métriques. La topologie de l'espace produit $E = E_1 \times \dots \times E_n$ muni de l'une de ses trois distances usuelles équivalentes δ_∞, δ_1 ou δ_2 (définies au 1.6) est appelée *topologie produit*.

1.5.2.2. Proposition : Sous les hypothèses de la définition précédente, soient $r > 0$ et $a = (a_1, \dots, a_n) \in E = E_1 \times \dots \times E_n$ et considérons sur E la distance $\delta_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} d_i$. Alors

$$B^{\delta_\infty}(a, r) = \prod_{i=1}^n B_{E_i}(a_i, r)$$

où $B_{E_i}(a_i, r)$ est la boule ouverte de centre a_i et de rayon r dans (E_i, d_i) .

Preuve : Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$.

$$\begin{aligned} x \in B^{\delta_\infty}(a, r) &\Leftrightarrow \sup_{1 \leq i \leq n} d_i(a_i, x_i) < r \\ &\Leftrightarrow d_i(a_i, x_i) < r, \forall i = 1, \dots, n \\ &\Leftrightarrow x_i \in B_{E_i}(a_i, r), \forall i = 1, \dots, n \\ &\Leftrightarrow x \in \prod_{i=1}^n B_{E_i}(a_i, r) \end{aligned}$$

1.5.2.3. Définition : Pour l'égalité $B^{\delta_\infty}(a, r) = \prod_{i=1}^n B_{E_i}(a_i, r)$, on dit que $B^{\delta_\infty}(a, r)$ est un ouvert élémentaire pour la topologie produit.

Plus généralement, on appelle *ouvert élémentaire* de $E = E_1 \times \dots \times E_n$ tout ouvert Ω de E de la forme

$$\Omega = \prod_{i=1}^n \omega_i$$

où ω_i est un ouvert de (E_i, d_i) , $\forall i = 1, \dots, n$.

1.5.2.4. Remarque : Tout ouvert de E n'est pas nécessairement un ouvert élémentaire de E .

1.5.2.5. Proposition : Tout ouvert de E est une réunion d'ouverts élémentaires de E .

Preuve : Soit O un ouvert de $E = E_1 \times \dots \times E_n$. Alors $\forall x \in O, \exists r_x > 0$ tel que $B^{\delta_\infty}(x, r_x) \subset O$. Donc

$$O = \bigcup_{x \in O} B^{\delta_\infty}(x, r_x) = \bigcup_{x \in O} \left(\prod_{i=1}^n B_{E_i}(x_i, r_x) \right).$$

Chapitre 2 : Limites - Continuité

2.1. Limites

2.1.1. Définition : Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques.

Soient $f : (E, d_E) \rightarrow (F, d_F)$ une application, $x_0 \in E$, et $l \in F$.

On dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0 , si pour tout voisinage V de l , il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(U) \subset V$.

Ce qui est équivalent à :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in E, x \in B(x_0, \eta) \Rightarrow f(x) \in B(l, \epsilon)$$

et donc à

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in E, d_E(x, x_0) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), l) < \epsilon$$

car $B(l, \epsilon)$ est un voisinage de l et tout voisinage de x_0 contient une boule ouverte centrée en x_0 .

2.1.2. Proposition : Soient $f : (E, d_E) \rightarrow (F, d_F)$ une application, $x_0 \in E$ et $l \in F$.

Si $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0 , alors l est unique.

On dit que l est la *limite de f au point x_0* et on note

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Preuve : Supposons que $f(x)$ tend vers l et l' lorsque x tend vers x_0 , avec $l \neq l'$.
Comme (F, d_F) est séparé et $l \neq l'$, $\exists V \in \mathcal{V}(l), \exists V' \in \mathcal{V}(l')$ tels que $V \cap V' = \emptyset$.
Comme $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0 et que $V \in \mathcal{V}(l)$,
 $\exists U \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $f(U) \subset V$.
De même, $\exists U' \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $f(U') \subset V'$.
Alors $U \cap U' \in \mathcal{V}(x_0)$ et donc $x_0 \in U \cap U'$.
Par conséquent $f(x_0) \in V \cap V'$. Contradiction car $V \cap V' = \emptyset$.

2.1.3. Extension de la notion de limite

Soit $f : (E, d_E) \rightarrow (F, d_F)$ une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. Soit $A \subset \mathcal{D}_f$. Soit $x_0 \in \overline{A}$. Soit $l \in F$. Soit $f_A = f|_A$ la restriction de f à A .
On dit que $f_A(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0 si

$$\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U \in \mathcal{V}(x_0) \text{ tel que } \forall x \in U \cap A, f(x) \in V.$$

Dans ce cas, on dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0 sur A .
Ce point l est unique et on note

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x) = l.$$

Si $A = U_0 \setminus \{x_0\}$ où U_0 est un voisinage de x_0 , on note

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l.$$

Exemple : Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Remarque : Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, alors $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x) = l$. Mais la réciproque est fausse.

Cas particuliers : Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, s'il existe $\epsilon > 0$ tel que :
 $A =]x_0, x_0 + \epsilon[\cap \mathcal{D}_f$, la limite s'écrit $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$;
 $A = [x_0, x_0 + \epsilon[\cap \mathcal{D}_f$, la limite s'écrit $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \geq x_0}} f(x)$;
 $A =]x_0 - \epsilon, x_0[\cap \mathcal{D}_f$, la limite s'écrit $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$;
 $A =]x_0 - \epsilon, x_0] \cap \mathcal{D}_f$, la limite s'écrit $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \leq x_0}} f(x)$.

2.2. Continuité

2.2.1. Définition : Soit $f : (E, d_E) \rightarrow (F, d_F)$ une application. Soit $x_0 \in E$.
On dit que f est *continue au point* x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ce qui est équivalent à :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in E, d_E(x, x_0) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Si f est continue en chaque point $x_0 \in E$, on dit que f est *continue sur E* .

Cas particulier :

Une application $f : (\mathbb{R}, | \cdot |) \rightarrow (\mathbb{R}, | \cdot |)$ est continue en un point x_0 si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Exemple : La $i^{\text{ème}}$ projection canonique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} p_{r_i} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_i \end{aligned}$$

est continue sur $\mathbb{R}^n$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Prolongement par continuité : Soit $f : (E, d_E) \rightarrow (F, d_F)$ une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. Soit $x_0 \notin \mathcal{D}_f$.

Si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l \in F$, on peut prolonger f par continuité en x_0 .

Le prolongement par continuité est la fonction g définie par $g(x) = f(x)$ si $x \neq x_0$ et $g(x_0) = l$.

2.2.2. Proposition :

Soient E, F, G trois espaces métriques, $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications et $x_0 \in E$.

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ et si $\lim_{y \rightarrow l_1} g(y) = l_2$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = l_2$.

Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

Si f est continue sur E et si g est continue sur F , alors $g \circ f$ est continue sur E .

2.2.3. Proposition :

Soit (E, d) un espace métrique. Soit $(F, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$.

Soient $f, g : E \rightarrow F$ deux applications. Soit $a \in E$.

Si f et g sont continues en a , alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha f + \beta g$ est continue en a .

2.2.4. Proposition :

Soit (E, d) un espace métrique. Soient $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications. Soit $a \in E$.

1. Si f et g sont continues en a , alors fg est continue en a .
2. Si g est continue en a et $g(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ est continue en a .
3. Si f et g sont continues en a et si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en a .

4. Toute fonction polynôme de n variables réelles est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Toute fonction rationnelle de n variables réelles est continue en chaque point de son ensemble de définition.

2.2.5. Proposition : Soient E et F deux espaces métriques. Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

f est continue en $a \in E$ si et seulement si

$$\forall V \in \mathcal{V}[f(a)], f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a).$$

Preuve :

- **CN :**

Si f est continue en a , alors $\forall V \in \mathcal{V}[f(a)], \exists U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U) \subset V$. Or

$$\begin{aligned} f(U) \subset V &\Rightarrow f^{-1}[f(U)] \subset f^{-1}(V) \\ &\Rightarrow U \subset f^{-1}[f(U)] \subset f^{-1}(V). \end{aligned}$$

Comme $U \in \mathcal{V}(a)$ et $U \subset f^{-1}(V)$, alors $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$.

- **CS :**

Si $\forall V \in \mathcal{V}[f(a)], f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$, en posant $U = f^{-1}(V)$, on a $f(U) = f[f^{-1}(V)] \subset V$ et $U \in \mathcal{V}(a)$. Donc f est continue en a .

2.2.6. Proposition : Soient E et F deux espaces métriques. Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

f est continue sur E si et seulement si pour tout ouvert Ω de F , $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de E .

Preuve :

- **CN :** Soit Ω un ouvert de F .

Si $f^{-1}(\Omega) = \emptyset$ alors c'est un ouvert de E .

Si $f^{-1}(\Omega) \neq \emptyset$, soit $x \in f^{-1}(\Omega)$. Alors $f(x) \in \Omega$, donc $\Omega \in \mathcal{V}[f(x)]$. Comme f est continue en x , $f^{-1}(\Omega) \in \mathcal{V}(x)$. Par conséquent $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert car voisinage de chacun de ses points.

- **CS :** Soit $a \in E$.

Pour tout $V \in \mathcal{V}[f(a)]$, il existe un ouvert Ω de F tel que $f(a) \in \Omega \subset V$. Alors $a \in f^{-1}(\Omega) \subset f^{-1}(V)$ et $f^{-1}(\Omega)$ est ouvert par hypothèse, donc $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$. Par conséquent, f est continue en a .

2.2.7. Corollaire : Soient E et F deux espaces métriques. Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

f est continue sur E si et seulement si pour tout fermé W de F , $f^{-1}(W)$ est un fermé de E .

2.2.8. Proposition : Soient E , F et G trois espaces métriques. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. Soit $a \in E$.

Si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a .

Par conséquent si f est continue sur E et si g est continue sur F , alors $g \circ f$ est continue sur E .

Preuve : Soit $V \in \mathcal{V}[(g \circ f)(a)] = \mathcal{V}[g(f(a))]$. Comme g est continue en $f(a)$, alors $g^{-1}(V)$ est un voisinage de $f(a)$.

Comme f est continue en a , alors $f^{-1}[g^{-1}(V)] = (g \circ f)^{-1}(V)$ est un voisinage de a . Donc $g \circ f$ est continue en a .

2.2.9. Homéomorphismes

2.2.9.1. Définition : Soient E et F deux espaces métriques. Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

On dit que f est un *homéomorphisme* de E sur F si f est une bijection et si f et f^{-1} sont continues.

On dit que E et F sont *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme de E sur F .

2.2.9.2. Définition : On dit que deux distances d et δ sur un ensemble E sont *topologiquement équivalentes* si l'application $id_E : (E, d) \rightarrow (E, \delta)$ est un homéomorphisme.

2.2.10. Proposition : Soit $E = \prod_{i=1}^n E_i$ un espace métrique produit. Alors $\forall i = 1, \dots, n$, la $i^{\text{ème}}$ projection canonique :

$$\begin{aligned} p_i : E &\rightarrow E_i \\ x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} &\mapsto x_i \end{aligned}$$

est continue.

Preuve : Considérons sur E la distance δ_∞ .

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in E$. Soit $\epsilon > 0$. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$. Alors $\forall i = 1, \dots, n$,

$$d_i(p_i(x), p_i(a)) = d_i(x_i, a_i) \leq \delta_\infty(x, a).$$

Donc

$$\exists \eta = \epsilon > 0 \text{ tel que } \delta_\infty(x, a) < \eta \Rightarrow d_i(p_i(x), p_i(a)) < \epsilon.$$

Par conséquent p_i est continue au point a . Comme a est quelconque dans E , p_i est continue sur E .

2.2.11. Proposition : Soit E un espace métrique et soit $\prod_{i=1}^n F_i$ un espace métrique produit. Soit

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow \prod_{i=1}^n F_i \\ x &\mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \end{aligned}$$

une application. Alors

f est continue si et seulement si chaque application composante f_i de f est continue.

Preuve :

- CN : Supposons f continue. Alors $\forall i = 1, \dots, n$, $f_i = p_i \circ f$ est continue.

- CS : Soient d la distance sur E et d_i la distance sur F_i . Soit $a \in E$. Supposons chaque application composante f_i continue en a .
Soit $\epsilon > 0$. Alors

$$\exists \eta_i > 0 \text{ tel que } \forall x \in E, d(x, a) < \eta_i \Rightarrow d_i(f_i(x), f_i(a)) < \epsilon.$$

Posons $\eta = \min_{1 \leq i \leq n} \eta_i$. Alors

$$d(x, a) < \eta \Rightarrow d_i(f_i(x), f_i(a)) < \epsilon, \forall i = 1, \dots, n.$$

Donc

$$d(x, a) < \eta \Rightarrow \delta_\infty(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Par conséquent f est continue au point a . Comme a est quelconque dans E , f est continue sur E .

2.2.12. Proposition : Soit $E = \prod_{i=1}^n E_i$ un espace métrique produit. Soit F un espace métrique.

Si $f : E = \prod_{i=1}^n E_i \rightarrow F$ est une application continue en $a = (a_i)_{1 \leq i \leq n} \in E$, alors $\forall i = 1, \dots, n$, sa *ième* application partielle en a :

$$\begin{aligned} \varphi_i : E_i &\rightarrow F \\ x_i &\mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \end{aligned}$$

est continue en a_i .

Preuve : Supposons f continue en a . $\forall i = 1, \dots, n$, soit

$$\begin{aligned} \psi_i : E_i &\rightarrow E \\ x_i &\mapsto (a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Alors ψ_i est continue car chacune de ses composantes est continue. Comme $\varphi_i = f \circ \psi_i$ alors φ_i est continue en a_i .

Remarque : La réciproque est fausse. Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0.$$

Les applications partielles de f en $(0, 0)$ sont continues car $f(x, 0) = 0 = f(0, y)$. Mais f n'est pas continue en $(0, 0)$ car $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x, x) = \frac{1}{2}$.

2.3. Applications uniformément continues

2.3.1. Définition : Soit $f : (E, d_E) \rightarrow (F, d_F)$ une application.

On dit que f est *uniformément continue* sur E , si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall (x, y) \in E^2, d_E(x, y) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

2.3.2. Proposition : Toute application uniformément continue est continue.

Remarque : La réciproque est fausse.

Exemple : L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2.3.3. Définition : Soit $f : (E, d_E) \rightarrow (F, d_F)$ une application.
On dit que f est *lipschitzienne* s'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\forall x, y \in E, d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y).$$

On dit alors que f est **lipschitzienne de rapport k** ou f est **k -lipschitzienne**.

2.3.4. Proposition : Toute application lipschitzienne de rapport k est uniformément continue.

Preuve : $\forall \epsilon > 0, \exists \eta = \frac{\epsilon}{k} > 0$ tel que $\forall x, y \in E, d_E(x, y) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \epsilon$.
Donc f est uniformément continue.

2.3.5. Définition : Soit $f : (E, d_E) \rightarrow (F, d_F)$ une application.
On dit que f est une *isométrie* si

$$\forall x, y \in E, d_F(f(x), f(y)) = d_E(x, y).$$

Remarque : Toute isométrie est une application lipschitzienne.

Chapitre III. Suites de points d'un espace métrique

3.1. Convergence

3.1.1 Définition :

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points d'un espace métrique (E, d) .
On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point $x \in E$ si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow x_n \in V.$$

Ce qui est équivalent à $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow x_n \in B(x, \epsilon)$.
(Car $B(x, \epsilon) \in \mathcal{V}(x)$).

C'est-à-dire $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow d(x, x_n) < \epsilon$.

Ce qui revient à dire que la suite de nombres réels $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\alpha_n = d(x, x_n)$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}$.

3.1.2 Proposition :

Si une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points d'un espace métrique (E, d) converge vers un point $x \in E$, alors x est unique.

On l'appelle la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x.$$

Proof. Supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x et x' avec $x \neq x'$. Comme (E, d) est séparé, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ et $V' \in \mathcal{V}(x')$ tels que $V \cap V' = \emptyset$.

Alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, x_n \in V$.

De même, $\exists N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N', x_n \in V'$.

Donc $\forall n \geq \max\{N, N'\}, x_n \in V \cap V'$. Contradiction. ■

3.1.3. Proposition : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points d'un espace métrique produit

$$E = \prod_{i=1}^k E_i \text{ avec } x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k).$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l = (l_1, l_2, \dots, l_k)$ dans E ssi la suite $(x_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l_i dans $(E_i, d_i), \forall i = 1, \dots, k$.

Proof.

CN : Supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l = (l_1, l_2, \dots, l_k)$ dans E . Considérons sur E la distance $\delta_\infty = \sup_{1 \leq i \leq k} d_i$. Alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \delta_\infty(x_n, l) < \epsilon.$$

Donc $\forall n \geq N, d_i(x_n^i, l_i) < \epsilon, \forall i = 1, \dots, k$. Par conséquent, la suite $(x_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l_i dans $(E_i, d_i), \forall i = 1, \dots, k$.

CS : Supposons que la suite $(x_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l_i dans $(E_i, d_i), \forall i = 1, \dots, k$. Alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_i \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_i, d_i(x_n^i, l_i) < \epsilon, \forall i = 1, \dots, k.$$

Posons $N = \max_{1 \leq i \leq k} N_i$. Alors $\forall n \geq N, d_i(x_n^i, l_i) < \epsilon, \forall i = 1, \dots, k$. Donc $\delta_\infty(x_n, l) < \epsilon$, où $l = (l_1, \dots, l_k)$. Ainsi la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l = (l_1, l_2, \dots, l_k)$ dans E . ■

3.1.4 Proposition :

Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$ tel que $A \neq \emptyset$. Soit $x \in E$.

$x \in \bar{A}$ si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de A qui converge vers x .

Preuve :

CN :

$$x \in \bar{A} \Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset.$$

$$\Rightarrow \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset \text{ car } B(x, r) \in \mathcal{V}(x).$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset.$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in A \text{ tel que } a_n \in B(x, \frac{1}{n}).$$

$$\Rightarrow \exists \text{ une suite } (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ de points de } A \text{ telle que}$$

$$0 \leq d(a_n, x) < \frac{1}{n}. \text{ Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(a_n, x) = 0$. Donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers x .

CS : Supposons qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de A qui converge vers x .
Alors $\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow a_n \in V$.
Donc $\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset$. Alors $x \in \bar{A}$.

3.2. Continuité séquentielle

Théorème : Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques. Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soit $x \in E$.

L'application f est continue au point x si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de E qui converge vers x , la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Proof.

CN : Supposons f continue au point x . Alors $\forall V \in \mathcal{V}[f(x)], \exists U \in \mathcal{V}(x) : f(U) \subset V$.
Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de E qui converge vers x . Comme $U \in \mathcal{V}(x), \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow x_n \in U$. Alors $f(x_n) \in f(U)$.

Ainsi

$$\forall V \in \mathcal{V}[f(x)], \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow f(x_n) \in V.$$

Donc la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

CS : Par contraposée. Supposons f non continue au point x . Alors
 $\exists V \in \mathcal{V}[f(x)] : \forall U \in \mathcal{V}(x), f(U) \not\subset V$.
Prenons $U = B(x, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\exists V \in \mathcal{V}[f(x)] : \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) : f(x_n) \notin V.$$

Donc on obtient une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers x car $0 \leq d_E(x, x_n) < \frac{1}{n}$. Mais la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers $f(x)$. ■

3.3. Valeurs d'adhérence

3.3.1. Définition :

Soit (E, d) un espace métrique. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de E .

On dit qu'un point $a \in E$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ssi pour tout voisinage V de a , l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} / x_n \in V\}$ est infini.

Ou ssi $\forall V \in \mathcal{V}(a), \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N$ tel que $x_n \in V$.

Ou encore ssi $\forall \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N$ tel que $d(x_n, a) < \epsilon$.

3.3.2. Proposition : Dans un espace métrique (E, d) si une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de E converge, alors elle possède une seule valeur d'adhérence qui est sa limite.

Preuve :

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de E qui converge vers a . Alors a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une autre valeur d'adhérence $b \neq a$.

Alors il existe un voisinage V de a et un voisinage V' de b tels que $V \cap V' = \emptyset$ car (E, d) est séparé. Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a et $V \in \mathcal{V}(a)$,

$\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_1 \Rightarrow x_n \in V$.

Comme b est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $V' \in \mathcal{V}(b)$, et de plus $N_1 \in \mathbb{N}$ alors il existe $n_1 \geq N_1$ tel que $x_{n_1} \in V'$.

Comme $n_1 \geq N_1$ alors $x_{n_1} \in V \cap V'$. Contradiction car $V \cap V' = \emptyset$.

3.3.3. Proposition :

Si x est une valeur d'adhérence d'une suite de points de A alors $x \in \bar{A}$.

Preuve :

Supposons que x est une valeur d'adhérence d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de A . Alors $\forall V \in \mathcal{V}(x), \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N$ tel que $a_n \in V$.

Comme $a_n \in A$ et $a_n \in V$, alors $V \cap A \neq \emptyset$.

Donc $\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset$. Par conséquent $x \in \bar{A}$.

3.3.4. Théorème :

Soient (E, d) un espace métrique, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de E et $x \in E$.
 x est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ssi il existe une sous-suite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x .

Preuve :

CN : Supposons que x est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors pour :

- $V = B(x, 1) \in \mathcal{V}(x)$ et $N = 1$, $\exists n_1 \geq 1 > 0$ tel que $d(x, x_{n_1}) < 1$.
- $V = B(x, \frac{1}{2}) \in \mathcal{V}(x)$ et $N = n_1 + 1$, $\exists n_2 \geq n_1 + 1 > n_1$ tel que $d(x, x_{n_2}) < \frac{1}{2}$.
- $V = B(x, \frac{1}{3}) \in \mathcal{V}(x)$ et $N = n_2 + 1$, $\exists n_3 \geq n_2 + 1 > n_2$ tel que $d(x, x_{n_3}) < \frac{1}{3}$.
- ...
 $\exists n_k \geq n_{k-1} + 1 > n_{k-1}$ tel que $d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$.

Alors il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{k}.$$

Comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} = 0$ alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} d(x, x_{n_k}) = 0$.

Donc $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers x .

CS : S'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x , alors x est une valeur d'adhérence de $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ et donc de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3.3.5. Exemple :

Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, soit $x_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

Or $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} x_{2p} &= 1 \\ x_{2p+1} &= -1. \end{aligned}$$

Alors -1 et 1 sont des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Les sous-suites $(x_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(x_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers 1 et -1 .

3.3.6. Théorème : Soient (E, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de E . Notons $Adh(x_n)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = \{x_p : p \geq n\}$. Alors

$$Adh(x_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{X_n}.$$

Preuve :

$$\begin{aligned} x \in Adh(x_n) &\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N : x_n \in V \\ &\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), \forall N \in \mathbb{N}, V \cap X_N \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}, x \in \overline{X_N} \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{X_N} \end{aligned}$$

3.3.7. Corollaire : $Adh(x_n)$ est fermé dans (E, d) .

3.4. Suites de Cauchy

3.4.1 Définition :

Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de E est une suite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } p, q > N \Rightarrow d(x_p, x_q) < \epsilon.$$

3.4.2 Proposition :

Toute suite convergente de points d'un espace métrique est de Cauchy.

Preuve :

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de (E, d) qui converge vers $x \in E$.

Alors $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$.

Si $p, q > N$, alors $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x) + d(x, x_q) < \epsilon$.

Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

3.4.3. Remarque :

La réciproque est fausse.

3.4.4. Proposition :

Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve :

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, alors pour $\epsilon = 1$

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n, p > N \Rightarrow d(x_n, x_p) < 1$$

Posons $p = N + 1$, alors $n > N \Rightarrow d(x_p, x_n) < 1$.

Donc $\forall n > N, x_n \in B(x_p, 1)$.

Posons $r = 1 + \max_{0 \leq n \leq N} d(x_p, x_n)$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, d(x_p, x_n) < r$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in B(x_p, r)$. Par conséquent $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

3.4.5. Corollaire :

Toute suite convergente de points d'un espace métrique est bornée.

3.4.6. Proposition :

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points d'un espace métrique (E, d) .

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et si elle admet une valeur d'adhérence x , alors elle converge vers cette valeur d'adhérence x .

Preuve : Soit $\epsilon > 0$.

Comme x est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alors $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\exists q \geq N \text{ tel que } d(x_q, x) < \frac{\epsilon}{2}.$$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant de Cauchy, alors :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, n \geq N_1, d(x_p, x_n) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pour $N = N_1, \exists q_1 \geq N_1$ tel que $d(x_{q_1}, x) < \frac{\epsilon}{2}$, et $\forall n \geq N_1, d(x_{q_1}, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$.

Donc $\forall n \geq N_1, d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{q_1}) + d(x_{q_1}, x) < \epsilon$.

Alors $\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1, d(x_n, x) < \epsilon$.

Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x .

3.5. Espaces métriques complets

3.5.1. Définition :

On dit qu'un espace métrique (E, d) est complet si toute suite de Cauchy de (E, d) converge dans (E, d) .

Rappel :

3.5.2. Théorème : [Théorème de Bolzano-Weirstrass] De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une sous-suite convergente.

3.5.3 Corollaire :

$\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle est complet.

Preuve :

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathbb{R}, | \cdot |)$. Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weirstrass, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence a .

Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et admet une valeur d'adhérence a , alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a .

3.5.4 Théorème :

Soient $(E_1, d_1), \dots, (E_k, d_k)$ des espaces métriques complets. Alors l'espace métrique produit $E = E_1 \times \dots \times E_k$ est complet.

Preuve :

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E .

Posons : $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k)$ et prenons sur E la distance δ_∞ .

Alors $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q > N, \delta_\infty(x_p, x_q) < \epsilon$.

Donc $\sup_{1 \leq i \leq k} d_i(x_p^i, x_q^i) < \epsilon$.

Alors $d_i(x_p^i, x_q^i) \leq \sup_{1 \leq i \leq k} d_i(x_p^i, x_q^i) < \epsilon$.

Donc $d_i(x_p^i, x_q^i) < \epsilon \forall i \in \{1, \dots, k\}$.

Alors $(x_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E_i, d_i) . Comme (E_i, d_i) est complet, alors (x_n^i) converge vers $l_i \in E_i$.

Posons $l = (l_1, \dots, l_k)$. Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l .

3.5.5. Corollaire :

$\mathbb{R}^n$ muni de l'une des trois distances usuelles $\delta_1, \delta_2, \delta_\infty$ est complet.

3.5.6. Théorème :

Soit X un ensemble. Soit (E, d) un espace métrique complet. Alors $\mathcal{F}_b(X, E)$ l'espace des applications bornées de X dans E muni de la distance de la convergence uniforme d_∞ est complet.

Preuve : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{F}_b(X, E), d_\infty)$. Alors

$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall p, q \geq N, \sup_{x \in X} d(f_p(x), f_q(x)) < \epsilon$.

Donc $d(f_p(x), f_q(x)) < \epsilon, \forall x \in X$.

Alors, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (E, d) .

Comme (E, d) est complet, elle converge vers $y \in E$. On définit ainsi une application $f : X \rightarrow E$ qui à $x \in X$ associe y .

Montrons que f est bornée.

Pour $\epsilon = 1, \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall p, q \geq N_1, d(f_p(x), f_q(x)) < 1$. Fixons $q = N_1$. Alors

$\forall p \geq N_1, d(f_p(x), f_{N_1}(x)) < 1, \forall x \in X$.

Soit $y_0 \in E$ fixé et soit $g : X \rightarrow E$ définie par $g(x) = y_0, \forall x \in X$. Alors

$$d(g(x), f_p(x)) \leq d(g(x), f_{N_1}(x)) + d(f_{N_1}(x), f_p(x)).$$

Donc

$$d(g(x), f_p(x)) < d(g(x), f_{N_1}(x)) + 1 \leq d_\infty(g, f_{N_1}) + 1.$$

Lorsque $p \rightarrow +\infty$, on a : $d(g(x), f(x)) \leq d_\infty(g, f_{N_1}) + 1$. Donc $\forall x \in X$,

$$d(y_0, f(x)) \leq d_\infty(g, f_{N_1}) + 1.$$

Par conséquent $f \in \mathcal{F}_b(X, E)$.

Comme $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall p, q \geq N, d(f_p(x), f_q(x)) < \epsilon, \forall x \in X$,

lorsque $q \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall p \geq N, d(f_p(x), f(x)) \leq \epsilon, \forall x \in X.$$

Donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall p \geq N, d_\infty(f_p, f) \leq \epsilon.$$

Alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $(\mathcal{F}_b(X, E), d_\infty)$. Donc $(\mathcal{F}_b(X, E), d_\infty)$ est complet.

3.5.7. Proposition : Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $F = C^0([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Soit d_∞ la distance de la convergence uniforme sur F . Alors (F, d_∞) est complet.

3.6. Applications contractantes et théorème du point fixe

3.6.1. Définition : Soit (E, d) un espace métrique.

On dit qu'une application $f : E \rightarrow E$ est une *contraction* ou une *application contractante* s'il existe un nombre réel $0 < k < 1$ tel que

$$\forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Le nombre réel k est appelé le *rapport de la contraction* f .

On dit qu'un point $a \in E$ est un *point fixe* de f si $f(a) = a$.

3.6.2. Théorème : Soient (E, d) un espace métrique complet et f une contraction de E . Alors f admet un point fixe et ce point fixe est unique.

Preuve :

Existence : Soit $x_0 \in E$.

Montrons que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$ est de Cauchy.

Soit k le rapport de la contraction f .

$\forall m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m \geq n$,

$$d(x_n, x_m) = d[f(x_{n-1}), f(x_{m-1})] \leq kd(x_{n-1}, x_{m-1}).$$

Après n applications de ce processus, on a

$$d(x_n, x_m) \leq k^n d(x_0, x_{m-n}).$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$d(x_0, x_{m-n}) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n}).$$

Or $d(x_p, x_{p+1}) \leq k^p d(x_0, x_1)$. Alors

$$d(x_0, x_{m-n}) \leq d(x_0, x_1)(1 + k + k^2 + \dots + k^{m-n-1}).$$

Donc

$$d(x_n, x_m) \leq k^n d(x_0, x_{m-n}) \leq k^n d(x_0, x_1) \sum_{p=0}^{+\infty} k^p = k^n d(x_0, x_1) \frac{1}{1-k}.$$

Par conséquent

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1).$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k^n}{1-k} = 0$ car $0 < k < 1$.

Alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme (E, d) est complet, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$.

De plus f est continue, alors

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = x.$$

Donc x est un point fixe de f .

Unicité : Supposons que f possède un autre point fixe $y \neq x$.

Alors

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) < d(x, y).$$

Contradiction.

Chapitre IV : Espaces métriques compacts

4.1. Définitions

4.1.1. Définition : Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$.

On appelle *recouvrement* de A toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles de E telle que $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.

On dit que le recouvrement $(A_i)_{i \in I}$ est fini si I est fini.

On appelle *recouvrement ouvert* de A , tout recouvrement $(O_i)_{i \in I}$ de A tel que O_i est un ouvert de $(E, d) \forall i \in I$.

4.1.2. Définition : On dit qu'un espace métrique (E, d) est *compact* si de tout recouvrement ouvert de E , on peut extraire un recouvrement fini de E .

4.1.3. Définition : Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$.

On dit que A est compact si le sous-espace métrique (A, d_A) est compact.

Ce qui est équivalent à : de tout recouvrement ouvert de A par des ouverts de E , on peut extraire un recouvrement fini de A .

4.1.4. Exemple : Toute partie finie A d'un espace métrique (E, d) est compacte.

Si $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, et $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$

alors $\forall j = 1, \dots, n, \exists i_j \in I$ tel que $a_j \in O_{i_j}$. Alors $A \subset \bigcup_{j=1}^n O_{i_j}$ donc A est compacte.

4.2. Propriétés

4.2.1. Proposition : Toute partie compacte d'un espace métrique est bornée.

Preuve : Soit K une partie compacte de (E, d) , on a :
 $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, 1)$.

Comme K est compacte, $\exists x_1, \dots, x_n \in K$ tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, 1)$.

$\forall x \in K, \exists j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x \in B(x_j, 1)$.

Alors

$$d(x, x_1) \leq d(x, x_j) + d(x_j, x_1) < 1 + d(x_j, x_1).$$

Donc $d(x, x_1) < 1 + \max_{1 \leq i \leq n} d(x_1, x_i)$.

Posons $r = 1 + \max_{1 \leq i \leq n} d(x_1, x_i)$, alors $\forall x \in K, d(x, x_1) < r$ avec $r > 0$.

Donc $K \subset B(x_1, r)$. Par conséquent K est bornée.

4.2.2. Corollaire :

$(\mathbb{R}, | \cdot |)$ n'est pas compact car non bornée.

$(\mathbb{R}^n, \delta_\infty)$ ou $(\mathbb{R}^n, \delta_1)$ ou $(\mathbb{R}^n, \delta_2)$ n'est pas compact car non bornée.

4.2.3. Proposition :

Toute partie compacte d'un espace métrique (E, d) est fermée.

Preuve : Soit $K \subset E$ tel que K est compact.

- Montrons que $\mathcal{C}_E^K$ est ouvert.

Soit $a \in \mathcal{C}_E^K$. $\forall x \in K, x \neq a$. Alors $d(a, x) > 0$.

Posons $r_x = \frac{1}{3}d(a, x)$. Alors $r_x > 0$. On a $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, r_x)$.

Comme K est compact, $\exists x_1, \dots, x_n \in K$ tel que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r_i) \subset \bigcup_{i=1}^n B_f(x_i, r_{x_i})$$

qui est un fermé.

Alors $\bigcup_{i=1}^n B_f(x_i, r_{x_i}) \subset \mathcal{C}_E^K$. Or $\forall i = 1, \dots, n, d(a, x_i) = 3r_{x_i} > r_{x_i}$.

Alors $a \notin B_f(x_i, r_{x_i}), \forall i = 1, \dots, n$.

Donc

$$a \in \bigcup_{i=1}^n B_f(x_i, r_{x_i}) \subset \mathcal{C}_E^K$$

alors $\mathcal{C}_E^K \in \mathcal{V}(a), \forall a \in \mathcal{C}_E^K$.

Donc $\mathcal{C}_E^K$ est un ouvert, par conséquent K est un fermé.

4.2.4. Proposition :

Si E est compact alors toute partie fermée F de E est compacte.

Preuve : Supposons que $F \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ où O_i est un ouvert de E , $\forall i \in I$. Alors

$$E = \mathfrak{C}_E^F \cup F \subset \left[\mathfrak{C}_E^F \cup \left(\bigcup_{i \in I} O_i \right) \right]$$

qui est un recouvrement ouvert de E car F est fermée.

Comme E est un compact, $\exists J$ finie $\subset I$ tel que $E \subset \mathfrak{C}_E^F \cup \left(\bigcup_{i \in J} O_i \right)$.

Comme $F \subset E$ et $F \cap \mathfrak{C}_E^F = \emptyset$, alors $F \subset \bigcup_{i \in J} O_i$.

Donc F est compacte.

4.3. Parties compacts de $\mathbb{R}^n$

4.3.1. Théorème de Borel-Lebesgue : Tout intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est compact pour la distance usuelle de $\mathbb{R}$.

Preuve : Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $[a, b]$.

Posons $A = \{x \in [a, b] \text{ tel que } [a, x] \text{ est recouvert par un nombre fini de } O_i\}$.

$a \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$ et $A \subset [a, b] \Rightarrow A$ est majorée

$\Rightarrow A$ admet une borne supérieure M dans $\mathbb{R}$, alors $M \in \bar{A} \subset [a, b]$.

Donc $\exists j \in I$ tel que $M \in O_j$. O_j , est un ouvert contenant M ,

alors $\exists h_1 > 0$ tel que $]M - h_1, M + h_1[\subset O_j$.

$M = \sup A \Rightarrow \exists x \in A \cap]M - h_1, M]$, alors $\exists J$ fini $\subset I$

tel que $[a, x] \subset \bigcup_{i \in J} O_i$.

Donc $[a, M + \frac{h_1}{2}] \subset \left(\bigcup_{i \in J} O_i \right) \cup O_j$.

Par conséquent $M \in A$.

Supposons que $M < b$.

Alors $\exists h_2 > 0$ tel que $[M, M + h_2] \subset [a, b]$.

Posons $h = \min(\frac{h_1}{2}, h_2)$.

On a: $[a, M + h] \subset \left(\bigcup_{i \in J} O_i \right) \cup O_j$ et $M + h \in A$.

Contradiction car $M = \sup A$.

Alors $M = b$. Donc $b \in A$.

Par conséquent $[a, b]$ est compact.

4.3.2. Corollaire : Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, les parties compactes sont les parties fermées et bornées c'est-à-dire une partie K de $\mathbb{R}$ est compacte ssi K est fermée et bornée.

Preuve :

CN : Si K est compacte, alors K est fermée et bornée.

CS : Soit K une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$. Alors $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tels que $K \subset [a, b]$.
Or $[a, b]$ est compact et K est fermée donc K est compacte.

Exemple :

$[-1, 1] \cup [3, 4]$ est compact dans $\mathbb{R}$ car fermé et borné dans $\mathbb{R}$.

4.3.3. Théorème : Soient $(E_1, d_1), \dots, (E_k, d_k)$ des espaces métriques compacts, alors l'espace métrique produit $E = E_1 \times \dots \times E_k$ est compact.

Preuve : Dans le cas de deux espaces métriques compacts (E_1, d_1) et (E_2, d_2) .

Sur $E = E_1 \times E_2$ prenons la distance $\delta_\infty = \max(d_1, d_2)$.

Soit $a = (a_1, a_2) \in E$ et $r > 0$, alors $B(a, r) = B(a_1, r) \times B(a_2, r)$.

Considérons un recouvrement ouvert de E par des boules ouvertes : $(B_i^1, B_{ij}^2)_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$.

Alors $(B_i^1)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de E_1 .

Comme E_1 est compact, $\exists I_1$ fini tel que $E_1 \subset \bigcup_{i \in I_1} B_i^1$.

$\forall i \in I_1$, $(B_{ij}^2)_{j \in J}$ est un recouvrement ouvert de E_2 .

Comme E_2 est compact, $\exists J_2$ fini $\subset J$ tel que $E_2 \subset \bigcup_{j \in J_2} B_{ij}^2$.

Alors $(E_1 \times E_2) \subset \bigcup_{i \in I_1} \left(\bigcup_{j \in J_2} B_i^1 \times B_{ij}^2 \right)$.

Donc $E_1 \times E_2$ est compact.

4.3.4. Corollaire : Dans $\mathbb{R}^n$ muni de l'une des distances $\delta_\infty, \delta_1, \delta_2$, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.

C'est-à-dire une partie K de $\mathbb{R}^n$ est compacte ssi K est fermée et bornée.

Preuve :

CN : Si K est compact, alors K est fermée et bornée.

CS : Supposons K fermée et bornée.

Comme K est bornée, $K \subset B_f(\alpha, r)$.

En prenant sur $\mathbb{R}^n$ la distance δ_∞ , $B_f(\alpha, r) = \prod_{i=1}^n B_f(\alpha_i, r) = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$.

Comme K est fermée et $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ est compact, alors K est compacte.

4.4. Caractérisation de la compacité par les fermés

4.4.1. Proposition : Soient (E, d) un espace métrique.

E est compacte si et seulement si pour toute famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés de E telle que

$\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, il existe une partie finie J de I telle que $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$.

Preuve :

- Supposons (E, d) compact. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de (E, d) telle que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$.

Alors $E = \bigcup_{i \in I} \mathring{F}_i$ qui est un recouvrement ouvert de E . Comme E est compact, il

existe une partie finie J de I telle que $E = \bigcup_{i \in J} \mathring{F}_i = \mathring{\bigcap_{i \in J} F_i}$. Donc $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$.

- Réciproquement : Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E . Alors $E = \bigcup_{i \in I} O_i$.

$$\text{Donc } \emptyset = \mathcal{C}_E^{\bigcup_{i \in I} O_i} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_E^{O_i}.$$

Par conséquent, il existe une partie finie J de I telle que $\emptyset = \bigcap_{i \in J} \mathcal{C}_E^{O_i} = \mathcal{C}_E^{\bigcup_{i \in J} O_i}$.

Alors $E = \bigcup_{i \in J} O_i$. Donc E est compact.

4.4.2. Corollaire : Dans un espace métrique compact (E, d) , si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de E , (i.e. $F_{n+1} \subset F_n$, et $F_n \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$), alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Preuve : Supposons que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$. L'espace métrique (E, d) étant compact, il existe une partie finie J de $\mathbb{N}$ telle que $\bigcap_{n \in J} F_n = \emptyset$.

Soit $m = \max J$. Alors $\bigcap_{n \in J} F_n = F_m$. Donc $F_m = \emptyset$. Contradiction.

4.5. Caractérisation de la compacité par les suites

4.5.1. Théorème : Dans un espace métrique compact (E, d) , toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de E admet au-moins une valeur d'adhérence dans E .

Preuve : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de E . Alors

$$\text{Adh}(x_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{X_n},$$

où $X_n = \{x_p : p \geq n\}$. On a $X_0 \supset X_1 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$. Donc $\overline{X_0} \supset \overline{X_1} \supset \dots \supset \overline{X_n} \supset \dots$. Comme $X_n \neq \emptyset$ et $X_n \subset \overline{X_n}$, alors $\overline{X_n} \neq \emptyset$.

D'après la proposition précédente, $\text{Adh}(x_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{X_n} \neq \emptyset$.

4.5.2. Corollaire 1 : Dans un espace métrique compact (E, d) , de toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points, on peut extraire une sous-suite convergente dans E .

4.5.3. Corollaire 2 : [Théorème de Bolzano-Weirstrass] De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une sous-suite convergente.

Preuve : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels. Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $x_n \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}$. Comme $[a, b]$ est compact, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet au moins une sous-suite convergente d'après le théorème précédent.

4.5.4. Corollaire 3 : Tout espace métrique compact est complet.

Preuve : Soient (E, d) un espace métrique compact et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de points de E .

Alors d'après le théorème précédent, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet au-moins une valeur d'adhérence $x \in E$. On en déduit qu'elle converge vers x . Donc (E, d) est complet.

4.5.5. Lemme 1 : Soient (E, d) un espace métrique et K une partie de E .

Supposons que toute suite de points de K admet au moins une valeur d'adhérence dans K . Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement de K par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ϵ .

Preuve : Soit $\epsilon > 0$ et soit $x_1 \in K$ (si $K = \emptyset$ le résultat est immédiat).

Si $K \subset B(x_1, \epsilon)$ alors la preuve est achevée.

Si non, il existe $x_2 \in K$ tel que $x_2 \notin B(x_1, \epsilon)$.

Si $K \subset B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon)$ alors la preuve est achevée.

Supposons que K ne soit pas recouverte par la réunion d'un nombre fini de boules ouvertes de rayon ϵ ainsi construites.

Alors il existe une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de points de K telle que $d(x_p, x_q) \geq \epsilon$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \neq q$.

Mais une telle suite ne possède aucune sous-suite convergente donc aucune valeur d'adhérence. Contradiction.

4.5.6. Lemme 2 : Soient (E, d) un espace métrique et K une partie de E .

Supposons que toute suite de points de K admet au moins une valeur d'adhérence dans K .

Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de K .

Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \epsilon) \subset O_i$.

Preuve : Supposons la propriété fausse. Alors

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists x_k \in K$ tel que $B(x_k, \frac{1}{k})$ ne soit contenue dans aucun des O_i .

Soit x une valeur d'adhérence de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ dans K . Alors il existe $i \in I$ tel que $x \in O_i$. Donc il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O_i$.

Or il existe une sous-suite (y_k) de (x_k) qui converge vers x . Donc à partir d'un certain rang m , $y_m \in B(x, \frac{r}{2})$.

Alors $\forall y \in B(y_m, \frac{1}{m})$, $d(y, x) \leq d(y, y_m) + d(y_m, x) < \frac{1}{m} + \frac{r}{2} < r$ dès que $\frac{1}{m} < \frac{r}{2}$.

Et donc $B(y_m, \frac{1}{m}) \subset B(x, r) \subset O_i$. Contradiction.

4.5.7. Théorème : Soit (E, d) un espace métrique et soit K une partie de E .

K est compacte si et seulement si toute suite de points de K admet au moins une valeur d'adhérence dans K .

Preuve :

CN : Déjà vue.

CS : Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de K .

D'après le lemme 2, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $k \in I$ tel que $B(x, \epsilon) \subset O_k$.

D'après le lemme 1, $K \subset \bigcup_{j=1}^n B(x_j, \epsilon)$ où $x_j \in K$ pour tout $j = 1, \dots, n$.

Alors pour tout $j = 1, \dots, n$, il existe $k_j \in I$ tel que $B(x_j, \epsilon) \subset O_{k_j}$.

Donc $K \subset \bigcup_{j=1}^n O_{k_j}$. Par conséquent K est compact.

4.6. Compacité et continuité

4.6.1. Rappel :

Soit $f : (E, d_E) \rightarrow (F, d_F)$ une application. On dit que f est bornée si $f(E)$ est une partie bornée de F . On dit que f est bornée sur une partie A de E si $f(A)$ est une partie bornée de F .

4.6.2. Théorème : Soit $f : (E, d_E) \rightarrow (F, d_F)$ une application. Soit A une partie de E . Si f est continue sur A et si A est compacte dans E , alors $f(A)$ est compacte dans F . En particulier, si f est continue sur E et si E est compact, alors $f(E)$ est compacte dans F .

Preuve : Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $f(A)$ dans F . Alors $f(A) \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. Donc $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(\Omega_i)$. Donc $(f^{-1}(\Omega_i))_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de A car f est continue sur A . A étant compacte, il existe une partie finie J de I telle que $A \subset \bigcup_{i \in J} f^{-1}(\Omega_i)$.

Alors

$$f(A) \subset \bigcup_{i \in J} f(f^{-1}(\Omega_i)) \subset \bigcup_{i \in J} \Omega_i.$$

Donc $f(A)$ est compacte.

4.6.3. Corollaire : Soit $f : (E, d) \rightarrow (\mathbb{R}, | \cdot |)$ une application. Si K est une partie compacte de E , et si f est continue sur K , alors f est bornée sur K et atteint ses bornes.

Preuve :

K étant compacte et f continue sur K , alors $f(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$. Donc $f(K)$ est une partie bornée et fermée de $\mathbb{R}$. Alors $\sup f(K)$ et $\inf f(K)$ existent et $\sup f(K)$, $\inf f(K) \in \overline{f(K)} = f(K)$ car $f(K)$ fermée.

Donc $\exists \alpha \in K$ tel que $f(\alpha) = \inf_{x \in K} f(x)$ et $\exists \beta \in K$ tel que $f(\beta) = \sup_{x \in K} f(x)$.

Remarque : Si A est une partie de $\mathbb{R}$, alors $M = \sup A$ ssi $\forall x \in A, x \leq M$ et $\forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in A$ tel que $M - \epsilon < x_0 \leq M$. Alors $\forall \epsilon > 0, A \cap B(M, \epsilon) \neq \emptyset$. Donc $M \in \overline{A}$.

4.6.4. Théorème de Heine : Soit $f : (E, d_E) \rightarrow (F, d_F)$ une application. Si f est continue sur une partie compacte K de E , alors f est uniformément continue sur K .

Preuve : Soit $\epsilon > 0$. f étant continue en tout point de K ,

$$\forall a \in K, \exists \eta_a > 0 : d_E(x, a) < \eta_a \Rightarrow d_F(f(x), f(a)) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Alors $K \subset \bigcup_{a \in K} B(a, \frac{\eta_a}{2})$.

Et comme K est compacte, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \frac{\eta_{a_i}}{2})$.

Posons

$$\eta = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{\eta_{a_i}}{2} \right\}.$$

Soient $x, y \in K$ tels que $d_E(x, y) < \eta$. Alors $x \in K \Rightarrow \exists i$ tel que $d_E(a_i, x) < \frac{\eta_{a_i}}{2}$ (1)

et, $d_E(a_i, y) \leq d_E(a_i, x) + d_E(x, y) < \frac{\eta_{a_i}}{2} + \eta \leq \eta_{a_i}$. (2)

D'après (1), $d_F(f(a_i), f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$.

D'après (2), $d_F(f(a_i), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$.

Alors

$$d_F(f(x), f(y)) \leq d_F(f(x), f(a_i)) + d_F(f(a_i), f(y)) < \epsilon.$$

Donc f est uniformément continue sur K .

Chapitre V. Espaces métriques connexes

5.1. Définition-Propriétés

5.1.1. Définition : Un espace métrique (E, d) est dit *connexe* s'il n'existe aucune partition de E en deux ouverts non vides.

5.1.2. Proposition : Soit (E, d) un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) E est connexe.

(ii) Les seules parties de E à la fois ouvertes et fermées sont E et $\emptyset$.

(iii) Il n'existe aucune partition de E en deux fermés non vides.

Preuve : E non connexe

$\Leftrightarrow \exists A, B \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset, E\}$ ouverts tels que $E = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$.

$\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset, E\}$ tel que A et $\mathcal{C}_E^A$ sont fermés.

$\Leftrightarrow$ Il existe une partition de E en deux fermés non vides.

5.1.3. Proposition : Soit (E, d) un espace métrique. Considérons la paire $\{0, 1\}$ munie de la distance discrète.

E est connexe si et seulement si toute application continue $f : E \rightarrow \{0, 1\}$ est constante.

Preuve :

- Par contraposée : supposons qu'il existe une application continue $f : E \rightarrow \{0, 1\}$ non constante. Alors $U = f^{-1}(0)$ et $V = f^{-1}(1)$ sont des ouverts non vides qui forment une partition de E . Donc E n'est pas connexe.

- Par contraposée : supposons que E n'est pas connexe. Alors il existe U et V deux ouverts non vides qui forment une partition de E . Considérons l'application $f : E \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \in U$ et $f(x) = 1$ si $x \in V$. Alors f est continue et non constante.

5.2. Parties connexes

5.2.1. Définition : On dit qu'une partie A d'un espace métrique (E, d) est une *partie connexe* si le sous-espace métrique (A, d_A) est un espace métrique connexe.

5.2.2. Exemple de partie non connexe : Dans $\mathbb{R}$ munie de la distance usuelle, $\mathbb{Q} =]-\infty, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q} \cup]\sqrt{2}, +\infty[\cap \mathbb{Q}$. Donc $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe.

5.2.3. Proposition : Soit (E, d) un espace métrique et soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de E .

Si pour tous $i, j \in I$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.

Preuve : Soit $f : \bigcup_{i \in I} A_i \rightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Alors f est continue sur chaque A_i . Comme A_i est connexe, il existe une constante $c_i \in \{0, 1\}$ telle que $f(A_i) = \{c_i\}$.
 $\forall i, j \in I$, comme $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, $\exists t_{ij} \in A_i \cap A_j$. Alors $\forall i, j \in I$, $c_i = f(t_{ij}) = c_j$.
Donc f est constante. Par conséquent $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.

5.2.4. Corollaire : Soit (E, d) un espace métrique et soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de E .

Si $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.

5.2.5. Proposition : Soit (E, d) un espace métrique et soit A une partie de E .
Si A est connexe et si $A \subset B \subset \overline{A}$ alors B est connexe.
En particulier si A est connexe alors $\overline{A}$ est connexe.

Preuve : Soit $f : B \rightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Alors f est continue sur A . Comme A est connexe, f est constante sur A . Alors $\exists c \in \{0, 1\}$ tel que $\forall a \in A$, $f(a) = c$.
Soit $x \in B$. Alors $x \in \overline{A}$. Donc il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers x .
Alors $f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n)$ car f est continue. Donc $f(x) = c$. Ainsi f est constante.
Par conséquent B est connexe.

5.2.6. Proposition : Une partie A de $\mathbb{R}$ est connexe si et seulement si A est un intervalle. En particulier $\mathbb{R}$ est connexe.

Preuve : Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, soit A une partie connexe.

- Si A n'est pas un intervalle, alors il existe $a, b \in A$ et $c \notin A$ tels que $a < c < b$.

Alors $A =]-\infty, c[\cap A) \cup]c, +\infty[\cap A)$ qui est une partition de A en deux ouverts non vides. Contradiction.

- Soit A un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si A est vide ou réduit à un point alors A est connexe.

Si A contient au moins deux points distincts a et b , soit $f : A \rightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Montrons que $f(a) = f(b)$. On peut supposer que $a < b$.

L'ensemble $\{f(a)\}$ est ouvert et fermé pour la topologie discrète sur $\{0, 1\}$.

Posons $B = [a, b] \cap f^{-1}(f(a))$. Alors $B \neq \emptyset$ ($a \in B$), majoré et fermé. Donc $c = \sup B$ existe et $c \in B$.

Alors $f^{-1}(f(a))$ est un ouvert qui contient c .

Par conséquent $\exists \epsilon > 0$ tel que $]c - \epsilon, c + \epsilon[\subset f^{-1}(f(a))$.

Supposons $c < b$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \in]c, b[\cap]c, c + \epsilon[$.

Donc $f(x) = f(a)$ et $x \in B$. Or $c < x$ et $c = \sup B$. Contradiction.

Par conséquent $c = b$ et alors $f(a) = f(c) = f(b)$.

Donc f est constante et alors A est connexe.

5.3. Connexité et continuité

5.3.1. Proposition : Soit E et F deux espaces métriques et $f : E \rightarrow F$ une application.

Si E est connexe et si f est continue, alors $f(E)$ est connexe.

Preuve : Soit $\varphi : f(E) \rightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Alors $\varphi \circ f : E \rightarrow \{0, 1\}$ est continue. Comme E est connexe, $\varphi \circ f$ est constante. Donc φ est constante sur $f(E)$.

Par conséquent $f(E)$ est connexe.

5.4. Produits d'espaces connexes

Théorème : L'espace métrique produit d'une famille finie d'espaces métriques est connexe si et seulement si chacun de ces espaces est connexe.

Preuve : Soient E_1 et E_2 deux espaces métriques.

- CN : Supposons $E_1 \times E_2$ connexe. Soit $p_i : E_1 \times E_2 \rightarrow E_i$ la $i^{\text{ème}}$ projection canonique, $i = 1, 2$. Elle est continue et surjective et $E_1 \times E_2$ est connexe. Alors $p_i(E_1 \times E_2) = E_i$ est connexe.

- CS : Supposons E_1 et E_2 connexes. Soit $f : E_1 \times E_2 \rightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Soit $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$.

$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, f est continue sur $\{x_1\} \times E_2$. Or l'application

$$\begin{aligned} \psi_2 : E_2 &\rightarrow \{x_1\} \times E_2 \\ y &\mapsto (x_1, y) \end{aligned}$$

est continue, surjective et E_2 connexe. Alors $\{x_1\} \times E_2$ est connexe.

Par conséquent f est constante sur $\{x_1\} \times E_2$. Donc $f(x_1, x_2) = f(x_1, a_2)$.

Par un raisonnement analogue au précédent, $E_1 \times \{a_2\}$ est connexe et f constante sur $E_1 \times \{a_2\}$. Donc $f(x_1, a_2) = f(a_1, a_2)$.

Par conséquent $f(x_1, x_2) = f(x_1, a_2) = f(a_1, a_2)$. Alors f est constante, donc $E_1 \times E_2$ est connexe.

5.5. Connexité par arcs

5.5.1. Définition : Soit (E, d) un espace métrique et soient $a, b \in E$.

On appelle *chemin* joignant a et b , toute application continue $f : [\alpha, \beta] \rightarrow E$, (où $[\alpha, \beta]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$), telle que $f(\alpha) = a$ et $f(\beta) = b$.

On appelle *arc* d'extrémités a et b , l'ensemble $f([\alpha, \beta])$.

5.5.2. Définition : On dit qu'un espace métrique (E, d) est *connexe par arcs* si pour tous $a, b \in E$, il existe un chemin joignant a et b .

5.5.3. Exemple : $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs (pour la distance induite par l'une de ses trois normes usuelles équivalentes).

En effet, $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$, l'application

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (1 - t)a + tb \end{aligned}$$

est un chemin joignant a et b .

5.5.4. Théorème : Tout espace métrique (E, d) connexe par arcs est connexe.

Preuve : Soit $x_0 \in E$. $\forall x \in E$, soit $f_x : [\alpha_x, \beta_x] \rightarrow E$ un chemin joignant x_0 à x .

Comme $[\alpha_x, \beta_x]$ est connexe et f_x continue, alors l'arc $A_x = f_x([\alpha_x, \beta_x])$ est une partie connexe de E . Or

$$E = \bigcup_{x \in E} A_x \text{ et } x_0 \in \bigcap_{x \in E} A_x.$$

Donc E est connexe.

5.5.5. Exemple : $\mathbb{R}^n$ est connexe car connexe par arcs.

Chapitre VI. Espaces vectoriels normés

6.1. Généralités

6.1.1. Rappels : Définitions et premiers exemples voir 1.2.

6.1.2. Proposition : Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'application $\| \cdot \| : x \in E \mapsto \| x \| \in \mathbb{R}$ est uniformément continue.

Preuve : $\forall x, y \in E, | \| x \| - \| y \| | \leq \| x - y \|$. Alors l'application $\| \cdot \|$ est 1-lipschitzienne donc uniformément continue.

6.1.3. Proposition : Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les applications $s : (x, y) \in E \times E \mapsto x + y \in E$ et $p : (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \lambda x \in E$ sont continues.

Preuve :

Continuité de s :

Pour tous $(x, y), (x', y') \in E \times E$, on a :

$$\| s(x', y') - s(x, y) \| = \| x' + y' - (x + y) \| \leq \| x' - x \| + \| y' - y \| = N_1((x', y') - (x, y)).$$

Alors s est 1-lipschitzienne donc uniformément continue et par conséquent continue.

Continuité de p :

Soit $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{K} \times E$. Pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, on a :

$$\| p(\lambda, x) - p(\lambda_0, x_0) \| = \| \lambda x - \lambda_0 x_0 \| = \| \lambda x - \lambda_0 x + \lambda_0 x - \lambda_0 x_0 \| \leq |\lambda - \lambda_0| \| x \| + |\lambda_0| \| x - x_0 \|.$$

Or $x = x - x_0 + x_0$. Donc $\| x \| \leq \| x - x_0 \| + \| x_0 \|$. Alors

$$\| \lambda x - \lambda_0 x_0 \| \leq |\lambda - \lambda_0| \| x - x_0 \| + |\lambda - \lambda_0| \| x_0 \| + |\lambda_0| \| x - x_0 \|$$

Soit $\epsilon > 0$. Cherchons $\eta > 0$ tel que

$$\sup(|\lambda - \lambda_0|, \| x - x_0 \|) < \eta \Rightarrow \| \lambda x - \lambda_0 x_0 \| < \epsilon.$$

Or d'après le calcul précédent,

$$\sup(|\lambda - \lambda_0|, \|x - x_0\|) < \eta \Rightarrow \|\lambda x - \lambda_0 x_0\| < \eta^2 + (\|x_0\| + |\lambda_0|)\eta.$$

Il suffit alors que $\eta^2 + (\|x_0\| + |\lambda_0|)\eta < \epsilon$. C'est-à-dire $\eta^2 + (\|x_0\| + |\lambda_0|)\eta - \epsilon < 0$.

Le discriminant de cette équation est $\Delta = (\|x_0\| + |\lambda_0|)^2 + 4\epsilon > 0$. Donc η existe.

Ainsi $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$,

$$N_\infty((\lambda, x) - (\lambda_0, x_0)) < \eta \Rightarrow \|p(\lambda, x) - p(\lambda_0, x_0)\| < \epsilon.$$

Donc p est continue au point (λ_0, x_0) .

6.2. Norme de la convergence uniforme

6.2.1. Définition : Soit X un ensemble. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Sur $\mathcal{F}_b(X, E)$ l'espace des applications bornées de X dans E , on définit la *norme de la convergence uniforme* en posant $\forall f \in \mathcal{F}_b(X, E)$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

6.2.2. Théorème : Soit X un ensemble. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si $(E, \|\cdot\|)$ est complet, alors $(\mathcal{F}_b(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Preuve : La distance associée à la norme $\|\cdot\|_\infty$ est la distance de la convergence uniforme d_∞ . Soit d la distance associée à la norme $\|\cdot\|$.

Si $(E, \|\cdot\|)$ est complet, alors (E, d) est un espace métrique complet. Alors $(\mathcal{F}_b(X, E), d_\infty)$ est complet. Par conséquent $(\mathcal{F}_b(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

6.3. Application linéaires continues

6.3.1. Définition : Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Une application f de E dans F est dite *linéaire continue* si f est une application linéaire de E dans F et si f est continue de (E, d_E) dans (F, d_F) où d_E est la distance associée à $\|\cdot\|_E$ et d_F la distance associée à $\|\cdot\|_F$.

Notation : L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F sera noté : $\mathcal{L}(E, F)$.

6.3.2. Théorème : Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit f une application linéaire de E dans F . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) f est continue sur E .
- ii) f est continue en 0_E .
- iii) Il existe une constante $k > 0$ telle que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$.

Proof.

i) $\Rightarrow$ ii) Si f est continue sur E , alors f est continue en 0_E .

ii) $\Rightarrow$ iii) Si f est continue en 0_E , en prenant $\epsilon = 1, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in E$

$$\|x\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq 1 \text{ car } f(0_E) = 0_F.$$

Soit $x \neq 0_E$. Posons $y = \frac{\eta}{2} \frac{x}{\|x\|_E}$. Alors $\|y\|_E = \frac{\eta}{2} < \eta$.

Donc $\|f(y)\|_F \leq 1$. Alors $\|f(\frac{\eta}{2} \frac{x}{\|x\|_E})\|_F \leq 1 \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq \frac{2}{\eta} \|x\|_E$, car f est linéaire.

Si $x = 0_E$, l'inégalité obtenue est aussi vraie. Donc $k = \frac{2}{\eta}$ convient.

iii) $\Rightarrow$ i). Supposons qu'il existe $k > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$.

Alors $\forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x - y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$.

Alors f est k -lipschitzienne. Donc f est uniformément continue, par conséquent continue. ■

6.3.3. Proposition : Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Sur $\mathcal{L}(E, F)$, on définit une norme en posant $\forall f \in \mathcal{L}(E, F)$,

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Et on a $\forall f \in \mathcal{L}(E, F)$,

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|_F.$$

6.3.4. Corollaire 1 : $\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \forall x \in E$,

$$\|f(x)\|_F \leq \|f\| \cdot \|x\|_E.$$

6.3.5. Corollaire 2 : Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ trois espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors $\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \forall g \in \mathcal{L}(F, G), g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$, et

$$\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|$$

6.4. Normes sur un espace vectoriel de dimension finie Voir 1.2.5.

6.4.1. Normes usuelles équivalentes Voir 1.2.5.

6.4.2. Proposition : Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Alors la boule fermée $B_f(0_E, 1)$ de E pour l'une des trois normes usuelles est compacte.

Proof. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ définie par $\forall \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, f(\lambda) = x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Alors f est linéaire.

En considérant sur $\mathbb{R}^n$ et E la même norme usuelle, par exemple la norme $\|\cdot\|_2$, on a

$$\|f(\lambda)\|_2 = \|\lambda\|_2 = \|\lambda\|_2.$$

Alors f est continue. Et

$$f(B_f(0_{\mathbb{R}^n}, 1)) = B_f(0_E, 1).$$

Or $B_f(0_{\mathbb{R}^n}, 1)$ est compacte. Donc $B_f(0_E, 1)$ est compacte. ■

6.4.3. Théorème : Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors

- i) Toutes les normes sur E sont équivalentes.
- ii) Pour toute norme sur E , les parties compactes sont les parties fermées et bornées.
- iii) Toute application linéaire f de E dans un espace vectoriel normé $(F, \| \cdot \|_F)$ sur $\mathbb{K}$ est continue.

Proof. iii) Supposons que $\dim E = n$. Soit $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Alors

$$\|f(x)\|_F = \left\| \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \right\|_F \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|f(e_i)\|_F.$$

Posons $k = \max_{1 \leq i \leq n} \|f(e_i)\|_F$. Alors $\|f(x)\|_F \leq k \sum_{i=1}^n |x_i|$.

En considérant sur E la norme N_1 , définie par $N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|$ on a :

$$\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k N_1(x).$$

Soit $\| \cdot \|_E$ la norme sur E . Elle est équivalente à la norme N_1 . Alors il existe $M > 0$ tel que $N_1 \leq M \| \cdot \|_E$. Donc $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq kM \|x\|_E$.

Par conséquent, f est continue. ■

6.4.4. Corollaire : Toute application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est continue.

6.5. Applications multilinéaires continues

6.5.1. Définition : Soient $(E_1, \| \cdot \|_{E_1}), \dots, (E_n, \| \cdot \|_{E_n})$ et $(F, \| \cdot \|_F)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ une application.

On dit que f est *multilinéaire* si f est linéaire par rapport à chacune des ses n variables, les autres étant fixées, c'est-à-dire que pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$, chaque application partielle

$$x_i \in E_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in F$$

est linéaire, $\forall i = 1, \dots, n$.

Si $n = 2$, on dit que f est *bilinéaire*. Si $n = 3$, on dit que f est *trilinéaire*.

On dit que f est *multilinéaire continue* si f est multilinéaire et continue pour la structure d'espace vectoriel normé produit de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ et d'espace vectoriel normé de $(F, \| \cdot \|_F)$.

6.5.2. Proposition : Soient $(E_1, \| \cdot \|_{E_1}), (E_2, \| \cdot \|_{E_2})$ et $(F, \| \cdot \|_F)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ une application bilinéaire.

Sont équivalentes :

- i) f est continue sur $E_1 \times E_2$.
- ii) f est continue en $0_{E_1 \times E_2}$.
- iii) Il existe une constante $k > 0$ telle que : $\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$,

$$\|f(x_1, x_2)\|_F \leq k\|x_1\|_{E_1} \times \|x_2\|_{E_2}.$$

6.5.3. Proposition : Soient $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), \dots, (E_n, \|\cdot\|_{E_n})$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ une application multilinéaire. Sont équivalentes :

- i) f est continue sur $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$.
- ii) f est continue en $0_{E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n}$.
- iii) Il existe une constante $k > 0$ telle que : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$,

$$\|f(x_1, \dots, x_n)\|_F \leq k\|x_1\|_{E_1} \times \|x_2\|_{E_2} \times \dots \times \|x_n\|_{E_n}.$$

Proof.

i) $\Rightarrow$ ii) : Immédiat.

ii) $\Rightarrow$ iii) : Supposons f est continue en $0_{E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n}$. Considérons sur $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$,

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_{E_i}$$

En prenant $\epsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que $\|x\|_\infty \leq \eta \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq 1$. Soit $x \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ tel que $x_i \neq 0 \forall i = 1, \dots, n$. Posons

$$y = \frac{\eta}{2} \left(\frac{x_1}{\|x_1\|_{E_1}}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|_{E_n}} \right).$$

Alors $\|y\|_\infty = \frac{\eta}{2} < \eta$. Donc $\|f(y)\|_F \leq 1$. Par conséquent

$$\frac{\eta}{2} \frac{1}{\|x_1\|_{E_1} \times \dots \times \|x_n\|_{E_n}} \|f(x_1, \dots, x_n)\|_F \leq 1$$

car f est multilinéaire. Donc

$$\|f(x_1, \dots, x_n)\|_F \leq \frac{2}{\eta} \|x_1\|_{E_1} \times \dots \times \|x_n\|_{E_n}.$$

S'il existe i tel que $x_i = 0$, alors cette inégalité est aussi vraie.

Ainsi $\exists M = \frac{2}{\eta} > 0$ tel que $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$,

$$\|f(x_1, \dots, x_n)\|_F \leq M\|x_1\|_{E_1} \times \dots \times \|x_n\|_{E_n}.$$

iii) $\Rightarrow$ i) : Supposons qu'il existe $K > 0$ tel que $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$,

$$\|f(x_1, \dots, x_n)\|_F \leq K\|x_1\|_{E_1} \times \dots \times \|x_n\|_{E_n}.$$

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$. Montrons que f est continue en a .

On a $f(x) - f(a) = f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n)$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= f(x_1 - a_1, x_2, \dots, x_n) + f(a_1, x_2 - a_2, x_3, \dots, x_n) + f(a_1, a_2, x_3 - a_3, x_4, \dots, x_n) + \dots \\ &+ f(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n - a_n). \text{ Donc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a)\|_F &\leq \|f(x_1 - a_1, x_2, \dots, x_n)\|_F + \|f(a_1, x_2 - a_2, x_3, \dots, x_n)\|_F + \dots \\ &+ \|f(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n - a_n)\|_F. \end{aligned}$$

On en déduit d'après l'hypothèse que

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a)\|_F &\leq K\|x_1 - a_1\|\|x_2\|\dots\|x_n\| + K\|a_1\|\|x_2 - a_2\|\|x_3\|\dots\|x_n\| + \dots \\ &+ K\|a_1\|\dots\|a_{n-1}\|\|x_n - a_n\|. \end{aligned}$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow a} \|f(x) - f(a)\|_F = 0. \text{ Donc } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Par conséquent f est continue en a . ■

6.6. Espaces de Banach

6.6.1. Définition : On appelle *espace de Banach* sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tout espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ qui est complet.

Un espace de Banach réel est un espace de Banach sur $\mathbb{R}$.

Un espace de Banach complexe est un espace de Banach sur $\mathbb{C}$.

6.6.2. Proposition : Tout espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un espace de Banach.

6.6.3. Proposition : Soit X un ensemble. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si $(E, \|\cdot\|_E)$ est espace de Banach, alors $(\mathcal{F}_b(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach, où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme de la convergence uniforme.

Preuve : Déjà faite au 6.2.2.

6.6.4. Théorème : Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si $(F, \|\cdot\|_F)$ est espace de Banach, alors $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E, F)})$ est espace de Banach, où $\forall f \in \mathcal{L}(E, F)$,

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

6.6.5. Définition : Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On dit qu'une application $f : (E, \| \cdot \|_E) \rightarrow (F, \| \cdot \|_F)$ est un *isomorphisme d'espaces vectoriels normés* si

- i) f est linéaire
- ii) f est bijective
- iii) f est continue
- iv) sa réciproque f^{-1} est continue.

Remarque : Si f est linéaire, sa réciproque f^{-1} est linéaire.

Notation : On note $Isom(E, F)$ l'espace des isomorphismes d'espaces vectoriels normés de $(E, \| \cdot \|_E)$ sur $(F, \| \cdot \|_F)$.

6.6.6. Théorème de Banach : Soient $(E, \| \cdot \|_E)$ et $(F, \| \cdot \|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si $(E, \| \cdot \|_E)$ et $(F, \| \cdot \|_F)$ sont des espaces de Banach, alors toute application linéaire continue et bijective $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels normés.

6.6.7. Théorème et définition : Soit $(E, \| \cdot \|_E)$ un espace de Banach. Soit $f \in \mathcal{L}(E, E)$. Alors la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^n$$

converge normalement, (où $f^0 = Id_E$ et $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$, n -fois).

On note $exp(f)$ sa somme. Donc

$$exp(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^n$$

Proof. On a $\|f^n\| \leq \|f\|^n$ et la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \|f\|^n$ converge de somme

$$exp(\|f\|) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \|f\|^n.$$

Donc la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^n$$

converge normalement. ■

6.6.8. Théorème : Soit $(E, \| \cdot \|_E)$ un espace de Banach. Soit $u \in \mathcal{L}(E, E)$ tel que $\|u\| < 1$.

Alors $Id_E - u$ est inversible dans $\mathcal{L}(E, E)$.

Proof. La série $\sum_{n \geq 0} u^n$ converge normalement car $\|u^n\| \leq \|u\|^n$ et la série géométrique $\sum_{n \geq 0} \|u\|^n$ converge car $\|u\| < 1$.

Soit $v = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ la somme de la série $\sum_{n \geq 0} u^n$. Alors

$$u \circ v = v \circ u = \sum_{n=1}^{+\infty} u^n = v - Id_E.$$

Donc $v \circ (Id_E - u) = (Id_E - u) \circ v = Id_E$.

Par conséquent, $Id_E - u$ est inversible d'inverse v . ■

6.6.9. Théorème : Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach. Alors

- i) $Isom(E, F)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E, F)$.
- ii) L'application : $u \in Isom(E, F) \mapsto u^{-1} \in Isom(F, E)$ est continue.

Proof.

i) Soit $u_0 \in Isom(E, F)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Posons

$$v = Id_E - (u_0^{-1}) \circ u = (u_0^{-1}) \circ (u_0 - u).$$

Alors $\|v\| \leq \|u_0^{-1}\| \cdot \|u - u_0\|$. (1)

Donc si $\|u - u_0\| < \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}$ alors $\|v\| < 1$. Donc $Id_E - v$ est inversible.

Dans ce cas, $(u_0^{-1}) \circ u = Id_E - v$ est inversible. Alors $(u_0^{-1}) \circ u \in Isom(E, E)$. Donc $u \in Isom(E, F)$. Ainsi

$$B(u_0, \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}) \subset Isom(E, F).$$

Donc $Isom(E, F)$ est un ouvert.

ii) Avec les notations du i) si $\|u - u_0\| < \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}$ alors $u = u_0 \circ (Id_E - v)$.

Donc $u^{-1} = (Id_E - v)^{-1} \circ u_0^{-1}$. Par conséquent

$$u^{-1} - u_0^{-1} = [(Id_E - v)^{-1} - Id_E] \circ u_0^{-1}.$$

Comme $\|v\| < 1$, d'après le théorème précédent,

$$(Id_E - v)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} v^n \implies (Id_E - v)^{-1} - Id_E = \sum_{n=1}^{+\infty} v^n.$$

Donc

$$\|(Id_E - v)^{-1} - Id_E\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|v\|^n = \frac{\|v\|}{1 - \|v\|}.$$

Alors $\|u^{-1} - u_0^{-1}\| \leq \|u_0^{-1}\| \frac{\|v\|}{1 - \|v\|}$.

Lorsque $u \rightarrow u_0$, $\|v\| \rightarrow 0$ d'après (1) dans i). Donc $u^{-1} \rightarrow u_0^{-1}$. ■

6.7. Espaces de Hilbert réels

6.7.1. Définition : Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On appelle *produit scalaire* sur H , toute forme bilinéaire symétrique définie positive $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$.

On appelle *espace préhilbertien réel*, tout espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire.

6.7.2. Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz : Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Pour tous $x, y \in H$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Proof. Soient $x, y \in H$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \geq 0$.

Alors $\langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle \geq 0$. Ce polynôme du second degré en λ étant de signe fixe, son discriminant (réduit) $\Delta' = (\langle x, y \rangle)^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0$.

Donc $(\langle x, y \rangle)^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$.

Finalement, $|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$. ■

6.7.3. Corollaire : Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

On obtient une norme sur H en posant pour tout $x \in H$,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Cette norme est appelée la *norme associée au produit scalaire*.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit alors : pour tous $x, y \in H$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Proof. Pour tous $x \in H$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$ et $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

Pour tous $x, y \in H$, $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$.

Alors

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Donc $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ainsi on a bien une norme sur H . ■

6.7.4. Définition : On appelle *espace de Hilbert réel*, tout espace préhilbertien réel $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ qui est complet pour la norme associée au produit scalaire.

Un espace de Hilbert réel est donc un espace de Banach réel dont la norme est une norme associée à un produit scalaire.

6.7.5. Exemple : Sur $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est défini par $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

La norme associée est définie par $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|x\|_2.$$

Donc $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert réel car $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ est complet.