Table des matières

CYCLE DE TECHNICIENS SUPERIEURS D'EAMAC

EPREUVE DE MATHEMATIQUES SESSION 2011

Exercice 1 :

Soient les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi e^t \cos^2 t \; dt \quad et \quad J = \int_0^\pi e^t \sin^2 t \; dt$$

1. Calculer $I + J$ et $I - J$.
2. En déduire les valeurs de I et J.

Exercice 2 :

Soit f_a la fonction définie par : $f_a = \log(x^2 - 2ax + 1)$;

où $-1 \leq a \leq 1$ et log désigne la fonction logarithme népérien. On notera C_a la courbe représentative de f_a dans un repère orthonormé.

A) Dans cette partie du problème on suppose $a = -1$.

1. Etudier les variations de f_{-1} et tracer la courbe représentative C_{-1}.
2. a) Déterminer une primitive de la fonction g définie par: $g(x) = \log(x + 1)$
   b) Calculer l'aire de ensemble des points de coordonnées (x, y) satisfaisant aux conditions : $0 \leq x \leq e - 1$ e t $0 \leq y \leq f_{-1}(x)$.

B) Dans cette partie, on suppose $0 < a < 1$

1. Déterminer le domaine de définition de f_a.
2. Etudier les variations de la fonction f_a.
3. Montrer que la courbe C_a admet la droite d'équation $x = a$ pour axe de symétrie.
4. Soit h la fonction définie par: $h(x) = 2 \log x \quad x > 0$,
   Donner, selon la valeur de x, le signe de l'expression : $f_a(x) - h(x)$

   Cette expression admet-elle une limite quand x tend vers $+\infty$?
5. Tracer la courbe représentative de h et utiliser ce qui précède pour tracer $C_{\frac{2}{3}}$ dans le même repère.

C) Montrer que les courbes C_a et C_{-a} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = 0$.

CYCLE DE TECHNICIENS SUPERIEURS D'EAMAC

EPREUVE DE MATHEMATIQUES SESSION 2012

Exercice 1 : (3pts)

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^1 \ln(x+1)dx$
2. $J = \int_{\frac{1}{e}}^{e} -\frac{\ln x}{x^2}dx$

Exercice 2 : (5pts)

Soit l'application de $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(Z) = Z^3 + (2+3i)Z^2 + (4+6i)Z + 8$$

1. **a)** Calculer $f(i)$

b) Déterminer deux nombres complexes a et b vérifiant :

$f(Z) = (Z-i)(Z^2 + aZ + b)$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $f(Z) = 0$

2. On désigne par Z_1 la solution de (E) ayant une partie imaginaire positive, Z_2 la solution réelle et Z_3 l'autre solution. Montrer qu'il existe un nombre complexe q telque $Z_2 = q\, Z_1$ et $Z_3 = q\, Z_2$

Soit $A_1, A_2\ et\ A_3$ les points du plan complexe d'affixes respectives $Z_1, Z_2\ et\ Z_3$.

Quelle est la nature du triangle $A_1A_2A_3$? (Justifier)

Exercice 3 : (5pts)

Soit la suite numérique de terme général u_n , n appartenant à $\mathbb{N}^*$, définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n}u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \le u_{n+1} \le u_n$

   En déduire que la suite (u_n) converge.
3. **a)** Montrer que la suite de terme général (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n}{n}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_1

b) En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$

c) En déduire également l'expression de u_n en fonction de n et calculons $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 4 : (7pts)

PARTIE I : Soit l'équation différentielle (1) : $y'' - 4y' + 4y = 0$

1. Déterminer une solution de (1) sous la forme
$$f_1(x) = e^{rx} \quad où\, r\, est\, un\, nombre\, réel$$
2. Montrer que la fonction f_2 telle que $f_2(x) = xe^{rx}$ est aussi solution de (1) (r étant la valeur trouvée précédemment)
3. **a)** Vérifier que pour tout couple des réels $(\lambda_1; \lambda_2)$ la fonction

$f_\lambda = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de (1)

b) Calculer $\lambda_1\ et\ \lambda_2$ pour que $f_\lambda(0) = \frac{1}{2}\ \ et\ \ f'_\lambda(0) = \frac{1}{2}$

PARTIE II :

$f\ \ et\ \ g$ sont les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}(-x+1) \quad et \quad g(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}(x+1)$$

$(C)\ \ et\ \ (T)$ leurs courbes représentatives.

1. Montrer que α est nécessairement strictement inférieur à 1.
2. Soit φ une fonction de $]0;1[$ sur $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x) = -4x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
   a) Montrer que α est solution de l'équation $\varphi(x) = 0$
   b) Etudier les variations de φ
   c) En déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution qui sera comprise entre $0{,}95\ \ et\ \ 0{,}96$.
3. Conclure

CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES SESSION 2012

EXERCICE 1 :

A l'aide d'une intégration par parties, calculons les intégrales suivantes :

3. $I = \int_0^1 \ln(x+1)dx$

Posons : $U(x) = \ln(x+1)$ $\qquad U'(x) = \frac{1}{x+1}$

$V'(x) = 1$ $\qquad V(x) = x+1$

Il vient que : $I = [(x+1)\ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 (x+1)\frac{1}{x+1}dx$

$= [(x+1)\ln(x+1)]_0^1 - [x+1]_0^1$

$= 2\ln 2 - 2 + 1$

$\underline{\boldsymbol{I = 2\ln 2 - 1}}$

4. $J = \int_{\frac{1}{e}}^{e} -\frac{\ln x}{x^2}dx$

Posons : $W(x) = \ln x$ $\qquad U'(x) = \frac{1}{x}$

$P'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\qquad P(x) = \frac{1}{x}$

$$J = \left[\frac{1}{x}\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \left[\frac{\ln x}{x}\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - \left[\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{e}}^{1} = \frac{1}{e} - e + \frac{1}{e} + e$$

$\boldsymbol{J = \frac{2}{e}}$

EXERCICE 2 :

Soit l'application de $\mathbb{C}$ définie par :

$f(Z) = Z^3 + (2+3i)Z^2 + (4+6i)Z + 8$

3. **a)** Calculons $f(i)$

$f(i) = i^3 + (2+3i)i^2 + (4+6i)i + 8$

$= -i - (2+3i) + 4i - 6 + 8$

$= -i - 2 - 2i + 4i + 2 = 0$

$\boldsymbol{f(i) = 0}$

b) Déterminons deux nombres complexes a et b vérifiant :

$f(Z) = (Z-i)(Z^2 + aZ + b)$

$f(Z) = Z^3 + (2+3i)Z^2 + (4+6i)Z + 8$

i étant solution de f, effectuons la division euclidienne de $f(Z)$ par $(Z-i)$.

On obtient :

$f(Z) = (Z - i)(Z^2 + (2 + 4i)Z + 8i)$

Par identification, on a : $\boldsymbol{a = 2 + 4i}$ et $\boldsymbol{b = 8i}$

c) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$f(Z) = 0 \implies (Z - i)(Z^2 + (2 + 4i)Z + 8i) = 0$

$\implies (Z - i) = 0 \; ou \; (Z^2 + (2 + 4i)Z + 8i) = 0$

$\implies Z = i \; ou \; Z^2 + (2 + 4i)Z + 8i = 0$

$$\Delta = (2 + 4i)^2 - 4(1)(8i)$$
$$= 4 + 16i - 32i$$
$$= -16i - 12 = (2 - 4i)^2$$

$\sqrt{\Delta} = 2 - 4i$,$\Delta > 0$ on aura donc deux solutions :

$$Z_2 = \frac{-(2 + 4i) - (2 - 4i)}{2}$$
$$= -\frac{2 + 4i + 2 - 4i}{2}$$
$$\boldsymbol{Z_2 = -2}$$
$$Z_3 = \frac{-(2 + 4i) + (2 - 4i)}{2}$$
$$= \frac{-2 - 4i + 2 - 4i}{2}$$
$$\boldsymbol{Z_3 = -4i}$$
$$\boldsymbol{S_{\mathbb{C}} = \{-4i; i \; ; \; -2\}}$$

4. Montrons qu'il existe un nombre complexe q telque $Z_2 = q\, Z_1$ et $Z_3 = q\, Z_2$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{-2}{2i} = \frac{-2i}{-1} = 2i \implies q = 2i$$
$$Z_3 = q\, Z_2 \implies q = \frac{Z_3}{Z_2} = \frac{-4i}{-2} = 2i$$
$$\boldsymbol{q = 2i}$$

$A_1(Z = i)$; $A_2(Z = -2)$; $A_3(Z = -4i)$

Le triangle $\boldsymbol{A_1A_2A_3}$ est un triangle rectangle en $\boldsymbol{A_2}$.

Justification :

$(A_1A_2)^2 + (A_2A_3)^2 = (x_{A2} - x_{A1})^2 + (y_{A2} - y_{A1})^2 + (x_{A3} - x_{A2})^2 + y - y_{A2})^2$

$= (-2)^2 + 1^2 + 2^2 + (-4)^2$

$= 4 + 1 + 4 + 16 = 25$

$(A_1A_3)^2 = (x_{A3} - x_{A1})^2 + (y_{A3} - y_{A1})^2 = 0^2 + (-4 - 1)^2 = 25$

$\boldsymbol{(A_1A_2)^2 + (A_2A_3)^2 = (A_1A_3)^2}$

<u>EXERCICE 3</u> :

Soit la suite numérique de terme général u_n , n appartenant à $\mathbb{N}^*$, définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$$

4. Calculons u_2, u_3 et u_4

$$u_2 = \frac{1+1}{2 \times 1} u_1 = \frac{1}{2}$$
$$u_3 = \frac{2+1}{2 \times 2} u_2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$
$$u_4 = \frac{3+1}{2 \times 3} u_3 = \frac{4}{6} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$

$\boldsymbol{u_2 = \frac{1}{2}}$; $\boldsymbol{u_3 = \frac{3}{8}}$ **et** $\boldsymbol{u_4 = \frac{1}{4}}$

5. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$

Nous procèderons à une démonstration par récurrence.

Soit (P_n) la proposition $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$

Au premier rang $n = 1$ on a : $0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow 0 \leq u_2 \leq u_1$ d'où (P_1) est vraie

Supposons (P_n) vraie et montrons que (P_{n+1}) l'est aussi. ie $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

(P_n) vraie $\Leftrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq u_n$; n étant positif, on a $0 \leq (n+1)u_{n+1} \leq (n+1)u_n$

en multipliant par $\frac{1}{2n}$ on a : $0 \leq \frac{n+1}{2n} u_{n+1} \leq \frac{n+1}{2n} u_n$

Pour $n = n + 1$ on obtient : $0 \leq \frac{n+2}{2n+2} u_{n+1} \leq \frac{n+2}{2n+2} u_n$

$$n + 1 > n \Longrightarrow 2(n+1) > 2n$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{2(n+1)} < \frac{1}{2n}$$
$$\Longrightarrow \frac{n+2}{2(n+1)} \leq \frac{n+2}{2n} \leq \frac{n+1}{2n}$$

D'où $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$; (P_{n+1}) vraie.

D'après le principe de raisonnement de récurrence, on peut conclure que $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$

Déduisons-en que la suite (u_n) converge.

6. a) Montrons que la suite de terme général (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n}{n}$ est une suite géométrique à caractériser.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n\, u_{n+1}}{(n+1)u_n} = \frac{n(n+1)\, u_n}{2n(n+1)u_n} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}$$

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\boldsymbol{q = \frac{1}{2}}$ et de premier terme $\boldsymbol{v_1 = \frac{1}{2}}$

b) Déduisons-en $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$

$$v_n = v_1 q^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} v_n = 0}$$

c) Déduisons-en également l'expression de u_n en fonction de n et calculons $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

On sait que $v_n = \frac{u_n}{n} \Longrightarrow u_n = nv_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\boldsymbol{u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Posons $N = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Longrightarrow \ln N = -n\ln 2 \Longrightarrow n = -\frac{\ln N}{\ln 2}$

Lorsque $n \to +\infty$; $N \to 0$ Il vient :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{N\to 0} -N\frac{\ln N}{\ln 2} = \lim_{N\to 0} -\frac{\ln N^N}{\ln 2} = +\infty$$

Car $\lim\limits_{N\to 0} -\ln N^N = -\infty$

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} u_n} = +\infty$$

<u>EXERCICE 4 :</u>

PARTIE I : Soit l'équation différentielle $(1):\ y'' - 4y' + 4y = 0$

4. Déterminons une solution de (1) sous la forme

$$f_1(x) = e^{rx} \quad \text{où } r \text{ est un nombre réel}$$

L'équation caractéristique associée à (1) est : $r^2 - 4r + 4 = 0$

$$\Delta = 16 - 16 = 0$$

$$r = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{D'où } \boldsymbol{f_1(x) = e^{2x}}$$

5. Montrons que la fonction f_2 telle que $f_2(x) = xe^{rx}$ est aussi solution de (1)

$f_2(x) = xe^{rx}$ est solution de (1) $\Longrightarrow f_2'' - 4f_2' + 4f_2 = 0$

$$\begin{aligned} f_2'' - 4f_2' + 4f_2 &= (xe^{rx})'' - 4(xe^{rx})' + 4xe^{rx} \\ &= e^{rx}(2r + r^2x - 4 - 4rx + 4x) \end{aligned}$$

Avec $r = 2$; on a : $f_2'' - 4f_2' + 4f_2 = e^{2x}(8x - 8x) = 0$

D'où $f_2(x) = xe^{rx}$ est aussi solution de (1).

6. a) Vérifions que pour tout couple des réels $(\lambda_1;\lambda_2)$ la fonction $f_\lambda = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de (1) ; ie $f_\lambda'' - 4f_\lambda' + 4f_\lambda = 0$

$$f_\lambda'' - 4f_\lambda' + 4f_\lambda = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)'' - 4(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)' + 4(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)$$
$$= \lambda_1(f_1'' - 4f_1' + 4f_1) + \lambda_2(f_2'' - 4f_2' + 4f_2) = 0$$

D'où $f_\lambda = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de (1)

b) Calculons λ_1 et λ_2 pour que $f_\lambda(0) = \frac{1}{2}$ et $f_\lambda'(0) = \frac{1}{2}$

$$f_\lambda(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 x e^{2x}$$
$$f_\lambda(0) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \lambda_1 e^{2(0)} + \lambda_2(0)e^{2(0)} = \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{\lambda_1 = \frac{1}{2}}$$

$$f'_\lambda(x) = \lambda_1 f'_1(x) + \lambda_2 f'_2(x) = 2\lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^{2x} + 2\lambda_2 x e^{2x}$$
$$f_\lambda'(0) = \frac{1}{2} \Longrightarrow 2\lambda_1 e^{2(0)} + \lambda_2 e^{2(0)} + \lambda_2(0)e^{2(0)} = \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow 2\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{\lambda_2 = -\frac{1}{2}}$$

Les valeurs recherchées sont : $\boldsymbol{\lambda_1 = \frac{1}{2}}$ ***et*** $\boldsymbol{\lambda_2 = -\frac{1}{2}}$

PARTIE II :

f et g sont les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}(-x+1) \quad et \quad g(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}(x+1)$$

(C) et (T) leurs courbes représentatives.

4. Montrer que α est nécessairement strictement inférieur à 1.
5. Soit φ une fonction de $]0;1[$ sur $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x) = -4x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

d) Montrer que α est solution de l'équation $\varphi(x) = 0$
e) Etudier les variations de φ
f) En déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution qui sera comprise entre $0{,}95$ et $0{,}96$.

6. Conclure

CYCLE DE TECHNICIENS SUPERIEURS D'EAMAC

EPREUVE DE MATHEMATIQUES SESSION 2013

Exercice 1 : *(4pts)*

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation suivante:

$$iZ^2 - 2iZ + i - 2 = 0$$

2. Donner une écriture trigonométrique de la solution imaginaire pure.

Exercice 2 : *(6pts)*

Le PDG d'une entreprise vous confie que pendant une période d'hivers, ses observations lui ont permis de dresser le tableau suivant, dans lequel x désigne en degrés la température moyenne extérieure au cours de 24 heures et y la consommation en fuel (exprimée en litres) de sa chaudière au cours de ces même 24 heures.

x_i	-5	-3	0	5	10
y_i	40	38	34	27	20

Le PDG vous demande :

1. De calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y
2. De déterminer par la méthode des moindres carres, l'équation de la droite d'ajustement de y en x.
3. Quelle estimation de consommation peut-t-il faire pour la durée d'une vague de froid de température journalière de $-10°$ pendant quatre jours?

Exercice 3 : *(4pts)*

Déterminer les primitives des fonctions suivantes: $f(x) = \sin^3 x$ et $g(x) = \tan^4 x$

Exercice 4 : *(6pts)*

On considère la fonction $f(x) = x - \ln|x|$

1. Etudier les variations de cette fonction et tracer son graphique (C). (unité graphique 1cm)
2. On coupe (C) par la droite d'équation $y = x + m$. Montrer qu'il y a toujours deux points d'intersection, M_1 et M_2, et trouver l'ensemble des positions du milieu, I, de $[M_1M_2]$.
3. Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

CYCLE DE TECHNICIENS SUPERIEURS D'EAMAC

EPREUVE DE MATHEMATIQUES SESSION 2014

Exercice 1 (4 points)

1) Résoudre l'équation différentielle : $2y' + y = 0 \quad (E)$ où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) On considère équation différentielle : $2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+2) \quad (E')$

   a) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x)} = e^{-\frac{x}{2}}(ax^2 + bx)$ soit une solution de (E') .

   b) Soit $\boldsymbol{g}$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que : $\boldsymbol{g}$ est solution de (E') si et seulement si $f - g$ est solution de (E)

   c) Résoudre l'équation (E') .

Exercice 2 (5 points)

On considère la fonction numérique u définie sur $]0;+\infty[$ par : $u(x) = 1 - \ln x$.

1) Etudier le signe de $u(x)$.
2) Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x(1 - \ln x)$
   a) Déterminer $g'(x)$.
   b) En déduire une primitive U de u **sur** $]0;+\infty[$ qui s'annule en e^2
3) On considère la suite v définie sur □ par :$V_n = \int_{e^{-n}}^{e^{-n+1}} (1 - \ln x)\, dx$
   a) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $V_n \geq 0$
   b) Calculer V_n en fonction de .
   c) Déterminer la limite de V
4) Pour tout entier naturel , on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$
   a) Exprimer S_n en fonction de n
   b) Déterminer la limite de S_n

Exercice 3 (5 points)

1. Reproduire et compléter le tableau suivant:

z	$1+i$	2	$1-i$	$i\sqrt{2}$	$1+i\sqrt{3}$	$-1+i$	$1+i\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$2i$	-3
z												
arg**z**												

Une boite contient 12 cartons, indiscernables au toucher, portant les 12 nombres complexes du tableau précèdent (Chaque carton porte un seul nombre complexe) :

2. On tire au hasard un carton de la boite (On suppose l'équiprobabilité des tirages).

a. Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre réel?

b. Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre complexe dont le module est égal à $\sqrt{2}$?

c. Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre complexe dont un argument 0 est tel que : $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$?

3. Un jeu consiste à tirer un carton de la boite précédente. Si le nombre complexe inscrit sur le carton tire est de module 3, le joueur gagne 10 000 points et le jeu s'arrête. Sinon, le carton tire est remis dans la boite et le joueur procède a un deuxième tirage; si ce carton porte un nombre complexe de module3, le joueur gagne 8 000 points, s'il est de module 2, il gagne 5 000 points sinon il ne gagne rien et le jeu s'arrête.
Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

a. Donner la loi de probabilité de X (On pourra s'aider d'un arbre).

b. Calculer l'Esperance mathématique de X.

Exercice 4 (6 points)

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 2$

a. Dresser le tableau de variations de g .

b. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que l'équation admet dans $\mathbb{R}$ **une unique solution** α telle que $0{,}6 \leq \alpha \leq 0{,}7$

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2xe^{-x}}{x^2+2}$

a) Calculer $f'(x)$, puis vérifier que $f'(x) = \frac{2g(x)e^{-x}}{(x^2+2)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ avec $\|\vec{\imath}\| = 1cm$, $\|\vec{\jmath}\| = 5cm$

3. On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$U_n = \int_n^{n+1} f(t)\, dt$$

On ne cherche pas à calculer l'intégrale U_n

a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$: $0 \leq U_n \leq \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n}$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

b) Déterminer un entier naturel $n_0$tel que pour tout $n > n_0$, $0 \leq U_n \leq 10^{-5}$.

CYCLE DE TECHNICIENS SUPERIEURS D'EAMAC

EPREUVE DE MATHEMATIQUES SESSION 2015

Exercice 1 : 7 points

Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher. On effectue 3 tirages successifs d'une boule en respectant la régie suivante : Si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne. Si elle est blanche, on ne la remet pas.

On considère les évènements suivants :
A= « seule la première boule tirée est blanche »
B= « seule la deuxième boule tirée est blanche »
C= « seule la troisième boule tirée est blanche »

1. Calculer les probabilités des évènements A, B et C.
2. En déduire la probabilité qu'on ait tire une seule boule blanche a Tissue des trois tirages.
3. Sachant que l'on a tiré exactement une boule blanche, quelle est la probabilité que cette boule ait été tirée en dernier ?

Exercice 2 : 6points

A. Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{x}^2+1-\ln \mathrm{x}}{\mathrm{x}}$

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 + \ln \mathrm{x} - 2$

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation

2. a. Montrer que l'équation $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = 0$ admet une unique solution a et que $1{,}30 < \alpha < 1{,}35$.

b) En déduire le signe de $\mathrm{g}(\mathrm{x})$ suivant les valeurs de x.

B. Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique : 2cm)

1. Calculer $\mathrm{f}'(\mathrm{x})$ et dresser le tableau de variation de f.

2. Tracer la courbe (C).

Exercice 3 : 4 points

Linéariser $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 4\sin^2(\mathrm{x})\cos^2(\mathrm{x})$ donner une primitive de f

Exercice4 : 3 points

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 + zi\sin(x) - \frac{1}{4} = 0, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

CYCLE DE TECHNICIENS SUPERIEURS D'EAMAC

CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES SESSION 2015

Exercice 1 :

Exercice 2 :

A. $f(x) = \frac{x^2+1-\ln x}{x}$; $g(x) = x^2 + \ln x - 2$

1°. Etudions les variations de g et dressons son tableau de variation

* $D_g =]0;+\infty[$
* $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 + \ln x - 2 = -\infty$
* $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 + \ln x - 2 = +\infty$
* Dérivée :

g est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions continues et dérivables sur $]0;+\infty[$ et on a :

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$$

$\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) > 0$

D'où g est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

* Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2°. a) montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $1{,}30 < \alpha < 1{,}35$

g est une fonction continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ de plus, $g(1{,}30) \times g(1{,}35) = -0{,}048 \times 0{,}123 = -0{,}06 < 0$. D'après le Théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $\alpha \in \,]1{,}30;1{,}35[$. Donc $1{,}30 < \alpha < 1{,}35$

b) Déduisons-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

$\forall x \in \,]0;\alpha[$, C_g est situé en dessous de l'axe des abscisses, on a donc $g(x) < 0$

$\forall x \in \,]\alpha;+\infty[$, C_g est situé au-dessus de l'axe des abscisses, on a donc $g(x) > 0$

B. Soit la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé

1°. Calculons $f'(x)$ et dressons le tableau de variation de f.

f est une fonction continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme rapport de deux fonctions continues et dérivables sur $]0;+\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{\left(2x - \frac{1}{x}\right)x - 1(x^2 + 1 - \ln x)}{x^2}$$
$$= \frac{2x^2 - 1 - x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$$
$$= \frac{x^2 - 2 + \ln x}{x^2}$$

ie $\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}}$

$f'(x) = 0 \implies g(x) = 0$

D'après ce qui précède (A. 2.(a)), $g(x) = 0$ admet une unique solution α

$\forall x \in \,]0;\alpha[$, $g(x) < 0$ et donc $f'(x) < 0$ d'où f est strictement décroissante sur $]0;\alpha[$

$\forall x \in \,]\alpha;+\infty[$, $g(x) > 0$, donc $f'(x) > 0$ d'où f est strictement croissante sur $]0;\alpha[$

Tableau de variation

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

2°. Traçons la courbe (C)

EXERCICE 3 :

Linéarisons $f(x) = 4\sin^2 x \cos^2 x$ et donnons une primitive de f

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\sin^2 x \cos^2 x \\ &= 4\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) \\ &= 1^2 - \cos^2 2x \\ &= 1 - \left(\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{4}\left(e^{i4x}+2+e^{-i4x}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i4x}+e^{-i4x}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x}$$

Soit F une primitive de f

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)dx \\ &= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right)dx \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + k} \qquad (\boldsymbol{k} \in \mathbb{R})$$

EXERCICE 4 :

Résolvons dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$Z^2 + Zi\sin x - \frac{1}{4} = 0, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (i\sin x)^2 - 4(1)\left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= -\sin^2 x + 1 \\ &= \cos^2 x \end{aligned}$$

$\sqrt{\Delta} = \cos x \quad \forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[, \Delta > 0$ On aura donc deux solutions :

$$Z_1 = \frac{-i\sin x - \cos x}{2}$$

$$= -\frac{\cos x + i \sin x}{2}$$

$$\boldsymbol{Z_1} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{e^{ix}}$$

$$Z_2 = \frac{-i \sin x + \cos x}{2}$$

$$= \frac{\cos x - i \sin x}{2}$$

$$\boldsymbol{Z_2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{e^{-ix}}$$

$$\boldsymbol{S}_{\mathbb{C}} = \left\{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{e^{ix}}\ ;\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{e^{-ix}}\right\}$$

CYCLE DE TECHNICIENS SUPERIEURS D'EAMAC

EPREUVE DE MATHEMATIQUES SESSION 2016

Exercice MT1-1 : (3 points)

1. Vérifier que pour tout réel x, on a : $\frac{1}{(1+e^x)^2} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.
2. Calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}\,dx$
3. a. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $\mathrm{f}\,(\mathrm{x}) = \frac{e^x}{(1+e^x)^3}$.

   b. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\mathrm{J} = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}\,dx$

Exercice MT5- 2 (5 points)

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5% de ce cheptel.

1. On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

2.

a. On choisit successivement et au hasard 10 animaux. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi eux. Montrer que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. Calculer son Esperance mathématique.

b. On désigne par A l'évènement : « aucun animal n'est malade parmi les 10 ». On désigne par B l'évènement : « au moins un animal est malade parmi les 10. ». Calculer les probabilités de A et de B.

3. On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,9. On note T l'évènement : « avoir un test positif à cette maladie » et M l'évènement : « être atteint de cette maladie ».

a. Représenter par un arbre pondère les donnes de l'énonce.

b. Calculer la probabilité de l'évènement T.

c. Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

EXERCICE MT4-3 (5 points)

1. Donner sous forme trigonométrique les solutions de l'équation (E) :

   $Z \in \mathbb{C}, z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$.
2. Calculer $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2$ en déduire que l'équation précédente est équivalente a $\left(\frac{z}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right)^3 = 1$

3. En utilisant les racines cubiques de l'unité, donner sous forme algébrique les solutions de l'équation (E).
4. Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

Exercice MT1-4 : (7 points)

I. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - x\sqrt{1+x^2}$

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation. (1point)

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que

$$0,78 < \alpha < 0,79 .$$

3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

II. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3}{3} - \sqrt{1+x^2}$

(C) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm en abscisses et 5 cm en ordonnées.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et déterminer les limites de f aux bornes de cet ensemble (1,5 point)

2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{-x\,g(x)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

b. Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

3. a. Montrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha^4 - 3}{3\alpha}$.

b. Etudier les branches infinies de (C).

4. Construire (C) (On prendra $\alpha = 0,785$).

CYCLE DE TECHNICIENS SUPERIEURS D'EAMAC

CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES SESSION 2016

EXERCICE 1 :

1°. Vérifions que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $\boldsymbol{\frac{1}{(1+e^x)^2} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}}$

$$1-\frac{e^x}{1+e^x}-\frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{(1+e^x)-e^x(1+e^x)-e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{1+2e^x+e^{2x}-e^x-e^{2x}-e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{1+2e^x-2e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1}{(1+e^x)^2}$$

$$D'o\text{ù} : 1-\frac{e^x}{1+e^x}-\frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1}{(1+e^x)^2}$$

Nous l'avons montré en utilisant le chemin inverse. En conclusion :

$$\frac{1}{(1+e^x)^2} = 1-\frac{e^x}{1+e^x}-\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

2°. Calculons $\boldsymbol{I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}\,dx}$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(1-\frac{e^x}{1+e^x}-\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\right)dx$$

$$= \int_0^1 1dx + \int_0^1 -\frac{e^x}{1+e^x}\,dx + \int_0^1 -\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 1dx - \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx - \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$$

$$= [x]_0^1 - [\ln|1+e^x|]_0^1 - \left[\frac{1}{1+e^x}\right]_0^1$$

$$= 1-(\ln(1+e)-\ln 2) - \left(\frac{-1}{1+e}+\frac{1}{2}\right) = 1-\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)+\frac{1}{1+e}-\frac{1}{2}$$

D'où : $\boldsymbol{I = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+e} - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$

3°. a) Déterminons une Primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^3}$$

Soit $F(x) = \int f(x)dx$

$$= \int \frac{e^x}{(1+e^x)^3}dx$$

$$\boldsymbol{F(x) = -\frac{1}{(1+e^x)^2} + k} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

b) Calculons à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}dx$

$$J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}dx$$

Posons : $U(x) = x \qquad \Longrightarrow \quad U'(x) = 1$

$$V'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^3} \Longrightarrow V(x) = -\frac{1}{2(1+e^x)^2}$$

Il vient :

$$J = \left[-\frac{x}{2(1+e^x)^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2(1+e^x)^2}dx$$

$$= \left[-\frac{x}{2(1+e^x)^2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}dx$$

De ce qui précède, on a : $\int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}\ dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+e} - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

On obtient donc :

$$J = \left[-\frac{x}{2(1+e^x)^2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{1+e} - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2(1+e^1)^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2(1+e)} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$= \frac{e}{2(1+e^1)^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{J = \frac{1}{4} + \frac{e}{2(1+e^1)^2} - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

EXERCICE 2 :

I. La probabilité qu'il soit malade est de :

$$P(M) = \frac{0,5}{100}$$

$$\boldsymbol{P(M) = 5 \times 10^{-3}}$$

II. **a)** Montrons que X subit une loi binomiale dont on donnera les paramètres :

La variable aléatoire X prend pour valeur le nombre d'animaux malades (succès) parmi les 10 choisis. On dit qu'elle suit la loi binomiale de paramètre :

$$\boldsymbol{(n; p) = (10; 0,0005)}$$

Calculons l'espérance mathématique : $E(X) = n \times p$

AN : $E(X) = 10 \times 5 \times 10^{-3}$

$$\boldsymbol{E(X) = 5 \times 10^{-2}}$$

b) A : « Aucun animal n'est malade parmi les 10 »

B : « Au moins un animal est malade parmi les 10 »

Déterminons les probabilités A et B :

$P(A) = 1 - P_1$

P_1 = la probabilité pour « Tous les animaux choisis sont malades »

$P_1 = P(x = 10) = C_{10}^{10}(5 \times 10^{-3})^{10}.(1 - 5 \times 10^{-3})^0 = (5 \times 10^{-3})^{10}$

D'où $P(A) = 1 - (5 \times 10^{-3})^{10}$

$$\boldsymbol{P(A) = 0,999999999999995 \approx 1}$$

EXERCICE 3 :

I. Soit la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto 1 - x\sqrt{1 + x^2}$$

1. Etudions les variations de g et dressons son tableau de variation.

- $D_g = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
- g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et on a :

$$g'(x) = \left(1 - x\sqrt{1 + x^2}\right)'$$

$$= -x'\sqrt{1 + x^2} - (\sqrt{1 + x^2})'x$$

$$= -\sqrt{1 + x^2} - \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.x$$

$$= -\frac{1 + x^2 + x^2}{\sqrt{1 + x^2}}$$

D'où $\boldsymbol{g'(x) = -\frac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 2x^2+1>0, \qquad \sqrt{1+x^2}>0$$
$$\Rightarrow \frac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}>0$$

D'où $\boldsymbol{g'(x) < 0}$

La fonction g est une fonction strictement décroissante.

- Tableau de variation :
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 - x\sqrt{1+x^2} = +\infty$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - x\sqrt{1+x^2} = -\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

2. Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $0{,}78 \leq \alpha \leq 0{,}79$.

g est une fonction continue et strictement décroissante donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. De plus, $g(0{,}78) \times g(0{,}79) < 0$. D'où d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $\alpha \in [0{,}78; 0{,}79]$.

3. Déduisons-en le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$g(\alpha) = 0$	$-\infty$

- $\forall x \in]-\infty;\alpha[$ la courbe de g est au-dessus de l'axe des abscisses. On a donc : $\boldsymbol{g(x) > 0\ \forall x \in]-\infty;\alpha[}$ $(\boldsymbol{g\ est\ positif})$
- $\forall x \in]\alpha;+\infty[$ la courbe de g est en-dessous de l'axe des abscisses. On a : $\boldsymbol{g(x) < 0\ \forall x \in]\alpha;+\infty[}$ $(\boldsymbol{g\ est\ n\text{é}gatif})$

II. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3}{3} - \sqrt{1+x^2}$

1. Déterminons l'ensemble de définition de f et déterminons les limites de f aux bornes de cet ensemble :

$f\ \exists$ ssi $1 + x^2 \geq 0$ toujours vrai.

On a alors : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{3} - \sqrt{1+x^2} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{3} - \sqrt{1+x^2}$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{x^2}{3} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{x^2}{3} - \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}\right)$$

$$\text{Or } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{3}\right) = +\infty \end{cases}$$

D'où : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ et $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

2. a) Calculons $f'(x)$ et montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{-xg(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - \sqrt{1+x^2}\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' - \left(\sqrt{1+x^2}\right)'$$

$$= x^2 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x^2\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x\left(x\sqrt{1+x^2} - 1\right)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{-x\left(1 - x\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$$

D'où $f'(x) = \frac{-xg(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ car $g(x) = 1 - x\sqrt{1+x^2}$

b) Etudions le signe de $f'(x)$ et dressons le tableau de variation de f

$$f'(x) = \frac{-xg(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

$f'(x) = 0 \implies -xg(x) = 0$

$\implies x = 0 \; ou \; g(x) = 0$

Or on sait que $g(x) = 0$ admet une solution unique α.

Donc les solutions de $f'(x) = 0$ sont $\{0; \alpha\}$. Avec $\alpha \in [0{,}78; 0{,}79]$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- $\forall \boldsymbol{x} \in]-\infty; \boldsymbol{0}[\cup]\boldsymbol{\alpha}; +\infty[, \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{0}$ donc $\boldsymbol{f}$ est croissante sur$]-\infty; \boldsymbol{0}[\cup]\boldsymbol{\alpha}; +\infty[$
- $\forall \boldsymbol{x} \in]\boldsymbol{0}; \boldsymbol{\alpha}[, \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{0}$, donc $\boldsymbol{f}$ est décroissante sur $]\boldsymbol{0}; \boldsymbol{\alpha}[$.
- Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1 $-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. a) Montrons que $f(\alpha) = \frac{\alpha^4 - 3}{3\alpha}$

On a $f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{3} - \sqrt{1+\alpha^2}$

$$= \frac{\alpha^4}{3\alpha} - \frac{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha} \qquad (car\; \alpha \neq 0)$$

$$= \frac{\alpha^4}{3\alpha} - \frac{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}$$

$$= \frac{\alpha^4}{3\alpha} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}$$
$$= \frac{\alpha^4 - 3}{3\alpha} + \frac{1 - \alpha\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}$$
$$= \frac{\alpha^4 - 3}{3\alpha} + \frac{g(\alpha)}{\alpha}$$

Or $g(\alpha) = 0$

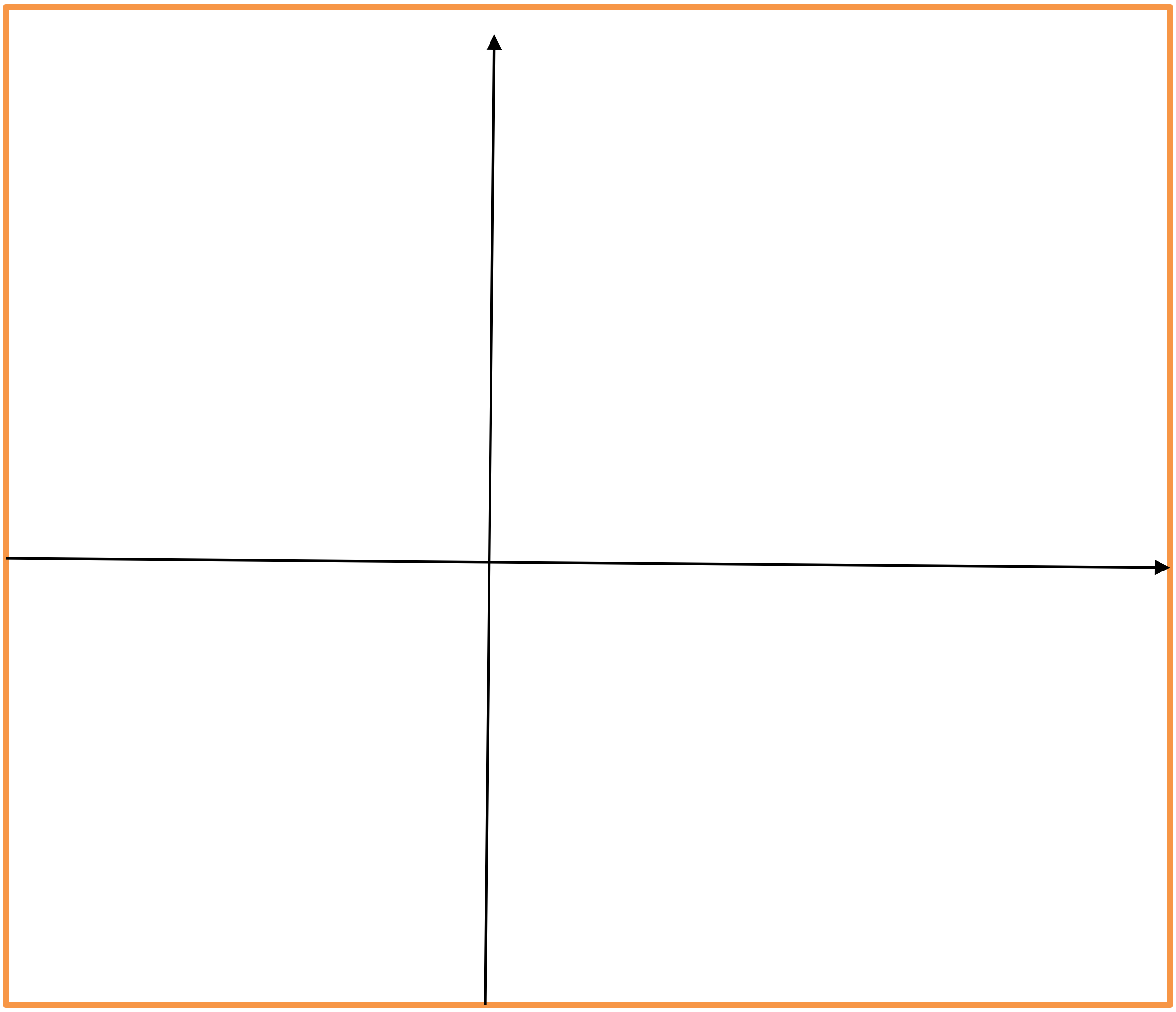
D'où $\boldsymbol{f(\alpha) = \frac{\alpha^4 - 3}{3\alpha}}$

b) Etudions les branches infinies de (C)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3} - \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}\right) = +\infty$$

Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$**.** D'où (C) admet une branche parabolique tournée vers (OJ)

4. Construisons (C) (Prendre $\alpha = 0{,}785$)



EXERCICE 4 :

1. Donnons sous forme trigonométrique les solutions de l'équation (E).
   $Z \in \mathbb{C}, Z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$
2. Calculons $\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^3$ déduisons-en que l'équation précédente est équivalente à $\left(\frac{z}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right)^3 = 1$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^3 &= \left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^2\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\\ &= (2+4i-2)\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\\ &= 4i\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\\ &= 4\sqrt{2}(i-1)\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)}$$

(E): $Z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$

$$\Rightarrow \frac{Z^3}{4\sqrt{2}(-1+i)} = 1$$

On obtient donc d'après le calcul précédent :

$$\frac{Z^3}{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^3} = 1$$

3. En utilisant les racines cubiques de l'unité, donner sous forme algébrique les solutions de l'équation (E).

Cycles TECHNICIEN SUPERIEUR et TECHNICIEN

EAMAC 2017 Epreuve de MATHEMATIQUES N°1

Exercice S-MT1-1 (5 points)

1. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$\boldsymbol{z_1} = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} \text{ et } \boldsymbol{z_2} = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$$

2. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :
$z_1 = -1 - \sqrt{3}i$ **et** $z_2 = 1 + e^{i\frac{\pi}{5}}$

3. Le plan est rapporté a un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité graphique 1 cm).

Soit le polynôme $z \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{P(z) = z^2 - (1 + 4i)z + 5i - 5}$.

a. Résoudre : $P(z) = 0$

b. Soient les points A, B et C d'affixes respectives $\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i, -1 + 3i$ et $2 + i$, Placer les points dans le repère puis donner la nature du triangle ABC.

Exercice S-MT1-2 (5 points)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - x + 1$

On définit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de U_0 et pour chaque $n > 0$, $U_{n+1} = f(U_n)$

1. Montre que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}, \mathbf{f(x)} > \mathbf{x}$. Déduis-en que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Montre que si la suite $(U_n)_{n>0}$ converge vers l, alors $l = 1$.
3. Montre par récurrence que si $U_0 \in [0, 1]$, alors $\forall\, n > 1$, on a $U_n \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$
4. Déduis-en que dans ce cas la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Exercice S-MT1-3 (5points)

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}, \; J = \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{2+x^2}} \text{ et } K = \int_0^1 \sqrt{2+x^2}\, dx$$

1. Calcule de I

Soit f la fonction définie sur $[0;\ 1]$ par : $f(x) = ln\left(x + \sqrt{2 + x^2}\right)$.

a. Calculer la dérivée de f.

b. En déduire la valeur de I.

2.

a. Vérifier que $J + 2I = K$.

b. A l'aide d'une intégration par parties portant sur K, montrer que $K = \sqrt{3} - J$.

c. En déduire les valeurs de J et de K.

<u>Exercice S-MT1-4 (5 points)</u>

La taille officielle d'un ballon de basket pour les matchs féminins est la taille 6. Le modèle officiel pour les hommes est de taille 7.

Dans un centre de formation de basket donne:

- une fille avec un ballon de taille 6 a cinq chances sur six de marquer un lancer franc alors qu'avec un ballon de taille 7, elle a trois chances sur cinq ;
- un garçon avec un ballon de taille 7 a trois chances sur quatre de marquer un lancer franc et deux chances sur trois avec un ballon de taille 6.

On confie sept filles et neuf garçons de ce centre à un nouvel entraineur qui, lors d'une séance de lancers francs, donne les balles sans tenir compte de leurs tailles, avec la même probabilité.

On considère les évènements suivants :

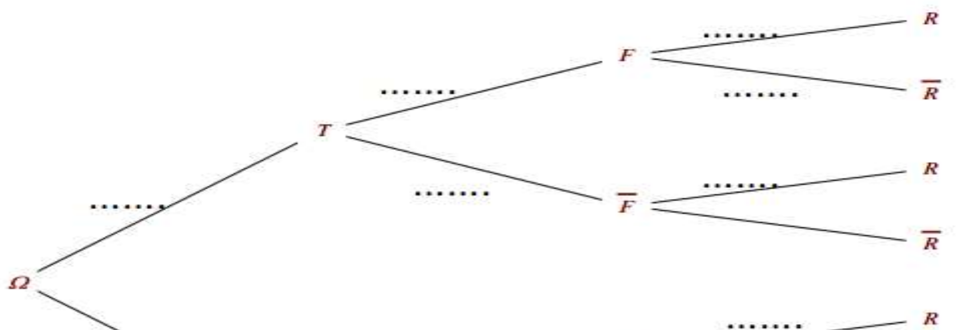
F : « Le joueur est une fille »

T : « Le joueur a un ballon de taille 6»

R : « Le joueur a raté son lancer franc »

On note $\bar{F}$,$\bar{T}$ et $\bar{R}$ les évènements contraires respectifs de F, T et R.

1. Recopier et compléter le schéma ci-dessous.



2. Justifier que la probabilité de $T \cap R$ est : $\frac{25}{192}$.
3. Un joueur a un ballon de taille 6. Calculer la probabilité qu'il rate son lancer franc.
4. Démontrer que la probabilité qu'un garçon rate un lancer franc est : $\frac{21}{128}$
5. Un garçon effectue 10 lancers francs indépendants. Calculer la probabilité qu'il en rate exactement 3.

CYCLES TECHNICIEN SUPERIEUR ET TECHNICIEN

EPREUVE DE MATHEMATIQUES N°2 SESSION 2017

Exercice S-MT2-1 : (5points)

On pose $P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$

1. u designe un nombre complexe.
   a. Montrer que $P(\bar{u}) = \overline{P(u)}$
   b. En déduire que si $P(u) = 0$ alors $P(\bar{u}) = 0$.
2. a) Calculer $P(1 + i)$
   b) En déduire les solutions complexes de I 'équation $P(z) = 0$.

3. a) Factoriser $P(z)$
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice S-MT2-2 : (5points)

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{nU_n+4}{n+1} \end{cases}$

1.

a) Calculer les quatre premiers termes de la suite (U_n).

b) (U_n) est- elle arithmétique ? géométrique?

2. On considère la suite (V_n).définie par $V_n = nU_n$.

a) Montrer que la suite (V_n) est arithmétique en donnant sa raison et son premier terme.

b) Donner I ‘expression de V_n en fonction de n.

c) En déduire I ‘expression de $\mathrm{U_n}$ en fonction de n, puis retrouver ses quatre premiers termes

3. Montrer que la suite (U_n) est strictement monotone et bornée.

4.

a) Calculer $\mathrm{S_n} = \mathrm{V_1} + \mathrm{V_2} + \mathrm{V_3} + \cdots + \mathrm{V_n}$

b) La suite (S_n)est-elle convergente ?

Exercice S-MT2-3: (5 points)

Le but de I' exercice est d'approcher $\ln\ (1 + \ \mathrm{a})$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient a I' intervalle $[0\ ;\ +\infty[$

On note $I_0(a) = \int_0^a \frac{dt}{t+1}$ et $\forall\ n\ \in \mathbb{N}^*\ I_\mathrm{n}(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^n}{(t+1)^{n+1}}\mathrm{dt}$

1. Calculer $I_0(a)$ en fonction de a.
2. A I ‘aide d'une intégration par parties, exprimer $I_1\,(a)$en fonction de a.
3. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$\forall\ n\ \in \mathbb{N}^*\ I_{\mathrm{n}+1}(a) = \frac{(-1)^{n+1}a^{n+1}}{n+1} + I_n(a)$$

4. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par : $\mathrm{P(x)}\ = \frac{1}{5}\mathrm{x}^5 - \frac{1}{4}\mathrm{x}^4 + \frac{1}{3}\mathrm{x}^3 - \frac{1}{2}\mathrm{x}\ \ + \mathrm{x}$.

a. Calculer $I_2(a), I_3(a)$ et $I_4(a)$

b. Justifier que $I_5(a) = \ \ln\ (1 + \ \mathrm{a}) - \mathrm{P(a)}$

5. Calculer l'intégral $\mathrm{J(a)}$ définie par : $\mathrm{J(a)}\ = \int_0^a (\mathrm{t} - \ \mathrm{a})^5\,\mathrm{dt}$.

6. a) Démontrer que : $\forall\, t \in [0, a], \frac{(t-a)^5}{(t+1)^6} \geq (t-a)^5$

b) Démontrer que : $\forall\, a \in [0\ ;\ +\infty[, J(a) < I_5(a) < 0$.

7. En déduire que : $\forall\, a \in [0\ ;\ +\infty[, |\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}$

8. Déterminer, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

Exercice S-MT2-4 (5 points)

Un sac contient 4 jetons rouges (numérotes de 1 à 4) et 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5).

1. 0n tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac.
   a. Calcule la probabilité de tirer au plus 2 jetons verts.
   b. Calcule la probabilité de ne tirer que 3 jetons verts.
2. 0n tire successivement et sans remise 3 jetons du sac.
   a. Calcule la probabilité de tirer exactement 1 jeton vert.
   b. Calcule la probabilité de ne tirer aucun jeton vert.

CYCLES TECHNICIEN SUPERIEUR ET TECHNICIEN

EPREUVE DE MATHEMATIQUES SESSION 2018

Exercice S-MT4-1 : (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$.

1. Déterminer les trois nombres a, b et c sachant que :

$$\begin{cases} abc = 15 \\ 3b = (1+2i)c \\ ac = 3(2+i) \end{cases}$$

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $-1+2i$; $2-i$ et $-3i$.

On pose : $z = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

   a. Donner la forme algébrique et la forme trigonométrique de z
   b. En déduire la nature du triangle ABC

Exercice S-MT4-2 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{5}{2}; +\infty\right]$ par : $f(x) = \sqrt{2x+5}$ et (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

1. f est-elle dérivable pour tout x de $\left[-\frac{5}{2}; +\infty\right]$?
2. Etudier les variations de f.
3. Soit A le point d'abscisse $-\frac{5}{2}$ et M un point de (C), distinct de A, d'abscisse x_0 ;
   a) écrire une équation de la droite (AM) ;
   b) on désigne par $\theta(x_0)$ le coefficient directeur de cette droite. Que peut-on dire de $\theta(x_0)$ lorsque x_0 tend vers $-\frac{5}{2}$? Construire la courbe (C)

On désigne par (Γ) l'ensemble des points N dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient : $y^2 - 2x - 5 = 0$.

   c) Comment peut-on déduire (Γ) de la courbe (C) ? Construire (Γ)

Exercice S-MT4-3 : (5 points)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel, $0 \leq u_n \leq 4$
2. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice S-MT4- 4 : (5 points)

Un laboratoire propose un test de dépistage pour une maladie.

La probabilité qu'une personne atteinte de cette maladie ait un test positif est 0,97.

La probabilité qu'une personne non atteinte de cette maladie ait un test positif est 0,01.

La probabilité qu'une personne ait un test positif est 0,394

On procède au dépistage systématique dans la population où s'est déclenchée cette maladie. On choisit une personne au hasard dans cette population.

On note les événements suivants :

M : « la personne est atteinte de la maladie »
T : « la personne choisie a un test positif ».
On note p la probabilité de l'événement M.

1. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

2. a. Calculer $p(M \cap T)$ et $p(\overline{M} \cap T)$ en fonction de p.
   b. Montrer que $p(T) = 0{,}96p + 0{,}01$. En déduire que $p = 0{,}4$

3. Une personne choisie a un test positif. Calculer la probabilité qu'elle soit atteinte de la maladie.