

l'intègre

Thibaut Cousin
Hervé Pérodeau

Physique

MPSI-PTSI

LE COMPAGNON

Le livre qui vous aide toute l'année

- L'essentiel du cours
- Les méthodes étape par étape
- Les erreurs à éviter
- Des QCM et des Vrai-Faux
- Des exercices à difficulté progressive
- Des extraits de sujets de concours
- Tous les corrigés détaillés

DUNOD

Physique

MPSI-PTSI

LE COMPAGNON

Physique : *Le compagnon PCSI*, Dunod, 2011.

Illustrations intérieures : Antony Cristo

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2011
ISBN 978-2-10-056831-4

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Physique

MPSI-PTSI

LE COMPAGNON

Thibaut Cousin

Professeur de physique
au lycée Faidherbe (Lille)

Hervé Perodeau

Professeur de physique
au lycée Marceau (Chartres)

DUNOD

Table des matières

Partie 1 Optique géométrique

1. Lumière et rayon lumineux	2
1.1 Lois de Snell-Descartes	2
1.2 Conséquences des lois de Snell-Descartes	4
1.3 Angle de déviation d'un rayon lumineux	5
Synthèse	7
Tests et exercices	8
Corrigés des exercices	12
2. Formation des images	18
2.1 Système optique centré	18
2.2 Notion d'objet et d'image	19
2.3 Stigmatisme : conditions de Gauss	19
2.4 Foyers	21
Synthèse	23
Tests et exercices	24
Corrigés des exercices	27
3. Lentilles sphériques minces	32
3.1 Généralités	32
3.2 Stigmatisme	35
3.3 Règles de construction	35
3.4 Association de lentilles minces accolées	37
3.5 Focométrie élémentaire	37
Synthèse	38
Tests et exercices	39
Corrigés des exercices	42

4. Miroirs sphériques	48
4.1 Généralités	48
4.2 Stigmatisme	51
4.3 Règles de construction	52
Synthèse	54
Tests et exercices	55
Corrigés des exercices	57
5. Instruments d'optique	61
5.1 Les sources de lumière	61
5.2 Collimateur	64
5.3 Lunette de visée	65
5.4 Oculaire	66
5.5 Lunette auto-collimatrice	67
5.6 Goniomètre	69
Synthèse	70
Tests et exercices	71
Corrigés des exercices	76

Partie 2 Électrocinétique — Première période

6. Le dipôle électrocinétique	84
6.1 État électrique d'un dipôle	84
6.2 Conventions d'orientation	86
6.3 Caractéristique statique d'un dipôle	87
6.4 Dipôles linéaires	88
Synthèse	92
Tests et exercices	93
Corrigés des exercices	96

7. Théorèmes généraux pour les circuits linéaires	100
7.1 Associations série et parallèle	100
7.2 Associations de dipôles linéaires passifs	101
7.3 Associations de dipôles linéaires actifs	101
7.4 Associations de dipôles actifs et passifs	104
Synthèse	106
Tests et exercices	107
Corrigés des exercices	111
8. Régime transitoire dans les circuits linéaires	117
8.1 Aborder un problème de régime transitoire	117
8.2 Résolution-type du premier ordre : charge d'un condensateur	119
8.3 Résolution-type du deuxième ordre : régime libre d'un RLC série	121
Synthèse	124
Corrigés des exercices	129

Partie 3 Mécanique du point — Première période

9. Cinématique du point	138
9.1 Référentiel et observateur	138
9.2 Systèmes de coordonnées	139
9.3 Exemples simples de mouvements	141
Synthèse	144
Tests et exercices	145
Corrigés des exercices	147
10. Dynamique du point en référentiel galiléen	150
10.1 Notion de force	150
10.2 Lois de Newton	151
10.3 Exemples de mouvements et de forces	152
Synthèse	157
Tests et exercices	158
Corrigés des exercices	163

11. Énergie	171
11.1 Théorème de l'énergie cinétique	171
11.2 Cas des forces conservatives — Énergie potentielle	173
11.3 Théorème de l'énergie mécanique	176
Synthèse	177
Tests et exercices	178
Corrigés des exercices	181
12. Systèmes conservatifs à un degré de liberté — Oscillateurs	186
12.1 Équilibre et énergie potentielle	186
12.2 Oscillateur en régime libre	188
12.3 Portrait de phase	189
Synthèse	191
Tests et exercices	192
Corrigés des exercices	196

Partie 4 Électrocinétique — Deuxième période

13. Dipôles en régime sinusoïdal	204
13.1 Notation complexe d'un signal sinusoïdal	205
13.2 Résolution d'un problème en régime sinusoïdal forcé	207
13.3 Puissance	208
Synthèse	209
Tests et exercices	210
Corrigés des exercices	214
14. Résonance en régime sinusoïdal forcé	220
14.1 Présentation	221
14.2 Résonance en intensité	221
14.3 Résonance en tension aux bornes du condensateur	223

Synthèse	225	Tests et exercices	288
Tests et exercices	226	Corrigés des exercices	290
Corrigés des exercices	228		
15. L'amplificateur opérationnel	232	19. Problème à deux corps	292
15.1 Étude de l'AO	232	19.1 Notations	293
15.2 Montages simples à base d'AO en régime linéaire	234	19.2 Grandeurs associées au système dans (R)	293
15.3 Équation différentielle	237	19.3 Grandeurs associées au mobile fictif	294
Synthèse	238	19.4 Théorèmes de König	295
Tests et exercices	239	19.5 Revenir au problème initial	296
Corrigés des exercices	241	Synthèse	296
		Tests et exercices	297
16. Filtrage linéaire	243	Corrigés des exercices	300
16.1 Fonction de transfert harmonique	244		
16.2 Diagramme de Bode asymptotique d'un filtre linéaire	246	20. Champ de forces newtoniennes	304
16.3 Caractérisation des principaux filtres	248	20.1 Propriétés des forces newtoniennes	305
Synthèse	249	20.2 Invariants du mouvement	305
Tests et exercices	250	20.3 Mouvements engendrés par des forces newtoniennes	306
Corrigés des exercices	255	20.4 Propriétés géométriques et mécaniques des cônes non bornées	308
		20.5 Propriétés géométriques et mécaniques des ellipses	309
		Synthèse	312
		Tests et exercices	313
		Corrigés des exercices	318
		21. Changement de référentiel	327
		21.1 Cinématique de deux cas particuliers	328
		21.2 Compléments de dynamique	331
		21.3 Quelques référentiels	332
		Synthèse	335
		Tests et exercices	336
		Corrigés des exercices	341

Partie 5

Mécanique — Deuxième période

17. Résonance mécanique	268
17.1 Résolution du problème	268
Synthèse	271
Tests et exercices	272
Corrigés des exercices	276
18. Dynamique des mouvements de rotation	282
18.1 Moment d'une force	282
18.2 Moment cinétique d'un point matériel	285
18.3 Théorème du moment cinétique	285
Synthèse	287

Partie 6 Thermodynamique

22. Introduction à la thermodynamique	348		
22.1 Considérations d'échelle	348	25.4 Énergie interne et enthalpie	386
22.2 Paramètres d'état	349	25.5 Bilan énergétique pour un gaz parfait	388
Synthèse	351	Synthèse	389
Tests et exercices	352	Tests et exercices	390
Corrigés des exercices	353	Corrigés des exercices	395
23. Cinétique des gaz	354	26. Deuxième principe de la thermodynamique	401
23.1 Modèle du gaz parfait monoatomique	354	26.1 Entropie et réversibilité	402
23.2 Généralisation au gaz parfait polyatomique	357	26.2 Identités thermodynamiques	403
23.3 Mélange idéal de gaz parfait	357	26.3 Transformations particulières	403
23.4 Exemple de fluide réel : le gaz de van der Waals	358	26.4 Entropie de systèmes particuliers	405
23.5 Coefficients thermoélastiques	358	26.5 Troisième principe de la thermodynamique	406
Synthèse	360	Synthèse	406
Tests et exercices	361	Tests et exercices	407
Corrigés des exercices	364	Corrigés des exercices	409
24. Hydrostatique	368	27. Changement d'état d'un corps pur	412
24.1 Principe fondamental de la statique des fluides	368	27.1 Outils pour la description des changement de phase	412
24.2 Statique d'un fluide homogène incompressible	369	27.2 Diagramme (P, T) d'un corps pur	414
24.3 Statique d'un fluide homogène compressible	370	27.3 Diagramme de Clapeyron	416
24.4 Théorème d'Archimède	371	Synthèse	418
Synthèse	372	Tests et exercices	419
Tests et exercices	373	Corrigés des exercices	422
Corrigés des exercices	376	28. Machines thermiques	427
25. Premier principe de la thermodynamique	380	28.1 Généralités sur un cycle ditherme	427
25.1 Premier principe	381	28.2 Généralisation	428
25.2 Types de transformation	382	28.3 Théorème de Carnot	430
25.3 Travail des forces de pression extérieure	384	Synthèse	431
		Tests et exercices	432
		Corrigés des exercices	437

Partie 7 Électromagnétisme

29. Champ électrostatique	446
29.1 Distributions de charges	446
29.2 Méthodes de calcul du champ électrique	452
29.3 Théorème de Gauss	454
Synthèse	459
Tests et exercices	460
Corrigés des exercices	463
30. Potentiel électrique	472
30.1 Potentiel rayonné par une distribution de charge	472
30.2 Circulation du champ électrique le long d'un contour	476
30.3 Énergie potentielle électrique	477
30.4 Topographie du champ électrique	478
Synthèse	480
Tests et exercices	481
Corrigés des exercices	484
31. Analogie formelle avec la gravitation	489
Synthèse	490
Corrigés des exercices	493
32. Dipôle électrostatique	498
32.1 L'approximation dipolaire	498
32.2 Potentiel et champ rayonnés à grande distance	499
32.3 Action d'un champ électrique extérieur sur un dipôle électrostatique	501
Synthèse	502
Tests et exercices	503
Corrigés des exercices	506
33. Champ magnétostatique	512
33.1 Champ magnétique rayonné par un conducteur filiforme	512
33.2 Propriétés de symétrie du champ magnétique	514

33.3 Calcul du champ magnétique rayonné par un conducteur filiforme	516
33.4 Propriétés vectorielles du champ magnétique	518
33.5 Théorème d'Ampère	520
33.6 Topographie du champ magnétique	521
Synthèse	522
Tests et exercices	523
Corrigés des exercices	526
34. Force de Lorentz	533
34.1 Généralités	533
34.2 Charge dans un champ électrique permanent uniforme	534
34.3 Charge dans un champ magnétique permanent uniforme	534
Synthèse	534
Tests et exercices	535
Corrigés des exercices	537

Partie 8 Fiches méthode

1. L'écrit de concours : face à un problème	542
2. Angles et trigonométrie	546
3. Systèmes de coordonnées	548
4. Projeter un vecteur sur un axe	551
5. Résoudre des équations différentielles linéaires	552
6. Comprendre ce que représentent les différentielles	555
7. Manipuler des intégrales symboliques	558
8. Développement limités	560
9. Cônes	563
Index	565

Pour bien utiliser cet ouvrage

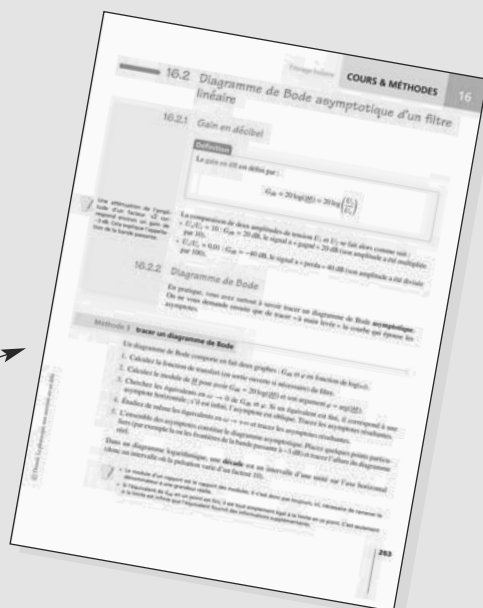


La page d'entrée de chapitre

Elle propose une introduction au cours, un rappel des prérequis et des objectifs, ainsi qu'un plan du chapitre.

Le cours

- Le cours aborde les notions du programme de façon synthétique et structurée afin d'en faciliter l'apprentissage.
- Des encarts détaillent étape par étape les méthodes essentielles, et sont suivis d'exemples d'application.



Les pictogrammes

- Des commentaires pédagogiques vous accompagnent dans le cours et dans les corrigés d'exercices. Ils sont identifiés par deux pictogrammes :



Commentaires pour bien comprendre le cours ou les corrigés d'exercices.



Mise en garde contre des erreurs fréquentes.

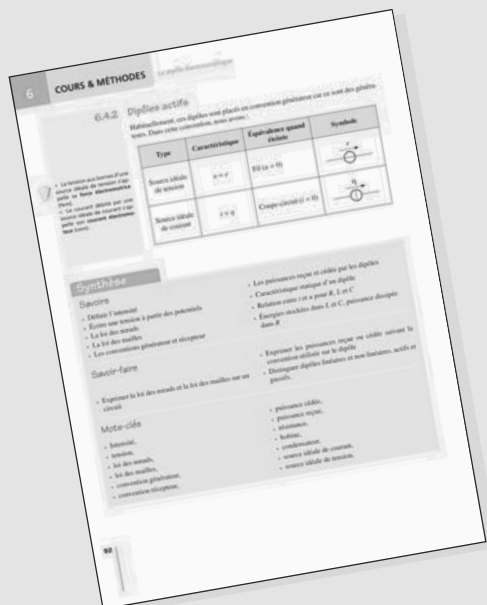
- Des vidéos d'expériences sont consultables en ligne sur la page de l'ouvrage du site dunod.com.

Ces vidéos sont repérées par le pictogramme :



La synthèse

En fin de chapitre, elle vous propose un récapitulatif des savoirs, des savoir-faire et des mots-clés.

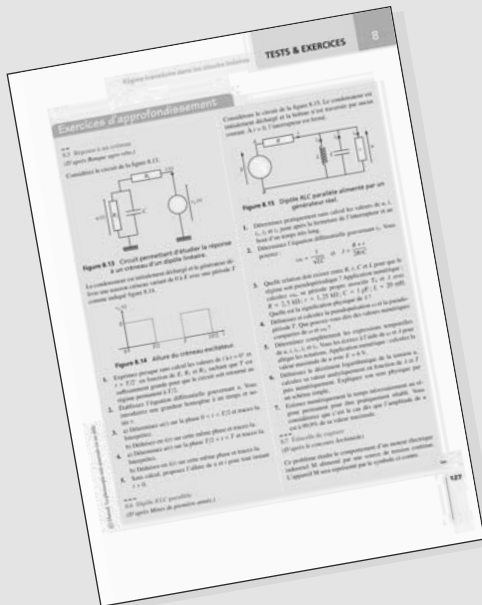


Tester ses connaissances

Quelques Vrai/Faux pour tester votre connaissance du cours.

Exercices d'application

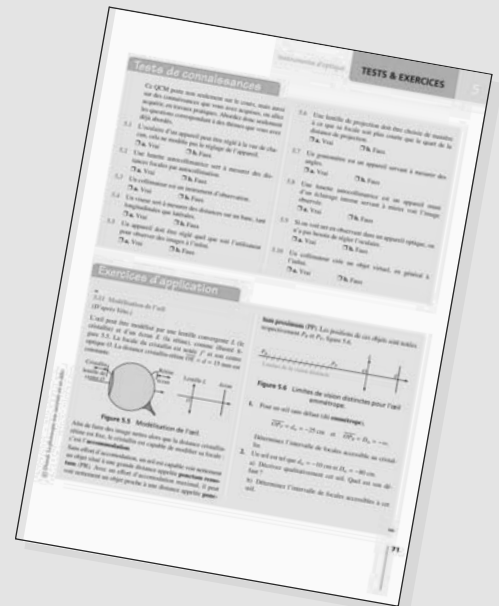
Ils vous proposent d'utiliser vos connaissances du cours pour résoudre des problèmes simples. Leur difficulté est indiquée sur une échelle de 1 à 3.



Les corrigés des exercices

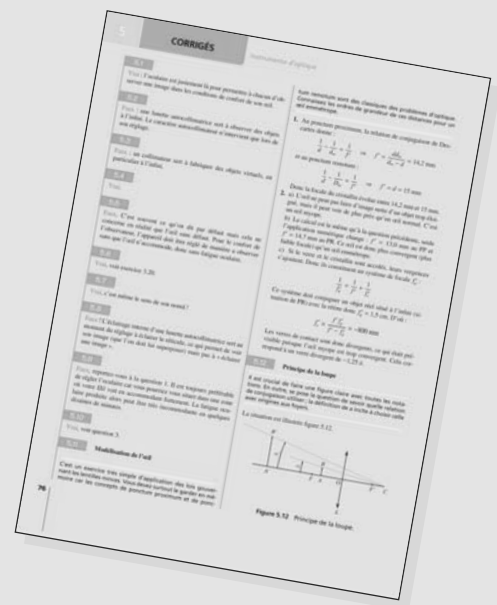
Tous les tests de connaissances, les exercices d'application et d'approfondissement sont corrigés.

Les solutions sont regroupées en fin de chapitre.




Exercices d'approfondissement

Des énoncés qui vous proposent de résoudre des problèmes demandant une réflexion plus poussée, souvent extraits d'annales de concours. Leur difficulté est indiquée sur une échelle de 1 à 3.



Liste des vidéos d'expériences que vous pourrez trouver sur le site www.dunod.com, sur la page référençant l'ouvrage.

Ces vidéos sont signalées au cours de l'ouvrage dans la marge, en vis-à-vis des parties de cours auxquelles elles se rapportent, ou dans les corrigés d'exercices par le pictogramme suivant : 

1. Réflexion et réfraction de la lumière : étude de la réflexion sur un miroir plan, étude de la réfraction d'un milieu moins réfringent à un milieu plus réfringent (avec réfraction limite) et inversement (avec réfraction totale).

2. Goniomètre : réglages et mesures d'angle sur un prisme (angle au sommet et minimum de déviation).

3. Spectroscopie à prisme : réglages et mesures des longueurs d'onde des raies d'une lampe inconnue.

4. Reconnaître la nature des lentilles et miroirs : par observation de leur forme, par des observations optiques basiques, par leur effet sur un faisceau de lumière parallèle.

5. Focométrie : mesures de distances focales de lentilles convergentes et divergentes par des méthodes classiques (autocollimation, méthode de Bessel, méthode de Badal, méthode de Silbermann)

6. Dipôle RC : étude en charge et en relaxation, mesures de constantes de temps, influence de la valeur des dipôles.

6 bis. Dipôle RL : étude en charge et en relaxation, mesures de constantes de temps, influence de la valeur des dipôles.

7. Circuit RLC série en régime libre : oscillations électriques par décharge d'un condensateur dans un dipôle RL, différents régimes de fonctionnement, influence de la valeur de chaque dipôle sur le phénomène.

8. Circuit RLC série en régime forcé : résonance en intensité et en tension, influence de la valeur des dipôles sur les phénomènes

9. Filtre passe-bas : méthodes de mesures, tracé du diagramme de Bode (gain et phase), caractéristiques du filtre (fréquences de coupure, bande passante)

10. Filtres passe-bande et coupe bande : tracé des diagrammes de Bode (gain et phase), caractéristiques des filtres (fréquences de coupure, bande passante)

11. Oscillateur à pont de Wien : étude des deux étages de l'oscillateur, filtre de Wien et boucle de rétroaction. Naissance des oscillations.

12. Calorimétrie : mesure de la chaleur latente de fusion de la glace.

Proétudes.blogspot.com
PROÉTUDES
surfer en toute confiance

Partie 1

Optique géométrique

Plan

1.1	Lois de Snell-Descartes	2
1.2	Conséquences des lois de Snell-Descartes	4
1.3	Angle de déviation d'un rayon lumineux	5
	Synthèse	7
	Tests et exercices	8
	Corrigés des exercices	12

Introduction

L'optique géométrique est l'étude des **rayons lumineux**, interprétés comme la trajectoire de particules de lumière appelés photons.

Cependant, la lumière n'est pas toujours descriptible de cette manière ; vous étudierez d'autres situations en deuxième année.

Prérequis

- Angles orientés (voir fiche méthode 2)
- Trigonométrie élémentaire

Objectifs

- Présenter la notion de rayon lumineux
- Introduire les lois de Descartes

1.1 Lois de Snell-Descartes

1.1.1 Définitions et conventions d'orientation

Un rayon lumineux arrive sur une surface réfractante ou réfléchissante en un point appelé **point d'impact** ; la droite perpendiculaire à la surface au niveau du point d'impact s'appelle la **normale**.

Définition

Le rayon lumineux incident et la normale définissent le **plan d'incidence**.

En optique géométrique, l'inclinaison d'un rayon lumineux est généralement mesurée par l'angle **entre la normale et le rayon lumineux**.

Cet angle est usuellement **orienté de la normale vers le rayon lumineux**.



Si le rayon incident et la normale sont confondus, le plan d'incidence n'est pas défini. Mais, comme le montrent les lois de Snell-Descartes, il n'est pas utile dans ce cas.



Pour quelques conseils sur la gestion des angles orientés, reportez-vous à la fiche méthode 2.

1.1.2 Lois de Snell-Descartes de la réflexion

Ces lois s'appliquent lorsqu'un rayon lumineux arrive sur un miroir.

1. Le rayon lumineux réfléchi appartient au plan d'incidence.
2. $i_1 = -i'_1$: l'angle de réflexion est l'opposé de l'angle d'incidence (figure 1.1).

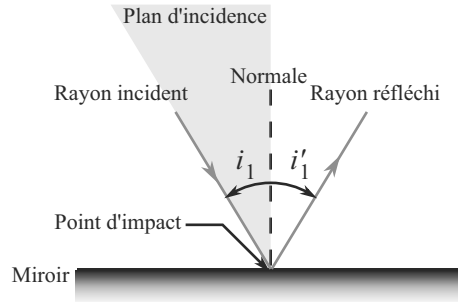


Figure 1.1 Réflexion d'un rayon sur un miroir.

1.1.3 Indice optique d'un milieu



n prend des valeurs typiquement entre 1 et 3. Une valeur plus grande est rarement raisonnable.



n est sans dimension et sans unité

L'indice optique d'un milieu est défini par :

$$n = \frac{c}{v},$$

avec $c = 299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$ la célérité de la lumière dans le vide et v la vitesse de propagation de la lumière dans le milieu.

1.1.4 Lois de Snell-Descartes de la réfraction

Ces lois s'appliquent lorsqu'un rayon lumineux arrive sur un **dioptre**, surface séparant deux milieux d'indices différents.

1. Le rayon lumineux réfracté appartient au plan d'incidence.
2. $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$ (figure 1.2).

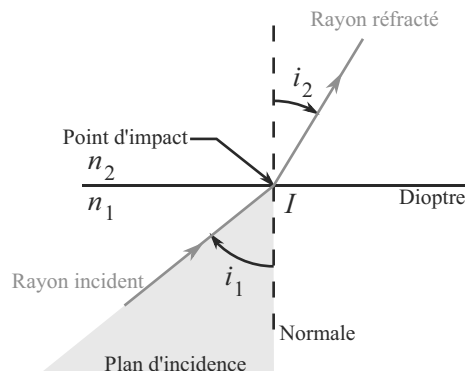


Figure 1.2 Réfraction d'un rayon à la traversée d'un dioptre.



Voir vidéo 1 :
Réflexion et réfraction
de la lumière

1.2 Conséquences des lois de Snell-Descartes

1.2.1 Principe du retour inverse de la lumière

Les lois de Snell-Descartes sont indépendantes du sens de propagation des rayons lumineux : si un rayon emprunte un certain chemin pour aller d'un point A à un point B , il empruntera ce même chemin en sens inverse pour aller de B à A .

1.2.2 Réfraction limite



Un milieu est dit, par exemple, très **réfringent** s'il a un indice élevé. Cet adjectif s'emploie surtout pour comparer des milieux : un milieu est plus réfringent qu'un autre.

Lorsqu'un rayon lumineux arrive sur un milieu plus réfringent, il le traverse toujours et se rapproche de la normale.

L'angle de réfraction reste alors inférieur à une valeur limite correspondant à un angle d'incidence $\pi/2$ (figure 1.3) :

$$n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = n_2 \sin(i_{2\max}) \Rightarrow i_{2\max} = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$$

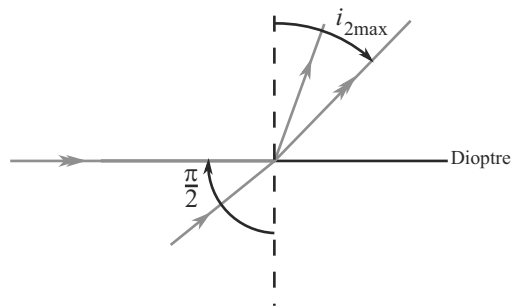


Figure 1.3 $n_1 < n_2$: limitation de l'angle de réfraction quand l'angle d'incidence devient grand.



Voir vidéo 1 :
Réflexion et réfraction
de la lumière

1.2.3 Réflexion totale

Lorsqu'un rayon lumineux arrive sur un milieu moins réfringent, il y a **risque de réflexion totale**. Il y a réfraction si l'angle d'incidence est inférieur à une valeur limite correspondant à un angle de réfraction $\pi/2$:

$$n_1 \sin(i_{1\max}) = n_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow i_{1\max} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Dans ce cas, le rayon s'éloigne de la normale.

Mais si $i_1 > i_{1\max}$, le rayon est réfléchi suivant les lois de la réflexion. C'est le phénomène de **réflexion totale**. Cela est illustré figure 1.4.



Voir vidéo 1 :
Réflexion et réfraction
de la lumière

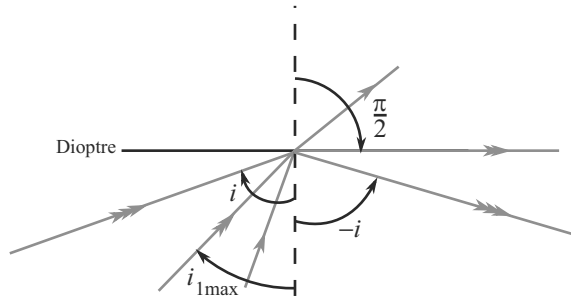


Figure 1.4 $n_1 > n_2$: si l'angle d'incidence est trop grand, l'angle de réfraction n'est plus défini.

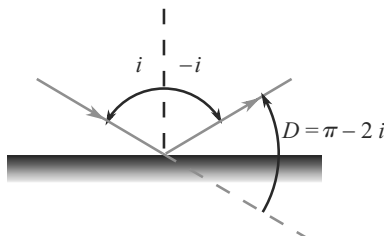
Méthode 1 Manipuler les lois de Snell-Descartes

1. N'oubliez jamais la première partie de ces lois : le rayon réfléchi ou réfracté appartient au plan d'incidence !
2. Dans le cas d'une réfraction, comparez toujours les indices optiques. Vous devez pouvoir dire sans hésitation que :
 - Si $n_1 < n_2$, le rayon traverse toujours et se rapproche de la normale. L'angle de réfraction ne peut jamais atteindre $\pi/2$ (réfraction limite).
 - Si $n_1 > n_2$, il y a **risque de réflexion totale** : la réfraction n'a lieu que si $i_1 < i_{1 \max}$.

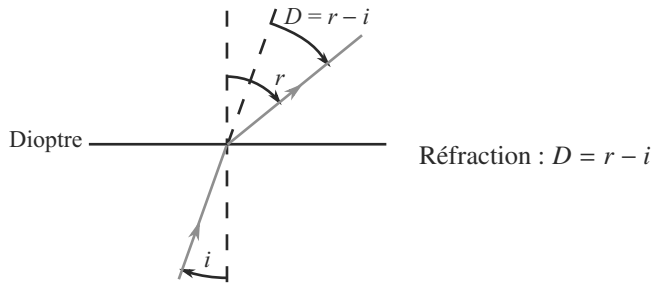
La fonction arcsin n'accepte que des arguments entre -1 et 1 , cela doit vous guider pour écrire le rapport des indices optiques dans le bon sens.
3. Les angles d'incidence, de réfraction et de réflexion sont pris entre le rayon lumineux et la normale au dioptré ou au miroir !

1.3 Angle de déviation d'un rayon lumineux

Dans de nombreux exercices classiques, vous devrez calculer l'angle de déviation d'un rayon lumineux à la traversée d'un système complexe (prisme, goutte d'eau, etc). Cet angle est défini comme **l'angle entre le rayon incident et le rayon émergent**, en général **orienté de l'incident vers l'émergent**.



Réflexion : $D = \pi - 2i$



Méthode 2 Calculer un angle de déviation

1. Comme la lumière se propage en ligne droite entre deux réflexions ou réfractions, la déviation totale subie par un rayon pendant la traversée d'un dispositif optique est la somme des déviations subies le long du chemin.
2. Identifiez les diverses réflexions et réfractions subies par le rayon pendant la traversée et calculez séparément chaque angle de déviation ($D = \pi - 2i$ pour une réflexion, $D = r - i$ pour une réfraction).
3. Additionnez-les.

Exemple d'application

Quelle déviation subit un rayon qui se réfracte successivement sur deux dioptries plans parallèles entre eux ? Vous prendrez le cas où les indices optiques des trois milieux ainsi définis vont croissants de la gauche vers la droite.

Solution

Les angles sont définis comme indiqué sur la figure 1.5.

La première déviation par réfraction est $D_1 = i_2 - i_1$ et la seconde $D_2 = i_3 - i_2$. Donc la déviation totale est $D = D_1 + D_2 = i_3 - i_1$.

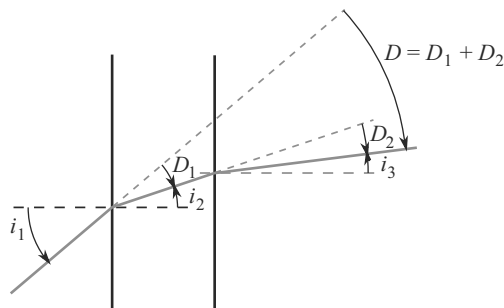


Figure 1.5 Déviation totale par deux dioptries plans parallèles.

Les lois de la réfraction donnent $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$ et $n_2 \sin(i_2) = n_3 \sin(i_3)$ donc $n_1 \sin(i_1) = n_3 \sin(i_3)$. D'où le résultat :

$$D = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_3} \sin(i_1)\right) - i_1$$

Synthèse

Savoirs

- Définition de l'indice optique d'un milieu
- Lois sur la réflexion et la réfraction de Descartes
- Orienter les angles et les lire sur une figure
- Existence d'une réfraction limite et d'une réflexion totale, angle limite.
- Principe du retour inverse de la lumière

Savoir-faire

- Retrouver l'angle limite de réfraction
- Respecter l'éloignement ou le rapprochement à la normale des rayons lors d'une réfraction
- Calculer la déviation (orientée) d'un rayon lumineux

Mots-clés

- Rayon lumineux,
- angle orienté,
- réflexion,
- réfraction,
- indice optique,
- déviation.

Tests de connaissances

- 1.1 Les rayons réfléchis et réfractés sont tous deux dans le plan d'incidence.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 1.2 Si $n_1 > n_2$, la réfraction est toujours possible.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 1.3 Si $n_1 < n_2$, la réfraction n'est jamais possible.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 1.4 Lors d'une réfraction, $D = i_2 - i_1$ quelle que soit l'orientation choisie.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 1.5 $D = 2i$ lors d'une réflexion.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 1.6 Aux petits angles, la relation de réfraction devient $n_1 i_1 = n_2 i_2$ avec des angles mesurés en radian.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

1.7 Principe du catadioptré

(D'après Centrale-Supélec.)

La distance Terre-Lune est mesurée via le temps de trajet aller-retour d'un rayon laser tiré depuis la Terre et se réfléchissant sur un dispositif catadioptrique installé sur la surface lunaire. L'objet de cet exercice est d'étudier le principe de ce catadioptré.

- Pourquoi un simple miroir pour réfléchir le rayon laser ne ferait pas l'affaire ?
- Le catadioptré est un « coin de cube », trois miroirs à angle droit délimitant un coin de cube (figure 1.6). L'ensemble est muni d'un repère $Oxyz$ tel que chaque miroir est l'un des plans xOy , xOz et yOz .

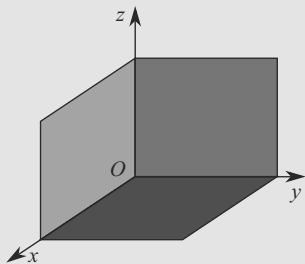


Figure 1.6 Coin de cube utilisé comme catadioptré.

Un rayon lumineux arrive sur le miroir avec un vecteur directeur (a, b, c) . Prenons l'exemple où le rayon frappe d'abord le miroir xOy , puis xOz , puis yOz .

- Que devient le vecteur directeur après chaque réflexion ?
- Concluez sur l'utilité du catadioptré.

1.8 Éclairage d'un bassin

Un bassin d'eau (indice $n = 1,33$) circulaire de rayon $R = 4$ m et de profondeur $h = 80$ cm possède, au fond et en son centre,

un spot éclairant vers le haut dans un cône de demi-ouverture $\alpha = 60^\circ$.

Étudiez l'éclairement du fond du bassin : formes et dimensions des zones éclairées et des zones sombres.

1.9 Déviation de la lumière par un prisme

Un faisceau de lumière parallèle tombe sous incidence normale sur toute la face d'entrée d'un prisme de petit angle au sommet α , de hauteur H et d'indice n (figure 1.7).

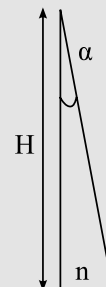


Figure 1.7 Prisme de petit angle au sommet.

Données numériques : $\alpha = 2,90 \cdot 10^{-3}$ rad ; $n = 1,500$; $H = 2,00$ cm.

- Représenter sur un schéma le faisceau émergent du prisme, dans un plan de section principale.
- Exprimer l'angle de déviation D du faisceau par le prisme en fonction des paramètres α et n du prisme en tenant compte de la faible valeur de l'angle α .
- Calculer numériquement l'angle de déviation D .
- On place tête-bêche deux prismes identiques à celui qu'on vient d'étudier (figure 1.8). L'ensemble est toujours éclairé sous incidence normale. Représenter la zone dans laquelle les deux faisceaux émergents se croisent. Déterminer alors sa longueur L .

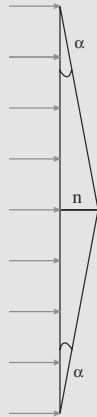


Figure 1.8 Biprisme.

1.10 Interprétation simplifiée du mirage

La couche d'air qui est juste au-dessus d'une route bitumée très chaude possède un indice optique très légèrement différent de l'air ordinaire.

Un rayon lumineux dirigé vers la route subit une réflexion totale sur cette couche d'air surchauffé si son angle d'incidence est supérieur à 89° .

1. L'indice de l'air surchauffé est-il supérieur ou inférieur à celui de l'air ordinaire ?
2. L'air ordinaire a un indice $n = 1,00029$, déterminez l'indice de l'air surchauffé.
3. À quelle distance D du point d'incidence doit se tenir une personne haute de $h = 1,65$ m, sachant que la couche d'air est d'épaisseur négligeable, pour observer le phénomène ? Interprétez alors le mirage de la route mouillée et commentez.

1.11 Incidence de Brewster

Un dioptre plan sépare l'air (d'indice unité) d'un milieu d'indice $n = 1,5$. Pour cet exercice, prenons en compte l'exis-

tence simultanée d'un rayon réfléchi et d'un rayon réfracté à partir d'un seul rayon incident.

Pour quelle valeur de l'angle d'incidence le rayon réfléchi est-il perpendiculaire au rayon réfracté ?

1.12 Principe de fonctionnement d'un réfractomètre (D'après DEUG.)

Un réfractomètre est un appareil permettant de mesurer l'indice optique d'un liquide en exploitant le phénomène de réfraction limite.

L'appareil, représenté figure 1.9, est placé dans l'air d'indice unité $n_0 = 1$. Sur la face supérieure horizontale en verre (indice n_v), déposons une goutte de liquide d'indice $n < n_v$. L'interface verre-liquide est considérée comme un dioptre D_2 .

La face latérale verticale D_1 est éclairée par un faisceau lumineux cylindrique monochromatique (de couleur donnée). L'angle d'incidence sur D_1 est noté i .

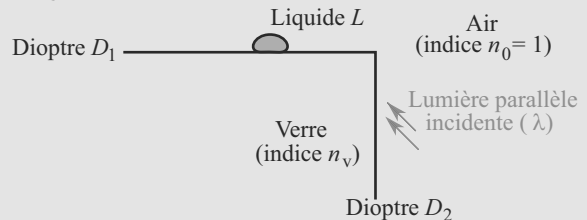


Figure 1.9 Principe d'un réfractomètre.

Seuls les rayons incidents tels que $i_{\min} < i < i_{\max}$ peuvent être transmis dans le liquide (après réfractions successives sur les dioptres D_1 et D_2).

1. Supposons que la surface de D_2 est de petites dimensions. Proposez qualitativement le tracé des deux rayons limites définis par $i = i_{\min}$ et $i = i_{\max}$.
2. Exprimez i_{\min} en fonction de n et n_v .
3. Application numérique : calculez l'indice n du cyclohexane sachant que $i_{\min} = 47,81^\circ$ et $n_v = 1,607$.

Exercices d'approfondissement

1.13 Fibre optique à saut d'indice

(D'après CCP TSI.)

Une fibre optique est un guide de lumière (dispositif capable de guider des rayons dans un trajet non rectiligne). Le modèle de la figure 1.10 est le cas simple de la fibre à saut d'indice : le milieu de la fibre, appelé cœur, est un milieu cylindrique et d'indice n_c , et le matériau l'entourant, appelé gaine, est un milieu d'indice n_g avec $n_c > n_g$. La fibre est étudiée dans l'air, milieu d'indice unité.

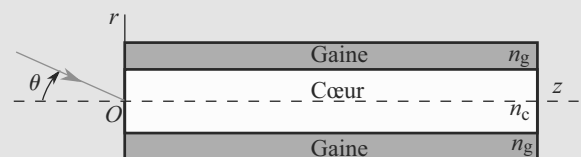


Figure 1.10 Fibre optique à saut d'indice.

- Considérons un rayon lumineux arrivant en O sur le cJur avec un angle d'incidence θ . La normale au dioptre en O est repérée comme l'axe Oz . Ce rayon est réfracté avec un angle de réfraction θ' et vient frapper la gaine en M_1 .
 - Pour quelles valeurs de θ' le rayon subit-il une réflexion totale en M_1 ?
 - Après réflexion totale en M_1 , le rayon se propage dans le cœur et vient frapper la gaine en M_2 . Que se passe-t-il alors ?
- Exprimez la valeur maximale de θ , notée θ_{\max} , pour laquelle le rayon subit une réflexion totale une fois arrivé en M_1 .
 - Calculez numériquement θ_{\max} avec $n_c = 1,53$ et $n_g = 1,49$. Interprétation ?
- Quel est l'intérêt de ce dispositif ?

1.14 Le prisme

(D'après Concours communs polytechniques.)

Le prisme est un milieu délimité par deux dioptres plans non parallèles appelés « face d'entrée » et « face de sortie » formant un angle A appelé *angle du prisme*. En pratique, c'est un cylindre à base triangulaire dont l'un des sommets est d'angle A . Le matériau du prisme est d'indice n et l'indice de l'air ambiant est pris égal à 1.

- Établissement des relations fondamentales du prisme.
 - Faites une figure montrant un rayon lumineux arrivant sur la face d'entrée du prisme avec un angle d'incidence i et sortant par la face de sortie avec un angle i' , après deux réfractions. Vous noterez r l'angle de réfraction sur la face d'entrée et r' l'angle d'incidence sur la face de sortie. Pour les besoins de la figure, vous prendrez un prisme de base isocèle avec un angle A relativement petit, par exemple entre 45° et 60° .
Vous orienterez les angles d'incidence et de réfraction de manière conventionnelle (de la normale vers le rayon) et prendrez A dans le sens trigonométrique.
 - Soit D l'angle de déviation du rayon lumineux incident à la traversée du prisme. En utilisant les lois de Snell-Descartes, établissez deux relations appelées *relations fondamentales du prisme*, l'une entre A , r et r' , l'autre entre D , A , i et i' .
 - Argumentez brièvement sur le fait que le rayon émergent n'existe pas forcément.
Expérimentalement, nous constatons qu'il existe un *minimum de déviation unique*, c'est-à-dire une valeur minimale de D , notée D_m , obtenue pour une certaine incidence i_m .
- Justifiez sans calcul que, dans cette situation particulière, le rayon incident et le rayon émergent sont symétriques par rapport au plan bissecteur de l'angle A .

- Quelle relation y a-t-il entre i et i' d'une part, entre r et r' d'autre part ?
- Montrez alors que l'indice optique du prisme vérifie :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A - D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

1.15 La goutte d'eau

(D'après Capès.)

Un rayon lumineux traversant une goutte d'eau peut être notablement dévié. Ce phénomène, couplé au caractère dispersif de l'eau, peut conduire à un arc en ciel.

Une goutte d'eau (indice n) est assimilée à un dioptre sphérique. Le rayon lumineux incident S arrive avec un angle d'incidence i comme indiqué figure 1.11.

- S est réfracté avec un angle de réfraction r . Déterminez r . Tracez le rayon réfracté R_1 après pénétration de S dans la goutte. Son point d'impact sur la surface intérieure de la sphère sera noté N . Combien vaut l'angle d'incidence de R_1 en N ?
- En admettant que R_1 subit une réflexion en N , tracez son rayon réfléchi R_2 .
- Le point d'impact de R_2 sur la surface intérieure de la sphère est noté P . Que vaut son angle d'incidence en P ? En admettant que R_2 est réfracté, que vaut l'angle de réfraction en P ?
- Calculez l'angle de déviation total D du rayon lumineux ressortant de la goutte avec deux réfractions et une réflexion interne. Vous donnerez le résultat en fonction de i , r et n .
- Calculez la valeur minimale que peut prendre D . La valeur de i correspondante est notée i_m . Discutez cette valeur. Application numérique pour $n = 1,33$.

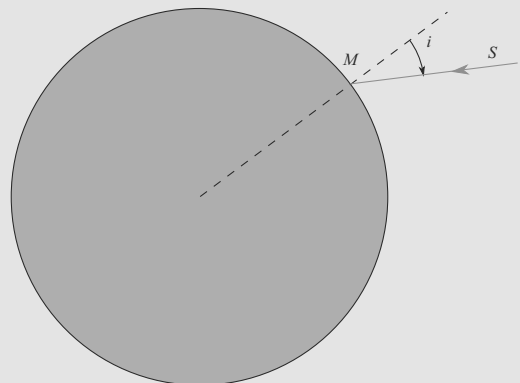


Figure 1.11 Rayon lumineux se réfractant dans une goutte d'eau.

1.16 Petit halo

(D'après concours commun Mines-Ponts PSI)

Les cirrus sont des nuages peu épais, à structure filamenteuse, composés de petits cristaux de glace en forme de bâtonnets cylindriques de section principale hexagonale régulière (figure 1.12). Les plus petits de ces cristaux (par exemple de taille inférieure à $20 \mu\text{m}$) sont le siège d'un mouvement erratique provoqué par le choc des molécules d'air sur eux ; ils ont donc toutes les orientations possibles dans l'espace. On considérera dans le début de l'exercice que la glace possède un indice optique $n = 1,31$.

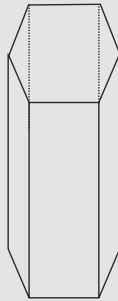


Figure 1.12 Bâtonnet hexagonal.

1. Montrer qu'un rayon lumineux entrant sous incidence quelconque sur la face d'entrée d'un prisme d'angle au sommet $\alpha > 100^\circ$ et d'indice 1,31 ne peut émerger de l'autre face du prisme délimitant l'angle α .

On considère la section hexagonale ABCDEF des bâtonnets de glace. On envisage la réfraction simple (sans réflexion intermédiaire) de rayons incidents d'incidence variable, appartenant au plan de section principal entre A et B (voir figure 1.13).

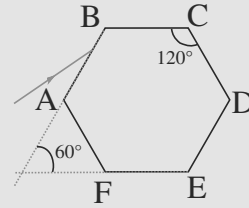


Figure 1.13 Section d'un bâtonnet.

2. Les rayons sortant de la face DE sont-ils déviés ? Peut-il y avoir émergence par la face BC ?
3. On constate qu'il existe un minimum de déviation pour le rayon entrant sous l'incidence i et sortant par la face CD. Montrer que dans ce cas $i = i'$ (figure 1.14). Donner alors i_0 , l'angle permettant d'obtenir ce minimum de déviation et D_m , le minimum de déviation atteint.

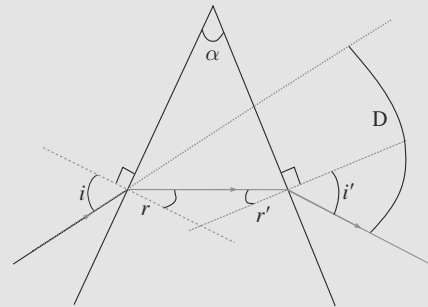


Figure 1.14 Déviation par un prisme.

4. Sur un voile nuageux entourant le soleil, on peut apercevoir un halo : une couronne brillante autour de l'astre. Le rayon angulaire de ce halo est voisin de 20° . Les calculs précédents rendent-ils compte de cette observation ?
5. En réalité, l'indice optique de la glace est plus faible pour le rouge que pour le bleu. Déterminer si le halo est irisé de rouge ou de bleu à l'intérieur (vers le soleil). Cette irisation est semblable à celle que produit l'arc-en-ciel par réflexion de la lumière dans les gouttes d'eau liquide.

1.1

Vrai, d'après les lois de Descartes.

1.2

Faux, pas au-delà de l'angle limite.

1.3

Faux. Au contraire, elle l'est toujours.

1.4

Vrai, si les angles sont orientés !

1.5

Faux, $D = \pi - 2i$.

1.6

Vrai, L'approximation $\sin(i) \approx i$ pour i petit n'est valable que si i est exprimé en radian.

1.7

Principe du catadioptr

Méthode mise en jeu : n°1.

L'exercice fait appel de manière très basique aux lois de la réflexion. Rafraîchissez vos souvenirs sur le vecteur directeur d'une droite et n'hésitez pas à faire quelques schémas pour saisir le principe, par exemple à deux dimensions avec un « coin de carré ».

1. Avec un simple miroir, l'orientation du miroir devrait être absolument parfaite, pour que le rayon laser arrive perpendiculairement sur lui. La distance Terre-Lune était grande, la moindre déviation à cette perpendicularité ferait que le rayon laser reviendrait sur Terre très loin de son point de départ, rendant la mesure impossible.
2. a) Sur le plan xOy , la réflexion change le signe de la composante perpendiculaire au plan, donc selon z (voir figure 1.15). Donc après trois réflexions, les trois composantes ont changé de signe et le vecteur directeur devient $(-a, -b, -c)$: il est changé en son opposé.

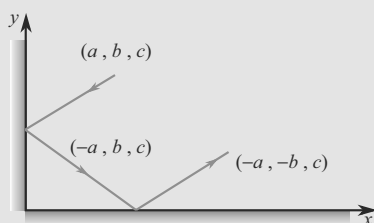


Figure 1.15 Principe du catadioptr.

b) La triple réflexion sur le catadioptr assure que le rayon laser revient exactement d'où il est parti, même s'il n'arrive pas avec un angle d'incidence bien contrôlé.



Les propriétés de ce coin de cube trouvent des applications dans des domaines plus proches de nous : phare de vélo, détecteur de mouvement... autrement dit tout appareil qui récupère un rayon lumineux après réflexion sans avoir besoin d'un réglage trop délicat.

1.8

Éclairage d'un bassin

Méthode mise en jeu : n°1.

Pour ce genre de petit exercice où l'on manipule des rayons lumineux, commencez par tâtonner au brouillon : prenez quelques rayons différents et regardez ce qui leur arrive. Ici, ils commencent leur propagation dans l'eau puis atteignent un dioptre (la surface de l'eau). Il y a donc normalement réfraction, mais l'indice de l'eau est supérieur à celui de l'air : il y a donc risque de réflexion totale.

Donc certains rayons lumineux vont être réfractés et passer dans l'air : ceux-là n'éclaireront donc pas le fond. Mais d'autres vont se réfléchir sur la surface de l'eau et aller éclairer le fond.

Ne considérons que les rayons qui partent vers la moitié droite du spot. Par symétrie, la situation du côté gauche sera identique. Un rayon partant du spot avec un angle θ arrive sur la surface avec un angle d'incidence θ (figure 1.16).

Si $\theta < i_l = \arcsin(1/n) \approx 48,8^\circ$, le rayon est réfracté. Sinon, il subit une réflexion totale. Les rayons capables d'éclairer le fond du bassin sont donc tels que $i_l < \theta < \alpha$, soit $48,8^\circ < \theta < 60^\circ$. La zone éclairée au fond est donc un anneau de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 .

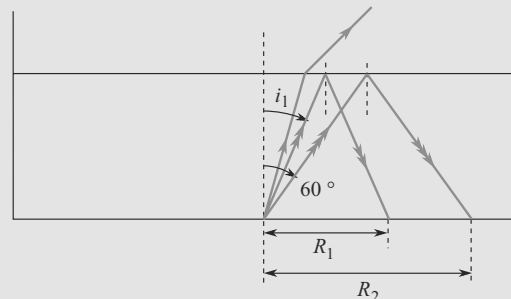


Figure 1.16 Répartition de l'éclairage au fond d'un bassin.

R_1 correspond au rayon tel que $\theta = i_l$:

$$\tan(i_l) = \frac{R_1/2}{h} \Rightarrow R_1 = 2h \tan(i_l) \approx 1,8 \text{ m}$$

De même, R_2 correspond au rayon tel que $\theta = \alpha$:

$$\tan(\alpha) = \frac{R_2/2}{h} \Rightarrow R_2 = 2h \tan(\alpha) \approx 2,8 \text{ m}$$

Les zones non éclairées sont donc un disque centré sur le spot de rayon $R_1 = 1,8 \text{ m}$ et l'anneau situé entre le rayon $R_2 = 2,8 \text{ m}$ et le rayon $R = 4 \text{ m}$.



Si vous faites réellement cette observation, la partie non éclairée de la surface n'est pas vraiment noire. Lors d'une réflexion, une petite partie du rayon lumineux est en fait réfractée. En outre, les rayons réfléchis vont ensuite se réfléchir à nouveau sur le fond, etc.

1.9

Déviation de la lumière par un prisme

Méthode mise en jeu : n°2.

Il s'agit de calculer une déviation en tenant compte des angles faibles d'incidence et d'émergence (DL à l'ordre un de la fonction sinus). Un peu de géométrie permet alors de déterminer la zone de croisement des faisceaux émergents. Vous pourrez remarquer que les angles ne sont pas orientés dans cet exercice comme ça se pratique parfois dans les problèmes de concours : tenez simplement compte du caractère positif des angles utilisés lors de la résolution.

1. Le faisceau n'est pas dévié sur la face d'entrée puisqu'il arrive en incidence normale. Sur la face de sortie, tous les rayons arrivent avec le même angle α et ressortent donc parallèles entre eux (figure 1.17).

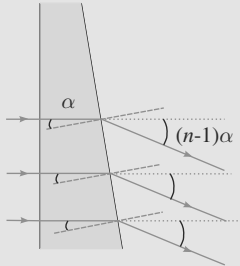


Figure 1.17 Déviation du faisceau.

2. Comme on s'en aperçoit sur la figure 1.18, l'angle de déviation est $(i' - r')$ avec r' , angle d'incidence sur la face de sortie et i' , angle de sortie du prisme. $r' = \alpha$, comme vu en 1. et i' est obtenu grâce à la loi de Snell-Descartes de la réfraction : $\sin(i') = n \cdot \sin(r')$. Comme nous sommes ici aux petits angles, on obtient par développement limité des sinus : $n \cdot \alpha = i'$. Finalement, on obtient :

$$D = (n - 1) \cdot \alpha$$

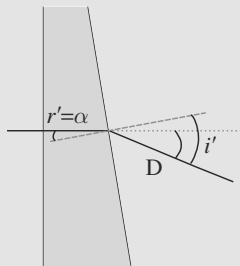


Figure 1.18 Angle de déviation.

3. Numériquement, on obtient $D = 1,45 \cdot 10^{-3}$ rad.

4. On obtient la figure 1.19 :

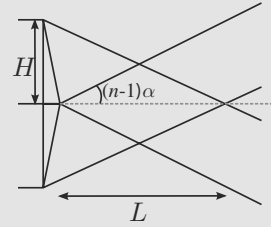


Figure 1.19 Croisement des faisceaux.

On lit sur cette figure $\tan((n - 1)\alpha) = H/L$ (en négligeant l'épaisseur du prisme) et donc, en tenant compte du fait que $(n - 1)\alpha$ est un angle faible pour développer la fonction tangente, on obtient :

$$L = \frac{H}{(n - 1)\alpha},$$

soit numériquement 13,8 m. La zone de croisement est donc très longue et on pouvait bien négliger l'épaisseur du prisme).

Ce dispositif (biprisme de Fresnel) est utile pour produire des interférences lumineuses : les faisceaux produits créent une zone d'interférence lumineuse comme vous pourrez le voir en deuxième année.

1.10

Interprétation simplifiée du mirage

Méthode mise en jeu : n°1.

Cet exercice très simple n'est qu'une utilisation de la formule $i_{1\max} = \arcsin(n_2/n_1)$ et de relations trigonométriques de base.

1. C'est seulement au passage d'un milieu plus réfringent (l'air ordinaire, indice n) à un milieu moins réfringent (l'air surchauffé, indice n') qu'il y a risque de réflexion totale. Donc l'indice de l'air surchauffé est inférieur à celui de l'air ordinaire.
2. Il y a réflexion totale si l'angle d'incidence satisfait $i_{1\max} = \arcsin(n'/n)$. Donc ici :

$$89^\circ = \arcsin\left(\frac{n'}{n}\right) \Rightarrow n' = n \sin(89^\circ) \simeq 1,00014$$

3. Tous les rayons mis en jeu dans le phénomène se réfléchissent sur la route avec un angle supérieur ou égal à 89° . Le rayon qui se réfléchit exactement à 89° est celui qui remonte le moins vite (pente la plus faible). Donc une personne de hauteur donnée doit nécessairement voir ce rayon pour pouvoir observer le phénomène.

C'est donc ce rayon qu'il faut considérer pour déterminer la distance d'observation. La figure 1.20 donne alors directement :

$$D = \frac{h}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - i_{1\max}\right)} \simeq 95 \text{ m}$$

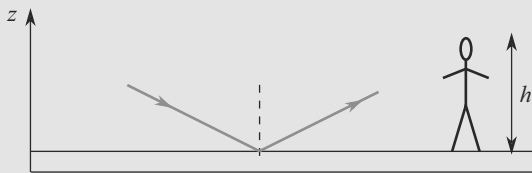


Figure 1.20 Interprétation du phénomène de mirage.

Pour cet observateur, l'objet ayant émis le rayon semble se trouver au niveau du point d'impact I , donc beaucoup plus proche qu'il ne l'est réellement : c'est un *mirage*. L'étude montre aussi que l'observateur ne voit plus le mirage s'il se rapproche.

1.11

Incidence de Brewster

Méthode mise en jeu : n°1.

Il faut combiner les lois de Snell-Descartes de la réflexion et de la réfraction à l'aide des relations trigonométriques usuelles.

La possibilité d'avoir simultanément réflexion et réfraction ne doit pas vous choquer. Regardez à travers une vitre : outre la réfraction qui vous permet de voir ce qui se trouve derrière, il y a aussi une petite réflexion qui fait que vous apercevez votre reflet !

La situation est celle de la figure 1.21.

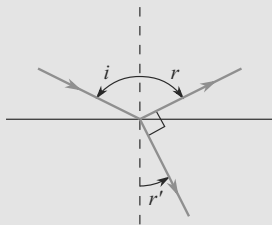


Figure 1.21 Incidence de Brewster.

Nous avons donc simultanément $i = -r$ (réflexion) et $\sin(i) = n \sin(r')$ (réfraction). L'angle entre les rayons réfractés et réfléchis étant droit, il vient :

$$r' + \frac{\pi}{2} - r = \pi \Rightarrow r' = r + \frac{\pi}{2}$$

La combinaison des trois relations conduit à :

$$\sin(i) = n \sin\left(-i + \frac{\pi}{2}\right) = n \cos(i) \Rightarrow \tan(i) = n$$

$$i \approx 0,98 \text{ rad} \approx 56^\circ$$

Dès que $\tan(i) = n$, la condition de Brewster est satisfaite et les deux rayons émergents sont orthogonaux.



Vous découvrirez en deuxième année les propriétés remarquables de cette situation.

1.12

Principe de fonctionnement d'un réfractomètre

Méthode mise en jeu : n°1.

Il s'agit d'une application des connaissances de cours sur la réfraction limite.

1. La figure 1.22 montre l'exemple d'un point d'impact I sur le premier dioptré. Le rayon arrivant en I avec l'angle i_{\min} correspond à la situation où la deuxième réfraction (sur D_2) est limite : le rayon émerge *rasant* dans la goutte (nous sommes au bord de la réflexion totale).

Par contre, le rayon arrivant en I avec l'angle i_{\max} est tout simplement le plus incliné qui peut atteindre le bord de la goutte.

La valeur de i_{\min} ne dépend pas du choix du point I , par contre celle de i_{\max} en dépend.

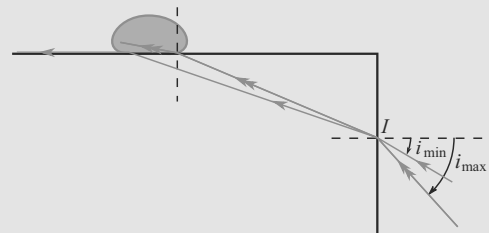


Figure 1.22 Rayons extrêmes sur le réfractomètre.

2. Les deux réfractions se traduisent, pour le cas $i = i_{\min}$, par :

$$\begin{cases} \sin(i_{\min}) = n_v \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_{\lim}\right) = n_v \cos(i_{\lim}) \\ n_v \sin(i_{\lim}) = n \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = n \end{cases}$$

En combinant les deux équations, il vient :

$$\sin(i_{\min}) = \sqrt{n_v^2 - n^2}$$

$$\Rightarrow i_{\min} = \arcsin\left(\sqrt{n_v^2 - n^2}\right)$$

3. Le résultat précédent peut se réécrire :

$$n = \sqrt{n_v^2 - \sin(i_{\min})^2} \approx 1,426$$

1.13

Fibre optique à saut d'indice

Méthode mise en jeu : n°1.

Il faut bien maîtriser les conditions nécessaires à une réflexion totale : une condition sur les indices optique et une condition sur l'angle d'incidence.

La gestion des angles orientés est particulièrement délicate dans cet exercice, appliquez donc la méthode n°1 avec rigueur.

1. a) La figure 1.23 montre le paramétrage. L'angle d'incidence en M_1 , noté, i , vaut $\pi/2 + \theta'$. Il y a réflexion totale si $n_c > n_g$, ce qui est le cas ici, et si $i > i_{\text{lim}} = \arcsin(n_g/n_c)$. D'où :

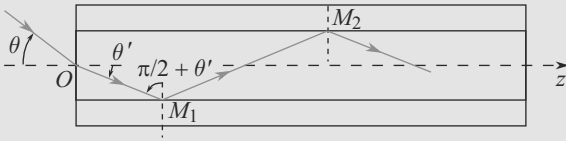


Figure 1.23 Paramétrage de la fibre optique.



Avec des angles non orientés, $|i| = \pi/2 - |\theta'|$. Comme i est dans le sens trigonométrique et θ' dans le sens horaire, cela donne la relation ci-contre.

$$\theta' > \theta'_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_g}{n_c}\right) - \frac{\pi}{2}$$



L'angle θ' est donc toujours négatif, ce qui est conforme au choix d'orientation (sens horaire).

- b) L'angle d'incidence en M_2 est égal à l'angle de réflexion en M_1 . Il y aura donc aussi réflexion totale en M_2 .
2. a) En O , les lois de Snell-Descartes donnent $\sin(\theta) = n_c \sin(\theta')$.

Quand la réflexion totale a juste lieu, $\theta = \theta_{\text{max}}$ et $\theta' = \theta'_{\text{lim}}$ d'après la question 1. Donc :

$$\begin{aligned} \sin(\theta_{\text{max}}) &= n_c \sin\left(\arcsin\left(\frac{n_g}{n_c}\right) - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -n_c \cos\left(\arcsin\left(\frac{n_g}{n_c}\right)\right) \end{aligned}$$

Utilisons la relation $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ avec $x = i_{\text{lim}}$. Comme i_{lim} est toujours entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, son cosinus est toujours positif, d'où :

$$\begin{aligned} \cos\left(\arcsin\left(\frac{n_g}{n_c}\right)\right) &= \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\left(\frac{n_g}{n_c}\right)\right)} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sin(\theta_{\text{max}}) &= \sqrt{n_c^2 - n_g^2} \\ \Rightarrow \theta_{\text{max}} &= \arcsin\left(\sqrt{n_c^2 - n_g^2}\right) \end{aligned}$$

- b) $\theta_{\text{max}} \approx 20,3^\circ$. Tout rayon lumineux arrivant sur la fibre avec un angle d'incidence inférieur à $20,3^\circ$ sera donc prisonnier du cœur de la fibre et sera donc guidé correctement (par réflexions totales successives).
3. Grâce à ce dispositif, tout rayon lumineux pas trop incliné sera guidé dans la fibre par des successions de réflexion totale, alors qu'avec un fil ordinaire seul un rayon d'inclinaison nulle serait guidé.



Cette fibre optique montre par contre ses limitations si elle est coudée. Les fibres réelles sont dites « à gradient d'indice » et éliminent cette restriction.

1.14

Le prisme

Méthodes mises en jeu : n°1 et 2.

Le prisme est souvent étudié expérimentalement, dans le cadre de travaux pratiques, mais vous devez être capable de l'étudier théoriquement.

Les erreurs classiques apparaissent lors des confusions sur le rôle des faces du prisme. Un prisme réel a trois faces, mais seules deux sont utilisées dans l'étude théorique. Si le rayon lumineux incident se réfracte sur la face d'entrée, subit une réflexion totale sur la face de sortie et émerge par réfraction sur la troisième face, alors il est considéré comme « n'émergeant pas ». Autrement dit, seuls les rayons subissant une double réfraction et rien d'autre sont étudiés.

1. a) La figure 1.24 montre une coupe principale d'un prisme d'angle A , ainsi que le trajet d'un rayon doublement réfracté par le prisme. Les normales sont tracées en pointillés.
- b) Les deux réfractions se traduisent les lois de Snell-Descartes :

$$\begin{cases} \sin(i) = n \sin(r) \\ n \sin(r') = \sin(i') \end{cases}$$

Dans le triangle $II'K$, la somme des angles est égale à π :

$$\hat{K} + r - r' = \pi \Rightarrow \hat{K} = \pi - r + r'$$

La somme des angles d'un quadrilatère est égale à 2π , donc pour le quadrilatère $AIKI'$:

$$\begin{aligned} A + \frac{\pi}{2} + \hat{K} + \frac{\pi}{2} &= 2\pi \\ \Rightarrow A &= r - r' \end{aligned}$$

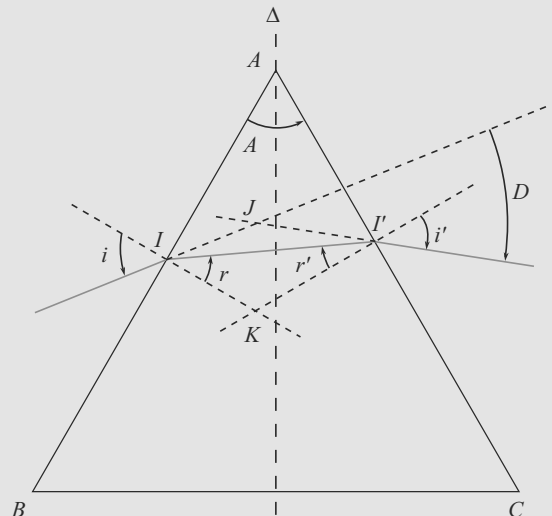


Figure 1.24 Schéma de principe d'un prisme.

Le rayon lumineux est dévié deux fois. Soit D_1 sa déviation (par réfraction) sur la face d'entrée et D_2 sa déviation (par réfraction) sur la face de sortie :

$$D = D_1 + D_2 = (r - i) + (i' - r') \\ \Rightarrow D = i' - i + A$$



Ces deux relations fondamentales du prisme sont très importantes. Vous devez savoir les retrouver rapidement.



Si les angles ne sont pas orientés, ces relations deviennent $D = i + i' - A$ et $A = r + r'$.

c) Il apparaît que ces relations peuvent ne pas être satisfaites : par exemple, un rayon incident peut subir une réflexion totale à la place de sa deuxième réfraction et ne pas émerger du prisme par sa face de sortie.

2. a) Supposons qu'au minimum de déviation les deux rayons ne soient pas symétriques, par exemple $i > i'$. En retournant le prisme, par retour inverse de la lumière, nous aurions alors un nouvel angle de déviation plus petit, donc la situation initiale n'aurait pas été le minimum de déviation.



Cette propriété de symétrie au minimum de déviation est un résultat que vous devez absolument connaître.

b) Par symétrie, $i = -i'$ et $r = -r'$.

c) En combinant $A = r - r'$ et $r = -r'$, il vient $A = 2r$. La loi de Snell-Descartes pour la première réfraction donne alors $\sin(i_m) = n \sin(A/2)$.

L'autre relation fondamentale donne $D_m = -2i_m + A$. En combinant les deux, il vient le résultat cherché :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A - D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

1.15

La goutte d'eau

Méthodes mises en jeu : $n^{\circ}irc1$ et 2.

Ne vous laissez pas impressionner par la géométrie de l'exercice. Rappelez-vous que la normale à un point d'un cercle est un diamètre.

Cet exercice alterne réflexions et réfractions.

1. Voir figure 1.25. L'angle de réfraction en M vaut r , qui est donné par les lois de Snell-Descartes de la réfraction :

$$\sin(i) = n \sin(r) \Rightarrow r = \arcsin\left(\frac{\sin(i)}{n}\right)$$

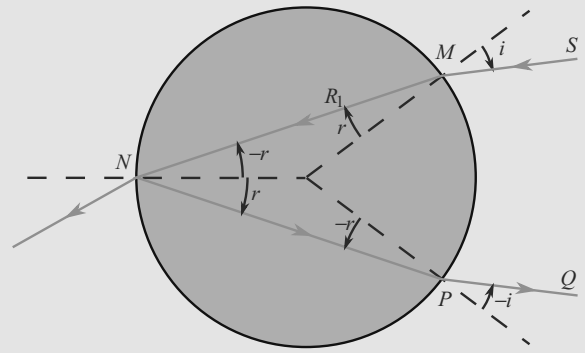


Figure 1.25 Trajet d'un rayon lumineux subissant une réflexion interne (partielle) dans la goutte d'eau.

Comme le triangle NOM est isocèle en O , on retrouve ce même angle comme angle d'incidence en N . Avec les conventions d'orientation, il est égal à $-r$.

2. Voir figure 1.25.
3. D'après les lois de Snell-Descartes de la réflexion, l'angle de réflexion en N vaut r . Le triangle NOP étant isocèle en O , on retrouve ce même angle (au signe près) comme angle d'incidence en P . L'angle de réfraction i' en P est donné par les lois de Snell-Descartes de la réfraction :

$$n \sin(-r) = \sin(i')$$

Donc $i' = -i$.

4. Lors de la réfraction en M , le rayon subit une déviation $D_1 = r - i$.

En N la réflexion ajoute la déviation $D_2 = \pi - 2(-r) = \pi + 2r$.

En P la réfraction ajoute la déviation $D_3 = -i - (-r) = r - i$. D'où la déviation totale :

$$D = D_1 + D_2 + D_3 = \pi - 2i + 4r$$

5. Dérivons D par rapport à i et annulons cette dérivée :

$$\frac{dD}{di}(i) = -2 + 4 \frac{dr}{di}(i) \\ \frac{dD}{di}(i_m) = 0 \Rightarrow \frac{dr}{di}(i_m) = \frac{1}{2}$$

La dérivée s'obtient à partir de la loi de Snell-Descartes en M , $\sin(i) = n \sin(r)$:

$$\cos(i) di = n \cos(r) dr \\ \Rightarrow \frac{dr}{di}(i_m) = \frac{\cos(i_m)}{n \cos(r)}$$

En combinant les deux relations, il vient :

$$\cos(i_m)^2 = \frac{n^2 - 1}{3}$$

Cette solution ne peut exister que si elle est inférieure ou égale à 1, donc si $n \leq 2$. Dans le cas contraire, l'angle D n'admet pas de minimum et a donc un comportement monotone, ici strictement croissant.

Cette condition est ici réalisée, elle conduit à $i_m = -60^\circ$ et $D_m = 137^\circ$.

1.16 petit halo

Méthodes mises en jeu : n°1 et 2.

Cet exercice propose dans un cadre original de revisiter le problème de la déviation de la lumière par un prisme. Les angles ne sont pas orientés et il faut y prendre garde. Il faut alors reprendre ce que vous connaissez en l'adaptant à la situation particulière étudiée ici. Successivement, on rencontre les conditions d'émergence faisant appel à l'angle limite, le minimum de déviation, puis une application à un phénomène naturel proposant une réflexion physique sur la coloration du halo.

1. On se reportera à la figure 1.26 pour les notations.

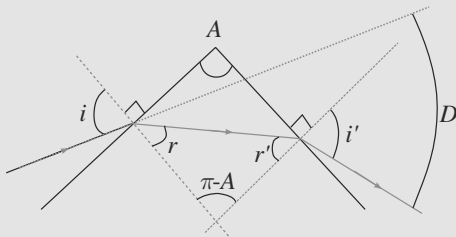


Figure 1.26 Prisme de grand-angle au sommet.

L'angle d'incidence i est compris entre 0 et $\pi/2$. La loi de Snell-Descartes ($\sin(i) = n \sin(r)$) donne pour le rayon réfracté dans le prisme $0 < r < \arcsin(\frac{1}{n})$, soit $0 < r < 49,8^\circ = 0,763 \text{ rad}$.

Dans le triangle incluant les angles r et r' , la somme des angles vaut π : $r + r' + \pi - \alpha = \pi$ et donc $r + r' = \alpha$, on en déduit que $50,2^\circ < r' < 90^\circ$ avec un angle au sommet du prisme de 100° au moins. Or, l'angle limite pour que le rayon puisse sortir est $r' < \arcsin(\frac{1}{n}) = 49,8^\circ$. Aucun rayon entrant par la face d'entrée ne peut émerger directement du prisme ainsi formé.

2. Les deux faces AB et DE formant une lame à faces parallèles, les rayons sont seulement décalés et non déviés. L'émergence par la face BC est impossible d'après la question 1, car l'angle au sommet du prisme ainsi formé est supérieur à 100° (120°).
3. Question classique ; s'il existe un unique minimum, d'après le retour inverse de la lumière, il se produit pour $i = i'$ (si-

non pour la valeur de l'angle d'incidence égale à i' , on retrouve i en sortie et donc la même déviation : un deuxième minimum). On a donc aussi $r = r'$ et comme $\alpha = r + r'$, on en déduit $r = \frac{\alpha}{2} = r'$ au minimum de déviation. De la loi de Snell-Descartes de la réfraction : $\sin i = n \sin r$, on tire : $i_0 = \arcsin(n \sin(\frac{\alpha}{2}))$. La déviation s'écrit alors : $D_m = 2i_0 - \alpha$.

Applications numériques : $i_0 = 2 \arcsin(\frac{n}{2}) - \frac{\pi}{3} = 0,714 \text{ rad} = 40,9^\circ$ (l'angle α vaut ici 60°), et $D_m = 2i_0 - \alpha = 0,381 \text{ rad} = 21,8^\circ$.

4. Les cristaux étant très nombreux et orientés aléatoirement, ils dévient la lumière dans toutes les directions mais avec une surintensité pour la valeur D_m . Le physicien doit donc observer un halo circulaire de rayon d'environ $21,8^\circ$ autour du soleil (figure 1.27), soit de rayon égal à 44 fois le diamètre du soleil. Son épaisseur angulaire doit correspondre à l'ouverture angulaire du soleil soit environ $0,5^\circ$.

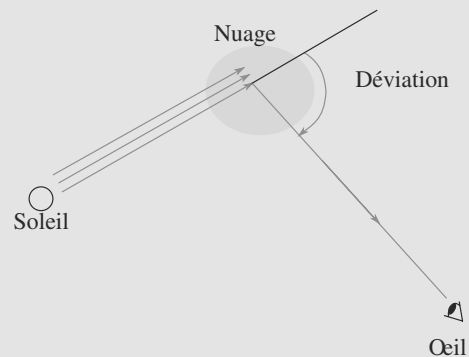


Figure 1.27 Observation du halo.

5. Comme $D_m = 2 \arcsin(\frac{n}{2}) - \frac{\pi}{3}$ et que l'indice optique du bleu est supérieur à celui du rouge, on en conclut que la déviation est plus forte pour le bleu. Le bord interne du halo est donc irisé de rouge et le bord externe de bleu (figure 1.28).

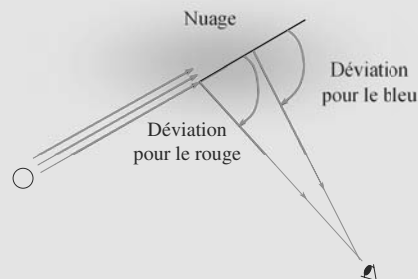


Figure 1.28 Irisation du halo.

Plan

2.1	Système optique centré	18
2.2	Notion d'objet et d'image	19
2.3	Stigmatisme : conditions de Gauss	19
2.4	Foyers	21
	Synthèse	23
	Tests et exercices	24
	Corrigés des exercices	27

Introduction

Ce chapitre est riche en définitions dont la connaissance conditionne la maîtrise des chapitres suivants. Veillez donc à les apprendre et à en comprendre la logique :

- Un système optique centré fait d'un objet ponctuel une image **nette** si cette image est aussi ponctuelle (et donc unique). Cela n'est assuré que dans les conditions de Gauss. Alors, la relation entre la position de l'objet et celle de l'image est appelée **relation de conjugaison**.
- Enchaîner plusieurs systèmes revient à combiner leurs relations de conjugaison. Dans le cadre du programme de première année, les systèmes élémentaires les plus importants seront le miroir plan, la lentille mince et le miroir sphérique.

Prérequis

- Notion de rayons lumineux
- Développements limités à l'ordre 1 de \sin , \cos et \tan au voisinage de 0 (voir fiche méthode 8)

Objectifs

- Définir système centré, objet, image, réels, virtuels, axe optique, stigmatisme, aplanétisme
- Connaître les conditions de Gauss et leurs conséquences : le stigmatisme et l'aplanétisme approchés

2.1 Système optique centré

Un système optique est dit **centré** s'il admet un axe de révolution, alors appelé **axe optique**. Par convention, cet axe est en général orienté dans le sens de propagation de la lumière.

Tout dioptrique ou miroir constituant le système optique centré admet un plan tangent perpendiculaire à l'axe optique. Donc **un rayon arrivant suivant l'axe optique n'est pas dévié**.

2.2 Notion d'objet et d'image

2.2.1 Objet et image ponctuels : définitions fondamentales

Définition

Un **objet ponctuel** est un point d'intersection des rayons lumineux incidents sur le système optique.

Une **image ponctuelle** est un point d'intersection des rayons lumineux émergents du système.

2.2.2 Point réel, point virtuel

Définition

Un **objet** sera dit **réel** s'il est situé dans l'espace objet du système optique, c'est-à-dire en **amont** de la face d'entrée du système. Sinon, il sera dit **virtuel**.

Une **image** sera dite **réelle** si elle est située dans l'espace image du système optique, c'est-à-dire en **aval** de la face de sortie du système. Sinon, elle sera dite **virtuelle**.

Une image réelle peut être observée directement sur un écran, tandis qu'une image virtuelle ne peut être observée qu'à travers un instrument d'optique.



Les positions respectives de l'espace objet et de l'espace image seront indiquées pour chaque type de système optique, page 33 pour les lentilles minces et page 49 pour les miroirs sphériques.

2.3 Stigmatisme : conditions de Gauss

2.3.1 Conjugaison objet-image : stigmatisme et aplanétisme



Si A est sur l'axe optique, alors A' l'est aussi, d'après la symétrie de révolution.



Quand vous cherchez l'image d'un objet AB perpendiculaire à l'axe optique avec A sur l'axe, cherchez seulement l'image de B . Celle de A s'en déduira par aplanétisme.

Si à un objet ponctuel est associée une image non ponctuelle, cette image est dite **floue**. Mais si l'image est ponctuelle (donc unique et nette), le système optique est dit **stigmatique** pour l'objet A . Alors, tout rayon lumineux issu de A émerge du système optique en passant (réellement ou virtuellement) par A' .

Soit un objet AB perpendiculaire à l'axe optique avec A sur l'axe. Le système optique est dit **aplanétique** pour cet objet s'il est stigmatique pour A et si son image $A'B'$ est aussi perpendiculaire à l'axe (voir figure 2.1).

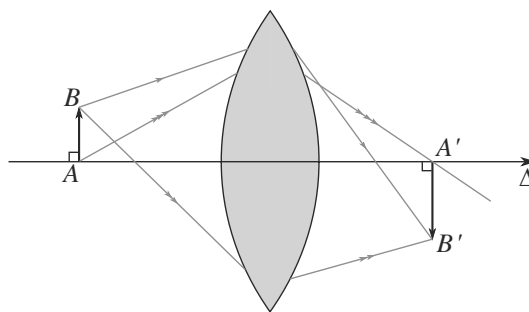


Figure 2.1 Aplanétisme avec un objet réel AB et une image réelle $A'B'$ par une lentille.

2.3.2 Conditions de Gauss

Travailler dans les **conditions de Gauss** revient à n'utiliser que les rayons lumineux qui sont peu inclinés par rapport à l'axe optique (angle inférieur à 10°) et peu écartés de l'axe optique (environ 1 cm avec le matériel usuel).

Dans ces conditions, tous les systèmes optiques centrés sont stigmatiques.

Il s'agit d'une **approximation** nécessaire car très peu de systèmes présentent un stigmatisme rigoureux.

Méthode 1 Bénéficier des conditions de Gauss

Les conditions de Gauss offrent un cadre dans lequel le stigmatisme et l'aplanétisme sont assurés. En découlent plusieurs « astuces » classiques pour la manipulation et la construction de l'image (unique) A' d'un objet A :

- Deux rayons suffisent à construire A' , qui est par définition leur intersection. Tout autre rayon issu de A passera automatiquement par A' après traversée du système.
- Le système admet une relation de conjugaison qui lie la position de l'objet A sur l'axe avec celle de son image A' (sur l'axe également). Pour des objets et des images hors de l'axe, utilisez l'aplanétisme pour vous ramener au cas sur l'axe.
- Un petit angle dans les conditions de Gauss satisfait les approximations $\sin(\alpha) \simeq \alpha$, $\tan(\alpha) \simeq \alpha$ et $\cos(\alpha) \simeq 1$.



Ces formules d'approximation s'appellent des **développements limités**. Reportez-vous à la fiche méthode 8.

Méthode 2 Rédiger un problème de stigmatisme

Dans les conditions de Gauss, l'image d'un point est un point, donc tout peut être ramené à une étude de points.

Quand vous cherchez l'image d'un objet ponctuel par un système optique composé de plusieurs sous-systèmes, nommez chaque sous-système (par exemple \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 , \mathcal{D}_3) et écrivez une **équation stigmatique** sur le modèle suivant :

$$A \xrightarrow{\mathcal{D}_1} A_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_2} A_2 \xrightarrow{\mathcal{D}_3} A'$$

Déterminer la relation de conjugaison du système global revient à établir une relation entre la position de A et celle de A' **sans faire intervenir les images intermédiaires**. Combinez donc les relations de conjugaison de chaque sous-système pour éliminer les images intermédiaires (ici A_1 et A_2).

Exemple d'application

Voyons le cas simple du miroir plan. Construisez l'image A' d'un objet réel A et commentez.

Solution

Reportez-vous à la figure 2.2. Le rayon issu de A et arrivant sur le miroir sous incidence normale n'est pas dévié dans sa réflexion, donc A' est sur cette droite. Prenons ensuite un autre rayon, quelconque cette fois. En utilisant les lois de Snell-Descartes de la réflexion, nous construisons son réfléchi et A' par intersection.

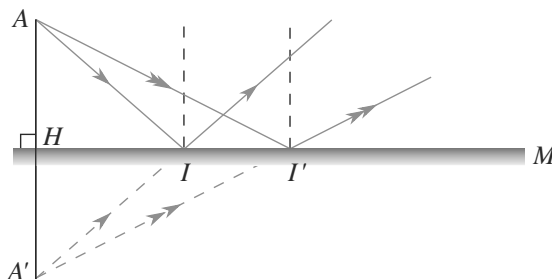


Figure 2.2 Construction d'une image par un miroir plan.

Comme A et A' sont symétriques par rapport au miroir, il vient :

$$A \xrightarrow{M} A' : \quad \overline{HA} + \overline{HA'} = 0$$

où H est le projeté orthogonal de A sur le miroir.

Prenons un autre rayon quelconque. Par construction, il donne la même image A' . Cela était prévisible dans les conditions de Gauss, mais cela montre en outre que les conditions de Gauss ne sont pas nécessaires pour le miroir plan : un miroir plan M est rigoureusement stigmatique et rigoureusement aplanétique partout.



Surtout ne généralisez pas ! Le miroir plan est le seul système optique à posséder cette propriété. Les conditions de Gauss sont nécessaires pour tous les autres.

2.4 Foyers

2.4.1 Définitions

Sauf dans le cas très particulier d'un système afocal, A_∞ et A'_∞ ne sont pas conjugués l'un de l'autre !

Notant A_∞ un objet à l'infini sur l'axe optique et A'_∞ une image à l'infini sur l'axe optique, les foyers principaux d'un système optique S sont définis par les équations stigmatiques suivantes :

Définition

Foyers principaux d'un système optique centré S :

$$\begin{array}{ll} A_\infty \xrightarrow{S} F' & F' \text{ foyer principal image} \\ F \xrightarrow{S} A'_\infty & F \text{ foyer principal objet} \end{array}$$

Le plan transverse contenant F' est appelé **plan focal image** et celui contenant F **plan focal objet**.

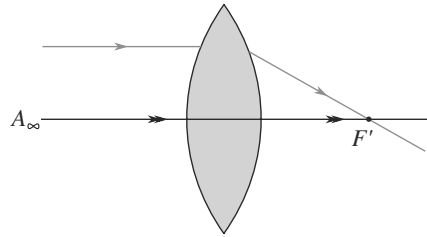
2.4.2 Propriétés

Reportez-vous au tableau ci-dessous.

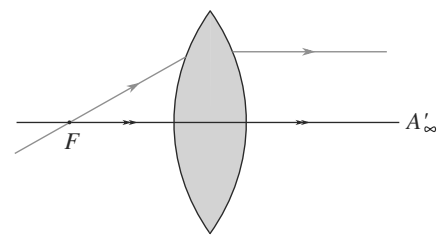
Les rayons issus d'un objet situé à l'infini sur l'axe optique arrivent sur le système optique centré parallèles entre eux et à l'axe optique.

Si l'objet est hors de l'axe optique, les rayons sont encore parallèles entre eux mais pas à l'axe optique. L'image est donc aussi hors de l'axe, par aplanétisme elle est située dans le plan focal image.

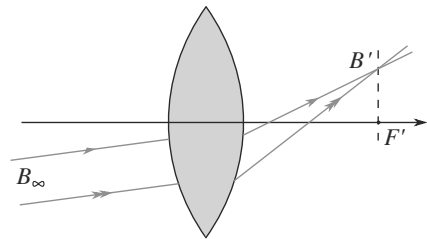
Les notions correspondantes côté objet s'en déduisent par retour inverse de la lumière.



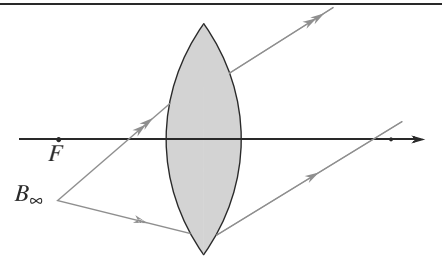
Objet à l'infini sur l'axe, image en F'



Objet en F , image à l'infini sur l'axe



Objet à l'infini hors de l'axe, image dans le plan focal image



Objet dans le plan focal objet, image à l'infini hors de l'axe

Synthèse

Savoirs

- Définir un système centré, l'axe optique
- Définir les conditions de Gauss
- Définir stigmatisme et aplanétisme
- Relation de conjugaison du miroir plan, son stigmatisme rigoureux
- Définir les foyers d'un système optique
- Caractère parallèle des rayons provenant d'un objet à l'infini, allant vers une image à l'infini

Savoir-faire

- Reconnaître la nature réelle ou virtuelle des objets et images
- Utiliser les conditions de Gauss sur un système optique
- Utiliser des conjugaisons successives
- Dans le cas du stigmatisme, utiliser deux rayons particuliers pour trouver la position d'une image

Mots-clés

- Axe optique,
- système centré,
- conditions de Gauss,
- objet,
- image,
- réel,
- virtuel,
- stigmatisme,
- aplanétisme.

Tests de connaissances

- 2.1 Les rayons provenant d'un point à l'infini sont forcément parallèles à l'axe optique.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 2.2 Les figures sont invariantes par rotation autour de l'axe optique.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 2.3 Les images que fournit un miroir plan se trouvent sur sa surface.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 2.4 On ne peut avoir de stigmatisme hors des conditions de Gauss.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 2.5 Les foyers d'un système sont conjugués entre eux.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 2.6 Dans les conditions de Gauss, tous les rayons qui passent par un point A passent par son image A'.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 2.7 Si le faisceau issu de A est convergent à la sortie d'un système optique, l'image est réelle.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 2.8 Si le faisceau définissant A est convergent en entrée d'un système optique, l'objet est réel.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 2.9 Les lunettes de vue donnent une image réelle.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 2.10 L'image que perçoit l'œil sur la rétine est virtuelle.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 2.11 Au cinéma, l'image qu'on voit est réelle.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 2.12 L'image observée au travers d'un microscope est réelle.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

2.13 Rotation d'un miroir plan

Considérons un rayon lumineux arrivant sur un miroir plan, ainsi que son rayon réfléchi. De quel angle le rayon réfléchi tourne-t-il lorsque le miroir tourne d'un angle α perpendiculairement au plan d'incidence ?

2.14 Le miroir plan

(D'après CCP)

1. Un rayon lumineux issu d'un point A se réfléchit en I sur une surface plane {P} et parvient au point B (figure 2.3).

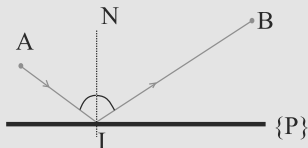


Figure 2.3 Rayons reliant A à B.

À partir des lois de Snell-Descartes, montrer, par un raisonnement de géométrie, que le chemin optique [AIB] (distance $AI + IB$ parcourue par la lumière) est minimal, la position des points A et B étant fixée.

2. Application : Dans le plan xOy, deux rayons lumineux issus du point A(0,+a) se réfléchissent sur {P} aux points J et K (figure 2.4).

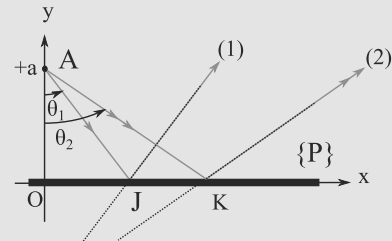


Figure 2.4 Rayons réfléchis issus de A.

Écrire les équations des droites représentatives des rayons réfléchis (1) et (2) en fonction des tangentes des angles $\theta_1 = (\vec{AO}, \vec{AJ})$ et $\theta_2 = (\vec{AO}, \vec{AK})$ puis calculer les coordonnées du point C, intersection des rayons (1) et (2). Quelle est alors l'image du point A ? En déduire une propriété caractéristique du miroir plan.

2.15 Observation à travers une vitre et une lentille

Une source lumineuse ponctuelle S est placée en A. Un expérimentateur l'observe à travers une lentille mince et une vitre en verre ($n = 1,5$) d'épaisseur $e = 1$ cm.

L'ensemble est représenté figure 2.5 : l'objet A est situé $d_1 = 10$ cm en amont de la vitre et la lentille, repérée par son centre O, $d_2 = 30$ cm en aval de la vitre.

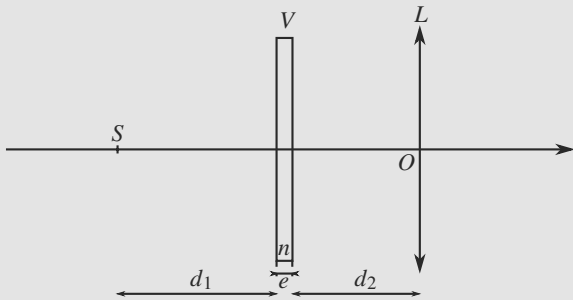


Figure 2.5 Image d'une source ponctuelle par une vitre suivie d'une lentille.

Localisez l'image A' de A par ce système en calculant $\overline{OA'}$ en fonction de \overline{OA} , e , n et f' .

On donne les relations de conjugaison pour les systèmes étudiés :

$$\begin{aligned} \text{Vitre : } \overline{AA'} &= e \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\ \text{Lentille : } \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} &= \frac{1}{f'} \end{aligned}$$

où $f' = 0,5 \text{ m}$ est une valeur caractéristique de la lentille.

2.16 Miroirs en position « Michelson »

(D'après CCP)

Dans le trièdre Oxyz, les points S, O, M_1 et M_2 appartiennent au plan Oxy. On donne :

$$\overline{OS} = -15 \text{ cm}, \quad \overline{OM_1} = \overline{OM_2} = +5 \text{ cm}.$$

Les miroirs (m_1) et (m_2) sont respectivement parallèles aux plans Oyz et Oxz (figure 2.6).

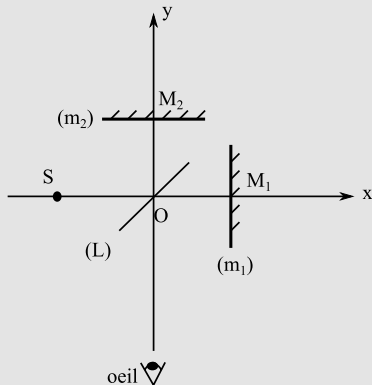


Figure 2.6 Miroirs en configuration « Michelson ».

Une lame semi-réfléchissante (L), d'épaisseur négligeable, est située dans le plan bissecteur des plans des deux miroirs : les rayons lumineux transmis par (L) ne sont pas déviés et les rayons réfléchis sur (L) se comportent comme dans le cas du miroir plan.

Les images obtenues S_1 et S_2 de la source ponctuelle S à travers le système s'observent dans la direction Oy par un observateur situé dans les y négatifs. On note :

S'_1 : l'image de S à travers (m_1)

S_1 : l'image de S'_1 à travers (L)

S' : l'image de S à travers (L)

S_2 : l'image de S' à travers (m_2).

1. Préciser les axes sur lesquels se trouvent les images S' , S'_1 , S_1 et S_2 puis déterminer leurs positions en exprimant les valeurs de : $\overline{OS'}$, $\overline{OS'_1}$, $\overline{OS_1}$ et $\overline{OS_2}$
2. Le miroir (m_1) est translaté de 1 cm vers les x positifs. Recalculer les quatre valeurs précédentes.
3. Le miroir (m_1) ramené à sa position initiale, subit une rotation d'un angle $\gamma = -5^\circ$ (sens inverse du sens trigonométrique). Représenter schématiquement les positions des images S' , S'_1 , S_1 et S_2 .

2.17 Lame à faces parallèles

Considérons une lame à faces parallèles d'épaisseur e , taillée dans le verre ($n = 1,5$) et plongée dans l'air (d'indice unité). Soit A un objet ponctuel.

Déterminez $\overline{AA'}$ en fonction de n et e , sachant que la relation de conjugaison d'un dioptré plan est donnée par :

$$A_1 \xrightarrow{D} A_2 : \quad \frac{\overline{HA_2}}{\overline{HA_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

où H est le projeté orthogonal de A_1 et A_2 sur le dioptré.

2.18 Dioptré plan

Un plan séparant deux milieux d'indices respectifs n_1 et n_2 s'appelle un dioptré plan.

1. Faites une figure, en vous donnant un axe optique et un objet A_1 sur cet axe. Vous noterez H le projeté orthogonal de A_1 sur le dioptré.
2. Soit trois rayons issus de A_1 arrivant sur le dioptré avec un angle d'incidence respectivement nul, égal à i_1 et à i'_1 . Le deuxième rayon émerge avec un angle de réfraction i_2 et le troisième i'_2 . Construisez géométriquement la position de l'image A_2 de A_1 par le dioptré. Que constatez-vous ?
3. Calculez sans approximation $\overline{HA_2}$ en fonction de i_1 et i_2 , puis terminez ce calcul dans les conditions de Gauss. Conclusion ?

Indication : $\tan(x) \approx x$ si x est un angle suffisamment petit (condition automatiquement satisfaite pour tout angle d'inclinaison par rapport à l'axe optique dans les conditions de Gauss).

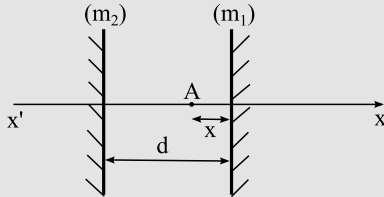
■■■

2.19 Association de deux miroirs

(D'après CCP)

Il s'agit d'une expérience réalisable en « Travaux Pratiques » où l'objet ponctuel A est lumineux.

Les miroirs sont parallèles et distants de d (figure 2.7).

**Figure 2.7** Miroirs parallèles.

Un objet ponctuel A situé entre les miroirs à la distance x de (m_1) donne par réflexions successives sur les miroirs (m_1) et (m_2) une série d'images sur l'axe $x'x$. On note A_1 l'image de A par réflexion sur (m_1), puis A_2 l'image de A par réflexion sur (m_1) puis sur (m_2), etc.

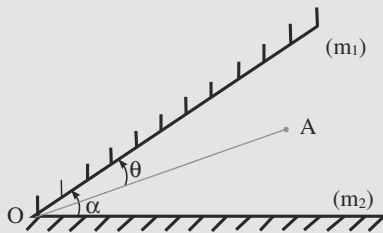
Déterminer, en fonction de x et d, les abscisses $\overline{AA_1}$, $\overline{AA_2}$, $\overline{AA_3}$ et $\overline{AA_4}$ d'origine A, des images A_1 , A_2 , A_3 et A_4 et en déduire celles des images A_N suivant que N est pair ou impair. Quel est le nombre d'images que l'on observe ?

■■■

2.20 Miroirs formant un angle α

(D'après CCP)

Deux miroirs (m_1) et (m_2) sont placés pour former un coin d'angle α (figure 2.8) :

**Figure 2.8** Miroirs en coin.

Un objet ponctuel A situé entre (m_1) et (m_2) est repéré par l'angle $(OA, m_1) = \theta$ (figure 2.8). La série d'images (A_1 , A_2 , ..., A_N ...) correspond aux rayons réfléchis d'abord sur (m_1), tandis que la série (A'_1 , A'_2 , ..., A'_N , ...) correspond aux rayons réfléchis d'abord sur (m_2).

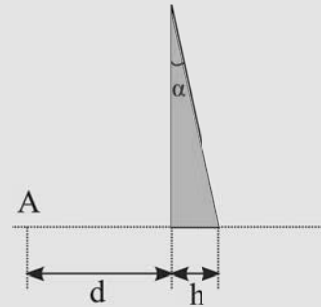
Déterminer les positions angulaires $\theta_N = (OA, OA_N)$ et $\theta'_N = (OA, OA'_N)$ des images A_N et A'_N pour N pair et impair. Quel est le nombre d'images distinctes observées si $\alpha = \pi/p$ avec p entier pair ?

■■■

2.21 Image par un prisme de petit angle au sommet

(D'après Ecrin)

On considère une source ponctuelle A dans l'air d'indice 1. Elle est placée à une distance d en avant d'un prisme au niveau de sa base d'épaisseur h (figure 2.9). Le prisme est de petit angle au sommet α faible et d'indice n. L'épaisseur de sa base est h.

**Figure 2.9** Objet A devant le prisme.

La relation de conjugaison du dioptré plan lors du passage d'un milieu d'indice n_1 vers un milieu d'indice n_2 (dans les conditions de Gauss) est :

$$A_1 \xrightarrow{D} A_2 ; \frac{\overline{HA_2}}{\overline{HA_1}} = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{où H est le projeté orthogonal de } A_1 \text{ sur le dioptré}).$$

Données numériques : $d = 20 \text{ cm}$; $\alpha = 3,00 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$; $n = 1,500$, $h = 5,00 \text{ mm}$.

1. Déterminer la position de l'image A_1 de A par la face d'entrée. Est-elle réelle ou virtuelle ?
On appelle A_2 l'image finale au travers du prisme.
2. Faire un schéma où figurent les trois points A, A_1 et A_2 .
3. Déterminer la position de A_2 par rapport à A_1 puis par rapport à A. En tenant compte de la faible valeur de α , déterminer numériquement le déplacement vertical de A_2 par rapport à A puis leur distance horizontale.

2.1

Faux, ils sont parallèles entre eux. Il faut que l'objet soit sur l'axe pour qu'ils soient parallèles à l'axe optique

2.2

Vrai car l'axe optique est un axe de symétrie de révolution

2.3

Faux, elles sont symétriques de l'objet par rapport au plan du miroir

2.4

Faux, le miroir plan en est un exemple mais il existe aussi des points de stigmatisme rigoureux pour certains autres systèmes optique

2.5

Faux sauf pour les systèmes afocaux (foyers à l'infini)

2.6

Vrai : il y a stigmatisme approché

2.7

Vrai, elle se trouve dans le demi espace objet

2.8

Faux, l'image n'est pas encore formée alors que les rayons entrent dans le système

2.9

Faux, on regarde au travers des lunettes : l'image est donc virtuelle

2.10

Faux, la rétine forme un écran, l'image est donc réelle

2.11

Vrai, il s'agit d'une projection

2.12

Faux car on doit regarder au travers du dispositif.

2.13

Rotation d'un miroir plan

Exercice élémentaire fournissant un résultat bien utile !

Un bon schéma permet de visualiser les relations entre les angles.

Sur la figure 2.10, l'angle entre les deux normales est α .

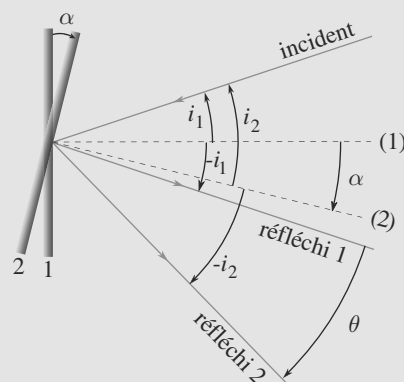


Figure 2.10 Rotation d'un miroir plan.

Soit θ l'angle dont a tourné le rayon réfléchi :

$$\theta = -i_2 + (-i_2 + 2i_1) = 2i_1 - 2i_2.$$

Par ailleurs, $\alpha = i_1 - i_2$, d'où le résultat : $\theta = 2\alpha$.

2.14

Le miroir plan

Méthode mise en jeu : n°2

L'exercice porte d'abord sur un point qui n'est pas au programme mais qui ne nécessite que des connaissances géométriques pour être traité. On ne doit donc pas se laisser impressionner par la première question. La deuxième n'est que l'utilisation de considérations géométriques pour retrouver la relation de conjugaison du miroir plan et permet de constater son stigmatisme rigoureux.

1. D'après les lois de Snell-Descartes, les angles de réflexion et d'incidence sont égaux. On a donc A' (symétrique de A par rapport au plan $\{P\}$: figure 2.11), I et B qui sont alignés. Comme AI et AI' sont égales et que le plus court chemin de A' à B est la ligne droite, $[AIB]$ est bien minimal si on déplace le point I sur le miroir $\{P\}$.

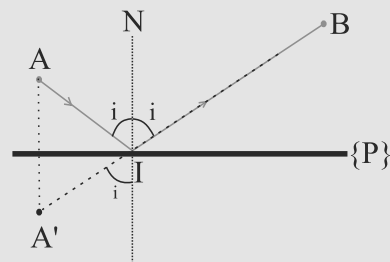


Figure 2.11 Chemin minimal.

2. Les abscisses de J et K sont respectivement $a \cdot \tan(\theta_1)$ et $a \cdot \tan(\theta_2)$. Les droites (1) et (2) ont donc comme équations respectives $y_1 = \cotan(\theta_1) \cdot [x - a \cdot \tan(\theta_1)]$ et $y_2 = \cotan(\theta_2) \cdot [x - a \cdot \tan(\theta_2)]$ car les pentes des droites sont de $\pi/2 - \theta$. Leur point d'intersection vérifie $y = \cotan(\theta_1) \cdot x - a = \cotan(\theta_2) \cdot x - a$ ce qui est obtenu pour $x = 0$ et $y = -a$.

On en déduit donc que tous les rayons issus de A ont des rayons réfléchis qui passent par ce point A' (indépendance du résultat par rapport à θ) qui est l'image de A par le miroir. On vérifie ici le stigmatisme rigoureux du miroir plan car il n'est pas nécessaire de limiter le faisceau pour obtenir ce point de croisement.

2.15 Observation à travers une vitre et une lentille

Méthodes mises en jeu : n°1 et 2.

L'exercice introduit deux systèmes optiques « inconnus », la vitre (appelée, techniquement, lame à faces parallèles) et la lentille mince. Une fois leur relation de conjugaison donnée, ces systèmes sont parfaitement connus, ce qui vous suffit ici : **dans les conditions de Gauss, un système optique centré est entièrement caractérisé par sa relation de conjugaison.**

L'exercice 17 aborde la démonstration de la relation de conjugaison de la vitre. Celle de la lentille mince ne sera abordée que dans le chapitre 3.

Utilisons les notations suivantes :

$$A \xrightarrow{\text{vitre}} A_1 \xrightarrow{L} A'$$

D'où les relations de conjugaison :

$$\begin{cases} \overline{AA_1} = e \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\ \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{f'} \end{cases}$$

La première donne :

$$\begin{aligned} \overline{AA_1} &= \overline{AO} + \overline{OA_1} = e \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\ \Rightarrow \overline{OA_1} &= e \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \overline{OA} \end{aligned}$$

En injectant ce résultat dans la seconde, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} &= \frac{1}{f'} \\ \frac{1}{\overline{OA'}} &= \frac{1}{f'} + \frac{1}{e \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \overline{OA}} \\ \Rightarrow \overline{OA'} &= \frac{f' \left(\overline{OA} + e \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right)}{f' + \overline{OA} + e \left(1 - \frac{1}{n} \right)} = -182 \text{ cm} \end{aligned}$$

2.16 Miroirs en position « Michelson »

Bien qu'il s'agisse d'un dispositif interférométrique (au programme de deuxième année), les questions posées ici ne relèvent que de l'optique géométrique. La seule difficulté est de comprendre le rôle de la lame semi-réfléchissante. Il s'agit ensuite uniquement d'utiliser les conjugaisons par miroir plan.

1. Les images obtenues le sont par symétrie plane par rapport aux plans des miroirs concernés. S' est sur l'axe Oy en dessous de O ; S'_1 est sur l'axe Ox à droite de (m_1) ; S_1 est sur l'axe Oy au-dessus de O ; enfin, S_2 est sur l'axe Oy au-dessus de O également.

Plus précisément, en tenant compte du décalage de 5 cm entre O et les miroirs, $\overline{OS'} = -15 \text{ cm}$, $\overline{OS'_1} = 25 \text{ cm}$ et $\overline{OS_1} = +25 \text{ cm} = \overline{OS_2}$: S_1 et S_2 sont en effet confondus (figure 2.12).

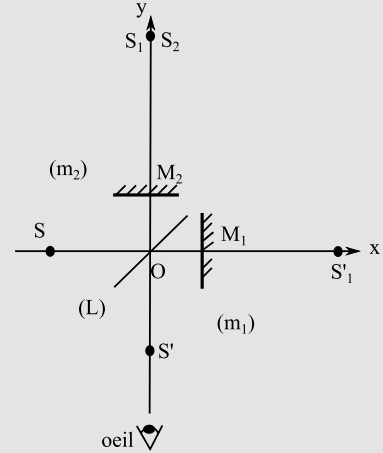


Figure 2.12 Images successives.

2. Seules les images en rapport avec (m_1) sont modifiées : $\overline{OS'_1} = +27 \text{ cm}$ et $\overline{OS_1} = +27 \text{ cm}$.
3. Le point S'_1 se trouve décalé de -5° par rotation de sa position précédente autour de M_1 . De même, S_1 va se trouver décalé de $+5^\circ$ par rapport à sa position précédente autour de O (figure 2.13).

Il est plus pratique pour obtenir cette position finale de considérer l'image (m'_1) du miroir (m_1) par rapport à (L). Les rayons arrivant sur (m'_1) semblent provenir de S' . La normale de (m'_1) ayant tourné de 5° , on place aisément S_1 symétrique de S' par rapport à (m'_1) .

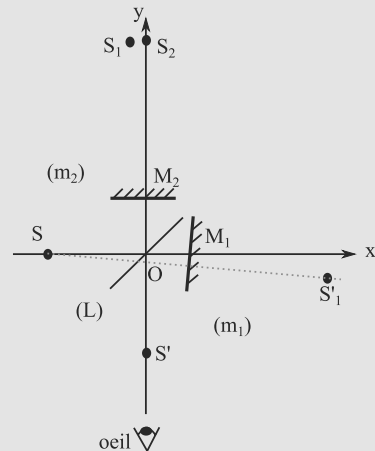


Figure 2.13 Images après rotation de (m_1) .

2.17

Lame à faces parallèles

Méthode mise en jeu : n°2.

L'énoncé demande tout simplement d'établir la relation de conjugaison d'une lame à faces parallèles. Il faut donc d'abord remarquer que ce système optique est constitué de deux dioptries plans parallèles, le premier air-verre et le second verre-air. La démonstration de la relation de conjugaison du dioptre plan est abordée dans l'exercice 2.1.

Suivez donc bien la méthode n°2 pour la rédaction et le raisonnement. Et restez rigoureux avec les notations : dans la relation (2.1), H est le projeté de l'objet sur le dioptre. Comme il y a ici deux dioptries différents, il y a deux projetés différents.

Les notations sont celles de la figure 2.14.

Le système est une association de deux dioptries plans successifs D_1 et D_2 :

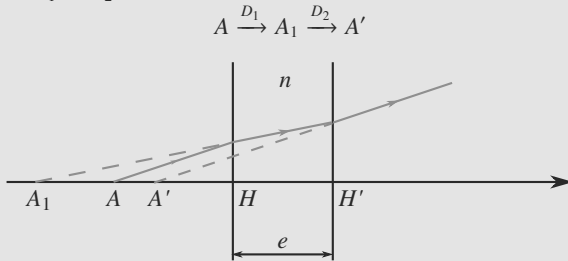


Figure 2.14 Couple objet-image d'une lame à faces parallèles.

Nous avons donc deux relations de conjugaison :

$$\begin{aligned} \text{Dioptrie } D_1 : \quad \frac{\overline{HA_1}}{\overline{HA}} &= n \\ \text{Dioptrie } D_2 : \quad \frac{\overline{H'A'}}{\overline{H'A_1}} &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$\overline{AA'}$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \overline{AA'} &= \overline{AH} + \overline{HH'} + \overline{H'A'} \\ &= \overline{H'A'} - \overline{HA} + e \end{aligned}$$

Avec les relations de conjugaison :

$$\begin{aligned} \overline{H'A'} &= \frac{1}{n} \overline{H'A_1} = \frac{1}{n} (\overline{H'H} + \overline{HA_1}) \\ &= \frac{1}{n} (-e + n \overline{HA}) \\ \overline{H'A'} &= \overline{HA} - \frac{e}{n} \end{aligned}$$

D'où la relation de conjugaison :

$$\overline{AA'} = e \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

2.18

Association de deux miroirs

Méthode mise en jeu : n°2

On doit utiliser les relations de conjugaison du miroir plan pour des images successives puis les relations de Chasles pour changer d'origine. Il faut surtout être rigoureux dans les applications consécutives des lois et ne pas se perdre en chemin. Il faut surtout prendre garde à ce que certaines grandeurs sont des distances (positives) et d'autres des abscisses (algébriques).

Soient S_1 et S_2 les sommets respectifs des deux miroirs (figure 2.15). On utilise le fait que l'image d'un point donnée par un miroir plan est son symétrique par rapport au plan du miroir : $\overline{S_1 A} = -x$ donne $\overline{AA_1} = 2x$, $\overline{S_2 A_1} = d + x$ donne $\overline{AA_2} = \overline{AA_1} + 2\overline{A_1 S_2} = 2x - 2(d + x) = -2d$, de même, on trouve : $\overline{AA_3} = 2d + 2x$, $\overline{AA_4} = -4d$ etc...

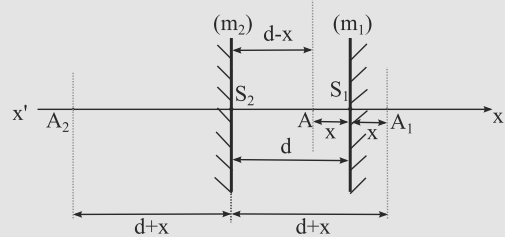


Figure 2.15 Images successives.

Une récurrence se dessine en $\overline{AA_N} = -Nd$ pour N pair et $\overline{AA_N} = 2x + (N-1)d$ pour N impair. En effet, ces relations sont vérifiées pour les quatre premiers termes et si $\overline{AA_{2n}} = -2nd$, alors $\overline{AA_{2n+1}} = \overline{AS_1} - \overline{S_1 A_{2n}} = x - (-2nd - x) = 2nd + 2x$ qui vérifie la récurrence. De plus, $\overline{AA_{2n}} = \overline{AS_2} - \overline{S_2 A_{2n+1}} = x - d - (d - x + 2nd + 2x) = 2(n+1)d$. Tous les éléments de la récurrence sont donc bien vérifiés.

On devrait donc observer une infinité d'images de part et d'autre, d'autant que l'on n'a pas considéré les images obtenues à partir de (m_2) d'abord puis (m_1) , etc... mais lorsqu'on réalise ce montage expérimentalement ; le parallélisme des deux miroirs, imparfait, ne permet pas cette observation.

2.19

Miroirs formant un angle α

Méthode mise en jeu : n°2.

Il s'agit ici d'un exercice formellement assez semblable à celui sur l'association de deux miroirs parallèles. Les distances sont simplement remplacées par des angles et ceux-ci sont orientés.

Occupons-nous d'abord des θ_N . On utilise le fait que l'image d'un point par un miroir plan est son symétrique par rapport au plan du miroir : $\theta_1 = 2\theta$, l'angle fait par OA_1 avec le miroir (m_2) est donc $\alpha + \theta$. Celui fait par OA_2 est donc $-\alpha - \theta$. On a donc $\theta_2 = -2\alpha$ (figure 2.16).

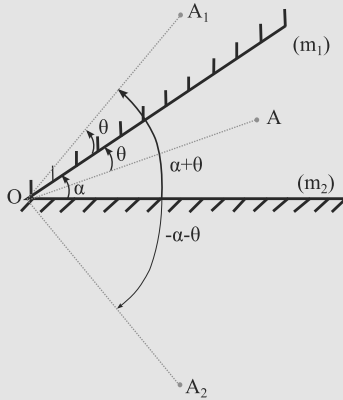


Figure 2.16 Images successives.

On établit de même $\theta_3 = 2(\alpha + \theta)$, $\theta_4 = -4\alpha$ etc...

De manière générale, $\theta_N = -N\alpha$ si N pair et $\theta_N = ((N-1)\alpha + 2\theta)$ si N impair que l'on établit par récurrence. On aura intérêt pour plus de détails à voir le corrigé de l'exercice « association de deux miroirs ».

Pour les θ'_N , la démonstration est identique. On peut aussi simplement remplacer θ par $\theta - \alpha$ et α par $-\alpha$ dans les expressions précédentes car le problème est symétrique par rapport aux deux miroirs. On obtient alors :

$\theta'_N = N\alpha$ si N pair et $\theta'_N = -(N-1)\alpha + 2(\theta - \alpha) = -(N+1)\alpha + 2\theta$ pour N impair.

Pour p entier pair, θ_{2p} et θ'_{2p} valent -2π et 2π : on revient donc au point de départ avec 2p-1 images visibles pour les deux mais elles sont aussi confondues entre elles : 2p-1 images en tout sont donc visibles.

2.20 Dioptré plan

Méthodes mises en jeu : n°1 et 2.

Cet exercice cherche à vous faire établir la relation de conjugaison du dioptré plan. La première tentative est menée sans approximation et n'aboutit pas car ce système n'est pas stigmatique.

La deuxième tentative est faite dans les conditions de Gauss et conduit à la relation de conjugaison utilisée pour étudier, par exemple, une lame à faces parallèles (exercice 17).

1. Voir figure 2.17.
2. Voir figure 2.17. L'image A_2 doit être sur l'axe optique car A_1 y est. Elle doit être à l'intersection des trois rayons émergents. Mais l'intersection A_2 du premier et du deuxième rayon n'est pas confondue avec l'intersection A'_2 du premier et du troisième rayon !

Donc l'image n'est pas unique, le dioptré plan n'est pas stigmatique pour l'objet A_1 .

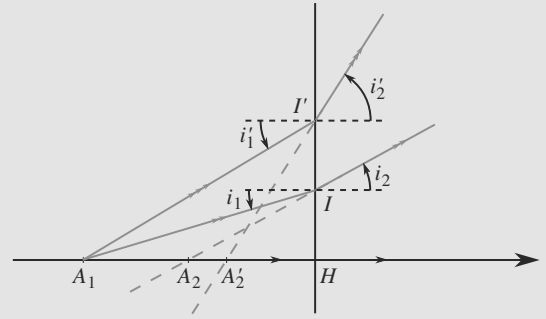


Figure 2.17 Étude d'un dioptré plan.

3. Dans les triangles HIA_1 et HIA_2 nous avons :

$$\tan(i_2) = \frac{\overline{HI}}{\overline{A_2H}} \quad \text{et} \quad \tan(i_1) = \frac{\overline{HI}}{\overline{A_1H}}$$



Attention aux signes des distances algébriques ! Elles ont été toutes prises positives, conformément aux orientations des deux axes sur la figure 2.17.

Avec la deuxième loi de la réfraction, cela donne :

$$\overline{HA_2} = \overline{HA_1} \frac{\tan(i_1)}{\tan(i_2)}$$

Ceci n'est pas une relation de conjugaison acceptable car elle dépend du choix du rayon lumineux issu de l'objet A_1 (via l'angle i_1), ce qui traduit le non-stigmatisme du dioptré plan. Mais dans les conditions de Gauss, nous pouvons exploiter l'approximation : $\tan(x) \approx x$:

$$\overline{HA_2} = \overline{HA_1} \frac{\tan(i_1)}{\tan(i_2)} \approx \overline{HA_1} \frac{i_1}{i_2}$$

La loi de Snell-Descartes de la réfraction

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

devient ici $n_1 i_1 \approx n_2 i_2$ d'où :

$$\overline{HA_2} \approx \overline{HA_1} \frac{n_2}{n_1}$$

Ceci est une relation de conjugaison acceptable car elle ne dépend plus du choix du rayon issu de A_1 . Écrivons-la sous la forme définitive :

$$A_1 \xrightarrow{D} A_2 : \quad \frac{\overline{HA_2}}{\overline{HA_1}} = \frac{n_2}{n_1} \quad (2.1)$$

2.21

Image par un prisme de petit angle au sommet

Méthode mise en jeu : n°2.

Il faut utiliser la relation de conjugaison donnée et faire des schémas pour placer correctement les projetés orthogonaux des points objets sur les dioptrés H_1 et H_2 . Le reste est de la géométrie et des projections sur les deux axes horizontal et vertical.

1. En utilisant la relation de conjugaison, on obtient $\overline{H_1A_1} = \overline{H_1A} \cdot \frac{n}{1} = -nd$. L'image obtenue est virtuelle car elle n'est pas située dans l'espace image (là où se trouvent les rayons émergents).
2. La normale change, tout comme le point H. On obtient le schéma suivant :

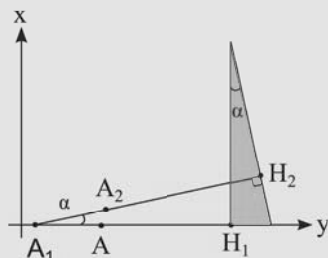


Figure 2.18 Positions de A, A₁ et A₂.

3. Le nouveau déplacement se produit à partir d'une distance d_1 au deuxième dioptré de $nd + h$ (approximation des petits angles). Elle est alors raccourcie d'un facteur n et on obtient une distance $d + h/n$. On obtient donc $\overline{A_1A_2} = (n - 1)d + (1 - \frac{1}{n})h$. La distance horizontale de A à A₂ est donc : $y = A_1A_2 \cos(\alpha) - A_1A \approx (n - 1)d + (1 - \frac{1}{n})h - (n - 1)d = (1 - \frac{1}{n})h$ soit 1,67 mm. La distance verticale est $x = [(n - 1)d + (1 - \frac{1}{n})h] \sin(\alpha) \approx [(n - 1)d + (1 - \frac{1}{n})h] \alpha$ soit 0,305 mm.

Ce dispositif est utile pour produire des interférences lumineuses : on associe alors un autre prisme identique tête-bêche et les faisceaux produits issus des deux images se croisent créant ainsi une zone d'interférence (biprisme de Fresnel).

Plan

3.1	Généralités	32
3.2	Stigmatisme	35
3.3	Règles de construction	35
3.4	Association de lentilles minces accolées	37
3.5	Focométrie élémentaire	37
	Synthèse	38
	Tests et exercices	39
	Corrigés des exercices	42

Introduction

La lentille sphérique mince, ou lentille mince, est l'un des objets élémentaires de l'optique de première année. C'est un système optique centré reposant sur une double réfraction (une sur la face d'entrée, une sur la face de sortie).

Prérequis

- Conséquences du stigmatisme et de l'aplanétisme approchés pour un système optique
- Axe optique, système centré, foyers et plans focaux

Objectifs

- Apprendre à utiliser les trois rayons fondamentaux pour obtenir une image ou tracer un rayon émergent
- Connaître les relations de conjugaison et le grandissement
- Positionner les foyers autour d'une lentille (divergente ou convergente)
- Reconnaître les lentilles divergentes et convergentes à l'aspect ou à l'utilisation
- Savoir retrouver les formules de conjugaison et de grandissement par un tracé

3.1 Généralités

3.1.1 Découpage de l'espace autour d'une lentille

L'espace objet est situé à gauche de la lentille et l'espace image à droite (avec un rayon lumineux venant de la gauche), comme indiqué figure 3.1.

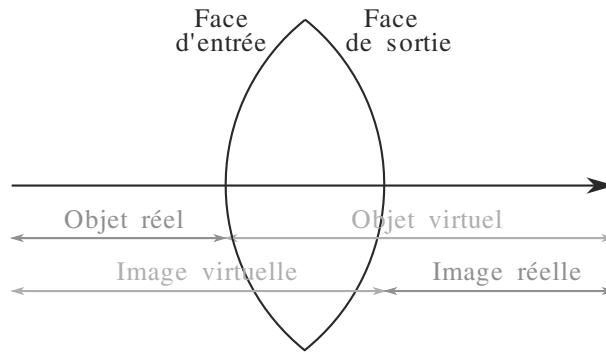


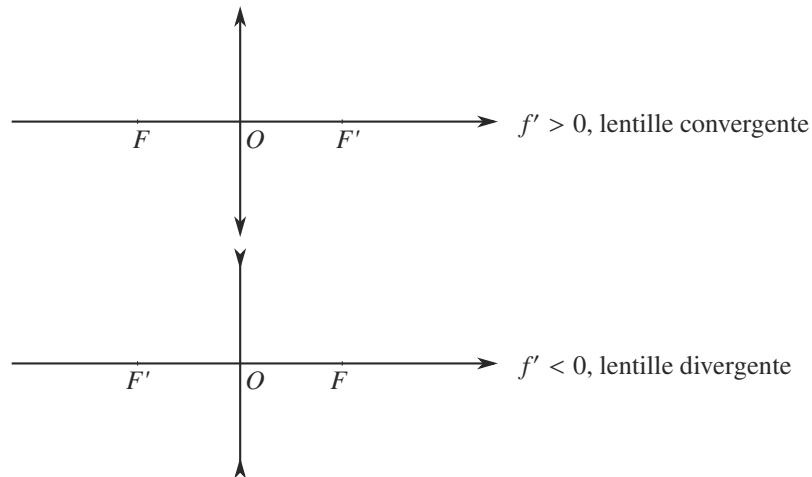
Figure 3.1 Limites des espaces objet réel, objet virtuel, image réelle, image virtuelle pour une lentille.

3.1.2 Classification



f' est une longueur, donc V est homogène à l'inverse d'une longueur, unité appelée **dioptrie**.

Une lentille sphérique mince admet un centre O et, dans les conditions de Gauss, des foyers F et F' symétriques par rapport à O . Sa distance focale est définie par $f' = \overline{OF'}$ et sa vergence par $V = 1/f'$.



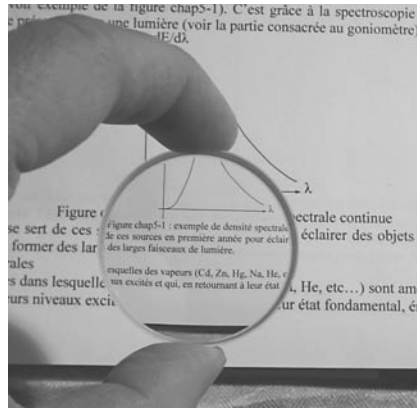
3.1.3 Reconnaissance rapide

Les lentilles convergentes sont à bord mince, les lentilles divergentes à bord épais.

La méthode des lunetiers permet d'identifier très rapidement la nature d'une lentille : placez la lentille à quelques millimètres d'un texte écrit et déplacez lentement la lentille dans un plan horizontal. Si le texte paraît défiler dans le sens du mouvement de la lentille, celle-ci est divergente. Sinon, elle est convergente.

Enfin, une lentille convergente grossit le texte que l'on regarde lorsqu'on l'en éloigne (effet de loupe). Une lentille divergente le rétrécit.

(a)



(b)

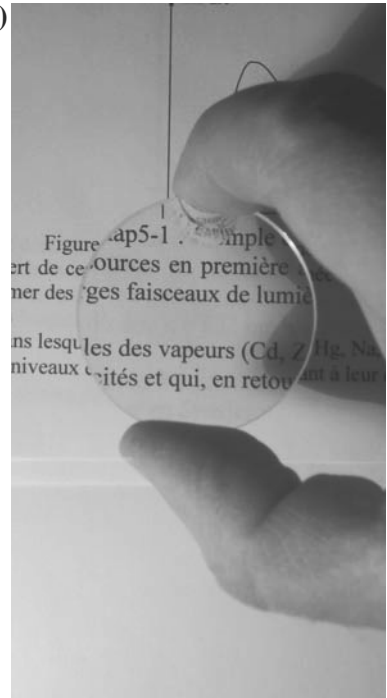


Photo 3.1a et b Images d'objets proches au travers de lentilles minces.

À gauche (a), le texte est vu au travers d'une lentille divergente. Il semble bien plus petit que le texte vu directement. C'est au travers de la lentille placée à droite (b), convergente, que le texte paraît le plus grand.



Photo 3.2 Images d'objets lointains (à l'infini).



Voir vidéo 4 :
Reconnaître la nature
des lentilles et miroirs

À gauche une lentille divergente, l'image est droite et rétrécie. Au travers de la lentille convergente (à droite), l'image est inversée, grandie et flou : elle est entre la lentille et l'appareil photo, trop prêt pour être nette en même temps que celle donnée par la lentille divergente (derrière la lentille).

3.2 Stigmatisme



γ est par définition sans dimension.

Le grandissement est noté :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.$$

L'équation stigmatique $A \xrightarrow{L} A'$ peut se résoudre de deux manières équivalentes :

Formule de Descartes :

Formule de conjugaison avec origine au centre optique :

$$A \xrightarrow{L} A' : \quad \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

Formule de Newton :

Formule de conjugaison avec origines aux foyers :

$$A \xrightarrow{L} A' : \quad \overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = f f' = -f'^2 \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{F'A'}}{f} = \frac{f'}{\overline{FA}}$$

3.3 Règles de construction

Il y a trois rayons fondamentaux dans le cas des lentilles :

- le rayon passant par O , qui n'est pas dévié,
- le rayon passant par F , qui émerge parallèle à l'axe optique,
- le rayon parallèle à l'axe optique, qui émerge en passant par F' .

Méthode 1 construire une image par une lentille mince

Il suffit de deux rayons pour construire l'image d'un objet ponctuel. Vous prendrez ces rayons parmi les trois rayons fondamentaux.

Un peu d'astuce permet parfois d'aller plus vite. Prenons par exemple un objet à l'infini hors de l'axe. Il suffit alors d'un rayon lumineux pour la placer : elle sera à l'intersection du rayon réfracté et du plan focal image.

Exemple d'application

La figure 3.2 montre la construction de l'image d'un objet réel AB par une lentille convergente. C'est l'image de B qui est construite, celle de A s'en déduit par aplanétisme. Sur cet exemple, l'image est réelle.

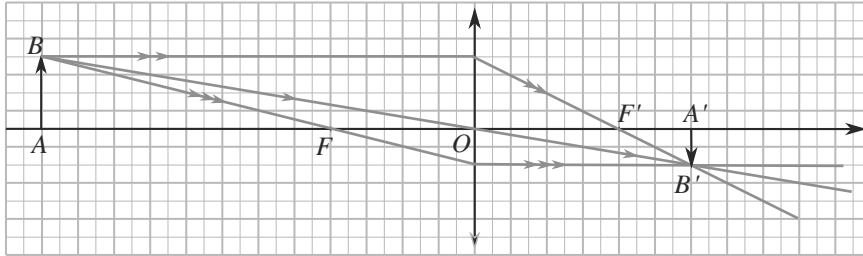


Figure 3.2 Les trois rayons fondamentaux d'une lentille convergente pour la construction d'une image.

La figure 3.3 montre la même situation avec une lentille divergente. Sur cet exemple, l'image est virtuelle.

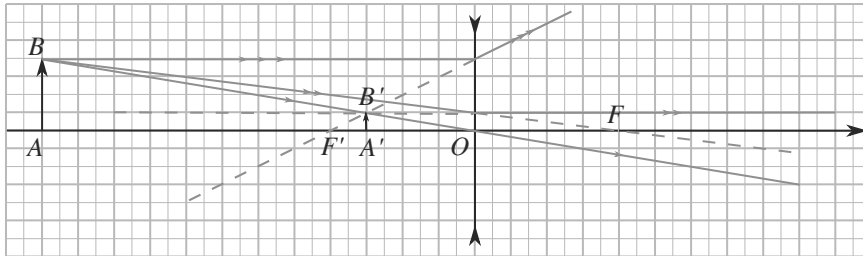


Figure 3.3 Les trois rayons fondamentaux d'une lentille divergente pour la construction d'une image.

En toute rigueur, deux rayons suffisent pour construire B' . Ici les trois rayons fondamentaux sont utilisés pour illustrer la méthode.



Une lentille convergente pouvant faire d'un objet réel une image réelle, elle peut servir de **lentille de projection**, par exemple dans un vidéoprojecteur. Les conditions d'utilisation sont étudiées dans l'exercice 20 page 41.

Méthode 2 construire un rayon réfracté par une lentille mince

Pour construire un rayon réfracté à partir d'un rayon incident, l'astuce est d'ajouter un objet fictif **hors de l'axe** sur le rayon incident, de sorte que le rayon paraisse avoir été émis par cet objet. Ensuite, la construction de son image permet de sélectionner le rayon réfracté cherché.

Les deux choix les plus simples sont, avec les notations usuelles :

- L'objet B est pris comme foyer objet secondaire. Donc tous les rayons issus de lui émergent, après réfraction, parallèles entre eux (et en particulier à BO).
- L'objet B est pris à l'infini hors de l'axe optique, donc son image est un foyer image secondaire. Le rayon réfracté cherché passe par ce foyer.

Exemple d'application

La figure 3.4 montre la construction pour une lentille convergente. Le rayon en pointillés est le rayon fondamental associé à O . Les deux rayons sont traités comme issus d'un objet B à l'infini hors de l'axe, dont l'image est donc dans le plan focal image. Le réfracté du rayon étudié s'en déduit.

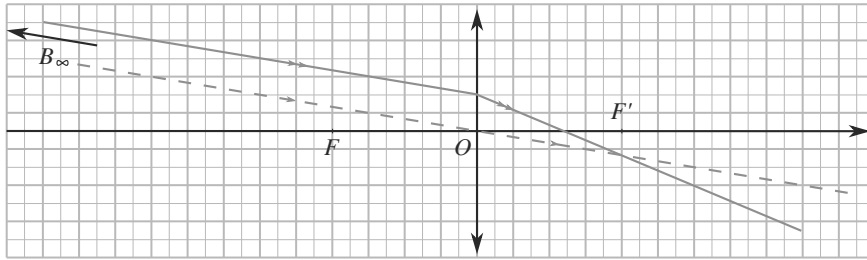


Figure 3.4 Construction d'un rayon réfracté en prenant un objet B à l'infini hors de l'axe, pour une lentille convergente.

La figure 3.5 montre la même situation pour une lentille divergente.

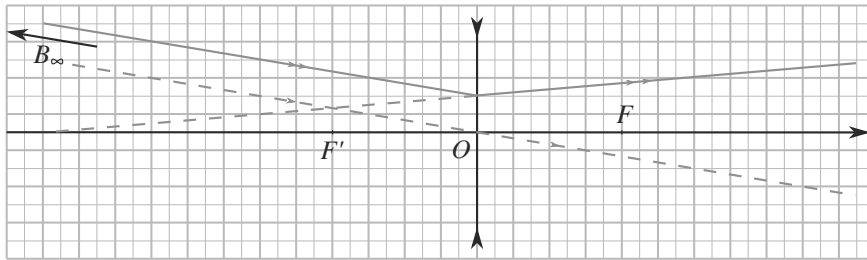


Figure 3.5 Construction d'un rayon réfracté en prenant un objet B à l'infini hors de l'axe, pour une lentille divergente.



Ces deux choix sont les plus simples parce qu'un seul rayon suffit à placer l'image, au lieu de deux dans un cas quelconque.

3.4 Association de lentilles minces accolées

Un doublet de lentilles minces **accolées** est un ensemble de deux lentilles L_1 (vergence V_1) et L_2 (vergence V_2) dont les centres sont pratiquement confondus. Alors les vergences s'ajoutent :

La loi d'association de deux lentilles minces accolées est :

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A' : V = V_1 + V_2$$

Ne généralisez surtout pas ce résultat à un doublet de lentilles non accolées !

3.5 Focométrie élémentaire



Voir vidéo 5 :
Focométrie

Si aucune méthode n'est au programme, de nombreuses méthodes sont proposées dans le cadre des T.P. d'optique : autocollimation, méthodes de Badal, de Silbermann, de Bessel...

Elles seront illustrées en exercice et font aussi l'objet d'une vidéo.

Synthèse

Savoirs

- Placer les points O , F et F' , schématiser les deux types de lentilles minces
- Propriétés des rayons passant par O , F et F'
- Formules de conjugaison et de grandissement
- Sommation des vergences pour deux lentilles accolées

Savoir-faire

- Utiliser les trois rayons particuliers pour faire un tracé d'image ou de rayon émergent
- Établir les relations de conjugaison et de grandissement à partir d'un tracé de rayons
- Reconnaître physiquement les lentilles divergentes et convergentes

Mots-clés

- Lentille convergente,
- lentille divergente,
- foyers,
- centre optique,
- relation de conjugaison,
- grandissement.

Tests de connaissances

- 3.1 Les foyers sont symétriques par rapport à la lentille.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 3.2 F' est dans l'espace image.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 3.3 O est son propre conjugué.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 3.4 F et F' sont conjugués.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 3.5 Une lentille convergente ne forme que des images réelles.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 3.6 Une lentille divergente ne donne que des images virtuelles.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 3.7 Les yeux d'un myope (portant des verres divergents) paraissent plus petits au travers de ses lunettes.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 3.8 Un faisceau lumineux parallèle émerge d'une lentille en convergeant.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 3.9 Sur un banc d'optique, on peut lire les distances utilisées dans les formules de Descartes mais pas dans celles de Newton.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

Vous trouverez d'autres exercices portant sur les lentilles minces dans le chapitre 5.

3.10 Méthode focométrique d'autocollimation

Vous disposez sur un banc d'optique une lentille convergente suivie d'un miroir plan. Un objet AB est placé au foyer objet F de la lentille.

- Déterminez sans calcul la position de l'image puis le grandissement. Cela dépend-il de la position du miroir derrière la lentille ?
- Trouvez une application à cette expérience.

3.11 Théorème des vergences (formule des opticiens) (D'après CCP)

Pour déterminer la distance focale d'une lentille mince divergente (L_1), de centre O_1 , on accole celle-ci à une lentille mince convergente (L_0) de vergence $V_0 = 8 \delta$ et on utilise ce système mince $[(L_0) + (L_1)]$ pour obtenir d'un objet réel AB , une image réelle $A'B'$, renversée, de même dimension que l'objet. La distance objet-image mesurée est égale à 1 m.

- Déterminer la vergence V du système de lentilles accolées.
- En déduire la vergence V_1 et la distance focale f'_1 de la lentille (L_1).
- Les centres optiques des lentilles dites « accolées » sont en fait distants de $e = 0,5$ cm. Évaluer à nouveau V_1 et f'_1 à partir de cette formule de Gullstrand qui prend en compte la distance entre les centres optiques : $V = V_0 + V_1 - eV_0 \cdot V_1$.

3.12 Association de deux lentilles (D'après ENAC)

Une lentille convergente (L) de distance focale $f' = 20$ cm est placée à 20 cm devant un écran. Un objet est placé 30 cm en avant de la lentille. Entre la lentille et l'écran on place une deuxième lentille (L_2), la distance entre les deux lentilles étant 10 cm de manière à obtenir une image définitive nette sur l'écran.

Déterminer la nature et la distance focale image f'_2 de la lentille interposée.

3.13 Étude focométrique

Disposant d'un banc d'optique, d'un objet, d'une lentille mince et d'un écran, nous effectuons une série de mesures pour déterminer la distance focale f' de la lentille.

L'objet est fixé en un point A du banc d'optique sur la graduation $d = 15$ cm. La lentille est alors placée en O sur une graduation l et l'écran est placé sur la graduation l' pour visualiser l'image. Le tableau ci-dessous rassemble les six points de mesure.

l (cm)	42,0	44,6	48,4
l' (cm)	129,0	112,4	102,1
l (cm)	64,2	74,5	97,6
l' (cm)	107,6	106,0	125,0

Déterminez la valeur expérimentale de f' .

3.14 Réalisation d'un objet

(D'après DEUG.)

Soit un objet AB avec A sur l'axe d'une lentille L de focale f' , tel que $0 < \overline{OA} < f'$.

1. Quelle est la nature (réelle ou virtuelle) de cet objet ?
2. Réalisez une construction géométrique de l'image $A'B'$ de AB par L et vérifiez le résultat par relation de conjugaison. Application numérique avec $f' = 10$ cm et $\overline{OA} = 5$ cm. Quelle est la nature de cette image ?
3. Proposez, en complétant le schéma précédent, un moyen expérimental de réaliser cet objet AB .

3.15 Questions simples sur les lentilles minces

(D'après DEUG.)

1. Reportez-vous à la figure 3.6. La lentille L_2 est divergente de focale f'_2 et de centre O_2 .

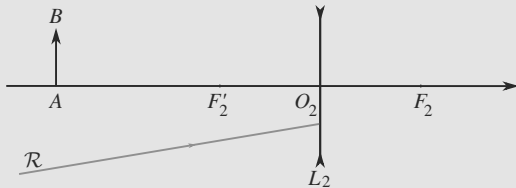


Figure 3.6 Questions simples sur les lentilles minces.

- a) Construisez l'image $A'B'$ de AB . Quelle est la nature de l'image $A'B'$?
 - b) Construisez le réfracté de R .
 - c) Applications numériques : calculez $\overline{O_2A'}$ et le grandissement associé avec $f'_2 = -5$ cm et $\overline{O_2A} = -7,5$ cm.
2. Une lentille convergente L_1 (focale f'_1 , centre O_1) sert à faire l'image d'un objet AB réel sur un écran E . N'étant pas satisfait de l'image obtenue, nous intercalons la lentille L_2 entre L_1 et E , sans bouger ni L_1 ni l'objet AB . Alors, nous devons reculer E d'une distance l pour observer une image nette. Cette nouvelle image est deux fois plus grande.
 - a) Proposez un tracé qui illustre le rôle de L_2 .
 - b) Calculez l en fonction de f'_2 . Application numérique.

3.16 Comparaison de lentilles convergentes et divergentes

(D'après ICNA.)

Considérons une lentille L de focale f' et de centre O , et un objet AB . Posons $p = \overline{OA}$ et $p' = \overline{OA'}$.

L'objet est placé à une distance $p = -|f'|$ de la lentille avec $|f'| = 15$ cm. Suivant que la lentille est convergente ou divergente, lesquelles des affirmations suivantes sont vraies ou fausses ?

1. L'image est à une distance $p' = f'$.
2. L'image n'est visible qu'à une distance de la lentille supposée grande devant les dimensions du système.
3. L'image est réelle et renversée.
4. L'image est virtuelle et droite.

3.17 Focométrie par viseur à frontale fixe

(D'après Concours communs polytechniques MP.)

Un viseur à frontale fixe est un système optique qui ne sait faire une image nette que d'un objet situé à une distance particulière, notée d_H . Cette distance est mesurée à partir d'un point de l'appareil dont la position précise n'est pas indiquée. Il est utilisé pour déterminer la focale f' d'une lentille : d'abord, la lentille est retirée, nous voyons directement l'objet AB jusqu'à en voir une image nette dans le viseur et notons la position correspondante du viseur. Ensuite, la lentille est remise en place, à une distance x de AB , et nous voyons l'image $A'B'$ de AB par la lentille. Pour ce faire, nous devons reculer le viseur d'une distance D .

1. Exprimez f' en fonction de x et D .
2. Application numérique avec $x = 30$ cm et $D = 16,5$ cm. Argumentez sur l'intérêt de cette méthode.

3.18 Méthode focométrique de Badal

(D'après Concours communs polytechniques MP.)

La méthode de Badal permet la détermination expérimentale de la focale d'une lentille mince divergente. Elle se déroule en deux étapes :

- Première étape : un objet A est placé au foyer principal objet d'une lentille convergente L_1 et une deuxième lentille convergente L_0 (focale connue f'_0) est placée après L_1 à une distance supérieure à f'_0 . L'image finale A' est observée sur un écran E .
- Deuxième étape : la lentille divergente L (focale inconnue f') est placée dans le plan focal objet de L_0 . Pour obtenir une nouvelle image nette A' , il faut éloigner l'écran E d'une distance D .

1. Faites un schéma illustrant les deux étapes.
2. Exprimez f'_2 en fonction f'_0 et D en exploitant la relation de conjugaison de Newton pour L_0 .
3. Application numérique : calculez f'_2 pour $f'_0 = 12,5$ cm et $D = 6,5$ cm.

Exercices d'approfondissement

3.19 Étude simplifiée d'un objectif de photocopieur (D'après Vêto.)

Les procédés actuels de reprographie nécessitent la formation de l'image du document sur une surface photosensible par l'intermédiaire d'un objectif de reproduction. Nous désirons reproduire un document de format A4 soit au même format A4, soit au format A3 (double du A4 en surface), soit au format A5 (moitié du A4 en surface). Les différents tirages sont réalisés à l'aide d'un objectif en modifiant la position relative des lentilles à l'intérieur du système.

La distance entre le document et le récepteur photosensible est de $d_1 = 384$ mm. Une première lentille divergente L_1 , de distance focale $f'_1 = -90$ mm, est placée à $d_2 = 180$ mm du récepteur (figure 3.7).

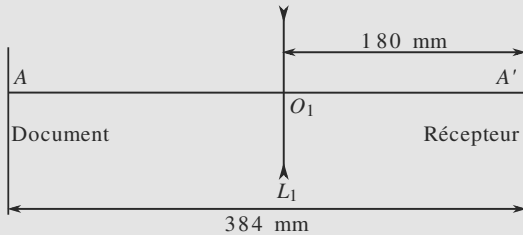


Figure 3.7 Photocopieur, première situation.

1. La lentille L_1 peut-elle donner une image du document sur le récepteur ? Justifiez par la relation de conjugaison.
2. Ajoutons alors une lentille mince L' devant L_1 , à $d_3 = 180$ mm du document (figure 3.8).

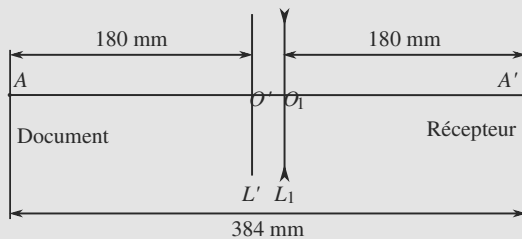


Figure 3.8 Photocopieur, deuxième situation.

- a) La lentille L' peut-elle être divergente ? Justifiez par les relations de conjugaison.
- b) Calculez la distance focale f' de cette deuxième lentille pour obtenir une image nette du document sur le récepteur. Application numérique.
- c) Notons γ le grandissement du système optique constitué des deux lentilles, γ_1 le grandissement de la lentille L_1 et γ' celui de la lentille L' .

- i) Exprimez γ en fonction de γ_1 et γ' puis calculez-le.
- ii) Quel type de tirage permettra cet objectif ? A4 en A3 ou A4 en A5 ?

3. En fait, la lentille L' est constituée de deux lentilles L_2 et L_3 accolées, L_2 étant identique à L_1 . Calculez la distance focale f'_3 de L_3 . Quelle est la nature de cette lentille mince ?
4. Déplaçons L_3 jusqu'à la coller à L_1 .
 - a) Montrez que l'image du document reste sur le récepteur (indication : retour inverse de la lumière).
 - b) Calculez le nouveau grandissement γ_2 de ce système optique à trois lentilles. Déduisez-en le type de tirage obtenu.

3.20 Situation à distance objet-image imposée : méthode de Bessel

(D'après Concours communs polytechniques.)

Imaginons une situation où la distance objet-image D est imposée, par exemple parce que l'écran est installé sur un mur et l'objet se trouve dans un projecteur qui ne peut pas être déplacé. Une lentille de focale f' est utilisée pour faire l'image sur l'écran.

Soit O le centre optique de la lentille. Posons $p = \overline{OA}$ et $p' = \overline{OA'}$.

1. La lentille doit-elle être convergente ou divergente ?
2. Discutez la possibilité de faire une image nette et le nombre de positions possibles pour la lentille. En particulier, mettez en évidence la valeur minimale de D , notée D_{\min} , pour qu'il existe au moins une position possible. Vous exprimerez D_{\min} en fonction de f' .
3. Plaçons-nous dans le cas où il y a deux positions possibles, repérées par les deux valeurs de p , notées p_1 et p_2 .
 - a) Calculez ces positions. Vous exprimerez p_1 et p_2 en fonction de D et f' .
 - b) Calculez les grandissements γ_1 et γ_2 associées à chacune de ces positions, en fonction de D et f' .
 - c) Soit d la distance entre les deux positions de la lentille. Montrez que cela peut constituer une méthode de mesure de la focale (méthode de Bessel). Pour cela exprimez f' en fonction de D et d .
 - d) Application numérique : étudiez la position de fort grandissement pour une distance lentille-écran de 5 m, $f' = 5$ cm et un objet de 1 cm. Calculez le grandissement de l'autre position.

3.1

Vrai, si les deux milieux de part et d'autres ont même indice optique.

3.2

Faux pas pour une lentille divergente.

3.3

Vrai, par conjugaison ou en considérant les rayons qui y passent (non déviés).

3.4

Faux, ils sont conjugués à des points à l'infini (à gauche ou à droite) sur l'axe.

3.5

Faux pas pour un objet entre F et O .

3.6

Faux pas pour un objet entre O et F .

3.7

Vrai, les lentilles divergentes donnent des images rétrécies des objets proches.

3.8

Faux pas pour les lentilles divergentes.

3.9

Vrai, O est un point physiquement repérable sur un banc mais pas les foyers.

3.10 Méthode focométrique d'autocollimation

Méthode mise en jeu : n°1.

Vous devez reconnaître ici la méthode focométrique d'autocollimation (il n'est pas si rare que le titre même d'un énoncé donne une indication !)

1. L'équation stigmatique du système constitué de la lentille L et du miroir M est :

$$A \xrightarrow{L} A_1 \xrightarrow{M} A_2 \xrightarrow{L} A'$$

Sachant que A est en F , son image A_1 est à l'infini.

Un miroir plan fait d'un objet à l'infini une image à l'infini, donc A_2 est à l'infini.

La lentille fait d'un objet à l'infini une image sur son foyer image. Comme les rayons, durant cette troisième phase, arrivent par la droite, c'est le foyer F qui joue le rôle de foyer image.

Donc l'équation stigmatique peut se réécrire :

$$A = F \xrightarrow{L} A_{1\infty} \xrightarrow{M} A_{2\infty} \xrightarrow{L} A' = F$$

L'image A' est confondue avec l'objet A sans avoir fait aucune hypothèse sur la position précise du miroir derrière la lentille.

La construction de l'image peut donc être faite pour toute position du miroir. La figure 3.9 est faite avec le miroir en F' .

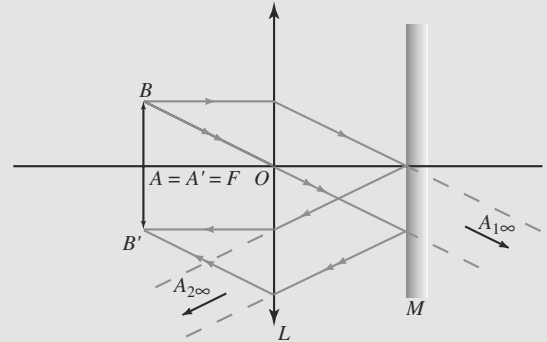


Figure 3.9 Principe de l'autocollimation.

La figure montre en outre que le grandissement vaut -1 : l'image est de même taille que l'objet, mais renversée.

2. Si la focale de la lentille n'est pas connue, il suffit de chercher la distance objet-lentille qui conduit à une image dans le plan de l'objet (visualisable sur la monture de la lentille). Quand cela est réalisé, cette distance est directement égale à la focale.



Cette méthode, en l'état, n'est applicable qu'aux lentilles convergentes.

3.11 Théorème des vergences (formule des opticiens)

Il s'agit d'utiliser les relations vues en cours puis d'utiliser une relation plus générale, donnée dans l'exercice, pour obtenir la vergence d'une lentille divergente de focale inconnue.

1. On utilise la relation de conjugaison de l'ensemble ainsi que la relation de grandissement (O étant le centre commun aux deux lentilles) :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = V \text{ et } \gamma = \frac{OA'}{OA}$$

Ici $\gamma = -1$ (même dimension pour l'objet et l'image, celle-ci étant inversée). L'objet étant réel, $\overline{OA} = -0,5 \text{ m}$ et donc $\overline{OA'} = 0,5 \text{ m}$. On en déduit donc que $V = 4 \text{ m}^{-1} = 4 \delta$.

2. Comme $V = V_0 + V_1$, on en déduit que $V = -4 \text{ m}^{-1} = -4 \delta$ et $f_1 = 25,0 \text{ cm}$.

3. En tenant compte de l'éloignement des centres optiques et en utilisant la formule de Gullstrand donnée ici, on obtient : $V - V_0 = V_1 (1 - eV_0)$ et donc :

$$V_1 = \frac{V - V_0}{1 - eV_0}.$$

Numériquement, on trouve alors $-4,17 \delta$ et $f'_1 = 24,0 \text{ cm}$.

On voit donc que le résultat du 2. donne le bon ordre de grandeur mais qu'il est entaché d'une erreur importante (4 %) pour un éloignement faible (5 mm). On constate par ailleurs que pour $e = 0$, on retrouve bien le résultat du 2.

3.12 Association de deux lentilles

Il convient d'utiliser les relations de conjugaison successives comme dans le chapitre deux (méthode n° 2). En tenant compte des positions de l'objet et de l'image finale, le reste ne doit pas poser de problème.

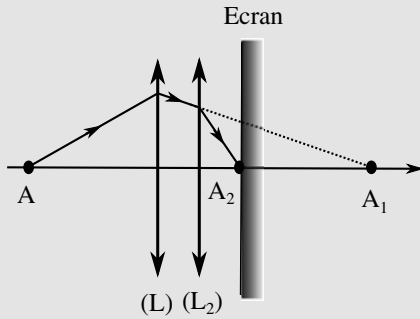


Figure 3.10 images successives

Les deux relations de conjugaison avec origine au centre donnent :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_1} \text{ avec } \overline{OA} = -30 \text{ cm et } \frac{1}{\overline{O_2A_2}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f'_2} \text{ avec } \overline{O_2A_2} = 10 \text{ cm.}$$

La première relation nous permet d'obtenir $\overline{OA_1} = \frac{\overline{OA}f'_1}{\overline{OA} + f'_1} = 60 \text{ cm}$ et donc $\overline{O_2A_1} = 50 \text{ cm}$.

La deuxième relation donne alors $f'_2 = \frac{\overline{O_2A_1} \cdot \overline{O_2A_2}}{\overline{O_2A_1} - \overline{O_2A_2}} = 12,5 \text{ cm}$.

La lentille (L₂) est donc une lentille convergente ($f'_2 > 0$) de focale 12,5 cm.

3.13 Étude focométrique

La seule difficulté de cet exercice réside dans la correspondance entre ces valeurs numériques et les grandeurs utilisées dans la relation de conjugaison.

Repensez à ce qu'est un banc d'optique. Ici l'objet est nécessairement réel et son image aussi. Attention, donc, aux signes.

L'objet est réel donc $\overline{OA} = d - l < 0$. De même, l'image est réelle donc $\overline{OA'} = l' - l > 0$. Reconstruisons donc un tableau de valeurs :

$\overline{OA} \text{ (cm)}$	-27,0	-29,6	-33,4
$\overline{OA'} \text{ (cm)}$	87,0	67,8	53,7

$\overline{OA} \text{ (cm)}$	-48,2	-59,5	-82,6
$\overline{OA'} \text{ (cm)}$	43,4	31,5	27,4

Posons $x = 1/\overline{OA}$ et $y = 1/\overline{OA'}$. La relation de conjugaison avec origine au centre s'écrit alors :

$$y - x = \frac{1}{f'} \Rightarrow y = x + \frac{1}{f'}$$

L'ordonnée à l'origine de cette droite est donc l'inverse de la focale cherchée. À la calculatrice, une régression linéaire de la forme $y = ax + b$ conduit à :

$$a = 1,004$$

$$b = 0,0486$$

Le coefficient de confiance valant 0,999998 et a étant proche de 1, la forme de la loi de Descartes est très bien vérifiée. Enfin, $f' = 1/b = 20,6 \text{ cm}$.

3.14 Réalisation d'un objet

Méthode mise en jeu : n°1.

Vous devez remarquer que les trois premières questions sont une application très immédiate du cours. Si vous hésitez à cet endroit, assurez-vous que vous connaissez le vocabulaire de l'optique.

1. L'objet n'est pas dans l'espace objet de la lentille, donc il est virtuel.
2. Voir la partie droite de la figure 3.11. La relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

donne directement $\overline{OA'} = 3,3 \text{ cm}$ qui est positif et correspond donc bien à une image réelle.

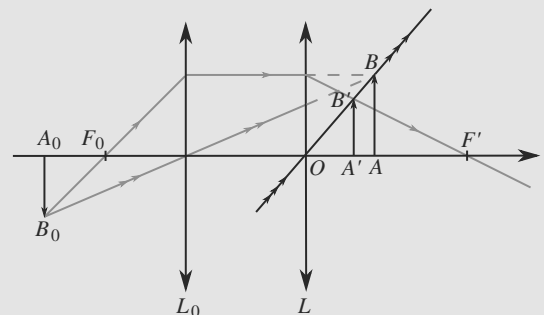


Figure 3.11 Réalisation d'un objet virtuel.

3. Il faut que AB soit l'image d'un objet A_0B_0 par un autre système placé avant la lentille L . Il peut s'agir d'une lentille convergente L_0 avec l'équation stigmatique :

$$A_0B_0 \xrightarrow{L_0} AB \xrightarrow{L} A'B'$$

de sorte que l'image AB par L_0 , qui est l'objet pour L , se trouve après L . Voir figure 3.11.

3.15 Questions simples sur les lentilles minces

Méthodes mises en jeu : n°1 et 2.

Cet exercice compile des applications directes des méthodes et formules de cours. Vous pouvez le refaire plusieurs fois, en variant les positions de l'objet ou du rayon incident, pour des lentilles convergentes ou divergentes, etc.

1. a) La figure 3.12 montre la construction de l'image $A'B'$ à l'aide des rayons fondamentaux associés à O_2 et F'_2 . L'image est donc virtuelle, droite et réduite.

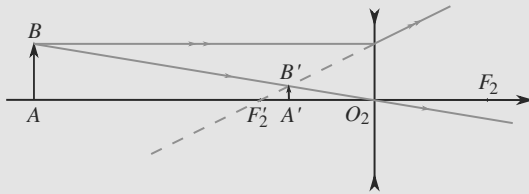


Figure 3.12 Construction d'une image par une lentille divergente.

- b) La figure 3.13 montre la construction du rayon réfracté à l'aide du rayon fondamental associé à O_2 .

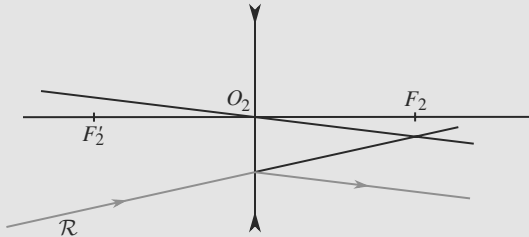


Figure 3.13 Construction d'un rayon réfracté par une lentille divergente.

- c) La relation de conjugaison de Descartes donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{O_2A'} - \frac{1}{O_2A} &= \frac{1}{f'_2} \\ \Rightarrow \frac{O_2A'}{O_2A} &= \frac{f'_2 O_2A}{f'_2 + O_2A} = -3 \text{ cm} \end{aligned}$$

ce qui justifie que l'image est virtuelle. Le grandissement calculé avec origine au centre s'écrit :

$$\gamma = \frac{O_2A'}{O_2A} = 0,4$$

L'image est donc droite ($\gamma > 0$) et réduite ($|\gamma| < 1$).

2. a) Voir figure 3.14 avec $AB \xrightarrow{L_1} A_1B_1 \xrightarrow{L_2} A'B'$. L'image intermédiaire A_1B_1 est nécessairement après L_2 , puisque cette lentille a été placée entre L_1 et E . La lentille L_2 recule et agrandit l'image.

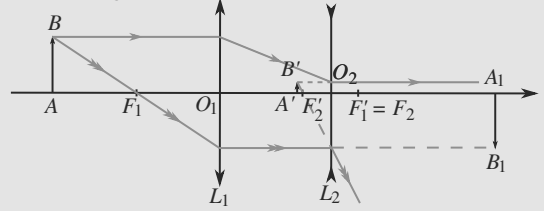


Figure 3.14 Rôle de la lentille divergente.

- b) La position de AB n'étant pas donnée, ni la valeur de f'_1 , étudions seulement la conjugaison de A_1 et A' avec les relations de Newton.

$$\begin{cases} \overline{F_2A_1} \overline{F'_1A'} = -f'^2_2 \\ \gamma = -\frac{\overline{F'_2A'}}{f'_2} = 2 \end{cases}$$

Donc $\overline{F'_2A'} = -2f'_2$ et $\overline{F_2A_1} = f'_2/2$.

En outre :

$$\begin{aligned} l = \overline{A_1A'} &= \overline{A_1F_2} + \overline{F_2F'_2} + \overline{F'_2A'} \\ &= -f'_2/2 - 2f'_2 + 2f'_2 \end{aligned}$$

D'où $l = -f'_2/2 = 2,5 \text{ cm}$.

3.16 Comparaison de lentilles convergentes et divergentes

Méthode mise en jeu : n°1.

Faites des schémas ! Si un schéma fournit un contre-exemple, alors vous savez immédiatement que la proposition est fausse. Mais dans tous les cas, elle peut vous guider. Ensuite, c'est l'exploitation des relations de conjugaison qui vous permettra de trancher.

Pour la lentille convergente, l'objet est au foyer objet donc son image est à l'infini. En considérant le rayon issu de B passant par O sur la figure 3.15, l'image apparaît comme renversée.

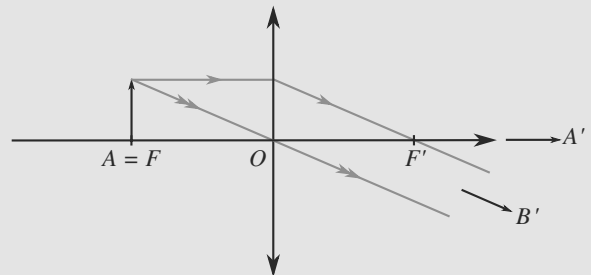


Figure 3.15 Objet en F pour une lentille convergente.

1. Faux.
2. Vrai.
3. Vrai.
4. Faux.

Pour la lentille divergente, figure 3.16, la relation de conjugaison avec origine au centre fournit $p' = f'/2$ donc :

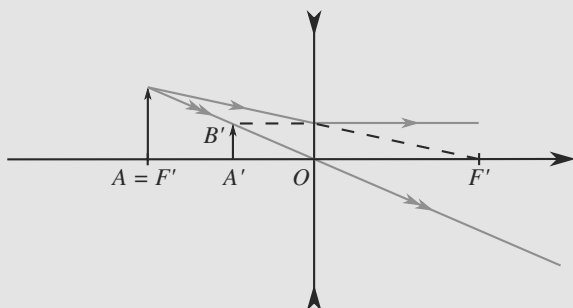


Figure 3.16 Objet en F' pour une lentille divergente.

1. Faux.
2. Faux.
3. Faux.
4. Vrai.

3.17 Focométrie par viseur à frontale fixe

Méthode mise en jeu : n°1.

Cet exercice est bien plus simple qu'il en a l'air. Il faut bien comprendre le principe du viseur, principe que vous avez vu, ou allez voir, en travaux pratiques : quand vous obtenez une image nette de l'objet visé, c'est que l'objet se trouve à une distance précise du viseur. La valeur numérique de d_{ff} n'est pas utile car nous allons soustraire deux positions du viseur, donc d_{ff} va se simplifier dans l'opération.

1. Les deux situations sont illustrées figure 3.17.

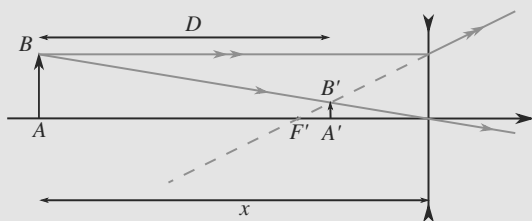


Figure 3.17 Viseur à frontale fixe.

Dans la première étape, la distance viseur-objet est d_{ff} . Dans la deuxième, la distance viseur-image est également d_{ff} . Donc la différence entre les deux positions (ici D) est directement égale à la différence des positions de l'objet de l'image.

Soit O le centre de la lentille, A l'objet et A' son image. D'après l'énoncé, $\overline{OA} = -x$ et $\overline{AA'} = D$, donc

$\overline{OA'} = D + \overline{OA} = D - x$. La relation de conjugaison de Descartes donne donc :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{D-x} - \frac{1}{-x} = \frac{1}{f'}$$

$$\Rightarrow f' = \frac{(D-x)x}{D}$$

2. Numériquement, $f' \approx -24,5$ cm. La lentille est donc divergente.

Cette méthode permet donc de mesurer des focales de lentilles divergentes. En effet, il est impossible d'observer directement une image virtuelle, donc située en arrière de la lentille. Le viseur est capable de viser cette image virtuelle, pourvu que la distance d_{ff} soit assez grande : si l'image virtuelle est trop loin en arrière de la lentille, le viseur buttera sur la lentille avant de faire une image nette pour l'observateur.

3.18 Méthode focométrique de Badal

Méthode mise en jeu : n°1.

Cet exercice ne présente pas d'autre difficulté que celle de la rigueur avec les signes. Contrôlez à chaque ligne de calcul vos distances algébriques en gardant un œil sur la figure de la première question.

1. Voir figure 3.18. Les éléments en pointillés correspondent à la deuxième étape.

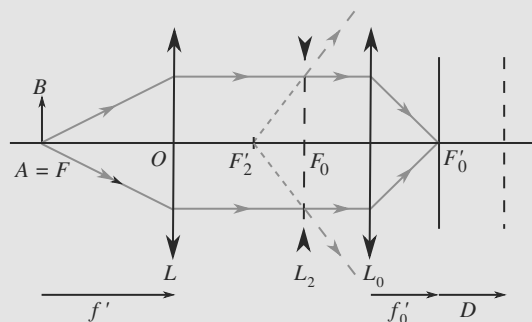


Figure 3.18 Méthode focométrique de Badal.

2. À la deuxième étape, l'équation stigmatique s'écrit :

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L} A_0 \xrightarrow{L_0} A'$$

et la relation de conjugaison de Newton pour L_0 s'écrit $\overline{F_0 A_0} \overline{F'_0 A'} = -f_0'^2$.

Or, A_1 est un objet à l'infini sur l'axe optique pour la lentille divergente donc $A_0 = F'$. Donc $\overline{F_0 A_0} = \overline{F_0 F'}$. Comme F_0 est confondu avec le centre de L , il vient $\overline{F_0 A_0} = f'$.

En outre, d'après l'énoncé, $\overline{F'_0 A'} = D$. D'où finalement :

$$f' D = -f_0'^2 \Rightarrow f' = -\frac{f_0'^2}{D}$$

3. $f' \approx -24$ cm.

3.19 Étude simplifiée d'un objectif de photocopieur

Méthode mise en jeu : n°1.

L'exercice ne nécessite qu'une bonne maîtrise des définitions du cours, mais en montre une utilisation très astucieuse.

1. Prenons le cas d'un objet réel avec une lentille divergente. $\overline{OA} < 0$ et $f' < 0$. En outre :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} &= \frac{1}{f'} \\ \Rightarrow \frac{1}{\overline{OA'}} &= \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{f'} < 0 \end{aligned}$$

Donc $\overline{OA'} < 0$: l'image est nécessairement virtuelle. Donc la lentille L_1 ne peut pas faire l'image sur le récepteur.

2. a) Nous avons alors :

$$A \xrightarrow{L'} A_1 \xrightarrow{L_1} A' \quad (3.1)$$

Si L' est divergente, A_1 est, d'après la question précédente, une image virtuelle pour L' et donc un objet réel pour L_1 . Donc A' est une image virtuelle pour L_1 .

- b) La relation (3.1) se traduit par les relations de conjugaison :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{O'A_1}} - \frac{1}{\overline{O'A}} &= \frac{1}{f'} \\ \frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A_1}} &= \frac{1}{f'_1} \end{aligned}$$

qui se réécrivent avec les notations de l'énoncé :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{O'A_1}} - \frac{1}{-d_3} &= \frac{1}{f'} \\ \frac{1}{d_2} - \frac{1}{\overline{O_1A_1}} &= \frac{1}{f'_1} \end{aligned}$$

Avec $\overline{O'A_1} = \overline{O'O_1} + \overline{O_1A_1}$, l'élimination de l'image intermédiaire A_1 conduit à :

$$f' = d_3 \frac{(f'_1 - d_2)(d_1 - d_3) + d_2^2}{(f'_1 - d_2)d_1 + d_2^2} \approx 57,3 \text{ mm}$$

- c) i) Par définition du grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} \times \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}$$

Soit $\gamma = \gamma' \gamma_1 \approx -1,4$.

ii) Le grandissement est réalisé dans les deux directions du document : sa longueur et sa largeur sont chacune multipliée par 1,4. Donc sa surface est multipliée par $1,4^2 \approx 2$. Le photocopieur réalise donc un agrandissement A4 vers A3.

3. Lorsque deux lentilles sont accolées, leurs vergences s'ajoutent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{f'} &= \frac{1}{f'_2} + \frac{1}{f'_3} \\ \Rightarrow f'_3 &= \frac{f'_1 f'}{f'_1 - f'} \approx 35 \text{ mm} \end{aligned}$$

L_3 est donc une lentille convergente.

4. a) Comme L_2 et L_1 sont identiques, le déplacement de L_3 revient à intervertir L_1 et L' . Si l'on plaçait alors un objet en A' (sur le récepteur), il ferait une image en A (sur le document), par retour inverse de la lumière. Donc le véritable objet A fait encore son image sur le récepteur.
b) Du point de vue du système optique, objet et image ont été échangés, donc le grandissement est inversé :

$$\gamma_2 = \frac{1}{\gamma_1} \approx 0,7$$

Cette fois la surface est divisée par 2, donc le photocopieur réalise une réduction A4 vers A5.

3.20 Situation à distance objet-image imposée : méthode de Bessel

Méthode mise en jeu : n°1.

Cet exercice est à connaître absolument, car le calcul qu'il implique correspond à la méthode focométrique de Bessel. Il ne présente pas de difficulté particulière, si ce n'est calculatoire.

La figure 3.19 illustre la situation de l'expérience.

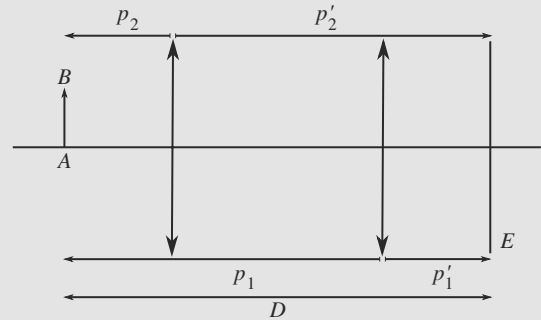


Figure 3.19 Méthode focométrique de Bessel.

- Il faut que la lentille donne d'un objet réel (le film) une image réelle (visible sur un écran). Elle doit donc être convergente et $f' > 0$.
- Soit A l'objet. Nous avons donc ici $p = \overline{OA} < 0$ et $p' = \overline{OA'} > 0$. La distance $D = -p + p'$ est imposée.

La relation de conjugaison avec origine au centre donne :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \quad (3.2)$$

$$\Rightarrow p^2 + Dp + Df' = 0 \quad (3.3)$$

Le discriminant de ce polynôme du second degré est $\Delta = D^2 - 4Df'$. Il n'admet donc de solutions réelles que si $D \geq 4f'$. Il y a donc trois cas :

- $D < 4f'$: impossible de faire une image nette.
- $D = 4f'$: une solution, donc une position possible pour la lentille.
- $D > 4f'$: deux solutions, donc deux positions possible pour la lentille.

Donc $D_{\min} = 4f'$.



Cela établit une propriété générale pour toute lentille de projection : la distance objet-image doit être supérieure à $4f'$ pour que la projection soit possible.

3. a) Les solutions de l'équation (3.3) sont :

$$p_1 = \frac{1}{2}(-D + \sqrt{D^2 - 4Df'})$$

$$p_2 = \frac{1}{2}(-D - \sqrt{D^2 - 4Df'})$$

Les positions des images correspondantes s'en déduisent par $p' = D + p$:

$$p'_1 = \frac{1}{2}(D + \sqrt{D^2 - 4Df'})$$

$$p'_2 = \frac{1}{2}(D - \sqrt{D^2 - 4Df'})$$

b) Les grandissements se déduisent de la relation $\gamma = p'/p$:

$$\gamma_1 = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4Df'}}{-D + \sqrt{D^2 - 4Df'}}$$

$$\gamma_2 = \frac{D - \sqrt{D^2 - 4Df'}}{-D - \sqrt{D^2 - 4Df'}}$$

D'où le résultat remarquable : $\gamma_1\gamma_2 = 1$.



Ce résultat est remarquable mais pas général. N'allez pas l'appliquer à d'autres systèmes !

c) Nous avons $d = p_1 - p_2$. Alors :

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2}(-D + \sqrt{D^2 - 4Df'}) \\ &\quad - \frac{1}{2}(-D - \sqrt{D^2 - 4Df'}) \\ &= \sqrt{D^2 - 4Df'} \end{aligned}$$

Il vient alors la formule de Bessel très connue :

$$f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}$$

d) Ici p est inconnue, $p' = 5$ m et $f' = 5$ cm. Les relations de conjugaison et du grandissement donnent immédiatement $p = -5,05$ cm et $\gamma = -99$. L'image fait donc -99 cm.

Dans l'autre position, le grandissement vaut 10^{-2} : l'image correspondante est minuscule et donc peu utile en pratique.

Plan

4.1	Généralités	48
4.2	Stigmatisme	51
4.3	Règles de construction	52
	Synthèse	54
	Tests et exercices	55
	Corrigés des exercices	57

Introduction

Le miroir sphérique est, comme son nom l'indique, un système optique qui repose sur la réflexion. Mais contrairement au miroir plan il n'est stigmatique que dans les conditions de Gauss.

Prérequis

- Conséquences du stigmatisme et de l'aplanétisme approchés pour un système optique
- Axe optique, système centré, foyers et plans focaux

Objectifs

- Apprendre à utiliser les quatre rayons fondamentaux pour obtenir une image ou tracer un rayon émergent
- Connaître les relations de conjugaison et le grandissement
- Positionner les foyer, centre et sommet sur l'axe d'un miroir (concave ou convexe)
- Reconnaître les miroirs concaves ou convexes à l'aspect ou à l'utilisation
- Savoir retrouver les formules de conjugaison et de grandissement par un tracé.

4.1 Généralités

4.1.1 Découpage de l'espace autour d'un miroir

À cause de la réflexion, le rayon lumineux émergent se trouve dans le même espace que le rayon incident : espace objet et espace image (figure 4.1). Objet réel et image réelle se trouvent donc dans le même demi-espace avant le miroir.

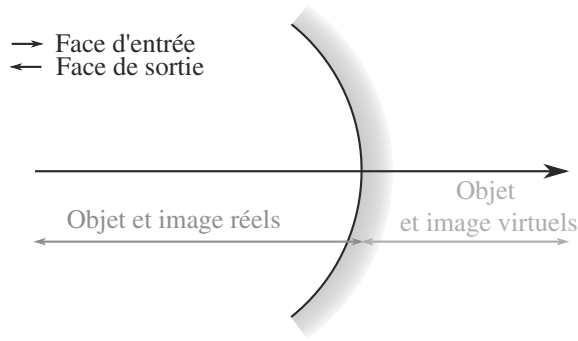


Figure 4.1 Limites des espaces objet réel, objet virtuel, image réelle, image virtuelle pour un miroir.

4.1.2 Classification



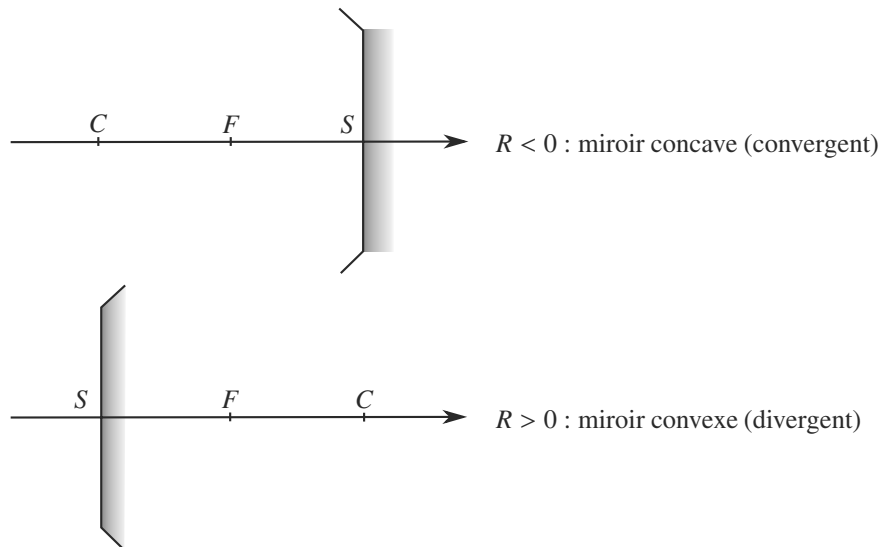
Un miroir plan est vu comme la limite d'un miroir sphérique de courbure infinie.

Un miroir sphérique admet un centre C et un sommet S , ainsi qu'un rayon de courbure **algébrique** $R = \overline{SC}$. Ses foyers objet et image sont confondus en un point F tel que :

Définition

Focale et rayon de courbe d'un miroir sphérique :

$$\overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2} = \frac{R}{2} = f = f'$$



4.1.3 Reconnaissance rapide

Pensez à ce que vous voyez en vous regardant dans une cuillère : si vous utilisez la face creuse (concave), vous voyez votre image retournée et grossie ; si vous utilisez le dos de la cuillère (convexe), votre image est droite et rétrécie.

Les photos 4.1a, b et c illustrent cela. Elles sont réalisées avec des miroirs concave à gauche, plan au centre et convexe à droite. Elles présentent la même position d'une salle de classe. Les miroirs sont orientés de manière à observer des objets lointains par la fenêtre. On constate outre l'inversion de la première image (le ciel est en bas), un champ observé de plus en plus large.



Photo 4.1 Images d'un objet à infini au travers de miroirs (a) concave, (b) plan, (c) convexe.

Les photos 4.2 et 4.3 illustrent la différence constatée avec des objets proches. Les images sont obtenues au travers d'un miroir plan (à gauche sur les deux photos) et le miroir testé (convergent puis divergent). L'objet utilisé est une règle.

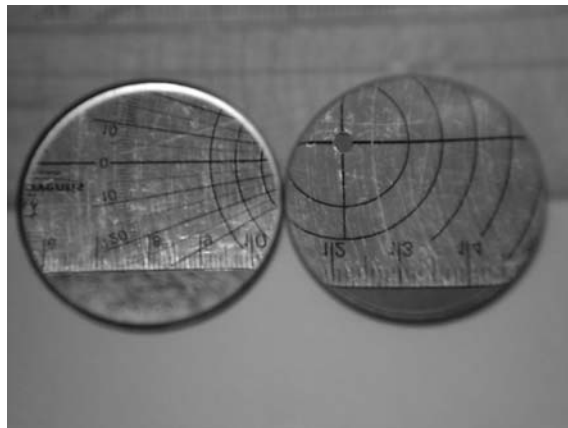


Photo 4.2 Image d'un objet proche par un miroir plan et un miroir concave.

À gauche sur la photo 4.2, la règle est non déformée, le grandissement est de +1. Au travers du miroir concave à droite, la règle paraît plus grande, la graduation plus large (le miroir est convergent).

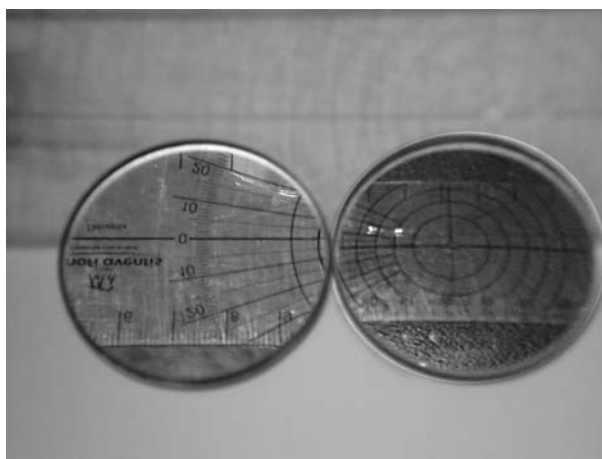


Photo 4.3 Image d'un objet proche par un miroir plan et un miroir convexe.

Sur la photo 4.3, l'image est la même à gauche. Au travers du miroir convexe à droite, la règle paraît plus petite, on en voit toute la largeur (le miroir est divergent).

Les miroirs concaves agrandissent les objets proches et les miroirs convexes les rétrécissent.



Voir vidéo 4 :
Reconnaître la nature
des lentilles et miroirs

4.2 Stigmatisme

L'équation stigmatique $A \xrightarrow{M} A'$ peut se résoudre de trois manières équivalentes :

- Formule de Descartes avec origine au sommet :

$$A \xrightarrow{M} A' : \quad \frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'} = \frac{1}{f'} \quad \text{et} \quad \gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

- Formule de Newton avec origine au foyer :

$$A \xrightarrow{M} A' : \quad \overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = ff' = f^2 \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{-f}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{-f'}$$

- Formule de Descartes avec origine au centre :

$$A \xrightarrow{M} A' : \quad \frac{1}{CA'} + \frac{1}{CA} = \frac{2}{CS} = -\frac{1}{f'} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

4.3 Règles de construction

Parmi tous les rayons lumineux possibles, retenons les **quatre rayons fondamentaux** :

- le rayon passant par C , qui revient sur lui-même,
- le rayon passant par S , qui repart symétriquement par rapport à l'axe optique,
- le rayon parallèle à l'axe optique, qui repart en passant par F ,
- le rayon passant par F , qui repart parallèle à l'axe optique.

Méthode 1 construire une image par un miroir sphérique

Il suffit de deux rayons pour construire l'image d'un objet ponctuel. Vous prendrez ces rayons parmi les quatre rayons fondamentaux. Le rayon passant par S étant moins facile à construire avec seulement une règle, il est plus rarement utilisé.

Un peu d'astuce permet parfois d'aller plus vite. Prenons par exemple un objet à l'infini hors de l'axe. Il suffit alors d'un rayon lumineux pour la placer : elle sera à l'intersection du rayon réfléchi et du plan focal.

Exemple d'application

La figure 4.2 montre la construction d'un objet AB réel pour un miroir concave à l'aide des quatre rayons fondamentaux. Deux suffisent, mais tous sont représentés pour illustrer la méthode.

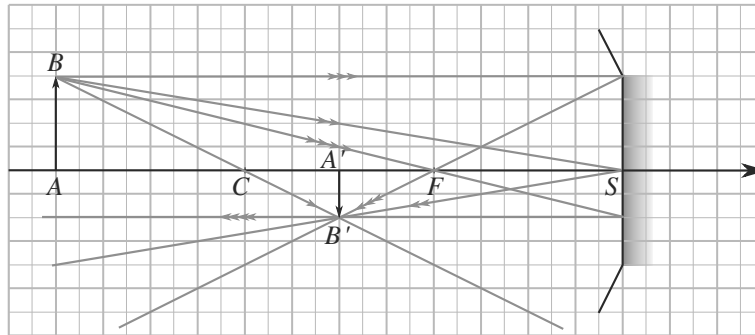


Figure 4.2 Les quatre rayons fondamentaux pour la construction des images par un miroir concave.

La figure 4.3 montre la même construction pour un miroir convexe.

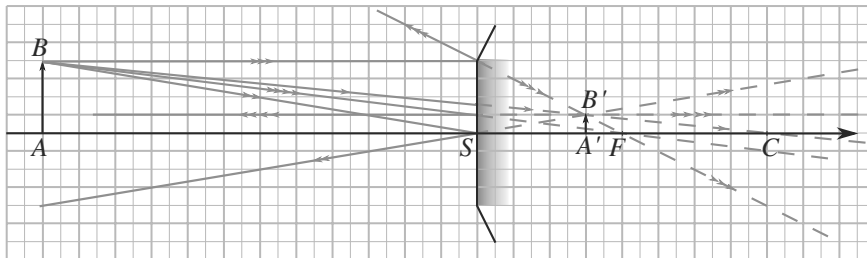


Figure 4.3 Les quatre rayons fondamentaux pour la construction des images par un miroir convexe.

Méthode 2 construire un rayon réfléchi par un miroir sphérique

Pour construire un rayon réfléchi à partir d'un rayon incident, l'astuce est d'ajouter un objet fictif **hors de l'axe** sur le rayon incident, de sorte que le rayon paraisse avoir été émis par cet objet. Ensuite, la construction de son image permet de sélectionner le rayon réfléchi cherché.

Les deux choix classiques sont, avec les notations usuelles :

- L'objet B est pris dans le plan focal, comme foyer objet secondaire. Donc tous les rayons issus de lui repartent, après réflexion, parallèles entre eux (et en particulier à BC). Le rayon réfléchi cherché est alors parallèle à BC .
- L'objet B est pris à l'infini, donc son image est un foyer image secondaire. Le rayon réfléchi cherché passe par ce foyer.

Exemple d'application

La figure 4.4 montre la construction pour un miroir concave à l'aide du rayon fondamental passant par le centre. Ce rayon arrive en passant par C , se réfléchit sous incidence normale et donc émerge en repassant par C . L'objet fictif dont il est issu est à l'infini hors de l'axe optique, donc fait son image dans le plan focal du miroir. La direction du rayon réfléchi cherché s'en déduit. Sur cet exemple, l'image est réelle.

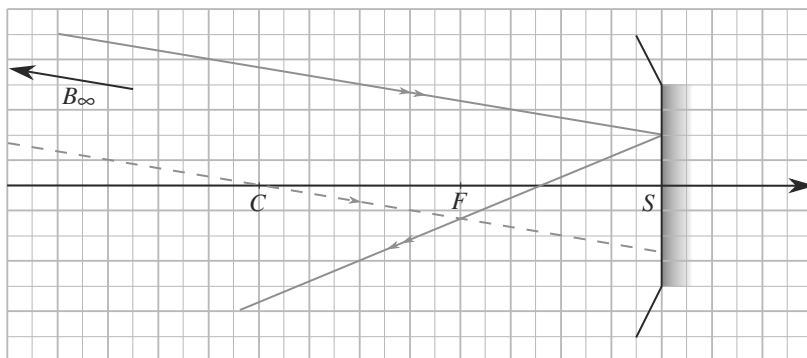


Figure 4.4 Construction d'un rayon réfléchi en prenant un objet B à l'infini hors de l'axe, pour un miroir concave.

La figure 4.5 montre la même construction pour un miroir convexe. Sur cet exemple, l'image est virtuelle.

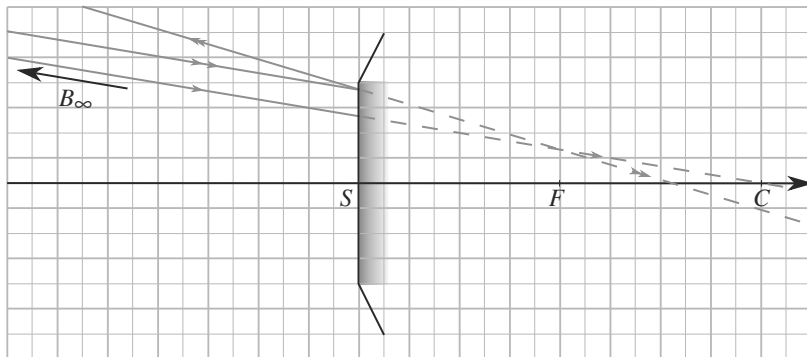


Figure 4.5 Construction d'un rayon réfléchi en prenant un objet B à l'infini hors de l'axe, pour un miroir convexe.

Synthèse

Savoirs

- Placer F (identique à F'), C et S sur l'axe d'un miroir sphérique
- Les deux schématisations des miroirs (concave ou convexe)
- Définition de la distance focale pour un miroir sphérique, relation avec le rayon de courbure
- Propriétés des rayons passants par F , S et C ou émergeant de F
- Relations de conjugaison et grandissement

Savoir-faire

- Utiliser les quatre rayons particuliers pour faire un tracé d'image ou de rayon émergeant
- Établir les relations de conjugaison et le grandissement à partir d'un tracé de rayons
- Reconnaître physiquement les miroirs concaves et convexes

Mots-clés

- Miroir concave / convergent,
- miroir convexe / divergent,
- centre,
- sommet,
- foyers,
- relations de conjugaison,
- grandissement.

Tests de connaissances

- 4.1 Un miroir convexe est divergent.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 4.2 Un miroir de dentiste (pour observer les dents) est concave.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 4.3 Un rétroviseur latéral d'automobile est un miroir concave.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 4.4 Un miroir de maquillage est un miroir divergent.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 4.5 Les foyers sont conjugués pour un miroir sphérique.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 4.6 S et C sont leurs propres conjugués.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 4.7 Il y a stigmatisme rigoureux pour S et C .
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 4.8 Un miroir concave ne donne que des images virtuelles.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 4.9 Un miroir convexe ne donne que des images virtuelles.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 4.10 Sur un banc d'optique, la formule de conjugaison qu'on peut vérifier est celle avec origine au centre.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 4.11 On ne peut juger la vitesse d'une voiture vue dans un rétroviseur d'automobile que si on l'observe dans le rétroviseur central.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

Vous trouverez d'autres exercices portant sur les miroirs sphériques dans le chapitre 5.

4.12 Rétroviseur extérieur (D'après ENAC)

Un rétroviseur, constitué par un miroir sphérique, permet de visualiser un objet réel placé à 16 m en réduisant l'image d'un facteur 5 et en la conservant droite. Déterminer la nature de ce miroir (concave ou convexe) et son rayon. L'image est-elle réelle ou virtuelle ?

4.13 Conjugaison par miroir concave (D'après ENAC)

Un miroir concave est caractérisé par un rayon $R = 8$ cm. Un objet réel AB est placé à 12 cm du sommet du miroir. Déterminer la position de l'image par rapport au sommet et sa nature réelle ou virtuelle. Est-elle droite ou inversée ?

4.14 Calculs simples sur les miroirs sphériques

1. Calculez le rayon de courbure R d'un miroir sphérique pour qu'il donne d'un objet réel placé à 10 m du sommet, une image droite et réduite d'un rapport 5. Faites la construction géométrique.
2. Précisez la nature de ce miroir.
3. Un objet est placé dans un plan transverse en C . Où se trouve son image ?

4. Calculez le grandissement du miroir dans ce dernier cas.

4.15 Association afocale (D'après ICNA.)

Associez une lentille L et un miroir M de sorte qu'un rayon incident se réfracte dans la lentille, puis se réfléchisse sur le miroir et revienne se réfracter dans la lentille. Déterminez les conditions pour que ce doublet soit afocal :

1. si la lentille est convergente,
2. si la lentille est divergente.

Vous distinguerez les cas des différents miroirs possibles.

4.16 Miroir plongé dans un milieu autre que l'air (D'après ENAC.)

Un miroir sphérique de centre C et de sommet S est plongé dans un milieu d'indice n .

1. Comment se placent ses foyers ?
2. Déterminez sa vergence en fonction de n et de son rayon de courbure.
3. Quelle est la vergence de ce miroir s'il donne d'un objet réel placé à 10 m du sommet une image droite et réduite d'un rapport 5 ? Déduisez-en alors la nature du miroir.
4. Quelle est l'image d'un objet placé en C ? Quel est son grandissement par le miroir ?



4.17 Image d'un objet étendu à l'infini par un miroir sphérique

Le diamètre du soleil est $d = 1,4 \cdot 10^6$ km et la distance terre soleil $D = 150 \cdot 10^6$ km.

1. Quel est le diamètre angulaire du soleil vu de la Terre ?

2. Faisons une image du Soleil à l'aide d'un miroir sphérique convergent de rayon de courbure $|R| = 1$ m.
 - a) À quelle position devons-nous placer l'écran pour que l'image du soleil soit nette ?
 - b) Quelle est la dimension de la tâche lumineuse obtenue en plaçant un écran dans un plan à 50 cm en avant du miroir ?

Exercices d'approfondissement



4.18 Rétroviseur

Un rétroviseur de voiture est assimilable à un miroir. Pour se rapprocher d'une situation de cours, il sera pris circulaire, de diamètre $d = 15$ cm. Le conducteur est modélisé par son œil, situé en un point O sur l'axe optique à une distance $\Delta = 1$ m du miroir.

1. Par trois schémas simples, justifiez que c'est en choisissant un miroir convexe que le conducteur dispose du plus large champ de vision. Dans la suite, vous travaillerez avec un miroir convexe de vergence $V = 2 \delta$.
2. Calculez la position de l'image A' d'un objet A situé à $D = 10$ m du miroir, ainsi que le grandissement associé. Commentaire ?
3. Calculez le rayon R du champ de vision à la distance D du rétroviseur. Interprétation ?



4.19 Association d'un miroir et d'une lentille

1. Considérons un système optique formé d'une lentille mince convergente accolée à un miroir plan.
 - a) Déterminez la relation de conjugaison avec origine au centre O (centre optique de la lentille) et le grandissement de ce système optique.
 - b) Quel est le miroir équivalent à ce système optique ? Où sont le sommet et le centre de ce miroir équivalent ?
2. Le système est maintenant formé d'une lentille mince convergente de centre O accolé à un miroir sphérique (sommet O).
 - a) Déterminez la relation de conjugaison avec origine en O et le grandissement de ce système optique.
 - b) Quel est le miroir équivalent à ce système optique ? Où sont le sommet et le centre de ce miroir équivalent ?

4.1

Vrai, il fait diverger les faisceaux parallèles (faire le tracé).

4.2

Vrai : il faut qu'il donne une image grandie des dents.

4.3

Faux, le champ de vision doit être élargi : il doit donc être divergent.

4.4

Faux, ce miroir doit donner une image agrandie d'un objet proche : il doit être convergent.

4.5

Faux, ils sont conjugués avec des points à l'infini (à gauche ou à droite) sur l'axe.

4.6

Vrai, on peut le voir sur les relations de conjugaison et sur les propriétés des rayons.

4.7

Vrai, on peut le voir grâce aux propriétés des rayons qui y passent.

4.8

Faux, elles sont virtuelles si A est entre F et S .

4.9

Faux, pas si A est entre S et F .

4.10

Faux, le seul point physiquement aisé à repérer pour un miroir est son sommet.

4.11

Vrai, les rétroviseurs latéraux sont des miroirs de champ (divergents), seul celui du centre est plan (image sans grandissement avançant à la vitesse relative entre les voitures).

4.12 Rétroviseur extérieur

Il s'agit dans cet exercice d'utiliser les relations de conjugaison et de grandissement avec origine au sommet du miroir.

On utilise la relation de conjugaison avec origine au sommet car on connaît \overline{SA} (-16 m car l'objet est réel et donc en amont du miroir) :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{R} \text{ et donc } \frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}} = -1 + \frac{2\overline{SA}}{R} = -\frac{1}{\gamma},$$

en utilisant la relation de conjugaison avec origine au sommet :

$$\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{1}{5}.$$

On en déduit :

$$\frac{2\overline{SA}}{R} = -\frac{1}{\gamma} + 1 = \frac{-1 + \gamma}{\gamma} \text{ et } R = \frac{2\gamma\overline{SA}}{\gamma - 1}.$$

Numériquement, on trouve $R = 8$ m : le miroir est donc convexe (miroir latéral de voiture).

L'image se trouve alors à $-3,2$ m du sommet (en utilisant γ par exemple) et est donc virtuelle (vue dans le rétroviseur, conformément à l'expérience qu'on peut faire au quotidien).

4.13

Conjugaison par miroir concave

C'est une application directe du cours ; on applique une relation de conjugaison et on interprète le résultat pour déterminer la nature de l'image obtenue.

On note tout d'abord que $R = -8$ cm parce que le miroir est concave. On utilise ensuite la relation de conjugaison avec origine au sommet car on connaît \overline{SA} (-12 cm car l'objet est réel et donc en amont du miroir) :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{R} \text{ et donc } \frac{1}{\overline{SA'}} = -\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{2}{R} = \frac{2\overline{SA} - R}{\overline{SA} \cdot R}.$$

On a donc $\overline{SA'} = \frac{\overline{SA} \cdot R}{2\overline{SA} - R}$ soit -6 cm : l'image est dans l'espace image et donc réelle.

La relation de grandissement avec origine au sommet donne $\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ soit $-4/3$ ici : l'image est inversée.

4.14

Calculs simples sur les miroirs sphériques

Méthodes mises en jeu : n°1 et 2.

Cet exercice vérifie simplement que vous savez jongler entre règles de construction et relations de conjugaison.

1. L'énoncé donne $\overline{SA} = -10$ m et $\gamma = 1/5$. Combinons la relation de conjugaison avec origine au sommet et le grandissement :

$$\begin{cases} \frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{R} \\ \gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \end{cases} \Rightarrow R = \frac{2\gamma\overline{SA}}{\gamma - 1} \approx 5 \text{ m}$$

La construction est représentée figure 4.6.

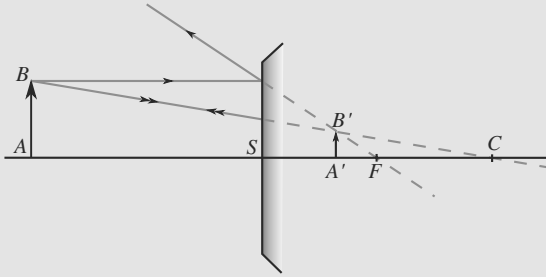


Figure 4.6 Construction d'une image de grandissement connu.

- Comme $R > 0$, il s'agit d'un miroir convexe ou divergent.
- C est son propre conjugué, donc il est confondu avec son image.
- D'après l'énoncé, $\overline{SA} = \overline{SA'}$ donc $\gamma = -1$.

4.15 Association afocale

Utilisez les conjugaisons successives objet-image pour trouver les points particuliers de l'axe qui, pour le miroir, répondent à la question. Ensuite, demandez-vous si ces points sont physiquement accessibles quand le miroir est placé derrière la lentille.

Un système afocal fait d'un objet à l'infini une image à l'infini. Prenons donc un objet A à l'infini. L'équation stigmatique est :

$$A \xrightarrow{L} A_1 \xrightarrow{M} A_2 \xrightarrow{L} A'$$

avec A et A' à l'infini.

- La première conjugaison implique que A_1 est au foyer image de L , noté F' .
- La troisième que A_2 est au foyer objet de la lentille à la deuxième traversée. Ce foyer objet, puisque la lumière a changé de sens de propagation, est F' .

Donc $A_1 = A_2 = F'$. Il doit donc s'agir d'un point du miroir qui est son propre conjugué, donc son sommet S ou son centre C .

- Si la lentille est convergente, F' est à droite de L . Il est toujours possible de placer le miroir en F' pour faire $S = F'$, que le miroir soit concave, convexe ou plan.
Par contre, placer C en F' n'est possible qu'avec le miroir concave, pour lequel C est à gauche de S . Il faut alors que le rayon de courbure du miroir R soit inférieur à f' , ce qui exclut le miroir plan.
- Si la lentille est divergente, F' est à gauche de L . Il n'y a alors pas de solution avec un miroir convexe (S et C sont à droite du miroir).

Avec un miroir concave, S ne peut pas être placé en F' car cela impliquerait que le miroir est avant la lentille. Donc la seule possibilité est $C = F'$, à condition que $f' > R$ (les deux grandeurs sont négatives).

4.16

Miroir plongé dans un milieu autre que l'air

Le fait qu'un indice optique différent de 1 intervienne ici peut vous surprendre. Mais appliquez vos connaissances de cours avec rigueur, sans inventer d'extrapolation fantaisistes aux lois de Snell-Descartes, et cet exercice peut être vite résolu.

- Le fait que le miroir soit dans un milieu d'indice n ne modifie aucun tracé de rayon, car les lois de Snell-Descartes de la réflexion ne font pas intervenir l'indice optique du milieu. Les foyers F et F' sont donc confondus au milieu de S et C .
- La vergence est également inchangée : $V = 2/\overline{SC}$.
- Utilisons le grandissement avec origine au sommet :

$$\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = -\frac{2}{-10} = \frac{1}{5}$$

La relation de conjugaison avec origine au sommet :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

donne alors $\overline{SC} = 5,0 \text{ m} > 0$. Il s'agit d'un miroir divergent de vergence $0,4 \delta$.

- C est son propre conjugué donc l'image est dans le plan contenant C . La formule du grandissement ci-dessus donne alors $\gamma = -1$: l'image est renversée.

4.17

Image d'un objet étendu à l'infini par un miroir sphérique

Méthode mise en jeu : n°1.

La résolution de cet exercice repose entièrement sur une figure claire et bien faite. Résistez à la tentation de représenter le soleil comme un objet AB car c'est un objet à l'infini. En particulier, tous les rayons issus de B arrivent sur le miroir parallèles entre eux ; si jamais vous avez placé un point B sur votre figure, vous risquez de commettre une erreur à ce niveau.

- Le diamètre angulaire du soleil vu de la terre est, dans l'approximation des petits angles, $\alpha = d/D = 9,33 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$.
- La situation est représentée figure 4.7.

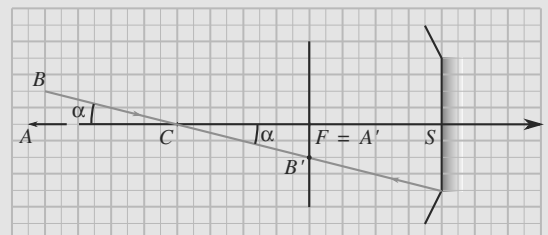


Figure 4.7 Objet étendu à l'infini par un miroir.

a) L'objet étant à l'infini, son image sera par définition dans le plan focal image du miroir. C'est donc là qu'il faut placer l'écran.



En pratique, l'écran est très petit, placé en F' , pour ne pas occlure les rayons lumineux incidents.

b) Par lecture directe sur la figure :

$$\begin{aligned}\tan(\alpha) &= \frac{A'B'}{CF} = \frac{2A'B'}{R} \\ \Rightarrow A'B' &= \frac{R}{2} \tan(\alpha) = 4,67 \text{ mm}\end{aligned}$$

4.18

Rétroviseur

Méthodes mises en jeu : n°1 et 2.

Le plus important dans cet exercice est de savoir définir le champ de vision par un miroir. L'astuce est de « remonter » les rayons lumineux en les traçant depuis l'œil, puis allant se réfléchir sur les bords du miroir.

1. Raisonnons avec le principe du retour inverse de la lumière, traçant les rayons en partant de l'œil en O : figure 4.8 pour le miroir plan, 4.9 pour le miroir concave et 4.10 pour le miroir convexe.

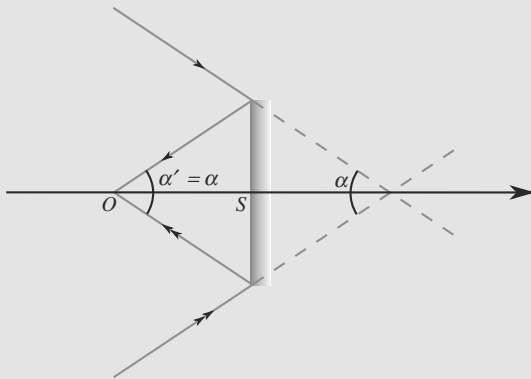


Figure 4.8 Champ visuel dans un miroir plan.

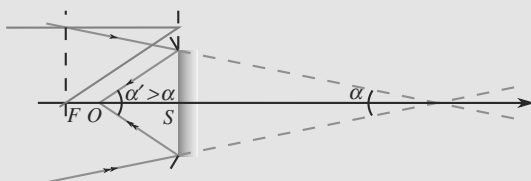


Figure 4.9 Champ visuel dans un miroir concave.

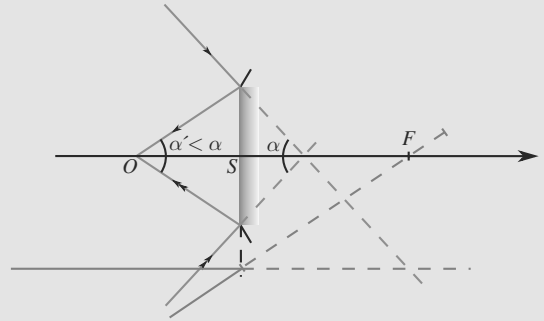


Figure 4.10 Champ visuel dans un miroir convexe.

Le champ de vision est caractérisé par l'angle α , qui est plus grand pour un miroir convexe.

2. La formule de conjugaison avec origine au sommet donne, avec $\overline{SA} = -10 \text{ m}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} &= V \\ \Rightarrow \overline{SA'} &= \frac{\overline{SA}}{V \overline{SA} - 1} \approx 0,48 \text{ m}\end{aligned}$$

et le grandissement :

$$\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \approx 4,8\%$$

L'image est virtuelle, donc visible dans le miroir par le conducteur, réduite et droite, ce qui est conforme à la figure 4.10.



N'oubliez pas que l'œil est lui aussi un instrument d'optique, équivalent à une lentille convergente. Il est donc capable de faire de cette image virtuelle par le miroir (donc un objet réel pour l'œil) une image réelle sur la rétine.

3. Soit un objet AB de dimension maximale, c'est-à-dire égale à R , situé à la distance D . Son image est donc située en A' localisé question précédente et a pour taille γR . Ceci est illustré figure 4.11.

Par construction, l'œil peut tout juste voir B' : l'œil O , le bord du miroir et B' sont alignés, ce qui permet d'en déduire $A'B'$ par le théorème de Thalès. En notant M le bord du miroir :

$$\begin{aligned}\frac{\overline{OS}}{\overline{SM}} &= \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}} \\ \Rightarrow \overline{A'B'} &= \frac{(\Delta + \overline{SA'}) \frac{\Delta}{2}}{\Delta} \approx 11,1 \text{ cm}\end{aligned}$$

D'où, avec le grandissement :

$$R = \frac{\overline{A'B'}}{\gamma} \approx 2,3 \text{ m}$$

Ainsi, $2R \approx 4,6 \text{ m}$ est la dimension latérale maximale d'un objet que le conducteur peut voir en entier dans son rétroviseur.

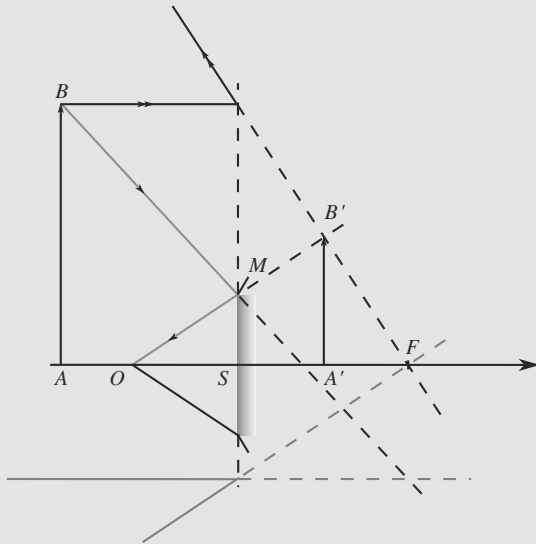


Figure 4.11 Dimension maximale d'un objet visible dans le rétroviseur.

4.19 Association d'un miroir et d'une lentille

Un exercice de stigmatisme de ce genre doit devenir routinier, à ce stade. Veillez à rester rigoureux même quand la démarche paraît simple. La difficulté de cet exercice réside dans le soin à apporter aux signes et à la gestion des distances algébriques.

1. Nous noterons A_1 et A_2 les images intermédiaires par la lentille L et le miroir M :

$$L \xrightarrow{L} A_1 \xrightarrow{M} A_2 \xrightarrow{L} A'$$

- a) Les relations de conjugaison pour les trois couples (A, A_1) , (A_1, A_2) et (A_2, A') sont :

$$\begin{cases} \frac{1}{OA_1} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF'} \\ \frac{1}{OA_2} = -\frac{1}{OA_1} \\ \frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA_2} = \frac{1}{OF} \end{cases}$$



Attention au retournement des rayons lors de leur seconde traversée de la lentille. C'est donc F qui joue le rôle de foyer image à ce moment.

Avec $\overline{OF} = -\overline{OF'}$ et en combinant les relations précédentes, nous aboutissons à :

$$\frac{1}{OA'} + \frac{1}{OA} = \frac{2}{OF}$$

Quant au grandissement, décomposons son expression :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \\ &= \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_2B_2}} \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} \\ &= \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA_2}} \times 1 \times \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA}} \\ \gamma &= -\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \end{aligned}$$



Cette astuce consistant à exploiter la multiplicativité du grandissement est souvent utile, retenez-la !

- b) Par identification sur la relation de conjugaison et le grandissement, nous reconnaissons là un miroir sphérique concave de sommet O et de centre F .

2. a) Les relations de conjugaison sont :

$$\begin{cases} \frac{1}{OA_1} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF'} \\ \frac{1}{OA_2} + \frac{1}{OA_1} = \frac{1}{OC} \\ \frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA_2} = \frac{1}{OF} \end{cases}$$

En soustrayant les deux dernières à la première, il vient :

$$\frac{1}{OA'} + \frac{1}{OA} = 2 \left(\frac{1}{OF} + \frac{1}{OC} \right)$$

L'astuce reste la même pour le grandissement transversal :

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA_2}} \left(-\frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_1}} \right) \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA}} = -\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

- b) C'est encore un miroir sphérique, de sommet O et de centre donné par :

$$\frac{1}{OC_{\text{eq}}} = \left(\frac{1}{OF} + \frac{1}{OC} \right)$$



Un système optique centré constitué d'une lentille mince et d'un miroir sphérique est équivalent à un miroir sphérique. Cela est à rapprocher du fait qu'un système de deux miroirs sphériques en vis-à-vis est équivalent à une lentille mince (téléscope de Cassegrain par exemple).

Plan

5.1	Les sources de lumière	61
5.2	Collimateur	64
5.3	Lunette de visée	65
5.4	Oculaire	66
5.5	Lunette auto-collimatrice	67
5.6	Goniomètre	69
	Synthèse	70
	Tests et exercices	71
	Corrigés des exercices	76

Introduction

Ce chapitre reprend les parties de TP-cours de présentation des instruments d'optique que doivent connaître les élèves de première année. Le matériel décrit ici est couramment utilisé en travaux pratiques.

Prérequis

- Lentilles minces
- Miroir plan
- Notions d'objet et d'image

Objectifs

- Présentation des sources de lumière disponible au laboratoire
- Présenter les instruments (collimateur, oculaire, lunettes, lunette autocollimatrice, goniomètre) utilisables en TP

5.1 Les sources de lumière

5.1.1 Sources de lumière blanche

Ce sont les sources de lumière naturelle (soleil) ou celles qui tentent de les imiter dans l'éclairage domestique (lampes à incandescence, à halogène, néons). On peut voir une photo d'une lanterne émettant une lumière blanche grâce à une lampe à incandescence (photo 5.1) :



Photo 5.1 Lanterne de lumière blanche.

Leur point commun est d'émettre une lumière composée de manière continue des longueurs d'onde du spectre visible (voir l'exemple de la figure 5.1). C'est grâce à la spectroscopie qu'on détermine les longueurs d'onde présentes dans une lumière (voir la partie consacrée au goniomètre).

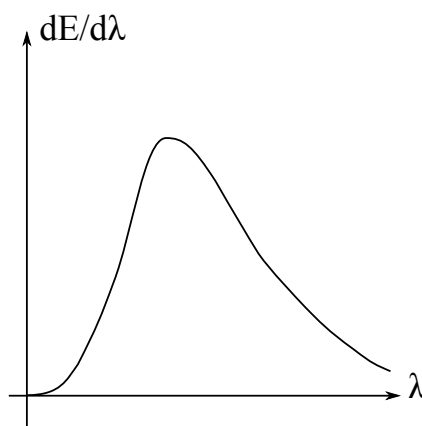


Figure 5.1 Exemple de densité spectrale continue.

On se sert de ces sources en première année pour éclairer des objets réels qui ne sont pas lumineux ou pour former des larges faisceaux de lumière.

5.1.2 Lampes spectrales

Ce sont des lampes dans lesquelles des vapeurs (Cd, Zn, Hg, Na, He, etc...) sont amenées par des moyens électriques dans leurs niveaux excités et qui, en retournant à leur état fondamental, émettent des longueurs d'ondes précises correspondant aux transitions entre leurs niveaux d'énergie. Le spectre de ces lumières est donc discret (discontinu et composé d'un nombre restreint de longueurs d'onde) et caractéristique de l'élément utilisé dans la lampe (figure 5.2) :

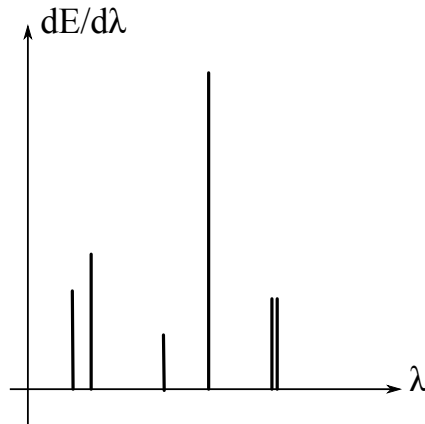


Figure 5.2 Spectre de raie d'une lampe spectrale.

Les ampoules des lampes spectrales peuvent être utilisées dans l'éclairage urbain (lampe à vapeur de sodium) pour leur coloration et leur rendement (photo 5.2) :



Photo 5.2 Lampe spectrale en phase d'allumage.

On se sert de ces lampes en première année pour la spectroscopie à prisme (voir goniomètre).

5.1.3 Laser

La lumière laser a la particularité d'être monochromatique (en réalité de très faible étendue spectrale) comme le montre la figure 5.3 :

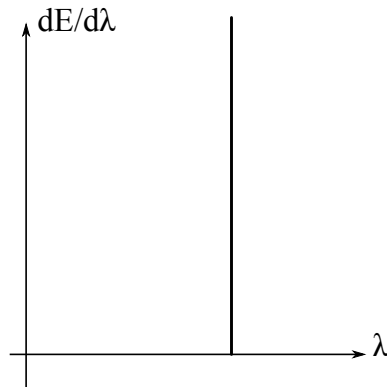


Figure 5.3 Spectre d'un laser.

Les faisceaux laser ont donc une couleur du spectre liée à une transition dans les niveaux d'énergie d'un élément) et une seule. Les lasers utilisés au laboratoire forment de minces pinceaux de lumière de faible ouverture angulaire. On en trouve maintenant couramment de couleurs variées bien que le laser He-Ne (hélium-néon) rouge de longueur d'onde $\lambda = 632 \text{ nm}$ est le plus courant (photo 5.3) :

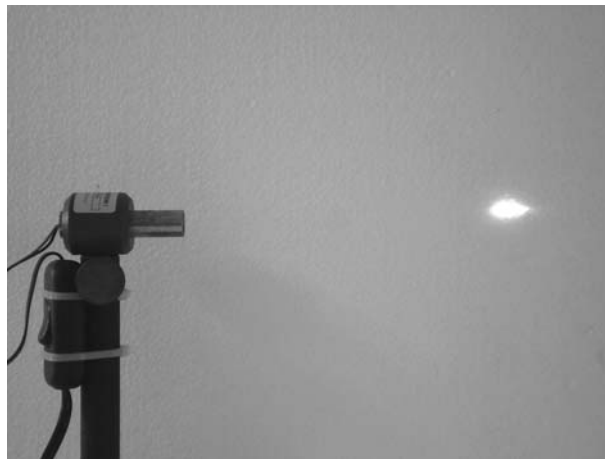


Photo 5.3 Faisceau émis par un laser.

On se sert surtout du laser en deuxième année (diffraction, interférences...)

5.2 Collimateur

Un collimateur est un instrument d'optique qui sert à fabriquer des objets virtuels, en particulier situés à l'infini. On peut en monter sur un banc d'optique en plaçant un objet réel bien éclairé dans le plan focal objet d'une lentille convergente. La plupart du temps, il s'agit d'un verre dépoli (laissant passer la lumière mais pas les images) monté sur un tube fermé par une lentille. On peut également se servir de ces dispositifs pour fabriquer une image virtuelle d'une règle ou d'un réticule repérant une position longitudinale ou

latérale. Pour leur réglage, on a besoin d'un instrument d'observation à distance finie ou infinie : une lunette.

On peut voir ci-après des photos d'un collimateur utilisable sur un banc d'optique. Pour toutes les illustrations qui suivent, la lumière viendra classiquement de la gauche et sortira à droite.



Photo 5.4 Ce réticule sur dépoli, fortement éclairé par une lanterne de lumière blanche, est l'objet utilisé dans ce collimateur.



Photo 5.5 Vue de côté du collimateur. On notera que la partie objet coulisse pour obtenir des images virtuelles de position réglable (on éloigne l'objet de la lentille).



Photo 5.6 Lentille convergente de sortie du collimateur : elle sert à faire l'image du réticule pour obtenir un objet virtuel utilisable par un montage situé en aval.

5.3 Lunette de visée

Cet appareil est doté d'un objectif (lentille convergente) placé du côté de l'objet à observer, d'un repère (réticule ou réglette) qui doit coïncider avec l'image par la lentille de l'objet observé et d'un oculaire dont on détaillera le réglage dans la partie suivante. On peut régler ce genre de lunette pour une observation proche (viseur à frontale fixe), à distance finie ou infinie (lunette d'observation).

L'illustration suivante montre un exemple de lunette de visée réglable.



Photo 5.7 Lunette de visée vue du côté de l'objectif. Il s'agit d'une lentille convergente solidaire du tube métallique support de l'ensemble.



Photo 5.8 Vue de côté de la lunette. La partie portant le réticule et l'oculaire a été tirée hors du support.



Photo 5.9 Partie oculaire : là où on placera l'œil pour les observations au travers de la lunette.

L'exemple suivant montre un viseur à frontale fixe, assez semblable à un microscope : il est utilisé pour des pointés longitudinaux proches (très près de l'objectif). On peut ainsi repérer la position d'un objet puis d'une image sur un banc d'optique (focométrie). On

peut aussi faire des pointés latéraux mais cela nécessite un oculaire à micromètre (voir § 5.4 Oculaire).



Photo 5.10 Viseur à frontale fixe du côté de l'objectif. Il s'agit aussi d'une lentille convergente solidaire du tube métallique support de l'ensemble.



Photo 5.11 Vue de côté du viseur. C'est l'oculaire qui porte le réticule ou la règle micrométrique.



Photo 5.12 Partie oculaire : là où on placera l'œil pour les observations au travers du viseur.

5.4 Oculaire

Un oculaire est un système de lentilles dont le but est l'observation proche. Monté sur des appareils d'observation (lunettes, viseurs, télescopes...), il permet à différents observateurs d'intervenir, sans dérégler l'appareil, en ne réglant que l'oculaire.

L'illustration suivante montre un oculaire réglable qui peut être adapté sur différents appareils.



Photo 5.13 Oculaire : partie tournée vers l'entrée de l'appareil où il se trouve monté.



Photo 5.14 Partie où l'on place l'œil. La lentille réglable est rentrée.



Photo 5.15 Partie où l'on place l'œil. La lentille réglable est sortie.

L'image intermédiaire étant formée, l'observateur recule ce dernier (de nature convergente) pour le placer au plus loin tout en conservant la netteté : l'œil est alors au repos et n'a pas besoin d'accommoder. En pratique, on sort de la zone de netteté en tirant l'oculaire puis on s'en rapproche : la première netteté donne le réglage correct. Pour un œil sain, l'image finale est observée à l'infini. L'image intermédiaire est donc dans le plan focal objet de l'oculaire.

Pour un œil malade (myope ou hypermétrope) l'image finale par l'appareil est observée au punctum remotum, c'est-à-dire au point le plus lointain de vision distincte qui n'est alors pas l'infini. Dans cette position, cet œil n'accommode pas non plus.

On peut voir ci-dessous un réticule en croix et un micromètre :

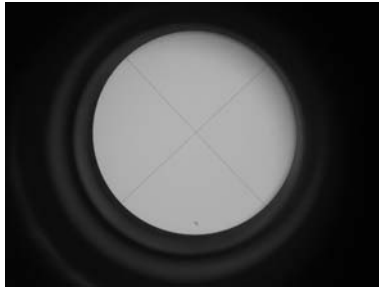


Photo 5.16 Exemple de réticule en croix vu au travers d'un oculaire.

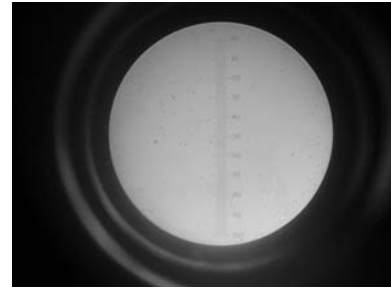


Photo 5.17 Exemple d'un réticule à micromètre. La réglette doit être étalonnée en observant un objet de taille connue au travers de l'appareil sur lequel l'oculaire est monté (réglette d'étalonnage par exemple).

5.5 Lunette auto-collimatrice

C'est une lunette d'observation à l'infini qui possède un dispositif de réglage particulier faisant appel à la technique de l'auto-collimation. Elle dispose d'une source lumineuse, d'un réticule et d'un miroir semi-réfléchissant qui permet d'éclairer le réticule (figure 5.4 et photo 5.18) :

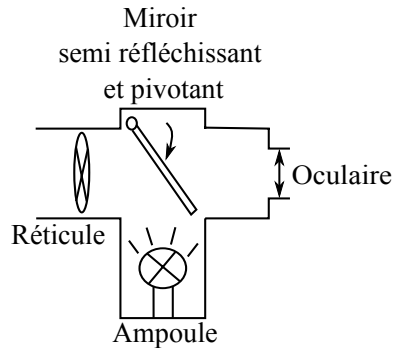


Figure 5.4 Vue schématique du dessus d'une lunette autocollimatrice.



Photo 5.18 Source lumineuse d'une lunette autocollimatrice.

L'oculaire est réglé avec le miroir semi-réfléchissant en position. On place alors un miroir plan du côté de l'objectif (photo 5.19).

Tout autre miroir donne un réglage incorrect de la lunette.



Photo 5.19 Mise en place d'un miroir plan sur la lunette autocollimatrice.

Le réticule donne une image au travers de la lentille puis du miroir et enfin à nouveau de la lentille. S'il se trouve dans le plan focal de la lentille constituant l'objectif, la première image est à l'infini et le miroir plan crée aussi une image à l'infini qui donne donc une image finale dans le plan focal de la lentille où se trouve déjà le réticule : à l'oculaire, on observe donc, si le réglage est bien mené, le réticule et son image dans le même plan (photo 5.20). Si on déplace l'œil vers la gauche par exemple, les deux images doivent se déplacer de la même manière et ne pas voir leur distance varier (ce serait un défaut de parallaxe indiquant qu'ils ne se trouvent pas dans le même plan).



Photo 5.20 Le réticule et son image observés au travers de l'oculaire.

Pour régler la lunette à l'infini, on déplacera donc l'objectif jusqu'à voir le réticule et son image dans le même plan. En observation courante, l'objectif de la lunette formera alors des images d'objets à l'infini dans le plan du réticule (celui-ci coïncidant avec son plan focal image). Il ne reste plus alors qu'à éteindre la source lumineuse, enlever le miroir semi-réfléchissant et régler l'oculaire pour observer le réticule : on observera les images des objets à l'infini en tout confort visuel.

5.6 Goniomètre

5.6.1 Description et réglages

Cet appareil d'optique sert à mesurer des angles ou plus précisément des différences d'angles. Il comporte, disposés autour d'un disque gradué, trois appareils optiques : un collimateur permettant de faire l'image d'une fente source (qu'il faudra éclairer), une lunette d'observation, parfois autocollimatrice comme sur les photos d'illustrations de cette partie, un collimateur à micromètre permet des activités de spectrométrie. Sur la photo 5.21, on voit la lunette autocollimatrice à droite, le collimateur à fente au fond à gauche et le collimateur à micromètre devant à gauche. Un prisme est monté sur le plateau.



Photo 5.21 Vue d'ensemble du goniomètre nous servant d'exemple.

Le réglage de l'appareil commence par celui de la lunette autocollimatrice (voir la partie précédente), puis le collimateur à fente en utilisant la lunette : l'image de la fente est rejetée à l'infini pour qu'on dispose d'un faisceau de lumière parallèle. Le collimateur à micromètre n'est pas toujours utilisé.



Voir vidéo 2 :
Goniomètre

5.6.2 Utilisation

On place au centre sur un plateau tournant l'objet à étudier. En première année : un prisme ; en seconde année : un réseau (ou des fentes d'Young). On observe alors la déviation du faisceau incident (dont on a repéré la direction au préalable) au travers de l'objet étudié. Le verre du prisme étant dispersif, les différentes couleurs sont déviées différemment. On peut alors étudier la déviation d'une longueur d'onde particulière d'une lampe spectrale en fonction de la position du prisme (qui peut tourner autour de l'axe vertical du goniomètre), déterminer l'indice du verre du prisme ou faire de la spectroscopie qu'on va détailler dans le paragraphe suivant.

5.6.3 Spectroscopie

Le prisme étant placé dans une position fixe (minimum de déviation d'une longueur d'onde en général), on réalise l'image du micromètre du collimateur sur la face de sortie

du prisme : on superpose cette image et les raies observées par déviation par le prisme. On peut alors étalonner la réglette avec une lampe spectrale dont les longueurs d'onde sont connues et déterminer des longueurs d'onde inconnues d'autres sources lumineuses en utilisant la position des raies observées sur la réglette.

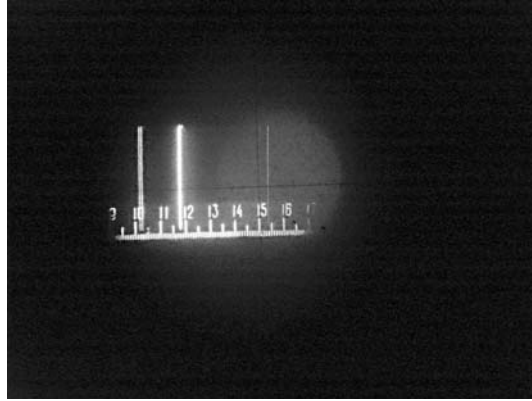


Photo 5.22 Observation à la lunette en spectroscopie.

Sur la photo 5.22, on peut voir le réticule de l'oculaire, le micromètre du collimateur et plusieurs raies spectrales du mercure dont le doublet jaune (les deux traits lumineux proches, à gauche).

L'utilisation de réseau est plus performante que celle de prisme en spectroscopie comme on le constate en deuxième année.



Voir vidéo 3 :
Spectroscopie à prisme

Synthèse

Savoirs

- Connaître les noms et fonctions des appareils

Savoir-faire

- Réglage des appareils
- Utiliser les appareils
- Utilisation du goniomètre

Mots-clés

- lampe, lampe spectrale, laser
- spectre
- collimateur
- réticule
- lunette de visée
- lunette à frontale fixe
- oculaire
- lunette autocollimatrice
- goniomètre

Tests de connaissances

Ce QCM porte non seulement sur le cours, mais aussi sur des connaissances que vous avez acquises, ou allez acquérir, en travaux pratiques. Abordez donc seulement les questions correspondant à des thèmes que vous avez déjà abordés.

- 5.1 L'oculaire d'un appareil peut être réglé à la vue de chacun, cela ne modifie pas le réglage de l'appareil.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 5.2 Une lunette autocollimatrice sert à mesurer des distances focales par autocollimation.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 5.3 Un collimateur est un instrument d'observation.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 5.4 Un viseur sert à mesurer des distances sur un banc, tant longitudinales que latérales.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 5.5 Un appareil doit être réglé quel que soit l'utilisateur pour observer des images à l'infini.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 5.6 Une lentille de projection doit être choisie de manière à ce que sa focale soit plus courte que le quart de la distance de projection.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 5.7 Un goniomètre est un appareil servant à mesurer des angles.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 5.8 Une lunette autocollimatrice est un appareil muni d'un éclairage interne servant à mieux voir l'image observée.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 5.9 Si on voit net en observant dans un appareil optique, on n'a pas besoin de régler l'oculaire.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 5.10 Un collimateur crée un objet virtuel, en général à l'infini.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

5.11 Modélisation de l'œil

(D'après Vêto.)

L'œil peut être modélisé par une lentille convergente L (le cristallin) et d'un écran E (la rétine), comme illustré figure 5.5. La focale du cristallin est notée f' et son centre optique O . La distance cristallin-rétine $\overline{OE} = d = 15 \text{ mm}$ est constante.

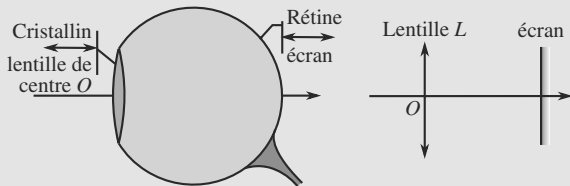


Figure 5.5 Modélisation de l'œil.

Afin de faire des images nettes alors que la distance cristallin-rétine est fixe, le cristallin est capable de modifier sa focale : c'est l'**accommodation**.

Sans effort d'accommodation, un œil est capable de voir nettement un objet situé à une grande distance appelée **punctum remotum** (PR). Avec un effort d'accommodation maximal, il peut voir nettement un objet proche à une distance appelée **punc-**

tum proximum (PP). Les positions de ces objets sont notées respectivement P_R et P_P , figure 5.6.

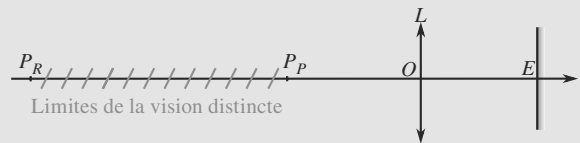


Figure 5.6 Limites de vision distinctes pour l'œil emmétrope.

1. Pour un œil sans défaut (dit **emmétrope**),

$$\overline{OP_P} = d_m = -25 \text{ cm} \quad \text{et} \quad \overline{OP_R} = D_m = -\infty.$$

Déterminez l'intervalle de focales accessible au cristallin.

2. Un œil est tel que $d_m = -10 \text{ cm}$ et $D_m = -80 \text{ cm}$.
 a) Décrivez qualitativement cet œil. Quel est son défaut ?
 b) Déterminez l'intervalle de focales accessibles à cet œil.

c) Nous voulons corriger cet œil pour qu'il se comporte comme un œil normal à l'aide de verres de contact. Vous supposerez que les verres sont assimilables à des lentilles minces de focale f'_v et qu'ils peuvent être considérés comme accolés au cristallin.

Calculez la distance focale f'_v pour ces verres corrigent les défauts de l'œil. Commentaire ?

5.12 Principe de la loupe

(D'après ENAC.)

Une loupe est modélisée par une lentille mince de focale $f' = 20$ cm. La position d'un objet observée est notée AB , celle de son image par la lentille $A'B'$, et celle de l'œil de l'observateur C .

Posons $a = \overline{F'C}$ et $\delta = \overline{A'C}$. Selon la position de A' , δ varie pour l'observateur entre une valeur minimale δ_m et un maximum infini.

L'angle sous lequel l'observateur voit $A'B'$ est noté α' . L'angle sous lequel il verra l'objet AB en l'absence de la loupe est noté α .

1. Calculez le grandissement γ de la loupe en fonction de δ , a et f' .
2. Montrez que le grossissement G s'écrit :

$$G = \frac{(2f' + a)(\delta - a) - f'^2}{f'\delta}$$

Vous supposerez les angles suffisamment petits pour utiliser les approximations $\sin(x) \simeq x$ et $\tan(x) \simeq x$ avec x en radians.

3. L'œil étant placé au foyer image de la loupe, quelle est la valeur de δ donnant un grossissement maximal ?
4. L'œil étant placé à $d = 30$ cm de la loupe, quelle est la valeur maximale du grossissement ?

5.13 Observation de deux étoiles à la lunette

(D'après CCP)

On observe deux étoiles E_a et E_b à l'aide d'une lunette astronomique munie d'un détecteur. Les deux étoiles E_a et E_b sont considérées ponctuelles et à l'infini, séparées par une distance angulaire θ , l'étoile E_a étant située dans la direction de l'axe optique de la lunette.

La lunette est utilisée dans les conditions de Gauss et on demande de calculer ses caractéristiques géométriques.

On considère une lunette astronomique d'axe optique $z'z$ (figure 5.7) constituée d'un objectif assimilé à une lentille mince convergente L_1 de diamètre $D_1 = 50$ cm et de distance focale image $f'_1 = 7,5$ m associée à une lentille divergente

L_2 de distance focale image $f'_2 = -0,025$ m. On désigne respectivement par O_1 et O_2 , par F_1 et F'_1 , F_2 et F'_2 , les centres optiques, les foyers objet et image des lentilles L_1 et L_2 .

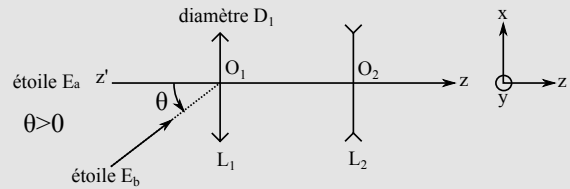


Figure 5.7 Lunette astronomique.

1. Quelles sont la forme et la direction des faisceaux lumineux des ondes 1 et 2, respectivement émises par les étoiles E_a et E_b , lorsqu'elles parviennent sur la lunette ?
2. On appelle A_1 l'image de l'étoile E_a à travers la lentille L_1 . De même, B_1 désigne l'image de E_b à travers L_1 .
 - a) Dans quel plan se situent A_1 et B_1 ? Donner la distance algébrique $\overline{A_1B_1}$.
 - b) La lentille L_2 est placée peu avant le plan où se forment les images A_1 et B_1 . On appelle respectivement A_2 et B_2 , les images de E_a et E_b à travers la lunette. Sachant que $\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = 2$ exprimer et calculer la distance $\overline{O_2A_1}$.
3. On définit la distance focale f' de la lunette par la relation $\overline{A_2B_2} = f' \cdot \theta$.
 - a) Calculer la distance focale f' de la lunette.
 - b) Exprimer $\overline{A_1A_2}$. Comment évolue l'encombrement de la lunette par rapport au cas où seule la lentille L_1 existerait ? Quel est l'intérêt de la lentille L_2 ?
4. On place dans le plan où se forment les images A_2 et B_2 , une caméra à DTC (Dispositif à Transfert de Charge). Ce récepteur d'images est composé d'une matrice rectangulaire de 768×512 détecteurs élémentaires, appelés pixels, de forme carrée, de côtés $a_1 = 9 \mu\text{m}$. On suppose que la lunette est librement orientable.

Une image parfaite à travers la lunette d'un point situé à l'infini, produit sur le détecteur un signal donnant une image dont la dimension ne peut être inférieure à la taille d'un pixel. Exprimer et calculer en seconde d'arc, la limite de perception angulaire θ_{\min} due au récepteur d'image.

5.14 Microscope

Le principe de fonctionnement d'un microscope peut être illustré par deux lentilles convergentes (figure 5.8) : la lentille L_1 joue le rôle d'objectif pour collecter les rayons lumineux issus d'un objet AB de petites dimensions, et la lentille L_2 joue le rôle d'oculaire pour grossir l'image obtenue.

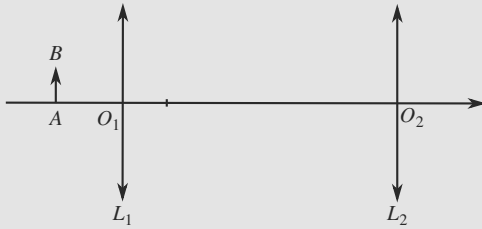


Figure 5.8 Principe du microscope.

La lentille L_1 est convergente de distance focale $f'_1 = 0,5$ cm. Elle fait de AB une image A_1B_1 . La lentille L_2 est convergente de distance focale $f'_2 = 2$ cm et fait de A_1B_1 une image $A'B'$. Les centres optiques de ces lentilles sont notés respectivement O_1 et O_2 .

L'objet observé a pour dimension $\overline{AB} = 0,01$ cm et est placé tel que $\overline{O_1A} = -0,51$ cm. L'observateur se trouve derrière l'oculaire, l'œil sur l'axe optique.

1. Le microscope est réglé pour qu'un œil sans défaut n'ait pas à accommoder lorsqu'il observe l'image finale $A'B'$. Qu'est-ce que cela implique ?
2. Tracez la marche de deux rayons lumineux intéressants issus de B et reçus par l'œil de l'observateur.
3. Exprimez le grossissement γ_1 de la lentille L_1 en fonction de f'_1 et $\overline{O_1A}$. Application numérique.
4. Calculez $\overline{O_1O_2}$, l'encombrement de l'appareil entier. Application numérique.
5. Calculez en fonction de γ_1 , AB et f'_2 le diamètre angulaire α' de l'image $A'B'$, défini comme l'angle sous lequel l'observateur la voit. Application numérique.
6. Comparez ce diamètre angulaire à celui, noté $\alpha_{\text{réf}}$, angle sous lequel l'observateur verrait l'objet AB sans instrument, à la distance conventionnelle $d_m = 25$ cm. Déduisez-en le grossissement G du microscope, défini par le rapport angulaire $\alpha/\alpha_{\text{réf}}$.

5.15 Lunette de Galilée

(D'après ENAC.)

La lunette de Galilée est destinée à observer des objets terrestres. Elle est constituée de deux lentilles, un objectif convergent (lentille L_1 , centre O_1 , focale $f'_1 = 25$ cm) et un oculaire divergent (lentille L_2 , centre O_2 , focale $f'_2 = -5$ cm).



À ne pas confondre, donc, avec la lunette astronomique !

1. Calculez la dimension $e = \overline{O_1O_2}$ de la lunette pour qu'un observateur puisse voir sans accommoder un objet situé à l'infini. Application numérique. Comment s'appelle un tel système ? Que pouvez-vous dire des foyers des deux lentilles ?
2. Un objet AB est placé à l'infini, vu depuis l'objectif sous un angle α_1 .

a) Calculez l'angle α_2 sous lequel est vue son image par l'observateur, en fonction de α_1 et des focales. Faites un schéma montrant la marche de ce rayon.

b) Le grossissement G de la lunette est défini comme le rapport entre l'angle sous lequel est vu l'objet à travers la lunette et l'angle sous lequel il est vu sans appareil. Exprimez G en fonction de α_1 et α_2 puis en fonction des focales. Application numérique.

3. L'objet AB est désormais placé à distance finie, à $D = 50$ cm en amont de l'objectif. Sa longueur est $L = 5$ cm.

a) Faites un schéma de la lunette en construisant l'image $A'B'$ par la lunette de l'objet AB .

b) Calculez numériquement $\overline{O_2A'}$ pour localiser cette image.

c) Calculez le grossissement associé en fonction des focales. Application numérique. Dépend-il vraiment de la position de l'objet ?

5.16 Appareil photo jetable sans mise au point (D'après Mines-Pont.)

Cet exercice propose de comprendre comme un petit appareil photo jetable peut prendre des photos nettes dans de nombreuses situations alors que rien n'est réglable.

L'objectif de l'appareil est modélisé de manière simplifiée par une lentille mince convergente L de centre O et de focale f' . Le diamètre de l'objectif est contrôlé par un diaphragme réglable de diamètre D et vous introduirez le numéro du diaphragme défini par :

$$N = \frac{f'}{D}$$

La pellicule se trouve en E à une distance d de la lentille, et est mobile pour la mise au point.

1. Pour photographier des objets dont la distance à l'objectif est compris entre x et l'infini, dans quel domaine doit pouvoir varier d ? Application numérique : calculez les valeurs extrêmes d_{\min} et d_{\max} lorsque $x = 60$ cm et $f' = 50$ mm.
2. Lorsque l'appareil est mis au point sur l'infini, un objet ponctuel A à distance finie fait une image A' non ponctuelle sur un grain de la pellicule. Ce grain est le plus petit élément photosensible, sa dimension est notée $g = 0,02$ mm.

a) En vous appuyant sur une figure, montrez qu'il existe une distance minimale L_0 entre A et la lentille, à partir de laquelle la taille de l'image est inférieure à g . Déterminez son expression en fonction de f' , N et g . Application numérique pour $N = 2,8$.

b) Interprétez L_0 , appelée **distance hyperfocale**.

5.17 Modélisation d'un téléobjectif

(D'après Mines-Pont.)

Vous voulez photographier une tour haute de $h = 5$ m distance de $D = 2$ km. Elle est représentée par un objet AB avec A sur l'axe optique et B hors de l'axe.

- Quelle serait la taille de l'image sur la pellicule dans le cas où l'appareil est modélisé par une lentille mince unique de focale $f' = 50$ cm ? Calculez aussi l'encombrement de l'appareil dans ce cas, défini comme la distance objectif-pellicule.
- Pour agrandir l'image, utilisons un téléobjectif. C'est un système formé de deux lentilles minces L_1 de focale $f'_1 = \overline{O_1F'_1} = 50$ mm et L_2 de focale $f'_2 = \overline{O_2F'_2} = -25$ mm distances de $\overline{O_1O_2} = 31,2$ mm.
 - Soit $A'B'$ l'image de AB par L_1 . Indiquez la nature de $A'B'$ pour L_2 et précisez sa position.
 - Faites une figure à l'échelle de la construction de l'image $A''B''$ par L_2 . Déterminez par le calcul la position de l'image et sa taille.
 - Calculez l'encombrement correspondant du téléobjectif. Commentez.

5.18 Télescope de Cassegrain

(D'après ENSTIM.)

Considérons le télescope de Cassegrain, constitué de deux miroirs sphériques M_1 et M_2 . Le grand miroir, appelé M_1 , est concave avec une ouverture à son sommet S_1 ; le petit miroir, M_2 , est convexe, sa face réfléchissante tournée vers celle de M_1 (figure 5.9).

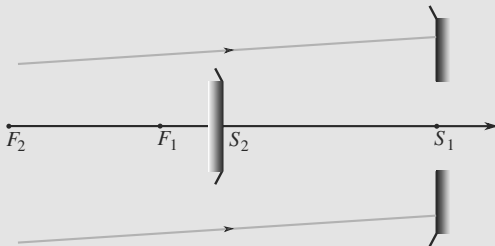


Figure 5.9 Télescope de Cassegrain.

Observons à travers ce télescope une étoile assimilée à un objet AB dont l'extrémité A est située sur l'axe optique. L'étoile étant très éloignée, les rayons issus de B qui atteignent le miroir M_1 sont quasiment parallèles et forment avec l'axe optique l'angle α . Après réflexion sur M_1 , ces rayons se réfléchissent sur M_2 et forment une image finale $A'B'$ située au voisinage de S_1 .

- Construisez géométriquement les images intermédiaire A_1B_1 de AB par M_1 et finale $A'B'$ d'après la figure 5.9.

- Désignons par f_1 et f_2 les distances focales, comptées positivement, des deux miroirs M_1 et M_2 ($f_1 = \overline{F_1S_1}$ et $f_2 = \overline{F_2S_2}$) et par $D = \overline{S_1S_2}$ la distance séparant les deux miroirs.

Exprimez D en fonction de f_1 et f_2 pour que l'image finale $A'B'$ soit située dans le plan de S_1 .

Simplifiez cette expression lorsque $f_1 \gg f_2$.

- Déterminez dans ces conditions la taille de l'image intermédiaire A_1B_1 en fonction de α et f_1 .

Déduisez-en celle de l'image finale $A'B'$ en fonction de α , f_1 et f_2 .

Simplifiez cette expression lorsque $f_1 \gg f_2$.

- Application numérique : calculez A_1B_1 et $A'B'$ pour $\alpha = 10^{-3}$ rad, $f_1 = 40$ cm et $f_1/f_2 = 20$.

Indication : en première approximation, $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ si $|x| \ll 1$.

5.19 Télescope du satellite Hipparcos

(D'après ENSTIM.)

Le satellite Hipparcos lancé le 8 août 1987 était constitué principalement d'un télescope de 30 cm de diamètre (étudié ici). Celui-ci a permis d'établir un catalogue des positions, distances et éclats de plus de 118 000 étoiles avec une précision jamais atteinte.

On propose de modéliser le télescope d'Hipparcos par un miroir concave M_c de rayon $R = 2800$ mm avec un miroir plan M_p de renvoi (figure 5.10). On note S le sommet du miroir concave. La lumière subit deux réflexions et passe par un orifice dans le miroir concave pour atteindre le détecteur. Il est constitué d'une grille et de cellules CCD permettant de repérer la position de l'image. La grille comporte $N = 2688$ fentes équidistantes d'une longueur $l = 8,2 \mu\text{m}$.

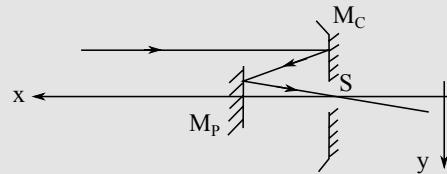


Figure 5.10 Miroirs du télescope.

- On considère une étoile E visée dans la direction Sx . L'axe Sx est orienté vers l'étoile.
 - Déterminer l'abscisse x_1 de l'image E_1 de l'étoile E par le miroir M_c .
 - On note a la distance séparant le miroir plan et le sommet du miroir concave. Déterminer une condition sur a pour que l'image finale E_2 se forme sur le détecteur placé à l'arrière du miroir concave.

c) Déterminer la largeur angulaire α_c du champ observé. Calculer α_c en degré.

En réalité Hipparcos réalise une mesure de position relative des étoiles. Le télescope vise deux directions symétriques par rapport à S_x présentant un angle $\beta = 58^\circ$. Ainsi on obtient avec une grande précision l'angle entre deux étoiles. C'est un système de deux miroirs plans M_1, M_2 qui permet d'obtenir les images des deux étoiles sur le détecteur (figure 5.11). Le télescope tourne autour d'un axe de direction S_z avec une période $T = 128$ minutes. On supposera que la direction S_z est fixe bien que cet axe se déplace lentement afin de viser toute la sphère céleste.

2. a) Déterminer l'angle φ_0 des miroirs M_1 et M_2 avec l'axe S_x du télescope.
- b) Déterminer le déplacement angulaire θ_1 d'un rayon lumineux réfléchi par le miroir M_1 lorsque le satellite

tourne d'un angle θ . Préciser le sens de déplacement des rayons réfléchis par M_1 et M_2 .

c) Quelle est la norme V de la vitesse de déplacement des images sur le détecteur ?

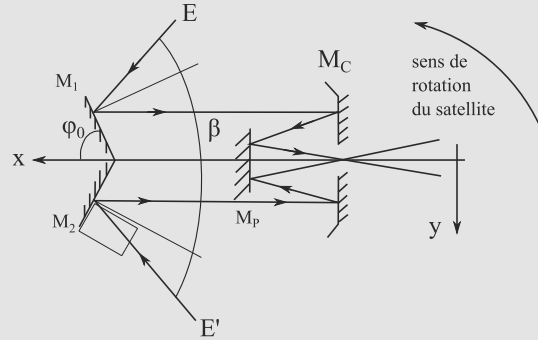


Figure 5.11 Double visée.

5.1

Vrai : l'oculaire est justement là pour permettre à chacun d'observer une image dans les conditions de confort de son œil.

5.2

Faux : une lunette autocollimatrice sert à observer des objets à l'infini. Le caractère autocollimateur n'intervient que lors de son réglage.

5.3

Faux : un collimateur sert à fabriquer des objets virtuels, en particulier à l'infini.

5.4

Vrai.

5.5

Faux. C'est souvent ce qu'on dit par défaut mais cela ne concerne en réalité que l'œil sans défaut. Pour le confort de l'observateur, l'appareil doit être réglé de manière à observer sans que l'œil n'accommode, donc sans fatigue oculaire.

5.6

Vrai, voir exercice 3.20.

5.7

Vrai, c'est même le sens de son nom !

5.8

Faux ! L'éclairage interne d'une lunette autocollimatrice sert au moment du réglage à éclairer le réticule, ce qui permet de voir son image (que l'on doit lui superposer) mais pas à « éclairer une image ».

5.9

Faux, reportez-vous à la question 1. Il est toujours préférable de régler l'oculaire car vous pourriez vous situer dans une zone où votre œil voit en accommodant fortement. La fatigue oculaire produite alors peut être très inconfortable en quelques dizaines de minutes.

5.10

Vrai, voir question 3.

5.11

Modélisation de l'œil

C'est un exercice très simple d'application des lois gouvernant les lentilles minces. Vous devez surtout le garder en mémoire car les concepts de *ponctum proximum* et de *ponctum remotum* sont des classiques des problèmes d'optique.

Connaissez les ordres de grandeur de ces distances pour un œil emmétrope.

1. Au *ponctum proximum*, la relation de conjugaison de Descartes donne :

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{d_m} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = \frac{dd_m}{d_m - d} = 14,2 \text{ mm}$$

et au *ponctum remotum* :

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{D_m} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = d = 15 \text{ mm}$$

Donc la focale du cristallin évolue entre 14,2 mm et 15 mm.

2. a) L'œil ne peut pas faire d'image nette d'un objet trop éloigné, mais il peut voir de plus près qu'un œil normal. C'est un œil myope.
b) Le calcul est le même qu'à la question précédente, seule l'application numérique change : $f' = 13,0 \text{ mm}$ au PP et $f' = 14,7 \text{ mm}$ au PR. Ce œil est donc plus convergent (plus faible focale) qu'un œil emmétrope.
c) Si le verre et le cristallin sont accolés, leurs vergences s'ajoutent. Donc ils constituent un système de focale f'_g :

$$\frac{1}{f'_g} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{f'_v}$$

Ce système doit conjuguer un objet réel situé à l'infini (situation de PR) avec la rétine donc $f'_g = 1,5 \text{ cm}$. D'où :

$$f'_v = \frac{f' f'_g}{f' - f'_g} = -800 \text{ mm}$$

Les verres de contact sont donc divergents, ce qui était prévisible puisque l'œil myope est trop convergent. Cela correspond à un verre divergent de $-1,25 \delta$.

5.12

Principe de la loupe

Il est crucial de faire une figure claire avec toutes les notations. En outre, se pose la question de savoir quelle relation de conjugaison utiliser ; la définition de a incite à choisir celle avec origines aux foyers.

La situation est illustrée figure 5.12.

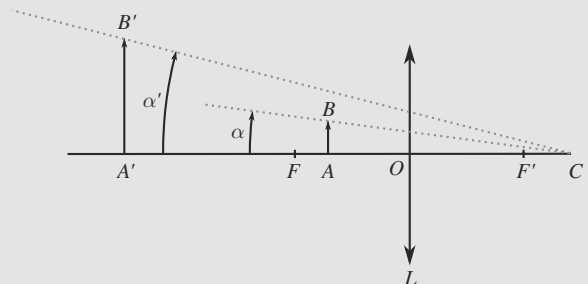


Figure 5.12 Principe de la loupe.

1. Exploisons les relations avec origines aux foyers. $\overline{FA} \overline{F'A'} = -f'^2$ et :

$$\gamma = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{F'C} + \overline{CA'}}{\overline{F'O}} = \frac{a - \delta}{-f'}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\delta - a}{f'}$$

2. L'expression des angles α et α' par la figure 5.12 conduit à :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{CA'}} \frac{\overline{CA}}{\overline{AB}}$$

$$= \gamma \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C}}$$

$$G = \frac{\delta - a}{f'} \frac{\overline{AF} + \overline{FF'} + \overline{F'C}}{\delta}$$

En outre $\overline{FA} \overline{F'A'} = -f'^2$. D'où, après simplification :

$$G = \frac{(2f' + a)(\delta - a) - f'^2}{f'\delta}$$

3. Lorsque $a = 0$, l'expression de G se simplifie en :

$$G = 2 - \frac{f'}{\delta}$$

qui est maximal si le rapport f'/δ est minimal donc si δ est maximal, donc si δ est infini. Le grossissement est maximal quand l'image A' est réelle à l'infini.

4. Lorsque $a = 10$ cm, l'expression de G se réduit numériquement à (en cm) :

$$G = 2,5 - \frac{45}{\delta}$$

qui est maximal quand δ est infini. Alors, $G = 2,5$. La loupe grossit 2,5 fois.



En pratique, une loupe s'utilise en plaçant l'objet sur son foyer objet pour ne pas nécessiter d'effort d'accommodation par l'observateur.

5.13

Observation de deux étoiles à la lunette

Si ce texte est long et détaillé, la difficulté est surtout ne pas se perdre en chemin. Les questions sont toutes assez simples prises l'une après l'autre et ne nécessitent guère que les relations de base des lentilles minces et un peu de réflexion.

- E_a et E_b étant à l'infini optique, les faisceaux provenant de ces étoiles arrivent sur la lunette en étant parallèles, l'un à l'axe des abscisses l'autre à la direction de l'étoile E_b , i. e. inclinés d'un angle θ par rapport à l'axe Oz.
- a) E_a et E_b étant à l'infini optique, leurs images au travers de L_1 se forment dans le plan focal image de la lentille L_1 sur l'axe (en F'_1) et l'autre décalées de $f'_1 \tan(\theta)$ (figure 5.13).

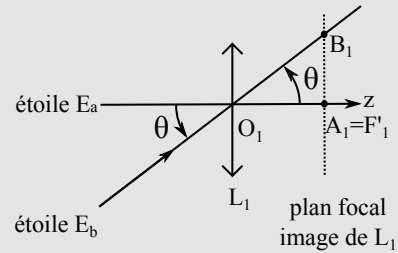


Figure 5.13 Images intermédiaires.

On a donc $\overline{A_1 B_1} = f'_1 \tan(\theta) \approx f'_1 \theta$.

b) $\overline{O_2 A_1} > 0$ d'après le test et $\gamma_2 = \frac{\overline{A_2 B_2}}{\overline{A_1 B_1}} = 2$. En prenant les relations de grandissement et de conjugaison avec origine au centre, on a aussi : $\gamma_2 = \frac{\overline{O_2 A_2}}{\overline{O_2 A_1}} = 2$ et $\frac{1}{\overline{O_2 A_2}} - \frac{1}{\overline{O_2 A_1}} = \frac{1}{f'_2}$.

En multipliant par $\overline{O_2 A_1}$ cette dernière relation, on obtient :

$$\frac{1}{\gamma} - 1 = \frac{\overline{O_2 A_1}}{f'_2} \text{ et donc } \overline{O_2 A_1} = f'_2 \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right),$$

soit numériquement, +1,25 cm.

3. a) D'après ce qui précède, $\overline{A_2 B_2} = 2f'_1 \theta$ et donc, d'après la définition que donne le texte, $f' = 2f'_1$ soit 15 cm.

b) En utilisant le grandissement, on a $\overline{O_2 A_2} = \gamma \overline{O_2 A_1} = 2 \overline{O_2 A_1} = +2,5 \text{ cm}$. Finalement $\overline{O_2 A_2} - \overline{O_2 A_1} = \overline{A_1 A_2} = +2,5 - 1,25 = 1,25 \text{ cm}$.

L'encombrement est augmenté de 1,25 cm (sur 750 cm) : c'est peu et l'image finale est agrandie deux fois comme si la focale (et donc l'encombrement) était augmentée d'un facteur deux. On obtient la même taille d'image avec un encombrement de 752 cm au lieu d'un encombrement de 1 500 cm pour une seule lentille convergente donnant la même image finale.

4. θ_{\min} due au récepteur est obtenue pour deux images se formant à une distance égale à la taille d'un pixel : $\overline{A_2 B_2} = a_1 = \theta_{\min} f'$ et donc $\theta_{\min} = \frac{a_1}{f'}$ soit numériquement $6,0 \cdot 10^{-7} \text{ rad} = 3,4 \cdot 10^{-5} = 0,12''$.

θ_{\max} est obtenu sur la diagonale $\theta_{\max} = \sqrt{768^2 + 512^2} \frac{a_1}{f'} = 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$ ou encore :

$$\theta_{\max} = 0,32^\circ = 1,9'.$$

5.14

Microscope

Comme souvent quand l'objet ou l'image est rejeté à l'infini (première question), vous devez vous attendre à avoir des questions sur le grossissement (puisque le grandissement n'est pas défini).

Vous devez maintenant avoir bien acquis la démarche commune à tous les exercices de stigmatisme (page 20). Si vous l'appliquez avec rigueur et que vos schémas sont assez grands pour être bien lisibles, cet exercice ne pose pas de difficulté.

1. Avec les notations de l'énoncé, le problème peut s'écrire $A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A'$. Si $A'B'$ peut être observée sans accommodation, c'est qu'elle est rejetée à l'infini. Donc l'objet conjugué de A' , pour L_2 , est son foyer objet F_2 :

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 = F_2 \xrightarrow{L_2} A'_\infty$$



Quand un objet ou une image est rejeté à l'infini, le grandissement n'est en général plus défini. C'est pourquoi il sera nécessaire, dans la suite, d'introduire le grossissement pour le remplacer.

2. La figure 5.14 montre un exemple de construction.

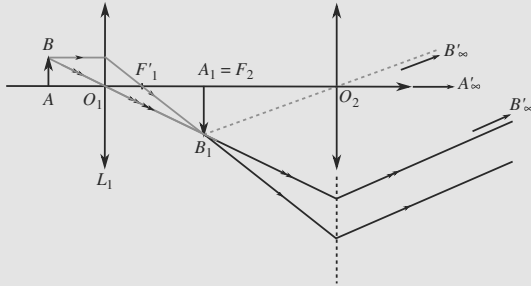


Figure 5.14 Image par un microscope.

3. Le grandissement peut s'écrire avec origine au centre : $\gamma_1 = \overline{O_1 A_1} / \overline{O_1 A}$. Utilisons la relation de conjugaison avec origine au centre pour éliminer $\overline{O_1 A_1}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{O_1 A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1 A}} &= \frac{1}{f'_1} \\ \Rightarrow \overline{O_1 A_1} &= \frac{f'_1 \overline{O_1 A}}{f'_1 + \overline{O_1 A}} \\ \Rightarrow \gamma_1 &= \frac{f'_1}{f'_1 + \overline{O_1 A}} = -50 \end{aligned}$$

4. La relation de Chasles sur l'axe optique donne :

$$\begin{aligned} \overline{O_1 O_2} &= \overline{O_1 A_1} + \overline{A_1 O_2} \\ &= \frac{f'_1 \overline{O_1 A}}{f'_1 + \overline{O_1 A}} + f'_2 \\ \overline{O_1 O_2} &= 27,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

ce qui est un ordre de grandeur raisonnable pour la taille d'un microscope de bureau.

5. D'après la figure 5.14, dans les conditions de Gauss :

$$\alpha' = \frac{A_1 B_1}{f'_2} = \frac{|\gamma_1| AB}{f'_2} = 0,25 \text{ rad} = 14,3^\circ$$

6. L'objet AB observé directement depuis une distance d_m est vu sous l'angle :

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{réf}} &= \frac{AB}{d_m} = 4,0 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 2,3 \cdot 10^{-2}^\circ \\ \Rightarrow G &= \frac{|\gamma_1| d_m}{f'_2} = 625 \end{aligned}$$

C'est une valeur élevée, mais c'est bien ce qu'on attend d'un microscope.

5.15

Lunette de Galilée

Là encore, ayez les idées claires sur le grandissement et le grossissement. Le second est surtout utilisé quand le premier n'est pas défini, typiquement quand l'objet ou l'image est à l'infini.

Bien qu'une figure ne soit demandée qu'assez loin dans l'exercice, vous avez tout intérêt à en construire une dès le début !

1. L'équation stigmatique de la lunette s'écrit $A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A'$. L'objet A est à l'infini donc L_1 en fait une image sur son foyer image : $F'_1 = A_1$. L'image A' est à l'infini, donc son objet conjugué par L_2 est le foyer objet de cette dernière. C'est aussi $A_1 : F_2 = A_1$.

Donc les foyers F'_1 et F_2 sont confondus et l'équation stigmatique peut se réécrire :

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} F'_1 = F_2 \xrightarrow{L_2} A'_\infty$$

D'où :

$$\begin{aligned} e &= \overline{O_1 O_2} \\ &= \overline{O_1 F'_1} + \overline{F'_1 F_2} + \overline{F_2 O_2} \\ e &= f'_1 + 0 + f'_2 = f'_1 + f'_2 \end{aligned}$$

ce qui donne $e = 20 \text{ cm}$.

2. a) Voir figure 5.15. α_1 peut être exprimé au niveau de la lentille L_1 et α_2 au niveau de L_2 :

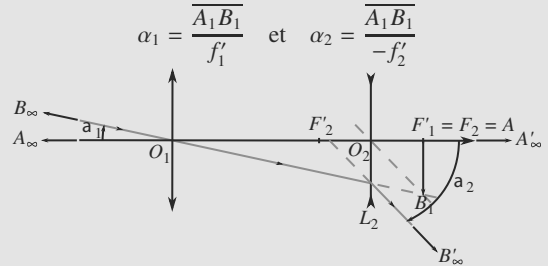


Figure 5.15 Image d'un objet à l'infini par une lunette de Galilée.



Attention aux signes ! Les angles sont comptés positivement dans le sens trigonométriques donc, sur l'exemple de la figure 5.15, ils sont négatifs. Les rapports de distances doivent refléter ce fait.

En combinant ces deux équations, il vient :

$$\alpha_2 = -\frac{f'_1}{f'_2} \alpha_1$$

- b) Par définition :

$$G = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -\frac{f'_1}{f'_2} = 5$$

L'image est donc droite, ce qui est préférable pour une observation terrestre.

3. a) Voir figure 5.16.

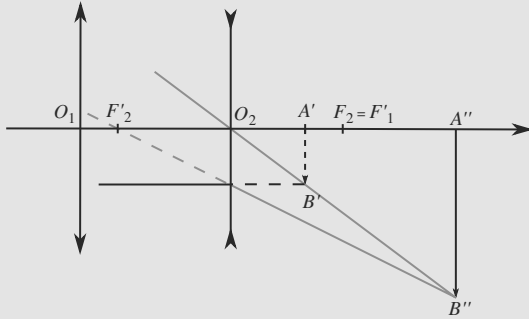


Figure 5.16 Image d'un objet à distance finie par une lunette de Galilée.

- b) L'équation stigmatique $A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A'$ se traduit par deux relations de conjugaison. Pour L_1 :

$$\frac{1}{\overline{O_1 A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1 A}} = \frac{1}{f'_1}$$

d'où $\overline{O_1 A_1} = 50$ cm. Pour L_2 :

$$\frac{1}{\overline{O_2 A'}} - \frac{1}{\overline{O_2 A_1}} = \frac{1}{f'_2}$$

avec $\overline{O_2 A_1} = \overline{O_2 O_1} + \overline{O_1 A_1} = 30$ cm donc $\overline{O_2 A'} = -6,0$ cm.

- c) Considérons le rayon issu de B arrivant sur la lunette parallèle à l'axe optique (point d'impact I_1 sur l'objectif). La lunette étant afocale, ce rayon émerge de la lunette parallèle à l'axe optique (point de sortie I_2 sur l'oculaire). Le théorème de Thalès dans les triangles $F'_1 O_1 I_1$ et $F'_1 O_2 I_2$ permet de calculer le grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_2 F'_1}}{\overline{O_1 F'_1}} = \frac{-f'_2}{f'_1} = 0,2$$

La figure 5.16 montre que le grandissement est indépendant de la position de l'objet AB : le rayon lumineux issu de B et parallèle à l'axe optique émerge de l'oculaire à la même distance de l'axe optique quelle que soit la position de AB . Quand l'objet est déplacé le long de l'axe, la position de l'image est modifiée mais pas ses dimensions.

5.16

Appareil photo jetable sans mise au point

Cet exercice prend en compte une réalité physique peu mentionnée dans les exercices usuels : un détecteur de lumière (écran, rétine, capteur, etc) n'a pas une résolution infinie ; pour un objet ponctuel, il ne fait pas la différence entre une image floue mais assez petite et une image nette ponctuelle.

Passer du temps à faire une bonne figure est donc indispensable pour construire les raisonnements.

1. Quand l'objet est à l'infini ($x = \infty$), l'image est dans le plan focal image, donc $d_{\min} = f' = 50$ mm.

Quand l'objet est à une distance quelconque, la relation de conjugaison de Descartes donne, avec $x = -\overline{OA} > 0$:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{-x} = \frac{1}{f'} \\ \Rightarrow d_{\max} = \frac{x f'}{x - f'} = 54,5 \text{ mm}$$

2. a) Plaçons-nous à la limite où l'image est exactement de la taille du grain. L'appareil est mis au point sur l'infini donc la pellicule est placée dans son plan focal image (figure 5.17).

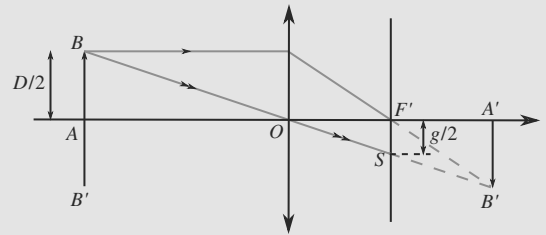


Figure 5.17 Propriété de la distance hyperfocale.

En considérant le rayon incident parallèle passant par O , le théorème de Thalès dans les triangles ABO et $OF'S$ s'écrit :

$$\frac{D/2}{L_0} = \frac{g/2}{f'} \\ \Rightarrow L_0 = \frac{f'^2}{Ng} = 44,6 \text{ cm}$$

- b) Si l'objet se trouve à plus de 44,6 cm de l'appareil, son image sera d'une taille inférieure à un grain et donc indiscernable d'une image nette. Donc cette image sera perçue comme nette sur la photo résultante, sans avoir à ajuster la mise au point.

5.17

Modélisation d'un téléobjectif

Bien que cet exercice soit la suite de l'exercice 16, il en est complètement indépendant. Vous pouvez cependant remarquer que la première question reprend la modélisation du précédent exercice.

Là encore, une bonne figure conditionne une résolution efficace.

1. L'image est dans le plan focal, car D est assez grande pour supposer que l'objet est à l'infini donc $A' = F'$. Le grandissement de la lentille s'écrit alors :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{f'}{x} \\ \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{D} = \frac{f' h}{D} = 1,25 \text{ mm}$$

L'encombrement est donc $\overline{OF'} = 50$ mm.

2. a) $\overline{O_2A'} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A'} = 18,8 \text{ mm}$. C'est donc un objet virtuel.
b) Voir figure 5.18.

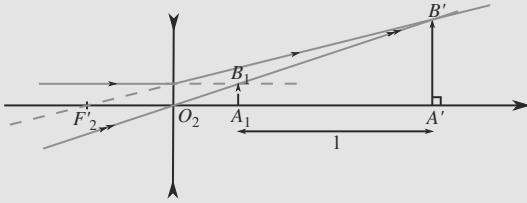


Figure 5.18 Modélisation d'un téléobjectif.

La relation de conjugaison de Descartes pour L_2 permet de localiser A'' :

$$\frac{1}{\overline{O_2A''}} - \frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{f_2'} \\ \Rightarrow \overline{O_2A''} = 75,8 \text{ cm}$$

et le grandissement permet d'avoir la taille de l'image :

$$\overline{A''B''} = -\overline{A'B'} \frac{\overline{O_2A''}}{\overline{O_2A'}} = 5,0 \text{ mm}$$

- c) L'encombrement est alors :

$$\overline{O_1A''} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2A''} = 107 \text{ mm}$$

Cela reste une valeur raisonnable (un téléobjectif d'une dizaine de centimètres est courant) et permet de grandir l'image d'un facteur 4.

5.18 Télescope de Cassegrain

Un grand classique ! Comme un rayon lumineux subit deux réflexions, il change deux fois de sens de propagation. Veillez donc à ne pas vous perdre ! Pour le miroir M_1 , les images sont réelles à gauche et virtuelles à droite ; pour M_2 c'est le contraire.

Cela reste un problème de stigmatisme. Suivez donc la méthode n°1 du chapitre 2.

Il présente en outre un piège : les distances focales sont définies à l'opposé des notations habituelles !

1. Le télescope est un système optique constitué de deux sous-systèmes, les deux miroirs. D'où les notations :

$$A \xrightarrow{M_1} A_1 = F_1 \xrightarrow{M_2} A'$$

La figure 5.19 montre les constructions.

2. Les relations de conjugaison des deux miroirs donnent, en faisant attention au signe des distances focales :

$$\frac{1}{\overline{S_1A_1}} = \frac{1}{-f_1} \quad (5.1)$$

$$\frac{1}{\overline{S_2A'}} + \frac{1}{\overline{S_2A_1}} = \frac{1}{-f_2} \quad (5.2)$$



Dans l'équation (5.2), le signe - devant f_1 vient du fait que la distance focale d'un miroir concave est négative alors que l'énoncé définit f_1 positive. Le signe - devant f_2 vient du fait que le miroir M_2 est à l'envers par rapport aux situations vues en cours.

Nous voulons que $A' = S_1$, donc $\overline{S_2A'} = -D$. En outre, $\overline{S_2A_1} = \overline{S_2F_1} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1F_1}$. La relation de conjugaison du miroir M_2 devient donc :

$$\frac{1}{-D} + \frac{1}{-D - f_1} = \frac{1}{-f_2} \\ \Rightarrow D^2 + D(f_1 - 2f_2) - f_1f_2 = 0$$

qui se résout en, sachant que $D < 0$:

$$D = \frac{1}{2} \left(-f_1 + 2f_2 - \sqrt{f_1^2 + 4f_2^2} \right) \\ = \frac{1}{2} \left(-f_1 + 2f_2 - f_1 \sqrt{1 + \frac{4f_2^2}{f_1^2}} \right)$$

L'approximation $f_1 \gg f_2$ donne immédiatement $D \approx -f_1$.

3. Prenons celui des rayons incidents qui passe par le centre C_1 de M_1 . Aux petits angles :

$$\alpha \approx \frac{\overline{A_1B_1}}{f_1} \Rightarrow \overline{A_1B_1} = \alpha f_1$$

Exprimons maintenant le grandissement de M_2 avec origine au sommet :

$$\gamma_2 = -\frac{\overline{S_2A'}}{\overline{S_2A_1}} = -\frac{\overline{S_2S_1}}{\overline{S_2F_1}} = -\frac{D}{D + f_1}$$

Donc $\overline{A'B'} = \gamma_2 \overline{A_1B_1}$ donne :

$$\overline{A'B'} = -\frac{\alpha D f_1}{f_1 + D} \\ = \alpha f_1 \frac{f_1 - 2f_2 + \sqrt{f_1^2 + 4f_2^2}}{f_1 + 2f_2 - \sqrt{f_1^2 + 4f_2^2}}$$

Faisons l'approximation $f_1 \gg f_2$ en suivant l'indication de l'énoncé :

$$\sqrt{f_1^2 + 4f_2^2} = f_1 \sqrt{1 + \frac{4f_2^2}{f_1^2}} \\ \approx f_1 \left(1 + \frac{2f_2^2}{f_1^2} \right)$$

D'où :

$$\overline{A'B'} \approx \alpha \frac{f_1^2}{f_2}$$

4. Application numérique : $\overline{A_1B_1} \approx 0,04 \text{ cm}$ et $\overline{A'B'} \approx 8 \text{ mm}$.

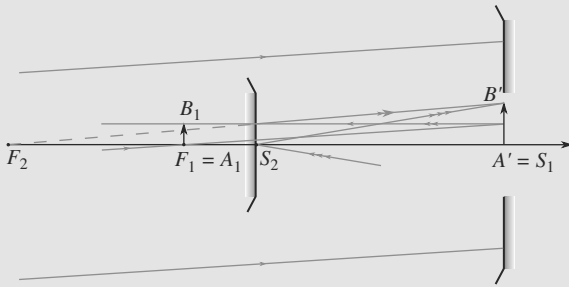


Figure 5.19 Corrigé de la construction d'une image par le télescope de Cassegrain.

5.19 Télescope du satellite Hipparcos

Ce qui fait la difficulté de l'exercice est plus l'enchaînement des questions que leur difficulté propre : en utilisant les relations de conjugaison et les tracés de rayon, on obtient aisément chaque réponse. Il faut alors continuer sans perdre le fil

1. a) L'étoile étant à l'infini optique (i. e. considéré à l'infini), l'image se forme au foyer image, i. e. en $\overline{SA'} = \overline{SF} = \frac{R}{2}$. Numériquement à 1 400 mm de S sur l'axe Sx.

b) On note S_P le sommet du miroir plan. L'image E_1 devient objet pour M_P . E_2 est le symétrique de E_1 par rapport au plan du miroir et donc $\overline{S_P E_1} = -a + \frac{R}{2}$ (figure 5.20) donne $\overline{S_P E_2} = +a - \frac{R}{2}$. On en déduit alors que $\overline{S E_2} = \overline{S S_P} + \overline{S_P E_2} = a + a - \frac{R}{2} = 2a - \frac{R}{2}$. Pour que l'image finale se forme sur le détecteur placé derrière S, cette abscisse doit être négative. Et donc $a < R/4$ soit $a < 700$ mm : M_P doit être plus près de M_C que de F.

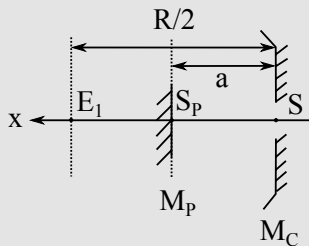


Figure 5.20 Position des miroirs et du foyer.

c) Le miroir plan ayant un grandissement de 1, la taille de l'image finale, qui doit tenir sur le capteur et celle de l'image intermédiaire sont identiques. On considère alors les rayons inclinés de $\alpha_c/2$ par rapport à l'axe, provenant du bord de la zone observable. Ils donnent une image E_1' située à $L = NI/2$, correspondent au bord de la cellule d'observation. On voit donc sur la figure 5.21 que $\tan(\frac{\alpha_c}{2}) = \frac{L}{\frac{R}{2}} = \frac{NI}{R}$ ce qui donne $\alpha_c = 2 \arctan(\frac{NI}{R})$ soit numériquement $0,902^\circ$.

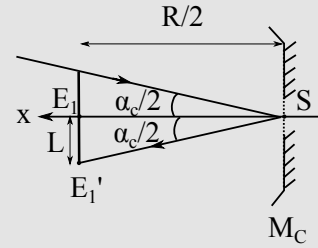


Figure 5.21 Bord de l'image intermédiaire.

2. a) Pour l'image se formant sur l'axe Sx, les rayons lumineux représentés font un angle de $\beta/4$ avec la normale, tant en incidence qu'en réflexion (loi de Snell-Descartes). Un tour complet représente donc, en partant de la normale du bas (figure 5.22) :

$$\frac{\beta}{4} + \frac{\beta}{4} + \frac{\pi}{2} + \varphi_0 + \varphi_0 + \frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

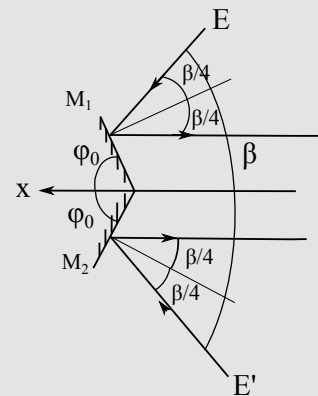


Figure 5.22 Relation entre les angles.

On en déduit donc que : $\varphi_0 = \frac{\pi - \beta}{2}$ soit numériquement $\varphi_0 = 75,5^\circ$.

- b) Cette question a été abordée lors de l'exercice **Rotation d'un miroir plan** du chapitre 2. On rappelle ci-dessous comment procéder.

Comme le montre la figure 5.23, une rotation de θ des miroirs diminue de θ l'angle d'incidence pour le rayon de la partie supérieure. Le rayon émergent est donc dévié de $\theta_1 = 2\theta$ (θ pour la rotation de la normale, θ pour l'amoindrissement de l'angle de réflexion).

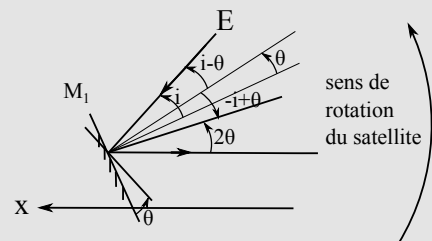


Figure 5.23 Rotation des miroirs.

Pour le rayon de la partie inférieure, la normale tourne aussi de θ et l'angle est augmenté de θ : on a aussi une rotation de 2θ dans le même que celle du satellite.

c) La figure 5.21 du 1.c) montre que si l'angle d'incidence est augmenté de $2d\theta$, le déplacement sur l'image intermédiaire est de $-d\theta R$ (on confond tangente et angle pour les petites valeurs angulaires car on est en dessous de 1° ici). Par le miroir plan, l'image obtenue est dans le même sens

que l'image intermédiaire et donc le déplacement sur les cellules est le même.

La vitesse de déplacement sur la cellule est donc en norme :

$$V = \frac{Rd\theta}{dt} = \frac{2\pi R}{T},$$

soit numériquement $2,29 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$.

Partie 2

Électrocinétique — Première période

Plan

6.1	État électrique d'un dipôle	84
6.2	Conventions d'orientation	86
6.3	Caractéristique statique d'un dipôle	87
6.4	Dipôles linéaires	88
	Synthèse	92
	Tests et exercices	93
	Corrigés des exercices	96

Introduction

Les notions développées dans ce chapitre sont, pour la plupart, définies uniquement en régime permanent, où toutes les grandeurs électriques sont indépendantes du temps. Heureusement, l'approximation consistant à les utiliser même si les grandeurs électriques sont variables est très bien vérifiée : c'est **l'approximation des régimes quasi stationnaires**.

Retenez que cette approximation est associée à la propagation quasiment instantanée des signaux électriques dans les circuits. Elle tend donc à perdre sa validité si les circuits sont trop longs ou les signaux trop rapidement variables.

Prérequis

- Notions d'électricité de terminale

Objectifs

- Définir intensité et tension
- Donner les lois des nœuds et des mailles
- Préciser les conventions générateur et récepteur
- Distinguer dipôles actifs et passifs
- Établir les expressions des puissances reçue ou émise par les dipôles

6.1 État électrique d'un dipôle

Un dipôle est un composant électrique à deux bornes. Son état électrique à un instant t est défini par deux grandeurs fondamentales : l'intensité du courant qui le traverse et la tension à ses bornes.

6.1.1 Intensité du courant électrique — Loi des nœuds

Entre deux instants voisins t et $t + dt$, une petite quantité de charge électrique dq traverse le dipôle. Le débit de charge correspondant est appelé **intensité du courant électrique** :

Définition

L'**intensité du courant** est définie par :

$$i(t) = \frac{dq}{dt}(t)$$

La conservation de la charge électrique entraîne la loi des nœuds : la somme des courants entrant dans un nœud est égale à la somme des courants qui en sortent. Cela est illustré sur l'exemple de la figure 6.1.



i est en ampère (A) et q en coulomb (C) donc $1 \text{ A} = 1 \text{ C.s}^{-1}$.

Méthode 1 Utiliser la loi des nœuds

En général, tenir compte de la loi des nœuds est très simple. Il est donc recommandé de l'exploiter directement sur le schéma d'un circuit, de manière à ne pas introduire inutilement des courants inconnus redondants.

Exemple d'application

Exploitez la loi des nœuds sur le nœud N de la figure 6.1.

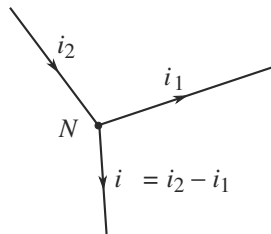


Figure 6.1 Illustration de la loi des nœuds.

Solution

Pour fixer les idées, nous pouvons dire que « le courant i se coupe en deux au niveau du nœud N », en i_1 et i_2 . Il semble donc y avoir deux nouvelles grandeurs inconnues, mais $i_2 = i - i_1$. Il est donc, en fait, inutile d'introduire deux grandeurs. Il est préférable de travailler directement avec les courants i_1 et $i - i_1$.

6.1.2 Tension — Loi des mailles



Dans le chapitre 30, nous relierons ce potentiel à l'énergie potentielle que possède un électron placé en A.



- Tension et potentiel sont en volt (V).
- La tension, elle, ne dépend pas du choix de la masse. Ainsi, si nous décalons l'origine des potentiels d'une quantité V_0 , la différence de potentiel $V(A) - V(B)$ est inchangée.



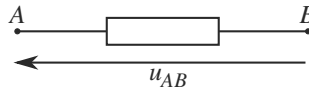
Malgré cela, les tensions ne sont pas des vecteurs ! Elles ne s'ajoutent pas vectoriellement, d'ailleurs l'« angle » que font deux tensions entre elles n'a aucune signification.

En chaque point M du circuit est défini un **potentiel électrique** $V(M)$ défini à une constante additive près. Fixer la constante revient à sélectionner un point du circuit arbitrairement et lui attribuer un potentiel nul. Ce point est alors appelé **masse**.

Pour un dipôle dont les deux bornes sont A et B, la **tension** est définie par la **différence de potentiel** :

Définition

La **tension aux bornes d'un dipôle** est définie par :



$$u_{AB} = V(A) - V(B)$$

Les tensions sont additives, via une relation de type Chasles :

$$u_{AB} = V_A - V_B = (V_A - V_C) + (V_C - V_D) + (V_D - V_B) = u_{AC} + u_{CD} + u_{DB}$$

Appliquée à une maille, cette additivité fournit la loi des mailles : **la somme des tensions le long d'une maille est nulle**.

6.2 Conventions d'orientation

6.2.1 Orientation de l'intensité



Cette convention a été établie avant la découverte de l'électron.

Définition

Le **courant** est défini comme le sens de circulation des charges positives.

Le choix d'orientation effectué pour le courant **n'a aucun rapport** avec le sens dans lequel il circule réellement. Ce n'est qu'une convention : la **valeur numérique** du courant sera positive si le courant circule vraiment dans le sens indiqué, elle sera négative sinon.

6.2.2 Conventions récepteur et générateur

Les deux manières de choisir les orientations relatives de la tension et du courant correspondent à deux conventions résumées dans le tableau ci-dessous.



Ceci n'a rien à voir avec le rôle récepteur ou générateur du dipôle. Un dipôle récepteur peut très bien être décrit en convention générateur par exemple.



\mathcal{P} est en watt (W) avec $1 \text{ W} = 1 \text{ J.s}^{-1}$.

Convention	Schéma	Propriétés
Récepteur		$\mathcal{P} = ui$ est la puissance algébriquement reçue $\mathcal{P} > 0$: dipôle récepteur $\mathcal{P} < 0$: dipôle générateur
Générateur		$\mathcal{P} = ui$ est la puissance algébriquement fournie $\mathcal{P} > 0$: dipôle générateur $\mathcal{P} < 0$: dipôle récepteur

Méthode 2 Exploiter la loi des mailles

1. Identifiez la maille à exploiter en indiquant les nœuds appartenant à cette maille.
2. Exploitez la relation de Chasles des tensions sur un tour complet de la maille.
3. Une fois les flèches de courant ajoutées, chaque dipôle est alors automatiquement placé dans une convention d'orientation, récepteur ou générateur. Veillez donc à sélectionner la bonne relation courant-tension dans chaque cas. Par exemple, $u = Ri$ pour une résistance en convention récepteur et $u = -Ri$ en convention générateur.
4. Exploitez cette relation courant-tension pour chaque terme de la loi des mailles.

Exemple d'application

Écrivez la loi des mailles pour la maille $ABNPE$ de la figure 6.2.

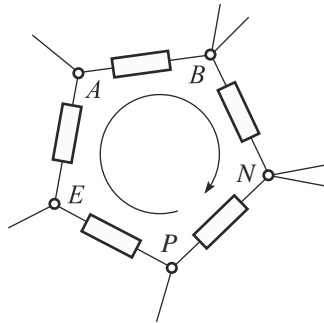


Figure 6.2 Écriture de la loi des mailles.

Solution

La relation de Chasles tout le long de cette maille, partant de A et revenant au point A, s'écrit :

$$u_{AB} + u_{BN} + u_{NP} + u_{PE} + u_{EA} = 0$$

6.3 Caractéristique statique d'un dipôle

Elle est définie comme **la courbe de $i(u)$ en régime permanent**. Tout point de la caractéristique est un **point de fonctionnement** possible.

- Si elle est impaire, le dipôle est dit **symétrique** (pas de sens de branchement, une résistance par exemple). Sinon le dipôle est dit **polarisé** (une diode par exemple).
- Si elle passe par l'origine, le dipôle est dit **passif** (exemple : une résistance), sinon il est dit **actif** (exemple : un générateur de tension). Il est caractérisé par sa tension en circuit ouvert u_0 (tension pour $i = 0$) et son courant de court-circuit i_0 (courant pour $u = 0$), comme illustré figure 6.3.

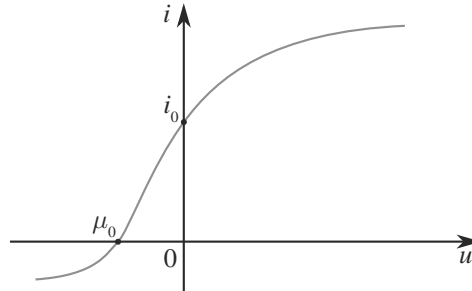


Figure 6.3 Exemple de caractéristique statique d'un dipôle actif.

Méthode 3 exploiter les caractéristiques statiques

C'est surtout en régime permanent que ces caractéristiques seront utilisées. Quand deux dipôles sont branchés l'un sur l'autre (bornes reliées), ils sont traversés par le même courant et soumis à la même tension.

Donc les valeurs de cette intensité et de cette tension sont déterminées par l'intersection de leurs caractéristiques statiques.



Quand deux dipôles sont branchés l'un sur l'autre, il peut apparaître des contraintes sur les conventions d'orientation. Reportez-vous à l'exercice 6.11 pour un exemple.

6.4 Dipôles linéaires

C'est un dipôle pour lequel tension et courant sont reliés par une équation différentielle linéaire. Sa caractéristique statique est nécessairement une droite $i = au + b$, d'où l'appellation.

6.4.1 Dipôles passifs

Ces dipôles sont, le plus souvent, des récepteurs, donc ils sont habituellement placés en convention récepteur. Dans cette convention, nous avons :



R est en ohm (Ω), C en farad (F) et L en henry (H).

Type	Caractéristique	Équivalence en régime permanent	Symbole
Résistance	$u = Ri$	Résistance	
Condensateur	$i = C \frac{du}{dt}, q = Cu$	Coupe-circuit ($i = 0$)	
Bobine	$u = L \frac{di}{dt}$	Fil ($u = 0$)	

Une résistance est donc toujours un récepteur d'énergie : $\mathcal{P} = ui = Ri^2 > 0$.

On peut voir sur la photo 6.1 deux boîtes de résistance réglable et des composants qui sont utilisés sur des plaquettes.

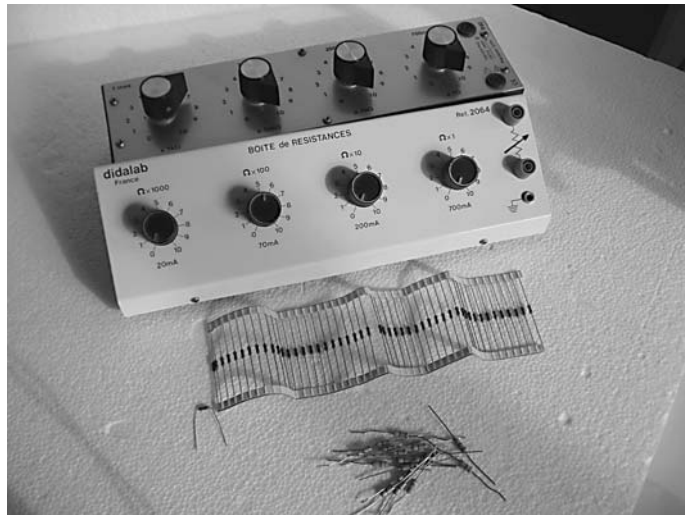


Photo 6.1 Quelques résistances qu'on rencontre au laboratoire.

Sur la photo 6.2, on peut reconnaître une boîte de capacité réglable et des composants de base : condensateur polarisé à gauche et symétriques pour les trois autres.

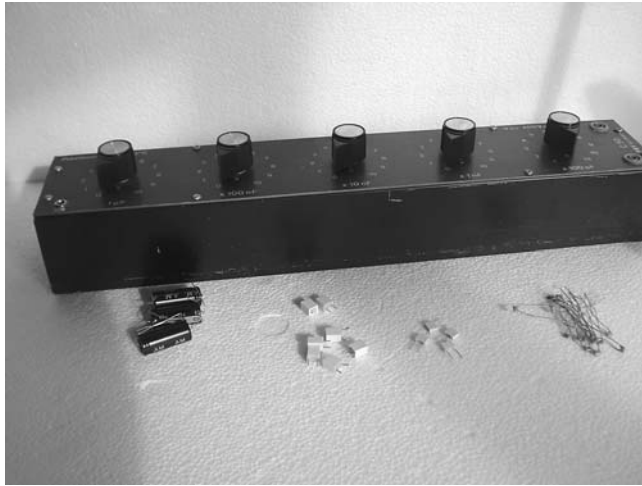


Photo 6.2 Des condensateurs qu'on rencontre au laboratoire.

Les bobines qu'on voit sur la photo 6.3 on toutes en commun leur taille plus importante que pour les résistances et condensateurs individuels vus précédemment. Elles sont toutes constituées de fils de cuivre enroulés sur un support. Celle de plus grande auto-inductance L est au fond ; elle est dotée d'un noyau de fer doux que l'on peut tirer pour régler la valeur de L .

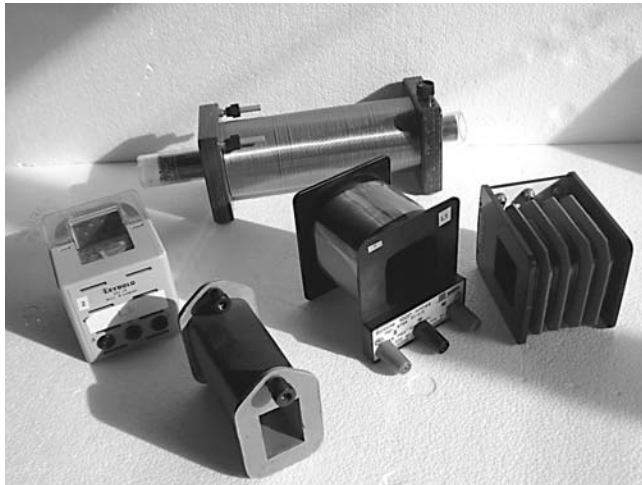


Photo 6.3 Diverses bobines d'induction rencontrées au laboratoire.



Une bobine réelle est modélisée par l'assemblage série d'une bobine idéale L et d'une résistance r , de sorte que $u = ri + L di/dt$.

Un condensateur ou une bobine peuvent être des récepteurs comme des générateurs (selon qu'ils se chargent ou se déchargent) :

$$\mathcal{P} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu^2 \right) \quad \text{pour un condensateur}$$

$$\mathcal{P} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) \quad \text{pour une bobine}$$

Ces relations montrent qu'un condensateur impose la continuité de la tension à ses bornes et qu'une bobine celle du courant qui la traverse.

Méthode 4 Attribuer les charges algébriques portées par les armatures d'un condensateur

Les deux armatures d'un condensateur portent toujours des charges opposées, notées q et $-q$.

Vous pouvez choisir arbitrairement le rôle de chaque armature mais il y a souvent un choix qui est plus malin que l'autre, selon l'orientation du courant i traversant le condensateur.

Si la flèche de i est orientée vers l'armature q , alors vous aurez la relation habituelle $i = dq/dt$. Mais si elle est orientée vers l'armature $-q$, vous aurez $i = -dq/dt$.

C'est en plaçant le condensateur en convention récepteur **et** en choisissant pour armature positive celle vers laquelle se dirige i que vous retrouvez les relations habituelles $i = C du/dt$ et $i = dq/dt$.

Exemple d'application

Soit le circuit de la figure 6.4. Le choix de l'armature positive pour chaque condensateur est donné sur la figure. Placez toutes les orientations manquantes (intensités, tensions) de la manière la plus raisonnable possible. Avez-vous vraiment beaucoup de liberté de choix ?

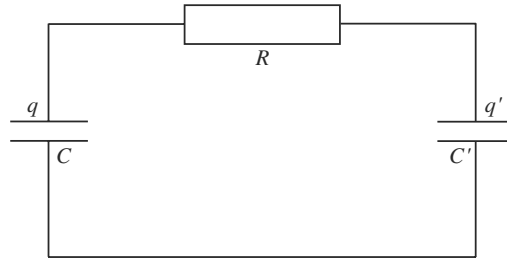


Figure 6.4 Exercice d'orientation.

Solution

Si vous cherchez autant que possible à mettre les récepteurs en convention récepteur et les générateurs en convention générateur, un choix en entraîne un autre et il n'y a finalement que peu de possibilités. Une de ces possibilités est donnée figure 6.5.

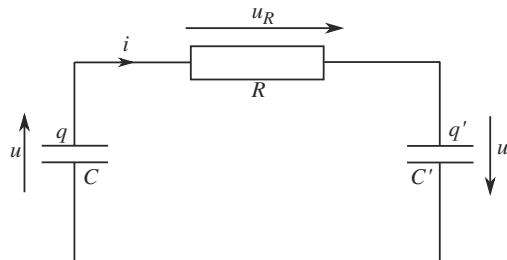


Figure 6.5 Exercice d'orientation : corrigé.

La flèche du courant i est dirigée vers l'armature positive q' pour avoir $i = dq'/dt$. La flèche de tension aux bornes de C' est alors imposée pour que C' soit en convention récepteur. Alors $i = C' du'/dt$ et $u' = q'/C'$.

La flèche de courant est à l'opposé de la flèche de tension aux bornes de R qui est en convention générateur. Alors $u_R = -Ri$.

Le courant i est alors sortant de l'armature q , de sorte que $i = -dq/dt$. La flèche de tension aux bornes de C étant placée pour avoir $q = Cu$, le condensateur C est alors en convention générateur et $i = -C du/dt$.



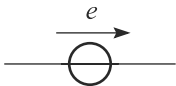
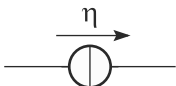
Vous obtenez une autre solution équivalente en permutant les deux condensateurs.

6.4.2 Dipôles actifs

Habituellement, ces dipôles sont placés en convention générateur car ce sont des générateurs. Dans cette convention, nous avons :



- La tension aux bornes d’une source idéale de tension s’appelle sa **force électromotrice** (fem).
- Le courant débité par une source idéale de courant s’appelle son **courant électromoteur** (cem).

Type	Caractéristique	Équivalence quand éteinte	Symbole
Source idéale de tension	$u = e$	Fil ($u = 0$)	
Source idéale de courant	$i = \eta$	Coupe-circuit ($i = 0$)	

Synthèse

Savoirs

- Définir l’intensité
- Écrire une tension à partir des potentiels
- La loi des nœuds
- La loi des mailles
- Les conventions générateur et récepteur

- Les puissances reçue et cédée par les dipôles
- Caractéristique statique d’un dipôle
- Relation entre i et u pour R , L et C
- Énergies stockées dans L et C , puissance dissipée dans R

Savoir-faire

- Exprimer la loi des nœuds et la loi des mailles sur un circuit

- Exprimer les puissances reçue ou cédée suivant la convention utilisée sur le dipôle
- Distinguer dipôles linéaires et non linéaires, actifs et passifs.

Mots-clés

- Intensité,
- tension,
- loi des nœuds,
- loi des mailles,
- convention générateur,
- convention récepteur,

- puissance cédée,
- puissance reçue,
- résistance,
- bobine,
- condensateur,
- source idéale de courant,
- source idéale de tension.

Tests de connaissances

- 6.1 L'intensité est le flux de charge électrique au travers d'une section de conducteur.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 6.2 L'énergie contenue dans un dipôle varie continûment.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 6.3 Ri^2 est une énergie.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 6.4 Il est impératif d'orienter i dans le sens réel du courant.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 6.5 On reconnaît un dipôle passif parce qu'il est en convention récepteur dans les circuits.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 6.6 Un dipôle passif reçoit toujours de l'énergie.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 6.7 Si la tension aux bornes d'une source idéale de tension est constante, l'intensité qui la traverse ne l'est pas.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 6.8 En régime continu, un condensateur n'a aucune action sur un circuit.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 6.9 Un dipôle passif n'est pas dangereux pour l'utilisateur humain.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

6.10 Équation gouvernant un courant

Dans le circuit de la figure 6.6, déterminez l'équation différentielle gouvernant le courant i . Vous ne cherchez pas à la résoudre.

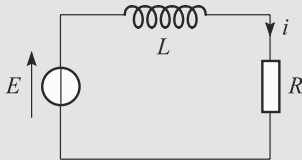


Figure 6.6 Recherche d'une équation différentielle.

6.11 Caractéristiques de dipôles linéaires actifs

- Tracez les caractéristiques statiques des dipôles D_1 et D_2 des figures 6.7 et 6.8.
- Les deux dipôles sont branchés l'un sur l'autre. Déterminez leur point de fonctionnement.

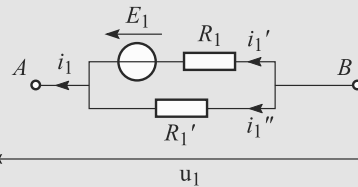


Figure 6.7 Dipôle actif D_1 .

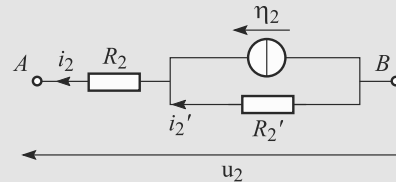


Figure 6.8 Dipôle actif D_2 .

Données : $E_1 = 5 \text{ V}$; $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$; $R_1' = 500 \Omega$; $\eta_2 = 10 \text{ mA}$; $R_2 = 1,5 \text{ k}\Omega$; $R_2' = 1 \text{ k}\Omega$.

Exercices d'approfondissement

6.12 Résistance non linéaire

Considérons une résistance non linéaire (notée RNL) capable de dissiper jusqu'à $\mathcal{P}_M = 1 \text{ W}$ sans être détruite par surchauffe. Sa caractéristique statique est de la forme $i = ku^n$, où k et n sont des constantes. Cette RNL est étudiée en convention récepteur (figure 6.9).

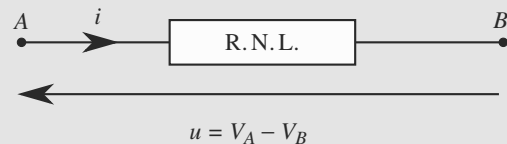


Figure 6.9 Symbole de la résistance non linéaire.

1. Précisez les unités de k et n , sachant que i sera exprimé en mA et u en V.
2. En exploitant l'allure du graphe donnant $\log(|i|)$ en fonction de $\log(|u|)$, proposez une méthode pour déterminer les valeurs de k et n .
3. Deux points de fonctionnement ont été relevés expérimentalement : $M_1(u_1 = 30 \text{ V}, i_1 = 0,27 \text{ mA})$ et $M_2(u_2 = 90 \text{ V}, i_2 = 7,29 \text{ mA})$. En supposant que la modélisation présentée ci-dessus est fidèle au dipôle réel, déterminez numériquement k et n .
4. Tracez la caractéristique statique de la RNL avec soin. Quels qualificatifs pourraient décrire ce dipôle ?
5. Calculez, en fonction de \mathcal{P}_M et k (vous remplacerez directement n par sa valeur numérique), les valeurs maximales de u et i que la RNL peut supporter sans dégât. Applications numériques.

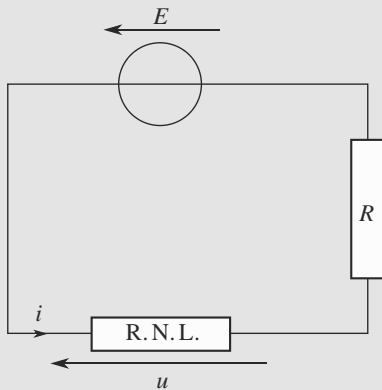


Figure 6.10 Montage incluant la résistance non linéaire.

6. La RNL est placée en série avec un générateur de tension (fem E) et une résistance R (figure 6.10). Déterminez graphiquement et numériquement le courant traversant la RNL ainsi que la tension à ses bornes.

Données : $R = 10 \text{ k}\Omega$; $E = 100 \text{ V}$.

6.13 Étude d'une photopile

Une photopile Ph (ou cellule photovoltaïque) est un dipôle générateur. Son comportement peut être étudié par le montage de la figure 6.11 où nous disposons d'une résistance variable étalonnée et d'un voltmètre.

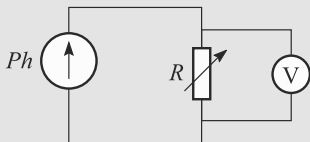


Figure 6.11 Montage de la photopile Ph.

Ce montage permet de construire la figure 6.12, courbe caractéristique $I(U)$ donnée pour une cellule de 1 m^2 et relative à un éclairement $E = 800 \text{ W.m}^{-2}$ (éclairement solaire maximal). La courbe est complétée par le tableau donnant U en fonction de R .

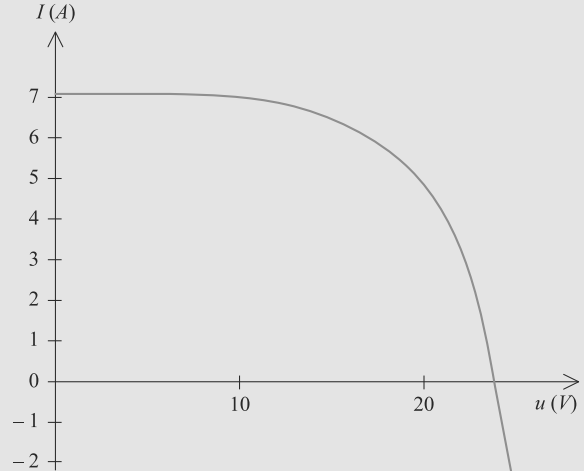


Figure 6.12 Caractéristique $I(U)$ de la photopile Ph.

$R (\Omega)$	∞	80	40	20	15
$U (\text{V})$	24,5	24,3	24,25	24	23,8
$R (\Omega)$	10	5	3	2	0,5
$U (\text{V})$	23,5	22	17,9	14,2	3,54

1. Montrez que la mesure de U suffit à établir la courbe caractéristique.
2. De quelle puissance maximale pouvons-nous disposer ? Vous pourrez utiliser une solution graphique ou numérique et donnerez le résultat avec deux chiffres significatifs.
3. Avec quelle résistance aux bornes de la cellule faut-il opérer pour en tirer la puissance maximale ? Donnez les valeurs de U et I correspondantes.
4. La caractéristique expérimentale est bien modélisée par la fonction :

$$I(U) = -I_0 \left(e^{\frac{U}{U_0}} - 1 \right) + AE$$

où A est une constante.

Montrez que l'étude de la courbe (ou du tableau de valeurs correspondant) permet d'obtenir les valeurs de A , U_0 et I_0 . Vous supposerez que les intersections avec l'axe horizontal correspondent à des valeurs de U largement supérieures à U_0 et vérifierez a posteriori cette hypothèse.

Applications numériques : calculez A , U_0 , I_0 .

5. Plaçons-nous maintenant au point le plus avantageux sur la courbe. Nous voulons construire une centrale solaire utilisant une puissance solaire de 1 MW.
- De combien de cellules élémentaires de 1 m^2 faut-il disposer ?
 - Si nous utilisons des suites de 50 cellules placées en série, de quelle tension pourrons-nous disposer (en supposant la résistance des connexions négligeable) en fonctionnement à vide ou optimal ?
 - Ces séries de 50 étant elles-mêmes disposées en parallèle, quelle sera l'intensité globale que nous pourrons obtenir de l'ensemble, en fonctionnement en court-circuit ou optimal ?
 - Quelle est alors la puissance maximale théorique disponible de cette « centrale » et son rendement ?
 - Quelle est la résistance de cellule qui permet de disposer de cette puissance et donc optimise le fonctionnement ? Comparez-la à celle d'une cellule élémentaire de 1 m^2 .
6. Nous voulons transporter l'énergie produite à un utilisateur distant de plusieurs dizaines de kilomètres. La ligne utilisée est constituée de fils de cuivre dont la résistance totale est de $R_{\text{ligne}} = 170 \Omega$.
- Si l'utilisation se fait sur une résistance $R_{\text{util}} = 6 \Omega$, de quelle fraction de la puissance initiale pourrons-nous disposer ?
7. Le calcul précédent montre que, à l'évidence, ce mode d'utilisation n'est pas convenable.
- Si la tension est élevée au départ à 100 kV, que devient l'intensité à transporter, si la puissance est conservée par le système d'élévation de tension ?
 - Quelle est alors la chute de tension provoquée par la ligne ?
 - Quelle fraction de la puissance initiale est maintenant utilisable ?
 - Avec quelle résistance doit travailler maintenant l'utilisateur ?

6.1

Vrai, c'est sa définition.

6.2

Vrai. On ne dispose pas d'une puissance infinie... L'énergie des dipôles varie en effet continûment ce qui provoque la continuité de i au travers des bobines et de u aux bornes des condensateurs.

6.3

Faux. Ri^2 est la puissance dissipée par effet joule dans une résistance R , pas l'énergie.

6.4

Faux. L'orientation de i dans les circuits est arbitraire.

6.5

Faux, la convention d'orientation est indépendante de la nature des dipôles même si la convention récepteur est adaptée à la description des dipôles passifs.

6.6

Faux. Une bobine ou un condensateur reçoit et réémet alternativement l'énergie : un dipôle passif peut donc émettre de l'énergie même si en moyenne l'énergie émise est nulle.

6.7

Vrai. L'intensité traversant la source ne peut être connue qu'indirectement en considérant le reste du circuit avec lequel il est connecté.

6.8

Faux. En régime continu, un condensateur se comporte comme un coupe-circuit, il empêche donc le courant de passer.

6.9

Faux. Une bobine ou un condensateur peut contenir de l'énergie ; ces dipôles sont donc potentiellement dangereux (risque d'électrocution) mais dans les circuits usuels, les énergies stockées sont très modestes (risques en électrotechnique).

6.10 Équation gouvernant un courant

Méthode mise en jeu : n°2.

Ne vous laissez pas impressionner par le fait qu'on vous demande une équation différentielle. Ce n'est qu'une application de la méthode n°2 avec une bobine.

Le paramétrage est celui de la figure 6.13.

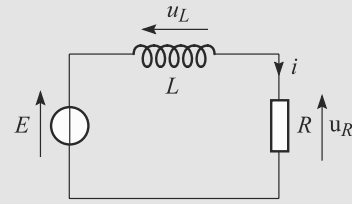


Figure 6.13 Paramétrage pour exploiter la loi des mailles.

La loi des mailles s'écrit alors $E = u_L + u_R$. La bobine et la résistance étant en convention récepteur, cela devient :

$$E = L \frac{di}{dt} + Ri$$

qui est l'équation différentielle cherchée.

6.11

Caractéristiques de dipôles linéaires actifs

Méthodes mises en jeu : n°1, 2, 3.

Cet exercice illustre la notion de point de fonctionnement. Attendez-vous donc à devoir étudier des intersections de caractéristiques, analytiquement ou graphiquement.

1. Pour le dipôle D_1 , le montage en parallèle conduit à $u_1 = E_1 - R_1 i_1' = -R_1' i_1''$ et la loi des nœuds s'écrit $i_1 = i_1' + i_1''$. D'où la caractéristique :

$$i_1 = \frac{E_1 - u_1}{R_1} - \frac{u_1}{R_1'}$$

Pour le dipôle D_2 , il faut utiliser successivement l'additivité des tensions en série et la loi des nœuds dans le montage en parallèle :

$$\begin{cases} u_2 = -R_2 i_2 - R_2' i_2' \\ i_2 = \eta_2 + i_2' \end{cases} \Rightarrow i_2 = \frac{R_2' \eta_2 - u_2}{R_2 + R_2'}$$

2. Comme le montre la figure 6.14, il est nécessaire de retourner l'orientation du courant pour l'un des deux dipôles, ici D_2 .

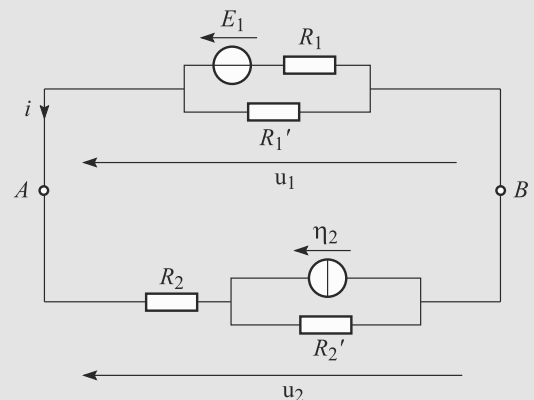


Figure 6.14 Circuit incluant les dipôles D_1 et D_2 .

Alors le point de fonctionnement est à l'intersection des deux caractéristiques, au point P sur la figure 6.15.

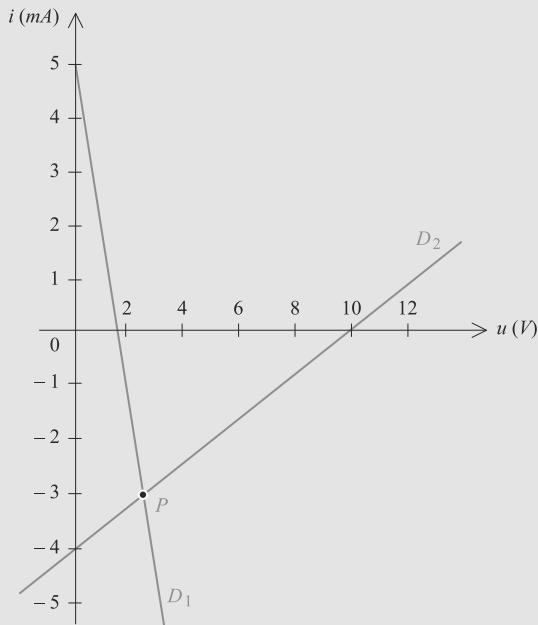


Figure 6.15 Recherche graphique du point de fonctionnement.

Numériquement :

$$\begin{cases} 1000i = 5 - 3u \\ u = 10 + 2500i \end{cases}$$

qui se résout en $u = 2,65 \text{ V}$ et $i = -2,94 \text{ mA}$.

6.12 Résistance non linéaire

Méthodes mises en jeu : $n^{\circ}2, 3$.

L'exercice est en deux temps : détermination de la caractéristique d'un dipôle non linéaire, puis utilisation pour trouver un point de fonctionnement. Mais contrairement à l'exercice 11, la caractéristique du dipôle n'étant pas linéaire, un calcul du point d'intersection n'est pas forcément envisageable et une recherche graphique a été choisie.

Un petit indice qui ne doit pas vous échapper : le dipôle non linéaire est une **résistance**. Posez-vous donc la question de savoir ce que cette RNL doit avoir en commun avec la résistance linéaire que vous connaissez bien.

1. n est sans dimension (argument d'une exponentielle) et k a pour unité des $\text{mA} \cdot \text{V}^{-n}$.
2. $i = ku^n$ donne $\log(|i|) = n \log(|u|) + \log(|k|)$. Dans ce modèle, $\log(|i|)$ est donc une fonction affine de $\log(|u|)$, avec une pente n et une ordonnée à l'origine $\log(|k|)$.



Attention à la valeur absolue ! Sans elle, il ne serait pas légitime de prendre le logarithme de la caractéristique.

La mesure de l'ordonnée à l'origine donne $\log(|k|)$, en prendre l'exponentielle donne $|k|$. Sachant que le dipôle est une résistance en convention récepteur, k est nécessaire positif ($\mathcal{P} = ui > 0$), donc k est entièrement déterminé.

La mesure de la pente donne directement n .

3. Les deux points de fonctionnement fournissent deux équations à deux inconnues $\log(k)$ et n :

$$\begin{cases} \log(i_1) = \log(k) + n \log(u_1) \\ \log(i_2) = \log(k) + n \log(u_2) \end{cases}$$

et donc :

$$n = \frac{\log(i_2) - \log(i_1)}{\log(u_2) - \log(u_1)} \approx 3$$

Ensuite, en utilisant la première équation par exemple :

$$\begin{aligned} \log(k) &= \log(i_1) - n \log(u_1) \\ \Rightarrow k &= 10^{\log(i_1) - n \log(u_1)} \approx 10^{-5} \text{ mA} \cdot \text{V}^{-3} \end{aligned}$$

4. Voir figure 6.16. Le point origine (0, 0) est un point de fonctionnement possible donc la RNL est passive.

Si (i, u) est un point de fonctionnement possible, alors $(-i, -u)$ en est un aussi. Donc la RNL est symétrique.

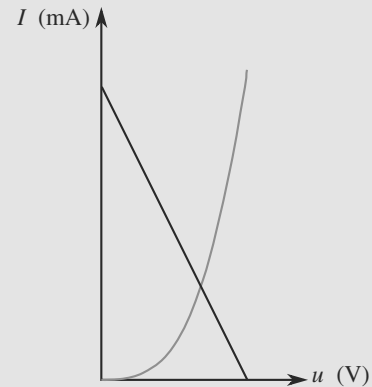


Figure 6.16 Caractéristique de la résistance non linéaire.

5. Soit (i, u) des valeurs du courant et de la tension qui réalisent $\mathcal{P}_M = ui$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_M &= ku^4 \Rightarrow u_{\max} = \left(\frac{\mathcal{P}_M}{k} \right)^{\frac{1}{4}} \approx 100 \text{ V} \\ \mathcal{P}_M &= k^{1/4} i^{5/4} \Rightarrow i_{\max} = \left(\frac{\mathcal{P}_M^4}{k} \right)^{1/5} \approx 10 \text{ mA} \end{aligned}$$

6. La caractéristique de l'ensemble générateur+résistance linéaire est $u = E - Ri$, tracée sur la figure 6.16. L'étude de l'intersection des deux courbes à la calculatrice fournit le point de fonctionnement ($i \approx 3,15 \text{ mA}$; $u \approx 68 \text{ V}$).

6.13

Étude d'une photopile

La lecture de l'énoncé doit vous montrer que l'exercice présente peu de difficultés techniques. Par contre, il nécessite une lecture attentive pour bien comprendre la problématique. Ne cherchez pas à aller vite, lisez plusieurs fois chaque question et faites (au brouillon) autant de schémas que nécessaire.

1. R étant connue, la mesure de U permet d'accéder à I par la loi d'Ohm $I = U/R$. Nous avons alors tous les éléments pour tracer I en fonction de U .
2. La puissance reçue par la charge est $\mathcal{P} = U^2/R$. Nous pouvons alors calculer \mathcal{P} en fonction de U ou de R . En prolongeant la courbe, nous obtenons le maximum de \mathcal{P} et la valeur de R (ou de U) correspondante.

$R (\Omega)$	0,5	2	3	5	10
$\mathcal{P} (W)$	25,1	100,8	106,8	96,8	55,2

$R (\Omega)$	15	20	40	80	∞
$\mathcal{P} (W)$	37,8	28,8	14,7	7,4	0

Nous trouvons finalement $R = 3,4 \Omega$ pour une puissance maximale $\mathcal{P}_{\max} = 110 W$.

3. La courbe précédente donne une résistance d'utilisation optimale de $3,4 \Omega$. Cela correspond à $U = 19,3 V$ et $I = 5,7 A$.
4. Pour U faible, le terme e^{U/U_0} est presque égal à 1 donc $I \simeq AE = 7,1 A$. Donc $A = I/E$ donne :

$$A = 8,9 \text{ mA} \cdot W^{-1} \cdot m^2$$

Utilisons une propriété générale de l'exponentielle. La tangente en un point U quelconque intercepte l'asymptote de $I(U)$ en un point d'abscisse $U - U_0$. Donc, d'après la figure 6.17 :

$$U_0 = 3,4 V$$

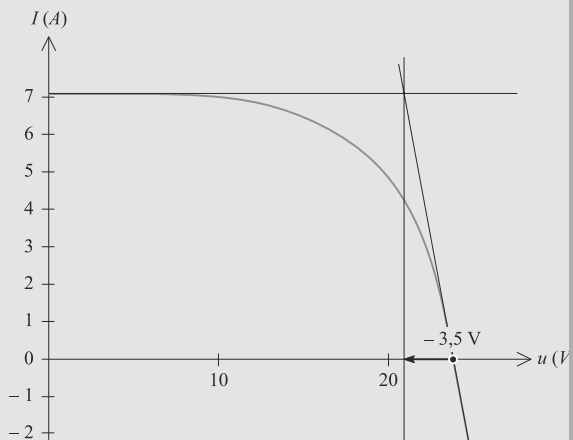


Figure 6.17 Exploitation de la caractéristique.



C'est la même propriété que vous avez utilisée en terminale pour justifier, lors de la charge d'un dipôle RC , la tangente à l'origine coupait l'asymptote à l'abscisse $\tau = RC$.

Le point d'ordonnée $I = 0$ correspond à $U = 23,8 V$. Alors $AE = I_0 e^{U/U_0}$ donc :

$$I_0 = AE e^{-U/U_0} = 6,5 \text{ mA}$$

Numériquement, on obtient $U_0 = 3,4 V$ (faible devant la valeur donnant $I = 0$).

5. a) Nous devons installer $1\,000\,000/800 = 1\,250$ cellules de $1 m^2$ pour utiliser $1 MW$ solaire.

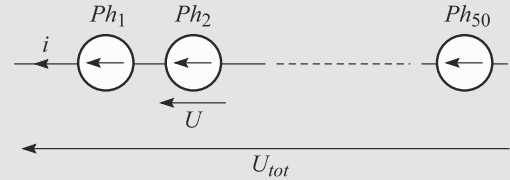


Figure 6.18 Assemblage série de 50 photopiles.

b) C'est le montage de la figure 6.18. Si les 50 cellules en série ne sont traversées par aucun courant, la tension U aux bornes de chacune égale à $24,5 V$ d'après l'énoncé. Par additivité des tensions, la tension « à vide » du dispositif est donc de :

$$U_{\text{tot}} = 50 * 24,5 = 1\,225 V$$

Mais en utilisation optimale, la tension aux bornes d'une cellule tombe à $U = 19,3 V$ soit :

$$U_{\text{tot}} = 50 * 19,3 = 965 V$$

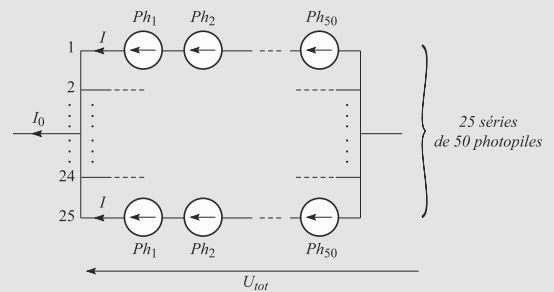


Figure 6.19 Assemblage parallèle de 25 cellules, chacune contenant 50 photopiles en série.

c) C'est le montage de la figure 6.19. En court-circuit, les deux bornes du dipôle global sont reliées l'une à l'autre donc tous les blocs de 50 cellules sont court-circuités.

Dans un bloc, toutes les cellules ont même tension à leurs bornes. Donc si la somme de leurs tensions est nulle, la tension de chacune est nulle. Dans ces conditions, chaque cellule est traversée par un courant de $7,1 A$. Donc chaque bloc débite un courant de $7,1 A$. Par loi des nœuds :

$$I_0 = 25 * 7,1 = 178 A$$

En utilisation optimale, le courant dans chaque cellule tombe à 5,7 A donc :

$$I_0 = 25 * 5,7 = 143 \text{ A}$$

d) La centrale fonctionne de manière optimale si c'est chaque cellule fonctionne de manière optimale. La puissance maximale \mathcal{P}_d du dispositif est alors :

$$\mathcal{P}_d = N * \mathcal{P}_{\max} = 1250 * 110 = 140 \text{ kW}$$



\mathcal{P}_d peut être obtenue également par le produit de la tension totale par le courant total : $\mathcal{P}_d = 143 * 965 = 140 \text{ kW}$.

Le rendement optimale est celui de chaque cellule soit $110/800 = 14 \%$ ce qui est faible.

e) Nous pouvons obtenir la résistance optimale par :

$$R_{\text{totale}} = \frac{\mathcal{P}_{\max}}{I^2} = 6,8 \Omega$$

Par ailleurs, si 50 résistances R sont en série, elles ont une résistance totale de $50R$. Si 25 de ces blocs sont en parallèle, leur résistance totale est divisée par 25. Donc la résistance totale est $50R/25 = 2R$.

Donc $R_{\text{totale}} = 2R$, ce qui correspond bien à la valeur optimale de $3,4 \Omega$ trouvée précédemment.

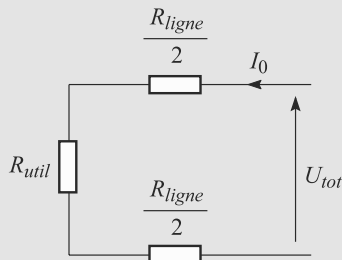


Figure 6.20 Utilisation de la batterie de photopiles.

6. Le montage est alors celui de la figure 6.20, où la batterie de photopiles est représentée comme un seul dipôle. Par diviseur de tension :

$$\frac{R_{\text{util}}}{R_{\text{util}} + R_{\text{ligne}}} = \frac{6}{170} = 3,5 \%$$

Comme R_{util} et R_{ligne} sont en série, elles sont traversées par le même courant I_{eff} donc en multipliant haut et bas la fraction précédente par I_{eff}^2 il vient :

$$\frac{R_{\text{util}} I_{\text{eff}}^2}{R_{\text{util}} I_{\text{eff}}^2 + R_{\text{ligne}} I_{\text{eff}}^2} = 3,5 \%$$

qui se lit comme le rapport entre la puissance reçue à l'utilisation et la puissance totale.

Donc la fraction de puissance consommée est de 3,5 %. C'est trop faible.

7. a) La puissance étant conservée, si nous élevons la tension d'un facteur 100, l'intensité est divisée par 100.

b) La puissance consommée en ligne est alors divisée par $100^2 = 10\,000$.

c) Gardons la valeur de 140 kW trouvée précédemment. Pour une puissance de 140 kW et une tension de 100 kV, le courant est de 1,4 A.

Cela correspond à des pertes en ligne de $170 * 1,4^2 = 320 \text{ W}$ soit 0,2 % de la puissance disponible. Le rendement passe donc à 99,8 % ce qui est tout à fait satisfaisant.



Cela illustre l'intérêt d'utiliser des hautes tensions pour le transport de l'électricité jusqu'aux lieux de consommation.

d) Il faut ajouter la résistance de la ligne R_{ligne} à celle de l'utilisation R_{util} . La somme des deux est la résistance totale soumise à la tension de 100 kV et traversée par le courant 1,4 A. D'où :

$$R_{\text{ligne}} + R_{\text{util}} = \frac{100\,000}{1,4} = 71,4 \text{ k}\Omega$$

Donc la résistance d'utilisation est d'environ 71,2 k Ω .

Théorèmes généraux pour les circuits linéaires

CHAPITRE 7

Plan

7.1	Associations série et parallèle	100
7.2	Associations de dipôles linéaires passifs	101
7.3	Associations de dipôles linéaires actifs	101
7.4	Associations de dipôles actifs et passifs	104
	Synthèse	106
	Tests et exercices	107
	Corrigés des exercices	111

Introduction

Ce chapitre est essentiellement une collection d'outils pour étudier toute grandeur électrique dans un circuit composés de dipôles linéaires. Ces outils sont rigoureusement valables en régime permanent et approximativement dans le cadre de l'ARQS.

Prérequis

- Lois des nœuds, loi des mailles
- Dipôles R , L et C
- Sources idéales de tension et de courant

Objectifs

- Établir les lois d'association des dipôles linéaires
- Établir l'équivalence entre modèles de générateurs linéaires de Thévenin et de Norton
- Établir les ponts diviseurs (de courant et de tension)
- Introduire le théorème de superposition d'Helmholtz

7.1 Associations série et parallèle



On utilise souvent la notation \parallel pour désigner une association parallèle. Par exemple, $R_1 \parallel R_2 = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$.



N'hésitez pas à revenir à ces définitions le plus souvent possible. Les schémas électriques sont souvent dessinés d'une manière trompeuse.

Définition

Structure en série, structure en parallèle :

- Deux **dipôles** sont dits **associés en série** s'ils ont une borne commune et s'ils sont parcourus par un même courant.
- Deux **dipôles** sont dits **associés en parallèle** s'ils sont reliés aux mêmes nœuds et sont donc à la même différence de potentiel.

7.2 Associations de dipôles linéaires passifs

Les résistances et les inductances s'ajoutent en série, leurs inverses s'ajoutent en parallèle.

Les capacités s'ajoutent en parallèles, leurs inverses s'ajoutent en série.

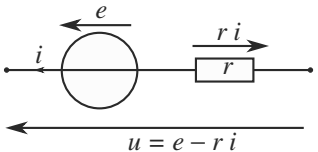
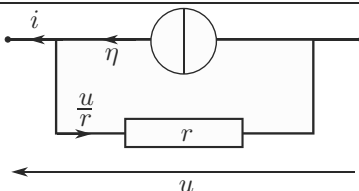


Ces lois sont naturelles quand on réfléchit à ce que sont, physiquement, ces trois types de dipôles. Par exemple, un condensateur offre des surfaces (ses armatures) aux charges pour qu'elles s'y accumulent. Deux condensateurs en parallèle « additionnent » leurs surfaces d'armature et, donc, leurs capacités.

7.3 Associations de dipôles linéaires actifs

Tout dipôle linéaire actif, quelle que soit sa constitution réelle, est équivalent aux deux associations données dans le tableau ci-dessous, qui sont donc équivalentes entre elles. Passer de l'une à l'autre se fait via la relation de passage

$$e = r\eta$$

Modélisation	Schéma	Relation caractéristique
Thévenin		$u = e - r i$
Norton		$i = \eta - \frac{u}{r}$



Lors d'une transformation Thévenin-Norton, vérifiez bien que les deux figures sont en convention générateur pour utiliser $e = r\eta$. Sinon, ce sera $e = -r\eta$.

Méthode 1 exploiter les transformations Thévenin ↔ Norton

À tout moment vous pouvez transformer un générateur de Thévenin en générateur de Norton et réciproquement, en fonction de vos besoins :

- Les générateurs s'associent facilement en série sous forme Thévenin (les fem s'ajoutent algébriquement, les résistances s'ajoutent).
- Les générateurs s'associent facilement en parallèle sous forme Norton (les cem s'ajoutent algébriquement, les conductances s'ajoutent).

La relation de passage est $e = r\eta$.

Afin d'éviter les étourderies au cours d'une suite de transformations Thévenin \leftrightarrow Norton :

1. Résolvez d'abord le problème graphiquement : dessinez tous les circuits obtenus après les diverses transformations, sans faire aucun calcul, sans indiquer aucune orientation. Juste une succession de dessins pour voir clairement ce que vous faites à chaque étape.
2. Dans un second temps, ajoutez les diverses flèches de tension et de courant. Retenez que le cem d'un générateur de Norton est orienté dans le même sens que la fem du générateur de Thévenin dont il vient, et réciproquement.
3. Dans un dernier temps, menez les calculs : calculez les résistances équivalentes, les cem, les fem.

Exemple d'application

Cherchez les représentations de Thévenin et de Norton du dipôle AB de la figure 7.1.

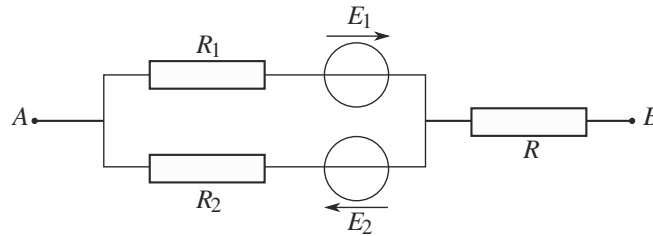


Figure 7.1 Application des transformations Thévenin et Norton.

Solution

Analysez d'abord la structure d'ensemble : deux générateurs de Thévenin en parallèle, le tout en série avec une résistance. Combiner ces deux générateurs nécessite de les passer en forme Norton (figure 7.2) pour les associer.

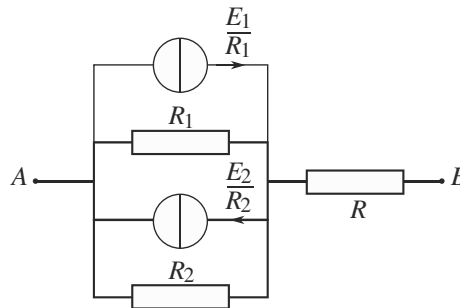


Figure 7.2 Transformation Thévenin \rightarrow Norton en vue d'une future association parallèle.

Le résultat de cette association est donné figure 7.3).

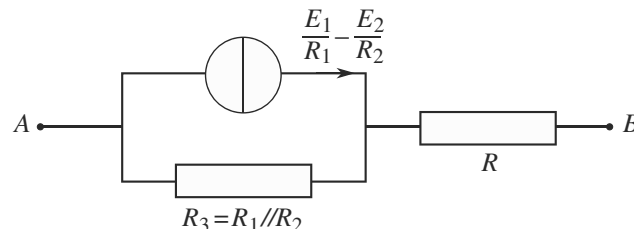


Figure 7.3 Regroupement parallèle des deux générateurs de Norton en un seul.



Dessinez d'abord entièrement les figures avant d'y ajouter les valeurs de résistance et les cem.

Le générateur de Norton obtenu est en série avec R , il faut le transformer en son équivalent Thévenin pour associer le tout (figure 7.4).

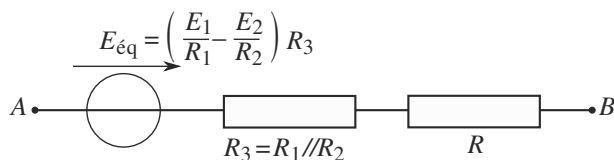


Figure 7.4 Retour à une modélisation de Thévenin en vue d'une future association série.

Le générateur de Thévenin obtenu figure 7.5 est la première réponse cherchée.

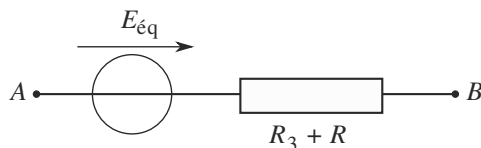


Figure 7.5 Dipôle de Thévenin équivalent au dipôle réel de départ.

Les caractéristiques de ce générateur de Thévenin s'obtiennent en explicitant les calculs indiqués sur les figures :

$$E_{\epsilon q} = \left(\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} \right) (R_1 // R_2) = \frac{R_2 E_1 - R_1 E_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_{\epsilon q} = (R_1 // R_2) + R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R$$

En le transformant en son générateur de Norton équivalent, nous obtenons la deuxième réponse cherchée (figure 7.6).

Ce générateur a la même résistance interne $R_{\epsilon q}$ que le générateur de Thévenin précédent, et son cem est :

$$\eta_{\epsilon q} = \frac{E_{\epsilon q}}{R_{\epsilon q}} = \frac{R_2 E_1 - R_1 E_2}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)}$$

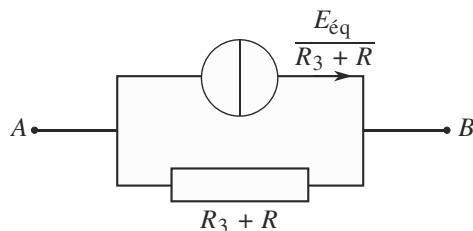


Figure 7.6 Dipôle de Norton équivalent au dipôle réel de départ.

7.4 Associations de dipôles actifs et passifs

7.4.1 Lois de Kirchhoff

Les lois de Kirchhoff (loi des nœuds et loi des mailles) sont des outils importants pour l'étude des circuits linéaires, eux et leurs corollaires les ponts diviseurs.

Méthode 2 utiliser les lois de Kirchhoff

Comme toujours, utilisez la loi des nœuds directement sur les schémas électriques, afin de minimiser le nombre de courants inconnus introduits dans le problème.

Chaque loi des mailles va donner une équation entre ces courants et tensions. En écrivant plusieurs lois des mailles, vous devez pouvoir arriver à autant d'équations que de courants et/ou tensions inconnus. Il ne vous reste plus qu'à résoudre ce système de n équations à n inconnues !

Exercice d'application : Reportez-vous à l'exercice 7.10.

7.4.2 Pont diviseur de tension

Exemple de la figure 7.7 : le triplet de résistances est soumis à une tension u . Si nous prenons seulement la tension aux bornes de R_2 , celle-ci vaut :

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} u$$

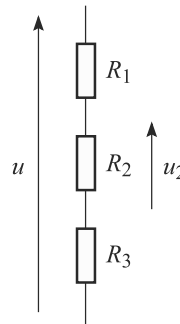


Figure 7.7 Pont diviseur de tension avec trois résistances.

7.4.3 Pont diviseur de courant

Exemple de la figure 7.8 : le courant entrant dans le triplet est i . Le courant i_1 vaut, en notant $G = 1/R$ les conductances :

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2 + G_3} i$$



L'unité de la conductance est le siemens (S).

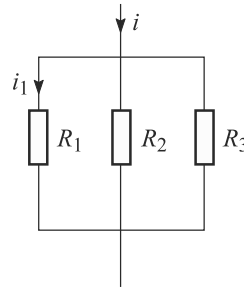


Figure 7.8 Pont diviseur de courant avec trois résistances.

Méthode 3 utiliser les ponts diviseurs

Ces deux théorèmes sont trop souvent négligés, alors qu'ils permettent souvent de conclure très rapidement.

- Pensez au pont diviseur de tension quand vous avez une association de résistances en série et que vous voulez exprimer une des tensions sans faire apparaître les courants.
- Pensez au pont diviseur de courant quand vous avez une association de résistances en parallèle et que vous voulez exprimer un des courants sans faire apparaître les tensions.

Attention par contre à vérifier que les dipôles considérés sont bien en série ou en parallèle !

Exercice d'application : Reportez-vous à l'exercice 7.10.

7.4.4 Théorème de superposition de Helmholtz

L'état électrique d'un circuit linéaire est obtenu en superposant les états associés à chaque source indépendante supposée seule (c.-à-d. les autres éteintes) dans le circuit :

- l'intensité du courant dans une branche est la somme des intensités produites par chaque source indépendante supposée seule ;
- la tension aux bornes d'un dipôle est la somme des tensions produites par chaque source indépendante supposée seule.

Méthode 4 utiliser le théorème de superposition de Helmholtz

Ce théorème est utile pour calculer une tension ou un courant dans un circuit comportant plusieurs sources de tension et/ou de courant.

1. Comptez le nombre de sources de tension et de courant.
2. Pour chaque source, redessiner le circuit dans le cas où **seule cette source est allumée**, toutes les autres éteintes. Rappel : une source de tension éteinte est équivalente à un fil et une source de courant éteinte équivalente à un coupe-circuit.

Chacun de ces circuits, fictif, est un **état électrique**.

3. Dans chaque état électrique, calculez la grandeur que vous cherchiez au départ avec les méthodes vues précédemment.
4. Additionnez les grandeurs ainsi calculées pour obtenir la véritable grandeur cherchée dans le circuit réel.



Ce théorème est en général très puissant pour les circuits compliqués, mais inutilement lourd pour les circuits simples. À vous d'acquérir assez de pratique pour savoir évaluer sa pertinence.



N'appliquez pas le théorème à l'envers. Un état électrique est défini comme un état où une seule source reste allumée, et non pas où une seule source est éteinte ! Le but est d'étudier les contributions de chaque source séparément. . .

Synthèse

Savoirs

- Lois d'association des dipôles R , L et C en série et en parallèle
- Représentations des générateurs linéaires de Thévenin et de Norton
- Équivalence entre ces représentations
- Ponts diviseurs de courant et de tension
- Théorème de superposition

Savoir-faire

- Utiliser les théorèmes pour obtenir un courant ou une tension dans un circuit linéaire.
- Passer d'une représentation de Thévenin à une représentation de Norton dans un circuit (et inversement).
- Tracer des circuits équivalents par associations successives de dipôles.
- Reconnaître les dipôles en série ou en parallèle et ceux qui ne le sont pas.

Mots-clés

- Circuits linéaires,
- générateurs de Thévenin et de Norton,
- ponts diviseurs,
- association de dipôles,
- superposition,
- circuits équivalents.

Tests de connaissances

- 7.1 Deux dipôles sont en série s'ils ont une seule borne commune.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 7.2 Pour que deux dipôles soient en parallèle, il suffit que leurs deux bornes soient communes.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 7.3 C'est la même résistance qui figure dans les modèles de générateur de Thévenin et de Norton.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 7.4 Un modèle idéal de Thévenin ($R = 0$) est équivalent à un modèle idéal de Norton.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 7.5 Les lois de Kirchhoff sont parfois insuffisantes pour résoudre un problème de circuit linéaire.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 7.6 S'il y a quatre générateurs dans un circuit linéaire, on doit tracer quatre circuits équivalents dans la méthode par superposition.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 7.7 On ne peut placer en parallèle que des dipôles de même nature.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

7.8 Générateurs en opposition

(D'après DEUG.)

Deux générateurs (e_1, R_1) et (e_2, R_2) sont simultanément branchés aux bornes d'une résistance R comme indiqué figure 7.9. Calculez i' .

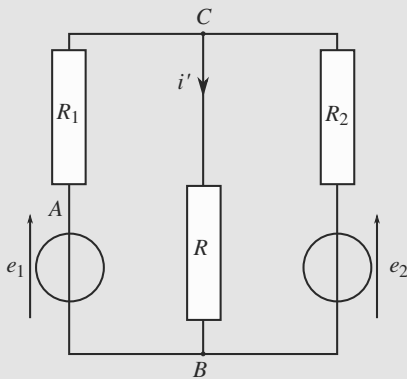


Figure 7.9 Générateurs en opposition.

7.9 Étude d'un générateur

(D'après ENSTIM)

On dispose d'un générateur (dit « générateur basse fréquence », ou « GBF »). On se place en régime continu. On donne figure 7.10 sa caractéristique courant-tension expérimentale obtenue en faisant débiter le générateur dans des résistances réglables.

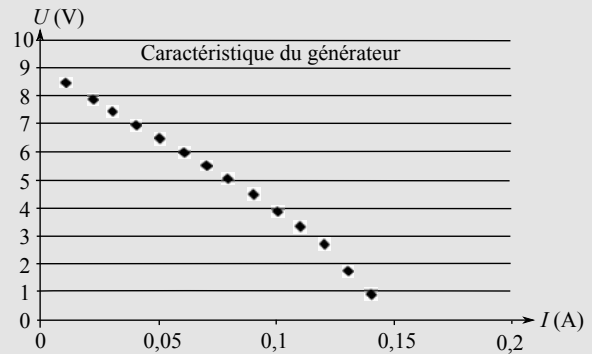


Figure 7.10

1. En précisant son domaine de validité en intensité, déduire de ces mesures un modèle linéaire du générateur dont on donnera la tension à vide, la résistance interne et le courant de court-circuit.
2. Ce générateur alimente un circuit de résistance R ; calculer la valeur minimale de R assurant de ne pas sortir du domaine linéaire.

7.10 Jongler avec les théorèmes

Déterminez l'intensité I traversant la résistance R du circuit figure 7.11 par :

1. les lois de Kirchhoff,

2. associations successives et transformations Thévenin-Norton,
 3. le théorème de Helmholtz.
- puis calculez numériquement ce courant avec $E = 10 \text{ V}$; $\eta = 10 \text{ mA}$; $R_1 = R_2 = 5 \text{ k}\Omega$; $R_3 = 2,5 \text{ k}\Omega$; $R = 1 \text{ k}\Omega$.

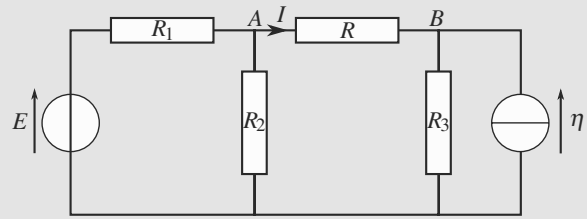


Figure 7.11 Jongler avec les théorèmes.

Exercices d'approfondissement

7.11 Utilisation d'un montage potentiométrique (D'après Centrale-Supélec.)

Disposant d'une source de tension continue de fem E fixe, nous voulons réaliser une source de tension continue de fem réglable αE avec $0 < \alpha < 1$.

Le montage est celui de la figure 7.12 avec $E = 24 \text{ V}$, $R = 80 \Omega$, $r_1 + r_2 = R'$ et $R' = 1 \text{ k}\Omega$. Le dipôle AA' de gauche est le générateur étudié et la résistance R de droite symbolise une utilisation.

1. Déterminez le générateur de Thévenin équivalent au dipôle AA' de gauche. Vous noterez sa fem αE et sa résistance interne r_i , et exprimerez α et r_i en fonction de r_1 et r_2 .
2. Déduisez-en la puissance \mathcal{P}_2 dissipée dans la résistance R en fonction de E , α , R' et R .
3. Calculez la puissance \mathcal{P}_1 fournie par la source de tension E en fonction de E , α , R' et R .
4. Déduisez-en le rendement $\eta = \mathcal{P}_2/\mathcal{P}_1$ en fonction de α , R et R' . Application numérique : calculez η pour $\alpha = 3/4$ et commentez.

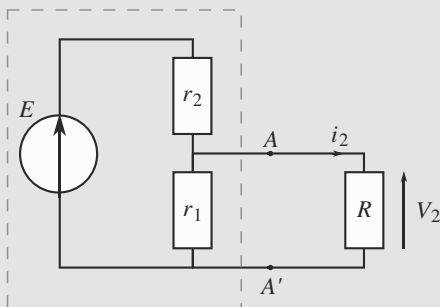


Figure 7.12 Montage potentiométrique.

7.12 Dispositif électrique de mesure de température (D'après concours commun Centrale-Supélec)

1. On considère un conducteur ohmique de forme cylindrique, de longueur l , de section S et de conductivité σ . Exprimer sa résistance électrique en fonction de l , S et σ . La résistance d'un conducteur ohmique dépend de la température (essentiellement par l'intermédiaire de sa conductivité σ). Nous supposons ici que le conducteur étudié possède une résistance R_0 (résistance de « repos ») à la température T_0 . Une modification de température occasionne une modification de la résistance de sorte que : $R = R_0 + \Delta R$, où ΔR est une grandeur algébrique qui dépend de T . On pourra donc accéder aux valeurs de T si l'on est capable de mesurer ΔR . C'est l'objet de cet exercice. On cherche à mesurer ΔR à l'aide du montage en pont (figure 7.13). Le pont est alimenté par une source de tension constante E ($E = 10 \text{ V}$) et on mesure la tension à vide à l'aide d'un voltmètre dont l'impédance d'entrée est supposée infinie.

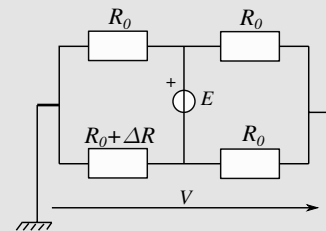


Figure 7.13 Pont de mesure.

2. Si l'on utilise un oscilloscope pour mesurer V , celui-ci doit-il être commuté sur "AC", "DC" ou "GND" ? Dessiner schématiquement l'oscillogramme observé sur l'écran.

2. Exprimer la tension V en fonction de E et $\Delta R/R_0$. La relation trouvée est-elle linéaire par rapport à $\Delta R/R_0$?
3. On s'intéresse ici à une sonde à résistance de platine, dont la résistance dépend de la température selon la loi : $R(T) = R_0(1 + \alpha t)$, avec t : température exprimée en degrés Celsius ; $R_0 = R(0^\circ\text{C}) = 100\ \Omega$, $\alpha = 3,91 \cdot 10^{-3}\ \text{K}^{-1}$. À 100°C et pour $E = 10\ \text{V}$, le voltmètre indique $V = -0,82\ \text{V}$. Calculer numériquement $\Delta R/R_0$. Quelle erreur commet-on sur la température si on linéarise la relation liant V à $\Delta R/R_0$? Peut-on raisonnablement considérer V comme étant une fonction linéaire de t ?

■ ■ ■

7.13 Régulation automatique

(D'après Mines de première année, épreuve commune.)

Un système de climatisation est régulé : il peut être mis en marche ou éteint automatiquement en fonction des besoins. Le capteur de température est une thermistance, résistance variant avec la température T en kelvin suivant :

$$R(T) = R_0 e^{a/T}$$

avec $R_0 = 5,29 \cdot 10^{-8}\ \Omega$ et $a = 6\,899\ \text{K}$.

Un relais K de résistance propre $R_K = 100\ \Omega$ commande la climatisation selon la tension U_K à ses bornes :

- Si $U_K < 1,5\ \text{V}$, le relais est ouvert et la climatisation arrêtée.
- Si $U_K > 3\ \text{V}$, le relais est fermé et la climatisation est en marche.
- Si $1,5 < U_K < 3\ \text{V}$, le relais s'ouvre et se ferme aléatoirement.

1. Considérons d'abord le montage de la figure 7.14 avec $E = 22,3\ \text{V}$.

a) Le système est réglé pour que $U_K = 2,25\ \text{V}$ à $293\ \text{K}$. Voyez-vous pourquoi ?

b) Calculez les températures correspondant aux tensions frontières $U_K = 1,5\ \text{V}$ et $U_K = 3\ \text{V}$ et commentez le fonctionnement de ce système.

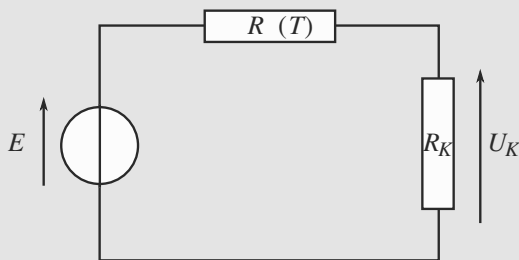


Figure 7.14 Premier montage de régulation.

2. Pour améliorer la régulation, un autre montage (figure 7.15) est réalisé autour de la thermistance. Il inclut un transistor, composant dont le fonctionnement est le suivant (aucune connaissance préalable à son sujet n'est nécessaire).

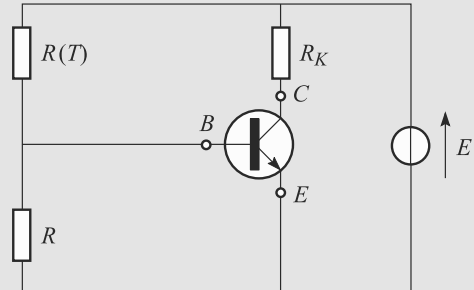


Figure 7.15 Montage de régulation.

Un transistor est représenté figure 7.16.

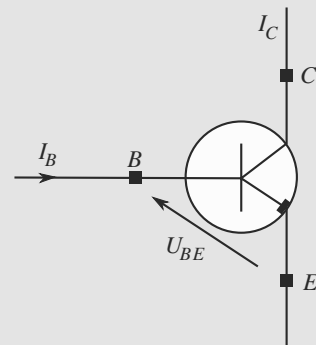


Figure 7.16 Schéma d'un transistor.

C'est un composant à trois bornes (base B , émetteur E et collecteur C) qui se comporte, essentiellement, comme un amplificateur de courant commandé par la valeur de I_B : dès que I_B dépasse un certain seuil, le transistor se « débloque », la tension U_{BE} devient constante égale à $0,6\ \text{V}$ et I_B est amplifiée : $I_C = \beta I_B$ avec $\beta = 100$.

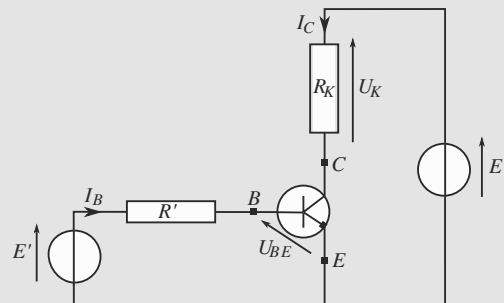


Figure 7.17 Deuxième montage de régulation.

Ce régime de fonctionnement du transistor est le seul utile pour cet exercice.

a) On désire simplifier l'étude en se ramenant au montage de la figure 7.17. Déterminez les valeurs de E' et R' en fonction de E , R et $R(T)$ pour que les deux montages soient bien équivalents.

b) Déterminez la valeur qu'il faut donner à R pour que $U_K = 2,25 \text{ V}$ à 293 K . Application numérique avec $E = 12 \text{ V}$.

c) Calculez les températures correspondant aux tensions frontières $U_K = 1,5 \text{ V}$ et $U_K = 3 \text{ V}$ et commentez le fonctionnement de ce système.

7.1

Faux : il faut qu'ils soient traversés par le même courant.

7.2

Vrai : ils ont alors la même tension à leurs bornes.

7.3

Vrai.

7.4

Faux : la résistance est nulle pour l'un (Thévenin) et infinie pour l'autre (Norton).

7.5

Faux. Elles sont toujours suffisantes mais parfois lourdes d'utilisation.

7.6

Vrai mais il faut surtout tracer des circuits où chaque générateur n'est allumé qu'une fois. On pourrait tracer deux circuits avec pour chacun deux générateurs allumés.

7.7

Faux.

7.8

Générateurs en opposition

Méthodes mises en jeu : n°1 et 3.

Le circuit étant assez simple, l'utilisation directe des lois de Kirchhoff est envisageable. Mais vous devez avoir le coup d'il : les deux générateurs de Thévenin sont en parallèle et donc associables une fois convertis en leur équivalent Norton. Avant de se lancer dans cette opération, il faut s'assurer qu'elle préserve le courant i' cherché. Comme c'est le cas, c'est une bonne piste.

Le générateur de Thévenin de gauche peut être converti en son équivalent Norton avec $\eta_1 = e_1/R_1$ et celui de droite avec $\eta_2 = e_2/R_2$ (figure 7.18).

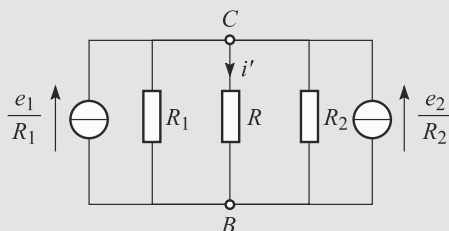


Figure 7.18 Générateurs en opposition, première étape.

Les deux générateurs de Norton sont alors en parallèle et s'associent comme indiqué figure 7.19. Les caractéristiques du générateur de Norton obtenu sont :

$$\eta_{\text{eq}} = \frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

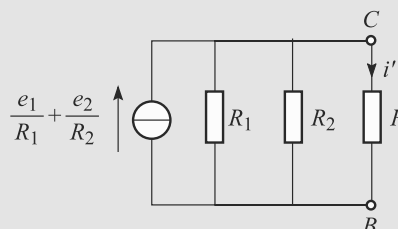


Figure 7.19 Générateurs en opposition, deuxième étape.

Nous avons alors un pont diviseur de courant :

$$i' = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{\text{eq}}}} \eta_{\text{eq}} = \frac{R_2 e_1 + R_1 e_2}{R_1 R_2 + R R_1 + R R_2}$$

7.9

Étude d'un générateur

Méthodes utilisées : n°1 et 2

Le plus important pour résoudre cet exercice est d'avoir compris ce qu'est un modèle linéaire. Le reste est alors l'utilisation d'une méthode graphique de base et de la loi des mailles.

1. On trace une droite correspondant grossièrement aux points placés sur la gauche du graphe où les points sont raisonnablement alignés (figure 7.20). On lit sur le graphe la tension à vide, la résistance interne du générateur et le courant de court-circuit du modèle linéaire équivalent au générateur réel valable pour $I < 0,1$ A (au-delà les points ne sont plus sur la droite).

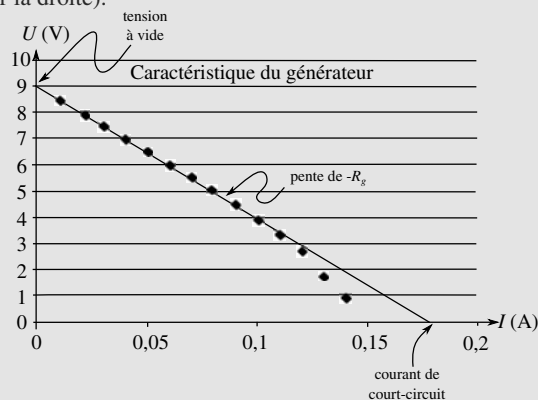


Figure 7.20

On estime donc la tension à vide $U_0 = 9,0 \text{ V}$; le courant de court-circuit $I_{cc} = 0,18 \text{ A}$; la résistance interne $R_g = -\text{pente} = U_0/I_{cc} = 9/0,18 = 50 \Omega$.

2. Le schéma électrique équivalent est représenté sur la figure 7.21 :

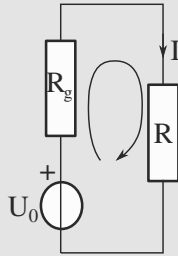


Figure 7.21 Circuit linéaire équivalent.

La loi des mailles donne alors $U_0 - R_g I - R I = 0$ et donc $I = U_0/(R + R_g)$. Or $I < I_{\max} = 0,1 \text{ A}$ est nécessaire pour que ce modèle linéaire soit utilisable. En combinant les deux relations, on obtient l'inégalité $R + R_g > U_0/I_{\max}$ et donc $R > (U_0/I_{\max} - R_g) = R_{\min}$. On trouve numériquement $R_{\min} = 40 \Omega$.

7.10

Jongler avec les théorèmes

Méthodes mises en jeu : toutes !

Il s'agit vraiment d'un exercice de base pour vérifier que vous maîtrisez correctement les théorèmes généraux. C'est aussi l'occasion de comparer leur mise en œuvre sur un circuit de complexité moyenne.

Tant que vous ne maîtrisez pas les théorèmes généraux, procédez lentement, soigneusement et avec rigueur. Cet exercice peut vous prendre beaucoup de temps, mais il est très profitable.

1. Le paramétrage des courants, tenant compte de la loi des nœuds, et l'orientation des mailles sont indiqués figure 7.22. Les deux lois des mailles donnent :

$$\begin{aligned} E &= R_1 I' + R_2 (I' - I) \\ 0 &= R_3 (I + \eta) + R I - R_2 (I' - I) \end{aligned}$$

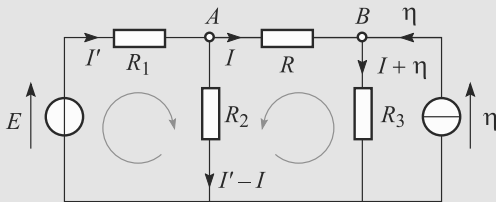


Figure 7.22 Résolution par les lois de Kirchhoff.



Il y a deux équations, et deux courants inconnus. Le problème a donc une solution.



La résistance R_2 est en convention récepteur dans la première maille, en convention générateur dans la deuxième.

Exprimons I' dans la première équation :

$$I' = \frac{E + R_2 I}{R_1 + R_2}$$

et injectons le résultat dans la deuxième pour exprimer I :

$$-R_3 \eta = I \left(R + R_2 + R_3 - \frac{R_2^2}{R_1 + R_2} \right) - \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}$$

D'où le résultat :

$$I = \frac{R_2 E - R_3 (R_1 + R_2) \eta}{(R + R_3)(R_1 + R_2) + R_1 R_2} \approx -3,33 \text{ mA}$$

2. Transformons le générateur de Thévenin de gauche en son équivalent Norton pour obtenir la figure 7.23.

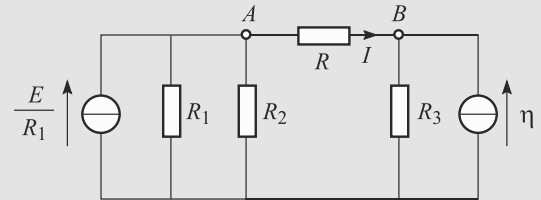


Figure 7.23 Résolution par transformations successives, première étape.

Ensuite, associons R_1 et R_2 en parallèle et transformons le générateur de Norton de droite en son équivalent Thévenin (figure 7.24).

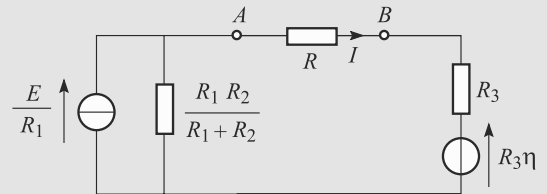


Figure 7.24 Résolution par transformations successives, deuxième étape.

Transformons le générateur de Norton de gauche en son équivalent Thévenin (figure 7.25).

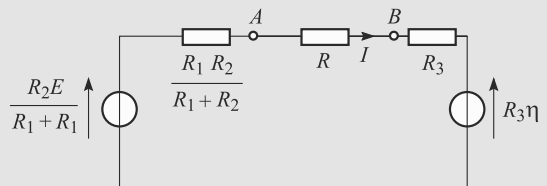


Figure 7.25 Résolution par transformations successives, troisième étape.

Les deux générateurs de Thévenin sont en série, associons-les pour aboutir la figure 7.26.

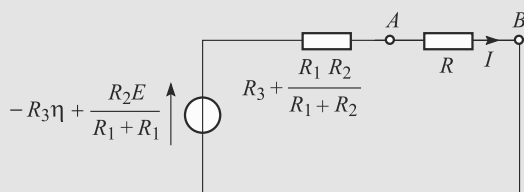


Figure 7.26 Résolution par transformations successives, quatrième étape.

La résistance R a la même tension à ses bornes que le générateur de Thévenin, d'où :

$$RI = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} - R_3 \eta - \left(R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) I$$

$$\Rightarrow I = \frac{R_2 E - R_3 (R_1 + R_2) \eta}{(R + R_3)(R_1 + R_2) + R_1 R_2} \simeq -3,33 \text{ mA}$$

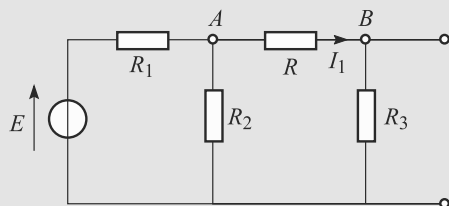


Figure 7.27 Résolution par le théorème de Helmholtz, premier état fictif.

3. L'état électrique où seule la source de tension E est allumée est représenté figure 7.27 : la source de courant est équivalente à un interrupteur ouvert. Soit I_1 la valeur de I dans cet état électrique.

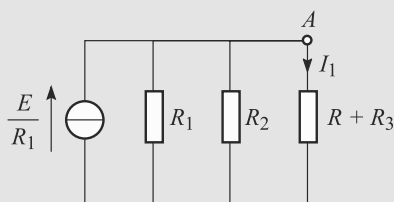


Figure 7.28 Transformation Thévenin-Norton dans le premier état fictif.

Après conversion du générateur de Thévenin en Norton équivalent, nous sommes ramenés à un diviseur de courant (figure 7.28) :

$$I_1 = \frac{\frac{1}{R + R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R + R_3}} \frac{E}{R_1}$$

$$= \frac{R_2 E}{(R + R_3)(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

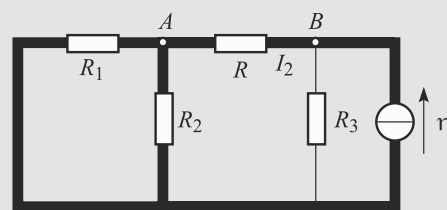


Figure 7.29 Résolution par le théorème de Helmholtz, deuxième état fictif.

L'état électrique où seule la source de courant η est allumée est représenté figure 7.29 : la source de tension est équivalente à un fil. Soit I_2 la valeur de I dans cet état électrique.

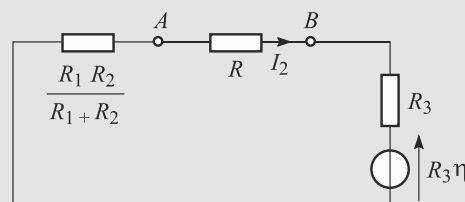


Figure 7.30 Transformation Thévenin-Norton dans le deuxième état fictif.

Associons R_1 et R_2 en parallèle et transformons le générateur de Norton en son Thévenin équivalent (figure 7.30). La loi d'Ohm suffit alors à conclure :

$$R_3 \eta = - \left(R + R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) I_2$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{-R_3 (R_1 + R_2) \eta}{(R + R_3)(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

Le courant I cherché est, d'après le théorème de Helmholtz, égal à $I_1 + I_2$:

$$I = \frac{R_2 E - R_3 (R_1 + R_2) \eta}{(R + R_3)(R_1 + R_2) + R_1 R_2} \simeq -3,33 \text{ mA}$$

$I < 0$ donc le courant va de B vers A .

7.11

Utilisation d'un montage potentiométrique

Méthodes mises en jeu : n°1 et 3.

L'exercice synthétise beaucoup de résultats de cours, y compris énergétiques. Il ne comporte aucune subtilité particulière, mais exige de la rigueur.

1. Convertissons le générateur de Thévenin (E, r_2) en son équivalent Norton et regroupons les deux résistances r_1 et r_2 désormais en parallèle (figure 7.31).

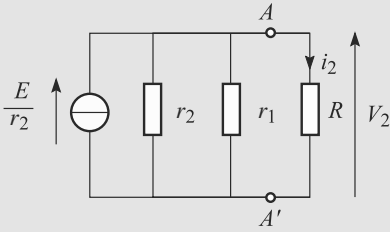


Figure 7.31 Transformation du montage potentiométrique, première étape.

Convertissons le générateur de Norton obtenu en son équivalent Thévenin (figure 7.32).

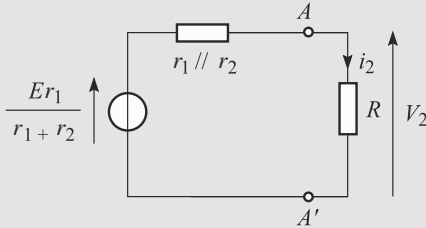


Figure 7.32 Transformation du montage potentiométrique, deuxième étape.

Donc les valeurs cherchées :

$$r_i = r_1 \parallel r_2 \Rightarrow r_i = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

$$\alpha E = (r_1 \parallel r_2) \frac{E}{r_2} \Rightarrow \alpha = \frac{r_1}{r_1 + r_2}$$

2. Par définition, $\mathcal{P}_2 = V_2 i_2 = V_2^2 / R$. Par un pont diviseur de tension :

$$V_2 = \frac{R}{R + r_i} \alpha E$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_2 = \left(\frac{R}{R + r_i} \alpha E \right)^2 \frac{1}{R}$$

Avec $r_i = \alpha R'$ et $r_2 = R' - r_1$, il vient :

$$\mathcal{P}_2 = R \left(\frac{\alpha E}{R + \alpha(1 - \alpha)R'} \right)^2$$

3. Par définition, $\mathcal{P}_1 = E i$. Calculons la résistance équivalente aux trois résistances associées, r_2 en série avec l'association parallèle de r_1 et R :

$$R_{\text{eq}} = r_2 + \frac{R r_1}{R + r_1}$$

$$\Rightarrow i = \frac{E}{R_{\text{eq}}} = \frac{E}{r_2 + \frac{R r_1}{R + r_1}}$$

D'où la puissance :

$$\mathcal{P}_1 = \frac{E^2}{r_2 + \frac{R r_1}{R + r_1}}$$

En simplifiant de la même manière qu'à la question précédente, il vient :

$$\mathcal{P}_1 = \frac{(R + \alpha R') E^2}{R' (R + \alpha(1 - \alpha) R')}$$

4. Le rapport des deux puissances donne directement :

$$\eta = \frac{\alpha^2 R R'}{(R + \alpha R') (R + \alpha(1 - \alpha) R')} \approx 20 \%$$

L'objectif (réaliser une source de fem réglable) est atteint, mais le rendement n'est pas très bon : les pertes par effet Joule sont importantes.

7.12

Dispositif électrique de mesure de température

Méthode mise en jeu : n°3

L'important dans cet exercice est de visualiser les deux diviseurs de tension pour obtenir V par différence de potentiels. Le reste combine connaissance de l'oscilloscope, développement limité et bon sens physique.

1. La résistance d'un conducteur cylindrique de longueur l , de section s et de conductivité σ est :

$$R = \frac{l}{\sigma s}$$

2. L'oscilloscope doit être commuté sur DC : ceci permet d'observer l'intégralité du signal alors que AC est une fonction filtrant le continu du signal et GND (ground) relie la voie à la masse et permet de régler la position neutre du signal. On observe donc l'écran représenté figure 7.33 :

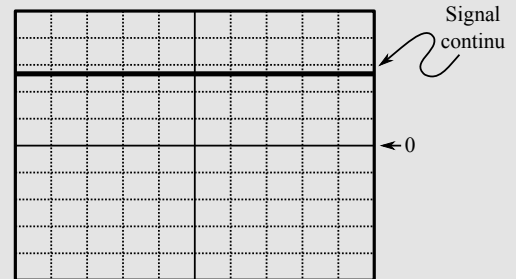


Figure 7.33 Écran de l'oscilloscope.

3. Les deux branches de part et d'autre de E réalisent des diviseurs de tension (l'absence de courant à droite implique l'absence de courant à gauche vers la masse) (figure 7.34).

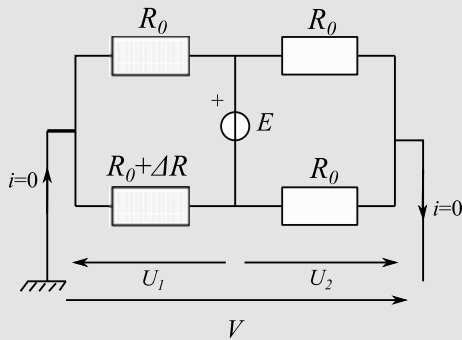


Figure 7.34 Les deux diviseurs de tension.

On obtient alors $U_1 = \frac{R_0 + \Delta R}{2R_0 + \Delta R} E$ et $U_2 = \frac{R_0}{2R_0} E = \frac{E}{2}$. La loi des mailles donne alors :

$$\begin{aligned} V = -U_1 + U_2 &= \frac{E}{2} - \frac{E}{2} \frac{2R_0 + \Delta R}{2R_0 + \Delta R} \\ &= -\frac{E}{2} \frac{\Delta R}{2R_0 + \Delta R} = -\frac{E}{2} \frac{\frac{\Delta R}{R_0}}{2 + \frac{\Delta R}{R_0}} \end{aligned}$$

qui est une relation non linéaire en $\Delta R/R_0$.

4. D'après ce qui précède, on a :

$$V(2 + \frac{\Delta R}{R_0}) = -\frac{E}{2} \frac{\Delta R}{R_0}$$

$$\text{et donc } (V + \frac{E}{2}) \frac{\Delta R}{R_0} = -2V$$

$$\text{qui conduit finalement à : } \frac{\Delta R}{R_0} = -\frac{4V}{E + 2V}.$$

Numériquement, on trouve 0,392.

En linéarisant, on obtient : $\frac{\Delta R}{R_0} = -\frac{4V}{E}$ qui donne numériquement 0,328.

L'écart est donc considérable (20 %) et il est donc tout à fait contestable de linéariser cette relation si l'on souhaite une mesure de température correcte car $\Delta R/R_0 = \alpha t$ est bien linéaire d'après la relation donnée mais $\Delta R/R_0$ n'est pas linéaire en V/E . V ne doit pas être raisonnablement considérée comme linéaire en fonction de t .

7.13

Régulation automatique

Méthodes mises en jeu : n°1, 2 et 3.

Malgré la longueur de l'énoncé, cet exercice ne met en jeu que les notions directement vues en cours. Dans un contexte de concours, n'hésitez pas à faire rapidement les questions relevant des méthodes de cours et à garder pour la fin les questions de sens physique et de culture physique.

1. a) 2,25 V est la valeur médiane entre les deux frontières 1,5 V et 3 V. Ainsi la limite entre la situation où la climatisation fonctionne et celle où elle ne fonctionne pas est centrée sur la température usuelle de 293 K.

b) Par le pont diviseur de tension :

$$\begin{aligned} U_K &= \frac{R_K}{R_K + R(T)} E \\ \Rightarrow R(T) &= R_K \left(\frac{E}{U_K} - 1 \right) \\ \Rightarrow T &= \frac{a}{\ln \left(\frac{R_K}{R_0} \left(\frac{E}{U_K} - 1 \right) \right)} \end{aligned}$$

Numériquement,

$$T(1,5 \text{ V}) \approx 288 \text{ K} = 14^\circ \text{C} \text{ et } T(3 \text{ V}) \approx 297 \text{ K} = 24^\circ \text{C}.$$

Cela implique que, en fonctionnement normal, la climatisation ne se remet en marche que quand la température dépasse 24°C , et elle continue alors jusqu'à la faire retomber à 14°C . Une telle amplitude de variation n'est pas confortable pour les occupants de la pièce.

2. a) Voir les figures 7.35 à 7.38 pour les étapes des transformations Thévenin-Norton.

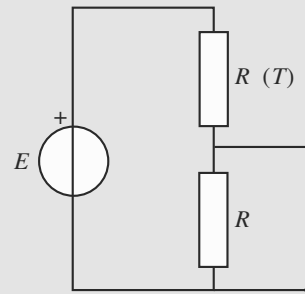


Figure 7.35 Transformation, étape 1.

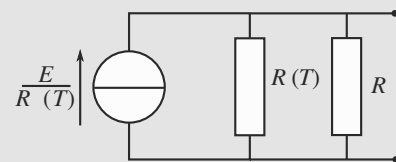


Figure 7.36 Transformation, étape 2.

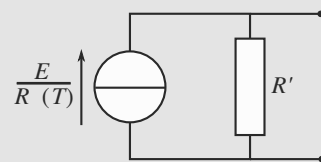


Figure 7.37 Transformation, étape 3.

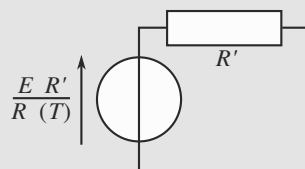


Figure 7.38 Transformation, étape 4.

Cela aboutit à :

$$R' = R \parallel R(T) = \frac{RR(T)}{R + R(T)} \quad (7.1)$$

$$E' = \frac{R'}{R(T)} E = \frac{R}{R + R(T)} E \quad (7.2)$$

b) $U_K = R_K I_C = R_K \beta I_B$ donc calculons I_B par la loi des mailles :

$$E' = R' I_B + U_{BE} \quad (7.3)$$

$$\Rightarrow I_B = \frac{E' - U_{BE}}{R'} \quad (7.4)$$

En exploitant l'expression (7.1), il vient :

$$U_K = R_K \beta \frac{RE - (R + R(T))U_{BE}}{RR(T)} \quad (7.5)$$

D'où :

$$R = \frac{\beta R_K R(T) U_{BE}}{\beta R_K (E - U_{BE}) - R(T) U_K} \simeq 47,7 \, \Omega$$

c) En reprenant le résultat (7.5), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{U_K}{R_K \beta} &= \frac{E - U_{BE}}{R(T)} - \frac{U_{BE}}{R} \\ \Rightarrow \frac{1}{R_0} e^{-a/T} (E - U_{BE}) &= \frac{U_K}{R_K \beta} + \frac{U_{BE}}{R} \end{aligned}$$

et finalement :

$$T = \frac{-a}{\ln \left(\frac{R_0 U_K}{\beta R_K (E - U_{BE})} + \frac{R_0 U_{BE}}{R(E - U_{BE})} \right)}$$

Numériquement,

$$T(1,5 \text{ V}) \simeq 19,9 \, ^\circ\text{C} \text{ et } T(3 \text{ V}) \simeq 20,1 \, ^\circ\text{C}.$$

L'amplitude de variation de la température est bien plus faible, ce qui est satisfaisant pour une climatisation.

Régime transitoire dans les circuits linéaires

CHAPITRE 8

Plan

8.1	Aborder un problème de régime transitoire	117
8.2	Résolution-type du premier ordre : charge d'un condensateur	119
8.3	Résolution-type du deuxième ordre : régime libre d'un RLC série	121
	Synthèse	124
	Corrigés des exercices	129

Introduction

Ce chapitre comporte extrêmement peu de résultats de cours mais exige de vous un savoir-faire précis et méthodique. Ainsi, révisez votre cours sur la résolution des équations différentielles linéaires (voir fiche méthode 5). Par contre, n'apprenez surtout pas les solutions des exemples traités en cours ! Ce ne sont, justement, que des exemples.

Prérequis

- Équations différentielles linéaires à coefficients constants avec second membre (voir fiche méthode 5).
- Caractéristique des dipôles R , L et C
- Énergies et puissances pour ces dipôles
- Grandeurs continues dans les circuits

Objectifs

- Dégager les comportements communs de circuits différents : durée du régime transitoire, comportement en régime permanent
- Réaliser des bilans en puissance puis en énergie lors des phases transitoires

8.1 Aborder un problème de régime transitoire

8.1.1 Écrire et résoudre le problème

Fondamentalement, tout circuit linéaire comporte N grandeurs électriques inconnues et les lois de Kirchhoff fournissent N équations différentielles reliant ses grandeurs. L'objectif est de se ramener à une équation différentielle contenant une seule grandeur inconnue, car c'est le seul type d'équations différentielles que vous avez appris à résoudre.

Méthode 1 Étudier un régime transitoire

Tous les cas traités dans ce chapitre suivent la même logique qu'il faut savoir adapter aux exercices.

1. Paramétrez le problème et repérez bien les grandeurs dont la continuité est imposée (tension aux bornes d'un condensateur, intensité dans une bobine).
2. En général, il est souhaitable de faire d'abord une étude qualitative (à $t = 0^+$ et $t \rightarrow +\infty$).
3. Si ce n'est pas un cas simple, réarrangez le circuit par transformations Thévenin \leftrightarrow Norton et associations série-parallèle en veillant à ne pas perdre la grandeur électrique que vous voulez étudier.
4. Écrivez toutes les lois des mailles indépendantes en vous efforçant de faire apparaître au maximum la grandeur étudiée, ainsi que toutes les relations tension-courant spécifiques aux divers dipôles (loi d'Ohm, etc) en faisant attention à la convention, récepteur ou générateur, imposée à chaque dipôle par les orientations des mailles.
5. Combinez ces relations de manière à ne plus avoir comme grandeur électrique inconnue que celle qu'il faut étudier. Vous aboutissez à une équation différentielle.
6. Écrivez directement la forme générale de la solution (à connaître par cIJur, donc) puis résolvez le problème à l'aide des conditions initiales.



Reportez-vous à la fiche méthode 5 pour les formes générales des solutions pour les équations différentielles rencontrées ici.



Quand vous résolvez une équation différentielle, gardez un œil sur la continuité ou la discontinuité de la fonction inconnue. C'est seulement si elle est continue que vous pouvez exploiter une condition de raccordement.

Exemple d'application

Les exemples qui suivent sont des applications directes de cette méthode.

8.1.2 Bilan énergétique

Une fois les grandeurs électriques connues à tout instant, il peut être intéressant d'aborder l'étude sous un angle énergétique : dans quels dipôles se trouve l'énergie à un instant donné, par exemple.

Méthode 2 Faire des bilans énergétiques

1. Partez de la loi des mailles et multipliez-la par une intensité bien choisie, ou bien partez de la loi des nœuds et multipliez-la par une tension bien choisie. Les termes résultants peuvent s'interpréter comme les puissances reçues ou fournies par les divers dipôles. Vous devez aboutir au **bilan de puissance instantané** :

$$\text{somme des puissances reçues} = \text{somme des puissances fournies}$$
2. En le multipliant par dt , chaque terme devient l'énergie reçue ou fournie pendant un intervalle de temps de très courte durée dt situé au voisinage de l'instant t . C'est le **bilan énergétique instantané**.
3. En l'intégrant entre l'instant initial (en général $t = 0$) et l'instant final (en général $t \rightarrow +\infty$) du régime transitoire, vous obtenez le **bilan énergétique global**.

Exemple d'application

Les exemples qui suivent sont des applications directes de cette méthode.

8.2 Résolution-type du premier ordre : charge d'un condensateur



Voir vidéo 6 :
Dipôle RC

Appliquons les méthodes ci-dessus sur l'exemple de la charge d'un condensateur à travers une résistance (figure 8.1).

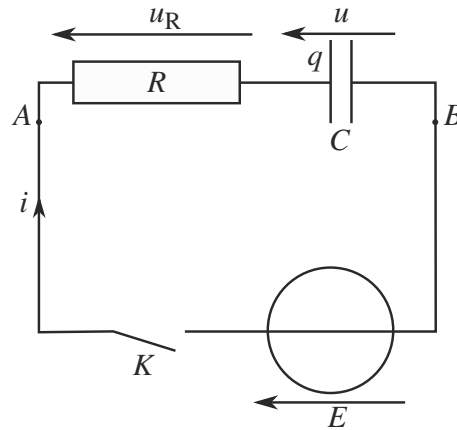


Figure 8.1 Circuit RC série soumis à un échelon de tension.

Vous avez probablement étudié en cours l'évolution de la tension aux bornes du condensateur (qui est continue même à $t = 0$), voyons l'évolution de la tension u_R aux bornes de la résistance (qui n'est pas continue à $t = 0$). Le condensateur est initialement déchargé et un expérimentateur ferme l'interrupteur à $t = 0$.

8.2.1 Mise en équation et résolution

Revoyons rapidement le raisonnement de la méthode n°1 ci-dessus sur cet exemple.

1. Paramétrage : voir figure 8.1. Seule u est nécessairement continue car c'est la tension aux bornes d'un condensateur.
2. Étude qualitative : la loi des mailles s'écrit

$$u + u_R = 0 \quad \text{pour } t < 0$$

$$u + u_R = E \quad \text{pour } t > 0$$

Initialement $q(0^-) = 0$ donc $u(0^-)$. La continuité de u implique $u(0^+) = u(0^-)$ donc $u(0) = 0$. Donc $u_R = 0$ pour $t < 0$ (ce qui était évident : aucun courant ne circule) et $u_R(0^+) = E$.

Après le régime transitoire ($t \rightarrow +\infty$), le système revient à un régime permanent. Le condensateur se comporte alors comme un coupe-circuit : $i(\infty) = 0$ donc $u_R(\infty) = Ri(\infty) = 0$.

3. Aucun réarrangement à faire dans cet exemple.

4. Loi des mailles : $u + u_R = E$

$$\text{Relations tension-courant : } q = Cu \quad u_R = Ri \quad i = \frac{dq}{dt}$$

Ce n'est pas parce qu'une fonction est continue que sa dérivée l'est. Ainsi, la continuité de u en $t = 0$ n'impose pas celle de $i = C \, du/dt$, et donc pas celle de $u_R = Ri$.

Rien n'assure que les grandeurs électriques soient continues, d'où la distinction entre limite à gauche 0^- et limite à droite 0^+ . Seuls la tension aux bornes d'un condensateur et le courant traversant une bobine sont nécessairement continus.





Reportez-vous à la fiche méthode 5 pour le formulaire de résolution de ce type d'équation différentielle.

5. Le but est d'éliminer u , q et i pour ne garder que u_R . Remplacer u par q/C montre qu'il faut dériver la loi des mailles, pour faire apparaître dq/dt et donc u_R . Il vient :

$$\begin{aligned}\tau \dot{u}_R + u_R &= 0 \quad \text{avec} \quad \tau = RC \\ \Rightarrow u_R(t) &= A e^{-t/\tau}\end{aligned}$$

6. $u_R(0^+) = E$ impose :

$$u_R(t) = E e^{-t/\tau}$$

tracée figure 8.2. Cette tension, nulle pour $t < 0$, est bien discontinue en $t = 0$, il en est de même pour l'intensité $i = u_R/R$. Cela montre qu'un condensateur n'impose la continuité que de la tension à ses bornes, pas du courant.

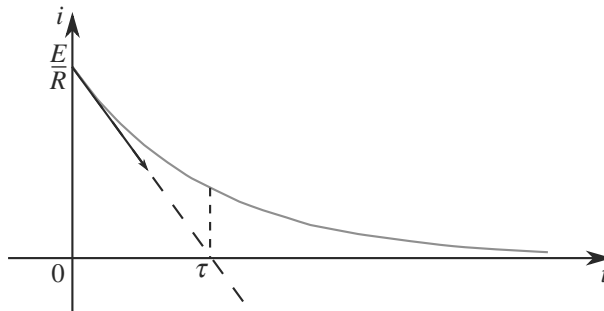


Figure 8.2 Charge du condensateur : tension aux bornes de la résistance, discontinue à $t = 0$.

τ donne l'ordre de grandeur du temps nécessaire au système pour atteindre un régime quasi-permanent. Il est donc appelé **temps caractéristique de retour au régime permanent** ou **temps de relaxation** du circuit.



Le régime transitoire dure « quelques τ », par exemple 3τ si on considère qu'il est terminé quand il atteint 95 % de sa valeur finale, ou 5τ pour 99 %.

8.2.2 Bilan énergétique

Multiplions la loi des mailles $u + Ri = E$ par l'intensité $i = C du/dt$. Pour chacun des trois termes, nous pouvons choisir d'écrire ce multiplicateur soit comme i , soit comme $C du/dt$. Cela donne le bilan de puissance instantané :

$$Cu \frac{du}{dt} + Ri^2 = Ei \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu^2 \right) + Ri^2 = Ei$$

où les deux premiers termes s'identifient comme les puissances **reçues** (convention récepteur) par le condensateur et la résistance, tandis que le troisième s'identifie comme la puissance **fournie** (convention générateur) par la source.

Multiplions par dt pour arriver au bilan énergétique instantané :

$$\underbrace{d \left(\frac{1}{2} Cu^2 \right)}_{dE_C} + \underbrace{Ri^2 dt}_{dE_R} = \underbrace{Ei dt}_{dE_g}$$

dE_C s'interprète donc comme l'énergie stockée par le condensateur pendant la durée dt , dE_R celle dissipée par la résistance par effet Joule pendant dt , et dE_g celle fournie par le générateur pendant dt .

Enfin, le bilan énergétique global s'obtient par sommation :

$$\int_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} d\left(\frac{1}{2}Cu^2\right) + \int_0^{+\infty} Ri^2 dt = \int_0^{+\infty} E i dt$$

La première intégrale est symbolique, puisque la variable d'intégration n'est pas réellement t . Dans la troisième, utilisons $i dt = C du$ et adaptons les bornes d'intégration en nous souvenant que $u(0) = 0$ et $u(t \rightarrow +\infty) = E$:

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} d\left(\frac{1}{2}Cu^2\right) + \int_0^{+\infty} Ri^2 dt &= \int_0^E EC du \\ \left[\frac{1}{2}Cu^2\right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} + \int_0^{+\infty} Ri^2 dt &= CE^2 \\ \underbrace{\frac{1}{2}CE^2}_{\text{stockée par } C} + \underbrace{\int_0^{+\infty} Ri^2 dt}_{\text{dissipée par effet Joule}} &= \underbrace{CE^2}_{\text{fournie par le générateur}} \end{aligned}$$

Sur toute la durée du régime transitoire, le générateur fournit donc une énergie CE^2 . La moitié est stockée dans le condensateur et l'autre moitié est dissipée par effet Joule.

L'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance se déduit de ce bilan, elle vaut $E_R = \frac{1}{2}CE^2$. Mais si vous n'avez pas besoin du bilan complet, il y a plus rapide pour calculer E_R : l'intégrale peut être calculée directement une fois $u_R(t)$ connue.

$$E_R = \int_0^{+\infty} \frac{u_R(t)^2}{R} dt = \int_0^{+\infty} \frac{E^2}{R} e^{-2t/\tau} dt = \frac{1}{2}CE^2 \quad (8.1)$$



Dans l'intégrale liée au condensateur par exemple, la variation d'intégration est $1/2(Cu^2)$ tandis que les bornes d'intégration portent sur t . Il faut comprendre « la valeur de $1/2(Cu^2)$ à l'instant t ». Voir fiche méthode 7.



Une étude similaire pour le dipôle RL série conduit à des équations formellement identiques.



Voir vidéo 6 bis :
Dipôle RL

8.3 Résolution-type du deuxième ordre : régime libre d'un RLC série



L'équation différentielle va être d'ordre deux, il faut donc fournir deux conditions initiales sur la fonction inconnue ou ses dérivées.



Voir vidéo 7 :
Circuit RLC série en régime libre

Voyons un deuxième exemple, celui de la figure 8.3. Initialement, l'interrupteur est ouvert et le condensateur est chargé (tension u_0 à ses bornes). C'est l'évolution temporelle de la tension aux bornes de la bobine, notée u_L , que nous allons étudier.

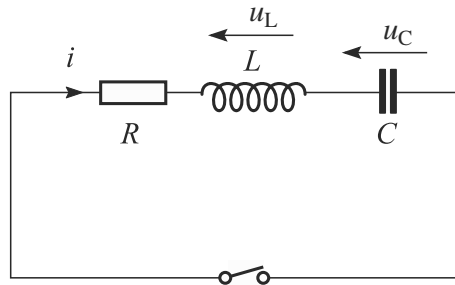


Figure 8.3 Circuit RLC série en régime libre.

8.3.1 Mise en équation et résolution

1. La bobine impose la continuité de i et le condensateur celle de u .
2. La loi des mailles s'écrit :

$$Ri + u_L + u_C = 0$$

Ri et u_C sont continues, donc u_L l'est aussi.

L'interrupteur est initialement ouvert donc $i(0) = 0$. De même, $u_C(0) = u_0$. La loi des mailles donne donc $u_L(0) = -u_0$.

Quand le régime permanent est rétabli ($t \rightarrow \infty$), la bobine est équivalente à un fil donc $u_L(\infty) = 0$.

3. Pas de réarrangement nécessaire ici.
4. Nous avons les ingrédients suivants :

$$Ri + u_L + u_C = 0 \quad u_L = L \frac{di}{dt} \quad i = C \frac{du_C}{dt}$$

5. En les assemblant pour ne garder que u_L , il faut dériver deux fois et il vient :

$$\ddot{u}_L + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_L + \omega_0^2 u_L = 0$$

avec $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

6. Le type de solution à retenir dépend du signe du discriminant $\Delta = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$. Il faut aussi expliciter les conditions initiales pour $u_L(t)$ afin de résoudre complètement l'équation différentielle. Nous avons déjà trouvé une condition, $u_L(0) = u_L(0^+) = -u_0$. Ensuite dérivons la loi des mailles :

$$\frac{du_L}{dt} + \frac{du_C}{dt} + R \frac{di}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{du_L}{dt} + \frac{i}{C} + \frac{Ru_L}{L} = 0$$

ce qui, en $t = 0^+$, conduit à :

$$\frac{du_L}{dt}(0^+) = \frac{Ru_0}{L}$$

Le reste de la résolution dépend du régime de fonctionnement.

Régime apériodique : $\Delta > 0$ donc $Q < 1/2$. Posons $\beta = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$:

$$u_L(t) = e^{-\omega_0 t/2Q} (A \cosh(\beta t) + B \sinh(\beta t))$$

Les conditions initiales conduisent à la solution :

$$u_L(t) = u_0 e^{-\omega_0 t/2Q} \left(-\cosh(\beta t) - \frac{1}{\sqrt{1 - 4Q^2}} \sinh(\beta t) \right)$$

L'allure de $u_c(t)$ est donnée figure 8.4 pour une valeur quelconque de $Q < 1/2$.



D'autres conditions initiales auraient pu conduire à une discontinuité de u_L à $t = 0$.



Reportez-vous à la fiche méthode 5 pour le formulaire de résolution de ce type d'équation différentielle.



Bien que β soit homogène à une pulsation, il ne peut pas être interprété comme tel car dans ce régime il n'y a pas d'oscillations. Évitez donc de la noter ω , réservant cette notation au régime pseudopériodique.

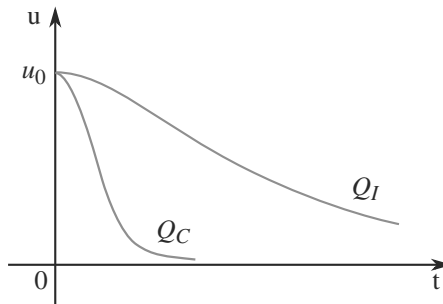


Figure 8.4 Allure de la tension aux bornes du condensateur en régime aperiodique ou critique.



Le régime critique est un régime idéal, il n'est pas réalisable en pratique.

Régime critique : $\Delta = 0$ donc $Q = Q_c = 1/2$. La solution est représentée figure 8.4 et s'écrit :

$$u_L(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow u_L(t) = -u_0 \left(1 + \frac{R}{2L}t\right)e^{-\omega_0 t}$$



La solution peut aussi s'écrire $u_L(t) = A'e^{-\omega_0 t/2Q} \cos(\omega t + \varphi)$ mais cette forme n'est pas utile ici.

Régime pseudo-périodique : $\Delta < 0$ donc $Q > 1/2$. Posons $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ la pseudo-pulsation.

La solution est représentée figure 8.5 et s'écrit :

$$u_L(t) = e^{-\omega_0 t/2Q} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$$

$$\Rightarrow u_L(t) = u_0 e^{-\omega_0 t/2Q} \left(-\cos(\omega t) - \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \sin(\omega t) \right)$$

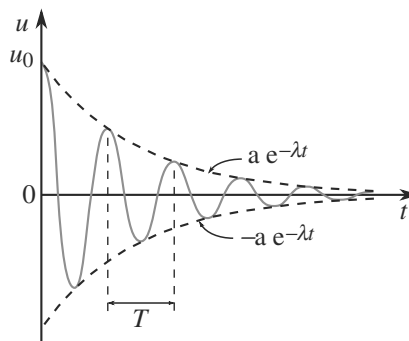


Figure 8.5 Allure de la tension aux bornes du condensateur en régime pseudopériodique.

Définissons aussi la pseudopériode, qui est la période de la partie sinusoïdale de $u(t)$, et le décroissement logarithmique, qui caractérise la décroissance de l'amplitude d'une période à l'autre.

$$\text{Pseudopériode : } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\text{Décrément logarithmique : } \delta = \ln\left(\frac{u(t)}{u(t+T)}\right) = \frac{\omega_0 T}{2Q}$$

$$\text{Temps de décroissance : } \tau = \frac{2Q}{\omega_0}$$

8.3.2 Bilan énergétique



La bobine n'intervient pas dans le bilan car au début et à la fin elle est déchargée ($i = 0$) mais pendant le régime transitoire elle reçoit et restitue de l'énergie. Elle apparaît bien dans le bilan instantané.

Multiplions le résultat de la loi des mailles par $i = C du_C/dt$ puis intégrons :

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2\right)}_{\text{stockée dans } L \text{ et } C} + \underbrace{Ri^2}_{\text{dissipée par } R} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}Cu_0^2}_{\text{initialement stockée dans } C} + \underbrace{\int_0^{+\infty} Ri^2 dt}_{\text{dissipée par effet Joule}} = 0$$

L'énergie initialement stockée dans le condensateur est donc bien, finalement, intégralement dissipée par effet Joule dans la résistance.

Synthèse

Savoirs

- Continuité de la tension aux bornes des condensateurs
- Continuité de l'intensité au travers des bobines
- Résolution des équations différentielles linéaires du premier et du deuxième ordre

Savoir-faire

- Mise en équation d'un régime transitoire
- Distinguer dans l'équation obtenue les temps caractéristiques et valeurs en régime permanent (premier ordre)
- Distinguer les trois régimes pour un système gouverné par une équation du deuxième ordre
- Réaliser des bilans en puissance et en énergie pour un circuit lors d'un transitoire

Mots-clés

- Équations différentielles du premier et du deuxième ordre,
- continuité,
- régime transitoire,
- régime permanent,
- durée du transitoire,
- régime pseudopériodique,
- régime apériodique,
- régime critique
- pseudopériode,
- pseudopulsation.

Exercices d'application

8.1 Transitoire dans un double circuit RC

Soit le circuit de la figure 8.6.

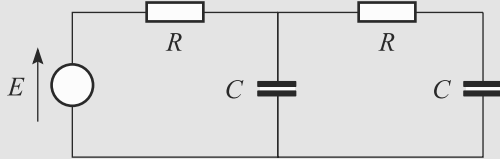


Figure 8.6 Double circuit RC.

1. Déterminez l'équation différentielle gouvernant la tension $s(t)$ sur le condensateur à droite.
2. Résolvez-la dans le cas où les deux condensateurs sont déchargés à l'instant $t = 0$ où l'on ferme le circuit.

8.2 Étude d'un défibrillateur

(D'après Air MP.)

Dans les années 1960, des progrès ont été accomplis sur les défibrillateurs cardiaques en leur permettant une alimentation autonome grâce à des condensateurs capables de stocker de l'énergie puis de la libérer dans un temps très court. Cet exercice propose d'étudier cette décharge d'énergie.

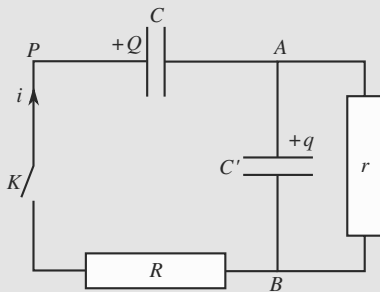


Figure 8.7 Montage simplifié de l'alimentation d'un défibrillateur.

Le circuit est celui de la figure 8.7. Le condensateur C' est initialement chargé ($q(t = 0) = q_0$) et C déchargé. L'interrupteur K est ouvert avant l'instant $t = 0$ et fermé à partir de $t = 0$.

1. Établissez l'équation différentielle vérifiée par la tension $u = u_{AB}$ en fonction de C , C' , r et R .
2. La charge doit se faire sans oscillation parasite et le plus rapidement possible. Proposez une condition sur les valeurs des composants et le régime le mieux adapté.

8.3 Charge et décharge d'un condensateur

(D'après CCP)

Dans cet exercice, on utilise un condensateur qu'on charge d'abord grâce à un générateur continu puis, une fois chargé, on le place aux bornes d'une bobine d'inductance L et de résistance r .

1. On réalise le circuit de la figure 8.8 à l'aide d'une résistance R , d'un condensateur de capacité C initialement déchargé, d'un générateur de tension supposé idéal et de force électromotrice constante E et d'un interrupteur K . À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.
 - a) Établir l'équation différentielle vérifiée par la charge q du condensateur.
 - b) Donner la solution de cette équation.
 - c) Donner l'allure de la courbe représentant la charge q en fonction du temps. Préciser la valeur atteinte par cette charge en régime permanent.

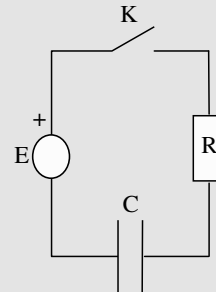


Figure 8.8

2. On place ensuite ce condensateur chargé en série avec une bobine d'inductance L et de résistance r (figure 8.9).

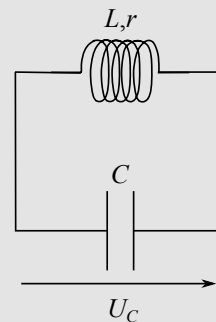


Figure 8.9

- a) Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension U_c aux bornes du condensateur.
- b) Un oscilloscope permet de suivre l'évolution temporelle de U_c et fournit la courbe de la figure 8.10 (échelles : $1 \mu\text{s}/\text{div}$ et $0,5 \text{ V}/\text{div}$) :

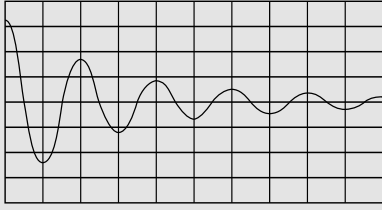


Figure 8.10

Cette courbe est-elle en accord avec l'équation différentielle obtenue en a) ?

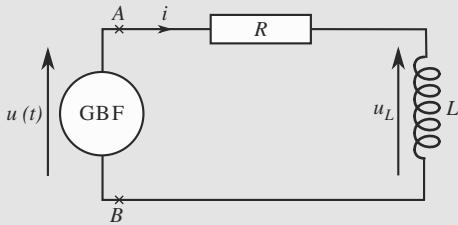
Déterminer l'expression de la pseudo-pulsation puis la valeur numérique de la pseudo-pulsation d'après la courbe de la figure 8.10. Faire de même pour le temps de décroissance exponentielle τ du signal.

c) Sachant que $C = 0,1 \text{ nF}$, déduire de ce qui précède les valeurs de r , L , et de Q , facteur de qualité du circuit.

Déterminer enfin la valeur maximale de la tension U_c et la valeur de la charge q que le condensateur avait accumulée.

8.4 Dipôle RL série soumis à un créneau de tension (D'après ENSTIM.)

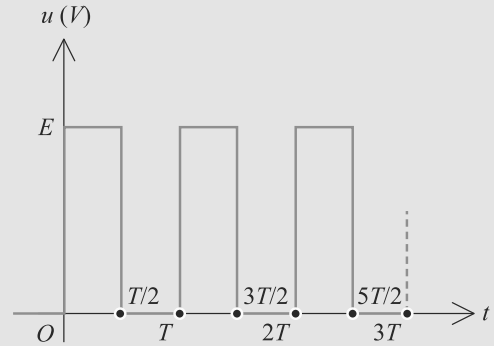
Le montage est celui de la figure 8.11.

Figure 8.11 Dipôle RL série soumis à un échelon de tension.

La tension u délivrée par le générateur basse fréquence est montrée figure 8.12 et sa période est notée T . Avant l'instant $t = 0$, aucun courant ne circule dans le circuit.

Vous prendrez $f = 1 \text{ kHz}$ pour la fréquence du signal créneau, $L = 1 \text{ H}$ et $R = 1 \text{ k}\Omega$.

1. Pour $0 < t < T/2$, établissez l'équation différentielle gouvernant $i(t)$ puis résolvez-la. Tracez l'allure de $i(t)$.

Figure 8.12 Signal créneau alimentant le dipôle RL série.

2. Déduisez-en $u_L(t)$ et tracez son allure.
3. Commentez l'état du système en $t = T/2$.
4. De même, déterminez et tracez $i(t)$ et $u_L(t)$ pour $T/2 < t < T$. Prolongez les deux graphes sur plusieurs périodes.
5. Discutez les valeurs relatives de la période T et de la constante de temps τ pour pouvoir observer des charges et décharges complètes de la bobine à chaque demi-période. Tracez les allures de $i(t)$ et $u_L(t)$ sur quelques périodes si cette condition est satisfaite.

Exercices d'approfondissement

8.5 Réponse à un créneau

(D'après Banque agro-véto.)

Considérez le circuit de la figure 8.13.

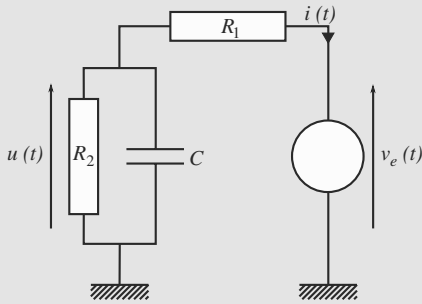


Figure 8.13 Circuit permettant d'étudier la réponse à un créneau d'un dipôle linéaire.

Le condensateur est initialement déchargé et le générateur délivre une tension créneau variant de 0 à E avec une période T comme indiqué figure 8.14.



Figure 8.14 Allure du créneau excitateur.

1. Exprimez presque sans calcul les valeurs de i à $t = 0^+$ et $t = T/2^-$ en fonction de E , R_1 et R_2 , sachant que T est suffisamment grande pour que le circuit soit retourné au régime permanent à $T/2$.
2. Établissez l'équation différentielle gouvernant u . Vous introduirez une grandeur homogène à un temps et notée τ .
3. a) Déterminez $u(t)$ sur la phase $0 < t < T/2$ et tracez-la. Interprétez.
b) Déduisez-en $i(t)$ sur cette même phase et tracez-la.
4. a) Déterminez $u(t)$ sur la phase $T/2 < t < T$ et tracez-la. Interprétez.
b) Déduisez-en $i(t)$ sur cette même phase et tracez-la.
5. Sans calcul, proposez l'allure de u et i pour tout instant $t > 0$.

8.6 Dipôle RLC parallèle

(D'après Mines de première année.)

Considérons le circuit de la figure 8.15. Le condensateur est initialement déchargé et la bobine n'est traversée par aucun courant. À $t = 0$, l'interrupteur est fermé.

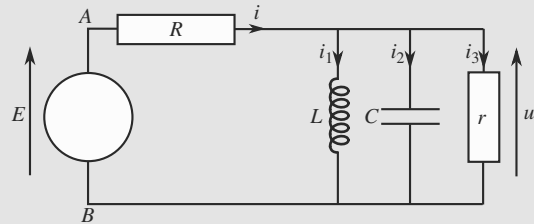


Figure 8.15 Dipôle RLC parallèle alimenté par un générateur réel.

1. Déterminez pratiquement sans calcul les valeurs de u , i , i_1 , i_2 et i_3 juste après la fermeture de l'interrupteur et au bout d'un temps très long.
2. Déterminez l'équation différentielle gouvernant i_3 . Vous poserez :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{R+r}{2RrC}$$

3. Quelle relation doit exister entre R , r , C et L pour que le régime soit pseudopériodique ? Application numérique : calculez ω_0 , sa période propre associée T_0 et λ avec $R = 2,5 \text{ k}\Omega$; $r = 1,25 \text{ k}\Omega$; $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$; $L = 20 \text{ mH}$. Quelle est la signification physique de λ ?
4. Définissez et calculez la pseudopulsation ω et la pseudopériode T . Que pouvez-vous dire des valeurs numériques comparées de ω et ω_0 ?
5. Déterminez complètement les expressions temporelles de u , i , i_1 , i_2 et i_3 . Vous les écrirez à l'aide de ω et λ pour alléger les notations. Application numérique : calculez la valeur maximale de u avec $E = 6 \text{ V}$.
6. Définissez le décrément logarithmique de la tension u , calculez sa valeur analytiquement en fonction de λ et T puis numériquement. Expliquez son sens physique par un schéma simple.
7. Estimez numériquement le temps nécessairement au régime permanent pour être pratiquement rétabli. Vous considérerez que c'est le cas dès que l'amplitude de u est à 99,9% de sa valeur maximale.

8.7 Étincelle de rupture

(D'après le concours Archimède)

Ce problème étudie le comportement d'un moteur électrique industriel M alimenté par une source de tension continue. L'appareil M sera représenté par le symbole ci-contre.

Son comportement électrique vis-à-vis des circuits extérieurs sera toujours supposé pouvoir être modélisé comme équivalent à celui d'une résistance $R = 9,6 \, \Omega$ en série avec une inductance pure $L = 45 \, \text{mH}$.

1. On considère le circuit représenté figure 8.16 où E est la force électromotrice d'un générateur de tension continue.

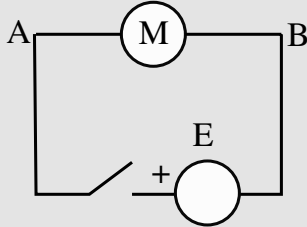


Figure 8.16

- a) L'interrupteur K étant ouvert depuis longtemps, on le ferme à l'instant $t = 0$. Établir l'expression de l'intensité $i(t)$ du courant dans le circuit en fonction du temps et tracer l'allure de son graphe. Quelle est l'expression de l'intensité I en régime permanent ?
 - b) Le régime permanent précédent étant établi, on ouvre K . On observe à l'ouverture du circuit une étincelle aux bornes de K . Expliquer ce phénomène.
2. Pour éviter cette étincelle, on monte en parallèle avec l'appareil M , entre ses bornes A et B , un condensateur

de capacité C' en série avec une résistance R' . Cette mise en parallèle constitue un dipôle AB (figure 8.17).

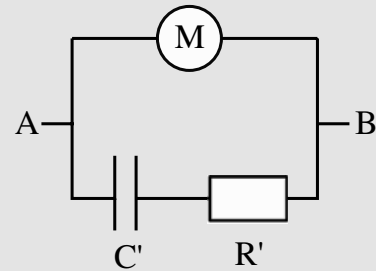


Figure 8.17

- a) Déterminer les conditions sur R' et C' pour que i , intensité traversant le générateur, soit indépendante du temps à partir de la fermeture du circuit.
- b) Le dipôle AB étant alimenté depuis longtemps par la f.e.m. continue E , expliquer pourquoi, à l'ouverture du circuit, on n'observe plus d'étincelle aux bornes de l'interrupteur K . Que deviennent les intensités, i_M dans l'appareil M et i' dans la branche $C'R'$ à cet instant ?
- c) Quel type de régime transitoire connaît i_L à l'ouverture du circuit dans les conditions du a) ?

8.1

Transitoire dans un double circuit RC

Cet exercice d'application directe ne présente aucune difficulté particulière. Si vous avez du mal à le résoudre, reprenez soigneusement les exemples du cours avant toute chose.

1. Le paramétrage est celui de la figure 8.18. La loi des mailles dans la grande maille s'écrit :

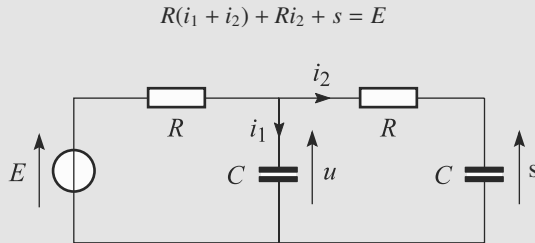


Figure 8.18 Paramétrage du double circuit RC.

En outre, les relations constitutives des deux condensateurs s'écrivent :

$$\begin{aligned} i_1 &= C\dot{u} \\ i_2 &= C\dot{s} \end{aligned}$$

D'où $RC\dot{u} + 2RC\dot{s} + s = E$.

La loi des mailles dans la maille de droite s'écrit :

$$s + Ri_2 = u \Rightarrow s + RC\dot{s} = u$$

En remplaçant u dans l'équation précédente, nous arrivons à :

$$\ddot{s} + \frac{3}{RC}\dot{s} + \frac{1}{(RC)^2}s = \frac{E}{(RC)^2}$$

2. Pour la résolution, mettons l'équation sous forme canonique :

$$\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{s} + \omega_0^2 s = \frac{E}{(RC)^2}$$

Par identification :

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{RC} \\ Q &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

La solution particulière est $s_p = E$. Pour la solution de l'équation sans second membre, écrivons le discriminant du polynôme caractéristique :

$$\Delta = \left(\frac{3}{RC}\right)^2 - 4\frac{1}{(RC)^2} = \frac{5}{(RC)^2}$$

qui est positif. Posons donc :

$$\beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2RC}$$

D'où la solution de l'équation sans second membre, écrite d'abord sous forme canonique puis avec les notations de l'énoncé :

$$\begin{aligned} s_{SSM}(t) &= e^{-\omega_0 t/2Q} (Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}) \\ &= e^{-3t/2RC} (Ae^{\sqrt{5}t/2RC} + Be^{-\sqrt{5}t/2RC}) \end{aligned}$$

La solution de l'équation est donc $s(t) = s_p + s_{SSM}(t)$.

Le condensateur de droite est initialement déchargé, ce qui donne la condition initiale $s(0) = 0$. Donc :

$$A + B + E = 0$$

Il faut trouver une deuxième condition initiale sur s ou une de ses dérivées. Le condensateur de gauche est initialement déchargé donc $u(0) = 0$. La loi des mailles précédemment établie donne alors :

$$\begin{aligned} s(0) + RC\dot{s}(0) &= u(0) \\ \Rightarrow \dot{s}(0) &= 0 \end{aligned}$$

ce qui conduit à la deuxième équation sur A et B :

$$A(\sqrt{5} - 3) - B(\sqrt{5} + 3) = 0$$

Le système se résout en :

$$\begin{aligned} A &= -\frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}E \\ B &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}E \end{aligned}$$

D'où la solution :

$$\begin{aligned} s(t) &= E \left(1 - \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} e^{\sqrt{5}t/2RC} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} e^{-\sqrt{5}t/2RC} \right) \end{aligned}$$

8.2

Étude d'un défibrillateur

Remarquez que l'exercice ne vous demande pas la résolution de l'équation différentielle. Vous devez dès la lecture de l'énoncé voir que la deuxième question vous demande seulement une discussion sur le signe du discriminant du trinôme caractéristique.

1. La loi des mailles dans la maille ABP s'écrit :

$$\frac{Q}{C} + Ri + u = 0$$

La loi des nœuds en A s'écrit :

$$i = \frac{dq}{dt} + \frac{u}{r} = C' \frac{du}{dt} + \frac{u}{r}$$

En outre, $i = \dot{Q}$. En dérivant la loi des mailles et en combinant les relations, il vient :

$$\frac{1}{C} \left(C' \frac{du}{dt} + \frac{u}{r} \right) + R \left(C' \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dt} \right) + \frac{du}{dt} = 0$$

qui aboutit à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{1}{rC'} + \frac{1}{RC'} \right) \frac{du}{dt} + \frac{1}{RrCC'} u = 0$$

2. Il faut éviter le régime pseudopériodique dont le discriminant Δ de l'équation caractéristique doit être positif ou nul. Ensuite, le régime critique a la propriété d'être plus rapide que tout régime apériodique.

Sachant que le régime critique est idéal et donc irréalisable en pratique, le défibrillateur doit être réglé pour un régime apériodique avec Δ positif mais aussi proche de zéro que possible :

$$\left(\frac{1}{RC} + \frac{1}{rC'} + \frac{1}{RC'} \right)^2 - \frac{4}{RrCC'} > 0$$

8.3

Charge et décharge d'un condensateur

Méthode mise en jeu : n°1

Cet exercice est très classique ; on traite la charge d'un condensateur au travers d'une résistance (cas du cours) puis la relaxation d'un circuit RLC. La seule difficulté est la manipulation correcte des expressions intervenant dans le régime pseudo-périodique et l'interprétation correcte de l'oscillographe fourni.

1. a) La loi des mailles donne, avec les conventions de la figure 8.19 :

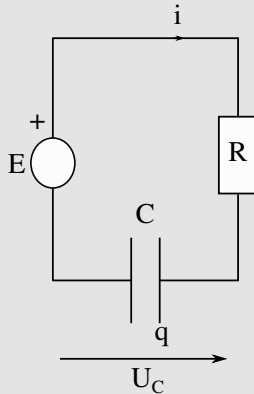


Figure 8.19

$$E - Ri - \frac{q}{C} = 0 \text{ avec } i = \frac{dq}{dt}.$$

En combinant les deux relations, on obtient alors :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R}.$$

- b) La solution s'écrit $q_{SSM}(t) + q_P(t)$ avec $q_{SSM}(t) = A \cdot \exp(-t/RC)$ et $q_P(t) = CE$.

À $t = 0$, le condensateur impose la continuité de $q(t)$ et donc $q(0) = A + CE = 0$. On en déduit finalement que :

$$q(t) = CE(1 - \exp(-\frac{t}{RC})).$$

- c) On obtient alors le tracé de la figure 8.20 :

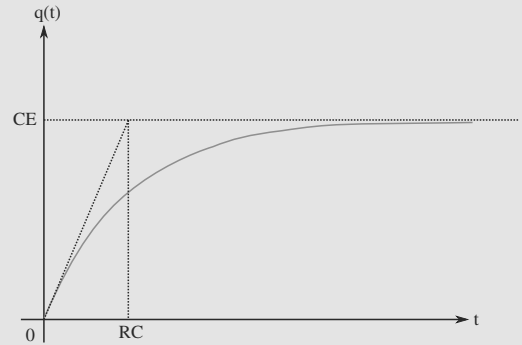


Figure 8.20

$q(t)$ tend au bout de quelques RC vers la valeur de régime permanent CE correspondant à la solution particulière de l'équation complète.

2. a) La loi des mailles appliquée au circuit avec la convention de la figure 8.21 donne :

$$U_C = L \frac{di}{dt} + ri = 0 \text{ avec } i = -C \frac{dU_C}{dt}$$

car le condensateur est en convention générateur. On aboutit donc à l'équation différentielle en U_C :

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{LC} = 0.$$

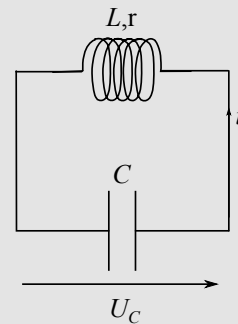


Figure 8.21

- b) La courbe observée est en accord avec un régime pseudo-périodique obtenu pour une équation différentielle

linéaire du second ordre comme celle établie en a) ($U_C(t) = B \exp(-\frac{t}{\tau}) \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ où B est une constante). Le polynôme caractéristique de celle-ci doit avoir un discriminant négatif et la pseudo-pulsation est obtenue comme $\frac{\sqrt{-A}}{2}$, soit ici :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}$$

Sur la figure, on lit une pseudo-période sur deux cases et donc $T = 2 \mu s$. On en déduit :

$$\omega = 2\pi/T = 3,1 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot s^{-1}$$

Le temps de décroissance exponentielle est alors $\tau = 2L/r$. À $t = 0$, on lit un passage par un maximum à 3,2 carreaux et à $t = 2T$, un passage par un maximum à 0,9 carreau. On en déduit que $\exp(-\frac{2T}{\tau}) = \frac{0,9}{3,2}$ et donc $\tau = \frac{2T}{\ln(\frac{3,2}{0,9})} = 3,15 \mu s$.

c) De $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}$ et $\tau = 2L/r$, on tire $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{\tau^2}}$ et donc $\omega^2 + \frac{1}{\tau^2} = \frac{1}{LC}$. On obtient donc $L = \frac{1}{C(\omega^2 + \frac{1}{\tau^2})} = 1,00 \text{ mH}$.

On tire r de ω ou τ . Par exemple $r = 2L/\tau = 637 \Omega$ (ce qui est bien élevé pour une valeur de résistance de bobinage).

Le facteur de qualité d'un circuit RLC série étant $Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}}$, on obtient ici 5,0 ce qui est conforme à l'observation de cinq pseudo-oscillations.

On lit enfin $U_C(0) = 1,6 \text{ V}$ qui conduit à $q(0) = C \cdot U_C(0) = 1,6 \cdot 10^{-10} \text{ C}$.

8.4

Dipôle RL série soumis à un créneau de tension

Méthode mise en jeu : n°1.

La mise en équation d'un RL série soumis à un échelon de tension est très simple, similaire au cas du RC série traité dans la partie cours. Ici, le dipôle n'est pas soumis à un échelon de tension, mais à un créneau.

Surtout ne cherchez pas à résoudre tout d'un coup. Un créneau n'est rien d'autre qu'une alternance régulière d'échelons montants et descendants. Résolvez l'équation différentielle séparément dans chaque cas, puis « raccordez » ces solutions grâce à la continuité de i .

1. La bobine est en convention récepteur donc $u_L = L di/dt$. Sur cet intervalle de temps, la tension aux bornes du GBF est constante égale à E . La loi des mailles s'écrit alors $u_L + Ri = E$ et donc :

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} + Ri &= E \\ \Rightarrow \tau \frac{di}{dt} + i &= \frac{E}{R} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R} \end{aligned}$$

C'est une équation différentielle linéaire inhomogène à coefficients constants et du premier ordre donc sa solution est de la forme :

$$i(t) = \frac{E}{R} + A e^{-t/\tau}$$

où A est la constante d'intégration. La bobine impose la continuité de i et $i(0^-) = 0$ donc $i(0) = 0$. La condition initiale se traduit par :

$$\begin{aligned} i(0) &= \frac{E}{R} + A = 0 \Rightarrow A = -\frac{E}{R} \\ \Rightarrow i(t) &= \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \end{aligned}$$

Son allure est représentée figure 8.22.

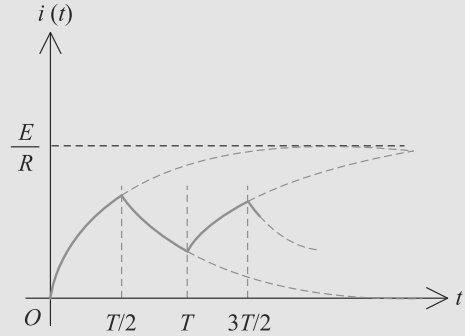


Figure 8.22 Allure de $i(t)$ dans le cas où la bobine n'a pas le temps de se charger ou de se décharger avant la bascule.

2. Pour la bobine, $u_L = L di/dt$ donc $u_L(t) = E e^{-t/\tau}$. Son allure est représentée figure 8.23.

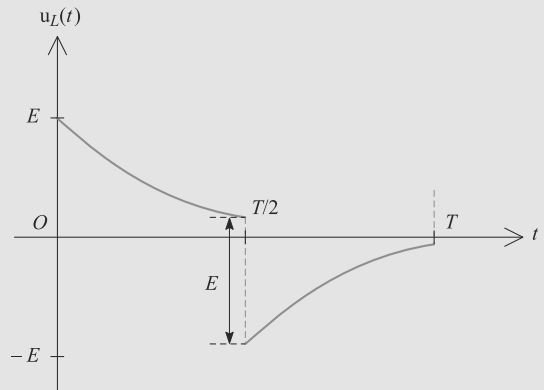


Figure 8.23 Allure de $u_L(t)$ dans le cas où la bobine n'a pas le temps de se charger ou de se décharger avant la bascule.

3. $\tau = L/R \approx 1 \text{ ms}$ donc la bobine a besoin de « quelques τ » pour se charger. Or, elle dispose de $T/2 = 1/2f = 0,5 \text{ ms}$ pour le faire, avant que le créneau ne bascule de E à 0. Donc les deux courbes n'ont pas le temps d'atteindre leur asymptote avant la bascule.
4. Sur cet intervalle de temps, la tension aux bornes du GBF est nulle donc ce dernier est équivalent à un fil. L'équation

différentielle se déduit de la précédente en remplaçant E par 0 :

$$\tau \frac{di}{dt} + i = 0 \Rightarrow i(t) = B e^{-t/\tau}$$

La condition initiale en $t = T/2$ est, puisque i est continue, égale à la valeur de $i(T/2)$ de la phase précédente :

$$\begin{aligned} B e^{-T/2\tau} &= \frac{E}{R} (1 - e^{-T/2\tau}) \\ \Rightarrow B &= \frac{E}{R} (e^{T/2\tau} - 1) \\ \Rightarrow i(t) &= \frac{E}{R} (e^{T/2\tau} - 1) e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

Par dérivation :

$$u_L(t) = E (1 - e^{T/2\tau}) e^{-t/\tau}$$



i est nécessairement continue, mais pas u_L .

Les allures de $i(t)$ et $u_L(t)$ sont représentées, respectivement figure 8.22 et 8.23. Il est apparent que la bobine ne charge pas et ne se décharge pas complètement.

5. D'après la question 3, il faut que τ soit petit devant la durée d'une demi-période : $\tau \ll T/2$ pour observer des charges et décharges complètes.

Comme $f = 1/T$, cela conduit à $f \ll 500$ Hz. La fréquence doit donc être de quelques dizaines de hertz, environ 100 Hz maximum.

Dans ces conditions, i et u_L prennent les allures des figures 8.24 et 8.25. En $t = T/2$, $i \simeq E/R$ et $u_L \simeq 0$.

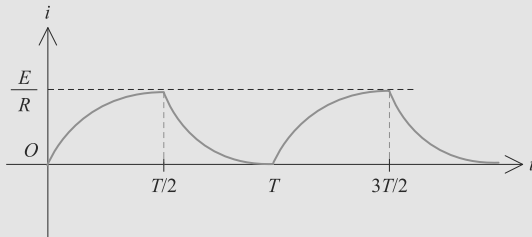


Figure 8.24 Allure de $i(t)$ dans le cas où le régime permanent a le temps de se rétablir avant la bascule.

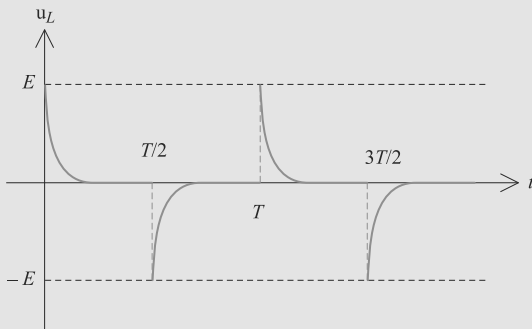


Figure 8.25 Allure de $u_L(t)$ dans le cas où le régime permanent a le temps de se rétablir avant la bascule.

8.5

Réponse à un créneau

Le principe est le même que dans l'exercice 8.4, mais c'est la tension aux bornes d'un condensateur qui est continue cette fois (et pas le courant).

La manière d'écrire la continuité de u en $T/2$ est différente de l'exercice 8.4. Soyez aussi à l'aise avec l'une qu'avec l'autre.

1. Le condensateur étant initialement déchargé, $u(0^-) = 0$. Par continuité, $u(0^+) = u(0^-)$ donc u est définie à $t = 0$ et $u(0) = 0$.

À partir de l'instant $t = 0^+$, la loi des mailles s'écrit $u = R_1 i + v_c$. À l'instant $t = 0^+$, elle donne :

$$0 = R_1 i(0^+) + E \Rightarrow i(0^+) = -\frac{E}{R_1}$$

Cela se retrouve par pont diviseur de tension sur la figure 8.26.

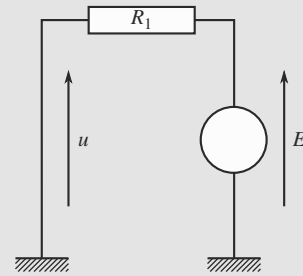


Figure 8.26 État du circuit en $t = 0^+$.



Autre méthode : il pourrait être astucieux de transformer le générateur de Thévenin (E, R_1) en son générateur de Norton équivalent. Ce dernier serait en parallèle avec R_2 et C , il aurait la tension u à ses bornes.

Lorsque $t = T/2^-$, le circuit a déjà retrouvé un régime permanent donc le condensateur est équivalent à un court-circuit. Le circuit se réduit donc à celui de la figure 8.27.

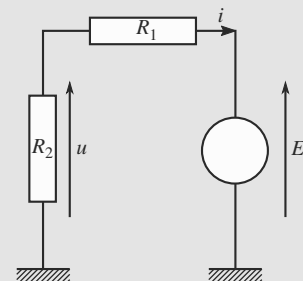


Figure 8.27 État du circuit pour $t \rightarrow +\infty$.

Alors $u = -R_2 i$ donc la loi des mailles se réduit à :

$$\begin{aligned} -R_2 i(t = T/2^-) &= R_1 i(t = T/2^-) + E \\ \Rightarrow i(t = T/2^-) &= -\frac{E}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

2. La loi des nœuds a été appliquée directement sur la figure et la loi des mailles s'écrit $u = R_1 i + v_e$. Les équations caractéristiques de chaque dipôle sont :

$$i_c = C \frac{du}{dt} \quad \text{et} \quad u = -R_2(i + i_c)$$

d'où :

$$\begin{aligned} u &= -R_2 i - R_2 C \frac{du}{dt} \\ \Rightarrow i &= -\frac{u}{R_2} - C \frac{du}{dt} \end{aligned}$$

Cette expression peut être utilisée dans la loi des mailles et conduit à :

$$\tau \dot{u} + u = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_e \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$$

3. Sur la première phase, $v_e = E$. Le condensateur va donc se charger. a) La solution $u(t)$ est la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière (ici constante) :

$$u(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

La condition $u(0) = 0$ conduit à :

$$u(t) = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau})$$

$u(0 < t < T/2)$ est représentée figure 8.26.

- b) La loi des mailles $u = R_1 i + E$ permet de déduire i :

$$i(t) = \frac{-E}{R_1 + R_2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} e^{-t/\tau} \right)$$

$i(0 < t < T/2)$ est représentée figure 8.27.

4. Sur la deuxième phase, $v_e = 0$. Le condensateur va donc se décharger.

a) Cette fois $v_e = 0$ donc $\tau \dot{u} + u = 0$. C'est une équation sans second membre et l'origine des temps est en $t = T/2$ pour cette phase, donc :

$$u(t) = B e^{-(t-T/2)/\tau}$$

u étant continue en $t = T/2$, nous avons $u(t = T/2^-) = u(t = T/2^+)$ donc :

$$\begin{aligned} B &= \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} \\ \Rightarrow u(t) &= \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} e^{-(t-T/2)/\tau} \end{aligned}$$

$u(T/2 < t < T)$ est représentée figure 8.28.

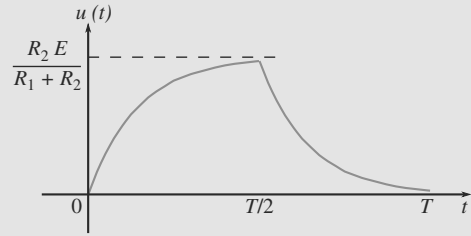


Figure 8.28 Allure de $u(t)$.

- b) $u = R_1 i$ conduit à :

$$i(t) = \frac{R_2 E}{R_1(R_1 + R_2)} e^{-(t-T/2)/\tau}$$

$i(T/2 < t < T)$ est représentée figure 8.29. Notons la discontinuité de i en $t = T/2$.

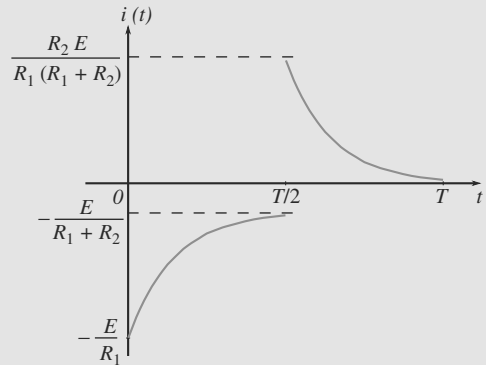


Figure 8.29 Allure de $i(t)$.

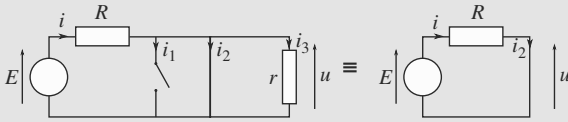
5. Sachant que le circuit revient à un régime permanent avant la fin de la deuxième phase, les conditions initiales pour la phase $T < t < 3T/2$ sont donc les mêmes que pour la phase $0 < t < T/2$, et ainsi de suite. Il suffit donc de répéter la succession des deux phases précédemment étudiées. u montre donc une succession de charges et de décharges du condensateur et i présente une discontinuité à chaque demi-période.

8.6

Dipôle RLC parallèle

Cet exercice n'utilise pas les mêmes notations que dans les paragraphes au début de ce chapitre. Vous devez savoir jongler avec diverses notations, car nous n'aurez pas forcément celles que vous connaissez dans tel ou tel problème de concours.

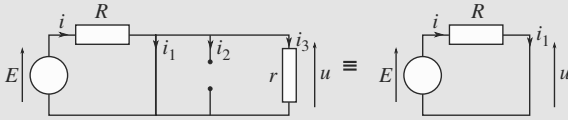
1. La figure 8.30 montre l'état du circuit à $t = 0^+$. u et i_1 sont continues donc d'après l'énoncé $u(0) = 0$ et $i_1(0) = 0$.

Figure 8.30 État du circuit en $t = 0^+$.

D'après la loi d'Ohm, $u = ri_3$ donc i_3 est continue et $i_3(0) = 0$.

La loi des nœuds $i = i_1 + i_2 + i_3$ se réduit alors à $i(0^+) = i_2(0^+)$. À ce moment, tout le dipôle rLC de droite est équivalent à un fil (tension nulle à ses bornes). La loi des mailles donne alors $i(0^+) = i_2(0^+) = E/R$.

Quand le régime permanent est rétabli, le circuit devient équivalent à celui de la figure 8.31. Alors $u(\infty) = 0$ donc $i_3(\infty) = 0$, $i_2(\infty) = 0$. La loi des mailles se réduit à $i(\infty) = i_1(\infty) = E/R$.

Figure 8.31 État du circuit pour $t \rightarrow +\infty$.

2. Les notations sont celles de la figure 8.31. Partons de :

$$\begin{cases} E - Ri - ri_3 = 0 \\ i = i_1 + i_2 + i_3 \\ u = ri_3 = L \frac{di_1}{dt} = \frac{q}{C} \end{cases}$$

La combinaison des deux premières donne $Ri_1 + Ri_2 + (R + r)i_3 = E$, ce qui élimine i . Dériver ceci permet d'exploiter la troisième relation :

$$\begin{aligned} \frac{R}{L} u + R \frac{d^2 q}{dt^2} + (R + r) \frac{di_3}{dt} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d^2 i_3}{dt^2} + 2\lambda \frac{di_3}{dt} + \omega_0^2 i_3 &= 0 \end{aligned}$$

3. Le discriminant de l'équation caractéristique associée doit être négatif. Il vaut $4\lambda^2 - 4\omega_0^2$ donc :

$$\begin{aligned} \lambda < \omega_0 &\Rightarrow \frac{R+r}{2RrC} < \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &\Rightarrow (R+r)\sqrt{L} < 2Rr\sqrt{C} \end{aligned}$$

λ caractérise l'amortissement des signaux électriques (via effet Joule), il faut donc qu'il soit suffisamment petit (inférieur à ω_0) pour que nous puissions observer des pseudo-oscillations.

Numériquement, $\omega_0 \approx 7,07 \text{ rad.s}^{-1}$;

$T_0 = 2\pi/\omega_0 \approx 0,889 \text{ ms}$ et $\lambda \approx 640 \text{ s}^{-1}$.

4. La pseudopériode est la durée qui sépare le passage par un maximum de deux pseudo-oscillations successives. La pseudopulsation est la pulsation associée. Pour mettre en

évidence ω il faut écrire les racines complexes r_+ et r_- du polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} r_{\pm} &= -\lambda \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\lambda \pm j\omega \\ \Rightarrow \omega &= \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad \text{et} \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \end{aligned}$$

Numériquement, $\omega \approx 7,04 \text{ rad.s}^{-1}$ et $T \approx 0,892 \text{ ms}$. Nous constatons que ω et ω_0 ne diffèrent que par le troisième chiffre significatif. Nous pourrions les supposer quasiment égales en pratique.

5. En régime pseudopériodique $i_3(t) = e^{-\lambda t}(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$. La condition initiale $i_3(0) = 0$ donne $A = 0$. Il faut trouver une autre condition sur i_3 ou une de ses dérivées.

$$\begin{cases} u = ri_3 = \frac{q}{C} \\ i_2 = \frac{dq}{dt} \end{cases} \Rightarrow i_2 = rC \frac{di_3}{dt} \quad (8.2)$$

et nous avons établi que $i_2(0) = E/R$, d'où la condition initiale $di_3/dt = E/rRC$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{di_3}{dt}(t) &= Be^{-\lambda t}(\omega \cos(\omega t) - \lambda \sin(\omega t)) \\ \Rightarrow B &= \frac{E}{rRC\omega} \end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\begin{aligned} i_3(t) &= \frac{E}{rRC\omega} e^{-\lambda t} \sin(\omega t) \\ \Rightarrow u(t) &= \frac{E}{RC\omega} e^{-\lambda t} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

La relation (8.2) donne :

$$i_2(t) = \frac{E}{R\omega} e^{-\lambda t}(\omega \cos(\omega t) - \lambda \sin(\omega t))$$

La loi des mailles $u + Ri = E$ donne :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - \frac{e^{-\lambda t}}{RC\omega} \sin(\omega t) \right)$$

Enfin, la loi des nœuds $i = i_1 + i_2 + i_3$ donne :

$$i_1(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\lambda t} \left(\frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega t) + \cos(\omega t) \right) \right)$$

Pour que u soit maximale, il faut que sa dérivée soit nulle :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= \frac{E}{RC\omega} e^{-\lambda t}(\omega \cos(\omega t) - \lambda \sin(\omega t)) = 0 \\ \Rightarrow \tan(\omega t) &= \frac{\omega}{\lambda} \end{aligned}$$

Cette condition est satisfaite une infinité de fois au cours du temps. Mais comme u décroît en amplitude au cours du temps, il faut prendre le premier instant t possible, soit :

$$t_0 = \frac{1}{\omega} \arctan\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)$$

D'où, numériquement, $u(t_0) \approx 0,30 \text{ V}$.

6. Le décroissement logarithmique est défini par :

$$\delta = \ln\left(\frac{u(t)}{u(t+T)}\right)$$

Donc ici :

$$\delta = \ln \left(\frac{e^{-\lambda t} \sin(\omega t)}{e^{-\lambda(t+T)} \sin(\omega(t+T))} \right)$$

$$= \ln(e^{\lambda T})$$

$$\delta = \lambda T$$

ce qui donne $\delta = 0,57$. δ mesure (logarithmiquement) la décroissance de l'amplitude du signal d'une pseudopériode à la suivante : plus l'amortissement provoqué par la résistance est fort, plus l'atténuation est rapide.

7. Cherchons l'instant t_1 tel que $u(t_1) = u_{\max}/1000$ où u_{\max} désigne la valeur maximale de u calculée question 5. Cela revient à :

$$e^{-\lambda t_1} = 10^{-3} \Rightarrow t_1 \approx 11 \text{ ms}$$

Le régime transitoire dure donc quelques millisecondes, il est plutôt rapide.

8.7

Étincelle de rupture

Méthode mise en jeu : n°1

On retrouve dans cet exercice toutes les questions classiques qui peuvent être posées sur les régimes transitoires gouvernés par des équations du premier ordre (circuit LR et RC). Dans la deuxième partie, il faut un peu de jugeote mathématique pour répondre simplement aux questions et éviter de s'enfermer dans les équations trop compliquées à manipuler.

1. a) Le circuit équivalent à la fermeture de l'interrupteur est représenté figure 8.32 :

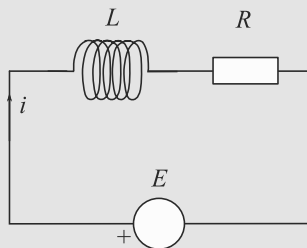


Figure 8.32 Circuit équivalent.

La loi des mailles donne alors : $E = Ri + L di/dt$ qu'on peut transformer en :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}.$$

Sa solution est alors $i(t) = \frac{E}{R}(1 - \exp(-\frac{Rt}{L}))$ correspondant à la condition initiale imposée par la bobine ($i(0) = 0$).

Sa représentation graphique est donnée figure 8.33 :

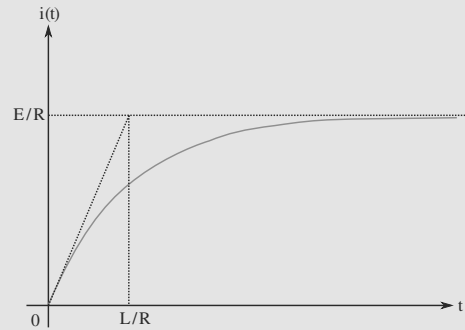


Figure 8.33 Représentation de $i(t)$.

En régime permanent, pour t de l'ordre de quelques L/R , on obtient alors $I = E/R$ ce qu'on peut aussi retrouver en considérant le modèle limite de la bobine en continu (figure 8.25).

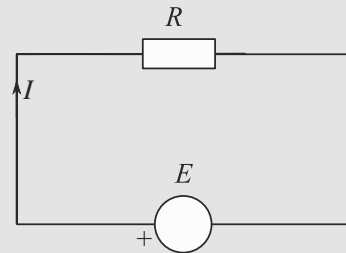


Figure 8.34 Schéma équivalent en continu.

- b) L'étincelle qui apparaît est due à la continuité de l'intensité imposée par la bobine : elle ne peut passer instantanément à la valeur nulle et une intensité traverse l'air à l'ouverture du circuit. Celui-ci s'échauffe et émet brièvement un éclair lumineux.
2. a) Le circuit équivalent obtenu est représenté figure 8.35 :

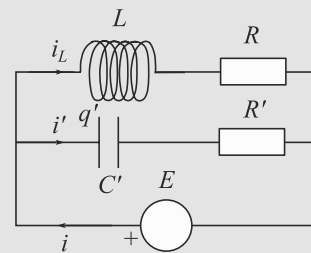


Figure 8.35 Montage complet.

La loi des mailles donne alors : $E = Ri_L + L di_L/dt = R'i' + q'/C'$. La loi des nœuds donne $i = i_L + i'$.

On obtient à nouveau $i_L(t) = \frac{E}{R}(1 - \exp(-\frac{Rt}{L}))$ et la résolution de l'équation en i' (charge d'un condensateur C' au travers d'une résistance R') donne $i'(t) = \frac{E}{R'} \exp(-\frac{t}{R'C'})$.

On obtient au final $i(t) = \frac{E}{R}(1 - \exp(-\frac{Rt}{L})) + \frac{E}{R'} \exp(-\frac{t}{R'C'})$. Pour que ceci soit indépendant du temps, les deux exponentielles ne doivent pas former une famille libre et donc $\frac{1}{R'C'} = \frac{R}{L}$ (mêmes constantes de temps) et les amplitudes

des exponentielles doivent être opposées : $R = R'$. On a donc les conditions suivantes :

$$C' = \frac{R^2}{L} \text{ et } R = R'.$$

Numériquement, on obtient alors : $C' = 488 \mu\text{F}$ et $R' = 9,6 \Omega$.

b) La continuité de l'intensité dans le moteur lors de l'ouverture du circuit est assurée par la présence en parallèle du condensateur et de la résistance. Le courant i' , nul juste avant (régime permanent), passe alors à $-E/R$ avant de tendre vers 0. Le courant dans le générateur passe instantanément à 0, sans production d'étincelle.

c) La loi des mailles donne ici $0 = Ri_L + L di_L/dt = R'i' + q'/C'$ avec $i' = -i_L$. En dérivant une fois, on obtient : $R di_L/dt + L d^2 i_L/dt^2 = R' di'/dt + i'/C'$. On a donc l'équation différentielle en : $L \frac{d^2 i_L}{dt^2} + (R + R') \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{C'} i_L = 0$. Soit, en tenant compte des conditions du a) :

$$L \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2R \frac{di_L}{dt} + \frac{R^2}{L} i_L = 0$$

Son polynôme caractéristique est de discriminant réduit $\Delta = R^2 - L \frac{R^2}{L} = 0$. Il s'agit donc d'un régime critique avec retour rapide à l'équilibre.

Partie 3

Mécanique du point — Première période

Plan

9.1	Référentiel et observateur	138
9.2	Systèmes de coordonnées	139
9.3	Exemples simples de mouvements	141
	Synthèse	144
	Tests et exercices	145
	Corrigés des exercices	147

Introduction

La cinématique du point est généralement présentée comme la branche de la mécanique qui s'occupe de décrire un mouvement donné, sans chercher à le reconstruire à partir de ses causes ou à en déterminer l'évolution. Il est équivalent de dire qu'il s'agit seulement de relations géométriques concernant les trajectoires, et non de lois physiques. Ces relations trouveront leur utilisation dans la **dynamique du point**, au chapitre 10.

Prérequis

- Les vecteurs dans l'espace à trois dimensions
- Dérivation par rapport au temps
- Projection et trigonométrie

Objectifs

- Décrire le mouvement d'un point dans un système de coordonnées
- Introduire les coordonnées cylindriques (polaires dans le plan) et rappeler les coordonnées cartésiennes
- Utiliser ces coordonnées pour décrire quelques mouvements simples (rectiligne, circulaire)

9.1 Référentiel et observateur



Dans un exercice de pure cinématique, vous n'aurez pas le choix du référentiel : le mouvement vous sera donné, ce qui sous-entend un certain choix de référentiel.

À ce stade du cours, il suffit de dire qu'un référentiel correspond à la formalisation de la notion d'observateur.

Les résultats de cinématique vont dépendre notablement du choix du référentiel. Par exemple, prenons une personne se déplaçant suivant un rayon d'un manège tournant. Sa trajectoire sera vue comme une droite dans un référentiel lié au manège, tandis qu'elle sera une spirale dans un référentiel lié au sol.

9.2 Systèmes de coordonnées

9.2.1 Référentiel et repère spatial



Le choix d'un référentiel a un sens physique (point de vue d'un observateur). Celui d'un repère n'est qu'une commodité de calcul et peut être modifié à volonté a posteriori.



Pour mémoire, la règle des trois doigts se fait de la main droite, \vec{u}_1 est porté par le pouce, \vec{u}_2 par l'index et \vec{u}_3 par le majeur.

Le repérage d'un point dans l'espace, une fois le référentiel choisi, peut se faire de nombreuses manières. Chacune correspond au choix d'un repère spatial, ou système de coordonnées, ou base.

Une base est constituée de trois vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$. Nous opterons toujours pour une base orthonormée directe. Ce dernier adjectif signifie que le sens de \vec{u}_3 est donné par la règle des trois doigts.

Méthode 1 projeter et décomposer des vecteurs dans une base

Il est crucial en mécanique de savoir décomposer un vecteur sur une base et effectuer des projections. Reportez-vous à la fiche méthode 4.

9.2.2 Le système de coordonnées cartésiennes



Les vecteurs de la base cartésienne sont fixes dans le référentiel, donc indépendants du temps : leurs dérivées temporelles sont donc nulles.

La base cartésienne est à la fois très particulière et très simple : ses trois vecteurs de base sont immobiles dans le référentiel d'étude (figure 9.1).

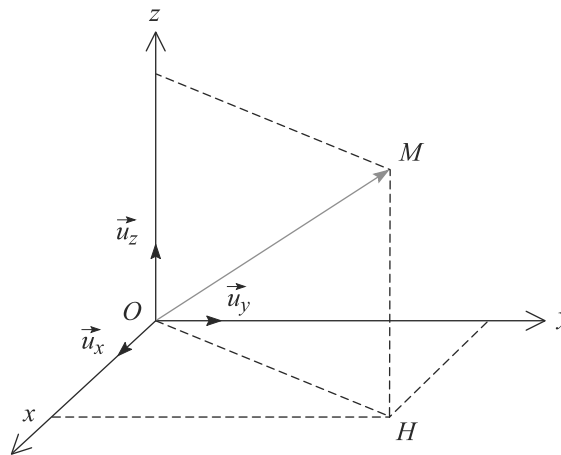


Figure 9.1 Système de coordonnées cartésiennes.



La notation \dot{x} , dite notation de Newton, désigne la dérivée par rapport au temps. Ne l'utilisez pas pour des dérivées par rapport à d'autres variables !

Éléments cinématiques en base cartésienne :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{v}(M)_{(R)} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$$

$$\vec{a}(M)_{(R)} = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$$

9.2.3 Le systèmes de coordonnées cylindriques

C'est un exemple de système à base mobile : deux des vecteurs de base ne sont pas fixes dans le référentiel (figure 9.2). Un axe fixe est choisi et nommé Oz , il jouera un rôle particulier dans ces coordonnées.

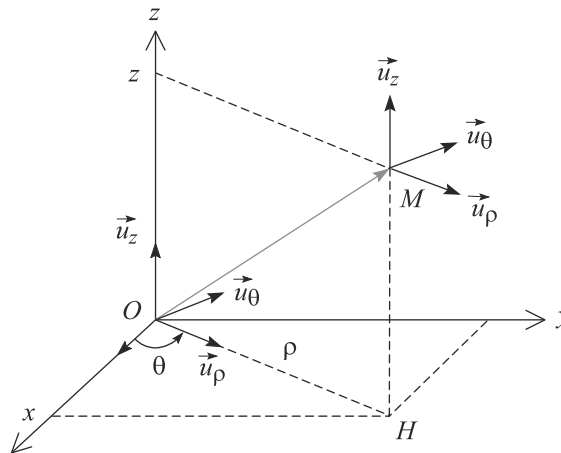


Figure 9.2 Système de coordonnées cylindriques.

Ce système sera particulièrement pratique pour décrire le mouvement d'un point tournant autour de l'axe Oz , comme une balançoire ou un manège.

Éléments cinématiques en base cylindrique :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

$$\vec{v}(M)_{(R)} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$$

$$\vec{a}(M)_{(R)} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{u}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$$



L'angle θ et le vecteur \vec{u}_θ n'apparaissent donc pas dans l'expression de \overrightarrow{OM} . Une faute classique serait d'introduire un terme en $\theta \vec{u}_\theta$, terme qui n'est même pas homogène !



- Vérifiez que chaque terme dans \vec{a} est bien homogène à une accélération.
- Les vecteurs \overrightarrow{OM} , \vec{v} et \vec{a} dépendent du référentiel choisi, mais pas du système de coordonnées. Par contre, leurs projections sur les axes du système de coordonnées (leurs **composantes**) dépendent bien sûr des deux !

9.2.4 Dérivées temporelles des vecteurs de la base

Les vecteurs de la base cartésiennes sont par définition fixes dans le référentiel d'étude. Par contre, en base cylindrique, deux des vecteurs de base se déplacent avec le point :

$$\left(\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}\right)_{(R)} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right)_{(R)} = -\dot{\theta} \vec{u}_\rho \quad (9.1)$$

9.2.5 Interprétation physique

Par définition même, l'accélération mesure la variation de la vitesse : elle pointe dans la direction dans laquelle la vitesse varie, et sa norme mesure l'importance de cette variation. Décomposons \vec{a} en la somme de deux vecteurs : une composante \vec{a}_\parallel colinéaire à la vitesse et une composante \vec{a}_\perp normale.

- L'action de \vec{a}_\perp est de faire tourner le vecteur vitesse, sans changer sa norme.
- L'action de \vec{a}_\parallel est de changer la norme du vecteur vitesse, sans le faire tourner.



Entraînez-vous à exploiter cette interprétation dans les mouvements rencontrés en exercice.

9.3 Exemples simples de mouvements

9.3.1 Mouvement rectiligne



Nous pouvons aussi dire qu'uniforme signifie $\|\vec{v}\|$ est constante. Cela s'applique aux mouvements rectilignes, circulaires, etc.

Un mouvement est dit rectiligne si \vec{v} et \vec{a} restent colinéaires à tout instant et en outre :

- uniformément accéléré si \vec{a} est constant non nul,
- uniforme si \vec{a} est nul et donc \vec{v} constant.

Le choix naturel est alors le système de coordonnées cartésiennes tel que l'un des axes soit confondu avec l'axe du mouvement. Dans la suite cet axe est noté Ox .

Pour l'exemple, les conditions initiales sont les suivantes : à l'instant $t = 0$, le mobile M se trouve en x_0 et évolue à la vitesse $\vec{v}(t = 0) = v_0 \vec{u}_x$. Le mouvement est uniformément accéléré avec une accélération $\vec{a} = a_0 \vec{u}_x$.

- Si l'accélération est dans le même sens que la vitesse ($\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$), le mouvement est dit accéléré.
- Si l'accélération est opposée à la vitesse ($\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$), le mouvement est dit freiné.

Exemple : chute libre

En négligeant les frottements de l'air, tout corps en chute libre tombe avec une accélération constante $a_0 = -g$.

$$\begin{aligned} a_0 = -g = \ddot{x} &\Rightarrow \dot{x}(t) = -gt + v_0 \\ &\Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0 \end{aligned}$$



Quand vous jetez une pièce en l'air, son mouvement est **toujours** uniformément accéléré car son accélération est constante égale à \vec{g} . Il s'agit d'un mouvement freiné pendant la phase ascendante (accélération vers le bas, vitesse vers le haut), accéléré pendant la phase descendante.



L'interprétation d'une telle accélération est simple : si le mobile s'éloigne de l'origine, son accélération tend à l'y ramener : a_x négative si x est positif et réciproquement. Un exemple immédiat est un ressort.



La position est maximale (élongation maximale du ressort) lorsque la vitesse nulle : en ce point la vitesse change de signe et le mobile rebrousse chemin. De même, la vitesse est maximale lorsque l'accélération est nulle : le mobile passe par l'origine et son accélération change de signe.

9.3.2 Mouvement rectiligne sinusoïdal

Soit Ox l'axe du mouvement. Le point étudié oscille sinusoïdalement sur un axe Ox autour de l'origine, par exemple parce qu'il est attaché à un ressort. Donc son abscisse est donnée par $x(t) = X_m \cos(\omega t)$. D'où sa vitesse et son accélération sur cet axe, par dérivations successives :

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = -\omega X_m \sin(\omega t)$$

$$a_x(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 X_m \cos(\omega t)$$

Nous remarquons alors une relation simple entre position et accélération, qui aboutit à l'équation différentielle du mouvement :

$$a_x(t) = -\omega^2 x(t) \Rightarrow \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (9.2)$$

Inversement, si un système est gouverné par une équation différentielle de la forme (9.2), alors la solution est toujours de la forme :

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

et décrit donc un mouvement sinusoïdal de pulsation ω . Un exemple est représenté figure 9.3 avec $B = 0$, donc une amplitude initiale A et une vitesse initiale nulle.

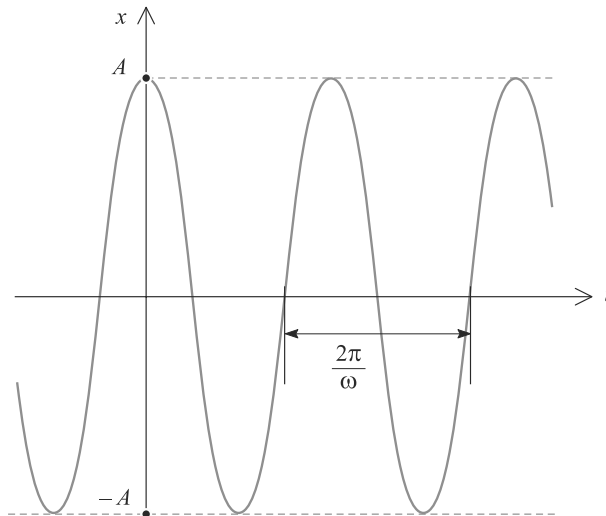


Figure 9.3 Mouvement sinusoïdal.

9.3.3 Mouvement circulaire

Par définition, c'est un mouvement plan. L'utilisation des coordonnées polaires dans le plan du mouvement s'impose donc, en prenant le centre du cercle pour origine du système de coordonnée (figure 9.4). $\omega = \dot{\theta}$ est appelée pulsation ou vitesse angulaire.

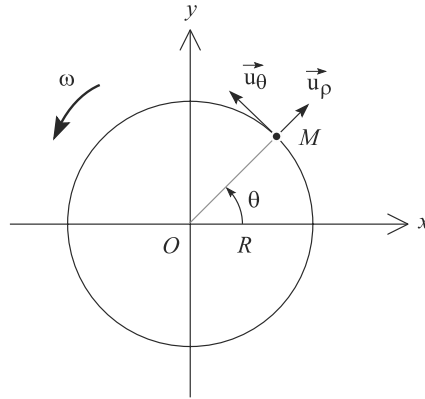


Figure 9.4 Mouvement circulaire d'un point autour de l'origine O.

En tenant compte du fait que ρ et z sont constants, il vient :

Caractéristiques cinématiques du mouvement circulaire :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= R\dot{\theta} \vec{u}_\theta = R\omega \vec{u}_\theta \\ \vec{a} &= \underbrace{-R\omega^2 \vec{u}_\rho}_{\text{accélération radiale}} + \underbrace{R\dot{\omega} \vec{u}_\theta}_{\text{accélération orthoradiale}}\end{aligned}$$

En combinant ces expressions, il vient :

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_\rho + \frac{dv}{dt} \vec{u}_\theta \quad \text{avec} \quad v = R\omega$$

Cas particulier du mouvement circulaire uniforme

Si ω est constante, $\|\vec{v}\|$ aussi donc le mouvement est uniforme. Alors $\dot{\theta} = \text{cst}$ donc $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ et :

$$\begin{cases} x(t) = R \cos(\omega t + \theta_0) \\ y(t) = R \sin(\omega t + \theta_0) \end{cases}$$

Le mouvement circulaire uniforme est donc la superposition de deux mouvements rectilignes sinusoïdaux en **quadrature** le long des deux axes Ox et Oy .



Qu'il reste une composante non nulle de l'accélération dans un mouvement uniforme peut vous surprendre. Mais n'oubliez pas que le vecteur vitesse change de direction à toute instant, ce qui correspond à l'action d'une accélération perpendiculaire à la vitesse.



Deux sinusoides sont en quadrature si elles sont déphasées de $\pi/2$.

Synthèse

Savoirs

- Différencier référentiel et repère
- Les dérivées temporelles des vecteurs de base cylindriques
- Vitesse et accélération sont des vecteurs
- Position, vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes et cylindriques
- Définir et reconnaître un mouvement uniforme, accéléré ou freiné
- Décrire un mouvement rectiligne et un mouvement circulaire

Savoir-faire

- Retrouver les expressions des vitesses et accélérations en coordonnées cylindriques

Mots-clés

- Repère,
- référentiel,
- position,
- vitesse,
- accélération,
- coordonnées cartésiennes,
- coordonnées cylindriques,
- mouvement rectiligne,
- mouvement circulaire,
- mouvement uniforme.

Tests de connaissances

- 9.1 Un référentiel est un repère particulier.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 9.2 Un référentiel est lié à la manière d'observer l'espace.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 9.3 En mécanique newtonienne (classique), toutes les horloges avancent au même rythme.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 9.4 Un mouvement uniforme est à accélération nulle.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 9.5 Comme r est constant dans un mouvement circulaire, il n'y a pas d'accélération.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 9.6 L'accélération peut être non nulle à un instant où la vitesse s'annule.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 9.7 La direction de l'accélération peut varier alors que celle de la vitesse est constante.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 9.8 La direction de la vitesse peut changer si l'accélération est constante.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 9.9 Les coordonnées polaires sont adaptées à la description des mouvements rectilignes.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 9.10 Les coordonnées polaires sont adaptées à la description des mouvements autour d'un point.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 9.11 Un mouvement rectiligne sinusoïdal se fait sur un segment.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 9.12 Pour un mouvement circulaire, si la vitesse angulaire est constante, le mouvement est uniforme.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

9.13 Tir au pigeon d'argile

Une cible C est abandonnée sans vitesse initiale d'une hauteur h à l'abscisse $x = L$. Au même instant, un projectile P est tiré depuis l'origine avec une vitesse initiale \vec{v}_0 faisant un angle β avec l'horizontale (figure 9.5).

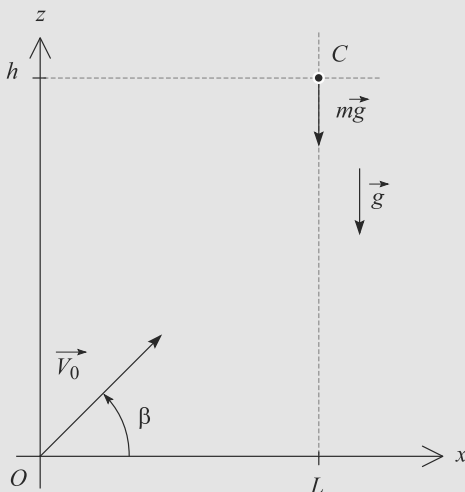


Figure 9.5 Tir au pigeon d'argile.

Vous admettez que l'accélération d'un corps en chute libre est égale à \vec{g} à tout instant.

Calculez l'angle β pour que le projectile atteigne sa cible. Interprétez.

9.14 Mouvement tournant inconnu

Un mobile M décrit une trajectoire d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = r \cos(\omega t) \\ y = r \sin(\omega t) \\ z = \alpha \omega t \end{cases}$$

avec r , ω et α constantes positives.

- Étudiez le mouvement de la projection H de M dans le plan xOy . Déduisez-en que le mouvement de M se déduit de la superposition de deux mouvements que vous préciserez. Représentez graphiquement la trajectoire.
- Exprimez la vitesse et l'accélération de M en coordonnées cartésiennes puis cylindriques.
- Vérifiez que les normes de la vitesse et de l'accélération ne dépendent pas du système de coordonnées utilisé.

Exercices d'approfondissement

9.15 Mouvement cycloïdal

Une roue de rayon R et de centre C roule sur l'axe Ox en restant dans le plan xOz . Le véhicule, et donc C , avance à la vitesse constante v . Soit M un point lié à la roue, situé sur la circonférence. À l'instant $t = 0$, M se trouve à l'origine O .

1. La roue roule sans glisser. Justifiez que cela implique $vt = R\theta$, avec θ l'angle de rotation de la roue.
2. Déterminez à un instant t quelconque et en coordonnées cartésiennes :
 - a) la position de M , soit le vecteur \overrightarrow{OM} ,
 - b) sa vitesse $\vec{v}(t)$,
 - c) son accélération de $\vec{d}(t)$.
3. Déterminez $\vec{v}(t)$ et $\vec{d}(t)$ lorsque M est en contact avec le sol.
4. Dessinez l'allure de la trajectoire de M . Sans calcul, à quoi ressemblerait-elle dans un référentiel lié au véhicule et non à la route ?

9.16 Recherche d'une relation vitesse-position

Un point matériel est en mouvement rectiligne sur un axe Ox . Il est initialement au repos à l'abscisse x_0 puis se met à se déplacer avec une accélération $a = -k/x^2$ ($k > 0$).

Calculez sa vitesse en fonction de sa position.

9.17 Mouvement avec force centrifuge (D'après ENSTPE)

Une bille de masse m est guidée dans un tube horizontal tournant. Elle subit alors une action centrifuge telle que l'équation d'évolution de sa distance à l'axe de rotation est :

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0.$$

1. Quelle est la dimension de ω ?
2. Déterminer la solution générale de l'équation du mouvement lorsque ω est constant.
3. Dans le cas où $r(t=0) = r_0$ et où la vitesse de la bille dans le tube est nulle à l'instant initial, déterminer $r(t)$. Conclure.

9.18 Mouvement circulaire retardé

Un mobile M se déplace sur un cercle de rayon R . Il développe un mouvement retardé tel que les composantes tangentielle et normale de son accélération soient égales en norme. Sa vitesse initiale est v_0 et on prendra l'origine de l'angle qui paramètre sa position à l'instant initial.

1. Déterminer l'expression de sa vitesse puis de son accélération en coordonnées polaires (on fera un schéma introduisant ces coordonnées).
2. Identifier les composantes tangentielle et normale de son accélération.
3. Déterminer l'équation différentielle particulière qui régit son mouvement.
4. Déterminer $v(t)$ puis la position de M en fonction du temps.

9.1

Faux. Un référentiel est souvent défini à partir d'un repère (fixe), mais c'est un abus de langage : les trois axes font partie de la définition du référentiel et peuvent, éventuellement, servir à définir un repère.

9.2

Vrai. Un référentiel correspond une manière d'observer l'espace en désignant à quel objet est attaché l'observateur.

9.3

Vrai, le temps ne dépend pas du référentiel en mécanique classique.

9.4

Faux. Dans un mouvement uniforme, la norme de la vitesse est constante mais pas forcément sa direction.

9.5

Faux. Dans un mouvement circulaire, il y a au moins une accélération centripète sinon la vitesse ne change pas de direction.

9.6

Vrai. Lorsqu'un objet lancé en l'air atteint son point le plus haut, sa vitesse s'annule (avant de changer de sens) tandis que son accélération reste égale à celle de la pesanteur.

9.7

Faux, c'est justement la composante de \vec{a} normale à \vec{v} qui fait tourner \vec{v} . Si \vec{v} ne tourne pas, cette composante est nulle.

9.8

Vrai, pensez à la trajectoire parabolique d'une chute libre.

9.9

Faux. Ce sont les coordonnées cartésiennes qui le sont.

9.10

Vrai, s'il y a un centre de force par exemple.

9.11

Vrai.

9.12

Vrai, grâce à la relation $v = R\omega$.

9.13

Tir au pigeon d'argile

Voici l'une des multiples variations de l'exercice de la chute libre. Vous devez parfaitement maîtriser sa résolution :

intégrations successives, calcul des constantes d'intégration, intersection de deux trajectoires à la même date.

La condition est qu'il existe un instant t_1 tel que les abscisses et altitude de P et C soient simultanément égales. Ces abscisses valent :

$$\begin{cases} x_C(t) = L \\ z_C(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} x_P(t) = v_0 \cos(\beta)t \\ z_P(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\beta)t \end{cases}$$

La date t_1 , si elle existe, est telle que $x_C(t_1) = x_P(t_1)$ donc :

$$v_0 \cos(\beta)t_1 = L \Rightarrow t_1 = \frac{L}{v_0 \cos(\beta)}$$

et $y_C(t_1) = y_P(t_1)$ donc :

$$h - \frac{1}{2}gt_1^2 = -\frac{1}{2}gt_1^2 + v_0 \sin(\beta)t_1$$

qui conduit, après calcul, à :

$$\tan(\beta) = \frac{h}{L}$$

La date t_1 est physiquement acceptable : $t_1 > 0$ et C n'a pas encore touché le sol quand l'impact a lieu.



Ce résultat est un peu surprenant car il indique qu'il faut viser la position initiale de la cible pour la toucher dans sa chute ! Mais en fait c'est cohérent : le projectile et la cible « tombent » ensuite avec la même accélération.

9.14

Mouvement tournant inconnu

Cet exercice va vous faire jongler entre les systèmes de coordonnées cartésiennes et cylindriques (polaires). Soyez donc au point sur les relations de passage de l'un à l'autre.

Un simple coup d'œil à l'énoncé devrait vous montrer que le mouvement est circulaire uniforme dans le plan xOy et rectiligne uniforme selon l'axe Oz . Vous pouvez ainsi déterminer le mouvement avant même de commencer votre rédaction !

1. Pour H , $z = 0$. Il reste donc un mouvement pour lequel $x^2 + y^2 = r^2$ à tout instant. Cela est l'équation d'un cercle, donc H est en mouvement circulaire. Comme ω est constante, ce mouvement est uniforme.

Quant au mouvement vertical, z est proportionnel au temps, donc la vitesse selon Oz est constante : c'est un mouvement rectiligne uniforme.

Donc le mouvement complet est la superposition d'un mouvement circulaire uniforme dans le plan horizontal et d'un mouvement rectiligne uniforme vertical. Il s'agit donc d'un mouvement en hélice, dit aussi **hélicoïdal**. Il est représenté figure 9.6.

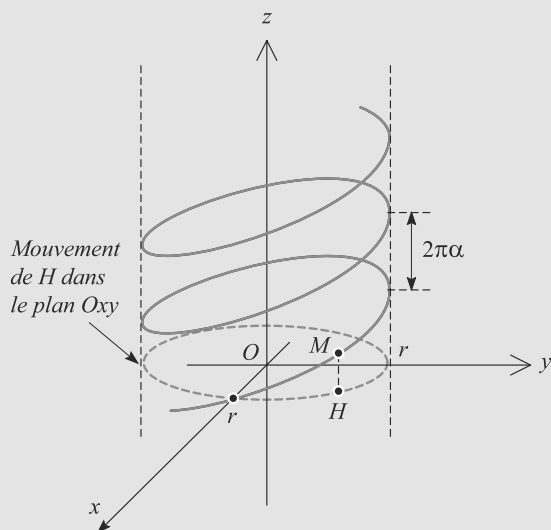


Figure 9.6 Trajectoire hélicoïdale.

2. En cartésiennes :

$$\vec{v} = -r\omega \sin(\omega t) \vec{u}_x + r\omega \cos(\omega t) \vec{u}_y + \alpha\omega \vec{u}_z$$

$$\vec{a} = -r\omega^2 \cos(\omega t) \vec{u}_x - r\omega^2 \sin(\omega t) \vec{u}_y$$

puis en coordonnées cylindriques, $\rho = r$, $\theta = \omega t$ et $z = \alpha\theta$ donnent :

$$\vec{OM} = r \vec{u}_\rho + \alpha\theta \vec{u}_z$$

$$\vec{v} = r\omega \vec{u}_\theta + \alpha\omega \vec{u}_z$$

$$\vec{a} = -r\omega^2 \vec{u}_\rho$$

3. D'après la question précédente, $\|\vec{v}\| = \sqrt{r^2 + \alpha^2} \omega$ et $\|\vec{a}\| = r\omega^2$.



La norme d'un vecteur ne dépend jamais du système de coordonnées choisies. Intuitivement, c'est évident : une longueur ne dépend pas de la base choisie. Mathématiquement, la norme est un produit scalaire, qui lui-même est indépendant de la base choisie.

9.15

Mouvement cycloïdal

Cet exercice repose sur des méthodes très classiques. La situation physique est assez simple pour que vous puissiez vous représenter le mouvement intuitivement, avant de vous lancer dans les calculs.

Retenez bien le concept de mouvement sans glissement de la première question, ainsi que l'utilisation de la relation de Chasles dans la deuxième question pour retrouver la vitesse de M .

1. Lorsque la roue a avancé d'une distance vt sur la route, un point de la circonférence de la roue a parcouru un arc de cercle de longueur $R\theta$. Si la roue ne glisse pas, ces deux distances sont égales donc $vt = R\theta$.



Imaginez une voiture qui fait un démarrage à l'américaine : la voiture n'avance pas ($v = 0$) et pourtant les roues tournent (θ varie), c'est un cas où il y a glissement.

2. a) $\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CM}$ avec :

$$\vec{OC} = vt \vec{u}_x + R \vec{u}_z$$

$$\vec{CM} = -R \sin(\theta) \vec{u}_x - R \cos(\theta) \vec{u}_z$$

d'où :

$$\begin{cases} x(t) = vt - R \sin(\theta) \\ z(t) = R - R \cos(\theta) \end{cases}$$

et finalement :

$$\begin{cases} x(t) = R \left(\frac{vt}{R} - \sin\left(\frac{vt}{R}\right) \right) \\ z(t) = R \left(1 - \cos\left(\frac{vt}{R}\right) \right) \end{cases}$$

b) Par simple dérivation :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v \left(1 - \cos\left(\frac{vt}{R}\right) \right) \\ \dot{z}(t) = v \sin\left(\frac{vt}{R}\right) \end{cases}$$

c) En dérivant une seconde fois :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \frac{v^2}{R} \sin\left(\frac{vt}{R}\right) \\ \ddot{z}(t) = \frac{v^2}{R} \cos\left(\frac{vt}{R}\right) \end{cases}$$



Chose intéressante, l'accélération est colinéaire à \vec{CM} : elle est dirigée vers C et de norme constante égale à v^2/R , comme pour un mouvement circulaire uniforme... Cela serait évident en se plaçant dans le référentiel galiléen qui suit C.

3. Pour $z = 0$, nous avons $\vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{e}_z$.

4. L'allure de la trajectoire est une cycloïde (voir figure 9.7). Dans un référentiel lié à la roue, M décrit bien sûr un cercle !



Cela illustre bien le fait qu'une trajectoire dépend du référentiel.

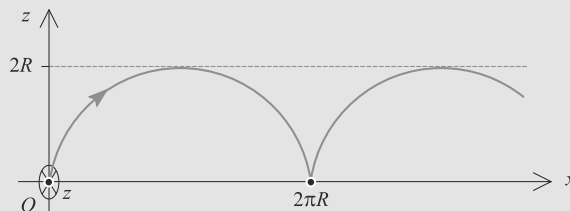


Figure 9.7 Allure d'une cycloïde.

9.16

Recherche d'une relation vitesse-position

La seule application des définitions du cours donne la mise en équation. La difficulté est donc dans la résolution de l'équation différentielle résultante, qui n'est pas linéaire. L'astuce est presque toujours la même : séparation des variables, méthode très facile à utiliser avec les notations différentielles (reportez-vous à la fiche méthode 6).

Par définition de l'accélération et de la vitesse :

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{x^2}$$

Par composition des dérivées :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$$

Donc, par séparation des variables :

$$\begin{aligned} v dv &= -\frac{k dx}{x^2} \Rightarrow d\left(\frac{1}{2} v^2\right) = d\left(\frac{k}{x}\right) \\ \Rightarrow v^2 &= \frac{2k}{x} + A \end{aligned}$$

où A est une constante d'intégration. Finalement :

$$v(x) = \sqrt{2k\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)}$$



Faites bien la différence entre les fonctions $v(x)$, vitesse en fonction de la position, et $v(t)$, vitesse en fonction du temps. La relation entre les deux est $v(t) = v(x(t))$.

9.17

Mouvement avec force centrifuge

Cet exercice permet de pratiquer les équations différentielles linéaires simples et de se poser des questions physiques sur les solutions obtenues.

1. Comme les deux termes de l'équation sont homogènes l'un à l'autre, ω est l'inverse d'un temps (homogène à une pulsation).
2. La solution générale de cette équation est de la forme $a \cdot \exp(\omega t) + b \cdot \exp(-\omega t)$.
3. La vitesse initiale étant nulle le long du tube, $a\omega - b\omega = 0$. De plus, la position initiale apporte : $r_0 = a + b$. On a donc $a = b = r_0/2$ et $r = r_0 \frac{\exp(\omega t) + \exp(-\omega t)}{2} = r_0 \cosh(\omega t)$. Ce mouvement amène la masse m toujours plus loin du centre de rotation.

Les mouvements régis par ce type d'équation sont instables. Même si $r = 0$ donne un équilibre (accélération nulle), le moindre écart mène à un mouvement vers l'infini sans retour vers 0. Il faudra apprendre à les distinguer des mouvements régis par des équations formellement proches : $\ddot{r} + \omega^2 r = 0$ qui décrivent des mouvements au voisinage des positions d'équilibre stable.

9.18

Mouvement circulaire retardé

C'est un exercice qui permet d'utiliser ses connaissances sur les coordonnées polaires et de pratiquer l'intégration des équations différentielles à variables séparables.

1. On présente d'abord les notations en polaire (figure 9.8) :

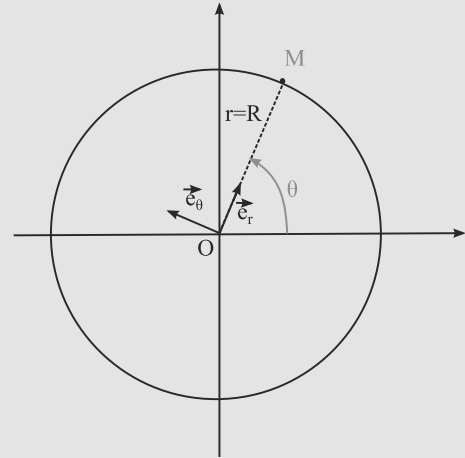


Figure 9.8 Coordonnées polaires.

De $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$, on tire :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R \frac{d\vec{e}_r}{dt} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\text{et } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

2. Le vecteur vitesse étant tangent à la trajectoire, la direction tangente est selon \vec{e}_θ . On trouve orthogonalement la direction normale : suivant \vec{e}_r .
3. D'après le texte $|R\dot{\theta}^2| = |R\ddot{\theta}|$ et, comme le mouvement est retardé ($\ddot{\theta} < 0$), on obtient l'équation :

$$R\dot{\theta}^2 = -R\ddot{\theta} = -R \frac{d\dot{\theta}^2}{dt}$$

4. En séparant les variables, on obtient, $\frac{d\dot{\theta}^2}{\dot{\theta}^2} = -dt$ et donc par intégration, $-\frac{1}{\dot{\theta}^2} = a - t$. Comme $v = R d\theta/dt$, on peut aussi écrire : $-\frac{R}{v} = a - t$. Avec les conditions initiales, $-\frac{R}{v} = -\frac{R}{v_0} - t$ et donc $v = \frac{Rv_0}{R + v_0 t}$.

Plan

10.1	Notion de force	150
10.2	Lois de Newton	151
10.3	Exemples de mouvements et de forces	152
	Synthèse	157
	Tests et exercices	158
	Corrigés des exercices	163

Introduction

La mécanique proprement dite commence ici : les lois de la dynamique vont ajouter un pouvoir prédictif à la théorie, permettant de prévoir un mouvement à partir de ses causes ou à l'inverse d'étudier les causes à partir de l'observation du mouvement. Les causes du mouvement sont résumées dans la notion de force.

La relation entre mouvement et causes constitue le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD), dont l'expression n'est réellement simple que dans une classe de référentiels particuliers, les référentiels galiléens.

Prérequis

- Cinématique (repères cartésien et cylindrique)
- Équations différentielles
- Projection

Objectifs

- Rappeler l'expression des forces classiques (pesanteur, tension, réactions, frottements)
- Donner les lois de Newton et rappeler le principe d'inertie
- Décrire quelques mouvements simples (tir dans le vide ou contre l'air, oscillation d'un ressort)

10.1 Notion de force

Définition

Toute action qui modifie le vecteur vitesse d'un point matériel, en module comme en direction, caractérise une force.

Une **force** est donc une grandeur vectorielle. Le vecteur vitesse varie dans une direction qui est celle du vecteur force. Le module du vecteur force indique l'importance de l'effet.

Cette définition souligne le caractère vectoriel des forces, et donc leur additivité, en plus de fournir une interprétation physique simple.

10.2 Lois de Newton

Les trois lois de Newton sont admises.

10.2.1 Principe d'inertie

Il existe au moins un référentiel dans lequel le mouvement de tout point matériel isolé est rectiligne et uniforme ; un tel référentiel est appelé référentiel galiléen.

Cette loi définit et, simultanément, postule l'existence des référentiels galiléens.

10.2.2 Principe fondamental de la dynamique (PFD)

En référentiel galiléen :

$$m \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{(R)} = \vec{F}$$

10.2.3 Principe des actions réciproques

Soit deux points matériels M_1 et M_2 en interaction. Les forces qu'ils exercent l'un sur l'autre sont notées $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$. Elles obéissent aux lois suivantes, illustrées figure 10.1 :

- Les forces réciproques sont opposées : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$.
- Elles sont portées par la droite $(M_1 M_2)$.

Méthode 1 aborder rigoureusement un problème de dynamique

Un problème de mécanique peut facilement mener à des calculs inextricables si les choses ne sont proprement posées au départ. Abordez donc tout problème de ce type de la manière suivante :

1. Précisez le système physique étudié et le référentiel (galiléen) d'étude.
2. Réalisez un bilan vectoriel complet des forces s'appliquant sur le système considéré.
3. Écrivez le PFD dans le référentiel d'étude. Vous obtenez une équation différentielle vectorielle.
4. Choisissez un système de coordonnées adapté au problème et projetez (par produit scalaire) le PFD sur ses vecteurs de base. Vous obtenez un jeu d'équations différentielles unidimensionnelles.
5. Résolvez ces équations à l'aide des conditions initiales.

Parfois, il est plutôt judicieux de projeter le PFD sur la vitesse \vec{v} , ce qui donne l'équation du mouvement.



Il n'existe pas de référentiel parfaitement galiléen, mais il existe de nombreux référentiels approximativement galiléens.



La deuxième loi de Newton semble impliquer la première, mais c'est en fait le contraire. Le principe d'inertie est indispensable pour démontrer le PFD.

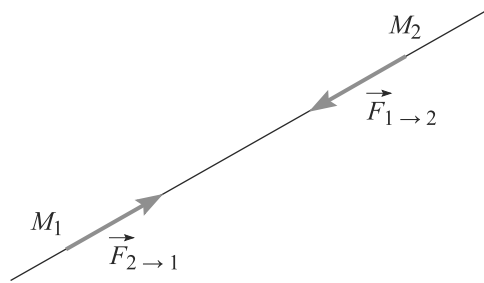


Figure 10.1 Principe des actions réciproques.

Exemple d'application

Les exemples qui suivent sont des applications directes de cette méthode.

10.3 Exemples de mouvements et de forces

10.3.1 Chute libre sans frottement

Force gravitationnelle et poids

Le poids est la résultante de l'attraction gravitationnelle de la Terre sur les corps à sa surface. Son expression est toujours $\vec{F} = m\vec{g}$.

Par contre, sa projection dépend de l'orientation de l'axe vertical : $-mg$ si cet axe est orienté vers le haut, mg s'il est orienté vers le bas.

Étude dynamique

1. Système et référentiel d'étude : point matériel M dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. Conditions initiales : M est lâché d'une altitude initiale h avec une vitesse \vec{v}_0 horizontale.
2. Bilan des forces : seulement le poids $\vec{F} = m\vec{g}$.
3. Écriture du PFD vectoriel : $m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$.
4. Choix d'un système de coordonnées : prenons une base cartésienne avec l'axe Oz repérant la verticale ascendante et l'axe Ox portant \vec{v}_0 . Exprimons les divers vecteurs dans cette base :

$$\vec{v}(t=0) = v_0 \vec{u}_x$$

$$\overrightarrow{OM}(t=0) = h \vec{u}_z$$

$$\vec{g} = -g\vec{u}_z$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$$

Reste à projeter le PFD sur cette base :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{a} = \vec{g}) \cdot \vec{u}_x \\ (\vec{a} = \vec{g}) \cdot \vec{u}_y \\ (\vec{a} = \vec{g}) \cdot \vec{u}_z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{array} \right. \quad (10.1)$$

5. Résolution : les trois équations différentielles s'intègrent grâce aux conditions initiales en position et en vitesse. L'intégration est immédiate :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{cases} \quad (10.2)$$

Comme attendu, le mouvement reste dans le plan xOz : il n'y a aucun mouvement initial et aucune force dans la direction Oy . La trajectoire est représentée figure 10.2.

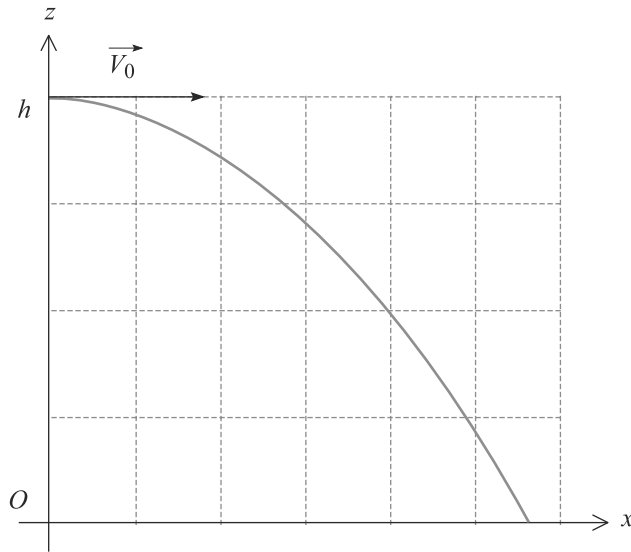


Figure 10.2 Trajectoire parabolique d'une chute libre.

10.3.2 Chute libre avec frottement

Force de frottement fluide

La résistance de l'air est souvent modélisée par une force opposée au mouvement :

Définition

Une force de frottement fluide linéaire est définie par :

$$\vec{F} = -K\vec{v}$$

Étude dynamique

1. Système et référentiel d'étude : toujours le même point M en chute libre, étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen, avec les mêmes conditions initiales.
2. Bilan des forces : le poids et la résistance de l'air, modélisée comme linéaire.
3. Écriture du PFD vectoriel : $m\vec{a} = m\vec{g} - K\vec{v}$.



Cette modélisation linéaire de la force de frottement fluide n'est physiquement acceptable que pour de très petits objets (moins d'un millimètre) ou pour des vitesses très faibles (quelques millimètres par seconde). Dans d'autres cas, une formule quadratique (en v^2) est mieux adaptée mais conduit à des calculs nettement plus compliqués.

4. Choix d'un système de coordonnées : base cartésienne identique à l'exemple précédent.

$$\vec{v}(t=0) = v_0 \vec{u}_x$$

$$\overrightarrow{OM}(t=0) = h \vec{u}_z$$

$$\vec{g} = -g\vec{u}_z$$

$$\vec{d} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, le mouvement sera plan. Ignorons donc la projection sur Oy :

$$\begin{cases} (m\vec{d} = m\vec{g} - K\vec{v}) \cdot \vec{u}_x \\ (m\vec{d} = m\vec{g} - K\vec{v}) \cdot \vec{u}_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} + K\dot{x} = 0 \\ m\ddot{z} + K\dot{z} = -mg \end{cases}$$

5. Résolution : en considérant \dot{x} et \dot{z} comme les fonctions inconnues, ces équations s'intègrent facilement. Alors :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 e^{-t/\tau} \\ \dot{z}(t) = -g\tau(1 - e^{-t/\tau}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0\tau(1 - e^{-t/\tau}) \\ z(t) = g\tau^2(1 - e^{-t/\tau}) - g\tau t + h \end{cases}$$

avec $\tau = \sqrt{m/K}$. Physiquement, cette trajectoire doit garder une certaine ressemblance avec une parabole, mais déformée par la résistance de l'air : le point matériel est freiné dans son mouvement et touchera le sol moins loin que dans le cas précédent. Elle est représentée sur la figure 10.3 en traits pleins, la trajectoire sans frottement étant indiquée en pointillés pour comparaison.

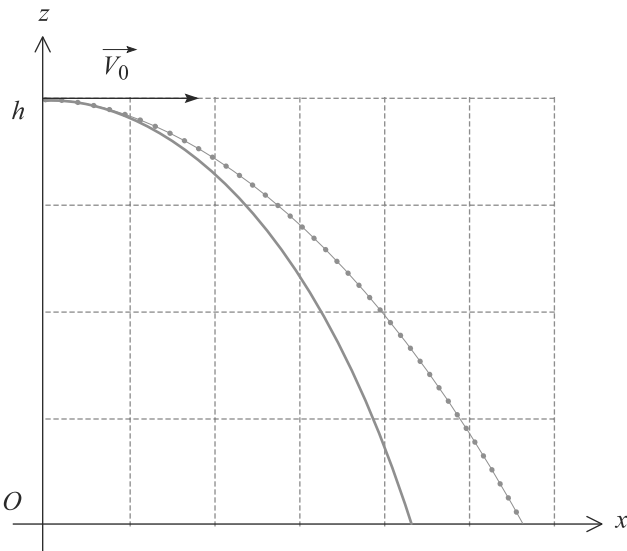


Figure 10.3 Comparaison des trajectoires de chutes libres avec ou sans frottement.

10.3.3 Ressort soumis à son poids

Force de rappel élastique

Un ressort de constante de raideur k , de longueur à vide l_0 et de longueur l exerce sur une masse attachée à son extrémité une force de rappel élastique :

Définition

La force de rappel élastique est définie par :

$$\vec{F} = -k(l - l_0) \vec{u}_{\text{sortant}}$$

où \vec{u}_{sortant} est le vecteur unitaire de l'axe portant le ressort, orienté du point d'attache du ressort vers la masse mobile accrochée à l'autre bout.

Étude dynamique

1. Système et référentiel d'étude : une masse m attachée au bout d'un ressort vertical (figure 10.4), dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Supposons que, initialement, le ressort est étiré puis lâché : $l(t=0) = l_1$ et $\dot{z}(t=0) = 0$.
2. Bilan des forces : le poids $m\vec{g}$ et la force de rappel élastique \vec{F} .
3. Écriture du PFD vectoriel : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}$.
4. Choix du système de coordonnées : base cartésienne car le mouvement est rectiligne, avec Oz l'axe marquant la verticale descendante. L'origine est prise sur la position d'équilibre de la masse m .



Assurez-vous que le signe choisi pour \vec{F} est correct, autrement dit que \vec{u}_z est bien le vecteur noté \vec{u}_{sortant} .

$$\vec{a} = \ddot{z} \vec{u}_z$$

$$\vec{g} = g \vec{u}_z$$

$$\vec{F} = -k(l - l_0) \vec{u}_z$$

D'où la projection du PFD sur Oz :

$$(m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}) \cdot \vec{u}_z \Rightarrow m\ddot{z} = mg - k(l - l_0)$$

Il y a ici deux variables de position, z et l , et elles ne sont pas indépendantes. Il faudra en éliminer une, ce qui ne sera possible que lorsque la position de l'origine de l'axe Oz aura été clarifiée.

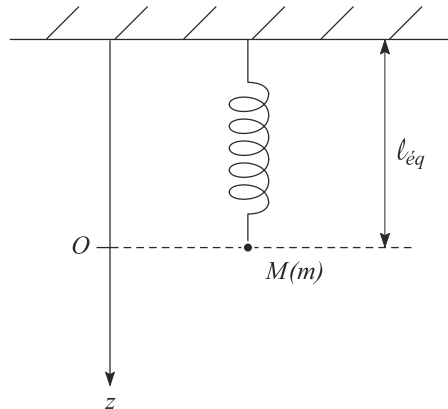


Figure 10.4 Oscillateur harmonique vertical.

5. Résolution :

Méthode 2 changer de variable dans un exercice d'oscillateur

Quand un ressort n'oscille pas, sa longueur $l_{\text{éq}}$ est appelée **longueur à l'équilibre**.

Quand la seule force en jeu est la force de rappel élastique, nous avons tout simplement $l_{\text{éq}} = l_0$. Ce n'est plus le cas quand il y a d'autres forces.

1. Calculez la longueur à l'équilibre du ressort.
2. Le « bon » changement de variable dans les équation différentielles est de la forme $X = l - l_{\text{éq}}$. C'est ce changement de variable qui ramène à l'équation habituelle :

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0$$

avec un second membre nul. Interprétation physique : le système oscille **autour de sa position d'équilibre**.

La position d'équilibre est définie par la résultante des forces égale à zéro : $mg - k(l_{\text{éq}} - l_0) = 0$, donc :

$$l_{\text{éq}} = l_0 + \frac{mg}{k}$$



Cette expression de $l_{\text{éq}}$ est raisonnable. 1) elle est supérieure à l_0 car le ressort est allongé par le poids de M . 2) Elle croît avec m car la masse « tire » sur le ressort. 3) Elle décroît avec k car un ressort très raide s'allonge moins à contrainte égale.

La relation entre z et l est maintenant évidente : $z = l - l_{\text{éq}}$. C'est le changement de variable préconisé par la méthode. D'où :

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0 \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (10.3)$$

D'où les solutions de la forme $z(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$. Avec les conditions initiales, cela se résout en :

$$\begin{aligned} z(t) &= (l_1 - l_{\text{éq}}) \cos(\omega t) \\ \Rightarrow l(t) &= l_0 + \frac{mg}{k} + \left(l_1 - l_0 - \frac{mg}{k} \right) \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Les variations de longueur du ressort sont représentées figure 10.5.

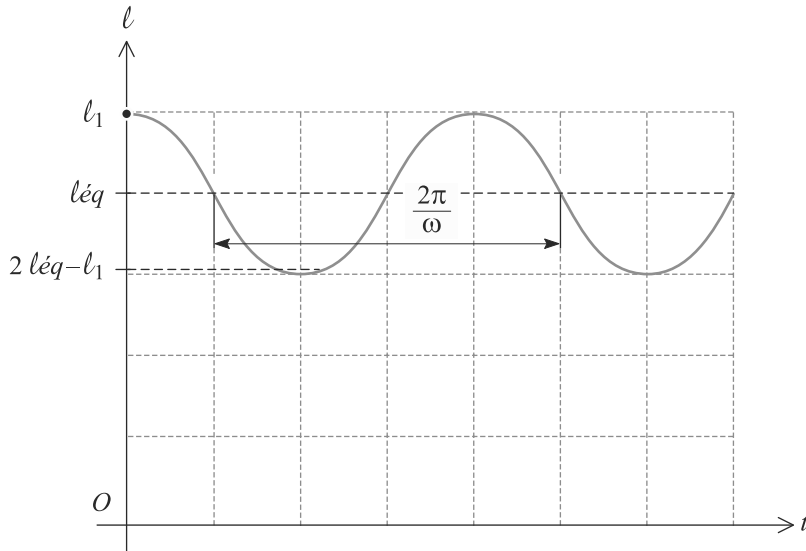


Figure 10.5 Oscillations d'un ressort soumis à son poids.

Synthèse

Savoirs

- Expressions des forces de pesanteur, de tension d'un ressort, de frottement fluide
- Direction de la tension d'un fil, de la réaction d'un support
- Les trois lois de Newton

Savoir-faire

- Établir un bilan de force
- Obtenir l'équation du mouvement
- Choisir un système de coordonnées adapté à un problème

Mots-clés

- Force,
- tension,
- masse,
- frottements,
- pesanteur,
- équation du mouvement,
- ressort,
- lois de Newton

Tests de connaissances

- 10.1 Tout référentiel est galiléen.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 10.2 Les forces sont invariantes par changement de référentiel galiléen.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 10.3 L'accélération est la même dans tous les référentiels galiléens.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 10.4 Le principe des actions réciproque indique que deux actions réciproques sont opposées.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 10.5 Dans l'air, les frottements sont toujours proportionnels à la vitesse et de sens contraire.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 10.6 La réaction normale d'un support n'a pas d'expression intrinsèque.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 10.7 Un tir dans le vide suit une trajectoire parabolique.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

10.8 Pendule simple aux petites oscillations

Un pendule simple est une masse attachée à l'extrémité d'un fil suspendu, comme illustré figure 10.6. Son inclinaison par rapport à la verticale est notée θ . Nous supposons dans cet exercice que le fil reste toujours tendu.

1. Précisez que l'on appelle la tension du fil. Que pouvez-vous dire d'elle dans cet exercice ?
2. Établissez le système d'équation gouvernant $\theta(t)$.

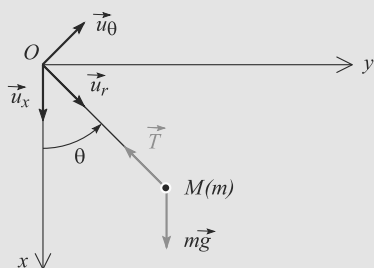


Figure 10.6 Oscillations d'un pendule simple.

3. Le système est lancé sans vitesse initiale depuis une position initiale θ_0 . Dans l'hypothèse où θ_0 est petit (devant 1 rad), résolvez l'équation différentielle donnant $\theta(t)$. Que vaut alors la tension du fil ?

Indications : quand θ est assez petit, $\cos(\theta) \approx 1$ et $\sin(\theta) \approx \theta$.

10.9 Système à deux ressorts

(D'après DEUG Paris VII.)

Un point matériel M de masse m est assujéti à rester sur un rail horizontal et attaché à deux ressorts de même longueur à vide l_0 mais de raideurs différentes k_1 et k_2 (figure 10.7), fixés l'un en O et l'autre en A . La distance OA est de $3l_0$.

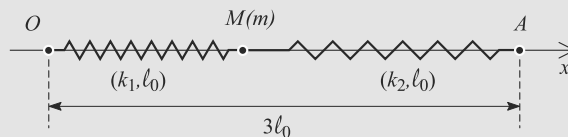


Figure 10.7 Système à deux ressorts.

Le point matériel est repéré par son abscisse $x = \overline{OM}$ sur le rail et glisse sans frottement.

1. Calculez la position d'équilibre x_{eq} de M .
2. Déterminez l'équation différentielle gouvernant $x(t)$.
3. Résolvez-la sachant qu'initialement la masse est lâchée de l'abscisse l_0 sans vitesse initiale. Vous introduirez une pulsation ω adaptée au problème.

10.10 Ressort sur plan incliné

(D'après ENAC.)

Un système est constitué d'une glissière (T) inclinée d'un angle θ par rapport à la verticale. À son extrémité supérieure O , elle est fixée sur un axe (Δ) autour duquel elle peut tourner. En O est aussi attaché un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 .

Un point matériel (S) de masse m est attaché à l'autre bout du ressort et glisse dans la glissière, comme indiqué figure 10.8.

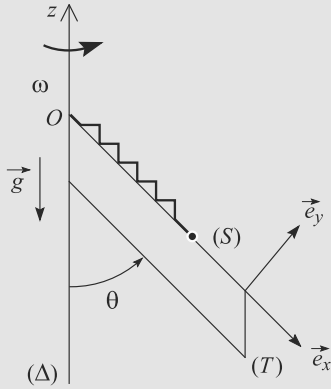


Figure 10.8 Ressort sur plan incliné.

1. Le système n'étant pour l'instant pas en rotation, calculez la longueur au repos l_{eq} du ressort.
2. Le système est mis en rotation autour de (Δ) à la vitesse angulaire ω suffisamment petite pour que (S) ne décolle pas de la glissière.
 - a) Exprimez l'accélération de (S) dans le référentiel terrestre dans le cas où le ressort n'oscille pas, en fonction de la nouvelle longueur au repos l'_{eq} du ressort, ω et θ .
 - b) Calculez l'_{eq} .
 - c) Déduisez-en la réaction de la glissière.
3. La vitesse angulaire ω_0 correspond au cas où (S) décolle juste de la glissière. Calculez la nouvelle longueur au repos l''_{eq} du ressort et déduisez-en ω_0 .

Exercices d'approfondissement

10.11 Glissement sur une sphère

Un enfant, installé au sommet S d'un dome décrit par une demi-sphère de centre O , s'amuse à laisser tomber des cailloux. Un caillou est un point matériel M de masse m dont la trajectoire commence en S et se termine en un point M_0 où il perd le contact avec la demi-sphère. Sa position est repérée par l'angle $\theta = (Oz, \overrightarrow{OM})$, où Oz est la verticale ascendante. Tout frottements sera négligé.

1. Étude de la première phase du mouvement.
 - a) Faites un schéma complet. Quelle est la nature du mouvement sur cette première partie où le caillou est en contact avec le dome ?
 - b) À quelle condition le caillou décolle-il du dome ? Calculez la position (repérée par l'angle θ_0) pour laquelle cela se produit.
2. Étude de la deuxième phase du mouvement.
 - a) Quel est le mouvement ultérieur du caillou ?
 - b) Donnez les équations paramétriques (de paramètre t) de sa trajectoire. Pour cela, vous redéfinirez l'origine des temps à l'instant où le caillou a perdu le contact avec le dome et passerez dans un système de coordonnées plus approprié.
 - c) Applications numériques : calculez les composantes de la vitesse et de la position au moment du décollage, ainsi que la date à laquelle il touche le sol et la vitesse à cet instant. Donnée : $R = 2 \text{ m}$; $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

10.12 Pendule cône à deux fils

1. Considérons un point matériel M , de masse m , suspendu à un fil inextensible de longueur l et de masse négligeable, qui est fixé en un point O_1 d'un axe vertical Oz (voir figure 10.9). Le point M est animé d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω dans le plan horizontal xOy . Le fil O_1M reste incliné du même angle α par rapport à l'axe Oz .

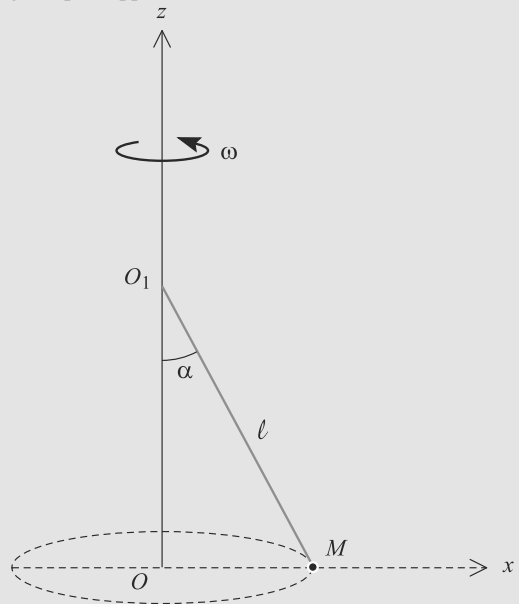


Figure 10.9 Pendule simple.

Déterminez α en fonction de ω , l et g .

2. M est relié également au point O_2 de l'axe Oz tel que $OO_2 = OO_1 = D$ par le même fil inextensible de longueur l . La distance D est inférieure à l (voir figure 10.10).

a) M est mis en rotation à la vitesse angulaire ω que l'on augmente progressivement. Le fil O_2M devient tendu pour une valeur ω_1 que vous exprimerez en fonction de g et D .

b) En supposant $\omega > \omega_1$, déterminez les normes T_1 et T_2 des tensions respectives des fils O_1M et O_2M en fonction de m , l , ω_1 et ω .

Application numérique : calculez T_1 et T_2 pour $l = 0,5$ m, $D = 0,3$ m, $m = 1$ kg, $g = 9,8$ m.s⁻² et $\omega = 7$ rad.s⁻¹.

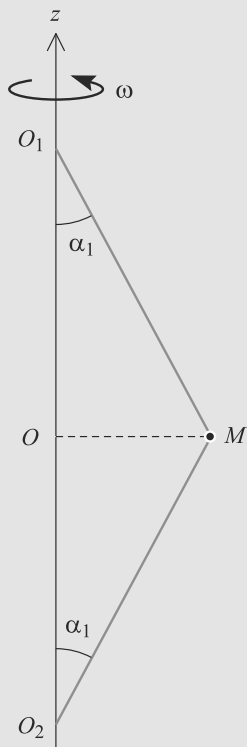


Figure 10.10 Pendule à deux fils.

10.13 Enroulement d'un fil sur un cylindre (D'après Mines de Douai 1991)

Un cylindre de révolution, d'axe vertical et de rayon R , repose sur un plan horizontal et fixe par rapport à un référentiel galiléen d'axes (Ox, Oy, Oz) .

On attache une extrémité d'un fil parfaitement flexible, infiniment mince et de masse négligeable à la base du cylindre et

on l'enroule plusieurs fois dans le sens trigonométrique autour de cette base. L'autre extrémité du fil est fixée à un point matériel M de masse m , astreint à glisser sur le plan horizontal xOy . La partie I_0M non enroulée du fil à $t = 0$ est tendue. À l'instant initial $t = 0$, on communique au point M une vitesse \vec{v}_0 horizontale perpendiculaire à I_0M et orientée comme indiquée sur la figure 10.11.

On admet que le fil reste tendu au cours du mouvement. À l'instant t , on appelle θ l'angle dont s'est enroulé le fil et l la longueur IM du fil non encore enroulé.

Données : $R = 0,2$ m ; $m = 0,04$ kg ;

$l_0 = I_0M = 0,5$ m ; $v_0 = 0,1$ m.s⁻¹.

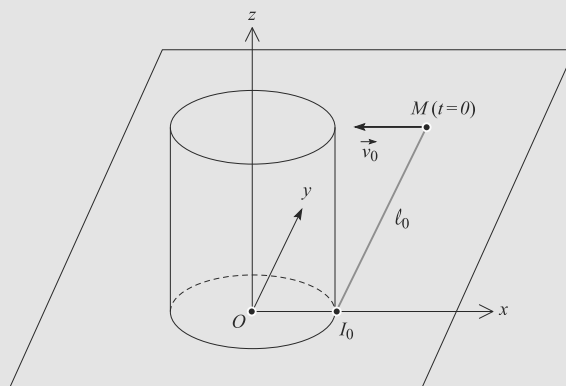


Figure 10.11 Vue en perspective à l'instant $t = 0$.

1. Le fil étant inextensible, donnez la relation entre l , l_0 , R et θ .
2. Exprimez les composantes \vec{OM} suivant les vecteurs unitaires \vec{u}_r et \vec{u}_θ (voir figure 10.12), en fonction de l_0 , R et θ .

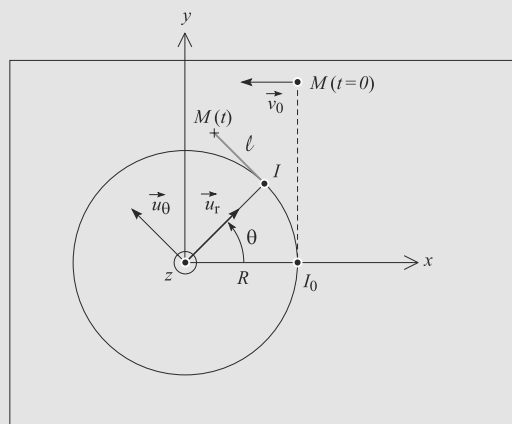


Figure 10.12 Vue de dessus à un instant t quelconque.

3. Déduisez-en les composantes de la vitesse \vec{v} du point matériel M suivant les vecteurs \vec{u}_r et \vec{u}_θ .
4. Montrez que le mouvement est uniforme.
5. Déduisez des deux questions précédentes la relation entre θ , $\dot{\theta}$, l_0 , R et v_0 .
6. Montrez que :

$$\theta(t) = \frac{l_0}{R} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2Rv_0 t}{l_0^2}} \right)$$

7. Déterminez l'instant final t_f pour lequel le fil est entièrement enroulé autour du cylindre. Effectuez l'application numérique.
8.
 1. Déterminez la tension T du fil en fonction de t , m , l_0 , R et v_0 .
 2. En réalité, il y a rupture du fil dès que sa tension dépasse la valeur $T_{\text{rup}} = 5.10^{-3}$ N. Déterminez l'instant t_{rup} et l'angle θ_{rup} lorsqu'intervient la rupture du fil. Applications numériques.

10.14 Chute avec freinage fluide quadratique (D'après Mines de première année.)

Un point matériel M de masse $m = 20$ kg est lâché sans vitesse à l'instant $t = 0$ dans le champ de pesanteur ($g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, verticale orientée vers le bas). Une modélisation réaliste de la résistance de l'air contre cette chute est une force de frottement fluide quadratique $\vec{F} = -\alpha v^2 \vec{u}_z$, avec $\alpha > 0$ et v la norme de la vitesse de chute.

1. Établissez l'équation différentielle du mouvement.
2. Résolvez cette équation à l'aide des conditions initiales et déduisez-en que la vitesse tend vers une valeur limite v_{lim} .

Indication : une fraction de la variable v peut être intégrée via une décomposition en éléments simples de la forme

$$\frac{1}{a^2 - v^2} = \frac{\alpha}{a - v} + \frac{\beta}{a + v}$$

où α et β sont deux constantes à déterminer.

3. Une mesure nous donne $v_{\text{lim}} = 45 \text{ m.s}^{-1}$. Déduisez-en α ainsi que son unité.
4. Au bout de combien de temps la vitesse atteint-elle sa valeur limite à 0,1% près ?

10.15 Mouvement d'une bille dans un fluide visqueux (D'après ENSTIM)

On étudie le mouvement de translation d'une bille d'acier de rayon r et de masse m dans de la glycérine de viscosité η et de masse volumique ρ_0 . On la traitera comme un point matériel.

On admettra que les actions de frottement exercées par le liquide sur la bille en mouvement sont modélisables par une force $\vec{f} = -6\pi\eta r \vec{v}$ où \vec{v} représente le vecteur vitesse de la bille. On considère sinon que les autres actions du fluide sur la bille se résument à une poussée d'Archimède $\vec{\pi} = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 \vec{g}$ où \vec{g} est l'accélération de pesanteur.

On dépose la bille en O sans vitesse initiale dans la glycérine contenue dans une grande éprouvette (figure 10.13).

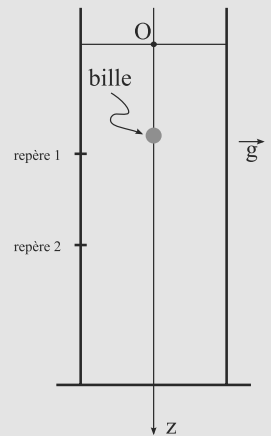


Figure 10.13 Chute de la bille dans la glycérine.

1. Faire le bilan des forces exercées sur la bille plongeant dans la glycérine en précisant le référentiel de travail.
2. Si l'on applique le principe des actions réciproques (appelé aussi principe de l'action et de la réaction), quelle est la force réciproque du poids de la bille ?
3. Établir l'équation différentielle que vérifie la valeur de la vitesse v de la bille.
4. Montrer que la vitesse de la bille tend vers une vitesse limite v_{lim} telle que $v_{\text{lim}} = \frac{2(\rho - \rho_0)g}{9\eta} r^2$. Donner l'expression de la constante de temps τ du mouvement.
5. On mesure cette vitesse limite pour différents rayons de la bille ; la vitesse limite est mesurée entre les deux repères notés sur la figure.

r (mm)	1,50	1,60	1,75	2,00	2,25
v_{lim} (cm.s ⁻¹)	5,2	5,9	7,1	9,1	11,5

En déduire la viscosité η de la glycérine (on précisera la méthode utilisée et on proposera une unité pour la viscosité).

6. Calculer la constante de temps pour $r = 1,5$ mm et conclure sur le caractère observable du phénomène.

Données :

masse volumique de l'acier : $\rho = 7\,800 \text{ kg.m}^{-3}$;
 masse volumique de la glycérine : $\rho_0 = 1\,260 \text{ kg.m}^{-3}$;
 accélération de pesanteur $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

10.16 Une mesure précise de g

(D'après le concours de l'école de l'Air)

Dans les années 60, le Bureau International des Poids et Mesures (B.I.P.M.) à Sèvres (France) a conçu et développé une nouvelle méthode de mesure de l'accélération de la pesanteur : g . Cette méthode, dite « des deux stations », sans cesse améliorée depuis, conduit à la meilleure précision possible par les avantages de mesures « symétriques » dans le temps et d'observation interférentielle des positions d'un corps lancé verticalement.

Un mobile est lancé verticalement, vers le haut, dans le vide, à partir d'une altitude z_0 , avec une certaine vitesse initiale. On appelle z son altitude à l'instant t ; il atteint l'altitude z_M à l'instant t_M . La figure 10.14 représente une allure possible pour $z(t)$ et précise les notations.

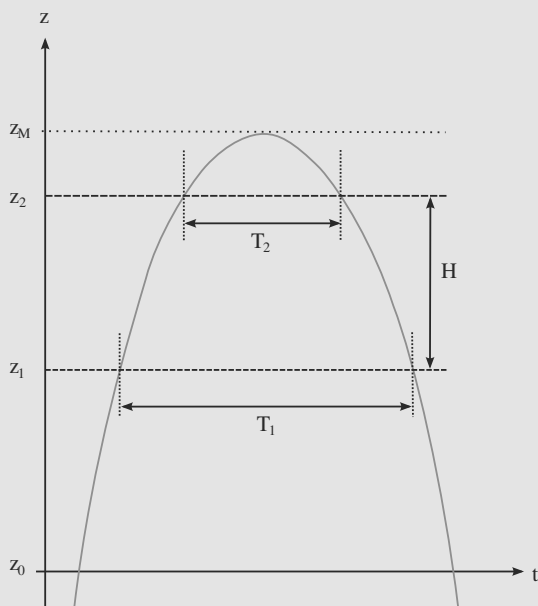


Figure 10.14 Tir vertical.

1. Établir la relation qui lie $z - z_M$ à $t - t_M$ et g .
2. Exprimer la durée T qui sépare les instants de passage du mobile à une même altitude z en fonction de z , z_M et g .
3. On mesure les durées T_1 et T_2 entre les passages à "deux stations" d'altitude z_1 et z_2 telles que $z_2 - z_1 = H$. Exprimer g en fonction de H , T_1 et T_2 .

Données : $T_1 = 0,70 \text{ s}$, $T_2 = 0,30 \text{ s}$, $H = 0,49 \text{ m}$.

10.17 Mouvement sans suspension

(D'après X)

Dans de nombreuses situations (automobiles, machines industrielles, constructions antisismiques), on souhaite diminuer la réponse d'un système aux vibrations mécaniques de son support.

Dans cet exercice, le système est un solide, assimilé à une masse ponctuelle M , simplement posé sur le sol, plan et horizontal. Les mouvements du sol et de la masse sont supposés purement verticaux. L'axe vertical Oz , de vecteur unitaire \vec{u}_z est orienté vers le haut.

À partir de l'instant $t = 0$, le sol est animé de vibrations verticales d'élongation :

$$\vec{Z}_s(t) = z_0(1 - \cos(\omega t))\vec{u}_z$$

1. a) Écrire l'équation du mouvement de la masse M .
 b) Montrer qu'il existe deux régimes pour le mouvement de M , en fonction des caractéristiques de la vibration. Donner la valeur a_M de l'accélération $a_s(t)$ du sol qui sépare les deux régimes. Préciser le mouvement de M dans le cas où $|a_s(t)| < |a_M|$ à tout instant.
2. On suppose maintenant que l'accélération du sol peut dépasser a_M en valeur absolue.
 a) Montrer que la masse quitte le sol lorsqu'elle atteint une altitude z_D que l'on déterminera.
 b) En déduire l'altitude maximale z_M atteinte en fonction de z_0 , ω et g .
 c) Calculer la durée T_v de la phase de vol libre comprise entre l'instant du décollage de la masse et celui où elle repasse par l'altitude z_D .
3. Application : on considère une route imparfaitement plane, comportant une succession de bosses que l'on assimilera à une sinusoïde de période spatiale 2 m et de hauteur crête-crête 5 cm.
 a) Quelle est la vitesse maximale v_M à laquelle un véhicule totalement rigide peut parcourir cette route sans décoller ?
 b) Quelle est la hauteur atteinte par un véhicule roulant à une vitesse de 60 km/h ?
 c) Pendant combien de temps perd-on totalement le contrôle de ce véhicule ?

Données : $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

10.1

Faux ! En fait tous les référentiels sont non galiléens, pour peu qu'on considère un phénomène assez long ou s'étendant sur un espace suffisamment grand. Mais certains référentiels sont approximativement galiléens.

10.2

Vrai : c'est le principe de relativité galiléenne qui sera vu dans le chapitre 21.

10.3

Vrai. Nous établirons dans le chapitre 22 que c'est parce que tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

10.4

Vrai, mais pas seulement : elles ont même droite d'action, c'est-à-dire qu'elles sont portées par la droite liant les deux points en interaction.

10.5

Faux, il existe des frottements quadratiques par exemple (en v^2) mais par contre les frottements sont bien de sens opposé à la vitesse.

10.6

Vrai. En effet, elle existe en réaction à d'autres forces et est déterminée par le PFD (indirectement).

10.7

Vrai.

10.8

Pendule simple aux petites oscillations

Un grand classique qu'il faut maîtriser sur le bout des doigts ! Il ne comporte aucun piège, mais exige de la rigueur sur le contrôle des signes : orientation de l'axe vertical, orientation de la tension du fil, etc.

Les questions n'imposent aucune démarche sur la manière de poser et de résoudre le problème, vous devriez donc appliquer la méthode n°1 rigoureusement.

1. La tension du fil est une force \vec{T} toujours tangente au fil et s'opposant à la traction exercée sur le fil. Elle est donc opposée à \vec{u}_r . Nous la posons donc égale à $\vec{T} = -T \vec{u}_r$, de sorte que $T \geq 0$.

Le fil restant toujours tendu par hypothèse, $T > 0$.



Tant que le fil est tendu, $T > 0$. Si le fil se détend, $T = 0$: la force disparaît. Mais il est impossible d'avoir $T < 0$: cela voudrait dire que le fil **repousse** le point matériel !

2. Système et référentiel d'étude : masse m attachée au bout du fil de longueur l , dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces : le poids $m\vec{g}$ et la tension du fil \vec{T} . D'où le PFD vectoriel : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$.

Choix d'un système de coordonnées : le mouvement étant de type circulaire, les coordonnées polaires d'origine O seront les plus adaptées.

$$\vec{a} = -l\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + l\ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{g} = g(\cos(\theta) \vec{u}_r - \sin(\theta) \vec{u}_\theta)$$

$$\vec{T} = -T \vec{u}_r \quad \text{avec} \quad T > 0$$

D'où les projections du PFD :

$$\begin{cases} (m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}) \cdot \vec{u}_r \\ (m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}) \cdot \vec{u}_\theta \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} -ml\dot{\theta}^2 = mg \cos(\theta) - T \\ ml\ddot{\theta} = -mg \sin(\theta) \end{cases}$$



La deuxième équation, projection du PFD sur la direction de la vitesse, est l'équation du mouvement.



Ce système n'admet pas de solution simple à écrire dans le cas général. D'où l'approximation suggérée dans la question suivante.

3. Avec les conditions initiales de l'énoncé, le pendule va osciller faiblement autour de la position verticale donc l'angle θ va toujours rester petit. Les équations du mouvement deviennent, avec les approximations données par l'énoncé :

$$\begin{cases} T \simeq mg \\ \ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \end{cases}$$

La deuxième équation est une équation différentielle de type connu, sans second membre, qui se résout en $\theta(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$. Avec les conditions initiales :

$$\theta(0) = \theta_0 = A \quad \Rightarrow \quad A = \theta_0$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 = B\omega \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

D'où la solution $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$.

La première équation donne directement la tension du fil en norme : $T \simeq mg$. La tension est donc un vecteur de norme constante $\vec{T} = -mg \vec{u}_r$. Elle s'oppose à tout instant au poids, empêchant la masse de tomber.

10.9

Système à deux ressorts

L'exercice est très classique, mais vous devez appliquer la méthode 2 avec rigueur : les deux ressorts sont montés en opposition, donc les signes dans leurs forces de rappel respectives doivent être opposés.

1. La forme générale de la force de rappel exercée par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 est :

$$\vec{F} = -k(l - l_0) \vec{u}_{\text{sortant}}$$

Ici, le vecteur \vec{u}_{sortant} est \vec{u}_x pour le ressort attaché en O et $-\vec{u}_x$ pour le ressort attaché en A . L'équilibre des deux forces de rappel s'écrit donc :

$$-k_1(l_{1\text{éq}} - l_0) \vec{u}_x - k_2(l_{2\text{éq}} - l_0)(-\vec{u}_x) = \vec{0}$$

où $l_{1\text{éq}}$ et $l_{2\text{éq}}$ sont les longueurs à l'équilibre des deux ressorts. D'où, par projection sur Ox :

$$-k_1(l_{1\text{éq}} - l_0) + k_2(l_{2\text{éq}} - l_0) = 0$$

Pour résoudre ce système à deux inconnues, il faut une deuxième équation. La longueur totale des deux ressorts est contrainte égale à $3l_0$:

$$l_{1\text{éq}} + l_{2\text{éq}} = 3l_0$$

Ce système se résout en :

$$l_{1\text{éq}} = \frac{k_1 + 2k_2}{k_1 + k_2} l_0$$

$$l_{2\text{éq}} = \frac{2k_1 + k_2}{k_1 + k_2} l_0$$

2. De la question précédente nous déduisons la projection du PFD sur l'axe Ox :

$$m\ddot{x} = -k_1(l_1 - l_0) + k_2(l_2 - l_0) \quad (10.4)$$

L'abscisse x du point M est égale à l_1 et $l_1 = 3l_0 - l_2$ donc :

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = (k_1 + 2k_2)l_0$$

3. Par identification dans l'équation différentielle, posons :

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

La solution de l'équation est somme d'une solution particulière x_P :

$$x_P = \frac{k_1 + 2k_2}{k_1 + k_2} l_0$$

et d'une solution d'équation sans second membre $x_{\text{SSM}}(t)$ de la forme :

$$x_{\text{SSM}}(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

La solution est donc de la forme :

$$x(t) = \frac{k_1 + 2k_2}{k_1 + k_2} l_0 + A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

La condition initiale $x(0) = l_0$ donne :

$$A = \frac{-k_2}{k_1 + k_2} l_0$$

La condition initiale $\dot{x}(0) = 0$ donne, après dérivation de $x(t)$, $B = 0$. Donc :

$$x(t) = \frac{l_0}{k_1 + k_2} (k_1 + 2k_2 - k_2 \cos(\omega t))$$

10.10

Ressort sur plan incliné

Une lecture un peu rapide de l'énoncé pourrait vous donner l'impression que ce n'est qu'un exercice de statique (le ressort n'oscille jamais). Attention ! Ce serait vrai dans un référentiel tournant avec la glissière. Mais, dans le référentiel terrestre, (S) est en mouvement circulaire uniforme et donc a une accélération non nulle. Seule la première question relève de la statique.

C'est donc bien un problème de dynamique qui vous fera revoir les principales propriétés du mouvement circulaire.

Le système étudié sera toujours le point matériel (S) dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

1. (S) est soumis à son poids $m\vec{g}$, à la force de rappel élastique \vec{F} et à la réaction de la glissière \vec{R} . L'équilibre des forces donne $m\vec{g} + \vec{F} + \vec{R} = \vec{0}$. Projetons sur Ox :

$$mg \cos(\theta) - k(l_{\text{éq}} - l_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad l_{\text{éq}} = l_0 + \frac{mg \cos(\theta)}{k}$$



Pensez à vous convaincre que c'est bien un signe moins qui intervient dans la force de rappel.



Vérifiez la cohérence du résultat : $l_{\text{éq}} > l_0$, ce qui était prévisible puisque la masse m tend à allonger le ressort.

2. a) (S) est en mouvement circulaire uniforme autour de (Δ) à la vitesse angulaire ω . Son accélération est donc purement radiale et vaut $\vec{a} = -d\omega^2 \vec{u}_r$, où d est la distance de (S) à l'axe et \vec{u}_r le vecteur unitaire radial :

$$\vec{u}_r = \sin(\theta) \vec{u}_x + \cos(\theta) \vec{u}_y \\ d = l'_{\text{éq}} \sin(\theta)$$

D'où l'accélération :

$$\vec{a} = -l'_{\text{éq}} \sin(\theta) \omega^2 (\sin(\theta) \vec{u}_x + \cos(\theta) \vec{u}_y)$$

- b) La projection du PFD $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} + \vec{T}$ sur Ox conduit à :

$$l'_{\text{éq}} = \frac{kl_0 + mg \cos(\theta)}{k - m \sin(\theta)^2 \omega^2} \quad (10.5)$$

- c) Le projection du PFD sur Oy donne, avec $\vec{R} = R \vec{u}_y$:

$$-ml'_{\text{éq}} \sin(\theta) \cos(\theta) \omega^2 = -mg \sin(\theta) + R$$

D'où $\vec{R} = m \sin(\theta) (g - l'_{\text{éq}} \cos(\theta) \omega^2) \vec{u}_y$.

3. Le décollement de (S) se traduit par la disparition de \vec{R} . Lorsque $\omega = \omega_0$ (cas limite), nous avons donc $\vec{R} = \vec{0}$. De la question c) nous tirons :

$$l''_{\text{eq}} = \frac{g}{\omega_0^2 \cos(\theta)}$$

La relation (10.5) est encore valable, nous sommes simplement dans un cas particulier. Donc :

$$l''_{\text{eq}} = \frac{g}{\omega_0^2 \cos(\theta)} = \frac{kl_0 + mg \cos(\theta)}{k - m \sin(\theta)^2 \omega_0^2}$$

qui conduit à :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{gk}{mg + kl_0 \cos(\theta)}}$$



La relation (10.5) n'est par contre plus valable pour $\omega > \omega_0$, car la réaction de support n'est alors pas nulle, elle n'est même plus définie !

10.11

Glissement sur une sphère

Cet exercice est un grand classique, sous plusieurs déguisements (toboggan, igloo, dome, etc.). Vous devez donc savoir retrouver le résultat $\cos(\theta_0) = 2/3$ ou $\sin(\theta_0) = 2/3$, selon la manière dont l'angle est défini, rapidement.

La deuxième partie vous montre comment raccorder deux phases de mouvement dynamiquement différentes : il faut assurer la continuité de la position et de la vitesse, mais il faut aussi ne pas hésiter à changer de base et d'origine.

1. a) Voir figure 10.15. Veillez à orienter le vecteur \vec{u}_θ dans le sens des θ croissant.

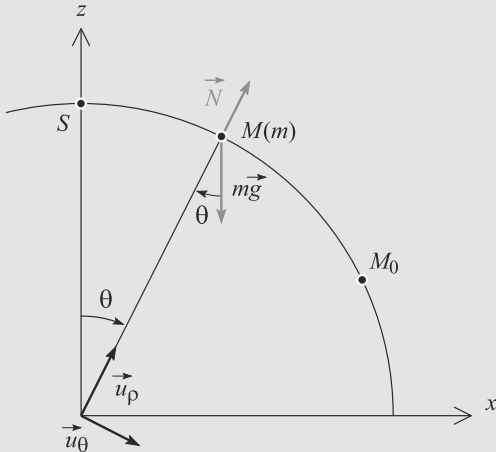


Figure 10.15 Glissement sur une sphère.

Le mouvement est circulaire tant que le caillou n'a pas perdu le contact avec le dôme.

- b) Les deux forces en présence d'expriment :

$$\vec{N} = N \vec{u}_\rho$$

$$\vec{P} = mg(-\cos(\theta)\vec{u}_\rho + \sin(\theta)\vec{u}_\theta)$$

où N est positif, sinon le caillou passerait à travers la sphère !

D'où les projections du PFD vectoriel :

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -mg \cos(\theta) + N \\ mR\ddot{\theta} = mg \sin(\theta) \end{cases}$$

La deuxième projection s'intègre par méthode du facteur intégrant :

$$\begin{aligned} R\ddot{\theta} &= g \sin(\theta) \dot{\theta} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} R \dot{\theta}^2 &= g(1 - \cos(\theta)) \end{aligned}$$

que nous pouvons utiliser pour éliminer le $\dot{\theta}^2$ de l'autre projection du PFD :

$$N = mg(3 \cos(\theta) - 2)$$

Il y a décollement si la réaction du support s'annule, donc pour :

$$\theta_0 = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48^\circ \quad (10.6)$$

2. a) Après la perte de contact, le caillou n'est plus soumis qu'à son poids et nous avons désormais un problème de chute libre. La fin de la phase de glissement sur le dôme constitue les conditions initiales de la chute libre.

b) Passons en cartésiennes, plus adaptées à ce mouvement, et redéfinissons l'origine des temps à l'instant de la perte de contact. L'accélération est constante égale \vec{g} , donc :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{g} \\ \Rightarrow \vec{v} &= \vec{g}t + \vec{v}_0 \\ \Rightarrow \vec{OM} &= \frac{1}{2} \vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{OM}_0 \end{aligned}$$

en notant M_0 le point du décollement. Exprimez les conditions initiales dans la nouvelle base :

La position initiale est $M_0(R, \theta_0)$ en base polaire donc :

$$\begin{cases} x(t=0) = R \sin(\theta_0) = \frac{R\sqrt{5}}{3} \\ z(t=0) = R \cos(\theta_0) = \frac{2R}{3} \end{cases}$$

avec $\cos(\theta_0) = 2/3$ donc $\sin(\theta_0) = \sqrt{5}/3$ (car $\sin(\theta_0) > 0$).

La vitesse initiale est donnée par $\vec{v}(t=0) = R\dot{\theta}(t=0)\vec{u}_\theta$ de la première phase :

$$\vec{v}(t=0) = \sqrt{\frac{2}{3}} gR \vec{u}_\theta$$

donc :

$$\begin{cases} \dot{x}(t=0) = \sqrt{\frac{2}{3}} gR \cos(\theta_0) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} gR \\ \dot{z}(t=0) = -\sqrt{\frac{2}{3}} gR \sin(\theta_0) = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{10}{3}} gR \end{cases}$$

D'où les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} g R t + \frac{\sqrt{5} R}{3} \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{10}{3}} g R t + \frac{2R}{3} \end{cases}$$

c) Lorsque le caillou touche le sol, $z = 0$. Une rapide étude numérique montre que cette équation n'admet qu'une solution positive t_f .

- Au moment de la perte de contact :

$$(x_0, y_0) = (1,49; 1,33) \text{ m}$$

$$(v_{0x}, v_{0z}) = (2,41; -2,70) \text{ m.s}^{-1}$$

- À l'arrivée au sol, $t_f = 0,31 \text{ s}$ et :

$$(v_{fx}, v_{fz}) = (2,41; -5,78) \text{ m.s}^{-1}$$

En module, la vitesse vaut donc :

$$v = 6,26 \text{ m.s}^{-1} = 22,5 \text{ km.h}^{-1}$$

Il est normal de trouver la même composante horizontale de la vitesse aux deux instants, puisqu'il n'y a aucune force horizontale pour la faire varier.

10.12

Pendule cône à deux fils

Un exercice simple mais exigeant d'être soigneux. Appuyez-vous sur un schéma pour ne pas faire d'erreurs de signe en projetant les vecteurs, en particulier les tensions de fil.

En outre, ne confondez pas les mouvements : le point matériel est en mouvement circulaire autour d'un axe vertical (et donc dans un plan horizontal). Ce n'est pas un mouvement pendulaire de centre O_1 dans un plan vertical. Faire un schéma en « vue de dessus » peut vous aider à ne pas vous tromper dans l'expression du vecteur accélération, par exemple.

1. Le mouvement est circulaire uniforme dans le plan horizontal. La figure 10.16 résume les notations. Le point matériel étudié (l'extrémité du pendule) est soumis à deux forces, son poids et la tension du fil.

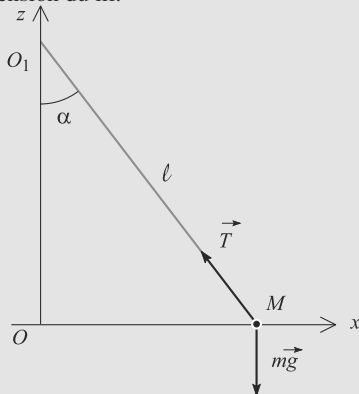


Figure 10.16 Coupe d'un pendule simple en mouvement circulaire uniforme autour de l'axe Oz.

Comme il n'y a aucun mouvement selon l'axe Oz, les composantes verticales des forces en présence se compensent. Nous pouvons donc écrire directement la projection du PFD sur l'axe Oz :

$$\begin{aligned} -mg + T \cos(\alpha) &= 0 \\ \Rightarrow T &= \frac{mg}{\cos(\alpha)} \end{aligned}$$

Sur l'axe Ox, il n'y a pas d'équilibre des forces mais l'accélération est connue : le mouvement est circulaire uniforme, donc l'accélération est centripète. Le PFD projeté sur Ox donne :

$$-mR\omega^2 = -T \sin(\alpha)$$

où R est le rayon du mouvement circulaire uniforme, ici $R = l \sin(\alpha)$. En remplaçant T par son expression, nous aboutissons à :

$$\alpha = \arccos\left(\frac{g}{l\omega^2}\right)$$

2. Désormais le point matériel est relié à deux pendules identiques. Le problème n'est cependant pas symétrique, à cause du poids. Nous aurons donc la tension \vec{T}_1 du fil du haut, dirigée vers O_1 , et \vec{T}_2 , tension du fil du bas dirigée vers O_2 (figure 10.17).

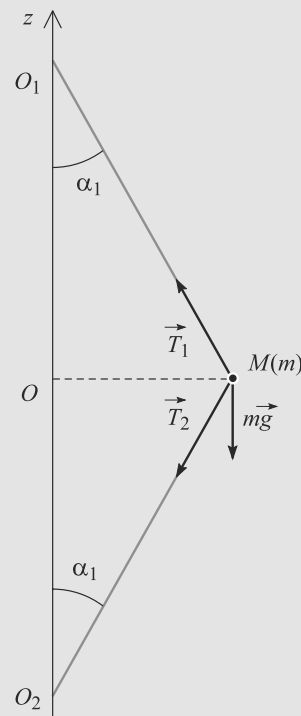


Figure 10.17 Paramétrage du pendule à deux fils.

a) Lorsque ω est légèrement plus petite que ω_1 , le fil du bas n'est pas tendu donc $T_2 = 0$. Par continuité, pour $\omega = \omega_1$, le PFD donne quelque chose de similaire à la question précédente.

Sur Oz :

$$\begin{aligned} -mg + T_1 \cos(\alpha_1) &= 0 \\ \Rightarrow T_1 &= \frac{mg}{\cos(\alpha_1)} \end{aligned}$$

et sur Ox :

$$-ml \sin(\alpha_1) \omega_1^2 = -T_1 \sin(\alpha_1)$$

La combinaison de ces deux résultats donne ω_1 :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{D}}$$

b) Pour $\omega > \omega_1$, la tension T_2 doit être introduite et elle n'est pas égale à T_1 . Par contre l'angle α reste égal à α_1 puisque les fils sont tendus. Donc les projections du PFD donnent :

$$\begin{cases} (T_1 - T_2) \cos(\alpha_1) = mg \\ -ml \sin(\alpha_1) \omega^2 = -(T_1 + T_2) \sin(\alpha_1) \end{cases}$$

Ces équations nous donnent la somme et la différence des tensions cherchées, ce qui conduit finalement à :

$$\begin{cases} T_1 = \frac{ml}{2}(\omega^2 + \omega_1^2) \\ T_1 = \frac{ml}{2}(\omega^2 - \omega_1^2) \end{cases}$$

Application numérique : $T_1 = 20,4 \text{ N}$ et $T_2 = 4,1 \text{ N}$. Il est normal que le fil du haut ait une tension plus grande, car le poids de M cherche à le tendre encore plus, tandis que le poids cherche plutôt à détendre le fil du bas.

10.13

Enroulement d'un fil sur un cylindre

C'est un exercice très riche utilisant les coordonnées polaires pour autre chose qu'un mouvement circulaire.

Gardez bien en tête la physique du problème (visualisez le mouvement) pour ne pas vous perdre dans les calculs.

1. La longueur d'un arc de cercle d'ouverture angulaire θ et de rayon R est égale à $R\theta$. Donc quand le fil est enroulé d'un angle θ , sa longueur libre n'est plus que $l = l_0 - R\theta$.
2. Par relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} \\ &= R\vec{u}_r + (l_0 - R\theta)\vec{u}_\theta \end{aligned}$$

3. En dérivant l'expression précédente par rapport au temps :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta + (l_0 - R\theta)(-\dot{\theta})\vec{u}_r + (-R\dot{\theta})\vec{u}_\theta \quad (10.7)$$

$$= -\dot{\theta}(l_0 - R\theta)\vec{u}_r \quad (10.8)$$

4. $\|\vec{v}\| = |\dot{\theta}(l_0 - R\theta)|$ donc nous ne pouvons pas conclure immédiatement. Repassons alors par le PFD. Tout d'abord, écrivons la vitesse $\vec{v} = -v\vec{u}_r$. Donc :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{dv}{dt}\vec{u}_r - v\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

Dans le plan horizontal xOy , la seule force présente est la tension du fil, qui est selon \vec{u}_θ . Donc la projection du PFD sur \vec{u}_r donne :

$$m\frac{dv}{dt} = 0$$

Donc la norme de la vitesse est constante.

5. La norme de la vitesse v introduite précédemment est bien positive, puisque $\dot{\theta} > 0$ et $l_0 - R\theta > 0$. Comme elle est constante, elle est en particulier égale à v_0 . Il vient alors :

$$\dot{\theta}(l_0 - R\theta) = v_0$$

6. L'équation précédente s'intègre immédiatement. En tenant compte des conditions initiales :

$$\theta l_0 - \frac{1}{2}R\theta^2 = v_0 t$$

Il faut donc résoudre ce polynôme du second degré pour en sortir $\theta(t)$:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-l_0)^2 - 4\frac{1}{2}Rv_0 t = l_0^2 - 2Rv_0 t \\ \Rightarrow \theta &= \frac{1}{R} \left(l_0 \pm \sqrt{l_0^2 - 2Rv_0 t} \right) \end{aligned}$$

Nous avons déjà remarqué que $\dot{\theta} > 0$. La seule des deux solutions trouvées qui soit croissante est celle avec le signe $-$ d'où :

$$\theta(t) = \frac{l_0}{R} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2Rv_0 t}{l_0^2}} \right)$$

7. Le fil est entièrement enroulé quand $l = 0$, autrement dit $\theta(t_f) = l_0/R$. Injectant cela dans l'expression de $\theta(t)$, il vient :

$$t_f = \frac{l_0^2}{2Rv_0} \approx 6,25 \text{ s}$$

$$\theta(t_f) = 143^\circ 15'$$

8. 1. Projetons cette fois le PFD sur \vec{u}_θ en n'oubliant pas (10.7) et en posant $\vec{T} = -T\vec{u}_\theta$ pour que $T > 0$:

$$mv\dot{\theta} = T$$

Comme v est constante, $v = v_0$. $\dot{\theta}$. D'où :

$$T = mv_0\dot{\theta} = \frac{mv_0^2}{l_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2Rv_0 t}{l_0^2}}}$$

2. En sortant t de la relation précédente, il vient :

$$t_{\text{rup}} = \frac{l_0^2}{2Rv_0} \left(1 - \left(\frac{mv_0^2}{l_0 T_{\text{rup}}} \right)^2 \right) \approx 6,09 \text{ s}$$

En injectant ce résultat dans $\theta(t)$, cela donne :

$$\theta_{\text{rup}} = \frac{l_0}{R} \left(1 - \frac{mv_0^2}{l_0 T_{\text{rup}}} \right) \approx 2,1 \text{ rad}$$

Donc $\theta_{\text{rup}} = 120^\circ 19' < \theta(t_f)$. Donc le fil casse avant l'enroulement complet.

10.14

Chute avec freinage fluide quadratique

Nous avons signalé dans le cours que la force de frottement fluide linéaire n'était pas réaliste, mais conduisait à des calculs abordables. Voici le cas plus crédible d'une force quadratique : l'exercice arrête les calculs à ceux de la vitesse.

Le PFD va donner une équation non linéaire à cause, justement de cette force non linéaire. Pensez donc à la séparation des variables.

1. Le système étudié est le point matériel en chute libre, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il est soumis à son poids et à la force \vec{F} , d'où $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}$. Le mouvement étant rectiligne, projetons tout sur l'axe Oz :

$$(m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}) \cdot \vec{u}_z \\ \Rightarrow m\dot{v} = mg - \alpha v^2$$



L'exercice prend la vitesse comme inconnue et non la position. Le PFD a donc été écrit avec \dot{v} et non \ddot{x} .

2. Quand la valeur limite est atteinte, v devient constante et donc sa dérivée devient nulle. D'où :

$$0 = mg - \alpha v_{\text{lim}}^2 \\ \Rightarrow v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{mg}{\alpha}}$$

L'équation différentielle se réécrit donc $m\dot{v} = \alpha(v_{\text{lim}}^2 - v^2)$. Par séparation des variables :

$$\frac{dv}{v_{\text{lim}}^2 - v^2} = \frac{\alpha}{m} dt$$

Le membre de gauche se réécrit :

$$\frac{1}{v_{\text{lim}}^2 - v^2} = \frac{1}{2v_{\text{lim}}} \left(\frac{1}{v_{\text{lim}} - v} + \frac{1}{v_{\text{lim}} + v} \right)$$

d'où :

$$\ln \left(\frac{v_{\text{lim}} + v}{v_{\text{lim}} - v} \right) = \beta t + A$$

avec :

$$\beta = \frac{2\alpha v_{\text{lim}}}{m}$$

Après détermination de la constante d'intégration par $v(t=0) = 0$ ($A = 0$), il vient :

$$v(t) = v_{\text{lim}} \frac{e^{\beta t} - 1}{e^{\beta t} + 1}$$

3. $\alpha \approx 9,69 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$.

4. $v(t) = 1 - 10^{-3} v_{\text{lim}}$ conduit à $t = 17,4 \text{ s}$.

10.15

Mouvement d'une bille dans un fluide visqueux.

Méthode mise en jeu : n°1.

Il n'y a aucune difficulté particulière dans le traitement de l'exercice. L'équation différentielle obtenue a amplement été rencontrée en électricité et aucune surprise n'est à redouter. On finit par un tracé et une régression linéaire.

- D'après le texte, la poussée d'Archimède $\vec{\pi} = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 \vec{g}$, la force de frottement visqueux $\vec{f} = -6\pi\eta r \vec{v}$ s'appliquent à la bille. Son poids $m\vec{g} = mg\vec{e}_z$ s'applique aussi.
- La force réciproque du poids de la bille est l'action de gravitation exercée par la bille sur la Terre. Elle est de même intensité mais de sens opposé à ce poids.
- Le PFD appliqué à la bille dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen donne :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 \vec{g} - 6\pi\eta r \vec{v} + m\vec{g}.$$

On projette cette relation sur l'axe Oz descendant en remarquant que $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho \frac{dv}{dt} = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g - 6\pi\eta r v + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g.$$

Ceci donne l'équation en v :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{9\eta}{2r^2\rho} v = \frac{\rho - \rho_0}{\rho} g.$$

4. Cette équation différentielle du premier ordre donne une solution de régime permanent qui correspond à la solution particulière mathématique de cette équation complète. Elle est de même nature que le second membre, c'est-à-dire constante. On lit donc, en injectant une solution particulière constante dans cette équation : $0 + \frac{9\eta}{2r^2\rho} v_{\text{lim}} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho} g$ ce qui conduit bien à l'expression attendue.

Le temps caractéristique du régime transitoire se lit aussi sur l'équation : c'est l'inverse du coefficient en v de l'équation :

$$\frac{9\eta}{2r^2\rho} = \frac{1}{\tau} \text{ ou encore, } \tau = \frac{2r^2\rho}{9\eta}.$$

On peut aussi obtenir ces résultats en donnant la solution de l'équation : $v(t) = \frac{2(\rho - \rho_0)g}{9\eta} r^2 (1 - \exp(-\frac{9\eta}{2r^2\rho} t))$ correspondant à une vitesse initiale nulle.

5. La relation à exploiter est $v_{\text{lim}} = \frac{2(\rho - \rho_0)g}{9\eta} r^2$. Pour reconnaître le caractère pertinent de cette loi, il est préférable de tracer $y = \frac{2(\rho - \rho_0)g}{9v_{\text{lim}}}$ en fonction de $x = \frac{1}{r^2}$ qui doit donner une représentation graphique linéaire : $y = kx$. On a alors le tableau de valeur :

r (mm)	1,50	1,60	1,75	2,00	2,25
y (Pl·m ⁻²)	273 900	241 400	200 600	156 500	123 800
x (m ⁻²)	444 400	390 600	326 500	250 000	197 500

Ceci permet d'établir le tracé (figure 10.18) :

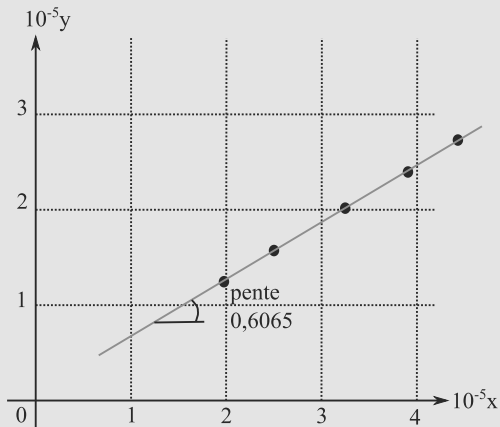


Figure 10.18 Tracé de y en fonction de x .

Le tracé est bien linéaire. Une régression linéaire donne alors une pente de 0,6065 Pl. L'unité qui peut être proposée en première année (la viscosité est au programme de deuxième année PC et PSI) est basée sur l'analyse dimensionnelle : $\eta = \frac{2r^2\rho}{9\tau}$ permet de proposer l'unité homogène à des $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$.

On donne au final : $\eta = 0,606 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$.

6. La valeur trouvée pour η permet de calculer $\tau = 6,43 \text{ ms}$: à l'échelle de l'observation humaine, le régime permanent est atteint immédiatement. On mesure bien la vitesse limite en relevant la vitesse moyenne entre les deux repères.

10.16 Une mesure précise de g

Méthode mise en jeu : n°1.

Le cadre de cet exercice est très classique (tir vertical). Son exploitation l'est beaucoup moins et il faut mener les calculs avec confiance en sachant bien où ils doivent mener.

1. On applique le PFD au mobile dans le référentiel terrestre (galiléen). Il n'est soumis qu'à son poids et donc :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g}.$$

En projection sur l'axe vertical ascendant Oz , on a donc $\ddot{z} = -g$ qui s'intègre en $\dot{z} = -gt + \dot{z}_0$ puis $z = -g\frac{t^2}{2} + \dot{z}_0 t + z_0$ où z_0 est l'altitude initiale du mobile et \dot{z}_0 sa vitesse verticale initiale. En faisant la différence entre z et z_M , on trouve donc : $z - z_M = -g\frac{t^2 - t_M^2}{2} + \dot{z}_0(t - t_M)$

Le maximum est atteint lorsque la vitesse verticale s'annule : $0 = -gt_M + \dot{z}_0$. En éliminant la vitesse initiale entre les deux expressions, on a finalement :

$$z - z_M = -g\frac{t^2 - t_M^2}{2} + gt_M(t - t_M) = -\frac{g}{2}(t^2 - t_M^2 - 2t_M t + 2t_M^2)$$

Au final, on trouve donc : $z - z_M = -\frac{g}{2}(t^2 + t_M^2 - 2t_M t) = -\frac{g}{2}(t - t_M)^2$

2. Le temps de montée et le temps de descente sont identiques comme le montre la relation établie au 1. (deux temps, symétriques par rapport à t_M , sont solutions). On trouve donc : $t - t_M = \pm \sqrt{\frac{2}{g}(z_M - z)}$ et, par différence de la plus grande solution avec la plus petite :

$$T = 2\sqrt{\frac{2}{g}(z_M - z)}.$$

3. On élève la relation précédente au carré : $T^2 = 4\frac{2}{g}(z_M - z)$. Par différence des deux solutions indicées 1 et 2, on a alors $T_1^2 - T_2^2 = \frac{8}{g}(z_M - z_1 - z_M + z_2)$ et donc :

$$g = \frac{8}{T_1^2 - T_2^2}(z_2 - z_1) = \frac{8H}{T_1^2 - T_2^2}.$$

Ceci donne numériquement $9,800 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

10.17

Mouvement sans suspension

Méthode mise en jeu : n°1.

Le début de l'exercice est simple et classique. Il faut ensuite bien poser les calculs qui se limitent à des dérivations et intégrations. C'est la combinaison des mouvements et l'utilisation de conditions initiales « intermédiaires » qui peut poser le plus de problèmes.

1. a) La masse M est posée sur un plateau vibrant (figure 10.19) :

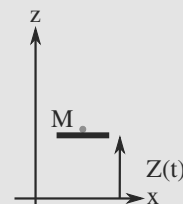


Figure 10.19 Masse sur un plateau oscillant.

Le PFD appliqué à la masse M dans le référentiel terrestre supposé galiléen donne : $M \frac{d\vec{v}}{dt} = M\vec{g} + \vec{R}$ où $\vec{R} = R\vec{e}_z$ est la réaction du support sur la masse. R ne peut être que positif (liaison unilatérale). En projection sur l'axe Oz , on obtient alors :

$$M\ddot{z} = -Mg + R$$

b) Si $R > 0$ à tout moment, alors $z = z_S$. Or $R = M\ddot{z} + Mg = M(g + z_0\omega^2 \cos(\omega t))$. Dès que $g - z_0\omega^2 < 0$, cette expression de R change de signe : elle n'est alors plus valable pour tout t . Il apparaît donc que $a_M = g$ qui est possible si $z_0 > \frac{g}{\omega^2}$.

2. a) Le point matériel décolle pour $R = 0$ et donc pour $g + z_0\omega^2 \cos(\omega t) = 0$ et donc à un instant t tel que $\cos(\omega t) = -\frac{g}{z_0\omega^2}$. Cela donne alors $z_D = z_0 + \frac{g}{\omega^2}$.

On peut voir qu'on retrouve la condition de décollage : $z_0 > \frac{g}{\omega^2}$ ($z_D < 2z_0$).

b) On ne se préoccupe pas de la portée et on travaille sur Oz seulement. Les nouvelles conditions initiales sont $z = z_D$ et $\dot{z} = \dot{z}(z = z_D)$ à déterminer. La suite du mouvement est un vol libre.

Au moment du décollage, $\dot{z}_D = z_0\omega \sin(\omega t_D)$ avec $\sin(\omega t_D) = \sqrt{1 - \cos^2(\omega t_D)} = \sqrt{1 - \frac{g^2}{z_0^2\omega^4}}$. On se convaincra que le sinus est bien positif lorsque le cosinus atteint la valeur de décollage sur la figure 10.20 :

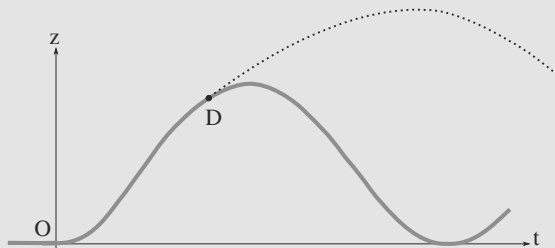


Figure 10.20 Mouvement de la masse.

Le PFD sur le mobile dans le référentiel terrestre galiléen donne alors : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g}$ et en projection sur Oz : $\ddot{z} = -g$ qui s'intègre en $\dot{z} = -g(t - t_D) + \dot{z}_D$ puis $z = -g\frac{(t - t_D)^2}{2} + \dot{z}_D(t -$

$t_D) + z_D$. Le maximum est atteint lorsque la vitesse verticale s'annule : $0 = -g(t_M - t_D) + \dot{z}_D$. On reporte cette différence de temps dans l'expression de z et on obtient :

$$z_M = -g\frac{\dot{z}_D^2}{2g^2} + \frac{\dot{z}_D}{g} + z_D = \frac{z_0^2\omega^2}{2g}\left(1 - \frac{g^2}{z_0^2\omega^4}\right) + z_0 + \frac{g}{\omega^2},$$

soit finalement : $z_M = z_0 + \frac{g}{2\omega^2} + \frac{z_0^2\omega^2}{2g}$.

c) La durée de la phase de vol telle qu'elle est définie dans le texte est le double de la durée de la phase de montée. On a déjà calculé cette durée : $(t_M - t_D) = \frac{\dot{z}_D}{g}$ et donc :

$$T_v = 2(t_M - t_D) = 2\frac{\dot{z}_D}{g} = 2\frac{z_0\omega}{g}\sqrt{1 - \frac{g^2}{z_0^2\omega^4}}.$$

3. Application

a) On calcule $z(t)$ pour le véhicule à partir du profil $z(x)$ de la route : $z(x) = z_0(1 - \cos(2\pi x/\lambda))$ et $x = vt$ avec $\lambda = 2$ m et $z_0 = 2,5$ cm. On a donc : $z(t) = z_0(1 - \cos(2\pi vt/\lambda))$ et on reconnaît $\omega = 2\pi v/\lambda$. La condition de décollage précédente $z_0 > \frac{g}{\omega^2}$ devient donc $z_0 > \frac{g\lambda^2}{4\pi^2 v^2}$ et donc :

$$v > \sqrt{\frac{g\lambda^2}{4\pi^2 z_0}} = \sqrt{\frac{g}{z_0}} \frac{\lambda}{2\pi} = V_M$$

Numériquement, on trouve $6,30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ soit $22,7 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

b) La condition $z_M = z_0 + \frac{g}{2\omega^2} + \frac{z_0^2\omega^2}{2g}$ devient $z_M = z_0 + \frac{\lambda^2 g}{8\pi^2 v^2} + \frac{z_0^2 2\pi^2 v^2}{\lambda^2 g}$.

Numériquement, on trouve $8,9$ cm soit $3,9$ cm au-dessus des bosses.

c) Si on assimile le temps de vol à la durée de perte de contrôle du véhicule, on trouve :

$$T_v = 2\sqrt{\frac{z_0^2\omega^2}{g^2} - \frac{1}{\omega^2}} = 2\sqrt{\frac{z_0^2 4\pi^2 v^2}{\lambda^2 g^2} - \frac{\lambda^2}{4\pi^2 v^2}}$$

Numériquement, on trouve $0,264$ s.

Plan

11.1	Théorème de l'énergie cinétique	171
11.2	Cas des forces conservatives — Énergie potentielle	173
11.3	Théorème de l'énergie mécanique	176
	Synthèse	177
	Tests et exercices	178
	Corrigés des exercices	181

Introduction

Les outils du chapitre précédent suffisent à résoudre tout problème de mécanique du point matériel en référentiel galiléen. Cependant, leur utilisation est parfois lourde et un raisonnement énergétique peut se montrer plus efficace ou, tout du moins, complémentaire.

Prérequis

- Forces
- Calcul intégral
- Puissance

Objectifs

- Introduire le travail et la puissance d'une force
- Rappeler les formulations du théorème de l'énergie cinétique
- Introduire l'énergie potentielle des forces conservatives
- Donner les énergies potentielles de pesanteur et élastiques
- Introduire l'énergie mécanique et les problèmes à énergie mécanique conservatives

11.1 Théorème de l'énergie cinétique

11.1.1 Travail d'une force

Soit O l'origine du référentiel et \vec{F} une force s'appliquant sur un point matériel M . Son **travail élémentaire** sur un déplacement élémentaire $d\vec{OM}$ est défini par :

Définition

Le **travail élémentaire d'une force** est défini par :

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$



De l'additivité des forces découle l'additivité des travaux élémentaires, donc celles des puissances.



Le travail est en joule (J) et la puissance en joules par seconde, ou watt (W).

Il mesure l'énergie déployée par la force pour causer ce petit déplacement du point M . La **puissance** de la force est définie par :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Alors, $\delta W = \mathcal{P} dt$.

Si M est en déplacement quelconque, il suffit de décomposer sa trajectoire en une succession de déplacements élémentaires, de calculer les travaux élémentaires sur chacun, et d'en faire la somme. Cela donne le **travail le long de la trajectoire** (ou travail tout court). Celui-ci s'écrit symboliquement, pour un déplacement d'un point M_1 à un point M_2 :

Définition

Le travail d'une force le long d'une trajectoire est défini par :

$$\begin{aligned} W_{M_1 \rightarrow M_2} &= \int_{M_1}^{M_2} \delta W \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t) dt \end{aligned}$$

en notant $t_1 = t(M_1)$ et $t_2 = t(M_2)$.



- Ce travail a la même dimension que le travail élémentaire, il est homogène à une énergie.
- La première écriture de cette intégrale est une **intégrale symbolique**. Reportez-vous à la fiche méthode 7 concernant leur manipulation.

En général, ce travail dépend du détail de la trajectoire suivie pour aller de M_1 à M_2 . Ainsi, sur la figure 11.1, la force peut développer un travail différent sur chacune des trois trajectoires, bien que le point de départ et le point d'arrivée soient les mêmes.

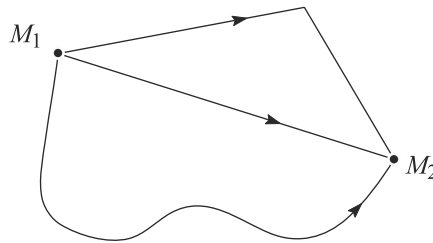


Figure 11.1 Le travail dépend en général de la forme de trajectoire.

11.1.2 Énoncés du théorème de l'énergie cinétique

Ce théorème peut être formulé de trois manières équivalentes, en notant W le travail de toutes les forces et $E_c = 1/2 mv^2$ l'énergie cinétique :

Théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta E_c = W \quad \text{Formulation intégrée}$$

$$dE_c = \delta W \quad \text{Formulation infinitésimale}$$

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P} \quad \text{Formulation en puissance}$$

Ces trois formes ont des utilisations différentes :

- La formulation intégrée, la plus utilisée, s'applique entre deux instants t_1 et t_2 . Elle relie une variation d'énergie et un travail.
- La formulation infinitésimale, qui s'écrit à l'aide de différentielles, a la même signification mais s'applique sur un intervalle de temps infinitésimal dt . Elle est souvent un intermédiaire de calcul pour aboutir à la formulation intégrée.
- La formulation en puissance est pratique lorsque la puissance des forces est connue ou plus facile à calculer que leur travail.

Interprétation physique

Le signe de δW donne donc le sens de variation de l'énergie cinétique :

- Si la force s'oppose au mouvement ($\vec{F} \cdot \vec{v} < 0$), alors $\delta W < 0$ et l'énergie cinétique diminue : le système ralentit. La force est alors dite résistante.
- Si elle travaille dans le sens du mouvement ($\vec{F} \cdot \vec{v} > 0$), alors $\delta W > 0$ et l'énergie cinétique augmente : le système accélère. La force est alors dite motrice.
- Si elle agit perpendiculairement à la vitesse, elle ne travaille pas. La formulation en puissance montre immédiatement que cette force ne fait pas varier l'énergie cinétique, et donc pas la **norme** de la vitesse : une force ne travaillant pas peut seulement faire tourner le vecteur vitesse, pas changer sa norme.



Pour un satellite en orbite circulaire autour de la Terre, la vitesse est orthoradiale, tandis que la force gravitationnelle exercée par la Terre sur lui est radiale. L'énergie cinétique de ce satellite est donc conservée.

11.2 Cas des forces conservatives — Énergie potentielle

11.2.1 Définition

Une force est dite conservative si elle ne dépend que de la position du point matériel et si son travail $W_{M_1 \rightarrow M_2}$ dépend seulement des positions du point de départ M_1 et du point d'arrivée M_2 , et pas de la forme de la trajectoire entre les deux.

Alors, il existe une fonction de la position appelée **énergie potentielle** telle que le travail en soit la différence :

Définition

La relation entre énergie potentielle et travail est définie par :

$$W_{M_1 \rightarrow M_2} = E_p(M_1) - E_p(M_2)$$



Les forces conservatives sont les seules dont le travail admet une formule générale, justement grâce à l'énergie potentielle.

Il est évident dans cette expression que toutes les trajectoires ayant même point de départ et même point d'arrivée auront même travail, peu importe leur détail.

Il suffit alors de se donner un point O où, arbitrairement, nous posons $E_p(O) = 0$. Pour tout autre point M nous avons alors $E_p(M) = E_p(O) - W_{O \rightarrow M}$.

11.2.2 Utilisation de l'énergie potentielle

Pour manipuler l'énergie potentielle, il est nécessaire de maîtriser un outil mathématique vu, jusqu'ici, seulement de loin : la différentielle. Reportez-vous à l'annexe 6.

Travail et énergie potentielle

Les expressions suivantes sont synonymes :

- force conservative,
- force dérivant d'un potentiel,
- force dont le travail ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée,
- force dont le travail élémentaire est une différentielle exacte.

Imaginez que vous ayez à vous rendre, à pied, d'un point A à un point B . Si c'est du terrain plat ou si vous devez monter puis descendre une montagne en cours de route, l'effort fourni (par vos muscles) ne sera pas le même, bien que le point de départ et le point d'arrivée soient identiques ! Cela illustre le fait qu'un travail de force peut être non exact.

Expressions à connaître

Vous devez connaître par cœur les expressions des énergies potentielles de pesanteur et de rappel élastique, mais aussi savoir les redémontrer (voir méthode n°2).

Énergies potentielles usuelles :



La constante d'intégration peut être librement choisie, fixant l'origine des énergies potentielles.



De l'additivité des travaux découle celle des énergies potentielles.

$$E_{p\text{ poids}} = mgz + \text{cst} \quad \text{avec l'axe } Oz \text{ marquant la verticale } \mathbf{ascendante}$$

$$E_{p\text{ élastique}} = \frac{1}{2} k(l - l_0)^2 + \text{cst} \quad \text{pour un ressort } (k, l_0)$$

Méthode 1 calculer le travail d'une force

Choisissez les instants t_1 et t_2 : rien ne vous oblige à prendre le point $M(t_1)$ comme la position initiale de l'objet et $M(t_2)$ comme sa position finale ! Vous pouvez choisir deux points quelconques sur la trajectoire.

Si la force est conservative et que vous connaissez l'expression de son énergie potentielle, le résultat est immédiat via $W = -\Delta E_p$. Vous devez connaître par cœur les expressions des énergies potentielles de pesanteur et de rappel élastique.

Sinon, calculez le travail élémentaire par $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$ ou par $\delta W = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$: la formule faisant intervenir la vitesse sera plus commode si la force elle-même dépend de la vitesse (frottements fluides par exemple). Le travail s'en déduira par intégration.

Exemple d'application

1. Soit une masse m attachée à un ressort horizontal. Calculez le travail de la force de rappel élastique lorsque le ressort se comprime d'une longueur l à $l/2$.
2. Soit une masse m en mouvement rectiligne sur un axe Ox soumis à une force de frottement fluide $\vec{F} = -k\vec{v}$. Calculez le travail de cette force quand la masse parcourt une distance l avec une vitesse constante v_0 .

Solution

1. La force de rappel élastique est conservative, donc nous avons directement :

$$\begin{aligned} W &= -\Delta E_p \\ &= -\frac{1}{2}k \left(\left(\frac{l}{2} - l_0 \right)^2 - (l - l_0)^2 \right) \\ W &= \frac{1}{2}kl \left(\frac{3}{4}l - l_0 \right) \end{aligned}$$

2. Nous n'avons pas de formule générale pour le travail de cette force. Comme c'est une force de frottement, elle n'est certainement pas conservative. Calculons donc W par sa définition, en notant A et B les points de départ et d'arrivée.

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \int_A^B -k\dot{x} dx$$

Le terme dx permet d'identifier la variable d'intégration comme x . Nous pouvons donc ajuster les bornes d'intégration :

$$W = \int_0^l -kv_0 dx = -kv_0 l$$

Le caractère non conservatif de cette force apparaît par le fait que W dépend non seulement de la position de A et B , mais aussi de la longueur de la trajectoire parcourue pour aller d'un point à l'autre. Si la trajectoire avait été curviligne, elle aurait été plus longue et le travail plus grand, alors que A et B n'ont pas bougé.

Méthode 2 rechercher l'énergie potentielle dont dérive une force

L'objectif est d'écrire le travail élémentaire δW sous forme d'une différentielle exacte.

- Si cela est possible, vous venez de prouver que la force était conservative et, en même temps, avez établi l'expression de E_p par identification : $\delta W = -dE_p$.
- Si cela n'est pas possible, la force n'est pas conservative.

En général l'énoncé contiendra une indication pour vous aider à prévoir cette conclusion. En outre, utilisez votre propre culture : les forces associées au poids, à la pesanteur, ou à des forces de rappel sont conservatives, les forces de frottement ne le sont pas.

Exemple d'application

Justifiez que le poids est une force conservative et calculez son énergie potentielle.

Solution

Soit Oz un axe vertical ascendant. Le travail élémentaire du poids s'écrit :

$$\begin{aligned}\delta W &= m\vec{g} \cdot d\vec{OM} \\ &= -mg \vec{u}_z \cdot (dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z) \\ \delta W &= -mg dz\end{aligned}$$

mg est une constante, nous pouvons le rentrer dans la différentielle. Alors δW apparaît comme une différentielle exacte :

$$\delta W = -d(mgz)$$

Par identification :

$$E_p = mgz + \text{cst}$$

sans oublier que E_p est définie à une constante additive près !

11.3 Théorème de l'énergie mécanique

Notons :

$$E_m = E_c + E_p$$

l'énergie mécanique, W_{nc} le travail des forces non conservatives appliquées au système et \mathcal{P}_{nc} leur puissance.

Théorème de l'énergie mécanique :

$\Delta E_m = W_{nc}$	Formulation intégrée
$dE_m = \delta W_{nc}$	Formulation infinitésimale
$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{nc}$	Formulation en puissance

Ainsi, si un système n'est soumis qu'à des forces conservatives ou non conservatives ne travaillant pas, son énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$ est un **invariant du mouvement** : sa valeur est constante au cours du mouvement (on dit aussi que c'est une intégrale première).

Méthode 3 PFD ou méthode énergétique ?

Les deux théorèmes énergétiques ne peuvent **remplacer** le PFD que pour les systèmes **à un degré de liberté** soumis à des forces **conservatives et/ou ne travaillant pas**. Dans ce cas particulier, pas si rare, dériver (par rapport au temps) un théorème énergétique redonne l'équation du mouvement.

Quand l'énergie mécanique est conservée, un bon moyen de déterminer sa valeur est de la calculer à l'instant initial.

Même quand la méthode énergétique ne suffit pas, elle peut rendre service :

- Le théorème de l'énergie cinétique permet de calculer v^2 , grandeur qui intervient par exemple dans l'accélération radiale d'un mouvement circulaire !
- Toute force non conservative ne travaillant pas (typiquement une réaction de support ou une tension de fil) est éliminée dans les théorèmes énergétiques alors qu'elle apparaît dans le PFD.

Synthèse

Savoirs

- Travail et puissance d'une force
- Le théorème de l'énergie cinétique sous ses différentes formes
- Énergies potentielles de pesanteur et élastique

Savoir-faire

- Exprimer le théorème de l'énergie cinétique pour un problème donné
- Tester le caractère conservatif d'une force
- Calculer le travail d'une force
- Utiliser l'énergie mécanique dans les problèmes conservatifs

Mots-clés

- Travail,
- puissance,
- énergie cinétique,
- énergie potentielle,
- énergie mécanique,
- intégrale première du mouvement,
- invariant du mouvement

Tests de connaissances

- 11.1 Travail nul signifie force nulle.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 11.2 Si une force dérive d'un potentiel, le travail qu'elle fournit entre deux points dépend de la longueur du trajet suivi.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 11.3 Si l'axe vertical Oz est prise descendant, $E_p = -mgz$.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 11.4 Pour tous les problèmes microscopiques, l'énergie mécanique est une grandeur conservative.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 11.5 Toute force dépendant de la position uniquement dérive d'un potentiel.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 11.6 Pour un fil inextensible, la tension dérive d'un potentiel.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 11.7 Dériver l'énergie mécanique par rapport au temps donne l'équation du mouvement.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 11.8 Il est toujours préférable d'utiliser l'énergie mécanique pour résoudre un problème.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 11.9 La notation δX indique forcément que la différentielle est non exacte.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

11.10 Ordres de grandeur dans le sport

- À quelle vitesse (en ordre de grandeur) un homme peut-il courir sur 100 m ?
- En supposant que le coureur convertisse toute son E_c en E_p , quelle hauteur peut-il sauter ? ($g \approx 10 \text{ m.s}^{-2}$). Commentez votre résultat.
- Quelle hauteur franchissent les sauteurs à la perche ? Justifiez alors l'intérêt de la perche des sauteurs.

11.11 Ressort oblique

Un point matériel M de masse m est astreint à se déplacer sans frottement sur un rail horizontal repéré par un axe Ox (figure 11.2). Il est en outre attaché à un ressort de raideur k et de longueur l_0 attaché en O' , un point situé à une distance $d > l_0$ de O , sur la même verticale.

M est initialement situé à l'abscisse $x = a$ avec une vitesse nulle.

Déterminez sa vitesse en fonction de x .

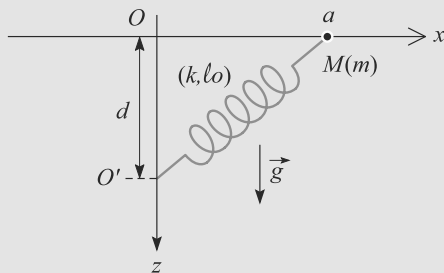


Figure 11.2 Ressort oblique.

11.12 Saut à l'élastique

Un homme de masse $m = 80 \text{ kg}$ saute à l'élastique d'un pont d'une hauteur $H = 112 \text{ m}$. Il est retenu par un élastique de raideur $k = 1000 \text{ N.m}^{-1}$ et de longueur à vide $l_0 = 80 \text{ m}$.

Il quitte le pont avec une vitesse négligeable. Les frottements ne sont pas pris en compte dans cette exercice et le poids s'écrit $\vec{P} = mg\vec{u}_x$ avec $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

- Déterminez la vitesse atteinte par la personne lorsque l'élastique commence à se tendre.
- Déterminez la longueur de l'élastique à l'équilibre l_{eq} lorsque la personne est suspendue dans le vide. À ce stade, que dire de la sécurité de ce saut ?
- Déterminez l'allongement maximum de l'élastique. Conclusion ?

11.13 Vitesse atteinte en bas d'une descente

(D'après ESIGETEL.)

Considérons un point matériel M de masse m qui se déplace de M_0 à M_1 , sans vitesse initiale sur une piste peut être celle de la figure 11.3 ou de la figure 11.4.

- Dans le cas du déplacement sur la piste circulaire de la figure 11.3, calculez la norme v_1 de la vitesse au point M_1 , en supposant qu'il n'y ait aucun frottement.
- Dans le cas du déplacement sur le plan incliné de la figure 11.4, calculez la norme v_1 de la vitesse au point M_1 , en supposant qu'il n'y ait aucun frottement.

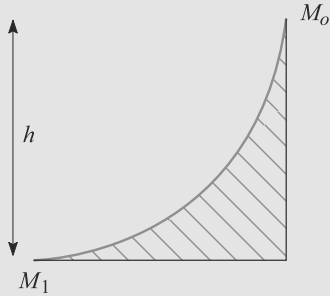


Figure 11.3 Profil de piste circulaire.

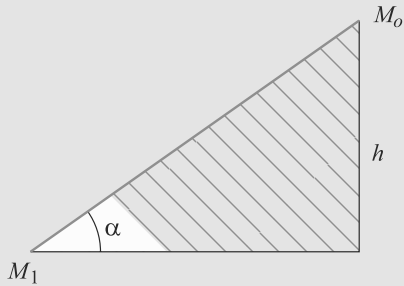


Figure 11.4 Profil de piste rectiligne.

3. Comparez les résultats obtenus.
4. Dans le cas du déplacement sur le plan incliné, calculez maintenant v_3 la vitesse au point M_1 , en supposant qu'il existe un frottement fluide avec l'air, caractérisé par un

coefficient de frottement h . Vous supposerez que la piste est suffisamment longue z , en précisant le sens de cette hypothèse.

11.14 Travail d'une force de frottement fluide

Un anneau est enfilé sur un cercle horizontal de centre O et de rayon R (figure 11.5). L'ensemble est totalement immergé, de sorte que l'anneau, assimilé à un point matériel de masse m , subit une force de frottement fluide $\vec{F}_f = -h\vec{v}$. D'autres forces, non précisées, assurent que le mouvement est circulaire uniforme.

Calculez le travail de la force de frottement fluide lorsque l'anneau parcourt n tours sur le cercle. Conclusion ?

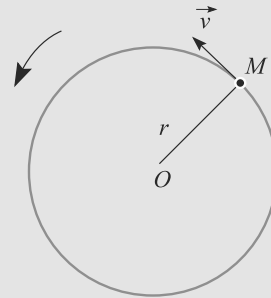


Figure 11.5 Travail d'une force de frottement fluide.

Exercices d'approfondissement

11.15 Montagnes russes

(D'après Enac pilotes.)

Une portion de montagnes russes a le profil de la figure 11.6. Un chariot, assimilé à un point matériel de masse m , parcourt ce dispositif sans frottement. À l'instant initial, il est lancé de A , d'ordonnée h_A , avec une vitesse nulle.

1. Intéressons-nous d'abord au risque de décollage du chariot en C , point d'altitude h_C . Le profil de la piste en C est circulaire ; son rayon est noté r_1 et son centre est C' , donc $CC' = r_1$. Déterminez les conditions sur h_A pour que le chariot atteigne C sans décoller.
2. Étudions maintenant la boucle de centre D et de rayon r_2 . La position du chariot dans la boucle est repérée un angle θ_2 tant que le chariot est en contact avec les rails.
 - a) Calculez la valeur de la vitesse et de la réaction de la piste en fonction de θ_2 .

- b) Quelles sont les conditions sur h_A pour que le chariot puisse faire un tour complet dans la boucle sans décoller ?

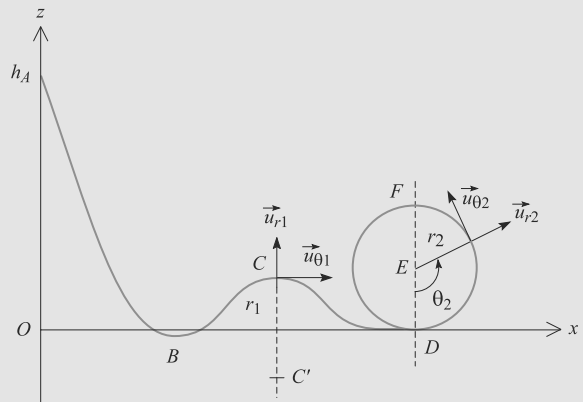


Figure 11.6 Profil de montagnes russes.

11.16 Enroulement d'un pendule

(D'après ENSTIM Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes.)

Un pendule est constitué d'un fil de longueur constante l attaché à un point fixe A . À son extrémité est attaché un point matériel M de masse m . Son inclinaison par rapport à la verticale est notée α . Tout frottement est négligé.

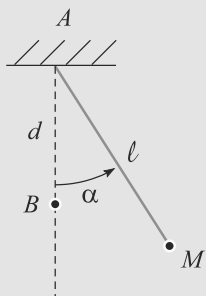


Figure 11.7 Enroulement d'un pendule autour d'un clou.

Un clou est planté en B , sur la même verticale que A à la distance d de ce point. (figure 11.7). Lorsque le pendule entre en contact avec le clou, on supposons qu'aucun transfert énergétique ne se produit.

Le pendule est lâché sans vitesse initiale depuis la position $\alpha = \pi/2$. Déterminez la condition sur d et l pour que le pendule s'enroule en restant tendu.

11.17 Régimes du pendule simple

Un pendule simple est constitué d'un fil inextensible de longueur l attaché à un point fixe O . Un point matériel M de masse m est attaché à l'autre extrémité. Son inclinaison par rapport à la verticale est notée θ .

Le paramétrage est indiqué figure 11.8. Initialement, le pendule est sur sa position de repos $\theta = 0$, fil tendu. Il est lancé par une impulsion qui lui communique une vitesse initiale horizontale \vec{v}_0 .

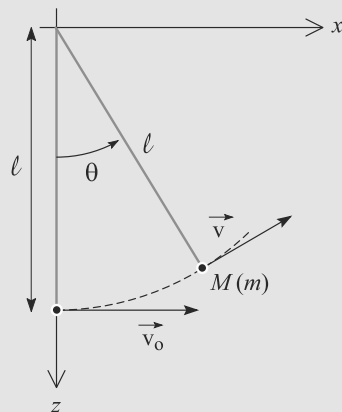


Figure 11.8 Régimes du pendule simple.

Discutez les régimes possibles du mouvement de ce pendule en fonction de la valeur de v_0 . Vous étudierez en particulier l'éventuelle annulation de la vitesse et/ou de la tension du fil au cours du mouvement.

11.1

Faux, cela signifie déplacement orthogonal à la force.

11.2

Faux, au contraire !

11.3

Vrai, à une constante près.

11.4

Vrai : les interactions microscopiques dérivent de potentiels. C'est le passage d'énergie du macroscopique au microscopique qui fait qu'une force (frottement par exemple) n'est pas conservative.

11.5

Faux, la condition mathématique est plus contraignante (propriétés du travail élémentaire).

11.6

Faux : c'est une force apparaissant en réaction à d'autres forces donc sans expression intrinsèque. Son travail est par ailleurs souvent nul.

11.7

Vrai, en simplifiant la vitesse dans l'expression obtenue.

11.8

Faux, le PFD ou le théorème du moment cinétique (vu au chapitre 18) peuvent être d'usage plus simple, en particulier si le problème n'est pas conservatif.

11.9

Faux, cette notation indique que nous ne savons si pas la différentielle est exacte. Si elle l'est, nous changeons alors de notation pour $-dE_p$.

11.10 Ordres de grandeur dans le sport

Il s'agit de faire qualitativement un bilan énergétique pour trouver des ordres de grandeurs. Un minimum de culture peut être utile.

1. Le record du monde sur 100 m est d'environ 10 s, ce qui fait une vitesse de l'ordre de 10 m.s^{-1} .
2. Si le coureur convertit la totalité de son énergie cinétique en énergie potentielle pour sauter une hauteur h (correspondant à une variation d' E_p égale à mgh), alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= mgh \\ \Rightarrow h &= \frac{v^2}{2g} \approx 5 \text{ m} \end{aligned}$$

Le record du monde de saut en hauteur est moitié plus faible. Il y a donc des pertes énergétiques, vraisemblablement lors de la prise d'impulsion au sol, sans parler des pertes dues au brusque changement de direction du mouvement.

3. Les sauteurs à la perche franchissent des hauteurs de l'ordre de 6 m. La conversion énergétique de l' E_c en E_p est donc meilleure avec une perche. En effet, l'énergie cinétique du sauteur à la perche est d'abord convertie en énergie potentielle élastique dans la perche qui ploie, puis cette énergie élastique est restituée au sauteur et alors convertie en énergie potentielle de pesanteur. Lors de ces deux conversions énergétiques, il y a moins de perte énergétique que pour le saut en hauteur.

Nous trouvons une hauteur supérieure aux 5 m de la question précédente car le sportif fournit de l'énergie supplémentaire en prenant appui sur la perche pendant le saut.

11.11

Ressort oblique

Méthode mise en jeu : n°2.

Le problème est à un seul degré de liberté, l'abscisse x , puisque le mouvement est rectiligne. Donc tous les paramètres de position qui apparaîtront (θ et l par exemple) pourront être exprimés en fonction de x . Toutes les forces qui travaillent sont conservatives, donc une approche énergétique devrait être rentable.

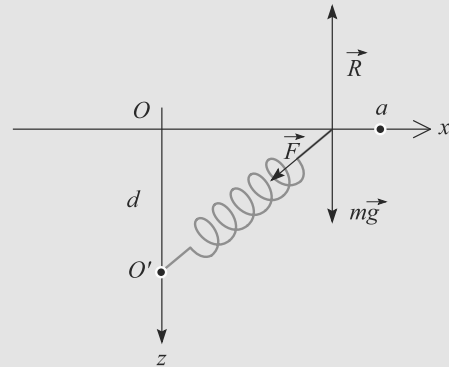


Figure 11.9 Mouvement horizontal sous l'action d'un ressort oblique.

L'énergie mécanique est constante donc comparons sa valeur à l'instant initial et à un instant ultérieur quelconque :

$$\frac{1}{2}k(\sqrt{d^2 + a^2} - l_0)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(\sqrt{d^2 + x^2} - l_0)^2$$

D'où la vitesse en un point x quelconque :

$$v(x)^2 = \frac{k}{m}(\sqrt{d^2 + a^2} - l_0)^2 - \frac{k}{m}(\sqrt{d^2 + x^2} - l_0)^2$$



Notez l'efficacité de la méthode énergétique. Nous n'avons eu à manipuler aucun vecteur !

11.12

Saut à l'élastique

Méthodes mises en jeu : n°1b, 2.

Le mouvement du courageux sportif comprend deux parties distinctes, l'une où la force de rappel élastique est absente (élastique non tendu), l'autre où elle est présente. Dans chacune des deux phases, le système a un seul degré de liberté (son altitude x) et est conservatif. Donc une étude énergétique devrait être aisée.

L'énoncé suggère via l'expression du poids de paramétrer le mouvement suivant un axe \vec{u}_x selon la verticale descendante. Attention donc au signe de l'énergie potentielle de pesanteur !

1. Considérons l'homme de masse m supposé ponctuel dans le référentiel (R) terrestre supposé galiléen. Son énergie mécanique est conservée :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mgx = 0$$

en prenant l'origine des énergies potentielles au point de départ ($\dot{x} = 0$ à $x = 0$ à l'instant initial).

Lorsqu'il commence à se tendre, le ressort a pour longueur l_0 donc $x = l_0$. Donc à l'instant t_1 , la vitesse vaut donc :

$$\dot{x}(t_1) = \sqrt{2gl_0} = 39,6 \text{ m.s}^{-1}$$

2. Le bilan des forces est modifiée puisque l'élastique est tendu : il faut ajouter la tension de l'élastique $\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{u}_x$. L'équilibre des forces projeté sur l'axe Ox donne :

$$\begin{aligned} (m\vec{g} + \vec{T} = \vec{0}) \cdot \vec{u}_x \\ \Rightarrow mg - k(l_{\text{eq}} - l_0) = 0 \\ \Rightarrow l_{\text{eq}} = l_0 + \frac{mg}{k} = 80,8 \text{ m} \end{aligned}$$

L'élastique est effectivement allongé à l'équilibre, ce qui est cohérent avec $l_{\text{eq}} > l_0$.

Numériquement, nous constatons que $l_{\text{eq}} < H$. Le saut paraît sans risque à ce stade de l'exercice.

3. Procédons comme à la question 1, puisque le système est toujours conservatif. Son énergie mécanique est constante (nulle) et vaut à un instant quelconque ultérieur à t_1 :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mgx + \frac{1}{2} k(l - l_0)^2 = 0$$

L'élongation maximale de l'élastique, à l'instant t_2 , est obtenue lorsque la vitesse de chute s'annule (le mouvement change de sens). Exprimons l'énergie mécanique à cet instant :

$$E_m(t_2) = 0 = 0 - mgx(t_2) + \frac{1}{2} k(x(t_2) - l_0)^2$$

Cela conduit à un polynôme en $x(t_2)$ dont il ne faut retenir que la racine positive :

$$x(t_2) = l_{\text{eq}} + \sqrt{l_{\text{eq}}^2 - l_0^2} = 92,0 \text{ m}$$

Numériquement, $x(t_2) > H$: le saut est donc sans risque mais le frisson est garanti !

11.13

Vitesse atteinte en bas d'une descente

Méthodes mises en jeu : n°1.

Le plan incliné est descendu sans frottement, puis avec des frottements frottements fluides. Dans le dernier cas, il intervient une force non conservative donc il n'est pas évident que la méthode énergétique soit intéressante. Cependant, l'énoncé ne demandant que la norme de la vitesse, cela vaut le coup d'essayer.

Pour comprendre l'expression de \dot{z} piste suffisamment longue \dot{z} , il faut se rappeler que les forces de frottement fluide conduisent à des vitesses décroissant exponentiellement (voir chapitre précédent, notion de vitesse limite). L'hypothèse signifie donc que ces exponentielles seront négligées.

1. Le système étudié est le point matériel M , soumis à son poids (force conservative) et à la réaction de la piste (force ne travaillant pas). Donc le TEC donne immédiatement $v_1 = \sqrt{2gh}$ (calcul classique).
2. De même, $v'_1 = \sqrt{2gh}$.
3. Les deux vitesses sont égales en norme puisqu'il n'y a pas de frottement, mais elles diffèrent par leur direction : la vitesse sur la piste circulaire est horizontale, tandis que celle sur le plan incliné est oblique, dans le sens de la pente.

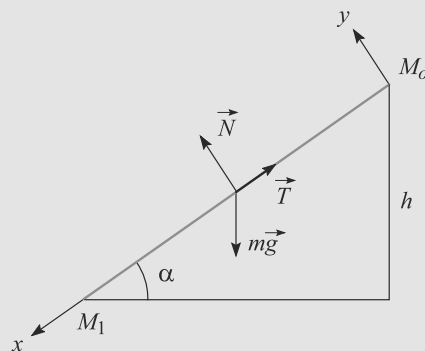


Figure 11.10 Paramétrage du problème de vitesse dans une descente.

4. La projection du PFD sur l'axe Ox est :

$$m\ddot{x} = mg \sin(\alpha) - k\dot{x}$$

qui se résout en :

$$\dot{x} = Ae^{-kt/m} + \frac{mg}{k} \sin(\alpha)$$

où A est la constante d'intégration. Si la piste est suffisamment longue \dot{z} , le terme exponentielle devient négligeable et la vitesse constante. D'où :

$$v_3 = \frac{mg}{k} \cos(\alpha)$$



Voilà un cas où la méthode énergétique n'est pas pratique, à cause d'une force non conservative dont le travail n'est pas facile à calculer.

11.14 Travail d'une force de frottement fluide

Méthode mise en jeu : n°1.

La tournure même de l'énoncé doit vous mettre la puce à l'oreille : cette force ne sera sans doute pas conservative. En effet, imaginons que l'anneau se trouve initialement en M_0 . Considérons deux trajectoires : celle où l'anneau n'a fait aucun tour (trajectoire réduite au point M_0) et celle où l'anneau a fait un tour. Le travail sur la première est évidemment nul. Si la force était conservative, le travail sur la seconde trajectoire serait nul aussi puisque ces deux trajectoires ayant même point de départ et même point d'arrivée M_0 !

La bonne stratégie pour cet exercice est donc de mettre en évidence la dépendance du travail avec n .

Il est plus commode de calculer le travail à partir de la puissance, puisque la force dépend de la vitesse. Le travail sur n tours, noté W_n , vaut :

$$\begin{aligned} W_n &= \int_{n \text{ tours}} \vec{F} \cdot \vec{v} dt \\ &= -hv^2 \int_{n \text{ tours}} dt \end{aligned}$$

La variable d'intégration étant le temps, calculons la date à laquelle l'anneau termine ses n tours. La durée d'un tour est $t_1 = 2\pi r/v$ donc la date cherchée est $t_n = nt_1$.

$$\begin{aligned} W_n &= -hv^2 \int_0^{nt_1} dt \\ &= -n 2\pi r h v \end{aligned}$$

Ce travail dépend bien du nombre de tours et donc de la trajectoire : la force de frottement fluide est non conservative.

11.15 Montagnes russes

Méthodes mises en jeu : n°1, 2. Cet exercice est très instructif et reste simple. Étudiez-le soigneusement et plusieurs fois !

D'abord, avec l'absence de frottement, le module de la vitesse ne dépend que de l'altitude (via le TEC). Ainsi, pour répondre à la deuxième série de questions, il est inutile d'avoir traité la première.

La condition de décolllement est l'annulation de la réaction du support. Cette force ne travaillant pas, il faut passer par le PFD.

En outre, au point C, le choix de la base dans laquelle écrire le PFD est remarquablement simple. En effet, le mouvement est circulaire au voisinage de ce point et la base polaire est confondue avec la base cartésienne.

Le système étudié est le chariot, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il est soumis à son poids $m\vec{g}$ ainsi qu'à la réaction de la route \vec{R} . Cette dernière est toujours orthogonale au rail, car il n'y a pas de frottement. D'où le PFD vectoriel : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}$. En outre, son énergie mécanique est conservée.

1. La situation au voisinage du point C est illustrée figure 11.11.

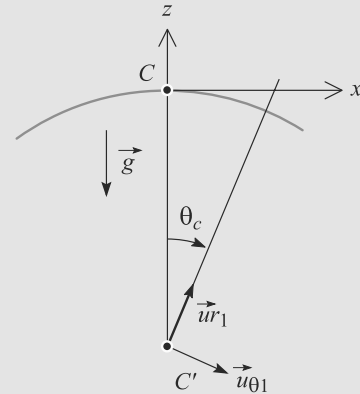


Figure 11.11 Paramétrisation au voisinage de C.

Choisissons de travailler dans la base cartésienne donnée par l'énoncé. Au point C, elle est confondue avec la base polaire $(\vec{u}_{r1}, \vec{u}_{\theta1})$. Il vient :

$$m\vec{a}_C = -mg\vec{u}_z + R_C\vec{u}_z$$

$$\text{avec } \vec{a}_C = -r_1\dot{\theta}_C^2\vec{u}_{r1} + r_1\ddot{\theta}_C\vec{u}_{\theta1}$$

Projetons alors le PFD sur $\vec{u}_z = \vec{u}_{r1}$, sachant que $v_C = r_1\dot{\theta}_C$. La réaction en C vaut :

$$R_C = mg - m\frac{v_C^2}{r_1}$$

Calculons v_C^2 par le théorème de l'énergie cinétique. Appliquons-le entre A et S :

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= \frac{1}{2}mv_C^2 \\ &= W(m\vec{g}) + W(\vec{R}) \\ \Delta E_c &= mg(h_A - h_C) \end{aligned}$$

D'où la réaction :

$$R_C = mg\left(1 - 2\frac{h_A - h_C}{r_1}\right)$$



Vous pourriez être tenté de décomposer le mouvement en deux parties, de A à B puis de B à C, et ainsi d'appliquer deux fois le TEC. C'est inutile, le TEC est applicable entre deux points quelconques de la trajectoire.

Le chariot ne peut atteindre C que si $h_A \geq h_C$. En outre il ne décolle pas si $R_C > 0$, soit :

$$h_C \leq h_A < h_C + \frac{r_1}{2}$$

2. La situation dans cette deuxième partie est représentée figure 11.12.

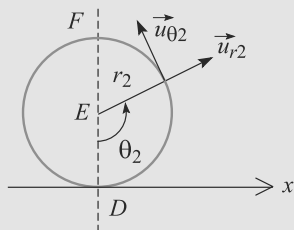


Figure 11.12 Deuxième partie du mouvement.

a) La vitesse est selon $\vec{u}_{\theta 2}$ donc seule sa norme est inconnue. Calculons-la par le TEC pris entre l'instant où le chariot est en A et un instant quelconque où le chariot est dans la boucle, à la position θ_2 :

$$\begin{aligned}\Delta E_c &= \frac{1}{2} m v^2 - 0 \\ &= -mg \Delta z\end{aligned}$$

L'altitude d'un point repéré par l'angle θ_2 est $z = r_2(1 - \cos(\theta_2))$. Donc :

$$v^2 = 2g(h_A - r_2(1 - \cos(\theta_2)))$$

La réaction du rail est obtenue par le PFD. La réaction étant entièrement radiale ($\vec{R} = -R \vec{u}_{r2}$), c'est la projection du PFD sur \vec{u}_{r2} qu'il faut considérer :

$$\begin{aligned}-m \frac{v^2}{r_2} &= -R + mg \cos(\theta_2) \\ \Rightarrow R &= \frac{mg}{r_2} (2h_A - 2r_2 + 3r_2 \cos(\theta_2))\end{aligned}$$

b) La réaction de support dans la boucle ne doit être nulle pour aucune valeur de θ_2 :

$$\begin{aligned}R &> 0 \\ \Rightarrow 3r_2 \cos(\theta_2) &> 2(r_2 - h_A) \quad \text{pour tout } \theta_2\end{aligned}$$

Cette condition est la plus restrictive pour $\theta_2 = \pi$, donc elle est vérifiée pour $h_A > 5r_2/2$.

11.16

Enroulement d'un pendule

Méthodes mise en jeu : n°1 et 2. Le mouvement est circulaire mais présente deux phases : d'abord de centre A et de rayon l , puis de centre B et de rayon $l - d$. L'absence de transfert énergétique lors du contact avec le clou implique que l'énergie cinétique, et donc la vitesse, varient continûment au cours du choc.

Le bon sens doit vous guider : le pendule s'enroulera plus facilement si la portion de fil à enrouler est courte, donc si d est supérieure à une certaine valeur.

Le point M est soumis à la tension du fil et à son poids. Seul le poids travaille. Le fil reste tendu si la tension du fil ne s'annule pas.

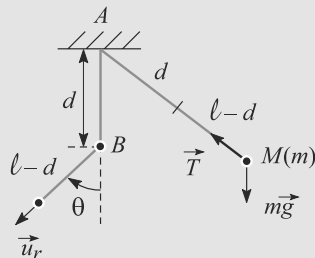


Figure 11.13 Paramétrisation du pendule s'enroulant autour d'un clou.

Une fois le fil en contact avec le clou, le pendule décrit un cercle de centre B et de rayon $l - d$. La tension du fil s'exprime par $\vec{T} = -T \vec{u}_r$. La projection du PFD sur \vec{u}_r s'écrit :

$$\begin{aligned}-\frac{mv^2}{l-d} &= mg \cos(\theta) - T \\ \Rightarrow T &= mg \cos(\theta) + \frac{mv^2}{l-d}\end{aligned}$$

Le fil reste tendu si $T > 0$ sur tout le mouvement. C'est pour $\cos(\theta) > 0$ que cette condition est la plus restrictive, donc pour $\theta = \pi$ (position verticale haute). La condition devient donc :

$$T = -mg + \frac{mv^2}{l-d} > 0$$

Utilisons le théorème de l'énergie cinétique entre la position initiale et la position verticale haute. Prenons l'altitude de la position initiale nulle. La position basse a pour altitude $-l$ et le diamètre de la trajectoire est $2(l - d)$ donc l'altitude de la position haute est :

$$-l + 2(l - d) = l - 2d$$

D'où le théorème :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} m v^2 - 0 &= -mg(l - 2d - 0) \\ \Rightarrow v^2 &= 2g(2d - l)\end{aligned}$$

En combinant ces deux résultats, la condition devient :

$$\begin{aligned}T &= mg \left(-1 + \frac{2(2d - l)}{l - d} \right) > 0 \\ \Rightarrow d &> \frac{3}{5} l\end{aligned}$$

11.17

Régimes du pendule simple

Le pendule est initialement en mouvement circulaire. Le simple bon sens permet d'imaginer la suite de son mouvement :

- S'il est lancé assez fort, le pendule peut se mettre en rotation autour de O, décrivant indéfiniment des tours complets autour de O sans que le fil ne se détende. C'est le régime révolutif.

- S'il est lancé très doucement, il n'atteindra pas la position verticale haute, faisant demi-tour avant. Il oscillera alors autour de sa position d'équilibre, le fil restant tendu. C'est le régime pendulaire.
- Enfin, le fil peut se détendre pendant le mouvement. Alors soumis seulement à son poids, il sera en chute libre jusqu'à ce que le fil se retende. Le problème change donc de nature au cours du temps, alternant mouvement circulaire et mouvement parabolique.

Cette analyse montre que deux paramètres vont permettre de distinguer les cas : la vitesse (M fait demi-tour si elle s'annule) et la tension du fil (le mouvement devient une chute libre si elle s'annule).

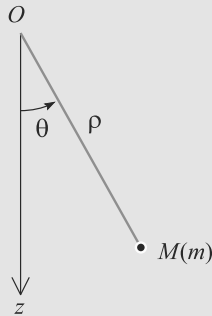


Figure 11.14 Pendule simple.

Le système est conservatif, son énergie mécanique est constante. Prenons l'origine des énergies potentielles en O . Comparons donc les expressions de l'énergie mécanique à l'instant initial et à un instant ultérieur quelconque :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_0^2 - mgl &= \frac{1}{2}mv^2 - mgz \\ \Rightarrow v^2 &= v_0^2 + 2gl(\cos(\theta) - 1)\end{aligned}$$



L'axe Oz est orienté vers le bas dans ce corrigé, donc pour le poids $E_p = -mgz$.

Pour calculer la tension du fil, il faut passer par le PFD projeté sur \vec{u}_r :

$$T = \frac{mv_0^2}{l} + mg(3\cos(\theta) - 2)$$

La discussion porte sur l'annulation éventuelle de ces deux grandeurs :

- Si la vitesse s'annule avant la tension, le pendule fait demi-tour et le fil ne se détend jamais. Il est alors en mouvement **pendulaire**.

- Si la tension s'annule avant la vitesse, le fil se détend pendant le mouvement. Avec la vitesse qu'il a encore à ce moment, M continue son mouvement en chute libre jusqu'à ce que le fil se retende.
- Si aucune des deux grandeurs ne s'annule, le pendule tourne toujours dans le même sens sans que le fil se détende : le régime est **révolutif**.

Une condition nécessaire, mais pas forcément suffisante, pour que le régime soit pendulaire est que $v^2(\theta = \pi)$ soit négative, donc physiquement inacceptable : alors, le pendule ne peut pas atteindre la position verticale haute. Cela correspond à $v_0^2 < 4gl$, soit un angle θ_1 tel que :

$$\cos(\theta_1) = 1 - \frac{v_0^2}{2gl}$$

Cependant, la tension peut s'annuler aussi, pour un angle θ_2 tel que :

$$\cos(\theta_2) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{v_0^2}{2gl} \right) = \frac{2}{3} \cos(\theta_1)$$

Cherchons celui des deux angles qui est le plus petit et donc atteint le premier. Ils sont égaux si $v_0^2 = 2gl$. Il est alors aisé de vérifier que :

- $\theta_1 < \theta_2$ si $0 < v_0 < \sqrt{2gl}$: régime pendulaire. Alors, $\cos(\theta_1) > 0$ donc θ_1 est compris entre 0 et $\pi/2$.
- $\theta_2 < \theta_1$ si $\sqrt{2gl} < v_0 < v_1$: alternance de régime pendulaire et de chute libre. Alors, $\cos(\theta_2) < 0$ donc θ_2 est compris entre $\pi/2$ et π .

Reste à calculer v_1 , la vitesse qui sépare le régime d'alternance avec le régime révolutif. Ce dernier nécessite que la vitesse **et** la tension ne s'annulent jamais, soit respectivement $v_0 > \sqrt{4gl}$ et $v_0 > \sqrt{5gl}$. C'est cette dernière condition, la plus restrictive, qui compte.

En résumé :

- Si $0 < v_0 < \sqrt{2gl}$, le régime est pendulaire : le pendule oscille entre $-\theta_1$ et θ_1 avec $0 < \theta_1 < \pi/2$.
- Si $\sqrt{2gl} < v_0 < \sqrt{5gl}$, le régime change au cours du mouvement : lorsque $\theta = \theta_2$ avec $\pi/2 < \theta_2 < \pi$, le fil se détend et le point M part selon une trajectoire parabolique, en chute libre.
- Si $\sqrt{5gl} < v_0$, le régime est révolutif.

Systèmes conservatifs à un degré de liberté — Oscillateurs

CHAPITRE 12

Plan

12.1	Équilibre et énergie potentielle	186
12.2	Oscillateur en régime libre	188
12.3	Portrait de phase	189
	Synthèse	191
	Tests et exercices	192
	Corrigés des exercices	196

Introduction

Les mouvements de tout système conservatif à un degré de liberté, quand ils sont limités au voisinage d'une position d'équilibre stable, peuvent être décrits comme ceux d'un oscillateur harmonique. D'où la nécessité d'étudier ce système en profondeur, ainsi que les moyens de s'y ramener.

Prérequis

- PFD
- Énergie potentielle
- Résolution d'équations différentielles linéaires

Objectifs

- Étudier les critères d'équilibre et de stabilité dans le cas de mouvements à un degré de liberté
- Développer le modèle de l'oscillateur harmonique
- Introduire les profils d'énergie potentielle pour prévoir le caractère borné ou non d'un mouvement
- Approcher la notion de portrait de phase
- Étudier les oscillations libres avec amortissement

12.1 Équilibre et énergie potentielle

12.1.1 Propriétés fondamentales

Le paramètre de position (le degré de liberté) sera typiquement une longueur ou un angle. Pour l'exemple, nous prendrons une longueur x . La résultante des forces est notée $\vec{F}(x) = F(x)\vec{u}_x$ et est conservative, donc :

$$\frac{dE_p}{dx}(x) = -F(x)$$

Une position d'équilibre est un point d'abscisse x_{eq} où la force est nulle, donc l'énergie potentielle extrême. Choisissons l'origine des énergies potentielles telle que $E_p(x_{\text{eq}}) = 0$.

Définition

Caractérisation d'une **position d'équilibre** :

$$\frac{dE_p}{dx}(x_{\text{eq}}) = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{\text{eq}}) < 0 \quad E_p \text{ maximale, équilibre instable}$$

$$\text{ou} \quad \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{\text{eq}}) > 0 \quad E_p \text{ minimale, équilibre stable}$$

Pour la suite, posons :

$$k = \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{\text{eq}})$$

Ne mélangez pas les dérivées de E_p ! Pour les problèmes de stabilité, ce sont les dérivées par rapport au degré de liberté (ici x). Pour les théorèmes dynamiques des chapitres précédents, ce sont les dérivées temporelles.

Ce k n'est pas une constante de raideur ! C'est une grandeur abstraite associée à tout système au voisinage d'une position d'équilibre stable. Dans le cas d'un ressort idéal, elle s'identifie à la constante de raideur.

12.1.2 Étude graphique

Méthode 1 Exploiter un profil de potentiel

Un profil de potentiel est construit par analogie avec la situation d'une bille qui roule le long d'un relief. Il faut avoir en tête que les seules valeurs de x autorisées sont telles que $E_m \geq E_p(x)$ car $E_c \geq 0$.

- Le voisinage d'une position d'équilibre stable est un puits de potentiel. Il est entouré de barrières de potentiel. Si le système n'a pas assez d'énergie pour passer ces barrières, il est contraint à rester dans le puits (état lié). Sinon, il peut atteindre le sommet en gardant une énergie cinétique non nulle, donc avec de l'élan (état de diffusion).
- Le sommet d'une barrière de potentiel est une position d'équilibre instable.



Ce vocabulaire imagé est en fait abstrait ! Il n'y a pas forcément de vrai puits ou de vraie barrière. Par exemple, dans l'atome, une couche électronique est un puits de potentiel, ce qui explique qu'un électron peut s'y installer. Il n'y a pourtant aucun « trou »...

Exemple d'application

Un point matériel évolue dans un le profil de potentiel de la figure 12.1. Sa vitesse initiale est nulle et trois positions initiales sont envisagées (M_1 , M_2 et M_3 sur la figure). Discutez qualitativement l'évolution du mouvement.

Solution

Dans les trois cas, les seules parties de la courbe accessibles au mouvement sont telles que $E_p(x) \leq E_m$.

Identifiez rapidement deux positions d'équilibre, une stable (x_{eq1}) au fond d'un puits de potentiel et une instable (x_{eq2}) au sommet d'une barrière de potentiel.

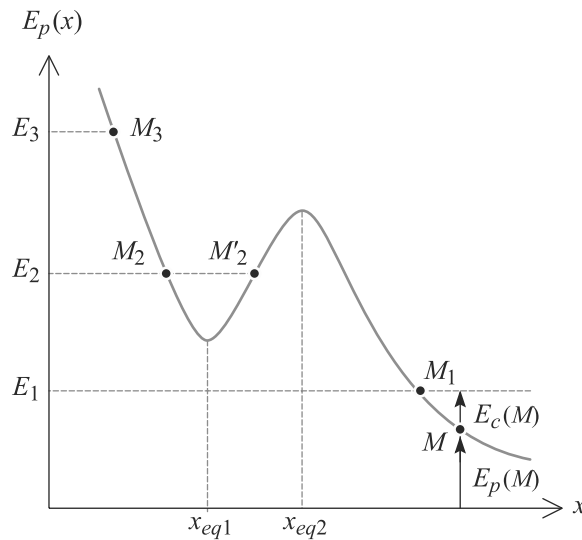


Figure 12.1 Exemple de profil de potentiel.

- À partir de M_1 , le point va « dévaler la pente » et évoluer sur $x \geq x_1$ (**état de diffusion**) sans s'arrêter ou revenir en arrière. E_p diminue donc E_c augmente : le mouvement est accéléré.
- S'il est lâché en M_2 , il se met en mouvement vers la position d'équilibre (E_c croissante, E_p décroissante), la passe sans s'arrêter à cause de son inertie puis monte la barrière de potentiel (E_c décroissante, E_p croissante). Arrivé en M'_2 , sa vitesse est nulle, il repart donc en arrière. Ainsi, il oscille autour de la position d'équilibre stable entre M_2 et M'_2 . C'est un **état lié**, $x_2 \leq x \leq x'_2$.
- S'il est lâché en M_3 , il est en état de diffusion : après être entré dans le puits de potentiel, il a suffisamment d'énergie pour en sortir en passant la barrière de potentiel puis continue vers les x croissants : $x \geq x_3$.

12.2 Oscillateur en régime libre

12.2.1 Oscillateur harmonique

Généralités

Définition

Tout système à un degré de liberté x (position ou angle) dont l'équation différentielle est de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ est un **oscillateur harmonique**.

Les solutions de cette équation différentielle sont sinusoïdales, reportez-vous à la fiche méthode 5 pour les diverses manières d'écrire ces solutions.

Par construction, la pulsation ω_0 des oscillations est indépendante des conditions initiales. C'est l'**isochronisme** des oscillations.



Tout système confiné au voisinage d'une position d'équilibre stable a un comportement d'oscillateur harmonique.



Un oscillateur harmonique est donc caractérisé par une fréquence fixe et unique. C'est cela que signifie l'adjectif « harmonique ».



Si l'équation est de la forme $\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0$, ce n'est plus du tout un oscillateur harmonique !



Comme précisé dans le chapitre précédent, en dérivant le théorème de l'énergie mécanique par rapport au temps, vous retrouvez le PFD.



Ce calcul repose sur le choix $E_p(x_{\text{eq}}) = 0$.



Cette équation est formellement identique à celle établie pour le circuit *RLC* dans le chapitre 8. La résolution est donc la même.



En régime pseudopériodique, $\omega \neq \omega_0$! Un oscillateur amorti n'oscille pas à sa pulsation propre. D'ailleurs ω n'est pas vraiment une pulsation car le mouvement n'est pas périodique : ω est une **pseudopulsation**.

Aspects énergétiques

Comme le système est oscillant, il est raisonnable de se ramener à l'étude sur une seule période. Le reste en découlera. L'énergie mécanique de l'oscillateur s'écrit :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v(t)^2 + \frac{1}{2} k x(t)^2 = \text{cst} \quad (12.1)$$

L'oscillateur harmonique présente une propriété énergétique remarquable : l'énergie mécanique d'un système se répartit **équitablement en moyenne** entre les formes cinétique et potentielle. La moyenne d'une énergie E sur une période est :

$$\langle E \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt \Rightarrow \langle E_c \rangle_T = \langle E_p \rangle_T = \frac{1}{4} k A^2 = \frac{E_m}{2}$$

12.2.2 Oscillateur amorti libre

Si l'oscillateur subit une force de frottement fluide linéaire (donc non conservative), il apparaît un terme proportionnel à $-\dot{x}$ dans le PFD. Une fois mise sous forme canonique, l'équation différentielle devient :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Les solutions possibles, comme expliqué dans la fiche méthode 5, dépendent du régime de fonctionnement de l'oscillateur : apériodique, pseudopériodique, critique.

12.3 Portrait de phase

Méthode 2 lire et construire un portrait de phase

Le **portrait de phase** d'un système est la trajectoire parcourue par le point (x, \dot{x}) lors du mouvement du système. Sachant que $\dot{x} > 0$ signifie que $x(t)$ est croissante, un portrait de phase ne peut être parcouru que dans le sens horaire !

- Trajectoire fermée : mouvement périodique ; non fermée : non périodique (souvent amorti).
- Trajectoire circulaire en variables réduites : mouvement sinusoïdal ; le rayon du cercle permet alors de remonter à l'énergie mécanique.
- Trajectoire symétrique par rapport à Ox : évolution réversible dans le temps ; non symétrique : évolution irréversible, typiquement à cause des frottements (dissipation d'énergie).

Celui de l'oscillateur harmonique est une ellipse (figure 12.2).

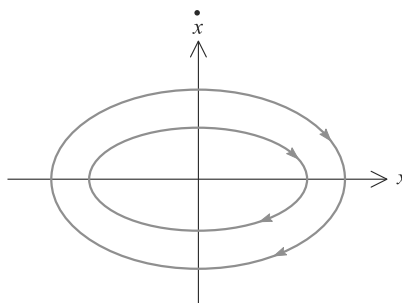


Figure 12.2 Portrait de phase de l'oscillateur harmonique en variables (x, \dot{x}) .

Il se ramène à un cercle en passant aux variables réduites $x, \dot{x}/\omega_0$ (figure 12.3).

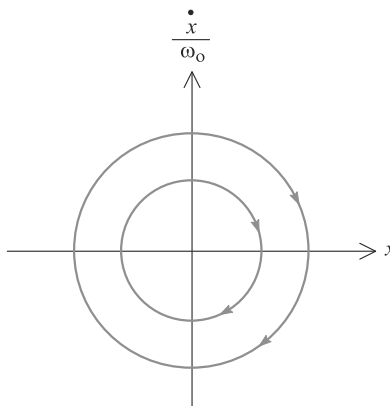


Figure 12.3 Portrait de phase de l'oscillateur harmonique en variables réduites.

Un peu de sens physique permet d'en déduire celui de l'oscillateur amorti (figures 12.4 et 12.5).

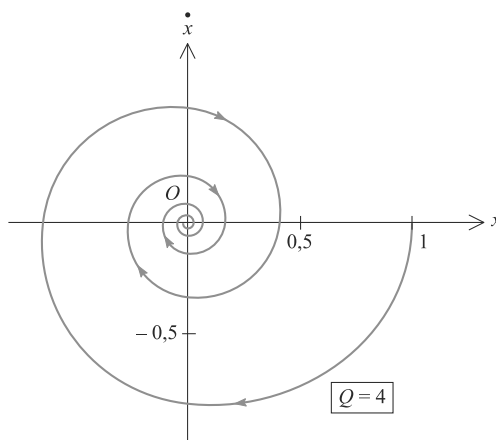


Figure 12.4 Portrait de phase d'un oscillateur amorti en régime libre pseudopériodique.

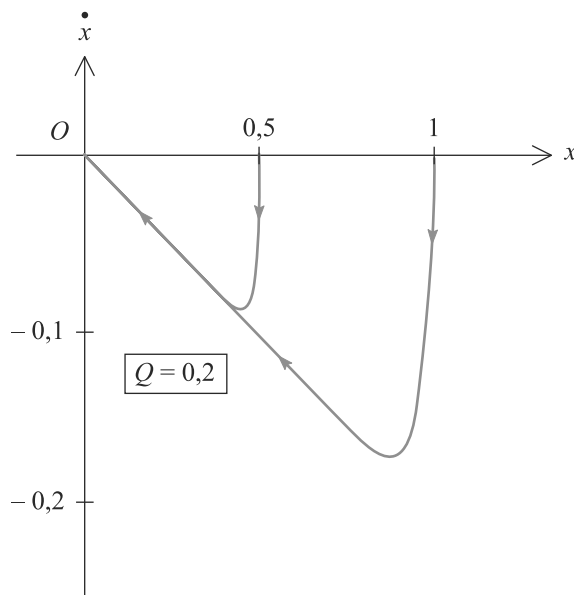


Figure 12.5 Portrait de phase d'un oscillateur amorti en régime aperiodique.

Synthèse

Savoirs

- Critères d'équilibre et de stabilité sur l'équation du mouvement et sur l'énergie potentielle
- Reconnaître un oscillateur harmonique et un oscillateur amorti à leurs équations du mouvement

Savoir-faire

- Trouver la période des petites oscillations autour d'une position d'équilibre
- Reconnaître le terme d'amortissement dans l'équation du mouvement d'un oscillateur amorti et retrouver le facteur de qualité Q
- Exploiter un profil d'énergie potentielle
- Tracer et/ou commenter un portrait de phase

Mots-clés

- Équilibre,
- stabilité,
- énergie potentielle,
- oscillateur harmonique,
- profil d'énergie potentielle,
- portrait de phase,
- oscillations libres et amorties,
- oscillateur harmonique amorti.

Tests de connaissances

- 12.1 Un équilibre est obtenu par $E_p = 0$.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 12.2 En un maximum d'énergie potentielle se trouve une position d'équilibre.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 12.3 Pour avoir un oscillateur harmonique, il suffit d'avoir une équation du mouvement sans terme du premier ordre.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 12.4 Dans une équation du mouvement du deuxième ordre, le terme du premier ordre représente la dissipation énergétique.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 12.5 Dans un oscillateur, plus le facteur de qualité est grand et moins le système est amorti.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 12.6 Il est impératif de passer par l'énergie potentielle pour étudier les positions d'équilibre d'un système.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 12.7 Les portraits de phase s'enroulent toujours dans le sens trigonométrique.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 12.8 Dans un oscillateur harmonique, il y a autant d'énergie cinétique que d'énergie potentielle.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

12.9 Anneau sur une double piste circulaire (D'après ATS.)

Un anneau, assimilé à un point matériel M de masse m , est enfilé sur un rail situé dans un plan vertical et constitué de deux parties circulaires (figure 12.6). Il y glisse sans frottement.

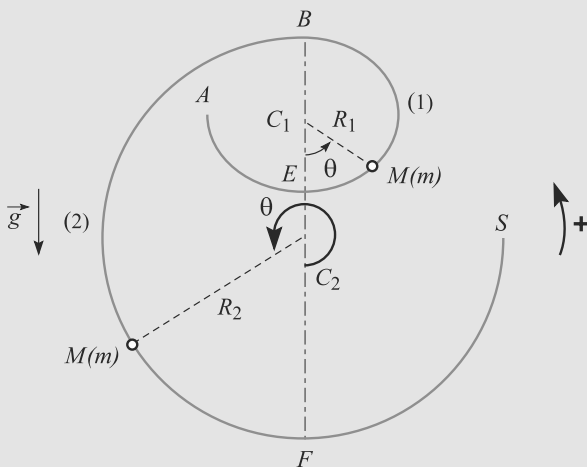


Figure 12.6 Anneau sur une piste circulaire.

Sa position est repérée par un angle θ admettant C_1 pour pôle sur la première partie de piste de rayon R_1 , et admettant C_2 pour pôle sur la deuxième partie de piste de rayon R_2 . Ainsi, θ varie de $-\pi/2$ à π sur la première partie, et de π à $5\pi/2$ sur la deuxième partie.

1. Exprimez son énergie potentielle de pesanteur en prenant l'origine au point B défini par $\theta = \pi$. Vous donnerez des expressions distinctes pour les deux parties de piste.
2. Tracez l'allure de $E_p(\theta)$.
3. Étudiez les positions d'équilibre de l'anneau ainsi que leur stabilité.
4. L'anneau est initialement en A ($\theta = -\pi/2$) et est lancé avec une vitesse initiale v_0 . Donnez la condition pour que l'anneau puisse atteindre F ($\theta = 2\pi$).
5. Cette condition étant remplie, calculez sa vitesse v_F en F .
6. À quelle condition sur v_0 l'anneau sort-il de la piste en S ($\theta = 5\pi/2$) ?

12.10 Tunnel terrestre

Un tunnel rectiligne a été creusé à travers la Terre, sans passer par O . Soit $d = 5000$ km la distance du tunnel au centre de la Terre (figure 12.7).

Un véhicule ponctuel M de masse m est abandonné sans vitesse initiale à une extrémité A du tunnel, dans lequel il se déplace sans frottement. Le mouvement dans le tunnel sera étudié suivant un axe Ox parallèle au tunnel.

Vous admettrez que le poids du véhicule peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{F} = -mg_0 \frac{r}{R_T} \vec{u}_r$$

où $\vec{OM} = r\vec{u}_r$, $R_T = 6400$ km est le rayon terrestre et $g_0 = 10 \text{ m.s}^{-2}$ est la pesanteur moyenne en surface.

1. Commentez cette expression du poids.
2. Déterminez l'expression de l'énergie potentielle en fonction de x pour le mouvement limité au tunnel. Vous prendrez comme référence $E_p(A) = mg_0 R_T/2$.
3. Par une méthode énergétique, déterminez la nature du mouvement.
4. Calculez la vitesse maximale de M au cours du mouvement. Application numérique.
5. Représentez et commentez le profil de potentiel $E_p(x)$. Décrivez le mouvement de M à partir de la position initiale A .

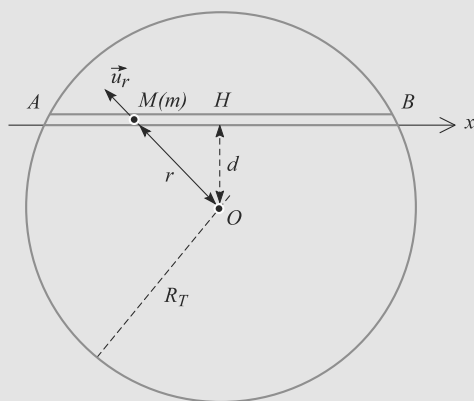


Figure 12.7 Tunnel terrestre.

12.11 Perle attachée à un ressort

Une perle M de masse m est enfilée sur un support circulaire de diamètre a et y glisse sans frottement. Elle est en outre reliée à un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle dont l'autre extrémité est attachée au support circulaire en A sur un diamètre horizontal (figure 12.8).

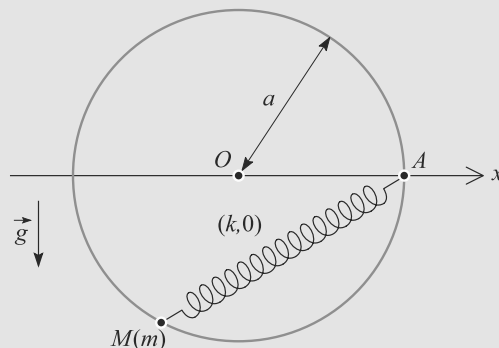


Figure 12.8 Perle attachée à un ressort.

1. Quel est le système de coordonnées adapté à la description du mouvement de M ?
2. Calculez l'énergie potentielle de M .
3. Quelles sont les positions d'équilibre de M sur le cercle ? Vérifiez la cohérence de ces résultats en étudiant les cas limites où l'une des forces domine l'autre.
4. Déterminez la position d'équilibre stable.
5. Déterminez la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.

Exercices d'approfondissement

12.12 Amortissement après un choc

(D'après ENSTIM)

On considère un plateau de masse M posé sur un ressort sans masse notable de raideur k , de longueur à vide L_0 et amorti par un fluide avec une force $\vec{F} = -\beta \vec{v}_p$ où \vec{v}_p est la vitesse du plateau et β est un coefficient constant et positif. Le plateau peut se déplacer verticalement dans le champ de pesanteur (figure 12.9).

1. Quelle est l'unité de β ?
2. Quelle est la longueur du ressort au repos ?

On laisse tomber un objet de masse m sur le plateau et il y reste collé après le choc. La vitesse communiquée à l'ensemble est alors de $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

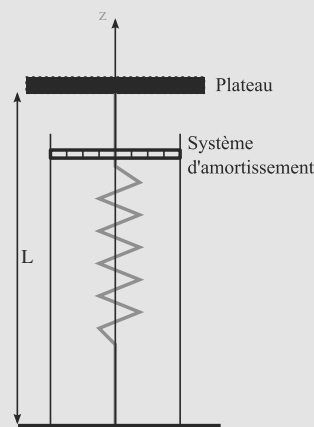


Figure 12.9 Suspension du plateau.

3. Déterminer l'équation du mouvement résultant du choc.
4. Déterminer la nature du régime transitoire que l'on observe.
5. Déterminer la longueur L_e du ressort à la fin de la phase transitoire. On note $x(t) = L - L_e$. Quelle est l'équation différentielle en x qui régit le mouvement ?
6. Donner la solution sous la forme $x(t) = [a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \sin(\omega t)] \cdot \exp(-t/\tau)$ en déterminant les valeurs numériques des paramètres a , b , ω et τ . Quelles sont les significations physiques des quantités $2\pi/\omega$ et τ ?

Données : $M = 230 \text{ kg}$;

$m = 20 \text{ kg}$;

$k = 12\,500 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$;

$L_0 = 1 \text{ m}$;

$\beta = 15,3 \text{ U.S.I.}$

$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

12.13 Étude du pendule simple

(D'après Mines Alès.)

Considérons un point matériel M de masse m accroché à un point fixe O par l'intermédiaire d'une tige inextensible de longueur l et de masse nulle. Les notations sont regroupées figure 12.10. La masse est lâchée d'un angle θ_0 sans vitesse initiale. Jusqu'à mention du contraire, le système est considéré comme non amorti.

1. Étude des oscillations quelconques.
 - a) Exprimez l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de x puis de θ .
 - b) Montrez que l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.
 - c) Déterminez l'équation différentielle du mouvement par deux méthodes : par le principe fondamental de la dynamique et par un théorème énergétique.

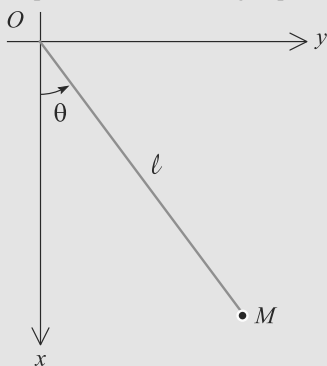


Figure 12.10 Schéma d'un pendule simple, appelé aussi pendule pesant.

- d) En supposant que les élongations angulaires sont faibles, montrez que l'équation différentielle est appro-

chée par celle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 dont vous donnerez l'expression en fonction de g et l .

- e) Déduisez-en la loi horaire $\theta(t)$.

2. À l'instant $t = 0$, le point matériel est lancé de M_0 ($\theta_0 = 0$) avec une vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}_0$. Nous supposons que le fil reste tendu pour tout θ . Nous poserons $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.

Le portrait de phase du pendule simple pour diverses valeurs de $\dot{\theta}_0$ est représenté figure 12.11.

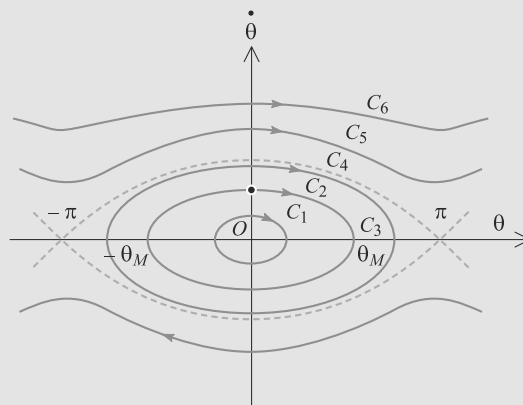


Figure 12.11 Portrait de phase du pendule simple pour diverses conditions initiales.

- a) Rappelez l'expression de l'énergie mécanique E_m du pendule simple en prenant une énergie potentielle de pesanteur nulle au point M_0 . Décrivez les mouvements possibles du pendule à partir de M_0 suivant les valeurs de $\dot{\theta}_0$.
- b) Quelle est l'équation d'une trajectoire de phase en coordonnées $(\theta, \dot{\theta}/\omega_0)$? Précisez le type de mouvement du pendule correspondant aux trajectoires C_1 , C_2 , C_4 et C_5 .
3. Lorsque l'on enregistre expérimentalement $\theta(t)$, on constate que l'amplitude de θ décroît lentement. On interprète ce résultat par la présence de frottements que l'on modélise par $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ où \vec{v} est la vitesse du point M et α une constante positive.
 - a) Établissez l'équation différentielle du second ordre vérifiée par θ . En vous limitant aux petits angles, écrivez l'équation sous la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = 0$$

Donnez l'expression de τ et son interprétation physique.

b) À quelle condition obtient-on un régime pseudo-périodique ? Dans le cadre de ce régime, calculez la pseudo-pulsation ω et la pseudo-période T .

c) Calculez le décrément logarithmique δ en fonction de T et τ .

d) La figure 12.12 représente les variations de θ avec le temps. On précise les coordonnées de quatre points particuliers dont les coordonnées sont précisées dans le tableau ci-dessous.

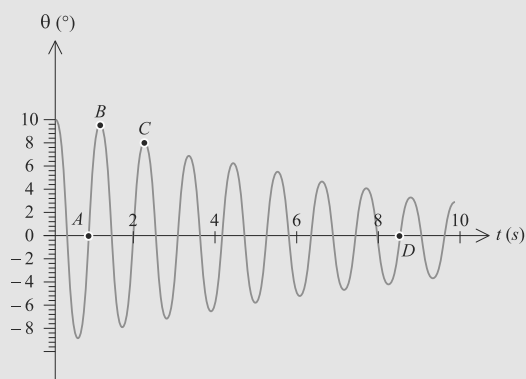


Figure 12.12 Enregistrement du régime pseudo-périodique.

Points	A	B	C	D
t (s)	0,53	1,1	2,2	8,25
θ (°)	0	8,95	8,02	0

La masse m vaut 470 g. Calculez numériquement, à partir des valeurs expérimentales, le décrément logarithmique δ , la pseudo-période T , le temps caractéristique τ et la constante α .

■ ■ ■

12.14 Microscope à force atomique

(D'après E3A PC.)

Le microscope à force atomique est un outil d'étude de surface à l'échelle atomique : une pointe très fine parcourt la surface à étudier, à quelques dizaines de nanomètres de distance. En étudiant la force exercée par la surface sur la pointe, il est possible de remonter à des propriétés topographiques ou électromagnétiques de la surface.

Dans cet exercice, la surface à étudier sera supposée plane et la pointe sera modélisée par un ressort (de longueur à vide nulle) et une masse, comme indiqué figure 12.13.

La position de la pointe est notée $z(t)$. La pesanteur est négligée. La projection sur l'axe Oz de la force exercée par la

surface sur la pointe est notée $F(z)$. Elle dérive d'une énergie potentielle notée $U(z)$ définie par :

$$U(z) = \frac{A}{z^7} - \frac{B}{z}$$

avec $A = 10^{-88} \text{ J.m}^7$ et $B = 10^{-29} \text{ J.m}$.

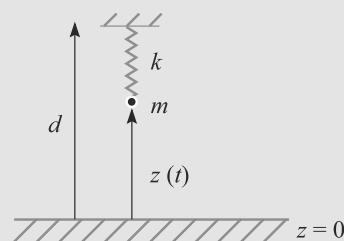


Figure 12.13 Microscope à force atomique.

1. En supposant la distance d fixée, écrivez la condition d'équilibre de la pointe.
2. Soit z_0 une position d'équilibre de la pointe. Montrez que la condition de stabilité de cet équilibre s'écrit :

$$k + \frac{d^2 U}{dz^2}(z_0) > 0$$

3. a) Représentez graphiquement $U(z)$ et $F(z)$. Commentez.
b) Proposez une méthode graphique pour déterminer les positions d'équilibre de la pointe.
c) Montrez que toutes les positions d'équilibre sont stables si k est supérieure à une valeur critique k_c que vous donnerez analytiquement et numériquement.
4. Utilisation de la pointe pour étudier la forme d'une surface.

La pointe est en équilibre à une distance z_0 de la surface et cette position d'équilibre se trouve dans la partie répulsive de la courbe ($F(z_0) > 0$). Une variation δd de la distance d entraîne une variation δz de z telle que :

$$\delta z = \delta d \left(1 - \frac{1}{k} \frac{dF}{dz}(z_0) \right) \quad (12.2)$$

Données : $z_0 = 0,1 \text{ nm}$ et $k = 100 \text{ N.m}^{-1}$.

- a) Cet équilibre est-il stable ?
- b) Évaluez numériquement le coefficient de proportionnalité entre δd et δz .
- c) Déduisez-en que, dans ces conditions, la mesure de l'allongement du ressort, lorsque la pointe parcourt la surface, donne directement la topographie de cette surface.

12.1

Faux ! Il suffit que E_p soit stationnaire (passe par un minimum ou un maximum).

12.2

Vrai : il s'agit d'un équilibre instable.

12.3

Faux, il faut aussi que les signes des deux coefficients de l'équation différentielle du second ordre soient identiques.

12.4

Vrai, si son coefficient est de même signe que les deux autres (sinon c'est un terme d'amplification).

12.5

Vrai, c'est ce que mesure Q .

12.6

Faux, il est possible de faire l'étude sur la force résultante ou sur l'équation du mouvement.

12.7

Faux ! Toujours dans le sens horaire.

12.8

Vrai, seulement si nous prenons $E_p = 0$ à la position d'équilibre et en moyenne dans le temps.

12.9

Anneau sur une double piste circulaire

Cet exercice fait appel à des raisonnements proches du cours, mais le degré de liberté est angulaire et non linéaire, ce qui change légèrement les calculs.

1. L'énergie potentielle est de la forme $E_p = mgz$ avec z l'altitude. Avec l'origine des altitudes en B , nous avons $z = -R(1 + \cos(\theta))$ où $R = R_1$ sur la première partie et $R = R_2$ sur la deuxième. Finalement :

$$E_p = -mgR_1(1 + \cos(\theta)) \quad \text{pour } -\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

$$E_p = -mgR_2(1 + \cos(\theta)) \quad \text{pour } \pi < \theta < 2\pi$$

2. Voir figure 12.14.
3. Les positions d'équilibre sont visibles sur la figure.
 $E(\theta = 0)$ et $F(\theta = 2\pi)$ sont des minima d'énergie potentielle donc correspondent à des positions d'équilibre stable.
 $B(\theta = \pi)$ est un maximum d'énergie potentielle et donc une position d'équilibre instable.

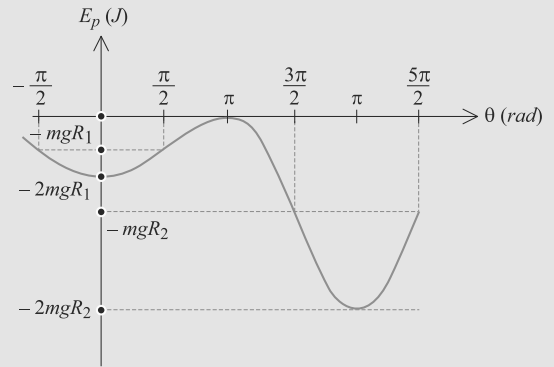


Figure 12.14 Profil de potentiel sur la double piste circulaire.

4. Pour pouvoir atteindre F , l'anneau doit pouvoir atteindre B . Le cas limite correspond à un passage en B avec une vitesse nulle. La conservation de l'énergie mécanique entre A et B s'écrit donc :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mgR_1 = 0 + 0$$

Cela donne la vitesse minimale donc le résultat demandé est :

$$v_0 \geq \sqrt{2gR_1}$$

5. La conservation de l'énergie mécanique entre A et F donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR_1 &= \frac{1}{2}mv_F^2 - 2mgR_2 \\ \Rightarrow v_F^2 &= v_0^2 + 2g(2R_2 - R_1) \end{aligned}$$

6. Si l'anneau a pu franchir B , il passera nécessairement S puisque S est à une altitude inférieure à B . Donc la condition est la même que précédemment :

$$v_0 \geq \sqrt{2gR_1}$$

12.10

Tunnel terrestre

La seule difficulté de cet exercice est d'arriver à le formuler comme un problème à un seul degré de liberté. D'une formule à l'autre, vous pourrez faire apparaître l'abscisse x dans le tunnel, la distance r au centre de la Terre ou l'angle polaire θ . Ces variables ne sont pas indépendantes, vous pouvez donc en choisir une et tout ramener à celle-ci.

Comment choisir celle que vous gardez ? Le mouvement est rectiligne, donc le paramètre naturellement associé à la droite du mouvement, ici x , est certainement le choix le plus simple.

En outre, attention aux réflexes mal placés. Le poids est habituellement noté $-mg\vec{u}_z$ parce qu'il est supposé constant, autrement dit parce que nous négligeons la courbure de la Terre (variation de direction de \vec{g}) et supposons les variations d'altitude faible (variation de norme de \vec{g}). Ce n'est pas le cas ici.

La figure 12.15 résumé les notations.

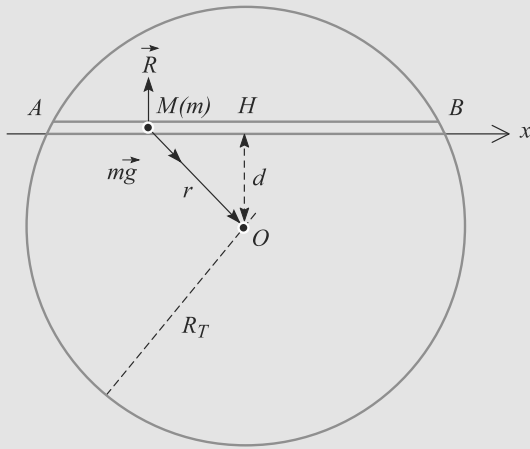


Figure 12.15 Mouvement d'un mobile dans un tunnel terrestre ne passant pas par le centre de la Terre.

1. L'expression habituelle du poids $\vec{F} = m\vec{g}$ est en général utilisée en négligeant la courbure de la Terre (variations de la direction de \vec{g}) et en supposant les variations d'altitude faibles (variations de la norme de \vec{g}). L'expression donnée ici ne fait pas ces approximations.

En outre, l'expression habituelle suppose que l'objet se trouve au voisinage ou au-dessus de la surface, autrement dit que l'attraction gravitationnelle vient uniquement « d'en dessous ». Ici, le véhicule est sous Terre, il subit une attraction gravitationnelle de tous les côtés, même si sa résultante reste dirigée vers le centre de la Terre. Il n'est pas choquant de trouver une dépendance autre que $1/r^2$ pour cette force.

2. Le mouvement est rectiligne (le long du tunnel). Notons \vec{u}_x le vecteur unitaire de cet axe. Soit un petit déplacement $d\vec{OM}$ du véhicule dans le tunnel : $d\vec{OM} = dx\vec{u}_x$. Le travail élémentaire sur ce petit déplacement vaut :

$$\begin{aligned}\delta W &= \vec{F} \cdot d\vec{OM} \\ &= \vec{F} \cdot dx\vec{u}_x \\ \delta W &= -\frac{mg_0}{R_T} dx \vec{OM} \cdot \vec{u}_x\end{aligned}$$

$x = \vec{OM} \cdot \vec{u}_x$ est l'abscisse du véhicule dans le tunnel, avec l'origine des x au point H. D'où :

$$\begin{aligned}dE_p &= -\delta W = \frac{mg_0}{R_T} x dx \\ \Rightarrow E_p(x) &= \frac{mg_0}{2R_T} x^2 + C\end{aligned}$$

La valeur de $E_p(A)$ est donnée par l'énoncé et permet de calculer la constante d'intégration C :

$$\begin{aligned}x_A^2 &= R_T^2 - d^2 \\ \Rightarrow E_p(x) &= \frac{mg_0}{2R_T} (x^2 + d^2)\end{aligned}$$

3. En l'absence de forces dissipatives, nous pouvons écrire la conservation de l'énergie mécanique puis la dériver pour obtenir l'équation du mouvement :

$$\begin{aligned}E_m &= \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{mg_0}{2R_T} (x^2 + d^2) \\ \Rightarrow m\ddot{x} + \frac{mg_0}{R_T} x &= 0\end{aligned}$$

D'où l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{g_0}{R_T}}$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique. Livré à l'attraction gravitationnelle, le véhicule va donc osciller dans le tunnel.

4. La conservation de l'énergie mécanique donne le résultat très rapidement. Pour M d'abscisse x :

$$\begin{aligned}E_m(A) &= \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} m g_0 R_T = \frac{1}{2} m g_0 R_T \\ E_m(M) &= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{m g_0}{2 R_T} (x^2 + d^2)\end{aligned}$$

La conservation $E_m(A) = E_m(M)$ donne :

$$v^2 = g_0 \left(R_T - \frac{d^2}{R_T} - \frac{x^2}{R_T} \right)$$

Donc la vitesse est maximale lorsque $x = 0$, quand le véhicule est au plus proche du centre de la Terre.

Application numérique : $v_{\max} = 5.10^3 \text{ m.s}^{-1}$.

5. D'après son expression, l'énergie potentielle a un profil parabolique : voir la figure 12.16.

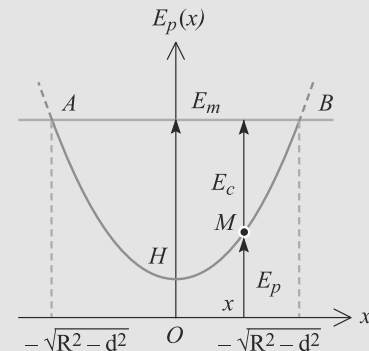


Figure 12.16 Profil parabolique de l'énergie potentielle. Le minimum correspond à une position d'équilibre stable, autour de laquelle oscille le point matériel.

Le véhicule part de A avec une énergie cinétique nulle et une énergie potentielle maximale (dit autrement, son énergie mécanique est entièrement sous forme potentielle). Puis il cherche à minimiser son énergie potentielle en la convertissant en énergie cinétique. Il prend donc de la vitesse, jusqu'en H où sa vitesse est maximale (toute son énergie mécanique est sous forme cinétique). H est bien un point d'énergie potentielle minimale.

Passé H, emporté par son élan, le véhicule commence à perdre de la vitesse. Il convertit son énergie cinétique en énergie potentielle jusqu'à s'arrêter, en B. Là il est dans une situation symétrique de celle en A et il rebrousse chemin.

12.11

Perle attachée à un ressort

Cet exercice met en jeu directement les résultats de cours et ne présente pas de difficulté technique. Mais, en lisant l'énoncé, vous devez remarquer qu'il y a deux forces conservatives, donc deux énergies potentielles, différentes.

C'est sur cette somme d'énergies potentielles que va porter le raisonnement.

1. Le mouvement étant circulaire, les coordonnées polaires sont les plus adaptées à sa description. L'angle θ sera pris par rapport à la verticale ascendante.
2. L'énergie potentielle est la somme de celle associée au poids et de celle associée au ressort :

$$E_p = -mgz + \frac{1}{2}kl^2$$

car l'axe vertical Oz est descendant et le ressort a une longueur à vide nulle. Nous lisons sur la figure $z = -a \cos(\theta)$. Exprimons la longueur $l = AM$ en fonction de θ :

$$\begin{aligned}\vec{AM} &= \vec{AO} + \vec{OM} \\ \Rightarrow AM^2 &= AO^2 + OM^2 + 2\vec{AO} \cdot \vec{OM} \\ \Rightarrow l^2 &= a^2 + a^2 + 2a^2 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2a^2(1 + \sin(\theta))\end{aligned}$$

D'où l'énergie potentielle :

$$E_p = mga \cos(\theta) + ka^2(1 + \sin(\theta))$$

3. Cherchons les valeurs de θ pour lesquelles E_p est extrémale.

$$\begin{aligned}\frac{dE_p}{d\theta}(\theta) &= -mga \sin(\theta) + ka^2 \cos(\theta) = 0 \\ \Rightarrow \tan(\theta) &= \frac{ka}{mg}\end{aligned}$$

D'où les deux positions d'équilibre :

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \arctan\left(\frac{ka}{mg}\right) \\ \theta_2 &= \pi + \arctan\left(\frac{ka}{mg}\right)\end{aligned}$$

Si la force de rappel est négligeable devant le poids, ces valeurs deviennent $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = \pi$, ce qui est raisonnable : il s'agit du point le plus haut et du point le plus bas sur le cercle.

Si le poids est négligeable devant la force de rappel, $\theta_1 = \pi/2$ et $\theta_2 = -\pi/2$, ce qui correspond bien à $l = AM$ minimale et maximale.

4. Calculons la dérivée seconde de E_p pour $\tan(\theta) = ka/mg$:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta) &= -mga \cos(\theta) - ka^2 \sin(\theta) \\ &= -\left(mga + \frac{k^2 a^3}{mg}\right) \cos(\theta)\end{aligned}$$

Or, $\cos(\theta_1) > 0$ et $\cos(\theta_2) < 0$. Donc θ_1 est une position d'équilibre instable et θ_2 une position d'équilibre stable.

C'est raisonnable : en θ_2 les deux forces travaillent en sens inverse et ont donc la possibilité de s'équilibrer, tandis qu'elles travaillent dans le même sens en θ_1 .

5. L'énergie mécanique s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + E_p(\theta)$$

Sa conservation donne :

$$\begin{aligned}\frac{dE_m}{dt}(\theta) &= ma^2\ddot{\theta} + \dot{\theta} \frac{dE_p}{d\theta}(\theta) \\ \Rightarrow ma^2\ddot{\theta} - mga \sin(\theta) + ka^2 \cos(\theta) &= 0\end{aligned}$$

Posons $\theta = \theta_2 + \varepsilon$ où ε représente le petit déplacement autour de la position d'équilibre θ_2 . Transformons les fonctions trigonométriques pour y faire des développements limités :

$$\begin{aligned}\sin(\theta_2 + \varepsilon) &= \cos(\varepsilon) \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) \sin(\varepsilon) \\ &\approx \sin(\theta_2) + \varepsilon \cos(\theta_2) \\ \cos(\theta_2 + \varepsilon) &= \cos(\theta_2) \cos(\varepsilon) - \sin(\theta_2) \sin(\varepsilon) \\ &\approx \cos(\theta_2) - \varepsilon \sin(\theta_2)\end{aligned}$$



Reportez-vous la fiche méthode 8 pour plus de détail sur les développements limités.

En outre, $\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$, d'où :

$$\begin{aligned}\ddot{\varepsilon} + \frac{-mga \cos(\theta_2) - ka^2 \sin(\theta_2)}{ma^2} \varepsilon \\ + \frac{-mga \sin(\theta_2) + ka^2 \cos(\theta_2)}{ma^2} = 0\end{aligned}$$

Le dernier terme est nul par définition de θ_2 donc ceci est bien l'équation d'un oscillateur harmonique oscillant autour de $\varepsilon = 0$ (donc autour de θ_2) avec la pulsation :

$$\omega_0 = \sqrt{-\frac{mga \cos(\theta_2) + ka^2 \sin(\theta_2)}{ma^2}}$$



Le terme sous la racine est bien positif, car $\cos(\theta_2)$ et $\sin(\theta_2)$ sont négatifs.

En exploitant :

$$\tan(\theta_2) = \frac{ka}{mg}$$

$$\cos(\theta_2)^2 = \frac{1}{1 + \tan(\theta_2)^2}$$

avec $\cos(\theta_2) < 0$, il vient la période associée :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g} \left(1 + \frac{k^2 a^2}{m^2 g^2}\right)^{-\frac{1}{4}}}$$

12.12

Amortissement après un choc

Autour d'un problème de forme originale se développent des questions très classiques. Entre les changements de variables que l'on peut faire sur les oscillateurs et le développement de la solution pseudo-périodique d'un oscillateur amorti, on doit être en terrain familier.

- On obtient l'unité de β en considérant la dimension de βv , force homogène à mg par exemple. β est donc homogène à mg/v soit m/t : On peut donc exprimer β en $kg \cdot s^{-1}$.
- Le système étant à l'équilibre, la somme des forces qu'on lui applique est donc nulle. La tension compense alors le poids : $F_z = 0 = -Mg - k(L_{e1} - L_0)$ où L_{e1} est la longueur à l'équilibre du ressort soumis au poids du plateau seul. On obtient donc :

$$L_{e1} = L_0 - \frac{Mg}{k}.$$

- On applique le PFD au système {plateau + masse} dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen : $(M+m) \frac{d\vec{v}}{dt} = -(M+m)\vec{g} - k(L - L_0)\vec{z} - \beta\vec{v}$. On projette alors sur Oz en tenant compte du fait que $z = L$ en prenant l'origine au bas du ressort :

$$(M+m)\ddot{z} = -(M+m)g - k(L - L_0) - \beta\dot{z} \text{ que l'on ordonne en } \ddot{z} + \frac{\beta}{M+m}\dot{z} + \frac{k}{M+m}z = -g + \frac{k}{M+m}L_0.$$

- Pour connaître le type de régime transitoire que connaît le système, il faut déterminer le signe du discriminant du polynôme caractéristique associé à l'équation homogène.

Le polynôme s'écrit : $r^2 + \frac{\beta}{M+m}r + \frac{k}{M+m} = 0$. Numériquement, on trouve $\frac{\beta}{M+m} = \frac{15,3}{250} = 61,2 \cdot 10^{-3} s$ et $\frac{k}{M+m} = \frac{12500}{250} = 50 s^{-2}$. On en déduit $\Delta < 0$. Le régime est donc pseudo-périodique.

- Dans l'équation du mouvement, on lit la position en annulant vitesse et accélération :

$$\frac{k}{M+m}z_e = -g + \frac{k}{M+m}L_0 \text{ et } z_e = L_e = L_0 - (M+m)g/k. \text{ En faisant la différence entre l'équation du mouvement et celle}$$

d'équilibre, on trouve : $\ddot{z} + \frac{\beta}{M+m}\dot{z} + \frac{k}{M+m}(z - L_e) = 0$ et donc :

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{M+m}\dot{x} + \frac{k}{M+m}x = 0.$$

- Le polynôme caractéristique du 4. donne les solutions :

$$r = -\frac{\beta}{2(M+m)} \pm j \sqrt{\frac{k}{M+m} - \frac{\beta^2}{4(M+m)^2}} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega.$$

On a donc les solutions $x(t) = \exp(-\frac{t}{\tau})(\alpha \exp(j\omega t) + \gamma \exp(-j\omega t))$ mais $x(t)$ est une fonction réelle (donc à partie imaginaire nulle). On identifie donc bien $\tau = \frac{2(M+m)}{\beta}$,

$\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m} - \frac{\beta^2}{4(M+m)^2}}$ et $x(t) = \exp(-\frac{t}{\tau})(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t))$. a et b sont déterminés par les conditions initiales : $x(0) = L_{e1} - L_e = a$ et $dx/dt(0) = 0 = -a/\tau + b\omega$ soit :

$$a = L_{e1} - L_e = \frac{mg}{k} \text{ et } b = (L_{e1} - L_e) \frac{\omega}{\tau} = \frac{mg\omega}{k\tau}.$$

Numériquement, on obtient : $\tau = 32,7 s$; $\omega = 7,07 \text{ rad} \cdot s^{-1}$; $a = 1,57 \text{ cm}$; $b = 0,34 \text{ mm}$.

τ est le temps caractéristique du régime transitoire et $2\pi/\omega$ et la pseudo-période du mouvement.

12.13

Étude du pendule simple

Malgré sa longueur, ce problème est relativement simple car proche du cours. Un survol rapide de l'énoncé doit vous donner le menu : d'abord les oscillations non amorties, avec un passage obligé par les petites oscillations (et donc, nécessairement, un oscillateur **harmonique**), puis les oscillations amorties par frottement fluide.

C'est donc tout le cours de ce chapitre qui est exploré ici, dans le cas où le degré de liberté est un angle et non une longueur (ce qui, formellement, ne change rien).

- a) En choisissant pour origine $E_p(x=0) = 0$:

$$E_p = -mgx = -mgl \cos(\theta)$$

b) La masse n'est soumise qu'à son poids $m\vec{g}$, force conservative, et à la tension du pendule \vec{T} , qui ne travaille pas. Donc son énergie mécanique est un invariant du mouvement.

c) Commençons par retrouver l'équation du mouvement via le PFD.

Le PFD s'écrit $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$. Puisque l reste constant, travaillons en coordonnées polaires :

$$m\vec{g} = mg(\cos(\theta)\vec{u}_r - \sin(\theta)\vec{u}_\theta)$$

$$\vec{T} = -T\vec{u}_r$$

Sa projection sur \vec{u}_θ donne :

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

Utilisons maintenant la méthode énergétique.

Le mouvement est circulaire, donc $\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta$. Donc l'énergie mécanique s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos(\theta) \quad (12.3)$$

Sa variation temporelle est nulle donc :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta} \sin(\theta)$$

$$= ml^2\dot{\theta} \left(\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) \right)$$

La nullité du terme entre parenthèses redonne l'équation du mouvement.

d) Aux petits angles, le développement limité au premier ordre $\sin(\theta) \approx \theta$ donne :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

e) La solution de cette équation est, compte tenu des conditions initiales :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$$

2. a) Reprenons l'expression de l'énergie mécanique (12.3). Le choix d'origine de l'énergie potentielle est modifié :

$$E_p(\theta) = -mgl \cos(\theta) + A$$

avec $E_p(0) = 0$

d'où l'énergie potentielle :

$$E_p(\theta) = mgl(1 - \cos(\theta))$$

et l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos(\theta))$$

L'évolution dépend ensuite de la vitesse initiale $\dot{\theta}_0$. Avec les nouvelles conditions initiales, les calculs précédents donnent :

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 + 2\omega_0^2(\cos(\theta) - 1) \quad (12.4)$$

- Si la vitesse initiale est assez grande, le pendule peut arriver tout en haut avec une vitesse non nulle (son E_p est maximale égale à $2mgl$ et son E_c encore non nulle en ce point). Alors, il fera des tours complets autour de O , sans jamais s'arrêter ni jamais changer de sens de rotation. L'équation (12.4) nous montre que $\dot{\theta}^2$ ne s'annule jamais si $\dot{\theta}_0 > 2\omega_0$. C'est le régime révolutif.

- Si la vitesse initiale est moins grande, autrement dit si $E_m < 2mgl$, le pendule ne peut pas fonctionner en régime révolutif. Son énergie cinétique est obligée de s'annuler pour un θ inférieur à π . Le pendule doit alors osciller, c'est le régime pendulaire, pour $\dot{\theta}_0 < 2\omega_0$.

- Si la vitesse initiale est très faible ($\dot{\theta}_0 \ll \omega_0$), les oscillations prennent un caractère harmonique.

b) L'équation de la trajectoire est directement donnée par (12.4).

- Trajectoire C_1 : le portrait de phase est celui d'un oscillateur harmonique (ellipse au cercle en coordonnées normalisées). D'ailleurs il est de faible amplitude, ce qui correspond bien à l'approximation des petites oscillations.

- Trajectoire C_2 : le régime est pendulaire. Ce n'est plus exactement une ellipse, donc l'approximation des petites oscillations ne s'applique plus, mais la vitesse angulaire peut toujours s'annuler.

- Trajectoire C_4 : c'est la trajectoire limite, où le point matériel a juste assez d'énergie pour arriver tout en haut avec une vitesse nulle. C'est un cas pathologique, car il est impossible de savoir de quel côté il va repartir ensuite (position d'équilibre instable).

- Trajectoire C_5 : la vitesse angulaire ne s'annule jamais, c'est le régime révolutif. La courbe ne doit être considérée que dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$, le mouvement restant périodique.

3. a) Travaillons encore en coordonnées polaires. En plus des forces précédentes, il faut ajouter la force de frottement fluide. Le mouvement étant toujours circulaire, $\vec{f} = -\alpha l \dot{\theta} \vec{u}_\theta$. La projection sur \vec{u}_θ donne alors :

$$ml\ddot{\theta} + \alpha l \dot{\theta} + mg \sin(\theta) = 0$$

qui, aux petits angles, se réduit à :

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (12.5)$$

$$\text{avec} \quad \tau = \frac{2m}{\alpha} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (12.6)$$

τ , par analyse dimensionnelle, est un temps lié à l'amortissement. Il s'interprète donc comme un temps caractéristique d'amortissement.

- b) Le discriminant de l'équation caractéristique associée à l'équation (12.5) doit être strictement négatif pour avoir un régime pseudopériodique :

$$\Delta = \frac{4}{\tau^2} - 4\omega_0^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 \tau > 1$$

Alors la pseudo-pulsation et la pseudo-période sont :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{(\omega_0 \tau)^2}}}$$

c) Sachant que θ est de la forme :

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi)$$

le décrétement logarithmique vaut :

$$\delta = \ln \left(\frac{\theta_0 e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi)}{\theta_0 e^{-(t+T)/\tau} \cos(\omega(t+T) + \varphi)} \right) \quad (12.7)$$

$$= \ln \left(\frac{\cos(\omega t + \varphi)}{e^{-T/\tau} \cos(\omega(t+T) + \varphi)} \right) \quad (12.8)$$

$$\delta = \frac{T}{\tau} \quad (12.9)$$

d) Les points B et C sont deux extrema successifs donc $\delta = \ln(\theta_B/\theta_C) \approx 0,11$.

Les points A et D peuvent servir à repérer des débuts de périodes. Il y a 7 pseudo-périodes entre les deux, donc $t_D - t_A = 7T$ et $T \approx 1,10$ s.

La relation (12.7) permet d'en déduire $\tau \approx 10,1$ s.

Enfin, le coefficient de frottement vaut

$$\alpha = 2m/\tau \approx 9,35 \cdot 10^{-2} \text{ kg.s}^{-1}.$$

12.14 Microscope à force atomique

Ce problème est riche et assez éloigné des exemples classiques vus en cours. Ne l'abordez que lorsque vous êtes à l'aise avec ce qui précède. Cependant, toutes ses articulations se trouvent dans le cours.

Dans votre cours, vous avez vu que la courbe d'énergie potentielle d'un système conservatif fournit de nombreuses informations par la présence d'extrema locaux. Même si vous avez surtout vu des profils de potentiel paraboliques (comme l'oscillateur harmonique), les résultats de cours sont applicables à tout profil.

Remarque : l'équation (12.2) est tout à fait démontrable avec votre niveau de connaissance, par développement limité du résultat de la première question. D'ailleurs l'énoncé d'origine le demandait.

1. À l'équilibre, la somme des forces est nulle :

$$F(z) \vec{e}_z + k(d-z) \vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\Rightarrow F(z) + k(d-z) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{dU}{dz}(z) + k(d-z) = 0$$



La longueur à vide de ce ressort est nulle d'après l'énoncé. Elle n'est donc pas écrite.

2. L'énergie potentielle étant additive, elle s'écrit comme la somme de l'énergie potentielle dont dérive $F(z)$ et de l'énergie potentielle élastique :

$$E_p(z) = U(z) + \frac{1}{2} k(d-z)^2$$

Sa dérivée seconde doit être positive pour avoir un équilibre stable.

$$\frac{d^2 E_p}{dz^2}(z_0) = \frac{d^2 U}{dz^2}(z_0) + k > 0$$

qui est bien la condition demandée.

3. a) Voir figures 12.17 et 12.18. Le point d'inflexion de $U(z)$ correspond à un minimum de $F(z)$.

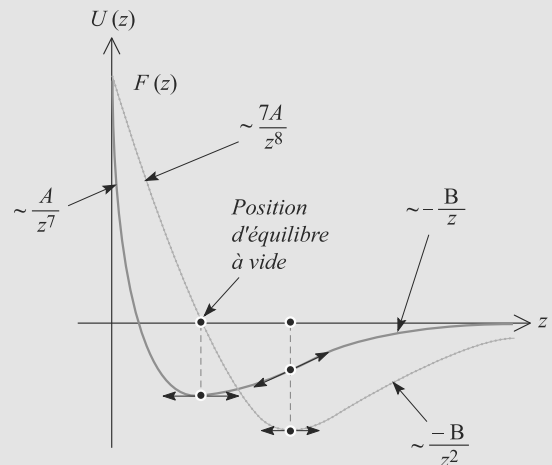


Figure 12.17 Énergie potentielle de la pointe.

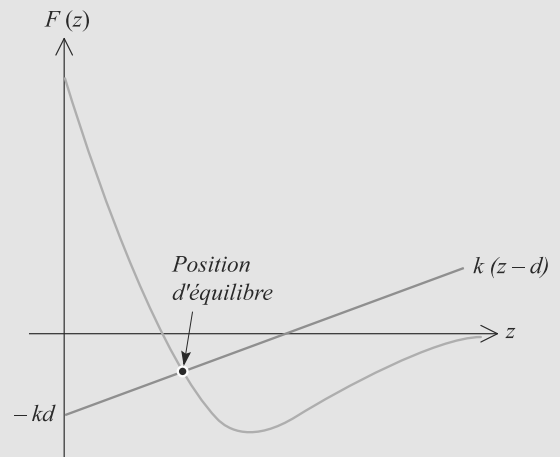


Figure 12.18 Force exercée.

La partie en $1/z^7$ de $U(z)$ correspond à la répulsion entre la pointe et la surface aux très courtes distances (elles ne peuvent pas s'interpénétrer).

La partie en $-1/z$ de $U(z)$ correspond à l'attraction entre la pointe et la surface aux longues distances (attraction électrostatique, forces capillaires).

b) La condition d'équilibre $F(z) + k(d - z)$ indique qu'il faut regarder l'intersection de la courbe $F(z)$ et de la droite $-k(d - z) = 0$. Là où les intersections correspondent aux positions d'équilibre, stables ou instables.

Si $k = 0$, nous retrouvons la position d'équilibre à vide au minimum de $U(z)$.

Si $k \neq 0$, la position d'équilibre se trouve dans la partie attractive de la courbe à condition que d soit assez grand.

c) La condition établie en question 2 peut s'écrire :

$$-\frac{dF}{dz}(z_0) + k > 0$$

$$\Rightarrow k > \frac{dF}{dz}(z_0)$$

Si k est supérieur même à la valeur maximale de dF/dz , alors la condition est toujours satisfaite et l'équilibre est toujours

stable. Le maximum de dF/dz correspond à d^2F/dz^2 nulle en un point noté z_m :

$$\frac{d^2F}{dz^2}(z_m) = \frac{504A}{z_m^{10}} - \frac{6B}{z_m^4} = 0$$

$$\Rightarrow z_m = \sqrt[6]{\frac{84A}{B}}$$

D'où :

$$k_c = \frac{dF}{dz}(z_m) = \frac{2B^{3/2}}{3\sqrt{21}A}$$

Numériquement, $k_c = 0,46 \text{ N.m}^{-1}$.

4. a) Numériquement, $k > k_c$ donc l'équilibre est forcément stable.

b) Numériquement, $\delta d = 56,8 \delta z$.

c) Si δd varie beaucoup, la variation résultante δz est 56,8 fois plus petite, donc très faible. Donc la masse remonte presque autant que le support. Donc suivre le mouvement de la masse revient à suivre la forme de la surface.

Partie 4

Électrocinétique — Deuxième période

Plan

13.1	Notation complexe d'un signal sinusoïdal	205
13.2	Résolution d'un problème en régime sinusoïdal forcé	207
13.3	Puissance	208
	Synthèse	209
	Tests et exercices	210
	Corrigés des exercices	214

Introduction

Lors de l'établissement d'un régime sinusoïdal sous l'action d'une source, il apparaît un régime transitoire dont la description est complexe mais qui disparaît exponentiellement vite. Après, ne reste plus qu'un régime sinusoïdal de même fréquence que la source : c'est le régime sinusoïdal forcé. Par linéarité, toutes les tensions et tous les courants sont alors également sinusoïdaux de même fréquence.



Le mot linéarité est important. Tout ceci s'effondre s'il y a des composants non linéaires dans le circuit.

Rappelons ici les relations utiles entre **fréquence** f , **période** et **pulsation** ω :

Définition

Grandeurs associées à un phénomène périodique :

$$T = \frac{1}{f} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$



T est en seconde (s), f en hertz (Hz), ω en rad.s^{-1} .



Sachez retrouver ces formules par homogénéité. Par exemple, f est en s^{-1} et ω en rad.s^{-1} , donc il faut diviser ω par 2π (qui est en rad) pour obtenir quelque chose qui puisse être une fréquence.

Ainsi, $\cos(\omega t)$ est souvent écrit sous la forme $\cos(2\pi f t)$. Par exemple, pour la tension du secteur à 50 Hz cela donne la formule semi-numérique $\cos(100\pi t)$.

Prérequis

- Caractéristique des dipôles R, L et C
- Lois d'associations des dipôles
- Lois des nœuds et des mailles
- Calculs sur les nombres complexes

Objectifs

- Mettre en place l'outil complexe
- Introduire le vocabulaire du régime sinusoïdal : amplitude, phase, fréquence, période, pulsation, différence de phase...
- Amener les notions d'impédance et d'admittance pour les dipôles linéaires
- Reformuler les lois générales des régimes linéaires en régime sinusoïdal
- Connaître les puissances instantanée et moyenne reçues par un dipôle

13.1 Notation complexe d'un signal sinusoïdal

13.1.1 Grandeur complexe associée

Définition

À une grandeur sinusoïdale $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$ est associée une **grandeur complexe** :

$$\underline{s}(t) = S_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{S}_m e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} S_m = |\underline{s}(t)| & \text{amplitude réelle} \\ \underline{S}_m = S_m e^{j\varphi} & \text{amplitude complexe} \\ \varphi = \arg(\underline{S}_m) & \text{phase initiale du signal} \end{cases}$$

Revenir à la grandeur réelle se fait via la relation $s(t) = \text{Re}(\underline{s}(t))$.

13.1.2 Intérêt de la représentation complexe

Dérivée et primitive deviennent de simples opérations de multiplication ou de division :

$$\frac{d\underline{s}}{dt}(t) = j\omega \underline{s}(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \leftrightarrow \times j\omega \quad (13.1)$$

$$\int \underline{s}(t) dt = \frac{1}{j\omega} \underline{s}(t) \quad \Rightarrow \quad \int dt \leftrightarrow \times \frac{1}{j\omega} \quad (13.2)$$

Donc toute équation différentielle linéaire se ramène à une équation algébrique qui se résout par de simples opérations algébriques (sommes, produits, etc). La somme des parties réelles étant égale à la partie réelle de la somme, toute résolution menée sur les écritures complexes donnera une solution valable pour le problème réel, en prenant la partie réelle du résultat.



Cette exigence de linéarité interdit, par exemple, d'utiliser la notation complexe sans précaution sur les grandeurs qui sont des **produits** de grandeurs sinusoïdales, comme la puissance $\mathcal{P} = ui$. En effet le produit des parties réelles n'est **pas** la partie réelle du produit.

Dans une telle équation, le terme $e^{j\omega t}$ se simplifie toujours. Il n'est donc en général pas écrit. Cela revient à manipuler des équations sur les amplitudes complexes.

Méthode 1 partie réelle ou module et argument ?

Une fois le problème résolu avec la notation complexe, il ne serait pas faux de prendre la partie réelle du résultat, mais ce serait inutilement compliqué. En effet, vous savez **d'avance** que le signal est de la forme $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$.

Prendre le module donne directement l'amplitude S_m et l'argument la phase φ , c'est donc plus efficace que de calculer la partie réelle.

Quand une grandeur complexe se présente comme une fraction, il est possible de rendre le dénominateur réel en multipliant haut et bas par son complexe conjugué. Cependant, cela n'est utile que si vous voulez en prendre la partie réelle. Cela complique inutilement l'expression pour en extraire le module (rapport des modules) et l'argument (différence des arguments).

Exemple d'application

Un dipôle RLC parallèle est alimenté par une source idéale de courant de cem $\eta(t) = \eta \cos(\omega t)$. Tout calcul fait, l'amplitude complexe du courant $i(t)$ traversant la bobine peut s'écrire :

$$\underline{I} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + j\frac{L\omega}{R}} \eta$$

Déduisez-en l'expression réelle de $i(t)$.

Solution

Le résultat est donné, théoriquement, en prenant directement la partie réelle de l'expression de l'énoncé (après avoir rétabli le terme $e^{j\omega t}$). Mais vous pouvez aisément vous convaincre que le calcul est fastidieux. Calculons plutôt module et argument pour construire l'expression de $i(t) = I \cos(\omega t + \varphi)$.

$$I = |\underline{I}| = \frac{1}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2}} \eta$$

$$\varphi = \arg(\underline{I}) = \arg(\eta) - \arg\left(1 - LC\omega^2 + j\frac{L\omega}{R}\right) \Rightarrow \tan(\varphi) = -\frac{L\omega}{R(1 - LC\omega^2)}$$

La méthode 2 montrera comment en déduire φ . Ceci fait, I et φ sont connus donc $i(t)$ est mise sous une forme pratique à utiliser.

Méthode 2 calculer une phase

L'argument d'un rapport est la **différence** des arguments. L'argument d'un réel positif est nul, celui d'un réel négatif vaut π .

Le calcul d'une phase se ramène en général au calcul de l'argument d'un nombre complexe de la forme $z = a + jb$ avec $\tan(\varphi) = b/a$. Mais il ne faut pas conclure trop vite que $\varphi = \arctan(b/a)$! Vous devez regarder le signe de la partie réelle a :

- si $a > 0$, alors $\varphi = \arctan(b/a)$,
- si $a < 0$, alors $\varphi = \pi + \arctan(b/a)$.

Il se peut que le signe de a dépende de la fréquence. Vous pouvez alors distinguer les différents cas, ou bien laisser le résultat sous la forme $\tan(\varphi)$ si l'exercice le permet.

Exemple d'application

Reprenons l'application de la méthode n°1. Nous avons calculé $\tan(\varphi)$ et il restait à en déduire φ . Nous avons :

$$\varphi = \arg(\underline{I}) = \arg(\eta) - \arg\left(1 - LC\omega^2 + j\frac{L\omega}{R}\right) \quad \text{et} \quad \tan(\varphi) = -\frac{L\omega}{R(1 - LC\omega^2)}$$

Le nombre complexe dont l'argument est étudié a pour partie réelle $1 - LC\omega^2$. Il faut donc distinguer deux cas, selon le signe de cette partie réelle :

$$\begin{aligned} \omega < \frac{1}{\sqrt{LC}} &: \varphi = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R(1 - LC\omega^2)}\right) \\ \omega > \frac{1}{\sqrt{LC}} &: \varphi = \pi - \arctan\left(\frac{L\omega}{R(1 - LC\omega^2)}\right) \end{aligned}$$

13.2 Résolution d'un problème en régime sinusoïdal forcé

13.2.1 Impédance d'un dipôle passif

Tout dipôle linéaire passif est gouverné, en convention récepteur (figure 13.1), par une loi d'Ohm écrite sur les amplitudes complexe :

Loi d'Ohm complexe :

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$$

où \underline{Z} s'appelle l'**impédance**. Son inverse, $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$, est l'**admittance** du dipôle.

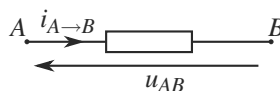


Figure 13.1 Convention récepteur pour une impédance complexe.

Résistance	$\underline{Z} = R$	Impédance réelle, donc pas de déphasage entre u et i
Condensateur	$\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$	Courant en avance de $\pi/2$ par rapport à la tension
Bobine	$\underline{Z} = jL\omega$	Courant en retard de $\pi/2$ par rapport à la tension

Quand vous cherchez la tension et le courant réels, l'impédance réelle $Z = |\underline{Z}|$ permet de connaître le rapport des amplitudes et l'argument de \underline{Z} leur déphasage :

- Le rapport des amplitudes **réelles** est donné par $U/I = Z$.
- Le déphasage de $u(t)$ par rapport à $i(t)$ est égal à $\arg(\underline{Z})$.

13.2.2 Théorèmes généraux en régime sinusoïdal forcé

La notation complexe permet de se ramener à des raisonnements déjà connus :

- Tout dipôle passif est gouverné par une loi d'Ohm et donc se traite formellement comme une résistance. Dans tout résultat précédemment établi où il apparaissait une résistance, vous pouvez désormais mettre une impédance quelconque.
- Conséquence immédiate : les impédances s'ajoutent en série et les admittances s'ajoutent en parallèle.
- Tout dipôle actif admet deux représentations équivalentes, de Thévenin et de Norton, mettant en jeu une impédance \underline{Z} . La relation de passage n'a pas changé : $\underline{e} = \underline{Z} \underline{\eta}$.
- Les associations série de générateurs de Thévenin et parallèle de générateurs de Norton se font comme en régime permanent.
- Les théorèmes généraux du chapitre 7 (lois des nœuds et des mailles, ponts diviseurs, transformations Thévenin-Norton, Helmholtz) étant linéaires, ils s'utilisent sans modification en notation complexe.

\underline{Z} est en ohm (Ω) et \underline{Y} en siemens (S).

Vérifiez que cette loi d'association des impédances redonne bien les lois d'association déjà connues pour les résistances, condensateurs et bobines.

13.3 Puissance

13.3.1 Notion de grandeur efficace

Définition

Soit $g(t)$ une grandeur électrique périodique entraînant une dissipation de puissance \mathcal{P} dans une résistance R . Par définition, la **grandeur efficace associée à une grandeur périodique**, G_{eff} , est la valeur qu'aurait $g(t)$ en régime continu et qui entraînerait la même dissipation de puissance \mathcal{P} dans la même résistance R .



Bien que ce ne soit pas évident dans la définition, la grandeur efficace ainsi définie est indépendante de R .

Par exemple pour une intensité en régime sinusoïdal :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T Ri(t)^2 dt = RI_{\text{eff}}^2$$

soit

$$I_{\text{eff}} = \frac{I}{\sqrt{2}}$$

Tout calcul de ce type en régime sinusoïdal forcé aboutit au même coefficient $\sqrt{2}$. Celui-ci est donc caractéristique de ce régime et porte le nom de **facteur de forme** de ce régime. Il est courant, dans les exercices, que l'amplitude complexe soit donnée sous la forme $\underline{U} = U\sqrt{2}$. Dans ce cas, U désigne la grandeur efficace associée et non l'amplitude.

13.3.2 Puissance moyenne en régime sinusoïdal forcé

En notant φ le déphasage entre tension et courant, la puissance moyenne reçue vaut :

Définition

La **puissance moyenne sur une période** est défini par :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi)$$

Le terme $\cos(\varphi)$ est appelé **facteur de puissance**.

Conséquence immédiate, tout dipôle pour lequel le déphasage tension-courant est égal à $\pm\pi/2$ reçoit une puissance nulle en moyenne. C'est en particulier le cas pour un condensateur ou une bobine.



Cela s'interprète en remarquant qu'un tel dipôle passe une demi-période à se comporter comme un récepteur et l'autre demi-période à se comporter comme un générateur.

Méthode 3 calculer la puissance reçue par un dipôle passif

1. Commencez par calculer $\varphi = -\arg(\underline{Z})$ et déduisez-en $\cos(\varphi)$.
2. Si le module de \underline{Z} est facile à calculer, utilisez les relations

$$\langle \mathcal{P} \rangle = Z I_{\text{eff}}^2 \cos(\varphi) = \frac{U_{\text{eff}}^2}{Z} \cos(\varphi).$$

Exemple d'application

Calculez la puissance reçue par un dipôle RL série alimenté par une tension $e(t) = E \sqrt{2} \cos(\omega t)$.

Solution

Il faut déterminer la tension efficace subie par le dipôle, ici $E \sqrt{2} / \sqrt{2} = E$. Ensuite, il faut calculer l'impédance du dipôle :

$$\underline{Z} = R + jL\omega \Rightarrow \begin{cases} Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \\ \varphi = -\arg(\underline{Z}) = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) \end{cases}$$

D'où le résultat :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{E^2}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cos(\varphi)$$



Remarquez que $R + jL\omega$ a une partie réelle toujours positive avant de prendre l'arctan !

Sachant que $\varphi = -\arg(R + jL\omega)$, il vient :

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \\ \langle \mathcal{P} \rangle &= \frac{RE^2}{R^2 + L^2\omega^2} \end{aligned}$$

Synthèse**Savoirs**

- Expression des impédances des dipôles R , L et C
- Association d'impédances
- Vocabulaire du régime transitoire
- Lois générales dans les circuits linéaires exprimées en grandeurs complexes
- Valeurs efficaces des courants et tensions, puissance moyenne consommée

Savoir-faire

- Associer grandeurs sinusoïdales réelles et complexes
- Passer des équations complexes aux équations différentielles et réciproquement
- Retrouver l'amplitude et l'avance de phase d'une grandeur par module et argument du complexe associé
- Exprimer un déphasage au moyen de la fonction arctan

Mots-clés

- Amplitude,
- phase,
- fréquence,
- période,
- pulsation,
- différence de phase,
- impédance complexe,
- impédance réelle,
- admittance,
- valeur efficace,
- puissance instantanée,
- puissance moyenne.

Tests de connaissances

- 13.1 En régime sinusoïdal, $j\omega$ correspond à une dérivation par rapport au temps.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 13.2 En complexe, la partie réelle d'un produit est égale au produit des parties réelles.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 13.3 Pour un dipôle passif, la partie réelle de l'impédance peut être négative.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 13.4 En parallèle, ce sont les inverses des admittances qui s'ajoutent.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 13.5 L'argument de l'impédance est l'avance de phase de i sur u .
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 13.6 L'argument du nombre complexe $a + jb$ est $\arctan(b/a)$.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 13.7 Une tension carrée (de $-E$ à $+E$) périodique a une valeur efficace de $E/\sqrt{2}$.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 13.8 Une bobine réelle consomme de l'énergie par effet joule.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 13.9 Si $Z = R + jX$, la puissance moyenne vaut $\mathcal{P}_m = RI_{\text{eff}}^2$.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

13.10 Générateur équivalent

Déterminez les générateurs de Thévenin et Norton équivalents au dipôle de la figure 13.2.

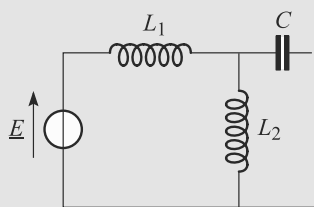


Figure 13.2 Recherche du générateur équivalent en modélisations de Thévenin et de Norton.

13.11 Étude expérimentale d'une bobine réelle

(D'après Concours communs polytechniques : concours national DEUG.)

Un dipôle RLC série est soumis à une tension u_e sinusoïdale. Un oscilloscope est branché de la manière décrite figure 13.3. Données : $R = 20 \Omega$ et $C = 10 \mu\text{F}$.

- À partir de l'oscillogramme de la figure 13.4, donnez les valeurs numériques de la période T d'oscillation, de la pulsation ω , de l'amplitude I_m du courant traversant le

dipôle, de l'amplitude U_{em} de la tension aux bornes du dipôle RLC et du module de l'impédance Z_{AB} .

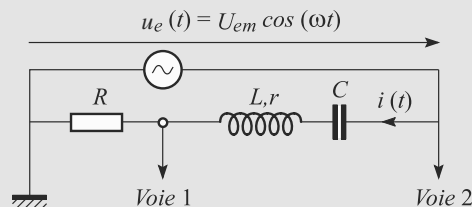


Figure 13.3 Montage pour l'étude d'une bobine réelle.

- Des deux tensions u_I et u_{II} , laquelle est en avance de phase sur l'autre ?
- Calculez le déphasage φ entre la tension $u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t)$ et l'intensité $i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$.
- Montrez que, si la bobine L est idéale, les valeurs calculées dans la question 1 sont incohérentes.
- Une bobine réelle est modélisée par une bobine idéale en série avec une résistance r . Calculez la valeur de r cohérente avec les résultats de la question 1.
- Déduisez-en l'inductance L de la bobine.

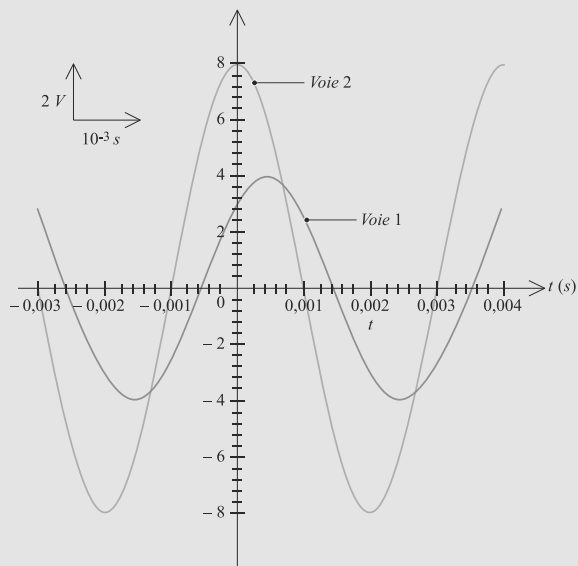


Figure 13.4 Oscillogramme pour la bobine réelle.

13.12 Étude d'un dipôle RLC parallèle en régime sinusoïdal forcé

(D'après ENGEES)

- On considère entre deux points A et B le circuit comprenant en parallèle : une résistance R , une inductance pure L , un condensateur de capacité C (figure 13.5).

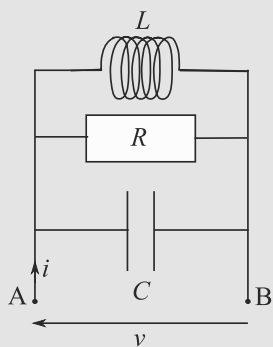


Figure 13.5 Circuit RLC parallèle.

- Déterminer l'admittance complexe \underline{Y} du dipôle AB en fonction de R , L , C et ω .
- On pose $LC\omega_0^2 = 1$, $\omega/\omega_0 = x$ et $Q = R/L\omega_0$. Exprimer le produit $R\underline{Y}$ en fonction de x et Q .
- En déduire l'expression de l'impédance complexe \underline{Z} du dipôle AB.
- Préciser le comportement de ce dipôle aux basses fréquences puis aux hautes fréquences : on interprétera physiquement ces résultats.

- Étudier brièvement le comportement de Z , impédance réelle du dipôle, en fonction de x et en faire une représentation graphique.
- On alimente ce dipôle par un générateur délivrant $v(t) = V_0 \cdot \cos(\omega t)$. Le courant traversant AB est alors $i(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$. On note $\underline{I}_0 = I_0 \exp(j\varphi)$ l'amplitude complexe de l'intensité $i(t)$.
 - Déterminer l'expression de \underline{I}_0 en fonction de V_0 , R , Q et x .
 - Déterminer l'ensemble des valeurs de x telles que I_0 soit inférieure à $\frac{V_0 \sqrt{2}}{R}$ et en particulier ses bornes x_1 et x_2 . Déterminer $x_2 - x_1$. Que représente cette grandeur ?
 - Déterminer φ en fonction de x et en faire une représentation graphique.
 - Calculer pour $x = 0,9$, $L = 1,0$ mH, $C = 0,10$ μ F et $R = 500$ Ω les valeurs numériques de φ , $x_2 - x_1$ et Q .

13.13 Mise en phase

(D'après Mines de Douai.)

Considérons le dipôle AC de la figure 13.6. Il fonctionne en régime sinusoïdal forcé et la tension imposée à ses bornes est $u(t) = U \sqrt{2} \cos(\omega t)$ avec $U = 10$ V.

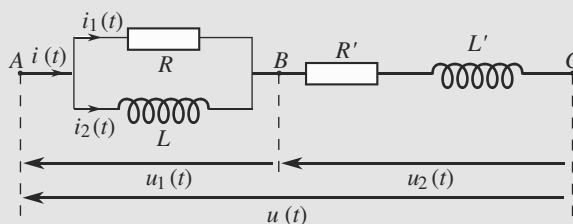


Figure 13.6 Mise en phase.

- Déterminez R' et L' en fonction de R , L et ω pour que les dipôles AB et BC aient même impédance.
 - Dans les conditions de la question précédente, déterminez la pulsation ω_0 pour laquelle :

$$\frac{R'}{R} = \frac{L'}{L}$$

Applications numériques : calculez R' , L' et ω_0 pour $R = 100$ Ω et $L = 10$ mH.

- Pour toute la suite, nous sommes dans les conditions précédentes. En particulier, $\omega = \omega_0$.

- Déterminez l'impédance complexe du dipôle AC sous forme polaire (module et argument).
- Calculez l'expression réelle du courant $i(t)$, sous la forme $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$.
- Calculez les tensions complexes \underline{u}_1 et \underline{u}_2 .
- Déduisez-en les intensités complexes \underline{i}_1 et \underline{i}_2 .
- Déterminez les valeurs efficaces de $u_1(t)$, $u_2(t)$, $i_1(t)$ et $i_2(t)$, ainsi que leurs déphasages par rapport à $u(t)$. Applications numériques.
- Calculez l'expression de la capacité C qu'il faut mettre en série avec le dipôle AC pour que l'intensité totale $i(t)$ soit en phase avec $u(t)$ à la pulsation ω_0 . Application numérique.

13.14 Bilan énergétique et présence d'un fusible

(D'après G2E.)

Un dipôle D d'impédance complexe \underline{Z} est alimenté par une tension sinusoïdale u mais protégé par un fusible, comme indiqué figure 13.7.

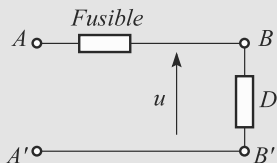


Figure 13.7 Dipôle protégé par un fusible.

Le dipôle D est une bobine réelle, modélisée par une bobine idéale d'inductance $L = 30 \cdot 10^{-3}$ H en série avec une résistance R .

La tension u a pour valeur efficace $U = 220$ V et pour fréquence $f = 50$ Hz. L'intensité efficace maximale admissible dans le circuit est $I_{\max} = 16$ A. Le dipôle D absorbe une puissance électrique moyenne $\mathcal{P}_e = 2500$ W.

La ligne $ABB'A'$ complète, fusible inclus, se comporte comme un dipôle purement ohmique de résistance totale $R_0 = 1,2 \Omega$.

- Calculez les deux valeurs possibles pour R , notées R_1 et R_2 , en fonction de \mathcal{P}_e , U , L et $\omega = 2\pi f$.
 - Pour chacune des valeurs R_1 et R_2 , calculez l'intensité efficace I_1 et I_2 traversant D . Conclusion ? Dans la suite, la valeur retenue sera notée I .
 - Déduisez-en la puissance \mathcal{P}_0 dissipée par effet Joule dans la ligne. Commentez.
- Afin d'optimiser le fonctionnement de la ligne, un condensateur de capacité $C = 130,4 \mu\text{F}$ est placé en parallèle avec D (figure 13.8).

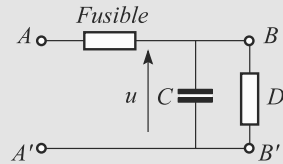


Figure 13.8 Ajout d'un condensateur.

- Calculez les intensités efficaces I_D traversant D , I_C traversant C et I' traversant toute la ligne. Vous donnerez les résultats analytiquement en fonction de I_0 , C , f , U , R et L ainsi que numériquement.
- Calculez la puissance \mathcal{P}'_0 dissipée par effet Joule dans la ligne. Conclusion ?

13.15 Étude d'un dipôle composite

Un dipôle AB est constitué d'un condensateur C et de deux résistances R_1 et R_2 . Il est traversé par un courant i et est soumis à une tension u , comme indiqué figure 13.9.

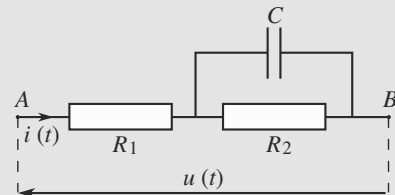


Figure 13.9 Dipôle composite.

Données : $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$; $C = 0,1 \mu\text{F}$; $\omega = 1000 \text{ rad.s}^{-1}$; $U = 10$ V efficace.

- Calculez l'impédance équivalente \underline{Z} au dipôle AB .
- Soit $\varphi = \arg(\underline{Z})$. Quelle est l'interprétation physique de φ ? Calculez $\tan(\varphi)$ puis φ .
- Soit \mathcal{P}_{AB} , \mathcal{P}_{R_1} , \mathcal{P}_{R_2} et \mathcal{P}_C les puissances reçues respectivement par le dipôle AB , la résistance R_1 , la résistance R_2 et le condensateur. Calculez-les analytiquement et numériquement.



La puissance instantanée étant rarement utile, il est d'usage de noter \mathcal{P} la puissance moyenne, notation plus légère que $\langle \mathcal{P} \rangle$.

13.16 Circuit RLC parallèle

(D'après Géologie Nancy)

On considère le circuit représenté figure 13.10, formé d'un générateur idéal G de f.é.m. e , de conducteurs ohmiques de résistance R_0 , d'un condensateur de capacité $C = 2,53 \mu\text{F}$ et d'une bobine purement inductive d'inductance $L = 10 \text{ mH}$.

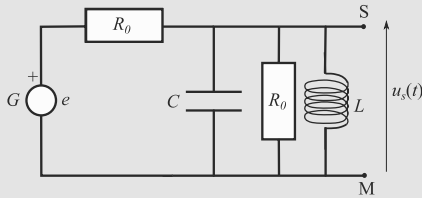


Figure 13.10 Circuit RLC parallèle.

Les points S et M constituent la sortie du dispositif ; elle peut être ouverte (rien n'est branché) ou fermée sur un dipôle. La tension de sortie est $u_s(t)$.

1. G est un générateur idéal de tension sinusoïdale : $e(t) = E_m \cdot \cos(\omega t)$ avec $E_m = 5$ V. La sortie est ouverte ; le régime sinusoïdal forcé est établi : $u_s(t) = U_{Sm} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$. Déterminer U_{Sm} et φ .
2. Entre les points S et M, tout le circuit équivaut à un générateur de Norton, de courant électromoteur

$\eta = \eta_m \cdot \cos(\omega t + \psi)$ et d'admittance $\underline{Y}_n = \alpha + j\beta$. Déterminer η_m , ψ , α et β .

3. On remplace, dans le circuit initial (sortie ouverte), le générateur de tension sinusoïdale par un générateur idéal de tension continue de f.é.m $E = 5$ V en série avec un interrupteur K. On pose $Q = R_0 \sqrt{\frac{C}{L}}$, $LC\omega_0^2 = 1$ et $\tau = \frac{Q}{\omega_0}$. À la date $t < 0$, K est ouvert ; aucun courant ne circule dans le circuit. À $t = 0$, on ferme K.
 - a) Établir l'équation différentielle liant u_s , ses dérivées par rapport au temps, E , τ et ω_0 .
 - b) On choisit R_0 pour que $Q = 1$. Calculer les valeurs de ω_0 et τ .
 - c) Donner l'équation horaire $u_s(t)$ faisant intervenir les constantes E et τ .
 - d) Déterminer l'équation horaire $i(t)$ du courant débité par le générateur.
 - e) Calculer l'énergie W_e transférée par le générateur au circuit entre 0 et 10τ .

13.1

Vrai s'il est au numérateur. En revanche, s'il est au dénominateur, c'est faux car c'est une intégration.

13.2

Faux ! C'est pour cela que l'utilisation des complexes lorsqu'on manipule des puissances est à proscrire.

13.3

Faux, cela signifierait qu'il peut fournir de la puissance moyenne à l'extérieur.

13.4

Faux : les admittances s'ajoutent en parallèle.

13.5

Faux, c'est l'inverse.

13.6

Vrai, seulement si $a > 0$, sinon il faut ajouter π .

13.7

Faux, la valeur efficace de cette tension est $E\sqrt{2}$! Le facteur de forme du régime carré vaut 1, pas $\sqrt{2}$.

13.8

Vrai. Une bobine réelle possède un faible caractère résistif dû au fil de son bobinage et dissipe donc de l'énergie par effet joule.

13.9

Vrai.

13.10 Générateur équivalent

Réinvestissez ici le savoir-faire acquis en régime permanent : traitez d'abord le problème graphiquement, en dessinant toutes les étapes de transformation sans écrire aucune grandeur électrique. Cette étape est identique en régime permanent et en régime sinusoïdal forcé. C'est seulement dans la partie calcul que les deux régimes diffèrent.

Convertissons le générateur de Thévenin constitué de \underline{E} et L_1 en son équivalent Norton pour pouvoir regrouper les deux bobines en parallèle (figure 13.11).

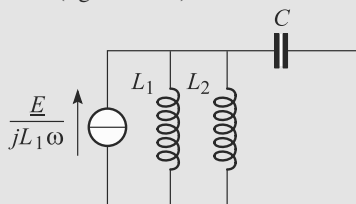


Figure 13.11 Conversion Thévenin → Norton.

Puis convertissons le générateur de Norton résultant en son équivalent Thévenin pour associer la bobine équivalente et le condensateur en série (figure 13.12). Cela donne directement le générateur de Thévenin cherché.

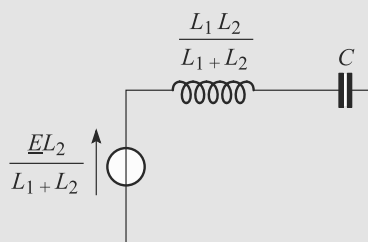


Figure 13.12 Conversion Norton → Thévenin.

L'amplitude complexe de la fem équivalente est lue directement sur le raisonnement graphique :

$$\underline{E}_{\text{eq}} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \underline{E}$$

et pour l'impédance équivalente :

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{eq}} &= j \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right)^{-1} \omega + \frac{1}{jC\omega} \\ &= j\omega \left(\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} - \frac{1}{C\omega^2} \right) \end{aligned}$$

Le générateur de Norton équivalent a même impédance, et son cem équivalent vaut :

$$\underline{\eta}_{\text{eq}} = \frac{\underline{E}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \frac{L_2 \underline{E}}{j \left(L_1 L_2 \omega - \frac{L_1 + L_2}{C\omega} \right)}$$

13.11

Étude expérimentale d'une bobine réelle

L'exercice est légèrement inhabituel dans sa formulation, mais tous les raisonnements se ramènent aux cas classiques du cours.

Il peut en outre vous aider à mieux comprendre le sens physique simple des notions abstraites introduites dans la théorie : déphasage, impédance, etc.

1. Par lecture directe, $T \simeq 4.10 \cdot 10^{-3} \text{ s}$
donc $\omega = 2\pi/T \simeq 1,6.10^3 \text{ rad.s}^{-1}$.

La voie I prend la tension aux bornes de la résistance, elle est donc proportionnelle au courant traversant le dipôle RLC . Donc $I_m = U_{mI}/R \simeq 4/20 = 0,2 \text{ A}$.

La voie II prend la tension aux bornes du dipôle RLC entier, donc u_e . Par lecture directe, $U_{em} \simeq 8 \text{ V}$.

La loi d'Ohm pour le dipôle RLC donne, en module, $U_{em} = |Z_{AB}| I_m$ donc $|Z_{AB}| \simeq 40 \Omega$.

2. En comparant les instants où les deux courbes atteignent leur maximum sur une même période, nous voyons que u_{II} est en avance sur u_I .

3. Le décalage temporel entre les deux courbes est, par lecture directe, $\Delta t = 0,5$ ms. Un décalage d'une période correspond à un déphasage de 2π , donc :

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\varphi}{2\pi} \Rightarrow \varphi \approx \frac{\pi}{4} \approx 45^\circ$$

4. Si la bobine peut être supposée idéale, nous avons le résultat de cours pour $\varphi = \pi/4$ donc $\tan(\varphi) = 1$:

$$\begin{aligned} \tan(\varphi) &= \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = 1 \\ \Rightarrow L &= \frac{1 + RC\omega}{C\omega^2} \approx 53 \text{ mH} \end{aligned}$$

Calculons l'impédance \underline{Z}_{AB} correspondante :

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{AB} &= R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \\ \Rightarrow |\underline{Z}_{AB}| &\approx 28 \Omega \end{aligned}$$

ce qui n'est pas cohérent avec la valeur mesurée. Donc la résistance interne de la bobine n'est pas négligeable devant R .

5. Si r est la résistance interne de la bobine, l'impédance du dipôle complet s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{AB} &= R + r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \\ \Rightarrow |\underline{Z}_{AB}|^2 &= (R + r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \end{aligned}$$

La valeur de L n'est pas connue, mais la phase de cette impédance vaut $\pi/4$ donc :

$$\begin{aligned} \tan(\varphi) &= \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R + r} = 1 \\ \Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} &= R + r \end{aligned}$$

Donc $|\underline{Z}_{AB}|^2 = 2(R + r)^2$, ce qui conduit à $r \approx 8 \Omega$.

6. Par un raisonnement similaire au précédent :

$$L = \frac{1 + (R + r)C\omega}{C\omega^2} \approx 59 \text{ mH}$$

13.12 Étude d'un dipôle RLC parallèle en régime sinusoïdal forcé

Méthodes mises en jeu : n° 1 et 2.

Cet exercice permet d'utiliser les concepts de base (impédances, admittances, déphasage, etc.) dans un cadre un peu différent de celui du cours tout en utilisant des notations qui deviendront familières au fil des chapitres qui suivent.

1. a) En parallèle, les admittances s'ajoutent. On a donc ici :

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{L\omega j} + jC\omega = \frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right).$$

- b) On a donc : $R \cdot \underline{Y} = 1 + j\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right) = 1 + j\left(RC\omega_0 \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{R}{L\omega_0} \frac{\omega_0}{\omega}\right)$ avec $LC\omega_0^2 = 1$, $\omega/\omega_0 = x$ et $Q = R/L\omega_0 = RC\omega_0$. On voit donc que :

$$R \cdot \underline{Y} = 1 + j\left(Qx - \frac{Q}{x}\right) = 1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right).$$

- c) On déduit alors l'impédance complexe du dipôle :

$$\underline{Z} = \frac{R}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}.$$

- d) Aux basses fréquences, en ne conservant que le terme dominant, on trouve : $\underline{Z} = \frac{jRx}{Q} = jL\omega$. Des trois dipôles montés en parallèle, c'est en effet la bobine qui possède l'impédance la plus faible et donc l'admittance la plus grande. Le dipôle AB a alors un comportement inductif.

De même, en hautes fréquences, on obtient : $\underline{Z} = \frac{R}{jQx} = \frac{1}{C\omega j}$. Le condensateur est le dipôle de plus faible impédance dans ce domaine, AB a alors un comportement capacitif.

2. L'expression générale de l'impédance réelle est $Z = \frac{R}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$. En basse fréquence, comme on vient de le voir $Z \approx \frac{Rx}{Q}$. On part de la valeur 0 et la tangente

à l'origine vaut donc R/Q . En haute fréquence, $Z = \frac{R}{Qx}$ qui tend vers 0 selon une branche hyperbolique. D'autre part, Z est maximum quand le dénominateur est minimum et donc quand $1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ est aussi minimum. Ceci se produit quand $\left(x - \frac{1}{x}\right) = 0$ et donc $x = 1$. La valeur maximale de Z est alors R . On en déduit le tracé de la figure 13.13 :

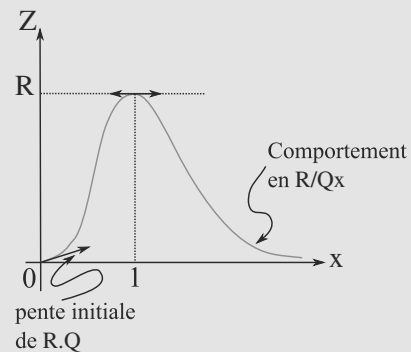


Figure 13.13 Variations de l'impédance réelle.

3. a) La loi d'Ohm donne en complexes :

$$\underline{i} = \underline{Yv} = \left(1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) \frac{V_0}{R} \exp(j\omega t).$$

On en déduit l'amplitude complexe de i :

$$\underline{I}_0 = (1 + jQ(x - \frac{1}{x})) \frac{V_0}{R}.$$

b) On déduit du a) que $I_0 = \sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2} \frac{V_0}{R}$ et donc

$I_0 \leq \sqrt{2} \frac{V_0}{R}$ donne l'inégalité :

$$\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2} \leq \sqrt{2} \text{ ou encore } Q^2(x - \frac{1}{x})^2 \leq 1.$$

En prenant la racine carrée, on trouve $-1 \leq Q(x - \frac{1}{x}) \leq 1$ et donc, $-x \leq Q(x - 1) \leq x$ car $x > 0$. L'inégalité de gauche donne $0 \leq x + \frac{x}{Q} - 1$. Le polynôme a pour racines :

$x = \frac{-1}{2Q} \pm \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}$ et est positif hors des racines. Physiquement, on retient donc ($x > 0$) :

$$x \geq \frac{-1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} = x_1.$$

En procédant de même, on trouve pour la deuxième inégalité :

$x \leq \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} = x_2$ (polynôme négatif entre les racines).

Au final, on a donc :

$$\frac{-1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} = x_1 \leq x \leq x_2 = \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}.$$

On en déduit alors $x_2 - x_1 = \frac{1}{Q}$. On s'aperçoit que cet intervalle représente l'ensemble des fréquences réduites (i.e. écrites en x) qui donne une valeur proche du minimum obtenu autour de $x = 1$. C'est donc l'ensemble des fréquences telles que l'intensité dans le circuit est faible. Plus Q est grand et plus cet intervalle est étroit.

c) φ est l'argument de l'amplitude complexe et donc $\varphi = \arg(1 + jQ(x - \frac{1}{x})) = \arctan(Q(x - \frac{1}{x}))$. Sa représentation graphique a l'allure donnée figure 13.14 :

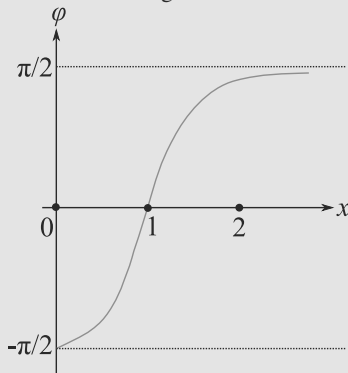


Figure 13.14 Allure du déphasage.

d) les applications numériques donnent : $\varphi = -46,5^\circ = -0,81 \text{ rad}$; $Q = 5$; $x_2 - x_1 = \frac{1}{Q} = 0,2$.

13.13

Mise en phase

Cet exercice est beaucoup moins difficile qu'il en a l'air à condition de faire preuve de rigueur.

Veillez, à chaque question, à bien utiliser les résultats des questions précédentes. En effet, les expressions calculées sont très simples si vous tenez compte des conditions particulières de la première question. Sans cela, vous risquez de manipuler des expressions très lourdes.

1. a) L'égalité des impédances des dipôles AB et BC s'écrit :

$$R' + jL'\omega = \frac{1}{\frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R}} = \frac{\frac{1}{R} + j\frac{1}{L\omega}}{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{L^2\omega^2}}$$

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelle et imaginaire le sont :

$$R' = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{L^2\omega^2}} \Rightarrow R' = \frac{R}{1 + \left(\frac{R}{L\omega}\right)^2}$$

$$L'\omega = \frac{\frac{1}{L\omega}}{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{L^2\omega^2}} \Rightarrow L' = \frac{L}{1 + \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2}$$

b) L'égalité demandée impose :

$$\frac{R}{L\omega_0} = \frac{L\omega_0}{R}$$

D'où $R' = 50 \Omega$; $L' = 5,0 \text{ mH}$;
 $\omega_0 = R/L = 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$.

2. a) Les deux dipôles AB et BC ont même impédance donc $\underline{Z}_{AC} = 2(R' + jL'\omega)$. Par ailleurs, $\omega = \omega_0$ impose $R' = R/2$ et $L' = L/2$. Donc $\underline{Z}_{AC} = R + jL\omega$ conduit à :

$$\begin{cases} |\underline{Z}_{AC}| = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} = \sqrt{2}R \\ \arg(\underline{Z}_{AC}) = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Donc $\underline{Z}_{AC} = \sqrt{2}R e^{j\pi/4}$.

b) $\underline{i} = \underline{u}/\underline{Z}_{AC}$ donc, avec les grandeurs efficaces U et I imposées par l'énoncé :

$$\begin{aligned} \underline{i} &= I \sqrt{2} e^{j\varphi} = \frac{U}{R} e^{-j\pi/4} \\ \Rightarrow I &= \frac{U}{\sqrt{2}R} \text{ et } \varphi = -\frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow i(t) &= \frac{U}{R} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

c) Les deux dipôles AB et BC ont même impédance et sont traversés par le même courant, donc ils ont même tension à leurs bornes. Donc $\underline{u}_1 = \underline{u}_2 = \underline{u}/2$:

$$u_1(t) = u_2(t) = \frac{U}{\sqrt{2}} \cos(\omega t)$$

d) Nous avons directement :

$$\begin{aligned} \underline{i}_1 &= \frac{\underline{u}_1}{R} = \frac{U}{\sqrt{2}R} \\ \underline{i}_2 &= \frac{\underline{u}_2}{jL\omega} = \frac{U}{\sqrt{2}L\omega} e^{-j\pi/2} \end{aligned}$$

e) Des questions précédentes, nous tirons les valeurs efficaces :

$$U_1 = U_2 = \frac{U}{2} = 5 \text{ V}$$

$$I_1 = I_2 = \frac{U}{2R} = 50 \text{ mA}$$

et les phases :

$$\varphi_{u_1} = \varphi_{u_2} = 0 \quad \varphi_{i_1} = 0 \quad \varphi_{i_2} = -\frac{\pi}{2}$$

f) Il faut donc que l'association en série de AC et d'un condensateur donne une impédance équivalente réelle (argument nul, donc déphasage nul entre tension et courant) :

$$\arg\left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right) = 0$$

Sa partie réelle étant positive, nous voulons simplement sa partie imaginaire nulle :

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow C = \frac{1}{L\omega^2} = 1 \text{ } \mu\text{F}$$

13.14

Bilan énergétique et présence d'un fusible

Si vous regardez les questions de près, vous devez réaliser qu'elles ne demandent que d'appliquer les formules du cours. Notez donc les formules qui vous semblent pertinentes dans un coin de votre brouillon, et travaillez à faire un lien entre elles et ce que l'énoncé demande directement.

1. a) Soit $\underline{Z} = R + jL\omega$ l'impédance complexe du dipôle D . $-\varphi$ étant l'argument de \underline{Z} :

$$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

D'où la puissance \mathcal{P}_e reçue par D , en notant $Z = |\underline{Z}|$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e &= UI \cos(\varphi) \\ &= \frac{U^2}{Z} \cos(\varphi) \\ &= \frac{U^2}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \\ \mathcal{P}_e &= \frac{RU^2}{R^2 + L^2\omega^2} \end{aligned}$$

qui se ramène à un trinôme en R dont nous calculons le discriminant :

$$\begin{aligned} R^2 - \frac{U^2}{\mathcal{P}_e} R + L^2\omega^2 &= 0 \\ \Rightarrow \Delta &= \left(\frac{U^2}{\mathcal{P}_e}\right)^2 - 4L^2\omega^2 \approx 19,5 > 0 \end{aligned}$$

Il y a donc deux valeurs réelles possibles pour R :

$$R_1 = \frac{U^2}{2\mathcal{P}_e} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{U^2}{\mathcal{P}_e}\right)^2 - 4L^2\omega^2} \approx 11,9 \text{ } \Omega$$

$$R_2 = \frac{U^2}{2\mathcal{P}_e} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{U^2}{\mathcal{P}_e}\right)^2 - 4L^2\omega^2} \approx 7,47 \text{ } \Omega$$

b) D'après la loi d'Ohm prise en module, $I = U/Z$ donc :

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \Rightarrow \begin{cases} I_1 \approx 14,5 \text{ A} \\ I_2 \approx 18,3 \text{ A} \end{cases}$$

La valeur I_2 étant supérieure I_{\max} , le fusible fondrait. Donc nous retiendrons $I = I_1$.

c) L'ensemble de la ligne ayant un comportement ohmique, $\mathcal{P}_0 = R_0 I^2 = R_0 I_1^2 \approx 252 \text{ W}$. Donc environ 10% de la puissance reçue est perdue par effet Joule dans la ligne.

2. a) Le dipôle n'ayant pas changé d'impédance et étant soumis à la même tension u que précédemment, il est traversé par le même courant : $I_D = I \approx 14,5 \text{ A}$.

La loi d'Ohm au niveau du condensateur donne :

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{1}{jC\omega} \underline{I}_C \\ \Rightarrow I_C &= C\omega U = C2\pi f U \approx 9,01 \text{ A} \end{aligned}$$

De même, la loi d'Ohm pour l'association parallèle de C et D (qui est traversée par le courant I') donne :

$$\begin{aligned} \underline{I}' &= \left(jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega} \right) \underline{U} \\ \Rightarrow I' &= U \sqrt{\frac{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}{R^2 + L^2\omega^2}} \end{aligned}$$

Donc $I' \approx 11,4 \text{ A}$.



Remarquez que les intensités efficaces ne sont pas additives !

b) $\mathcal{P}'_0 = R_0 I'^2 \approx 155 \text{ W}$. La puissance perdue par effet Joule a donc été considérablement abaissée (de 38% !) par l'ajout du condensateur, composant qui ne consomme aucune puissance (son $\cos(\varphi)$ est nul) et qui a contribué à diminuer l'intensité totale traversant la ligne.

13.15 Étude d'un dipôle composite

C'est un exercice qui met en jeu tous les résultats du cours sur un dipôle passif seul, donc tout ce qui touche à l'impédance. Il est très simple sur le principe, mais conduit à des calculs un peu longs.

1. Par associations successives :

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{R_2}{1 + jR_2C\omega} = \frac{R_1 + R_2 + jR_1R_2C\omega}{1 + jR_2C\omega}$$

2. Mettons \underline{Z} sous forme partie réelle et partie imaginaire :

$$\underline{Z} = \frac{R_1 + R_2 + R_1(R_2C\omega)^2 - jR_2^2C\omega}{1 + (R_2C\omega)^2}$$

pour calculer le rapport de sa partie imaginaire sur sa partie réelle, qui s'identifie à la tangente de son argument :

$$\tan(\varphi) = \frac{-R_2^2C\omega}{R_1 + R_2 + R_1(R_2C\omega)^2}$$

L'expression de \underline{Z} montre que sa partie réelle est toujours positive, donc $\cos(\varphi) > 0$. D'où :

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{R_2^2C\omega}{R_1 + R_2 + R_1(R_2C\omega)^2}\right)$$

3. Pour toute impédance \underline{Z} , $\mathcal{P} = UI \cos(\varphi)$ peut s'écrire, sachant que φ est l'argument de \underline{Z} :

$$\mathcal{P} = U \frac{U}{|\underline{Z}|} \frac{\operatorname{Re}(\underline{Z})}{|\underline{Z}|} = \frac{U^2}{|\underline{Z}|^2} \operatorname{Re}(\underline{Z}) = I^2 \operatorname{Re}(\underline{Z})$$



- Les grandeurs I et U sont ici les valeurs efficaces.
- Pour tout complexe $z = a + jb$ d'argument θ , on a $\cos(\theta) = a/|z|$.

Appliquons ce résultat aux dipôles de ce circuit.

Le condensateur a une impédance d'argument $-\pi/2$ donc $\mathcal{P}_C = 0$.

Le dipôle AB entier est soumis à la tension U :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{AB} &= U^2 \frac{1 + (R_2C\omega)^2}{(R_1 + R_2)^2 + (R_1R_2C\omega)^2} \\ &\quad \times \frac{R_1 + R_2 + R_1(R_2C\omega)^2}{1 + (R_2C\omega)^2} \\ &= \frac{R_1 + R_2 + R_1(R_2C\omega)^2}{(R_1 + R_2)^2 + (R_1R_2C\omega)^2} U^2 \\ \mathcal{P}_{AB} &\approx 17,2 \text{ mW} \end{aligned}$$

La résistance R_1 est traversée par le même courant I que le dipôle AB tout entier. Le module de la loi d'Ohm s'écrit $I = U/|\underline{Z}|$ donc :

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1 + (R_2C\omega)^2}{(R_1 + R_2)^2 + (R_1R_2C\omega)^2}} U \\ \Rightarrow \mathcal{P}_{R_1} &= R_1 I^2 = \frac{R_1 + R_1(R_2C\omega)^2}{(R_1 + R_2)^2 + (R_1R_2C\omega)^2} U^2 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{R_1} \approx 3,4 \text{ mW}$.

Pour \mathcal{P}_{R_2} , nous pouvons utiliser la même méthode, ou bien exploiter la conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{AB} &= \mathcal{P}_{R_1} + \mathcal{P}_{R_2} + \mathcal{P}_C \\ \Rightarrow \mathcal{P}_{R_2} &= \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2 + (R_1R_2C\omega)^2} U^2 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{R_2} \approx 13,8 \text{ mW}$.

13.16 Circuit RLC parallèle

Méthodes mises en jeu : n° 1, 2 et 3.

L'exercice permet de reprendre les techniques vues pour les régimes continus et de les adapter au régime linéaire sinusoïdal. L'utilisation des complexes permet aussi de trouver simplement l'équation différentielle qu'on recherche à la fin.

1. On utilise un diviseur de tension pour obtenir la tension de sortie :

$$\underline{u}_S = \frac{\left(\frac{1}{R_0} + C\omega j + \frac{1}{L\omega j}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{R_0} + C\omega j + \frac{1}{L\omega j}\right)^{-1} + R_0} \underline{e}$$

et donc

$$\underline{u}_S = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{R_0} + C\omega j + \frac{1}{L\omega j}\right)R_0} \underline{e} = \frac{\underline{e}}{2 + R_0C\omega j + \frac{R_0}{L\omega j}}$$

On en déduit U_{Sm} par le module : $U_{Sm} = \frac{E_m}{\sqrt{4 + R_0^2(C\omega - \frac{1}{L\omega})^2}}$ et l'avance de phase par l'argument :

$$\varphi = \arg\left(\frac{E_m}{2 + jR_0(C\omega - \frac{1}{L\omega})}\right) = -\arctan\left(\frac{R_0}{2}\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right)$$

car la partie réelle du dénominateur est positive.

2. Pour obtenir le modèle équivalent de Norton, on transforme le générateur de Thévenin en un générateur de Norton et on regroupe les admittances en parallèle (figure 13.15) :

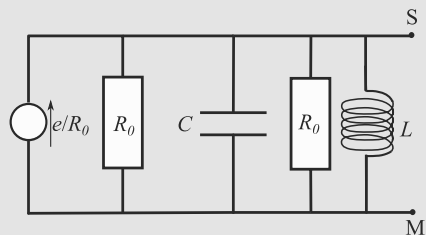


Figure 13.15 Transformation du générateur.

On a alors $\underline{\eta} = \frac{\underline{e}}{R_0}$ et donc $\eta_m = \frac{E_m}{R_0}$ et $\psi = 0$. De même, $\underline{Y}_n = \frac{2}{R_0} + jC\omega + \frac{1}{L\omega j}$ qui donne : $\alpha = \frac{2}{R_0}$ et $\beta = C\omega - \frac{1}{L\omega}$.

3. a) On a vu qu'en complexes, on avait :

$$\underline{u}_s = \frac{\underline{e}}{2 + R_0 C \omega j + \frac{R_0}{L \omega j}}.$$

Ceci permet d'écrire : $(2 + R_0 C \omega j + \frac{R_0}{L \omega j}) \underline{u}_s = \underline{e}$ ou encore $(2L\omega j + R_0 CL(\omega j)^2 + R_0) \underline{u}_s = L\omega j \underline{e}$ ce qui permet, en utilisant le fait que multiplier par $j\omega$ en complexe revient à dériver par rapport au temps en réel d'obtenir l'équation différentielle :

$$R_0 CL \frac{d^2 u_s}{dt^2} + 2L \frac{du_s}{dt} + R_0 u_s = L \frac{de}{dt}$$

En divisant par le premier coefficient, on trouve alors :

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{2}{R_0 C} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{CL} u_s = \frac{1}{R_0 C} \frac{de}{dt}.$$

Or, $\frac{1}{R_0 C} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{\tau}$ et $\frac{1}{CL} = \omega_0^2$. L'équation se réduit donc à :

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{du_s}{dt} + \omega_0^2 u_s = \frac{1}{\tau} \frac{de}{dt}$$

b) Avec $Q = 1$, on obtient $\omega_0 = 6,2910^3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\tau = 1/\omega_0 = 1,59 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

c) L'équation s'écrit maintenant : $\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{\tau} u_s = 0$. Le discriminant du polynôme caractéristique associé est nul et la solution générale s'écrit donc $u_s = (At + B) \exp(-\frac{t}{\tau})$. Les conditions initiales sont obtenues par les continuités de la tension aux bornes du condensateur ($u_s(0) = 0$) et du courant au travers de la bobine ($i_L(0) = 0$). Comme la tension

de sortie est nulle, le courant traversant le générateur ne traverse que le condensateur à $t = 0$ (pas de courant dans la résistance par loi d'Ohm). La loi des mailles donne alors :

$$E - R_0 i_c(0) + 0 = 0. \text{ Comme } i_c = C \frac{du_s}{dt}. \text{ On en déduit } \frac{du_s}{dt}(0) = \frac{E}{R_0 C} = \frac{E}{\tau}.$$

Ces deux conditions initiales permettent d'obtenir $u_s(0) = B = 0$ et comme $\dot{u}_s(t) = (A - \frac{At}{\tau}) \exp(-\frac{t}{\tau})$, $\frac{E}{\tau} = A$. Finalement, on obtient :

$$u_s = \frac{Et}{\tau} \exp(-\frac{t}{\tau}).$$

d) La loi des mailles donne : $E - R_0 i - u_s = 0$ et donc $i = \frac{E - u_s}{R_0}$ ou encore :

$$i(t) = \frac{E}{R_0} (1 - \frac{t}{\tau} \exp(-\frac{t}{\tau}))$$

e) La puissance cédée au circuit par le générateur est $e(t)i(t)$ soit ici $\frac{E^2}{R_0} (1 - \frac{t}{\tau} \exp(-\frac{t}{\tau}))$. L'énergie cédée au circuit est

donc $W_e = \int_0^{10\tau} \frac{E^2}{R_0} (1 - \frac{t}{\tau} \exp(-\frac{t}{\tau})) dt$. On obtient donc :

$W_e = \frac{E^2}{R_0} 10\tau - \int_0^{10\tau} \frac{E^2}{R_0} \frac{t}{\tau} \exp(-\frac{t}{\tau}) dt$. La deuxième intégrale s'obtient par une intégration par partie :

$$\int_0^{10\tau} \frac{t}{\tau} \exp(-\frac{t}{\tau}) dt = \left[-t \exp(-\frac{t}{\tau}) \right]_0^{10\tau} - \int_0^{10\tau} -\exp(-\frac{t}{\tau}) dt$$

et vaut donc : $-10\tau \exp(-10) - \tau[\exp(-10) - 1] = \tau(1 - 11 \exp(-10))$.

On obtient donc finalement :

$$W_e = \tau \frac{E^2}{R_0} (9 + 11 \exp(-10)).$$

Plan

14.1	Présentation	221
14.2	Résonance en intensité	221
14.3	Résonance en tension aux bornes du condensateur	223
	Synthèse	225
	Tests et exercices	226
	Corrigés des exercices	228

Introduction

Les méthodes du chapitre précédent ont fait régulièrement apparaître des expressions dépendant de la pulsation pour les grandeurs électriques. Il est alors naturel de se demander ce qui se passe quand cette pulsation varie. Lorsqu'une grandeur électrique passe par un maximum pour une certaine pulsation, nous dirons qu'il y a résonance.

Prérequis

- Notations complexes
- Théorèmes généraux en régime sinusoïdal

Objectifs

- Étudier les différentes résonances en régime sinusoïdal forcé

Méthode 1 aborder un exercice de résonance

C'est une simple mise en œuvre des méthodes du chapitre précédent.

- La recherche de l'équation différentielle gouvernant une grandeur sinusoïdale est remplacée, grâce à la notation complexe, par celle d'une équation algébrique satisfaite par l'amplitude complexe de cette grandeur.
- La résolution se fait donc directement par somme et produit, puis en prenant le module et l'argument pour extraire l'amplitude et la phase du signal cherché.
- L'amplitude ainsi calculée, fonction de ω , peut alors être étudiée pour savoir si elle passe par un maximum (résonance). Attention, la pulsation de résonance n'est pas forcément égale à la pulsation propre !

Exercices d'application

Le reste de la partie cours de ce chapitre aborde deux exemples d'application de cette méthode, les deux exemples que vous pouvez avoir vus en cours.

14.1 Présentation

Mettons un dipôle RLC série aux bornes d'un générateur idéal de tension \underline{e} (figure 14.1).

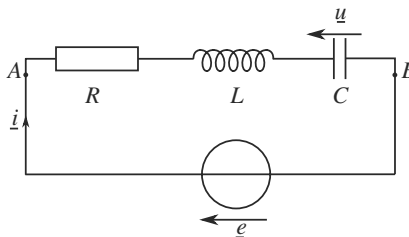


Figure 14.1 Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (notations complexes).

Définissons les amplitudes comme suit, en prenant \underline{e} comme référence de phase :

$$\begin{cases} \underline{e} = \underline{E} e^{j\omega t} = E e^{j\omega t} \\ \underline{u} = \underline{U} e^{j\omega t} = U e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} \\ \underline{i} = \underline{I} e^{j\omega t} = I e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} \end{cases}$$

14.2 Résonance en intensité

14.2.1 Mise en équation et résolution



Voir vidéo 8 :
Circuit RLC série
en régime forcé

La mise en équation est immédiate, les trois impédances en série étant équivalentes à une seule :

$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \Rightarrow \underline{e} = \underline{Z} \underline{i} \Rightarrow I e^{j\varphi_i} = \frac{E}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

Le module et l'argument de cette expression s'écrivent, en posant $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $Q = L\omega_0/R$ et $x = \omega/\omega_0$:

$$I(x) = \frac{E}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \quad \varphi_i(x) = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

Avant de prendre l'arctan de $\tan(\varphi_i)$, il faut s'assurer que $\cos(\varphi_i) > 0$. Or, il est du signe de sa partie réelle, donc du signe de R . C'est bien le cas ici.

Méthode 2 localiser un maximum

Localiser une résonance revient à localiser un maximum d'amplitude. Ne vous précipitez pas sur un calcul de dérivée ! Si le numérateur est constant et positif, un rapport est maximal quand son dénominateur est minimal. Ce cas se rencontre fréquemment.

De même, si le dénominateur se présente comme une racine carrée, inutile de dériver la racine : une racine est minimale quand le terme qui est dessous est lui aussi minimal.

Exercice d'application

L'amplitude de l'intensité passe par un maximum pour $x = x_r$ tel que :

$$x_r - \frac{1}{x_r} = 0 \Rightarrow x_r = 1 \quad \text{donc} \quad I(x_r) = I_{\max} = \frac{E}{R} \quad \varphi_i(x_r) = 0$$

La résonance se produit pour $\omega_r = \omega_0$. Alors, l'intensité est en phase avec la tension délivrée par le générateur, quel que soit le facteur de qualité Q .



À la résonance en intensité, $\underline{Z} = R$. L'impédance du dipôle est purement résistive.

14.2.2 Bande passante à -3 dB

L'origine de cette appellation apparaîtra dans le chapitre 16.

Nous appellerons **bande passante à -3 dB** la plage de pulsation (ou de fréquence) dans laquelle l'amplitude de l'intensité est telle que :

Définition

La **Bande passante à -3 dB** est définie par :

$$\frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \leq I(x) \leq I_{\max}$$

Les frontières de cette plage de valeurs sont appelées **pulsations de coupure** et sont notées ω_{c1} et ω_{c2} ou, en pulsations réduites, x_{c1} et x_{c2} . Ainsi, dans l'exemple de ce paragraphe, cela conduit à une largeur de bande passante :

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1}{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$



$Q = \omega_0/\Delta\omega$ constitue en fait la définition la plus générale du facteur de qualité.

À titre d'exercice, vous pouvez démontrer que $\varphi_i(x_{c1}) = \pi/4$ et $\varphi_i(x_{c2}) = -\pi/4$. Cela peut d'ailleurs être exploité en travaux pratiques pour mesurer les fréquences de coupure.

Il est inutile de chercher à mémoriser les expressions de ω_{c1} et ω_{c2} . Par contre, il est important que se souvenir que la bande passante est d'autant plus étroite que le facteur de qualité est grand.

La résonance en intensité est identique à la résonance en tension aux bornes de R d'après la loi d'Ohm.

14.2.3 Représentation graphique de la résonance en intensité

Les allures de $I(x)$ et $\varphi_i(x)$ sont données figures 14.2 et 14.3.

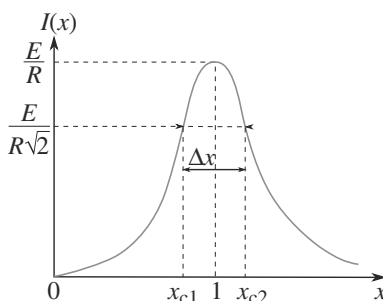


Figure 14.2 Allure de l'amplitude de l'intensité en fonction de la pulsation réduite.

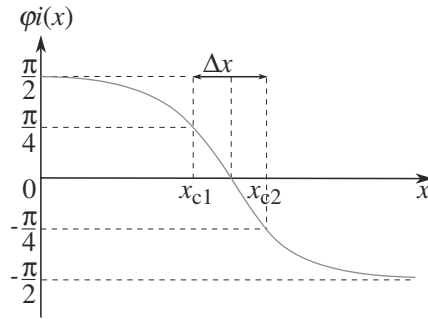


Figure 14.3 Allure du déphasage de l'intensité par rapport à la tension excitatrice en fonction de la pulsation réduite.

14.2.4 Puissance reçue à la résonance

La bobine et le condensateur reçoivent une énergie nulle en moyenne (déphasage $\pm\pi/2$ entre tension et courant) donc la puissance fournie par le générateur est intégralement reçue par la résistance :

$$\mathcal{P} = RI_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2}RI(x)^2$$

Donc \mathcal{P} passe par un maximum en même temps que I , en $x = x_r = 1$: la résonance en intensité s'accompagne d'une résonance en puissance dans le dipôle RLC série.

Loi

Pour la résonance en intensité dans un dipôle RLC série, qui est aussi une résonance en tension aux bornes de la résistance et une résonance en puissance dans le dipôle :

- Il y a résonance pour toute valeur de Q .
- La pulsation de résonance est égale à la pulsation propre : $\omega = \omega_0$.



Aux bords de la bande passante, l'intensité est divisée par $\sqrt{2}$ donc la puissance est divisée par 2 par rapport à son maximum (voir définition de G_{dB} page 246).

14.3 Résonance en tension aux bornes du condensateur

14.3.1 Mise en équation et résolution



Voir vidéo 8 :
Circuit RLC série
en régime forcé

La mise en équation s'obtient en remarquant le pont diviseur de tension, en notant \underline{Z}_C l'impédance du condensateur. Il vient :

$$Ue^{j\varphi_u} = \frac{E}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$



Ne prenez pas l'arctan trop vite, cette fois. Le signe de $\cos(\varphi_u)$ est celui de $1 - LC\omega^2$. Donc si $\omega < \omega_0$, vous pouvez prendre son arctan. Sinon, il faut ajouter π au résultat.

En prenant le module et l'argument, il vient :

$$U(x) = \frac{E}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \quad \tan(\varphi_u)(x) = -\frac{x}{Q(1-x^2)}$$

Ceci est maximal quand le terme sous la racine est minimal. Il n'y a pas de méthode astucieuse cette fois, il faut le dériver :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left((1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \right) (x_r) &= 0 \\ \Rightarrow x_r &= \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \end{aligned}$$

Loi

Pour la résonance en tension aux bornes du condensateur d'un dipôle *RLC* série :

- Il ne peut y avoir résonance que si $Q > 1/\sqrt{2}$.
- Quand elle est définie, la pulsation de résonance **n'est pas égale à la pulsation propre** mais à :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0$$

- Sinon, l'amplitude de la tension n'admet pas de maximum en dehors de $\omega = 0$.

Risque de surtension

L'amplitude de la tension à la résonance sera notée U_{\max} . Si Q est grand, $U_{\max} \simeq QE \gg E$. La tension aux bornes du condensateur peut devenir très élevée et dépasser la tolérance du composant. Cela peut être dangereux : certains condensateurs explosent sous l'effet d'une surtension !

14.3.2 Représentation graphique de la résonance

Les allures de $U(x)$ et $\varphi_u(x)$ sont données figures 14.4 et 14.5.

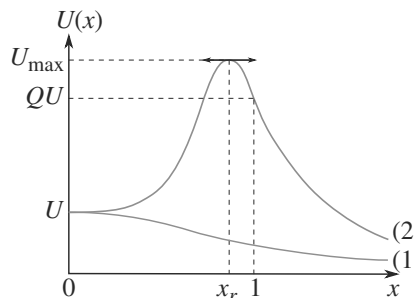


Figure 14.4 Allure de l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur.

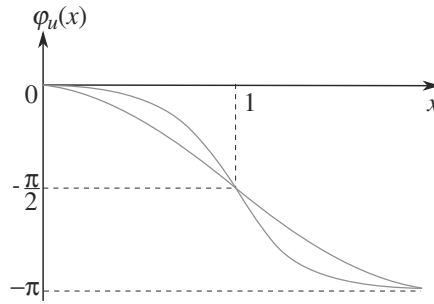


Figure 14.5 Allure du déphasage de la tension aux bornes du condensateur par rapport à la tension excitatrice.



Puisque $\omega_r \neq \omega_0$, la résonance en tension aux bornes du condensateur ne se produit pas en même temps que la résonance en intensité et en puissance.

L'abscisse du maximum de U dépend de Q et tend vers 1 ($\omega_r \rightarrow \omega_0$) lorsque Q devient grand. Dans ces conditions, le pic devient « très pointu », nous dirons que la résonance est aiguë.

Notez en outre l'absence de maximum hors de zéro pour la courbe n°1 (faible Q).

La pente à l'origine est nulle, autrement dit la tangente y est horizontale.

Synthèse

Savoirs

- La résonance en intensité a lieu à la pulsation propre du circuit
- Le facteur de qualité rend compte de l'acuité de la résonance en intensité
- Expression de Q en fonction de la pulsation propre et de la bande passante
- Allure des courbes de résonance en fonction de la valeur de Q
- Non-coïncidence des résonances en intensité et en tension
- Condition de résonance en tension aux bornes du condensateur
- La fréquence de résonance en tension aux bornes de C n'est pas la fréquence propre.

Savoir-faire

- Mettre en place l'étude d'une résonance
- Étudier une amplitude en fonction de la fréquence

Mots-clés

- Résonance,
- bande passante,
- facteur de qualité,
- pulsation propre,
- pulsation de résonance.

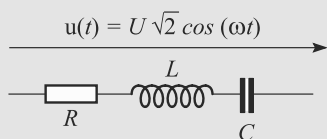
Tests de connaissances

- 14.1 Les résonances se produisent à la pulsation propre des circuits.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 14.2 Il est équivalent d'étudier les résonances en intensité et en tension aux bornes d'une résistance.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 14.3 À la résonance en intensité, l'impédance du dipôle est égale à sa résistance.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 14.4 À la résonance en intensité, l'intensité i dans le circuit et la tension u à ses bornes sont en opposition de phase.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 14.5 Pour repérer les fréquences de coupure à l'oscilloscope, il suffit d'observer un déphasage de $\pi/4$ entre u et i .
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 14.6 La résonance en tension aux bornes d'une bobine est semblable à celle aux bornes d'un condensateur.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 14.7 La résonance en tension aux bornes du condensateur a lieu à une pulsation supérieure à la pulsation propre du circuit.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 14.8 Si $Q > 1/\sqrt{2}$, il y a résonance en tension aux bornes du condensateur et de la bobine.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 14.9 La convention prise pour limiter la bande passante est liée à la transmission de l'énergie.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 14.10 Pour étudier une résonance, il est obligatoire d'utiliser les notations réduites x et Q .
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

14.11 Comportements qualitatifs du dipôle RLC série

Un dipôle RLC série est soumis à une tension $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t)$ (figure 14.6). La résistance est de $10\ \Omega$, la bobine est réelle, de résistance $r < R$ et d'inductance L , le condensateur est idéal et de capacité C .

Figure 14.6 RLC série avec bobine réelle.

La tension efficace aux bornes de la résistance R est notée $u_R(t)$, d'amplitude U_R . Posons $a = U_R/U$.

- Pour une fréquence $f = f_0$, le rapport a passe par un maximum d'amplitude a_0 . Comment s'appelle ce phénomène ? Sachant que $a_0 = 0,7$, déterminez r .
- Prenons $f_0 = 1\ \text{kHz}$ et notons f la fréquence imposée par $u(t)$.
 - Pour $f \ll f_0$, la valeur de a est presque proportionnelle à f . Expliquez pourquoi. Quel est le composant déterminant dans le comportement du dipôle ?
 - Pour $f \gg f_0$, la valeur de a est presque inversement proportionnelle à $1/f$. Même question.

c) Pour $f = 10\ \text{Hz}$, nous mesurons $a = 1,25 \cdot 10^{-4}$. Déduisez-en L et C .

- Déterminez le déphasage en degré de u_R par rapport à u à $980\ \text{Hz}$ et $1\ 020\ \text{Hz}$.

14.12 Résonance dans un dipôle RLC parallèle

Un dipôle RLC parallèle est alimenté par une source idéale de courant de cem $\eta(t) = \eta \cos(\omega t)$ comme illustré 14.7.

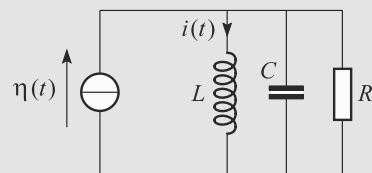


Figure 14.7

- Soit $i(t) = I \cos(\omega t + \varphi)$ l'intensité du courant traversant la bobine. Calculez $I(\omega)$.
- Montrez que $I(\omega)$ admet un maximum en $\omega = \omega_r$ si R est supérieure à une valeur R_l . Vous exprimerez ω_r et R_l en fonction de R , L et C .
- Tracez l'allure de $I(\omega)$ dans les deux cas $R < R_l$ et $R > R_l$.

Exercices d'approfondissement

14.13 Ajustement fin d'une résonance

(D'après ENSAIT.)

Considérons le circuit de la figure 14.8. Le générateur délivre une tension sinusoïdale de valeur efficace E et de fréquence $f = 100$ kHz pour alimenter un dipôle RLC série. Un ampèremètre A permet de mesurer l'intensité efficace I . La capacité C du condensateur est réglable et l'ampèremètre est supposé idéal.

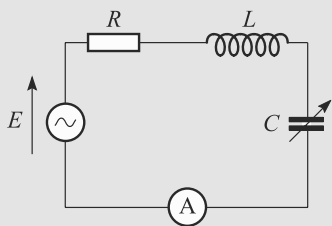


Figure 14.8 Ajustement fin d'une résonance.

Quand la capacité du condensateur varie, l'ampèremètre montre que I passe par un maximum I_0 pour $C = C_0$ et qu'elle est divisée par $\sqrt{2}$ quand C prend deux valeurs $C_1 = 120$ nF $< C_0$ et $C_2 = 130$ nF $> C_0$.

1. En exploitant le fait que les capacités C_1 et C_2 sont proches (différence petite devant C_0), montrez que leurs valeurs sont équidistantes de C_0 . Donnez ces valeurs en fonction de C_0 , R , L et $\omega = 2\pi f$.

Indication : $(1+x)^{-1} \approx 1-x$ si $x \ll 1$.

2. Pourquoi est-il plus intéressant, d'un point de vue expérimental, de connaître C_1 et C_2 que C_0 ?
3. Q , appelé coefficient de surtension ou facteur de qualité, est défini ici par :

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Calculez-le en fonction de C_1 , C_2 . Application numérique : estimez Q pour $C = C_1$, $C = C_2$ et $C = C_0$.

4. La fréquence f étant fixée, calculez les valeurs de R et L en fonction de C_1 , C_2 et f . Applications numériques.

14.14 Résonance dans un circuit RLC parallèle

(D'après Géologie Nancy)

Cet énoncé fait suite à l'exercice 13.16 **Circuit RLC parallèle**. On rappelle que $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ et qu'on y a montré que la sortie à vide du circuit de la figure 14.9 est telle que

$$u_S(t) = U_{Sm} \cos(\omega t + \varphi) \text{ avec } U_{Sm} = \frac{E_m}{\sqrt{4 + R_0^2(C\omega - \frac{1}{L\omega})^2}}$$

$$\text{et } \varphi = -\arctan\left(\frac{R_0}{2}\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right).$$

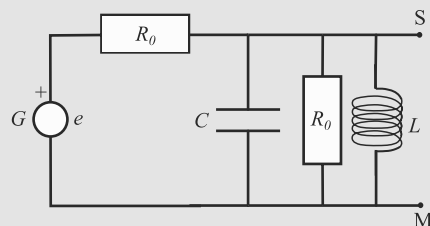


Figure 14.9 Circuit RLC parallèle.

On rappelle que $E_m = 5$ V, $C = 2,53$ μ F et $L = 10$ mH.

1. Montrer que U_{Sm} prend une valeur maximale $U_{Sm\max}$ pour une fréquence f_r à déterminer littéralement puis numériquement.
2. On mesure un déphasage de $\pi/4$ entre $u_S(t)$ et e pour une fréquence de $f_{c1} = 900$ Hz. Est-ce une avance ou un retard ? Déterminer les fréquences de coupure, le facteur de qualité et la valeur de R_0 de ce circuit.
3. La sortie est à présent fermée sur un condensateur de capacité C' . On mesure la fréquence de résonance de la tension de sortie : $f'_r = 800$ Hz. calculer C' .

14.15 Modélisation d'un cristal piézoélectrique

(D'après Concours commun polytechnique : concours national DEUG.)

Une lame piézoélectrique, composant à base de quartz, est équivalente au dipôle AB de la figure 14.10. Elle fonctionne en régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω .

1. Calculez son impédance $\underline{Z} = a + jb$.
2. Déterminez la pulsation ω_r pour laquelle il y a résonance en intensité dans AB . Pour quelle raison physique simple le courant ne peut-il pas être infini ?

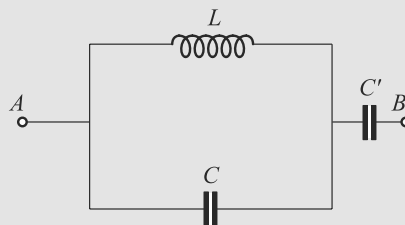


Figure 14.10 Quartz piézoélectrique.

3. Déterminez la pulsation ω_{ar} pour laquelle il y a anti-résonance en intensité (courant nul).
4. Application numérique : calculez ω_r et ω_{ar} pour $L = 2$ mH ; $C = 1$ nF et $C' = 5$ pF.
5. Tracez l'allure de l'amplitude du courant en fonction de ω . Commentaire ?

14.1

Faux, reprenez le cas de la résonance en tension du cours.

14.2

Vrai.

14.3

Vrai.

14.4

Faux : elles sont en phase !

14.5

Vrai, c'est une technique offrant une bonne précision de mesure.

14.6

Vrai et Faux : elles n'ont pas lieu pour une même fréquence mais pour des fréquences symétriques par rapport à la fréquence propre et font toutes deux apparaître des surtensions pour $Q > 1/\sqrt{2}$.

14.7

Faux, c'est l'inverse.

14.8

Vrai mais pas à la même fréquence.

14.9

Vrai la bande passante est l'ensemble de fréquences telles que le circuit transmet la moitié de l'énergie disponible dans le signal au maximum.

14.10

Faux. On peut, bien sûr, étudier les résonances sur des équations non réduites. Les notations réduites sont là pour mettre en évidence les caractères communs à toutes ces résonances.

14.11

Comportements qualitatifs du dipôle RLC série

La seule différence avec le cas du cours est la présence d'une résistance interne dans la bobine. Le calcul reste très proche, mais cela illustre la nécessité d'apprendre la logique du calcul et surtout pas des résultats qui ne sont que des cas particuliers.

Remarquez bien que cet exercice étudie une résonance en intensité : il travaille sur u_R , qui est la tension aux bornes d'une résistance et donc proportionnelle à l'intensité traversant le dipôle.

Cet exercice peut être considéré comme un exercice de vitesse. Les questions sont simples et courtes, donc l'objectif

est de les traiter rapidement pour, en écrit de concours, garder du temps pour d'autres exercices plus difficiles.

1. Quand une amplitude passe par un maximum pour une certaine fréquence, on dit qu'il y a résonance.

Soit \underline{U} l'amplitude efficace associée à u et \underline{U}_R celle associée à u_R . Par pont diviseur de tension :

$$\frac{U_R}{U} = \frac{R}{R + r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \quad (14.1)$$

$$\Rightarrow a = \frac{R}{\sqrt{(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad (14.2)$$

a est maximale quand son dénominateur est minimal, car son numérateur est constant. Cela se produit quand :

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

D'où l'amplitude réduite à la résonance :

$$a_{\max} = \frac{R}{R+r}$$

$$\Rightarrow r = R\left(\frac{1}{a_{\max}} - 1\right) = 4,29 \, \Omega$$

2. a) À basse fréquence, le terme issu du condensateur domine dans l'expression (14.1) :

$$a \approx \frac{R}{\sqrt{\left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} = 2\pi RCf \quad (14.3)$$

ce qui explique pourquoi a apparaît proportionnelle à f .

b) De même, à haute fréquence, c'est le terme issu de la bobine qui domine :

$$a \approx \frac{R}{\sqrt{(L\omega)^2}} = \frac{R}{2\pi Lf}$$

ce qui explique pourquoi a apparaît inversement proportionnelle à f .

c) Ici $f \ll f_0$. Alors l'expression (14.3) permet de déterminer C :

$$C = \frac{a}{2\pi Rf} = 1,99 \cdot 10^{-1} \, \mu\text{F}$$

L'expression de la fréquence de résonance permet d'en déduire L :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2 C f_0^2} = 127 \, \text{mH}$$

3. Soit φ le déphasage cherché :

$$\begin{aligned}\varphi &= \arg\left(\frac{U_R}{U}\right) \\ &= \arg\left(\frac{R}{R + r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}\right) \\ \varphi &= -\arg\left(R + r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right)\end{aligned}$$

La partie réelle de ce nombre complexe est $R + r$, toujours positive. D'où :

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R + r}\right)$$

Donc $\varphi(980 \text{ Hz}) = 66,2^\circ$ et $\varphi(1020 \text{ Hz}) = -65,7^\circ$. Le passage à la résonance fait donc varier brutalement le déphasage (facteur de qualité élevé).

14.12 Résonance dans un dipôle RLC parallèle

Une fois les calculs posés, cet exercice très classique se ramène au cas du cours. L'énoncé sous-entendant que la résonance n'existe pas toujours, vous devez faire le rapprochement avec la résonance en tension dans le dipôle RLC série.

1. Le courant dans la bobine se calcule par un pont diviseur de courant :

$$\begin{aligned}\underline{I} &= \frac{\frac{1}{jL\omega}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega} \underline{\eta} \\ &= \frac{1}{1 - LC\omega^2 + j\frac{L\omega}{R}} \underline{\eta} \\ \Rightarrow I(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2}} \underline{\eta}\end{aligned}$$

en remarquant que $\underline{\eta} = \eta$.



Cette forme est similaire à celle obtenue pour la résonance en tension dans le RLC série. Attendez-vous donc à des calculs du même genre.

2. I est maximale quand l'argument sous la racine est minimal. Dérivons-le :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega} \left((1 - LC\omega^2)^2 + \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2 \right) &= 0 \\ \Rightarrow \omega_r^2 &= \frac{1}{LC} - \frac{1}{2R^2C^2}\end{aligned}$$

Cette valeur ne définit une pulsation de résonance que si elle est positive, alors :

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2R^2C^2}} \quad \text{si} \quad R_l = \sqrt{\frac{L}{2C}}$$

3. Le graphe est donné figure 14.11. La courbe correspondant à $R > R_l$ montre un maximum et donc une résonance en intensité, tandis que la courbe $R < R_l$ ne présente pas de résonance.

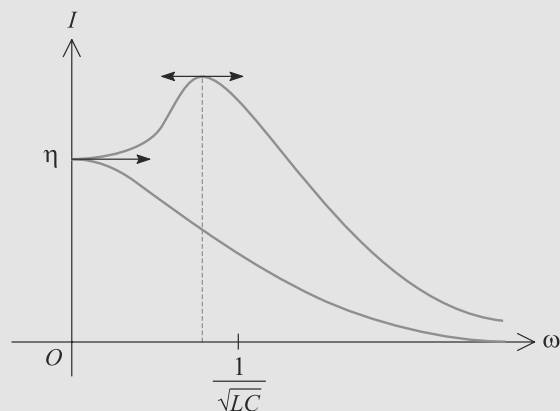


Figure 14.11 Courbe de résonance en intensité.

14.13 Ajustement fin d'une résonance

Cet exercice n'est rien d'autre que l'étude du RLC que vous avez vu en cours, mais il la prolonge d'une manière un peu originale. Assurez-vous donc que vous maîtrisez le cas du cours : les formules ne sont pas à savoir par cœur, mais il est indispensable de savoir les rétablir très rapidement.

1. L'intensité complexe \underline{i} est donnée par la loi d'Ohm, sachant que la tension aux bornes de l'ampèremètre est nulle puisqu'il est idéal :

$$\begin{aligned}\underline{I} &= \frac{E}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \\ \Rightarrow I &= \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{jC\omega}\right)^2}}\end{aligned}$$

Le numérateur étant constant positif, cette fraction est maximale quand son dénominateur est minimal, donc quand :

$$\begin{aligned}L\omega - \frac{1}{C_0\omega} &= 0 \\ \Rightarrow C_0 &= \frac{1}{L\omega^2} \quad \text{et} \quad I_0 = \frac{E}{R}\end{aligned}$$

Pour C_1 et C_2 , l'intensité efficace vaut donc :

$$\begin{aligned}I &= \frac{I_0}{\sqrt{2}} \\ \Rightarrow \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{jC\omega}\right)^2}} &= \frac{E}{R\sqrt{2}} \\ \Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} &= \pm R\end{aligned}$$

d'où les valeurs possibles pour C :

$$C = \frac{1}{L\omega^2 \pm R\omega}$$

Si les variations sont faibles, $R\omega \ll L\omega^2$, d'où :

$$C = \frac{1}{L\omega^2} \frac{1}{1 \pm \frac{R}{L\omega}} \approx \frac{1}{L\omega^2} \left(1 \pm \frac{R}{L\omega} \right)$$

Les deux valeurs sont alors bien équidistantes de C_0 avec :

$$C_1 = C_0 \left(1 - \frac{R}{L\omega} \right)$$

$$C_2 = C_0 \left(1 + \frac{R}{L\omega} \right)$$

2. C_0 correspond à un maximum de I donc sa détermination expérimentale à l'ampèremètre est peu précise : de fortes variations de C autour de C_0 entraînent de faibles variations de I autour de I_0 (dérivée très faible au voisinage d'un maximum).

Par contre, quand C vaut C_1 ou C_2 , la dérivée de I n'est pas nulle, donc la position de la valeur de C cherchée est repérable avec une meilleure précision.

Une fois C_1 et C_2 déterminés avec une bonne précision, C_0 s'en déduit par demi-somme.

3. D'après les relations déjà établies :

$$C_1 + C_2 = 2C_0 = 2 \frac{2}{L\omega^2}$$

$$\Rightarrow L = \frac{2}{(C_1 + C_2)\omega^2}$$

et :

$$C_2 - C_1 = \frac{2RC_0}{L\omega}$$

$$\Rightarrow R = \frac{(C_2 - C_1)L\omega}{2C_0}$$

$$= \frac{2(C_2 - C_1)}{(C_1 + C_2)^2\omega}$$

D'où le facteurs de qualité pour C quelconque :

$$Q = \sqrt{\frac{(C_1 + C_2)^3}{2C(C_2 - C_1)^2}}$$

et les valeurs particulières :

$$Q_1 = \sqrt{\frac{(C_1 + C_2)^3}{2C_1(C_2 - C_1)}} \approx 25,5$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{(C_1 + C_2)^3}{2C_2(C_2 - C_1)}} \approx 24,5$$

$$Q_0 = \frac{C_1 + C_2}{C_2 - C_1} \approx 25,0$$

4. Sachant que $\omega = 2\pi f$, il vient :

$$R = \frac{(C_2 - C_1)}{(C_1 + C_2)^2\pi f} \approx 0,509 \, \Omega$$

$$L = \frac{1}{(C_1 + C_2)2\pi^2 f^2} \approx 2,03 \cdot 10^{-2} \, \text{mH}$$

Ce sont des valeurs très faibles, donc la situation de cet exercice n'est réalisable qu'avec du matériel de précision.

14.14

Résonance dans un circuit RLC parallèle

Méthode mise en jeu : n°2.

On utilise les techniques habituelles pour l'étude de la résonance dans un cadre un peu différent de celui du circuit RLC série. Attention à ne pas sombrer dans des calculs effrénés et à garder en tête le but poursuivi.

1. La valeur maximale de U_{Sm} est obtenue lorsque le carré du dénominateur est minimal. 4 étant constant, ce minimum est obtenu pour $C\omega - \frac{1}{L\omega} = 0$ et donc pour la fréquence

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ soit numériquement } 1\,000 \, \text{Hz. Ce maximum}$$

$$\text{vaut donc } U_{S\max} = \frac{E_m}{2} \text{ soit numériquement } 2,5 \, \text{V.}$$

2. Comme f_{c1} est inférieure à f_r , il s'agit de la plus petite fréquence de coupure : φ est positif et u_S est en avance sur e . Les deux fréquences de coupure vérifient par ailleurs :

$$\frac{U_{S\max}}{\sqrt{2}} = \frac{E_m}{\sqrt{4 + R_0^2(C\omega_c - \frac{1}{L\omega_c})^2}} = \frac{E_m}{2\sqrt{2}}$$

et donc $R_0^2(C\omega - \frac{1}{L\omega})^2 = 4$ qui peut aussi s'écrire : $C\omega - \frac{1}{L\omega} = \pm \frac{2}{R_0}$ ou encore $CL\omega^2 \pm \frac{2L\omega}{R_0} - 1 = 0$. On en tire alors les deux racines positives :

$$\omega_c = \frac{\pm \frac{L}{R_0} + \sqrt{\frac{L^2}{R_0^2} + LC}}{LC}$$

ou en fréquence :

$$f_c = \frac{\pm \frac{1}{CR_0} + \sqrt{\frac{1}{C^2R_0^2} + \frac{1}{LC}}}{2\pi}$$

qui donnent des déphasages de $\pm \frac{\pi}{4}$. Le produit des deux fréquences donne $(\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}})$ soit f_r^2 : on obtient donc $f_{c1} = 900 \, \text{Hz}$ donné par le texte, et $f_{c2} = f_r^2/f_{c1} = 1\,110 \, \text{Hz}$. On en déduit $Q = \frac{f_r}{f_{c2} - f_{c1}} = 4,74$.

La valeur littérale de Q étant $R_0 \sqrt{\frac{C}{L}}$, on en déduit :

$$R_0 = Q \sqrt{\frac{L}{C}} = 298 \Omega.$$



Les calculs peuvent bien sûr être menés différemment. On peut tirer de f_{c1} , la valeur de R_0 et en déduire le reste.

1. Le condensateur placé en sortie est en parallèle avec celui du circuit : tout se passe comme si dans le problème précédent C était remplacé par $C + C'$. La nouvelle valeur de résonance est alors $f'_r = \frac{1}{2\pi \sqrt{L(C + C')}}}$. On en déduit la valeur de C' :

$$C' = \frac{1}{4\pi^2 f_r^2 L} - C$$

soit numériquement : 1,43 μF .

14.15 Modélisation d'un cristal piézoélectrique

Les calculs suivent la même logique que le cours, mais ils sont menés sur l'impédance et non sur l'intensité ou la tension. Cela ne change rien. Qualitativement, cela se comprend bien : si l'impédance est petite, la loi d'Ohm nous permet de dire que le courant traversant la lame est grand, ce qui ramène au cas de la résonance en intensité vu en cours.

1. Le condensateur C' est en série avec l'assemblage parallèle de L et C :

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{1}{\frac{1}{jL\omega} + jC\omega} + \frac{1}{jC'\omega} \\ &= j \left(\frac{L\omega}{1 - LC\omega^2} - \frac{1}{C'\omega} \right) \end{aligned}$$

D'où, par identification :

$$a = 0$$

$$b = \frac{L\omega}{1 - LC\omega^2} - \frac{1}{C'\omega}$$

2. Soit $\underline{U} = U$ l'amplitude complexe de la tension u , prise comme référence de tension, et \underline{I} celle du courant i . D'après

la loi d'Ohm :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \Rightarrow I = \frac{U}{\left| \frac{L\omega}{1 - LC\omega^2} - \frac{1}{C'\omega} \right|}$$

Cette amplitude est maximale quand son dénominateur est minimal, puisque son numérateur est constant et positif. Le dénominateur est toujours positif et peut s'annuler donc sa valeur minimale est nulle :

$$\begin{aligned} |b(\omega_r)| = 0 &\Rightarrow LC'\omega^2 - (1 - LC\omega^2) = 0 \\ &\Rightarrow \omega_r = \sqrt{\frac{1}{L(C + C')}} \end{aligned}$$

L'amplitude de l'intensité est alors infinie. Mais en fait le dipôle AB ne peut pas avoir une résistance nulle (partie réelle de l'impédance) et le courant ne sera alors pas infini à la résonance.

3. Le courant est nul pour $|b(\omega_{ar})| = +\infty$ donc $1/|b(\omega_{ar})| = 0$:

$$\frac{(1 - LC\omega_{ar}^2)C'\omega_{ar}}{L(C + C')\omega_{ar}^2 - 1} = 0 \Rightarrow \omega_{ar} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

4. Numériquement, $\omega_r \approx 7,05 \cdot 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_{ar} \approx 7,07 \cdot 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$.
5. Voir figure 14.12. La différence entre les deux pulsations de résonance et d'antirésonance est très faible, ce qui implique que la résonance est très aiguë.

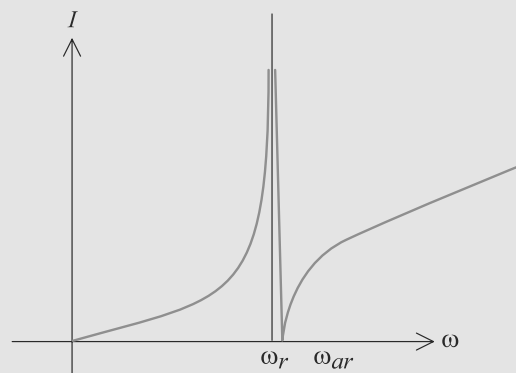


Figure 14.12 Résonance et antirésonance dans le quartz piézoélectrique.

Plan

15.1	Étude de l'AO	232
15.2	Montages simples à base d'AO en régime linéaire	234
15.3	Équation différentielle	237
	Synthèse	238
	Tests et exercices	239
	Corrigés des exercices	241

Introduction

Introduisons un nouveau composant actif, l'amplificateur opérationnel (AO). Il trouvera l'essentiel de son utilisation dans le cadre du filtrage linéaire (chapitre 16).

Prérequis

- Lois des nœuds et des mailles
- Lois en régime linéaire
- Notations complexes

Objectifs

- Introduire le modèle idéal de l'amplificateur opérationnel (AO)
- Introduire le théorème de Millman
- Reconnaître les fonctionnements en régime linéaire de l'AO
- Présenter les montages classiques utilisant l'AO en régime linéaire (suiveur, non inverseur, intégrateur)

15.1 Étude de l'AO

15.1.1 Modélisation de l'AO réel

L'amplificateur opérationnel, est un composant à deux entrées et une sortie, dont le principe est modélisé figure 15.1.



En travaux pratiques, vous avez dû remarquer que l'AO a plus de trois bornes. Il ne faut pas oublier son alimentation, non représentée sur les schémas habituellement mais indispensable pour un composant actif !

La position de la masse dans un circuit à AO est imposée par l'alimentation de celui-ci.

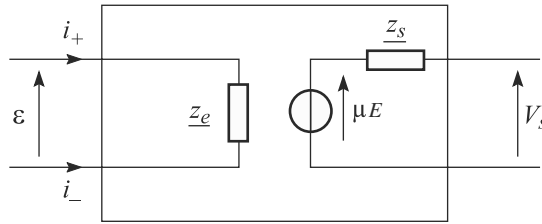


Figure 15.1 AO réel.



μ , sans dimension, s'appelle le **gain** de l'AO et est numériquement très élevé, de l'ordre de 10^5 .

Son impédance d'entrée Z_e est typiquement très élevée, de sorte que les courants d'entrée i_+ et i_- sont très faibles. Son impédance de sortie Z_s est au contraire très faible. La caractéristique 15.2 met en évidence les deux régimes, linéaire quand $V_s = \mu(V_+ - V_-)$ et saturé quand $V_s = \pm V_{\text{sat}}$.

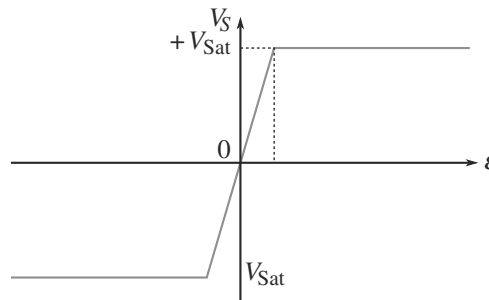


Figure 15.2 Caractéristique d'un amplificateur opérationnel réel.

L'AO que vous manipulez en travaux pratiques a des limitations technologiques : tension et courant de sortie limités (conduisant à des problèmes de saturation même dans le régime linéaire), fréquence limitée, vitesse de balayage limitée. Il est en outre fragile, vérifiez bien son câblage avant d'allumer la moindre source ! Ce n'est pas un composant de puissance, il ne peut pas débiter plus de 1 W environ.

15.1.2 L'AO idéal

L'AO idéal (figure 15.3) est la limite obtenue quand Z_e est infinie (donc les courants d'entrée nuls), Z_s nulle et μ infini. Son fonctionnement se réduit alors à celui de la figure 15.4. Il répond de la même manière à toute fréquence.

Le régime linéaire est caractérisé par $\varepsilon = 0$, de sorte que $V_s = \mu\varepsilon$ est finie.

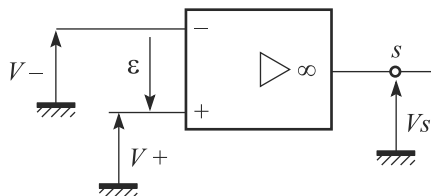


Figure 15.3 Amplificateur opérationnel.



C'est un composant *actif*, donc la loi des noeuds ne s'applique pas à ses bornes : $i_s \neq i_+ + i_-$. Il faudrait prendre en compte les courants venant de l'alimentation.

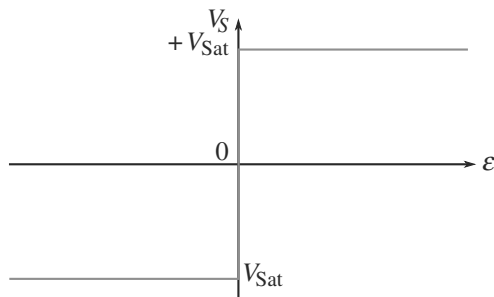


Figure 15.4 Caractéristique d'un amplificateur opérationnel idéal.

Loi

Pour un amplificateur opérationnel idéal on a : $i_+ = i_- = 0$

- en régime linéaire : $V_+ = V_-$, V_s doit être déterminée par le calcul
- en régime saturé : $V_s = V_{sat}$ si $V_+ > V_-$ et $V_s = -V_{sat}$ si $V_+ < V_-$



Si jamais un montage présente deux boucles de rétroaction de la sortie vers chacune des entrées, vous devrez supposer que la boucle sur l'entrée inverseuse l'emporte et maintient le régime linéaire.

Pour pouvoir marcher en régime linéaire, l'amplificateur doit être muni d'une **boucle de rétroaction**, un chemin électrique de la sortie vers son entrée inverseuse.

15.2 Montages simples à base d'AO en régime linéaire

15.2.1 Préliminaire : théorème de Millman

Ce théorème permet de calculer le potentiel d'un nœud N en fonction des potentiels des nœuds voisins. C'est en fait une loi des nœuds écrite en N sans passer par les courants.

Méthode 1 utiliser le théorème de Millman

Ce théorème s'applique à un nIJud, noté ici N , et permet de calculer V_N .

1. Comptez le nombre de branches aboutissant à ce nIJud. Le théorème ne peut s'appliquer que si les branches contiennent uniquement des impédances (bobines, condensateurs, résistances). Une branche dans laquelle ne circule aucun courant ne « compte pas » pour ce théorème.
2. Placez la masse à l'endroit de votre choix dans le circuit (mais pas en N) pour simplifier au maximum les calculs ultérieurs.
3. Pour la branche numéro k , repérez bien le nIJud qui suit N (appelé « autre extrémité de la branche ») et notez son potentiel V_k (éventuellement nul, s'il est à la masse).
4. Le potentiel V_N s'écrit alors :

$$\left(\sum_k \frac{1}{Z_k} \right) V_N = \sum_k \frac{V_k}{Z_k}$$



- Si une des branches ne contient qu'une source idéale de tension, d'une part le théorème de Millman ne s'applique pas, mais en plus la valeur de \underline{V}_N est déjà connue : elle est imposée par la source !
- La masse peut être placée librement, mais elle doit être unique ! Si vous utilisez le théorème de Millman plusieurs fois dans un même circuit, veillez à garder la même masse de l'un à l'autre.

Exemple d'application

Vous trouverez plus bas plusieurs utilisations du théorème de Millman sur des exemples que vous avez normalement vus en cours.

Méthode 2 Étudier un montage à AO en régime linéaire

Vous pouvez identifier un AO en régime linéaire à la présence de la boucle de rétroaction de la sortie vers l'entrée $-$. Cette linéarité autorise alors à utiliser le formalisme complexe du chapitre 13.

Commencez toujours par faire l'inventaire des tensions qui sont clairement égales, par exemple pour deux nœuds reliés par un fil et, bien sûr, $\underline{V}_+ = \underline{V}_-$.

Ensuite, il est judicieux d'utiliser le théorème de Millman sur les entrées. Cela est possible puisqu'aucun courant n'entre dans l'AO par ses entrées. L'application de $\underline{V}_+ = \underline{V}_-$ conduit en général à de grandes simplifications.

Ne cherchez pas à appliquer le théorème de Millman sur la borne de sortie. Il n'est pas faux, mais vous ne connaissez rien du contenu de la branche sortant de l'AO.

Exemple d'application

Vous trouverez plus bas plusieurs utilisations du théorème de Millman sur des exemples que vous avez normalement vus en cours.

15.2.2 Amplificateur non inverseur

Le montage est celui de la figure 15.5. L'AO est bien en régime linéaire, du fait de la boucle de rétroaction contenant R_2 .

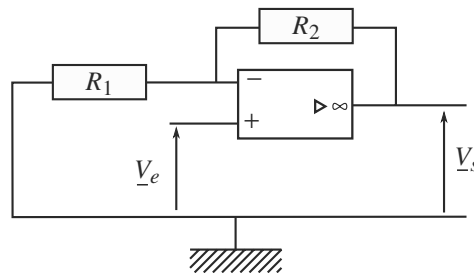


Figure 15.5 Montage amplificateur non inverseur.

Nous avons deux relations sur les tensions : $\underline{V}_+ = \underline{V}_-$ car le régime est linéaire et $\underline{V}_+ = \underline{V}_e$ d'après le montage.

Appliquons le théorème de Millman sur l'entrée $-$. La masse est choisie comme indiquée sur la figure. Trois branches partent de ce nœud mais celle correspondant à la borne d'entrée $-$ n'est traversée par aucun courant. Il reste donc la branche contenant R_1 (potentiel



En cours, vous avez dû voir un autre montage très similaire, l'amplificateur inverseur.

à l'autre extrémité) et celle contenant R_2 (potentiel à l'autre extrémité \underline{V}_s).

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \underline{V}_- = \frac{\underline{V}_s}{R_2} \Rightarrow \underline{V}_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \underline{V}_e$$

Ce montage amplifie le signal d'entrée sans le déphaser (figure 15.6).

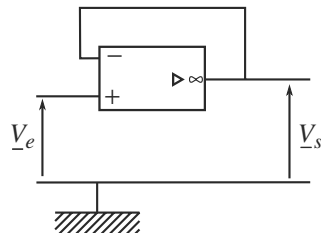


Figure 15.6 Montage suiveur.

15.2.3 Suiveur

Considérons le cas particulier du montage précédent où $R_2 = 0$ et $R_1 \rightarrow +\infty$, représenté figure 15.6. C'est le montage suiveur : $\underline{V}_s = \underline{V}_e$.



L'intérêt de ce montage apparaîtra plus clairement dans le chapitre 16. Il transmet la tension d'entrée quel que soit ce qui est branché derrière. Cela s'appelle une **adaptation d'impédance**.

15.2.4 Intégrateur simple idéal

Le montage est celui de la figure 15.7. L'AO est en régime linéaire grâce à la boucle de rétroaction contenant le condensateur.

Relations entre tensions : $\underline{V}_+ = \underline{V}_-$ car le régime est linéaire et $\underline{V}_+ = 0$.

La masse est choisie comme indiquée sur la figure. Le théorème de Millman s'écrit :

$$\left(\frac{1}{R} + jC\omega\right) \underline{V}_- = \frac{\underline{V}_e}{R} + jC\omega \underline{V}_s \Rightarrow \underline{V}_s = -\frac{\underline{V}_e}{jRC\omega}$$

L'intérêt de ce montage apparaît en revenant à l'équation différentielle réelle :

$$\underline{V}_s = -\frac{\underline{V}_e}{jRC\omega} \Rightarrow v_s(t) = -\frac{1}{RC} \int v_e(t) dt$$

Le signal de sortie est proportionnel à l'intégrale du signal d'entrée.

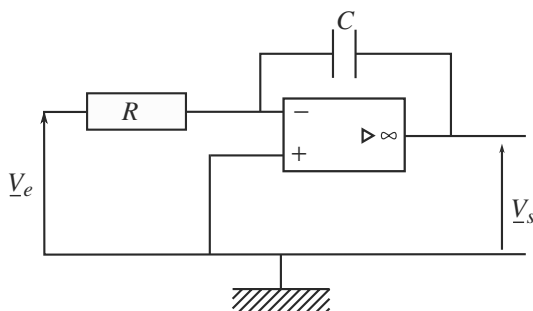


Figure 15.7 Montage intégrateur simple.



En pratique, ce montage dérive jusqu'à la saturation de manière incontrôlable. Il n'est donc pas utilisable en l'état.



En cours, vous avez peut-être vu un montage très similaire, le dérivateur simple.

15.3 Équation différentielle

La résolution par la méthode complexe ne fournit, semble-t-il, que la solution valable en régime sinusoïdal forcé. En fait, elle est beaucoup plus générale que ça.

Méthode 3 revenir à l'équation différentielle

Quand vous avez la relation complexe entre tension d'entrée $\underline{V_e}$ et tension de sortie $\underline{V_s}$, vous pouvez remonter à l'équation différentielle gouvernant $v_s(t)$.

1. Écrivez la relation complexe entre $\underline{V_s}$ et $\underline{V_e}$ de manière à avoir des expressions polynômiales en $j\omega$ avec $\underline{V_s}$ d'un côté du signe égal et $\underline{V_e}$ de l'autre.
2. Revenez aux notations réelles, $j\omega$ devenant une dérivée par rapport au temps et $1/j\omega$ une primitive. Vous obtenez l'équation différentielle valable dans tout régime.

Exemple d'application

Dans le circuit de la figure 15.8, déterminez l'équation différentielle gouvernant $v_s(t)$ en régime quelconque.

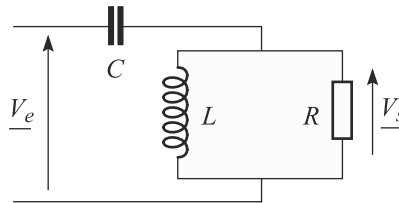


Figure 15.8 Recherche d'une équation différentielle par la méthode complexe.

Solution

Soit \underline{Z} l'impédance équivalente à l'association parallèle de R et L :

$$\underline{Z} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} \right)^{-1}$$

Par pont diviseur de tension :

$$\begin{aligned} \underline{V_s} &= \frac{\underline{Z}}{\frac{1}{jC\omega} + \underline{Z}} \underline{V_e} = \frac{1}{\frac{1}{jC\omega \underline{Z}} + 1} \underline{V_e} \\ &= \frac{RLC(j\omega)^2}{RLC(j\omega)^2 + jL\omega + R} \underline{V_e} \end{aligned}$$

D'où l'équation complexe :

$$(RLC(j\omega)^2 + jL\omega + R) \underline{V_s} = RLC(j\omega)^2 \underline{V_e}$$

qui se ramène à l'équation différentielle :

$$RLC\ddot{v}_s(t) + L\dot{v}_s(t) + Rv_s(t) = RLC\ddot{v}_e(t)$$

Synthèse

Savoirs

- Caractéristique d'un AO idéal
- Théorème de Millman
- Montages amplificateur non inverseur, suiveur et intégrateur
- Conditions sur l'entrée pour observer $\pm V_{\text{sat}}$ en sortie

Savoir-faire

- Reconnaître sur un schéma de montage un AO en régime linéaire ou en régime saturé
- Obtenir V_s en fonction de V_e en régime sinusoïdal et en régime quelconque

Mots-clés

- AO idéal,
- régime linéaire,
- théorème de Millman,
- entrées inverseuse et non inverseuse,

Tests de connaissances

- 15.1 C'est le continu de l'alimentation qui donne l'énergie nécessaire à l'amplification des signaux par l'AO.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 15.2 La masse d'un montage à AO peut être prise n'importe où.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 15.3 La sortie de l'AO idéal est une source idéale de tension.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 15.4 Une rétroaction sur l'entrée + est déstabilisante : l'AO est mené à saturation.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 15.5 Un fil de conduction assure la même fonction qu'un montage suiveur.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 15.6 Si l'on place plusieurs montages à AO en cascade, ils fonctionnent de la même manière que s'ils étaient séparés les uns des autres.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

15.7 Montage convertisseur

(D'après Banque agro.)

Soit le montage de la figure 15.9. Exprimez la tension de sortie V_0 en fonction du courant d'entrée I , de la tension de référence $V_{\text{réf}}$ et de R .

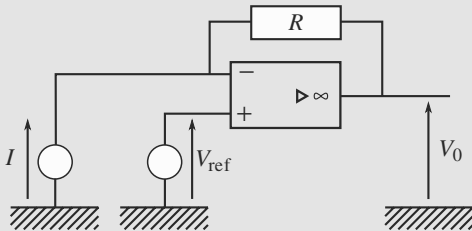


Figure 15.9 Montage convertisseur.

15.8 Montage soustracteur

(D'après Banque agro.)

Soit le montage de la figure 15.10. Exprimez V_s en fonction des tensions d'entrée V_{e1} et V_{e2} .

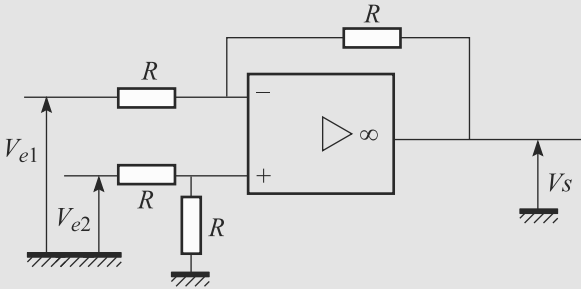


Figure 15.10 Montage soustracteur.

15.9 Montage à résistance négative

(D'après ENSI TSI.)

- Considérez le montage de la figure 15.11, où le condensateur est supposé idéal et la bobine non idéale (modélisée par une résistance r en série avec une inductance L). Initialement, le condensateur est chargé et la bobine déchargée.

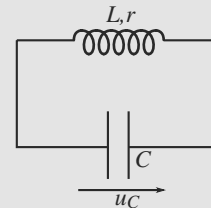


Figure 15.11 Montage avec pertes d'énergie.

- L'évolution temporelle de la tension $u_C(t)$ est suivie à l'oscilloscope et tracée figure 15.12. Commentez cette figure.
 - Déterminez graphiquement la pseudopériode T et le décroissement logarithmique δ du régime. Échelles de la figure 15.12 : 1 $\mu\text{s}/\text{div}$ et 0,5 V/div.
- Afin de pouvoir générer un véritable régime sinusoïdal dans la bobine et le condensateur, insérons dans le circuit un montage dit « à résistance négative » (figure 15.13). L'amplificateur opérationnel est supposé idéal et fonctionnant en régime linéaire.

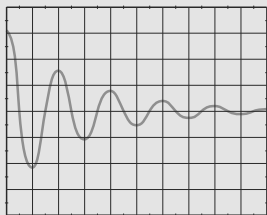


Figure 15.12 Allure de la tension $u_c(t)$ sans correction.

a) Le nouveau signal observé est donc celui de la figure 15.14. Le calibre horizontal est de $0,5 \mu\text{s}/\text{div}$.

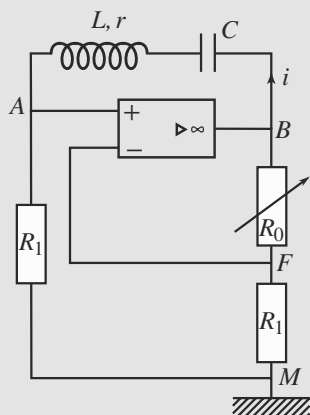


Figure 15.13 Montage à résistance négative.

Déterminez graphiquement la nouvelle pseudopériode T' . Commentez l'intérêt du montage à résistance négative.

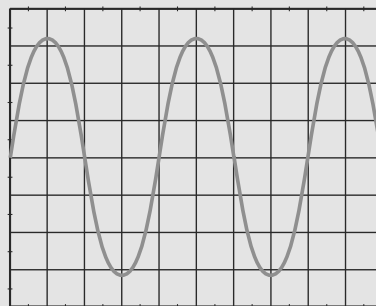


Figure 15.14 Signal de sortie corrigé.

- b) Pour comprendre l'influence de ce montage, montrez que la tension u_{AB} est reliée au courant i par la relation $u_{AB} = -Ri$ où vous exprimerez R en fonction des résistances du montage.
- c) Déduisez-en l'équation différentielle qui gouverne $u_c(t)$ dans ces conditions. Commentez et donnez, en particulier, la valeur qu'il faut donner à R_0 pour observer le régime sinusoïdal.
- d) Expliquez en quoi l'utilisation d'une capacité C réglable permet de contrôler la fréquence du régime sinusoïdal.

15.1

Vrai

15.2

Faux. La masse d'un montage à AO est prise en relation avec son alimentation (couramment, c'est le point milieu des alimentations symétriques de l'AO).

15.3

Vrai car l'impédance de sortie est nulle.

15.4

Vrai.

15.5

Vrai et Faux. En fait ils ont même fonction de transfert ($v_s = v_e$) mais pas les même impédances d'entrée et de sortie : le fil ne réalise pas d'adaptation d'impédance.

15.6

Vrai, Ceci grâce à l'impédance de sortie nulle des AO.

15.7

Montage convertisseur

Les seuls dipôles passifs sont des résistances. Donc la loi d'Ohm et les propriétés du régime linéaire de l'AO sont suffisantes pour la résolution.

Le courant I traverse intégralement la résistance R puisqu'aucun courant ne pénètre dans l'amplificateur opérationnel. Donc la loi d'Ohm s'écrit $V_- - V_0 = RI$.

L'amplificateur est en régime linéaire grâce à la boucle de rétroaction donc $V_+ = V_-$. Par ailleurs $V_+ = V_{\text{réf}}$ D'où :

$$V_0 = V_{\text{réf}} - RI$$

Ce dispositif permet donc de convertir un courant en tension.



Il n'a pas été nécessaire d'utiliser la notation complexe. L'utiliser est bien entendu possible.

15.8

Montage soustracteur

Même analyse que dans l'exercice 7. Le plus important est de savoir interpréter le résultat et déterminer l'utilité du montage.

Le théorème de Millman aux entrées + et - donne :

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right)V_+ = \frac{V_{e2}}{R}$$

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right)V_- = \frac{V_{e1}}{R} + \frac{V_s}{R}$$

Comme $V_+ = V_-$, les deux membres de gauche sont égaux. D'où :

$$\frac{V_{e2}}{R} = \frac{V_{e1}}{R} + \frac{V_s}{R} \Rightarrow V_s = V_{e2} - V_{e1}$$

Cela justifie l'appellation de montage soustracteur : le signal de sortie est la différence des signaux d'entrée.

15.9

Montage à résistance négative

Cet exercice présente peu de difficultés techniques, mais exige un minimum de rédaction pour montrer au correcteur que vous avez bien compris l'intérêt du montage à résistance négative et son utilisation. Le nom même de ce montage, qui vous est donné, doit vous aider à anticiper certains éléments de réponse !

1. a) La partie résistive de la bobine fait que l'association série LC se comporte comme un dipôle RLC série étudié en cours. La figure montre qu'un régime pseudopériodique s'y est installé : la partie résistive r entraîne une dissipation d'énergie, assez faible pour que des oscillations soient tout de même visibles.

b) Pour une meilleure précision sur T , mesurons l'écart d'abscisse sur trois pseudopériodes et divisons par trois :

$$3T = 6 \mu\text{s} \Rightarrow T = 2 \mu\text{s}$$

Le décrétement logarithmique est constant puisque le régime est sinusoïdal pseudopériodique. Pour plus de précision, prenons le premier et le troisième maxima, d'ordonnées u_1 et u_3 :

$$2\delta = \ln\left(\frac{u_3}{u_1}\right) = \ln\left(\frac{3,2}{0,8}\right)$$

donc $\delta = 69\%$.

2. a) Mesurons T' sur deux périodes : $2T' = 4 \mu\text{s}$ donc $T' \approx 2 \mu\text{s}$. Nous trouvons la même valeur que précédemment, mais cette fois le régime est vraiment périodique sinusoïdal. Le montage à résistance négative a compensé l'amortissement dû aux pertes par effet Joule dans r .

b) L'AO est en régime linéaire donc $V_+ = V_-$.

Avec le choix de masse de l'énoncé, le potentiel V_- est égal à la tension V_F . Utilisons alors un simple pont diviseur de tension :

$$V_F = V_- = \frac{R_1}{R_1 + R_0} V_B$$



Si ce n'est pas encore le cas, entraînez-vous à bien voir ce pont diviseur. Au pire, le théorème de Millman en F vous donnera le même résultat un peu moins efficacement.

La loi d'Ohm appliqué à la résistance R_1 branchée sur l'entrée + de l'AO s'écrit $\underline{V_+} = R_1 \underline{I}$. En outre, $\underline{V_A} = \underline{V_+}$. En combinant les deux résultats, il vient $(R_1 + R_0) \underline{I} = \underline{V_B}$. D'où la tension cherchée :

$$\begin{aligned}\underline{U_{AB}} &= \underline{V_A} - \underline{V_B} \\ &= R_1 \underline{I} - (R_1 + R_0) \underline{I} \\ \underline{U_{AB}} &= -R_0 \underline{I}\end{aligned}$$

Donc $R = R_0$.

c) La loi des mailles s'écrit, en notations réelles :

$$L \frac{di}{dt} + ri + u_C - R_0 i = 0$$

Avec $i = dq/dt$ et $q = Cu_C$ il vient :

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + (r - R_0) \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

Pour que cette équation différentielle admette une solution sinusoïdale, elle doit se réduire à l'équation d'un oscillateur

harmonique et, donc, le terme de degré 1 doit être nul. Donc $R_0 = r$.

Le montage à résistance négative a alors pour équation caractéristique $u_{AB} = -ri$ en convention récepteur, ce qui est formellement équivalent à la loi d'Ohm qu'aurait une résistance négative. Cette résistance peut alors être ajustée pour compenser celle, positive, de la bobine.



Cet argument ne peut être rigoureux et accepté par un correcteur que si vous précisez que le montage est en convention **récepteur** ! L'équation $u = -Ri$ correspond à une résistance ordinaire (positive) si vous étiez en convention générateur.

d) Quand R_0 est ajustée à la valeur r , l'équation différentielle se réduit à :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La valeur de C permet ainsi directement de jouer sur la pulsation des oscillations, et donc sur leur fréquence.

Plan

16.1	Fonction de transfert harmonique	244
16.2	Diagramme de Bode asymptotique d'un filtre linéaire	246
16.3	Caractérisation des principaux filtres	248
	Synthèse	249
	Tests et exercices	250
	Corrigés des exercices	255

Introduction

La dépendance d'un signal électrique avec un autre fait en général intervenir la fréquence. L'exploitation de cette propriété s'appelle le **filtrage** et les applications en sont innombrables, comme vos cours de sciences de l'ingénieur en témoignent. Nous nous limiterons aux filtres linéaires (constitués de dipôles linéaires passifs et éventuellement d'AO) dont le signal d'entrée (l'excitation) $u_e(t)$ et le signal de sortie (la réponse) $u_s(t)$ sont des tensions en régime sinusoïdal forcé (figure 16.1).



Figure 16.1 Schéma de principe d'un quadripôle.

Prérequis

- AO idéal
- Régime sinusoïdal forcé et notations complexes
- Résonances
- Pulsations de coupure

Objectifs

- Étudier les filtres d'ordre un et deux
- Introduire la fonction de transfert
- Introduire les diagrammes de Bode
- Déterminer les comportements asymptotiques, pulsations de coupure, bande passante, facteur de qualité d'un filtre

16.1 Fonction de transfert harmonique

La fonction de transfert harmonique d'un filtre apparaît comme une fraction rationnelle de la variable $j\omega$ définie par :

Définition

La **fonction de transfert harmonique** est définie par :

$$\underline{H} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}$$

\underline{H} est sans dimension.



Méthode 1 exploiter une fonction de transfert harmonique

Une fois la fonction de transfert d'un filtre connue, calculer une réponse est immédiat à partir de la notation complexe. Une excitation $u_e(t) = U_e \cos(\omega t)$ entraîne une réponse $u_s(t) = U_s \cos(\omega t + \varphi)$ déterminée par :

$$U_s = |\underline{H}| U_e \quad \varphi = \arg(\underline{H})$$

$|\underline{H}|$ est d'ailleurs appelée le **gain** du filtre, et φ est l'avance de phase de u_s par rapport à u_e .

Exemple d'application

Un filtre a pour fonction de transfert $\underline{H} = 1/(1 + jRC\omega)$. Établissez la relation entre les tensions d'entrée et de sortie réelles.

Solution

Il faut calculer les module et argument de \underline{H} :

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(\underline{H}) = -\arctan(RC\omega)$$

D'où la tension de sortie, obtenue à partir de la tension d'entrée $u_e(t) = U_e \cos(\omega t)$:

$$U_s(t) = \frac{U_e}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \cos(\omega t - \arctan(RC\omega))$$

Méthode 2 calculer une fonction de transfert harmonique

Considérez le signal d'entrée comme une donnée. C'est le signal de sortie que vous cherchez.

1. Menez d'abord une rapide étude qualitative : comportements à basse fréquence et à haute fréquence pour voir si le filtre ne serait pas un passe-haut ou un passe-bas.
2. Utilisez les théorèmes généraux pour exprimer \underline{U}_s en fonction de \underline{U}_e et déduisez-en \underline{H} . Si le filtre contient un AO, utiliser le théorème de Millman sur les entrées est souvent très efficace (voir les méthodes du chapitre 15).

Dans le cas de filtres passifs, \underline{H} dépend de ce qui est branché sur la sortie du filtre (la **charge**). Il est alors usuel de mener le calcul « en sortie ouverte » : aucun courant ne sort du filtre.

À l'inverse, les filtres actifs à base d'AO possèdent la propriété d'indépendance de charge : leur fonction de transfert ne dépend pas de la charge.

Le degré du polynôme en $j\omega$ au dénominateur de \underline{H} est appelé **ordre** du filtre.



Calculer \underline{H} en sortie ouverte pour les filtres passifs n'est qu'un cas particulier. Cela ne signifie absolument pas que le résultat est valable dans d'autres cas !

\underline{H} est sans dimension, vous devez vous en assurer dans vos calculs. Il peut donc être utile de retenir que les termes suivants sont sans dimension :

$$LC\omega^2 \quad RC\omega \quad \frac{L\omega}{R}$$



Un condensateur est un court-circuit à haute fréquence ($\underline{Z} = 1/jC\omega \rightarrow 0$) et un fil à basse fréquence ($\underline{Z} = 1/jC\omega \rightarrow \infty$). C'est l'inverse pour une bobine. Une résistance a le même comportement à toute fréquence.

Exemple d'application

Étudiez la fonction de transfert du filtre RC de la figure 16.2.

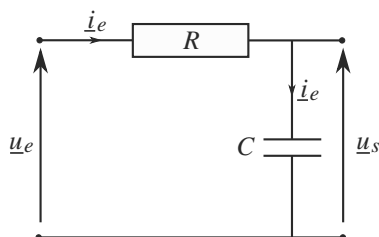


Figure 16.2 Filtre RC passe-bas du premier ordre.

Solution

À basse fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert donc $u_s = u_e$ et $\underline{H} = 1$.



La limite de basse fréquence correspond tout simplement au régime continu.

À haute fréquence, le condensateur est équivalent à un fil : $u_s = 0$.

Les basses fréquences passent et les hautes fréquences sont coupées. Conclusion de cette étude qualitative : c'est un filtre passe-bas.

Un pont diviseur de tension donne la fonction de transfert directement :

$$\underline{U}_s = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{U}_e \Rightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

16.2 Diagramme de Bode asymptotique d'un filtre linéaire

16.2.1 Gain en décibel

Définition

Le gain en dB est défini par :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log(|\underline{H}|) = 20 \log\left(\frac{U_s}{U_e}\right)$$



Une atténuation de l'amplitude d'un facteur $\sqrt{2}$ correspond environ un gain de -3 dB. Cela explique l'appellation de la bande passante.

La comparaison de deux amplitudes de tension U_1 et U_2 se fait alors comme suit :

- $U_s/U_e = 10$: $G_{\text{dB}} = 20$ dB, le signal a « gagné » 20 dB (son amplitude a été multipliée par 10).
- $U_s/U_e = 0,01$: $G_{\text{dB}} = -40$ dB, le signal a « perdu » 40 dB (son amplitude a été divisée par 100).

16.2.2 Diagramme de Bode

En pratique, vous avez surtout à savoir tracer un diagramme de Bode **asymptotique**. On ne vous demande ensuite que de tracer « à main levée » la courbe qui épouse les asymptotes.

Méthode 3 tracer un diagramme de Bode

Un diagramme de Bode comporte en fait deux graphes : G_{dB} et φ en fonction de $\log(\omega)$.

1. Calculez la fonction de transfert (en sortie ouverte si nécessaire) du filtre.
2. Calculez le module de \underline{H} pour avoir $G_{\text{dB}} = 20 \log(|\underline{H}|)$ et son argument $\varphi = \arg(\underline{H})$.
3. Cherchez les équivalents en $\omega \rightarrow 0$ de G_{dB} et φ . Si un équivalent est fini, il correspond à une asymptote horizontale ; s'il est infini, l'asymptote est oblique. Tracez les asymptotes résultantes.
4. Étudiez de même les équivalents en $\omega \rightarrow +\infty$ et tracez les asymptotes résultantes.
5. L'ensemble des asymptotes constitue le diagramme asymptotique. Placez quelques points particuliers (par exemple la ou les frontières de la bande passante à -3 dB) et tracez l'allure du diagramme réel.

Dans un diagramme logarithmique, une **décade** est un intervalle d'une unité sur l'axe horizontal (donc un intervalle où la pulsation varie d'un facteur 10).



- Le module d'un rapport est le rapport des modules. Il n'est donc pas toujours, ici, nécessaire de ramener le dénominateur à une grandeur réelle.
- Si l'équivalent de G_{dB} en un point est fini, il est tout simplement égal à la limite en ce point. C'est seulement si la limite est infinie que l'équivalent fournit des informations supplémentaires.

Rappelons que la pulsation de coupure est définie comme la pulsation pour laquelle $|H|$ est égal à sa valeur maximale divisée par $\sqrt{2}$. La bande passante est alors l'ensemble des pulsations pour lesquelles $|H|$ est supérieur à cette valeur.

Exemple d'application

Tracez le diagramme de Bode correspondant à la fonction de transfert calculée dans l'application de la méthode n°2. Vous poserez $x = RC\omega$.



Voir vidéo 9 : Filtre passe-bas

Solution

À basse fréquence, $\underline{H} \simeq 1$ donc $G_{dB} \simeq 0$. Ceci est une valeur finie, l'asymptote à basse fréquence est la droite horizontale $G_{dB} = 0$. En outre, $\varphi \simeq 0$ donc la phase admet une asymptote horizontale $\varphi = 0$. À haute fréquence, \underline{H} tend vers 0 donc la limite ne suffit pas. Plus précisément :

$$\underline{H} \simeq 1/jx \Rightarrow G_{dB} \simeq -20 \log(x)$$

Donc l'asymptote à haute fréquence est une droite oblique de pente -20 dB/décade. En outre, $\varphi \simeq -\pi/2$.

Le diagramme asymptotique est construit figures 16.3 et 16.4.

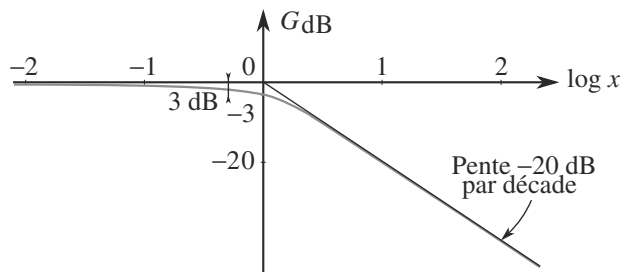


Figure 16.3 Diagramme de Bode en gain d'un filtre passe-bas du premier ordre.

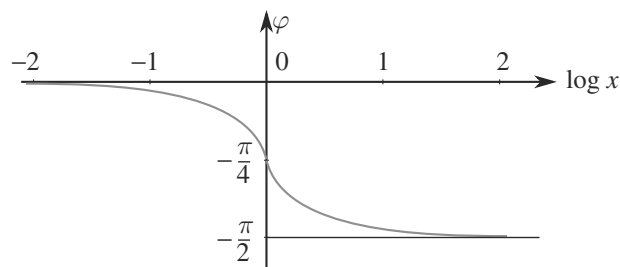


Figure 16.4 Diagramme de Bode en phase d'un filtre passe-bas du premier ordre.

La valeur maximale du gain est 1, ce qui permet de calculer la ou les pulsations réduites de coupure :

$$|H|(x_c) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{|1 + jx_c|} \Rightarrow x_c = 1$$

En $x = x_c$, nous avons donc $G_{dB} = -3$ dB et $\varphi = -\pi/4$. Cela permet de placer ce point particulier sur les courbes de gain et de phase.

16.2.3 Cascader des filtres actifs

Les filtres actifs ayant la propriété d'indépendance de charge, nous pouvons exploiter le caractère multiplicatif de ces fonctions de manière très efficace.

Méthode 4 calculer la fonction de transfert d'une chaîne de filtres actifs

Calculez la fonction de transfert de chaque filtre actif séparément (chacun en sortie ouverte). Celle de l'ensemble est le produit des fonctions de transfert individuelles.

Alors, le diagramme de Bode asymptotique est obtenu par addition des diagrammes de Bode asymptotiques de chaque filtre. Pour deux filtres :

$$\underline{H} = \underline{H}_1 \times \underline{H}_2 \Rightarrow \begin{cases} G_{dB} = G_{dB1} + G_{dB2} \\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \end{cases}$$

16.3 Caractérisation des principaux filtres



Voir vidéo 10 :
Filtres passe-bande
et coupe bande

Beaucoup de filtres que vous étudierez se rangent dans quatre catégories : passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe-bande. Il est en général possible de prévoir le type de filtre avant calcul, par étude qualitative du circuit (voir méthode n°2).

Pour un passe-bande, un facteur de qualité élevé indique une forte sélectivité. De même, pour un coupe-bande, il indique une coupure très fine.

Pour un passe-bas ou un passe-haut du deuxième ordre, on recherche au contraire un facteur de qualité proche de $1/\sqrt{2}$ pour optimiser leur fonctionnement sans introduire de comportement parasite au voisinage de la fréquence de coupure.

En outre, certains filtres intègrent ou dérivent le signal d'entrée. Vous devez aussi savoir détecter cette propriété.



- Le couplage d'entrée AC de l'oscilloscope est un filtre passe-haut. Un filtre passe-haut supprime la composante continue (fréquence nulle) donc, ne conservant que la partie variable du signal.
- Dans une chaîne hifi moderne, les enceintes sont optimisées pour émettre seulement certaines fréquences (caisson de basse, satellites), alors elles rejettent les autres, ce qui est un comportement de passe-bande.

Méthode 5 comportement intégrateur ou dérivateur

Un filtre présente un comportement **dérivateur** dans une certaine plage de fréquence si, dans cette plage, sa fonction de transfert est proportionnelle à $j\omega$. Alors G_{dB} présente une pente de 20 dB/décade avec une phase de $\pm\pi/2$.

Un filtre présente un comportement **intégrateur** dans une certaine plage de fréquence si, dans cette plage, sa fonction de transfert est proportionnelle à $1/j\omega$. Alors G_{dB} présente une pente de -20 dB/décade avec une phase de $\pm\pi/2$.

Exemple d'application

Dans quelles conditions le filtre RC passe-bas abordé dans les autres applications des méthodes présente-il un comportement intégrateur ou dérivateur ?

Solution

\underline{H} ne peut jamais être proportionnelle à $j\omega$ donc ce filtre n'est jamais strictement dérivateur. Mais, à haute fréquence, elle lui est inversement proportionnelle : $\underline{H} \approx 1/jRC\omega$, ce qui est caractéristique d'un comportement intégrateur.

Vous pouvez vérifier ces propriétés sur les diagrammes construits dans l'application de la méthode n°3.

Synthèse

Savoirs

- Ce qu'est une fonction de transfert (définition et nature)
- Définitions : gain, gain en décibel, phase, diagramme de Bode

Savoir-faire

- Utiliser les comportements limites (fréquence nulle, fréquence infinie) des composants pour prévoir la nature d'un filtre
- Utiliser les comportements asymptotiques (basses et hautes fréquences) pour prévoir les tracés asymptotiques des diagrammes de Bode
- Tracer les diagrammes de Bode associés à une fonction de transfert
- Reconnaître la nature d'un filtre à partir des ses diagrammes de gain
- Reconnaître un comportement intégrateur ou dérivateur par le comportement asymptotique et par la pente du diagramme de Bode en gain

Mots-clés

- Filtre,
- passe-bande,
- coupe-bande,
- passe-bas,
- passe-haut,
- diagramme de Bode,
- gain,
- déphasage,
- comportement asymptotique,
- bande passante.

Tests de connaissances

- 16.1 En basse fréquence, une bobine se comporte comme un coupe-circuit.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 16.2 Le gain d'un filtre est le facteur d'amplification en énergie du filtre.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 16.3 Pour un filtre passif, le gain est forcément plus petit que 1.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 16.4 φ est l'avance de phase de l'entrée sur la sortie.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 16.5 Les diagrammes de Bode sont des tracés logarithmiques.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 16.6 L'intérêt des diagrammes logarithmiques est de représenter une large bande de fréquence.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 16.7 On ne peut fabriquer que des passe-bas avec R et C .
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 16.8 On ne peut fabriquer que des passe-haut avec R et L .
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 16.9 Pour un filtre actif, on peut avoir un gain supérieur à 1 en boucle fermée.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 16.10 Un filtre actif fonctionne toujours en régime linéaire.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

16.11 Filtres du premier ordre équivalents

1. Considérons le filtre de la figure 16.5 en sortie ouverte.

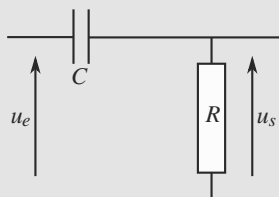


Figure 16.5 Filtre RC du premier ordre.

- Sans calcul, prévoyez la nature de ce filtre.
 - Calculez sa fonction de transfert en posant $\omega_0 = 1/RC$ et $x = \omega/\omega_0$.
 - Tracez son diagramme de Bode asymptotique.
 - Étudiez sa bande passante à -3 dB et tracez son diagramme de Bode réel.
 - Dans la limite des basses fréquences, caractérisez le comportement de ce filtre.
2. Considérons maintenant le filtre de la figure 16.6, également en sortie ouverte. Justifiez que son étude se ramène à celle du filtre précédent et qu'il a donc les mêmes propriétés.

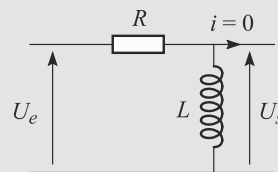


Figure 16.6 Filtre RL équivalent.

16.12 Addition d'asymptotes

Soit le filtre de la figure 16.7. Données : $R_1 = R_3 = 1 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$ et $C = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$.

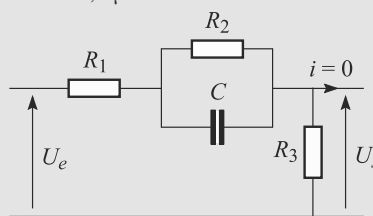


Figure 16.7 Filtre pour l'addition d'asymptotes.

1. Calculez sa fonction de transfert. Vous la mettrez sous la forme :

$$\underline{H} = H_0 \frac{1 + jR'C\omega}{1 + jR''C\omega}$$

et donnerez les expressions de H_0 , R' et R'' en fonction de R_1 , R_2 et R_3 .

2. Écrivez le gain G_{dB} comme la somme de trois termes. Étudiez les trois diagrammes de Bode correspondants puis combinez-les pour obtenir le diagramme de Bode du filtre complet.

16.13 Dépendance de charge d'un filtre passif

(D'après Mines de première année.)

Une résistance R est utilisée comme charge à la sortie d'un filtre RC du premier ordre (figure 16.8).

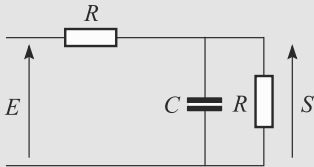


Figure 16.8 Mise en évidence de la dépendance de charge d'un filtre passif.

1. Calculez la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{S}/\underline{E}$ en fonction de jx avec $x = RC\omega$.
2. Tracez le diagramme de Bode en gain et commentez.

16.14 Adaptation d'impédance d'un dérivateur

Connectons un amplificateur opérationnel en suiveur sur un dérivateur RC du premier ordre (figure 16.9).

Calculez sa fonction de transfert et commentez-la. Tracez son diagramme de Bode.

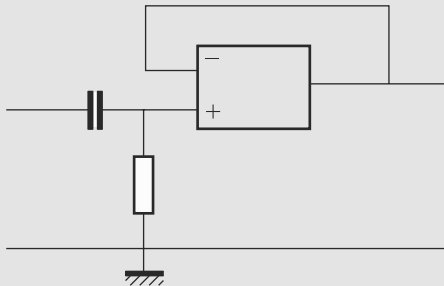


Figure 16.9 Montage pseudo-dérivateur.

16.15 Filtres RL en cascade

(D'après ENSTIM.)

Un filtre est constitué de deux filtres RL en cascade (figure 16.10).

1. Déterminez sans calcul la nature de ce filtre.
2. Calculez sa fonction de transfert et tracez son diagramme de Bode.
3. Déduisez-en l'équation différentielle qui gouverne ce filtre. Quel en est l'intérêt ?

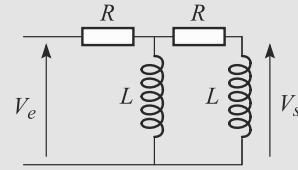


Figure 16.10 Cascade de filtres RL.

16.16 Réseau déphaseur

(D'après Mines de Douai.)

Soit le circuit de la figure 16.11. La tension $u_e(t)$ est sinusoïdale de pulsation ω et d'amplitude U_e . Les deux dipôles d'impédance \underline{Z} sont des dipôles passifs quelconques. L'ensemble est utilisé comme un filtre avec u_e comme signal d'entrée et u_s comme signal de sortie.

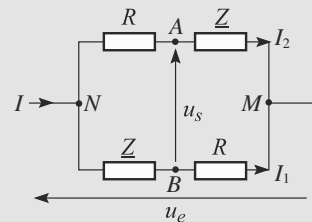


Figure 16.11 Réseau déphaseur.

1. Calculez sa fonction de transfert \underline{H} en fonction de R et \underline{Z} .
2. Posons $\underline{Z} = R' + jX$. Quelle doit être la nature des impédances \underline{Z} pour que la fonction de transfert soit égale à 1 en module pour tout R et tout \underline{Z} ?
3. Calculez le déphasage φ de \underline{U}_s par rapport à \underline{U}_e lorsque le composant \underline{Z} est un condensateur C .
4. R est une résistance réglable. Quel est l'intérêt du montage ?

16.17 Le RLC série vu comme un filtre

(D'après Concours commun polytechnique : concours national DEUG.)

Soit le filtre de la figure 16.12. Sa tension d'entrée est $u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t)$ et sa tension de sortie $u_s(t) = U_{sm} \cos(\omega t + \varphi)$. Vous poserez $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $Q = L\omega_0/R$ et $x = \omega/\omega_0$.

1. Déterminez sans calcul la nature de ce filtre.
2. Déterminez sa fonction de transfert \underline{H} en fonction de x et Q et son diagramme de Bode asymptotique.
3. Pour tracer le diagramme de Bode réel, étudions quelques points particuliers.

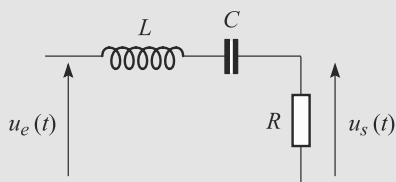


Figure 16.12 Utilisation du RLC série comme filtre.

- Calculez la valeur maximale du gain et la valeur de x pour laquelle elle est atteinte. Remarquez qu'elle est indépendante de Q . Que vaut alors la phase ?
- Déterminez la bande passante à -3 dB du filtre ainsi que sa largeur Δx en fonction de Q .
- Tracez le diagramme de Bode réel pour $Q = 2$ et $Q = 1/2$ et concluez sur la nature du filtre.

Exercices d'approfondissement

16.18 Boucle d'amplificateurs opérationnels (D'après ENSI.)

- Calculez les fonctions de transfert \underline{H}_1 , \underline{H}_2 et \underline{H}_3 des trois filtres actifs des figures 16.13, 16.14 et 16.15.

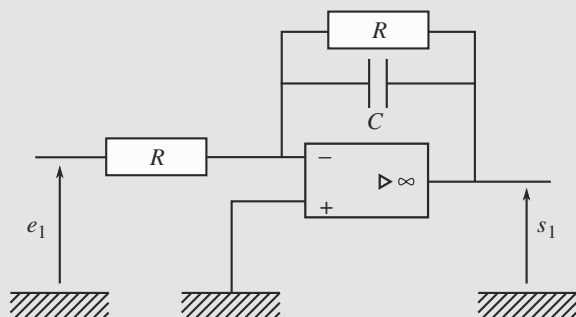


Figure 16.13 Montage autour du premier AO.

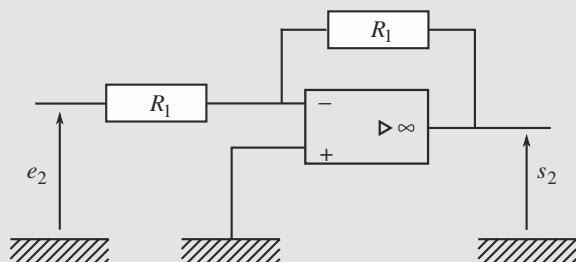


Figure 16.14 Montage autour du deuxième AO.

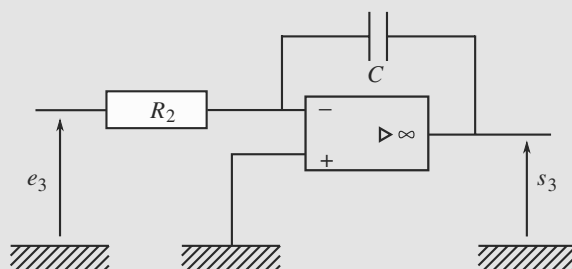


Figure 16.15 Montage autour du troisième AO.

- Déduisez-en la fonction de transfert \underline{H} du filtre de la figure 16.16. Vous la mettrez sous la forme :

$$\underline{H}(jx) = \frac{S}{E} = \frac{-1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

Vous poserez $\omega_0 = 1/C \sqrt{R_2 R_3}$ et $x = \omega/\omega_0$ et identifierez l'expression de Q .

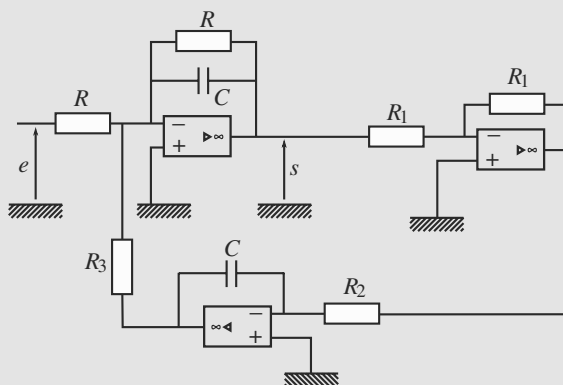


Figure 16.16 Boucle d'AO.

3. Montrez que ce filtre est un passe-bande et construisez son diagramme de Bode asymptotique en gain : asymptotes, bande passante à -3 dB, diagramme réel.

16.19 Réjecteur et simulation d'inductance

1. Considérons le filtre de la figure 16.17. La tension d'entrée est sinusoïdale, de pulsation ω , d'amplitude complexe \underline{V}_e . La tension de sortie est d'amplitude \underline{V}_s .

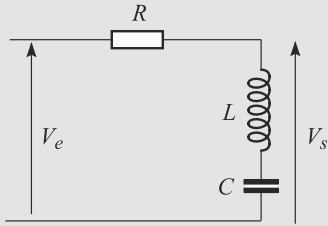


Figure 16.17 Filtre réjecteur.

- Calculez la fonction de transfert de ce filtre en fonction de $x = \omega/\omega_0$ avec $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et de $Q = L\omega_0/R$.
 - Déterminez qualitativement la nature de ce filtre en étudiant ses valeurs en $x = 0$, $x = 1$ et $x \rightarrow +\infty$.
 - Calculez la largeur $\Delta\omega$ de la bande passante à -3 dB en fonction de Q et ω_0 et interprétez.
 - Tracez l'allure du diagramme de Bode en gain de ce filtre.
2. Un appareil traite des signaux audibles, de fréquence comprise entre 20 et 20 000 Hz environ. Il peut donc y avoir des parasites liés à la fréquence de 50 Hz du courant électrique secteur.
- Expliquez l'intérêt du filtre étudié ici pour cet appareil.
 - Le filtre est construit pour que $Q = 10$. Pourquoi un facteur de qualité élevé ?
 - Prenons $R = 4,7$ k Ω . Quelles valeurs faut-il donner à L et C ?
3. Une telle valeur de L n'étant pas réalisable avec une bobine ordinaire, remplaçons la bobine par le dipôle de la figure 16.18. Les deux AO sont supposés idéaux et en régime linéaire.

- Calculez l'impédance de ce filtre, définie comme $\underline{v}/\underline{i}$.
- Justifiez que ce dipôle est équivalent à la bobine L du filtre, en donnant L en fonction de R_1 , ω et C' .
- Pour quelle fréquence l'atténuation par le filtre est-elle maximale ?

Données : $R_1 = 22$ k Ω ; $R_2 = 10$ k Ω ; $C' = 0,3$ μ F.

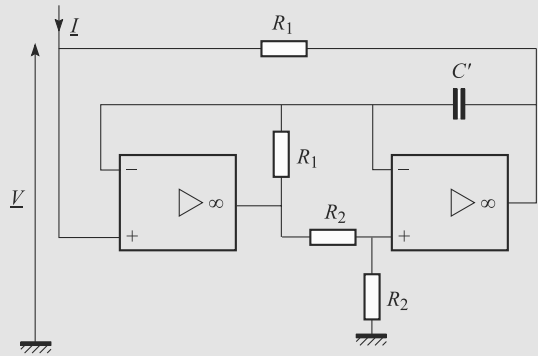


Figure 16.18 Simulateur d'inductance.

16.20 Amélioration des enregistrements par capteur CCD

(D'après Air MP.)

Un capteur CCD peut être utilisé pour enregistrer numériquement une image observée par un instrument (du télescope à l'appareil photo numérique). Mais il délivre un courant de faible amplitude et parasité. Il faut donc l'amplifier et le filtrer.

1. Phase d'amplification. Le capteur CCD est modélisé comme une source en représentation de Thévenin (fem e , résistance R). Son signal est amplifié par un montage à AO idéal représenté figure 16.19.

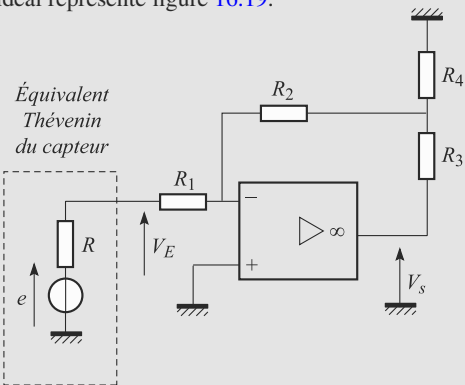


Figure 16.19 Montage amplificateur.

- Calculez la fonction de transfert du circuit amplificateur $\underline{H}_1 = \underline{V}_s/\underline{E}$, où \underline{V}_s et \underline{E} sont les amplitudes complexes respectives de $\underline{V}_s(t)$ et $\underline{e}(t)$.
- Nous voulons amplifier la tension délivrée par le capteur, mais pas le courant. Quel est l'avantage de ce montage par rapport à un amplificateur inverseur classique, obtenu en faisant $R_3 = 0$?

2. Phase de filtrage. Le signal est filtré par le montage de la figure 16.20, où l'AO est supposé idéal. La figure montre des impédances génériques, nous particulariserons ensuite. Cette structure s'appelle une structure de Rauch.

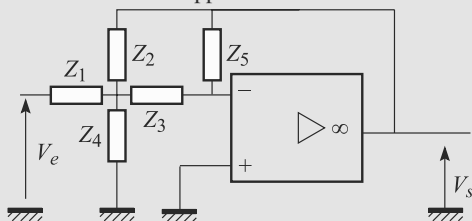


Figure 16.20 Filtre à structure de Rauch.

- a) Montrez que la fonction de transfert $\underline{H}_2 = \underline{V}_s/\underline{V}_e$ peut s'écrire, avec les admittances $\underline{Y}_i = 1/\underline{Z}_i$:

$$\underline{H}_2 = \frac{-\underline{Y}_1 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_2 \underline{Y}_3 + \underline{Y}_5(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4)}$$

- b) \underline{Z}_1 est une résistance R_1 , \underline{Z}_2 est un condensateur C_1 , \underline{Z}_3 est un condensateur C_2 , \underline{Z}_4 est une résistance R et \underline{Z}_5 est une résistance R_2 .

Calculez la fonction de transfert de ce filtre particulier. Quelle est sa nature ?

- c) Construisez le diagramme de Bode en gain.
d) Montrez que ce gain est maximal quand la pulsation vaut :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R + R_1}{R_1 R_2 C_1 C_2 R}}$$

- e) Lequel des deux choix suivants correspond au filtre le plus sélectif ?

- $R_1 = R_2 = R = 1 \text{ k}\Omega$; $C_1 = C_2 = 1 \text{ }\mu\text{F}$.
- $R_1 = 100 \text{ }\Omega$; $R_2 = 1 \text{ M}\Omega$; $R = 1 \text{ k}\Omega$;
 $C_1 = 100 \text{ }\mu\text{F}$; $C_2 = 1 \text{ }\mu\text{F}$.

Justifiez votre réponse par le tracé des deux diagrammes de Bode correspondants avec quelques valeurs numériques pertinentes.

■ ■ ■

16.21 Filtre du deuxième ordre avec AO réel

(D'après EIVP, ENTPE PC-PSI.)

La sortie d'un AO non idéale est modélisée suivant la figure 16.21, avec un générateur de tension idéal $V_s = \mu\varepsilon$. Le gain μ varie avec la fréquence suivant la loi :

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + j\frac{f}{f_0}}$$

où μ_0 est une constante.

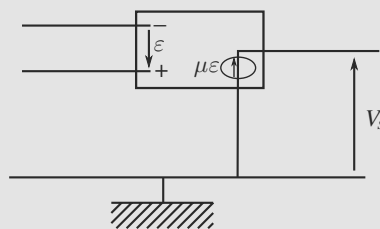


Figure 16.21 Modélisation de la sortie d'un AO réel.

Ce composant est ensuite utilisé dans le montage de la figure 16.22.

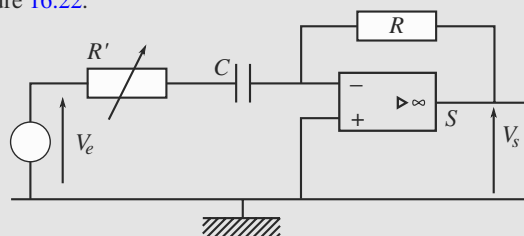


Figure 16.22 Filtre du deuxième ordre avec AO réel.

1. Calculez la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{V}_s/\underline{V}_e$. Vous poserez $f_1 = \mu_0 f_0$ et $f_2 = 1/2\pi RC$.
2. En se plaçant dans le cas où $R \gg R'$, $f_2 \gg f_0$ et $\mu_0 \gg 1$, montrez que \underline{H} peut s'écrire :

$$\underline{H} = \frac{A jx}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$$

avec les variables :

$$\begin{aligned} x &= \frac{f}{f_c} \\ A &= -\frac{f_c}{f_2} \\ f_c &= \sqrt{f_1 f_2} \\ Q &= \frac{1}{f_c \left(\frac{R'}{R f_2} + \frac{1}{f_1} \right)} \end{aligned}$$

3. Application numérique : calculez f_c , Q et A avec $f_1 = 1 \text{ MHz}$; $R = 10 \text{ k}\Omega$; $C = 100 \text{ nF}$; $R' = 50 \text{ }\Omega$.
4. Construisez le diagramme de Bode asymptotique G_{dB} en fonction de $\log(x)$.
5. Interprétez le fait que le montage n'est pas dérivateur aux fréquences voisines de 10 kHz . Commentez.

16.1

Faux, son impédance tend vers 0, ce qui est équivalent à un fil.

16.2

Faux, il s'agit du facteur d'amplification en tension. Il doit être élevé au carré pour devenir le facteur d'amplification en énergie.

16.3

Faux, en boucle ouverte, il peut y avoir des surtensions (voir circuit *RLC* série).

16.4

Faux, c'est l'inverse.

16.5

Vrai **en partie seulement** : φ n'est pas représenté par $\log(\varphi)$.

16.6

Vrai.

16.7

Faux, en prenant la tension sur la résistance, on a un passe-haut.

16.8

Faux.

16.9

Vrai. C'est l'un des intérêts de ce genre de filtre avec l'adaptation d'impédance.

16.10

Faux, il peut saturer si le signal d'entrée est trop important.

16.11

Filtres du premier ordre équivalents

Cet exercice est presque une question de cours. Chaque étape de l'étude du filtre fait l'objet d'une question séparée. Par la suite, vous devrez prendre l'initiative de chaque étape et la question se résumera souvent à une seule question du type « Étudiez le comportement de ce filtre ».

1. a) À basse fréquence, le condensateur est un coupe-circuit. La résistance n'est plus traversée par aucun courant donc la tension à ses bornes est nulle. Donc $\underline{H} = 0$. À haute fréquence, le condensateur est équivalent à un fil, donc $\underline{U}_s = \underline{U}_e$: $\underline{H} = 1$. Donc ce filtre est certainement un filtre passe-haut.

b) Un diviseur de tension nous donne directement :

$$\underline{U}_s = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \underline{U}_e \Rightarrow \underline{H} = \frac{jx}{1 + jx}$$

$$\Rightarrow |\underline{H}| = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$



L'utilisation du pont diviseur n'est justifiée que si R et C sont en série, autrement dit sous l'hypothèse de sortie ouverte.



Vérifiez la cohérence du résultat : $|\underline{H}|$ est bien nulle à fréquence nulle et tend vers 1 aux hautes fréquences.

c) D'où le gain et la phase :

$$G_{dB} = 20 \log \left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \right)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

Le comportement asymptotique est :

- $\omega \rightarrow 0$, $G_{dB} \simeq 20 \log(x)$ et $\varphi \simeq \pi/2$.
- $\omega \rightarrow +\infty$, $G_{dB} \rightarrow 0$ et $\varphi \rightarrow 0$.



La limite à basse fréquence étant infinie, il a fallu chercher un équivalent de G_{dB} en $\omega \rightarrow 0$, en remarquant que $1 + x^2 \simeq 1$ quand $x \rightarrow 0$.

Le diagramme de Bode asymptotique est donné figures 16.23 et 16.24. d) Par définition, x_c est une frontière de la bande passante à -3 dB :

$$G_{dB}(x_c) = G_{dB \max} - 3 = -3 \text{ dB}$$

$$\Leftrightarrow |\underline{H}|(x_c) = \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

qui conduit à $x_c = 1$. La pulsation de coupure est donc $\omega_c = RC = \omega_0$.



La relation $G_{dB}(x_c) = G_{dB \max} - 3$ étant une approximation, elle ne peut pas donner exactement $x_c = 1$. Il vaut mieux utiliser $|\underline{H}|(x_c) = |\underline{H}|_{\max}/\sqrt{2}$ qui est exacte.

L'allure du diagramme de Bode réel est donné figures 16.23 et 16.24.

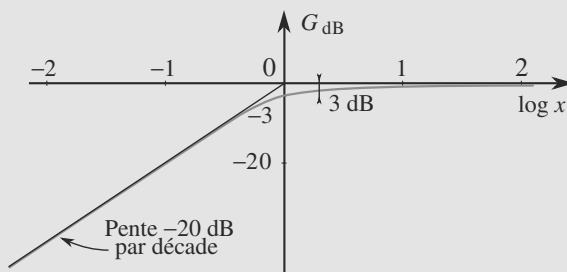


Figure 16.23 Diagramme de Bode en gain du filtre *RC* passe-haut.

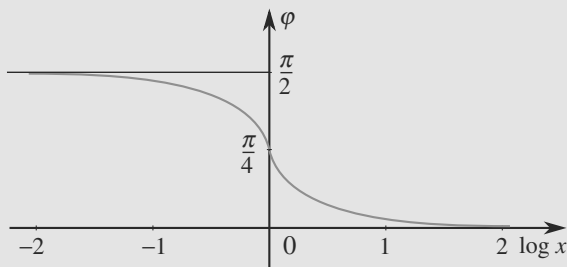


Figure 16.24 Diagramme de Bode en gain du filtre RC passe-haut.

e) Nous avons vu que, à basse fréquence ($\omega \ll \omega_c$) :

$$\underline{H} \simeq jx = j \frac{\omega}{\omega_c}$$

donc :

$$\begin{aligned} \underline{u_s} &= \underline{H} \underline{u_e} = \frac{1}{\omega_c} j\omega \underline{u_e} \\ \Rightarrow u_s(t) &= \frac{1}{\omega_c} \frac{du_e}{dt}(t) \end{aligned}$$

Nous dirons donc que ce filtre passe-haut se comporte comme un dérivateur à basse fréquence.



Il est facile de deviner alors que si le signal d'entrée est triangulaire, le signal de sortie sera un créneau, pourvu que la fréquence du triangle soit suffisamment petite devant la fréquence de coupure du filtre.

2. Un pont diviseur de tension donne :

$$\underline{H} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{jx}{1 + jx}$$

en posant $\omega_0 = R/L$. Cette fonction de transfert est formellement identique à la précédente, donc le filtre a les mêmes propriétés.

16.12

Addition d'asymptotes

Cet exercice vous guide, sur un filtre très simple, sur une méthode pour tracer un diagramme asymptotique avec plus de précision que le seul tracé des asymptotes à haute et basse fréquences. En effet, cette méthode permet d'obtenir des asymptotes pour des valeurs intermédiaires de la fréquence.

1. L'assemblage parallèle de R_2 et C est équivalent à une impédance \underline{Z} , qui est en série avec R_1 et R_3 . La fonction de transfert se calcule directement avec un diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{R_3}{R_1 + \underline{Z} + R_3} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R_2} + jC\omega$$

D'où la fonction de transfert :

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \frac{\frac{R_3}{\underline{Z}}}{\frac{R_1 + R_3}{\underline{Z}} + 1} \\ &= \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \frac{1 + jR_2C\omega}{1 + j \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} C\omega} \end{aligned}$$

Cela conduit bien à la forme voulue :

$$\begin{aligned} \underline{H} &= H_0 \frac{1 + jR'C\omega}{1 + jR''C\omega} \\ \text{avec} \quad H_0 &= \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R' &= R_2 \\ R'' &= \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \end{aligned}$$

2. \underline{H} apparaît comme le produit d'une constante H_0 par deux fonctions de ω . D'où :

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log(H_0) + 10 \log(1 + (R'C\omega)^2) \\ &\quad - 10 \log(1 + (R''C\omega)^2) \end{aligned}$$

Notons G_{dB1} , G_{dB2} , G_{dB3} , φ_1 , φ_2 et φ_3 ces termes. Posons $\omega_1 = 1/R'C$ et $\omega_2 = 1/R''C$.

Le premier diagramme de Bode est très simple : G_{dB1} est constant égal à $20 \log(H_0) \simeq -17$ dB et φ_1 est nulle.

Pour le second :

$$G_{dB2} = 10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right)$$

d'où les limites pour le gain :

$$\begin{cases} G_{dB2} \simeq 0 & \text{à basse fréquence} \\ G_{dB2} \simeq 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right) & \text{à haute fréquence} \end{cases}$$

Pour le troisième, le gain vaut :

$$G_{dB3} = -10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 \right)$$

d'où les limites :

$$\begin{cases} G_{dB3} \simeq 0 & \text{à basse fréquence} \\ G_{dB3} \simeq -20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right) & \text{à haute fréquence} \end{cases}$$

La figure 16.25 montre les trois paires d'asymptotes, ainsi que leur somme intervalle par intervalle, pour établir le diagramme asymptotique de gain.

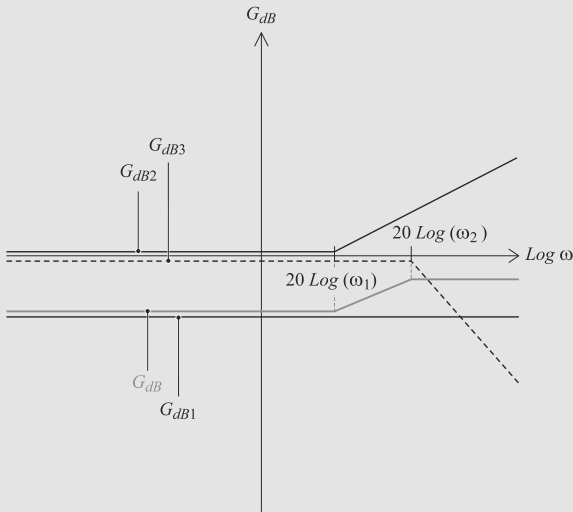


Figure 16.25 Addition d'asymptotes pour construire un diagramme de Bode.

16.13 Dépendance de charge d'un filtre passif

Cet exercice montre sur un cas le plus simple possible que la fonction de transfert d'un filtre passif change avec la charge.

Bien que ce ne soit pas explicitement demandé, pensez à mener une étude qualitative à haute et basse fréquence pour corroborer vos calculs.

À basse fréquence, le condensateur est équivalent à un court-circuit et les deux résistances sont alors en série, donc $\underline{S} = \underline{E}/2$. À haute fréquence, le condensateur est équivalent à un fil donc $\underline{S} = 0$. Donc ce filtre est un passe-bas.

1. Un pont diviseur de tension aux bornes de l'association parallèle $R \parallel C$ s'écrit :

$$\underline{S} = \frac{\frac{1}{jC\omega + \frac{1}{R}}}{\frac{1}{jC\omega + \frac{1}{R}} + R} \underline{E}$$

$$\Rightarrow \underline{H} = \frac{1}{2 + jRC\omega} = \frac{1}{2 + jx}$$

Cette fonction de transfert n'est pas la même que pour le même filtre sans la charge R . La présence de la charge a donc modifié les propriétés du filtre.

2. D'où le gain et le gain en dB :

$$G = \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}}$$

$$\Rightarrow G_{dB} = 20 \log(G) = -10 \log(4 + x^2)$$

Aux basses fréquences, $G_{dB} \approx -20 \log(2)$ donc le diagramme de Bode présente une asymptote horizontale d'ordonnée $-20 \log(2)$.

Aux hautes fréquences, $G_{dB} \approx -20 \log(x)$ dont le diagramme de Bode présente une asymptote oblique de pente -20 dB/décade.

Ce gain est décroissant avec x donc maximal quand $x = 0$. Alors $G(x = 0) = 1/2$. D'où la pulsation réduite de coupure x_c :

$$G(x_c) = \frac{G_{dB \max}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4 + x_c^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x_c = 2$$

La pulsation de coupure est donc $\omega_c = 2/RC$. La présence de la charge l'a donc multipliée par 2. Le diagramme de Bode est donné figure 16.26.

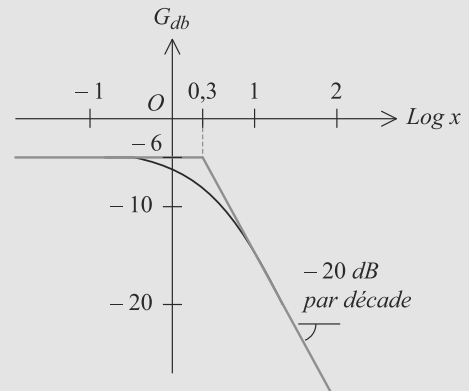


Figure 16.26 Déplacement de la fréquence de coupure à cause de la charge.

16.14 Adaptation d'impédance d'un dérivateur

Il doit vous sauter aux yeux que le filtre RC est en sortie ouverte bien qu'il ait quelque chose branché sur sa sortie ; en effet, l'amplificateur opérationnel est idéal donc aucun courant n'entre par ses entrées. Vous pouvez donc réutiliser la fonction de transfert calculée en sortie ouverte au chapitre précédent.

Le filtre RC est en sortie ouverte, sa fonction de transfert vaut :

$$\underline{H}_1 = \frac{V_+}{V_e} = \frac{jx}{1 + jx}$$

avec $x = RC\omega$. La fonction de transfert du suiveur est $\underline{H}_2 = 1$, d'où celle du filtre :

$$\underline{H} = \underline{H}_1 \times \underline{H}_2 = \frac{jx}{1 + jx}$$

La présence du suiveur rend donc cette fonction de transfert valable même en présence d'une charge (courant de sortie non nul). Son diagramme de Bode est donc identique à celui du RC du premier ordre (figures 16.27 et 16.28).

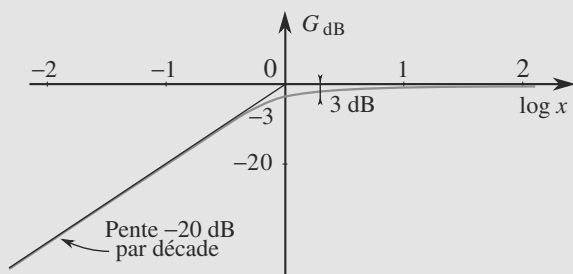


Figure 16.27 Diagramme de Bode en gain du filtre RC passe-haut avec suiveur.

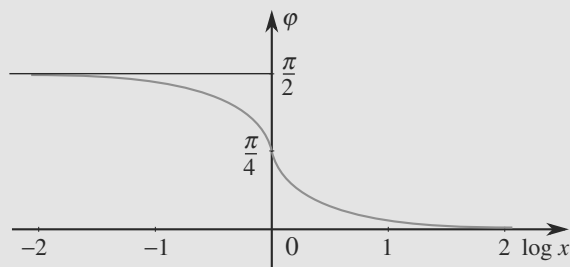


Figure 16.28 Diagramme de Bode en phase du filtre RC passe-haut avec suiveur.

16.15

Filtres RL en cascade

Cet exercice comporte un « piège » : si vous connaissez la fonction de transfert d'un filtre RL comme ces deux-ci, vous pourriez être tenté de les multiplier pour obtenir la fonction de transfert du filtre complet. C'est impossible ! Comme le premier des deux filtres RL n'est pas en sortie ouverte, le résultat connu n'est pas applicable.

Il n'est pas possible de découper le calcul en deux calculs indépendants, vous devez raisonner sur le filtre entier.

1. À basse fréquence, les bobines sont équivalentes à des fils donc $\underline{V_s} = 0$. À haute fréquence, elles sont équivalentes à des interrupteurs ouverts donc $\underline{V_e} = \underline{V_s}$. Donc ce filtre est probablement un passe-haut.
2. Par un pont diviseur de tension :

$$\frac{\underline{V_s}}{\underline{U}} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{jx}{1 + jx}$$

en posant $x = L\omega/R$.

Les trois dipôles de droite peuvent être associés en un seul soumis à la tension \underline{U} , comme montré figure 16.29.

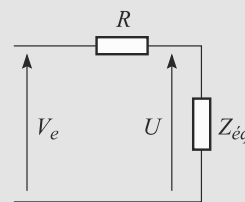


Figure 16.29 Association de dipôles.

Son impédance équivalente est telle que :

$$\frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R + jL\omega}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{jx} + \frac{1}{1 + jx} \right)$$

Nous sommes ensuite ramenés à un pont diviseur de tension :

$$\frac{\underline{U}}{\underline{V_e}} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{R + \underline{Z_{eq}}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{R}{\underline{Z_{eq}}}}$$

$$\frac{\underline{U}}{\underline{V_e}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jx} + \frac{1}{1 + jx}}$$

D'où la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{jx}{1 + jx} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{jx} + \frac{1}{1 + jx}} \quad (16.1)$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{jx}} \quad (16.2)$$

D'où le gain en dB et la phase :

$$G_{dB} = -10 \log \left(\left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^2 + \frac{9}{x^2} \right)$$

$$\tan(\varphi) = -\frac{\frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{3x}{x^2 - 1}$$

À basse fréquence, $x \ll 1$ donc $\underline{H} \approx -x^2$. Donc $G_{dB} \approx 40 \log(x)$ et $\varphi = \pi$.

À haute fréquence, $x \gg 1$ donc $\underline{H} \approx 1$. Donc $G_{dB} \approx 0$ et $\varphi = 0$.

Le diagramme de Bode est donné figure 16.30 pour le gain et 16.31 pour la phase. C'est un filtre passe-haut qui coupe très fortement les basses fréquences, avec une pente de 40 dB/déc.

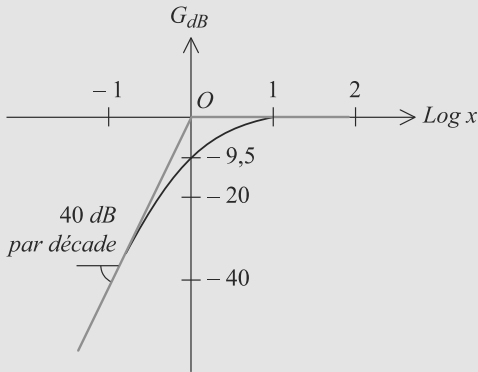


Figure 16.30 Diagramme de Bode en gain.

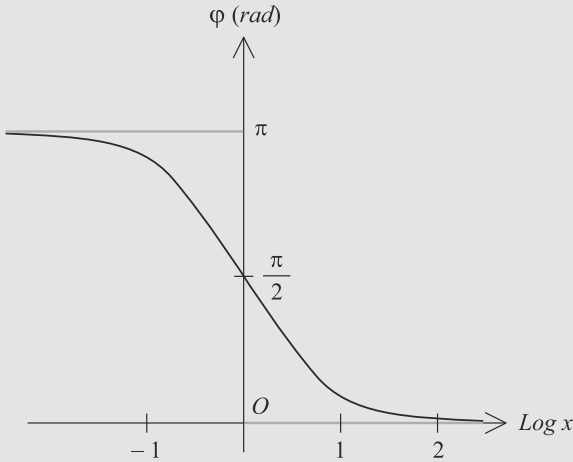


Figure 16.31 Diagramme de Bode en phase.



Ce filtre n'a pas un comportement intégrateur à basse fréquence ! Il faudrait pour cela que la pente soit égale à 20 dB/déc et la phase à $\pm\pi/2$.

3. L'équation (16.2) peut se réécrire :

$$\underline{H} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{(jx)^2}{1 + 3jx + (jx)^2}$$

$$\Rightarrow (jx)^2 \underline{V}_e = (1 + 3jx + (jx)^2) \underline{V}_s$$

ce qui se traduit, en revenant aux notations réelles, par :

$$\frac{d^2 V_s}{dt^2}(t) + \frac{3R}{L} \frac{dV_s}{dt}(t) + \frac{R^2}{L^2} V_s(t) = \frac{d^2 V_e}{dt^2}(t)$$

Cette équation différentielle étant en fait plus générale que la solution en régime sinusoïdal forcé, elle peut être résolue dans d'autres régimes. Par exemple, elle peut donner la réponse du système à un échelon de tension.

16.16

Réseau déphaseur

L'exercice vous fait un peu jongler entre l'utilisation du couple partie réelle et partie imaginaire, et l'utilisation du couple module et argument. Prenez le temps, après avoir tout résolu, de bien réfléchir à l'intérêt de chaque utilisation : pourquoi est-ce judicieux de choisir une représentation plutôt que l'autre ?

Quant à la nature du filtre résultant, sachez lire le titre de l'exercice ! Il n'est pas rare que le titre d'un énoncé donne quelques indications sur son contenu.

1. Par additivité des tensions :

$$0 = \underline{V}_B - \underline{V}_A + \underline{V}_A - \underline{V}_M + \underline{V}_M - \underline{V}_B$$

$$\text{donc } \underline{U}_s = \underline{Z} \underline{I}_2 - \underline{R} \underline{I}_1.$$

Les deux branches MN ont un contenu identique donc $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \underline{I}/2$. Elles sont équivalentes à une seule impédance $(\underline{R} + \underline{Z})/2$ donc la loi d'Ohm s'écrit :

$$\underline{U}_e = \frac{\underline{R} + \underline{Z}}{2} \underline{I}$$

En combinant ces deux résultats, il vient :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z} - \underline{R}}{\underline{Z} + \underline{R}}$$

2. Calculons son module au carré :

$$|\underline{H}|^2 = \frac{(R' - R)^2 + X^2}{(R' + R)^2 + X^2} = 1$$

Cette égalité n'est possible pour tout R que si $R' = 0$, donc si \underline{Z} est imaginaire pure, donc s'il s'agit d'une bobine ou d'un condensateur.

3. Par définition, $\arg(\underline{H})$ est le déphasage de \underline{U}_s par rapport à \underline{U}_e , donc égal à φ .

$$\underline{H} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

$$\Rightarrow \varphi = \arg(1 - jRC\omega) - \arg(1 + jRC\omega)$$

$$= -2 \arctan(RC\omega)$$

4. Le gain est constant égal à 1 donc modifier R ne modifie que le déphasage. Ce circuit permet donc de régler librement le déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée, d'où son appellation de déphaseur.

16.17

Le RLC série vu comme un filtre

Il s'agit tout simplement du RLC série étudié dans le chapitre précédent, en prenant sa tension d'alimentation comme signal d'entrée et la tension aux bornes de la résistance comme signal de sortie. Nous avons donc déjà mené les calculs dans le chapitre 14 et ce corrigé ne les détaillera donc pas tous.

L'étude qualitative donne un résultat assez limité puisque ce n'est pas à l'infini que le filtre a un comportement intéressant. À ce stade, supposer que c'est un passe-bande est « raisonnable » mais pas certain. Seul le diagramme de Bode permettra de conclure.

Les dernières questions servent à attirer votre attention sur un point important : une fois les asymptotes connues, il n'est pas toujours immédiat de savoir si la courbe réelle est située au-dessus ou en dessous de ses asymptotes !

- À basse fréquence, le condensateur est équivalent à un coupe-circuit donc aucun courant ne circule dans R . Donc la tension à ses bornes est nulle : $\underline{U}_s = 0$. À haute fréquence, c'est la bobine qui est équivalente à un coupe-circuit. Donc de même, $\underline{U}_e = 0$.

Ce filtre est donc probablement un passe-bande.

- La loi d'Ohm aux bornes du dipôle RLC conduit à :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

- Le gain $G = |\underline{H}|$ est maximal pour $x = 1$ et vaut alors 1, indépendamment de Q . La phase $\arg(\underline{H})(x = 1)$ est nulle.
 - Les pulsations de coupure correspondent à :

$$x_{c1} = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

$$x_{c2} = \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

Donc la largeur de la bande passante vaut $\Delta x = 1/Q$.

- Partons des expressions :

$$G_{dB} = -10 \log \left(1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \right)$$

$$\varphi = -\arctan \left(Q \left(x - \frac{1}{x} \right) \right)$$

car $\cos(\varphi) > 0$. Cherchons les asymptotes.

À basse fréquence, $x \ll 1$ donc :

$$G_{dB} \approx 20 \log(x/Q) \quad \varphi \approx \pi/2$$

À haute fréquence, $x \gg 1$ donc :

$$G_{dB} \approx -20 \log(Qx) \quad \varphi \approx -\pi/2$$

Calculons l'ordonnée du point d'intersection des asymptotes du diagramme de gain, pour voir s'il est situé au-dessus ou en dessous de la courbe. L'intersection est située en $\log(x) = 0$ donc à l'ordonnée $G_{dB} = -20 \log(Q)$.

Si $Q < 1$, la courbe est située sous ses asymptotes. Si $Q > 1$, elle est située au-dessus. Les deux cas sont illustrés figure 16.32 pour le gain et figure 16.33 pour la phase.

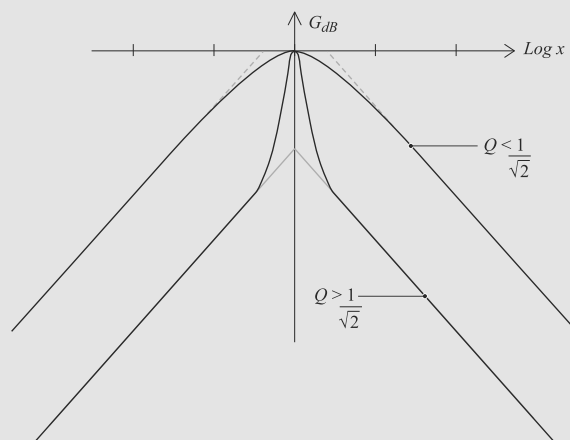


Figure 16.32 Diagramme de Bode en gain pour le RLC série.

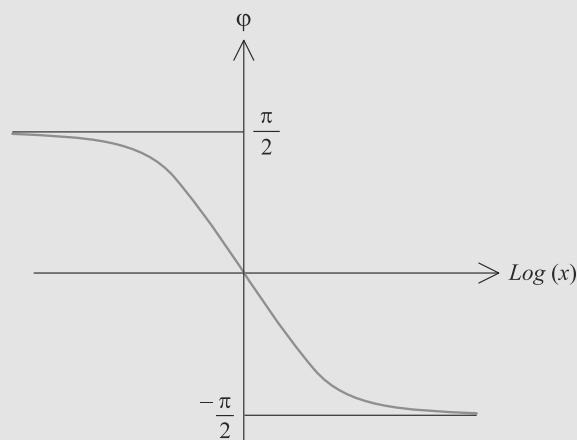


Figure 16.33 Diagramme de Bode en phase pour le RLC série.

16.18

Boucle d'amplificateurs opérationnels

Grâce à l'indépendance de charge, il est possible de réutiliser les fonctions de transfert des filtres séparés dans le calcul de la fonction de transfert complète. Comme l'énoncé vous y invite d'ailleurs, procédez donc étape par étape.

En outre, remarquez que la forme proposée pour \underline{H} est, au signe près, le résultat trouvé pour la résonance en intensité dans un RLC série au chapitre 14. La fin se ramène donc à une étude similaire à celle de l'exercice 17.

- Pour le premier filtre, $V_+ = V_- = 0$. Le théorème de Millman sur l'entrée - donne :



Il est fréquent qu'une des entrées de l'amplificateur opérationnel soit reliée à la masse, et donc que $V_+ = V_- = 0$. Mais ce n'est pas général, voir exercice 14. Seule la relation $V_+ = V_-$ est générale en régime linéaire.

$$0 = \frac{V_{e1}}{R} + \frac{V_{s1}}{R} + jC\omega V_{s1}$$

$$\Rightarrow \underline{H_1} = \frac{-1}{1 + jRC\omega}$$

Donc le premier filtre est un passe-bas du premier ordre.

Pour le second filtre, $V_+ = V_- = 0$. Le théorème de Millman sur l'entrée – donne :

$$0 = \frac{V_{e2}}{R_1} + \frac{V_s}{R_1} \Rightarrow \underline{H_2} = -1$$

C'est un filtre inverseur.

Pour le troisième filtre, $V_+ = V_- = 0$. Le théorème de Millman sur l'entrée – donne :

$$0 = \frac{V_{e3}}{R_2} + jC\omega V_s \Rightarrow \underline{H_3} = \frac{-1}{jR_2C\omega}$$

C'est un filtre intégrateur inverseur.

2. Ces trois filtres sont cascades, la sortie du troisième étant bouclée sur l'entrée du premier via une résistance R_3 . D'où les relations :

$$\underline{S_3} = \underline{H_3} \underline{E_3} = \underline{H_3} \underline{H_2} \underline{E_2} = \underline{H_3} \underline{H_2} \underline{S}$$



Attention au premier filtre, qui n'est pas câblé de la même manière dans les deux questions. Vous ne pouvez pas réutiliser l'expression de $\underline{H_1}$.

Soit $\underline{Z} = R/(1 + jRC\omega)$ l'impédance équivalente à R et C en parallèle. Appliquons le théorème de Millman en A sachant que $\underline{V_A} = \underline{V_-} = \underline{V_+} = 0$:

$$0 = \frac{E}{R} + \frac{S_3}{R_3} + \frac{S}{\underline{Z}}$$

$$\Rightarrow \underline{H} = \frac{-1}{1 + jR \left(C\omega - \frac{1}{R_2 R_3 C\omega} \right)}$$

En posant $\omega_0 = 1/C \sqrt{R_2 R_3}$ et $x = \omega/\omega_0$, il vient :

$$\underline{H} = \frac{-1}{1 + j \frac{R}{\sqrt{R_2 R_3}} \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

$$= \frac{-1}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

avec $Q = \frac{R}{\sqrt{R_2 R_3}}$



Au signe près, vous devez reconnaître la forme général d'un passe-bande, déjà vu avec le RLC série. Les calculs pour G_{dB} sont donc les mêmes que dans l'exercice 17 et ne sont redétaillés ici.

3. Par un raisonnement identique à celui de l'exercice 17, nous aboutissons au même diagramme de Bode (figure 16.32 page 260).

16.19

Réjecteur et simulation d'inductance

La lecture de l'énoncé révèle beaucoup d'informations utiles :

- par son titre : vous allez étudier un réjecteur (pensez-y quand vous tracerez le diagramme de Bode !) et un montage qui a un comportement équivalent à une bobine ;
- par la lecture des questions : le fait que le filtre est un réjecteur est sous-entendu à la question 2 ;
- par la question 3(b)A : pour prouver l'équivalence entre deux dipôles passifs linéaires, il suffit qu'ils aient même impédance complexe.

Tout cela doit vous permettre, à chaque question, de vous assurer que vous êtes sur la bonne voie.

1. a) Il y a un pont diviseur de tension aux bornes de l'association série de L et C :

$$\underline{V_s} = \frac{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \underline{V_e}$$

$$= \frac{j \frac{L\omega}{R} + \frac{1}{jRC\omega}}{1 + \frac{jL\omega}{R} + \frac{1}{jRC\omega}} \underline{V_e}$$

$$\Rightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}}$$

- b) Pour $x = 0$, $\underline{H} = 1$ donc les basses fréquences passent sans atténuation.

Pour $x \rightarrow +\infty$, $\underline{H} \rightarrow 1$ donc les hautes fréquences passent aussi sans atténuation.

Pour $x = 1$, $\underline{H} = 0$ donc la fréquence correspondant à ω_0 est coupée. Donc ce filtre est un réjecteur.



Un réjecteur est aussi appelé coupe-bande.

- c) Le gain maximal est $|\underline{H}(x=0)| = 1$ donc les pulsations de coupure sont définies par $|\underline{H}(x_c)| = 1/\sqrt{2}$. Donc :

$$\left| 1 + \frac{1}{jQ \left(x_c - \frac{1}{x_c} \right)} \right| = \sqrt{2}$$

$$1 + Q^2 \left(x_c - \frac{1}{x_c} \right)^2 = 2$$

$$x_c^2 \pm \frac{x_c}{Q} - 1 = 0$$

Cela correspond à deux trinômes et jusqu'à quatre solutions, mais nous ne retiendrons que les racines positives :

$$x_{c1} = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}$$

$$x_{c2} = \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}$$

D'où la largeur de la bande coupée, en pulsation réduite puis en pulsation :

$$\Delta x = \frac{1}{Q} \quad \text{et} \quad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

Le signal est atténué de plus de 3 dB dès que sa fréquence se trouve dans l'intervalle délimité par ces pulsations. En toute rigueur, la bande passante n'est pas l'intervalle $[x_{c1}, x_{c2}]$ mais plutôt la réunion des deux intervalles $]0, x_{c1}]$ et $[x_{c2}, +\infty[$.

d) Voir figure 16.34.

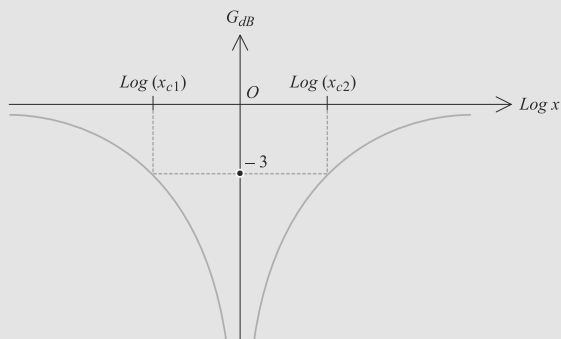


Figure 16.34 Diagramme de Bode du réjecteur.

2. a) Si le réjecteur est réglé sur 50 Hz, il pourra couper les parasites dûs au secteur.

b) Pour $Q = 10$, la largeur de la bande passante en fréquence est $\Delta f = 5$ Hz. Donc le filtre coupe les fréquences comprises entre 47,5 Hz et 52,5 Hz.

Plus Q est grand, plus cette largeur est faible, et plus l'action du réjecteur sera ciblée et précise.

c) Nous avons les relations $Q = L\omega_0/R = 10$ et $LC\omega_0^2 = 1$. D'où :

$$L = \frac{RQ}{\omega_0} = 149,6 \text{ H}$$

$$C = \frac{1}{L\omega_0^2} = 67,7 \text{ nF}$$

La valeur de C est raisonnable avec du matériel ordinaire, mais celle de L nécessiterait une bobine de très grande taille. Le montage est donc irréalisable ici.

3. a) Paramétrons le circuit suivant la figure 16.35. Les AO étant idéaux, $i = i_1$, $i_2 = i'$ et $i_3 = i_4$.

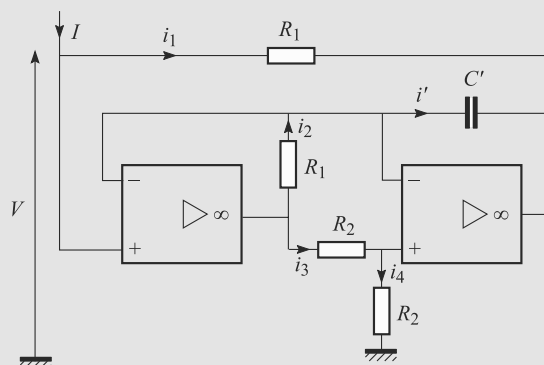


Figure 16.35 Paramétrage du simulateur d'inductance.

Les AO sont en régime linéaire donc $V_{1-} = V_{1+}$ et $V_{2-} = V_{2+}$. Les lois d'Ohm s'écrivent alors, en passant aux amplitudes complexes :

$$R_1 \underline{I_1} = \frac{1}{jC'\omega} \underline{I'}$$

$$R_1 \underline{I_2} = R_2 \underline{I_3}$$

L'additivité des tensions donne :

$$\underline{V} = -R_1 \underline{I_2} + R_2 \underline{I_3} + R_2 \underline{I_4}$$

D'où $\underline{V} = R_2 \underline{I_4} = R_2 \underline{I_3} = R_1 \underline{I_2} = R_1 \underline{I'} = jR_1^2 C' \omega \underline{I_1}$. Comme $\underline{I_1} = \underline{I}$, cela conduit à :

$$\underline{V} = jR_1^2 C' \omega \underline{I}$$

L'impédance de ce dipôle est donc :

$$\underline{Z} = jR_1^2 C' \omega$$

- b) Cette impédance est formellement identique à celle d'une bobine avec l'inductance :

$$L = R_1^2 C' \omega$$

c) Numériquement, cela donne $L = 145,2$ H soit une valeur très proche de celle obtenue précédemment. Mais cette fois le montage ne fait plus intervenir que des composants réellement disponibles dans ce contexte. Il est donc réalisable. D'après l'étude précédente, l'atténuation maximale est obtenue pour $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ donc $\omega = 50,7$ Hz. Cela convient donc très bien pour filtrer les parasites secteur.

16.20

Amélioration des enregistrements par capteur CCD

La structure de Rauch est un grand classique qu'il faut avoir vu pour ne pas se laisser intimider.

La dernière question est à rapprocher de l'exercice 17, concernant les positions relatives d'une courbe et de ses asymptotes.

1. a) L'AO est en régime linéaire donc $\underline{V}_+ = 0 \Rightarrow \underline{V}_- = 0$. Soit A le noeud commun à R_2 , R_3 et R_4 . Le théorème de Millman sur l'entrée - s'écrit :

$$\left(\frac{1}{R+R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\underline{V}_- = \frac{\underline{E}}{R+R_1} + \frac{\underline{V}_A}{R_2} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{V}_A = -\frac{R_2}{R+R_1}\underline{E}$$

et celui en A :

$$\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)\underline{V}_A = \frac{\underline{V}_s}{R_3}$$

En combinant les deux il vient :

$$\underline{H}_1 = -\frac{R_4(R_2+R_3) + R_2R_3}{R_4(R+R_1)}$$

Cette fonction de transfert est réelle négative, elle amplifie donc le signal en l'inversant. b) Le courant d'entrée traverse R_1 , donc plus R_1 est grande plus le courant d'entrée est faible. Avec R_3 non nul, il est possible d'augmenter R_1 tout en gardant la valeur voulue pour le gain. Avec R_3 nul, augmenter R_1 aurait impliqué une chute de gain.

2. a) Tout comme dans la partie précédente, ici $\underline{V}_- = \underline{V}_+ = 0$. Appliquons le théorème de Millman sur l'entrée - et en A (point commun des quatre premières impédances) :

$$(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3)\underline{V}_- = \underline{Y}_3 \underline{V}_A + \underline{Y}_5 \underline{V}_s = 0$$

Il vient alors :

$$\underline{V}_A = -\frac{\underline{Y}_5}{\underline{Y}_3} \underline{V}_s$$

$$(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4)\underline{V}_A = \underline{Y}_1 \underline{V}_e + \underline{Y}_2 \underline{V}_s$$

En combinant les deux, il vient :

$$(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) \frac{-\underline{Y}_5}{\underline{Y}_3} \underline{V}_s = \underline{Y}_1 \underline{V}_e + \underline{Y}_2 \underline{V}_s$$

qui conduit bien au résultat attendu :

$$\underline{H}_2 = \frac{-\underline{Y}_1 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_2 \underline{Y}_3 + \underline{Y}_5(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4)}$$

- b) D'après l'énoncé :

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1}$$

$$\underline{Y}_2 = jC_1\omega$$

$$\underline{Y}_3 = jC_2\omega$$

$$\underline{Y}_4 = \frac{1}{R}$$

$$\underline{Y}_5 = \frac{1}{R_2}$$

Remplaçons dans la formule générale établie précédemment :

$$\underline{H}_2 = \frac{-\frac{jC_2\omega}{R_1}}{-C_1C_2\omega^2 + \frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{R_1} + jC_1\omega + jC_2\omega + \frac{1}{R}\right)}$$

qui peut se réarranger sous la forme :

$$\underline{H}_2 = \frac{-1}{\frac{R_1}{R_2}\left(\frac{C_1}{C_2} + 1\right) + jR_1C_1\omega + \left(1 + \frac{R_1}{R}\right)\frac{1}{jR_2C_2\omega}}$$

Ceci correspond à un filtre passe-bande : $|\underline{H}_2|$ tend vers zéro aux basses fréquences et aux hautes fréquences.

- c) Étudions les comportements asymptotiques :

$$\text{Basses fréquences : } \underline{H}_2 \sim \frac{-jR_2C_2\omega}{1 + \frac{R_1}{R}}$$

$$\Rightarrow G_{dB} = 20 \log \left(\frac{R_2C_2}{1 + \frac{R_1}{R}} \right) + 20 \log(\omega)$$

$$\text{Hautes fréquences : } \underline{H}_2 \sim \frac{-1}{jR_1C_1\omega}$$

$$\Rightarrow G_{dB} = -20 \log(R_1C_1) - 20 \log(\omega)$$

ce qui donne les équations de deux asymptotes de pentes opposées et ne passant pas par l'origine. L'allure du diagramme asymptotique est donnée figure 16.36. C'est bien un filtre passe-bande.

- d) Le gain peut s'écrire :

$$G = \frac{1}{\sqrt{\frac{R_1^2}{R_2^2}\left(\frac{C_1}{C_2} + 1\right)^2 + \left(R_1C_1\omega - \left(1 + \frac{R_1}{R}\right)\frac{1}{R_2C_2\omega}\right)^2}}$$

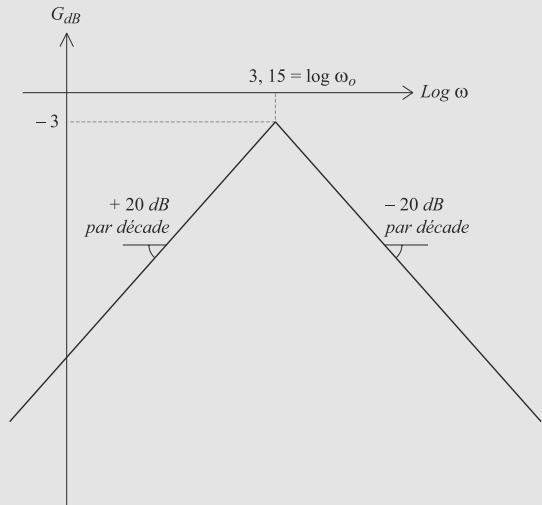


Figure 16.36 Diagramme de Bode passe-bande.

Le numérateur étant constant, cette fraction est maximale quand son dénominateur est minimal, donc quand le terme sous la racine est minimal. Ceci se produit quand le deuxième terme sous la racine est nul :

$$R_1 C_1 \omega - \left(1 + \frac{R_1}{R}\right) \frac{1}{R_2 C_2 \omega} = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{1 + \frac{R_1}{R}}{R_1 R_2 C_1 C_2}$$

qui conduit bien au résultat attendu :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R + R_1}{R_1 R_2 C_1 C_2 R}}$$

e) Le maximum de gain est donc égal à :

$$G_{\max} = \frac{R_2 C_2}{R_1 (C_1 + C_2)}$$

Il faut comparer ceci au gain G_a donnée par le point d'intersection des asymptotes. Cherchons la pulsation correspondant à ce point :

$$\frac{j R_2 C_2 \omega}{1 + \frac{R_1}{R}} = \frac{1}{j R_1 C_1 \omega} \Rightarrow \omega = \omega_0$$

Déterminons le gain correspondant à partir de l'asymptote haute fréquence :

$$G_a = |H| \simeq \frac{1}{R_1 C_1 \omega_0} = \sqrt{\frac{R_2 C_2 R}{R_1 C_1 (R + R_1)}}$$

Il n'y a plus qu'à comparer numériquement ces gains pour pouvoir tracer la courbe réelle sur le diagramme de Bode et estimer la sélectivité du filtre.

- Première série de valeurs : $G_{\max} = 0,5$ et $G_a = 0,71$ donc la courbe est sous ses asymptotes.
- Deuxième série de valeurs : $G_{\max} = 100$ et $G_a = 9,53$ donc la courbe est au-dessus de ses asymptotes.

Cela permet de tracer les courbes réelles de gain correspondant à ces deux séries de valeur. Le graphe de la figure 16.37 montre que la deuxième série de valeurs conduit à un filtre beaucoup plus sélectif (bande passante plus étroite).

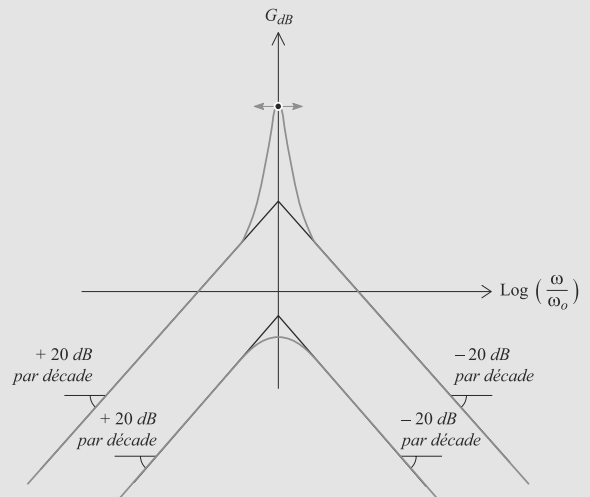


Figure 16.37 Sélectivité d'un filtre.

16.21

Filtre du deuxième ordre avec AO réel

Cet exercice illustre bien la nécessité de comprendre les méthodes et surtout pas de s'appuyer sur des résultats appris par cœur.

Procédez tranquillement et soigneusement, les méthodes ne changent pas malgré le caractère réel de l'AO, mais les calculs sont plus lourds.

1. Le théorème de Millman appliqué sur l'entrée – donne :

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R' + \frac{1}{jC\omega}} \right) \underline{V_-} = \frac{V_s}{R} + \frac{V_e}{R' + \frac{1}{jC\omega}}$$

En outre, $\underline{V_+} = 0$ donc $\underline{V_-} = -\underline{\varepsilon}$ donc :

$$\underline{V_-} = -\frac{V_s}{\mu} = -\left(1 + j\frac{f}{f_0}\right) \frac{V_s}{\mu_0}$$

D'où, en combinant ces deux résultats :

$$\underline{H} = \frac{jC\omega}{(1 + jR'C\omega) \left(-\frac{1}{R} - \left(\frac{1}{R} + \frac{jC\omega}{1 + jR'C\omega} \right) \frac{1}{\mu_0} \left(1 + j\frac{f}{f_0} \right) \right)}$$

$$= \frac{-jRC\omega}{1 + jR'C\omega + (1 + j(R + R')C\omega) \frac{1}{\mu_0} \left(1 + j\frac{f}{f_0} \right)}$$

2. Regroupons les terme de différents degrés en ω au dénominateur pour pouvoir faire l'identification et remplaçons les pulsations par des fréquences avec $f = \omega/2\pi$:

$$\underline{H} = \frac{-j\frac{f}{f_2}}{1 + \frac{1}{\mu_0} + \left(\frac{R'}{Rf_2} + \frac{1}{\mu_0 f_2} \left(\frac{R'}{R} + 1 \right) + \frac{1}{\mu_0 f_0} \right) jf + \frac{1 + \frac{R'}{R}}{f_2 f_0 \mu_0} (jf)^2}$$

Par identification :

$$xA = -\frac{f}{f_2} \Rightarrow A = -\frac{f_c}{f_2}$$

$$1 + \frac{1}{\mu_0} \approx 1$$

$$\frac{R'}{Rf_2} + \frac{1}{\mu_0 f_2} \left(\frac{R'}{R} + 1 \right) + \frac{1}{\mu_0 f_0} = \frac{1}{Qf_c} \approx \frac{R'}{Rf_2} + \frac{1}{f_1}$$

$$\frac{1 + \frac{R'}{R}}{f_2 f_0 \mu_0} = \frac{1}{f_c^2} \approx \frac{1}{f_1 f_2}$$

ce qui est conforme à l'expression donnée par l'énoncé.

Numériquement, $f_c \approx 12,6$ kHz ; $Q \approx 2,45$; $A \approx -79,3$.

3. À basse fréquence, $\underline{H} \sim A jx$ donc :

$$G_{dB} \approx 20 \log(A) + 20 \log(x)$$

La pente est de 20 dB/décade.

À haute fréquence, $\underline{H} \sim -A j/x$ donc :

$$G_{dB} \approx 20 \log(A) - 20 \log(x)$$

La pente est de -20 dB/décade.

D'où le diagramme de Bode de la figure 16.38. Pour améliorer la précision du tracé, nous avons calculé numériquement

$$G_{dB}(f_c) = 45,8 \text{ dB et } 20 \log(A) = 38 \text{ dB.}$$

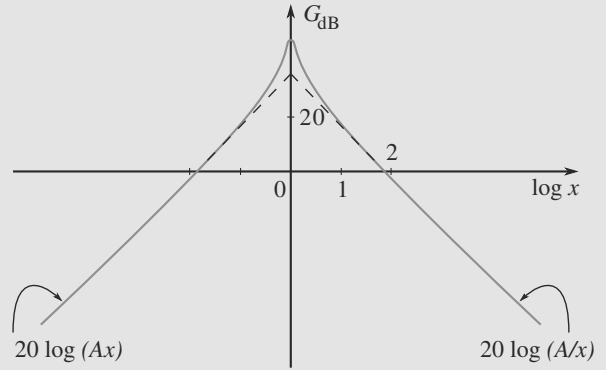


Figure 16.38 Diagramme de Bode du filtre avec AO réel.

4. Théoriquement, l'AO devrait avoir un comportement dérivateur dès que la fréquence est en-dessous de f_c , donc en dessous de 12,6 kHz. Pourtant, vers 10 kHz, nous sommes visiblement encore trop proches de f_c . Cela souligne les limitations en fréquence d'un AO réel, la plage de fréquences pour lesquelles ce montage est dérivateur est plus étroite qu'attendu.

Partie 5

Mécanique — Deuxième période

Plan

17.1	Résolution du problème	268
	Synthèse	271
	Tests et exercices	272
	Corrigés des exercices	276

Introduction

Le plus important dans ce chapitre est de comprendre qu'il n'y a rien de nouveau ! Une fois la mise en équation terminée (très simple car ce chapitre ne porte que sur des systèmes à un degré de liberté), le passage aux variables canoniques ramène à une étude formellement identique à celle du dipôle *RLC* série en régime sinusoïdal forcé (voir chapitre 14).

Le problème résolu dans la partie cours n'est qu'un exemple. Ce qui compte est la méthode.

Prérequis

- Oscillateur harmonique, oscillateur harmonique amorti
- Étude des régimes transitoires et sinusoïdaux forcés dans les circuits *RLC*
- Résonances dans les circuits *RLC*
- Nombres complexes
- Équations différentielles à coefficients constants avec second membre

Objectifs

- Étudier les oscillateurs harmoniques amortis soumis à une excitation sinusoïdale
- Distinguer régime transitoire et régime établi
- Utiliser les complexes pour étudier les résonances mécaniques

17.1 Résolution du problème

17.1.1 Mise en équation

Le système étudié est un oscillateur harmonique à un degré de liberté (noté ici x) amorti par frottement fluide. Il est excité par une force sinusoïdale $\vec{F}_e(t)$ (figure 17.1).

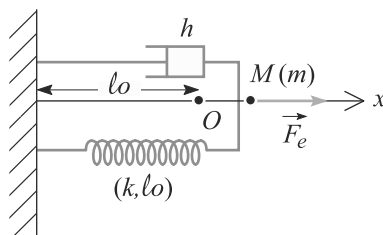


Figure 17.1 Oscillateur amorti soumis à une excitation sinusoïdale.

Son équation différentielle est donc de la forme :

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + F_e \cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad \vec{F}_e(t) = F_e \cos(\omega t) \vec{u}_x$$

où x est l'élongation par rapport à la position d'équilibre. En posant $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $Q = \sqrt{mk}/h$, cette équation se réécrit sous forme canonique :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_e}{m} \cos(\omega t)$$



L'analogie formelle avec le *RLC* série est totale. Le membre de droite $\omega_0^2 E \cos(\omega t)$ devient ici $F_e \cos(\omega t)/m$.



Piège classique, ω n'a aucune raison d'être égale à ω_0 !

17.1.2 Notation complexe

Une fois le régime transitoire passé, le régime sinusoïdal forcé s'installe et donc $x(t)$ peut être étudiée via la notation complexe :

$$\underline{x} = X e^{j(\omega t + \varphi_x)}$$

$$\underline{v} = V e^{j(\omega t + \varphi_v)}$$

$$\underline{F_e/m} = \frac{F_e}{m} e^{j\omega t}$$

Et la pulsation réduite sera notée $u = \omega/\omega_0$. Posons enfin $A = F_e/m\omega_0^2$.

17.1.3 Résonance en élongation

L'élongation x correspond à la tension aux bornes du condensateur. En reprenant les calculs d'électrocinétique, il apparaît que la résonance en élongation n'existe que si $Q > 1/\sqrt{2}$. Quand elle existe, elle se produit pour une valeur $u_r < 1$ donc $\omega_r \neq \omega_0$.



Retrouvez aussi la surtension : si $Q \gg 1$ alors $X_{\max} \approx QA \gg A$: il y a risque de destruction de l'oscillateur (élongation trop importante).

La courbe de $X(u)$ a donc la même allure que celle de la figure 14.4 page 224, ce qui donne la figure 17.2.

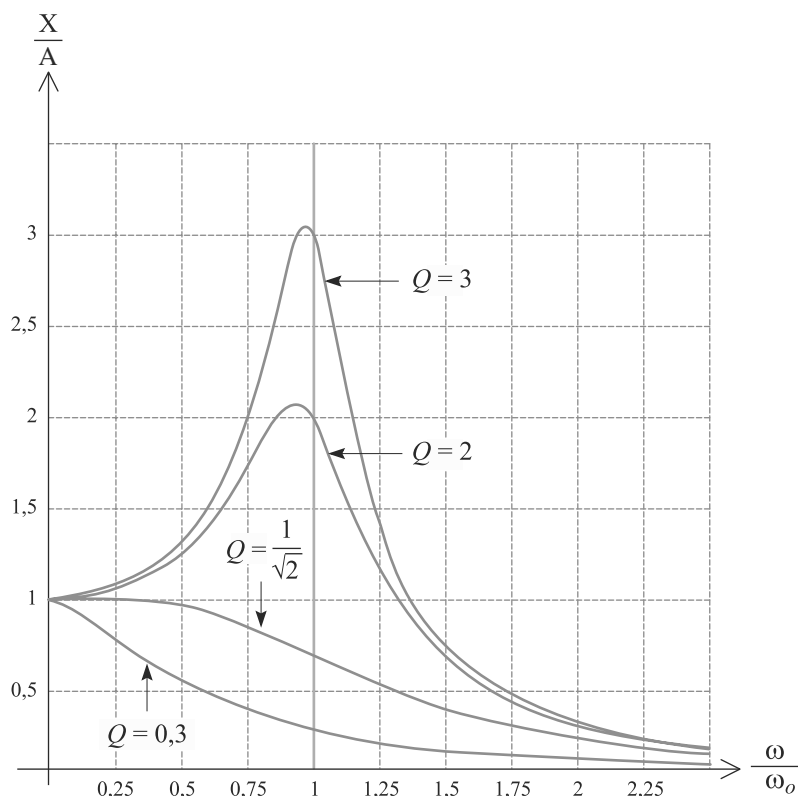


Figure 17.2 Résonance en élongation.

17.1.4 Résonance en vitesse

La résonance en vitesse est formellement identique à la résonance en intensité dans le dipôle RLC série, donc elle existe toujours. Les formules la gouvernant sont donc les mêmes et peuvent être retrouvées par la relation :

$$v(t) = \frac{dx}{dt}(t) \Rightarrow \underline{V} = j\omega \underline{X}$$

Cette résonance est située en $u = 1$, soit $\omega = \omega_0$, avec une bande passante à -3 dB de largeur $\Delta u = 1/Q$.

La courbe de $V(u)$ a donc la même allure que celle de la figure 14.2 page 222, ce qui donne la figure 17.3.

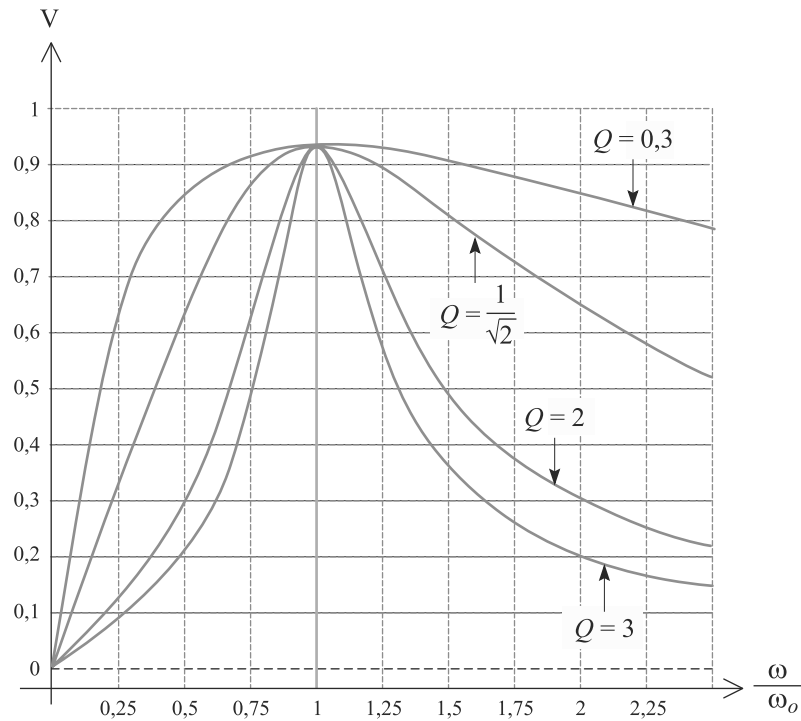


Figure 17.3 Résonance en vitesse.

Synthèse

Savoirs

- Équivalences entre résonances électriques et mécaniques
- Distinguer les régimes transitoire et établi

Savoir-faire

- Utiliser les complexes pour obtenir le régime permanent d'un oscillateur mécanique excité
- Ramener l'équation différentielle du mouvement à sa forme canonique pour la résoudre

Mots-clés

- Oscillateur mécanique,
- excitation sinusoïdale,
- complexes,
- régime transitoire,
- régime établi (permanent),
- résonances,
- facteur de qualité,
- amortissement.

Tests de connaissances

Les questions portent sur un oscillateur mécanique soumis à une excitation sinusoïdale.

- 17.1 La résonance en amplitude est similaire à la résonance en intensité dans un circuit RLC série.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 17.2 Au début d'une oscillation forcée, les régimes transitoire et sinusoïdal se superposent.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 17.3 La résonance en amplitude existe pour toute valeur des paramètres du système.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 17.4 La résonance en amplitude a lieu pour une pulsation supérieure à la pulsation propre du système.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

- 17.5 Les grandeurs électriques analogues à la masse et au coefficient d'amortissement sont L et C respectivement.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

- 17.6 La puissance moyenne transférée au système est maximale lorsque l'amplitude de l'oscillation est maximale.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

- 17.7 Si le système est soumis à deux excitations superposées, la réponse de l'oscillateur est la superposition de celle obtenues avec chaque excitation exercée seule sur le système.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

- 17.8 Le tracé de l'amplitude de vitesse en fonction de la fréquence est similaire à celui d'un gain de filtre passe-bande.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

17.9 Étude de l'amortisseur d'un camion
 (D'après Géologie Nancy.)

Les phénomènes se produisant au niveau de chaque roue d'un camion sont modélisés comme illustré figure 17.4 : une roue de centre O supporte une charge assimilée à un point matériel M de masse $m = 2000$ kg par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de longueur à vide $l_0 = 75$ cm et de raideur $k = 65 \cdot 10^3$ N.m⁻¹ en parallèle avec un amortisseur A .

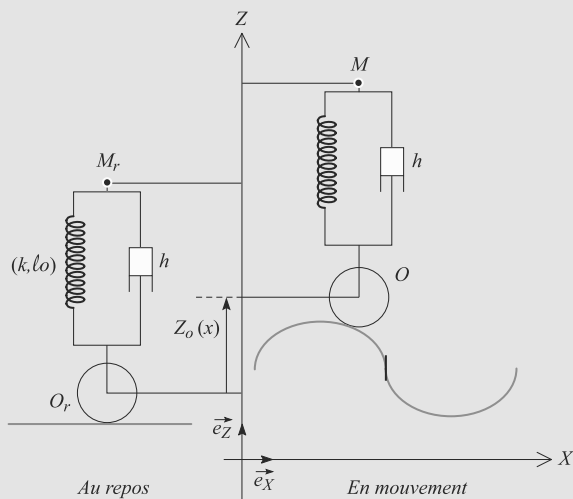


Figure 17.4 Amortisseur d'un camion.

Nous supposons que OM reste toujours vertical. Lorsque l'ensemble est au repos, O est en O_r et M en M_r , et le ressort a une longueur l_{eq} . Le point M est repéré par son altitude z par rapport à M_r et le point O par son altitude z_O par rapport à O_r . L'axe portant tous ces points est appelé Oz et orienté vers le haut.

L'amortisseur exerce sur M une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse relative de M par rapport à O , donc :

$$\vec{F} = -h(\dot{z} - \dot{z}_O) \vec{e}_z$$

avec $h = 5 \cdot 10^3$ kg.s⁻¹.

- Déterminez $\Delta l = l_{eq} - l_0$. Quelle est l'interprétation physique cette grandeur ?
On donne : $g = 9,8$ m.s⁻²
- La roue se déplace le long d'une piste ondulée en restant toujours en contact avec elle. La trajectoire de O a pour équation $z_O(x) = a \cos(2\pi x/\lambda)$ avec $a = 15$ cm et $\lambda = 1$ m. La vitesse horizontale reste constante égale v_e . Écrivez l'équation horaire $x(t)$ pour les conditions initiales $x(t = 0) = 0$ et identifiez ω dans l'expression $z_O(t) = a \cos(\omega t)$.
- Mise en équation et régime transitoire.
a) Calculez la longueur $l(t)$ du ressort à l'instant t , en fonction de z , z_O et l_{eq} .

- b) Déduisez-en l'équation différentielle gouvernant $z(t)$.
c) Évaluez la durée du régime transitoire.

Étude du régime sinusoïdal forcé. Vous supposerez désormais que le régime transitoire est terminé.

4. a) $z(t)$ est cherchée sous la forme $z(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi)$. Donnez l'expression de l'amplitude complexe \underline{Z} associée.
b) Tracez la courbe représentant Z_m en fonction de ω .
c) Pour quelle valeur v_{er} de la vitesse y a-t-il résonance en élongation ?
d) Commentez l'extrait suivant : « Dans le roman « Le salaire de la peur » de Georges Arnaud, un conducteur pilote un camion chargé de nitroglycérine, produit qui explose au moindre choc. Il arrive sur une piste en tôle ondulée et choisit, pour éviter de secouer le liquide dangereux, d'aller très vite sur cette route. »

17.10 Accélérographe à oscillateur mécanique (D'après CCP)

Le but de l'exercice est d'étudier un accélérographe construit à l'aide d'un oscillateur mécanique.

Dans un référentiel R galiléen muni du repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, on considère un corps solide (S) de masse $m = 0,1 \text{ kg}$ et de centre d'inertie G pouvant se déplacer sans frottement solide le long de l'axe horizontal Ox (figure 17.5); G est relié au point E par un ressort de raideur k ; (S) est en outre soumis à une force de frottement visqueux de la forme $-\beta \vec{V}_G$ où \vec{V}_G est la vitesse de G par rapport à E.



Figure 17.5 Représentation simplifiée de l'accéléromètre.

On repère la position de G par l'écart à la position d'équilibre l_0 par la relation $x = EG - l_0$.

1. Détermination des caractéristiques de l'oscillateur

Dans un premier temps, E est fixe en O.

On écarte G de sa position d'équilibre vers la droite, d'une distance $x_0 = 10 \text{ cm}$ et on le lâche sans vitesse initiale.

- a) Déterminer l'équation du mouvement; on posera $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $2\lambda = \frac{\beta}{m}$.
b) Déterminer $x(t)$ dans le cas d'un régime pseudo-périodique.
c) La durée séparant 10 passages de G par la position d'équilibre, de droite à gauche, est $\Delta t = 12 \text{ s}$. Par ailleurs, l'amplitude de la dixième oscillation est $x_1 = 7,5 \text{ cm}$.

En déduire les valeurs de la pseudo-pulsation, de β et de k .

2. Mesure d'une accélération

Dans cette question, le point E est solidaire d'un solide en vibration dans R. Sa position est donnée par $\vec{OE} = a \cos(\omega t) \vec{e}_x$.

- a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
b) Déterminer $x(t)$ en régime forcé (ou permanent).
c) Le tracé de l'amplitude X_0 des oscillations en fonction de la pulsation a l'allure de la figure 17.6 en coordonnées réduites $y = X_0/a$ en fonction de $u = \omega/\omega_0$:

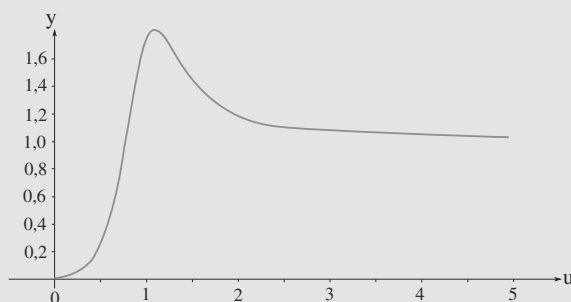


Figure 17.6 Figure 18.6 Amplitude de l'oscillation en fonction de u .

Que représente le maximum de cette courbe ? Cette situation se présente-t-elle pour toute valeur du coefficient d'amortissement ?

Déduire graphiquement l'amplitude a dans le cas où, pour $\omega = 7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, on mesure $X_0 = 0,2 \text{ m}$.

- d) Exprimer puis calculer la puissance moyenne dissipée par les frottements.

17.11 Sismographe

(D'après Agro INSA.)

Le dispositif de la figure 17.7 est un sismographe, appareil destiné à l'étude des mouvements du sol. Il est constitué d'un boîtier posé au sol et muni d'une pointe P, de sorte que la pointe suit les déplacements verticaux du sol, repérés dans un référentiel galiléen par leur altitude $Z_P(t)$. La verticale ascendante est munie d'un vecteur directeur \vec{u}_z .

Les extrémités Q et M d'un ressort de raideur k , de longueur à vide l_0 et de longueur $l(t)$ sont fixées respectivement au boîtier et à un point matériel de masse m .

Le mouvement de la masse m est amorti par une force $\vec{F} = f \frac{dl}{dt} \vec{u}_z$ où f est une constante positive.

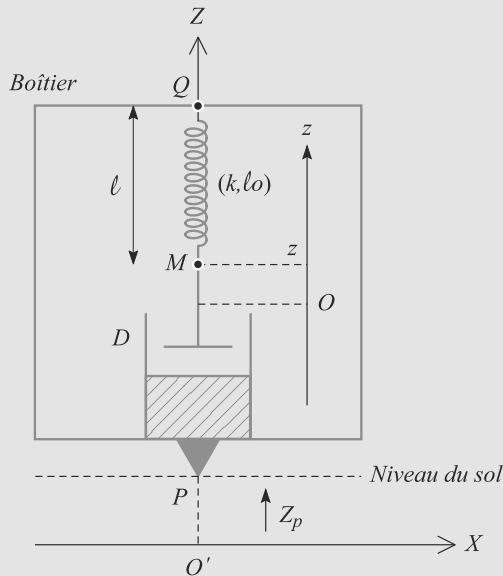


Figure 17.7 Principe d'un sismographe.

1. En l'absence d'activité sismique, P est fixe tel que $Z_p = 0$. Calculez la longueur l_1 du ressort quand il est à l'équilibre, en fonction de l_0 , m , g et k .
2. Lorsqu'il y a de l'activité sismique, la pointe P est animé d'un mouvement oscillant : $Z_p(t) = a \cos(\omega t)$. Soit $z(t) = l_1 - l(t)$. Exprimez l'accélération de M en fonction de \ddot{Z}_p et de \ddot{z} .
3. Montrez que z est gouverné par l'équation différentielle :

$$\ddot{z}(t) + 2\lambda\omega_0\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = \omega^2 a \cos(\omega t)$$

et exprimez les constantes λ et ω_0 en fonction des données. Applications numériques avec $m = 10 \text{ kg}$; $k = 10^3 \text{ N.m}^{-1}$; $f = 210 \text{ N.m}^{-1}.\text{s}$.

4. La réponse $z(t)$ du sismographe comporte une réponse transitoire de courte durée et une réponse sinusoïdale forcée. Donnez une condition sur λ pour que le régime transitoire soit critique.
5. Dans la suite, le régime transitoire sera supposé terminé. Le régime forcé sera alors de la forme $z(t) = b \cos(\omega t - \varphi)$. La réponse en amplitude du sismographe est donnée par le rapport $R = b/a$.
 - a) Établissez l'expression de $R(\omega)$ en fonction de ω , ω_0 et λ .
 - b) La figure 17.8 donne l'allure de $R(\omega)$ pour différentes valeurs de λ . Commentez ce graphe et vérifiez la cohérence de l'étude théorique menée précédemment.
 - c) À quelle condition le sismographe suit-il fidèlement les mouvements du sol ? Quel est l'intérêt du choix de λ proposé dans la question 4 ?

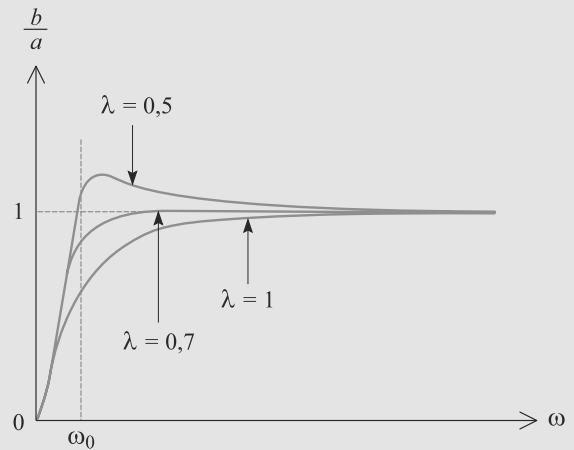


Figure 17.8 Courbes de réponse du sismographe.

17.12 Oscillations forcées amorties ou non amorties d'un ressort

(D'après Centrale TSI.)

Un ressort a pour raideur k et longueur à vide l_0 . Il est suspendu à un point O et une masse m est attachée à son extrémité libre M . Le mouvement est supposé toujours vertical et la position de M sera repérée par son abscisse x , calculée par rapport à sa position d'équilibre (figure 17.9).

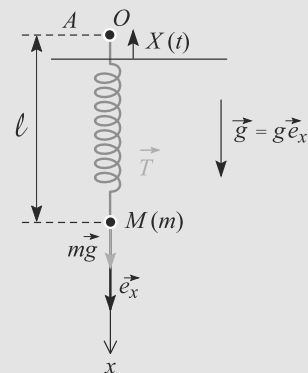


Figure 17.9 Oscillations forcées d'un ressort.

La verticale est repérée par un axe vertical descendant Ox et vous poserez $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

1. Oscillations forcées non amorties.

Le point d'attache supérieur du ressort est mis en mouvement par un système bielle-manivelle tel que $X(t) \vec{e}_x = a \cos(\omega t) \vec{e}_x$, où a et ω sont des constantes.

- a) Déterminez l'équation différentielle gouvernant $x(t)$.
- b) Cas $\omega \neq \omega_0$.

i) Résolvez cette équation avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$. Vous donnerez le résultat sous la forme d'un produit de deux fonctions trigonométriques de pulsations respectives ω_1 et ω_2 avec $\omega_2 < \omega_1$. Donnez les expressions de ω_1 et ω_2 en fonction de ω et ω_0 .

ii) Tracez la courbe de $x(t)$ pour $\omega = 1,2\omega_0$. Cette allure caractérise un phénomène de **battements**. Définissez et déterminez la période de ces battements en fonction de ω_2 .

c) Cas $\omega = \omega_0$.

i) Déterminez la solution de l'équation différentielle pour les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$, par passage à la limite $\omega \rightarrow \omega_0$ dans le résultat des questions précédentes.

ii) Tracez la courbe de $x(t)$. Donnez l'équation des deux demi-droites enveloppes de la courbe et commentez.

2. Oscillations forcées amorties.

Par un dispositif non détaillé, M est soumis, en plus des forces de la partie précédente, à une force de frottement fluide de la forme $\vec{F}_f = -h\vec{v}$ avec $h > 0$ et \vec{v} la vitesse de M .

Vous noterez $Q = m\omega_0/h$ le facteur de qualité.

a) Établissez l'équation différentielle gouvernant $x(t)$.

b) Quelle durée τ doit s'écouler avant que le régime puisse être considéré comme sinusoïdal forcé? Vous donnerez τ en fonction de ω_0 et Q .

c) Montrez que l'amplitude du mouvement de M peut s'écrire :

$$A(\omega) = \frac{\omega_0^2 a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2}}}$$

d) Donnez une interprétation physique du mouvement de M aux hautes et basses fréquences.

e) Montrez que, si Q est supérieur à une certaine valeur Q_{\min} , $A(\omega)$ admet un maximum pour une pulsation ω_r . Exprimez Q_{\min} et ω_r en fonction de ω_0 et Q .

f) Soit $V(\omega)$ l'amplitude de la vitesse. Exprimez-la en fonction de a , ω , ω_0 et Q .

g) Donnez une interprétation physique de la variation de V aux hautes et basses fréquences.

h) Montrez que $V(\omega)$ admet un maximum indépendamment de Q pour une pulsation ω'_r que vous préciserez. Que vaut ce maximum V_{\max} ?

i) Dans une expérience, la position A est mesurée par un capteur qui fournit une tension V_{pp} proportionnelle à A . Le tableau suivant donne les valeurs de V_{pp} et fV_{pp} , où f est la fréquence excitatrice.

V_{pp} (mV)	1844	1844	1906
f (mHz)	156,3	287,8	615,4
fV_{pp} (mHz.mV)	0,228	0,531	1,173
V_{pp} (mV)	2281	2906	4094
f (mHz)	1026	1429	1786
fV_{pp} (mHz.mV)	2,340	4,153	7,312
V_{pp} (mV)	4938	5906	4188
f (mHz)	1923	2198	2500
fV_{pp} (mHz.mV)	9,496	12,98	10,47
V_{pp} (mV)	3250	2344	1469
f (mHz)	2632	2857	3361
fV_{pp} (mHz.mV)	8,554	6,697	4,937

i) À quelle grandeur physique permet d'accéder fV_{pp} ?

ii) Définissez la bande passante Δf et déterminez-la graphiquement.

17.1

Faux, elle est similaire à la résonance en tension aux bornes du condensateur.

17.2

Vrai, on observe la somme de la solution de l'équation homogène (régime transitoire) et de la solution particulière de l'équation complète (régime permanent).

17.3

Faux, il faut un facteur de qualité assez grand (supérieur à $1/\sqrt{2}$).

17.4

Faux, elle a lieu pour une pulsation inférieure à la pulsation propre.

17.5

Vrai pour la masse et faux pour le coefficient d'amortissement (R).

17.6

Faux, c'est lorsque la vitesse est d'amplitude maximale (résonance en vitesse et en puissance coïncident).

17.7

Vrai, il s'agit de systèmes linéaires (attention les amplitudes ne se somment pas !)

17.8

Vrai car la résonance en vitesse est similaire à celle en intensité dans un RLC série.

17.9 Étude de l'amortisseur d'un camion

Cet exercice fait appel à des raisonnements proches du cours. Ne vous laissez pas intimider par la forme du membre de droite dans l'équation différentielle (le mouvement de O ajoute un terme par rapport au cas du cours), cela ne change rien aux méthodes à mettre en œuvre.

La dernière question doit attirer votre attention sur le fait que l'intuition est parfois trompeuse et que rien ne peut remplacer une étude technique et précise !

1. M est soumis à son poids, à la force de rappel et aux frottements fluides. Mais à l'équilibre la force de frottement est nulle, d'où l'équilibre des forces projeté sur l'axe vertical :

$$\begin{aligned} -mg - k(l_{\text{eq}} - l_0) &= 0 \\ \Rightarrow \Delta l &= -\frac{mg}{k} = -30 \text{ cm} \end{aligned}$$

$\Delta l < 0$ car le ressort est comprimé par le poids du camion.

2. Le mouvement horizontal est uniforme $x(t) = v_e t$. Donc :

$$z_O(t) = a \cos\left(\frac{2\pi v_e t}{\lambda}\right) \Rightarrow \omega = \frac{2\pi v_e}{\lambda}$$

3. a) Par relation de Chasles :

$$\begin{aligned} l &= \overline{OM} \\ &= \overline{OO_r} + \overline{O_r M_r} + \overline{M_r M} \\ &= -z_O + l_{\text{eq}} + z \\ l &= l_{\text{eq}} + (z - z_O) \end{aligned}$$

- b) Le PFD s'écrit, après projection sur l'axe vertical :

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= -k\Delta l - h(\dot{z} - \dot{z}_O) - mg \\ \Rightarrow \ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z &= \frac{h}{m}\dot{z}_O + \frac{k}{m}z_O \end{aligned}$$

- c) Le régime transitoire correspondant à la solution de l'équation sans second membre, qui comporte toujours un terme en $e^{-(h/2m)t}$ avec $2m/h = 0,8$ s. Le régime transitoire dure donc quelques secondes.

4. a) L'équation différentielle est algébrisée par la méthode complexe en :

$$\begin{aligned} \left(-\omega^2 + j\omega\frac{h}{m} + \frac{k}{m}\right)\underline{Z} &= \left(j\omega\frac{h}{m} + \frac{k}{m}\right)a \\ \Rightarrow \underline{Z} &= \frac{a(k + j\omega h)}{k - m\omega^2 + j\omega h} \end{aligned}$$

- b) D'où le module :

$$Z_m = a \sqrt{\frac{k^2 + \omega^2 h^2}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 h^2}}$$

Plaçons quelques points pour tracer la courbe. $Z_m(0) = a$ et $Z_m(+\infty) = 0$. La recherche d'un maximum conduit à :

$$\omega_r^2 = \frac{k^2}{h^2} \left(\sqrt{1 + \frac{2h^2}{km}} - 1 \right)$$

Il y a bien un maximum, d'où l'allure de la figure 17.10.

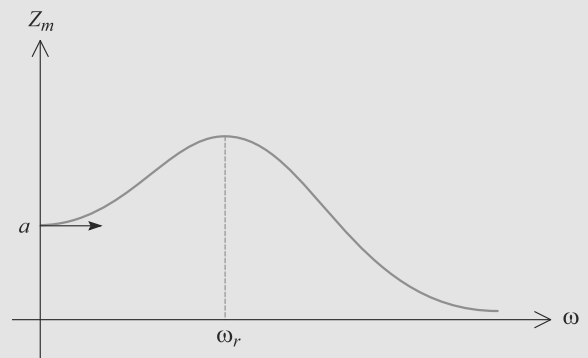


Figure 17.10 Résonance en élongation de l'amortisseur.

c) D'après ce qui précède :

$$v_{er} = \frac{\lambda k}{2\pi h} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{2h^2}{km}} - 1} \approx 0,87 \text{ m.s}^{-1}$$

d) Si $v_e \gg v_{er}$, alors $\omega > \omega_r$ et donc $Z_m \rightarrow 0$. Rouler vite est donc une bonne idée.

17.10 Accélérographe à oscillateur mécanique

Le problème, très classique, doit être abordé en lisant attentivement le texte qui fixe les paramètres utilisés et précise le cadre original de cet exercice. Les techniques utilisées ensuite sont sans surprise si l'on arrive à dépasser les problèmes formels.

1. Détermination des caractéristiques de l'oscillateur

a) Le système est paramétré comme sur la figure 18.11 :

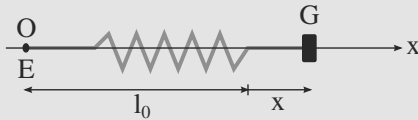


Figure 17.11 E fixe en O.

On projette le PFD sur l'axe Ox : $m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$ ce qui se réduit avec les notations du texte à :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

b) Dans le cas du régime pseudo-périodique, le polynôme caractéristique $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$ a un discriminant réduit négatif $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 < 0$: $\lambda < \omega_0$. On pose alors $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ et ses racines sont : $r = -\lambda \pm j\omega$. La solution générale pour $x(t)$ est alors :

$$x(t) = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \exp(-\lambda t)$$

Les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$ permettent d'obtenir la solution au problème :

$$x(t) = x_0 \left[\cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega t) \right] \exp(-\lambda t).$$

c) $\Delta t = 12 \text{ s}$ correspond à 10 pseudo-périodes et donc $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,2 \text{ s}$. Il faut alors interpréter le texte : on supposera que l'amplitude de la dixième oscillation est le maximum atteint lors du dixième rebond. On a alors : $x_0 \exp(-10\lambda T) = x_1$ ou encore $\lambda T = \frac{1}{10} \ln\left(\frac{x_0}{x_1}\right) = \frac{-\ln(0,75)}{10}$ avec $\beta = 2m\lambda$. On en déduit numériquement :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 5,24 \text{ rad.s}^{-1};$$

$$\beta = 2m \frac{-\ln(0,75)}{10T} = 4,79 \cdot 10 \text{ kg.s}^{-1};$$

$$k = m\omega_0^2 = m(\omega^2 + \lambda^2) = 2,75 \text{ N.m}^{-1}.$$

2. Mesure d'une accélération

a) Si l'élongation est toujours égale à x dans cette partie, et la dissipation également inchangée (puisque liée à la vitesse d'étirement du ressort), l'accélération, elle, est modifiée dans le référentiel R : $\overline{OG} = \overline{OE} + \overline{EG} = a \cos(\omega t) + x$. Le PFD projeté sur l'axe Ox donne maintenant :

$$m(-a\omega^2 \cos(\omega t) + \ddot{x}) = -kx - \beta\dot{x}$$

En utilisant les paramètres du texte, ceci se transforme en :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = a\omega^2 \cos(\omega t).$$

b) On utilise l'outil complexe pour trouver la solution de régime permanent :

$$-\omega^2 \underline{x} + 2j\omega\lambda \underline{x} + \omega_0^2 \underline{x} = a\omega^2 \exp(j\omega t)$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\underline{x} = a \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\omega\lambda} \exp(j\omega t).$$

On en déduit alors $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$ avec :

$$X_0 = a \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2 \omega^2}}$$

$$\text{et } \varphi = \arg\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\omega\lambda}\right) = \arg\left(\frac{-j}{-(\omega_0^2 - \omega^2)j + 2\omega\lambda}\right).$$

La partie réelle du dénominateur étant positive, on peut passer à l'arctan :

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega\lambda}\right).$$

c) Le maximum de la courbe représente une situation de résonance : c'est un maximum d'amplitude atteint pour ω voisin de ω_0 (u voisin de 1). Pour savoir si cette résonance en amplitude a toujours lieu, explicitons $y(u)$:

$$y = \frac{X_0}{a} = \frac{u^2}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \frac{4\lambda^2}{\omega_0^2} u^2}}.$$

$$y \text{ est maximal si } y^2 = \frac{u^4}{(1 - u^2)^2 + \frac{4\lambda^2}{\omega_0^2} u^2} \text{ l'est aussi.}$$

$$\text{Or, } \frac{dy^2}{du} = \frac{4u^3}{(1 - u^2)^2 + \frac{4\lambda^2}{\omega_0^2} u^2} - \frac{u^4 [2(1 - u^2)(-2u) + \frac{8\lambda^2}{\omega_0^2} u]}{[(1 - u^2)^2 + \frac{4\lambda^2}{\omega_0^2} u^2]^2}$$

et donc cette dérivée est nulle si

$$4u^3[(1-u^2)^2 + \frac{4\lambda^2}{\omega_0^2}u^2] - u^4[2(1-u^2)(-2u) + \frac{8\lambda^2}{\omega_0^2}u] = 0$$

et donc

$$u = 0$$

$$\text{ou } [(1-u^2)^2 + \frac{4\lambda^2}{\omega_0^2}u^2] + u^2[(1-u^2) - \frac{2\lambda^2}{\omega_0^2}] = 0$$

ce qui se simplifie en $1 - u^2 + \frac{2\lambda^2}{\omega_0^2}u^2 = 0$. Une autre solution que $u = 0$ existe donc pour :

$$u^2 = \frac{1}{1 - \frac{2\lambda^2}{\omega_0^2}} \quad \text{soit} \quad u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\lambda^2}{\omega_0^2}}}.$$

Cette solution n'est permise que si $\lambda < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} = \lambda_c$. Pour qu'il y ait résonance en amplitude, il faut donc avoir un amortissement pas trop fort, inférieur à une valeur critique.

On procède à une estimation graphique de u pour $\omega = 7 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ($u = 7/5,24 = 1,34$) : $y = 1,6$ ce qui donne :

$$a = \frac{X_0}{y} = \frac{0,2}{1,6} = 0,125m.$$

d) La puissance instantanée dissipée dans le frottement s'écrit :

$$-\beta \vec{V}_R(G) \cdot \vec{V}_R(G) = -\beta \dot{x}(\dot{x} - a\omega \sin(\omega t)).$$

En effet, c'est la vitesse de G relative à E qui intervient dans la force de frottement mais bien la vitesse de G dans le référentiel d'étude qui intervient dans la puissance

En moyennant, on a donc :

$$P_m = \langle P(t) \rangle = -\beta \frac{X_0^2 \omega^2}{2} - a\beta X_0 \omega^2 \langle \sin(\omega t + \varphi) \sin(\omega t) \rangle$$

car $\dot{x} = -\omega X_0 \sin(\omega t + \varphi)$ et $\langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$. De plus, $\langle \sin(\omega t + \varphi) \sin(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \langle \cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi) \rangle = \frac{\cos(\varphi)}{2}$. On en déduit donc que :

$$P_m = -\beta \frac{[X_0^2 + aX_0 \cos(\varphi)]\omega^2}{2}$$

Comme $\cos(\varphi) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$, on en conclut que :

$$P_m = -\frac{\beta a^2 \omega^2}{2} \frac{\omega^4 + \omega^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2},$$

et donc, au final,

$$P_m = -\frac{\beta a^2}{2} \frac{\omega^2 \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}.$$

Numériquement, on obtient :

$$P_m = 5,29 \cdot 10^{-3} \text{ W}.$$

17.11

Sismographe

Si le traitement est très classique, proche du cours, les dernières questions sont plus physiques et méritent que vous vous y attardiez.

L'absence de signe – dans la force de frottement est seulement due à une convention d'orientation. Ainsi, si le ressort s'allonge $l > 0$, la masse descend et la force de frottement est bien vers le haut.

1. La masse m est soumise à son poids, à la force de rappel du ressort et à la force de frottement. À l'équilibre, cette dernière est nulle et l'équilibre des forces s'écrit :

$$m\vec{g} + k(l_1 - l_0)\vec{u}_z = \vec{0}$$

$$\Rightarrow l_1 = l_0 + \frac{mg}{k}$$



Attention au signe dans la force de rappel. Le vecteur \vec{u}_{sortant} défini page 155, est ici $-\vec{u}_z$.

2. L'altitude z_M de la masse m peut se décomposer par relation de Chasles :

$$z_M = \overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PQ} + \overline{QM}$$

$$= Z_P(t) + PQ - l(t)$$

D'où l'accélération, en dérivant deux fois :

$$\ddot{z}_M = \ddot{Z}_P - \ddot{l}$$

$$= \ddot{Z}_P + \ddot{z}$$

3. Le PFD pour la masse m , projeté sur \vec{u}_z , s'écrit donc :

$$m\ddot{z}_M = -mg + k(l - l_0) + f \frac{dl}{dt}$$

$$m\ddot{Z}_P + \ddot{z} = -mg + k(l_1 - z - l_0) - f\dot{z}$$

$$-\ddot{Z}_P = \ddot{z} + \frac{f}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z$$

Sachant que $Z_P(t) = a \cos(\omega t)$, c'est bien l'équation demandée avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{f}{2\sqrt{km}} = 1,05$$

4. Le régime transitoire est critique si le discriminant de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est nul :

$$(2\lambda\omega_0)^2 - 4\omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1$$

5. a) Par la méthode complexe, introduisons l'amplitude complexe \underline{Z} de z . L'équation différentielle devient :

$$((-j\omega)^2 + 2\lambda\omega_0(j\omega) + \omega_0^2)\underline{Z}e^{j\omega t} = \omega^2 a e^{j\omega t}$$

D'après l'énoncé, $\underline{Z} = b e^{-j\varphi}$ donc :

$$\frac{b}{a} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\lambda\omega_0\omega} e^{j\varphi}$$

a et b étant des réels positifs, ce rapport complexe est égal à son propre module :

$$R = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega_0^2\omega^2}}$$

- b) L'équation de R montre que R tend vers 0 à basse fréquence, quel que soit λ , ce que le graphe confirme.

De même, le graphe confirme que, à haute fréquence, R tend vers 1 quel que soit λ .

- c) La pointe restitue fidèlement les mouvements du sol si R est proche de 1. Il faut donc que $\omega \gg \omega_0$, ce qui correspond à quelques Hz.

Mais il faut aussi que le transitoire soit le plus court possible, car il constitue un signal parasite. Or, le régime transitoire permettant le retour au régime permanent le plus rapide est le régime critique.

17.12 Oscillations forcées amorties ou non amorties d'un ressort

Ce problème se veut synthétique sur l'étude des oscillations forcées d'un ressort. Bien qu'il ne fasse appel qu'à des outils de première année, il apparaît fréquemment dans les concours de deuxième année.

En particulier, familiarisez-vous bien avec la notion de battements.

Dans la partie avec amortissement, raccrochez-vous à vos connaissances de cours. L'énoncé vous parle d'une valeur minimale de Q pour qu'il y ait résonance, ce qui doit vous faire penser à la résonance en position. D'ailleurs l'expression de A vous est familière.

1. a) Le point matériel M est soumis à son poids et à la force de rappel élastique. Avec un axe Ox descendant, le PFD se projette en $m\ddot{x} = mg - k(l - l_0)$.

La position d'équilibre correspond à $mg - k(l_{\text{eq}} - l_0) = 0$ donc $l_{\text{eq}} = l_0 + mg/k$. Donc $x = l - l_{\text{eq}}$ donne l'équation différentielle :



Ce changement de variable est celui suggéré dans la méthode page 156.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{k}{m}x &= \frac{k}{m}X \\ \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2x &= \omega_0^2a \cos(\omega t) \end{aligned}$$

- b) i) La solution de l'équation différentielle est la somme de deux termes : une solution particulière $x_P(t)$ et une solution d'équation sans second membre $x_{\text{SSM}}(t)$.

Cherchons la première sous la forme :

$$x_P(t) = \alpha \cos(\omega t + \varphi)$$

Elle doit satisfaire l'équation différentielle :

$$(-\alpha\omega^2 + \alpha\omega_0^2) \cos(\omega t + \varphi) = \omega_0^2 a \cos(\omega t)$$

En considérant par exemple cette expression à $t = 0$ il vient :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} a \\ \varphi &= 0 \end{aligned}$$

La solution de l'équation sans second membre est de la forme :

$$x_{\text{SSM}}(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$



Veillez à ne pas confondre ω et ω_0 ! Les problèmes que cela poserait sont particulièrement évidents ici.

D'où la forme générale de la solution :

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \\ &\quad + \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} a \cos(\omega t) \end{aligned}$$

La condition initiale $x(0) = 0$ donne immédiatement A :

$$A = -\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} a$$

La condition initiale $\dot{x}(0) = 0$ donne directement $B = 0$. D'où :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} a (\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)) \\ &= \frac{-2\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} a \sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right) \end{aligned}$$

Les pulsations demandées par l'énoncé sont donc :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\omega + \omega_0}{2} \\ \omega_2 &= \left| \frac{\omega - \omega_0}{2} \right| \end{aligned}$$

- ii) La courbe est donnée figure 17.12. Une sinusoïde rapide (pulsation ω_1) est prise dans une enveloppe elle-même sinusoïdale plus lente (pulsation ω_2 , période $T_2 = 2\pi/\omega_2$). Le phénomène est périodique, il est donc possible de lui associer une période.

La figure montre que les battements possèdent une période T moitié de celle de la sinusoïde enveloppe : $T = T_2/2 = \pi/\omega_2$.

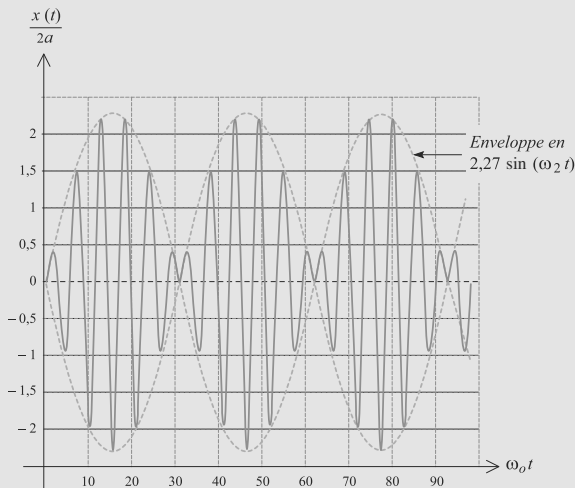


Figure 17.12 Phénomène de battements.

c) i) Dans la solution précédemment trouvée, considérons seulement le terme dont la limite $\omega \rightarrow \omega_0$ n'est pas évidente :

$$\frac{\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right)}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Quand $\theta \rightarrow 0$, $\sin(\theta) \simeq \theta$ donc ce terme devient :

$$\begin{aligned} \frac{\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right)}{\omega_0^2 - \omega^2} &\simeq \frac{\frac{\omega - \omega_0}{2} t}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ &= \frac{-t}{2(\omega + \omega_0)} \end{aligned}$$

D'où :

$$x(t) = \frac{a\omega_0 t}{2} \sin(\omega_0 t)$$

ii) Voir figure 17.13. C'est une sinusoïde dont l'amplitude augmente linéairement. Cette divergence de la réponse est semblable à l'effet acoustico-électrique Larsen.

Les équations des deux demi-droites sont données directement sur la figure.

2. a) Par rapport à l'étude précédente, il faut ajouter au bilan de force un terme en $-h\dot{x}$. D'où la nouvelle équation :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 a \cos(\omega t)$$

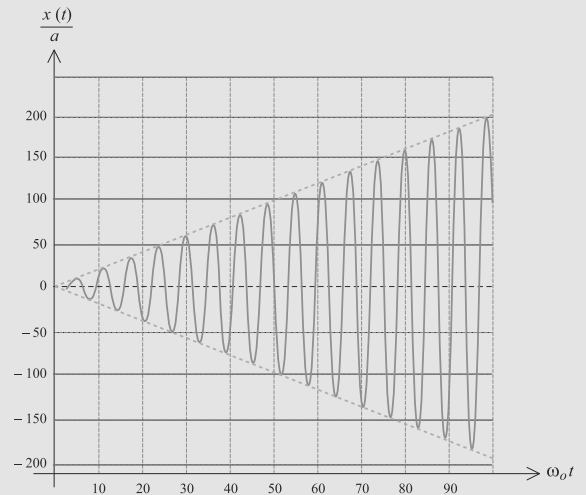


Figure 17.13 Sinusoïde divergente.

b) Le régime transitoire est donné par la solution de l'équation sans second membre. Quel que soit le signe du discriminant de son équation caractéristique associée, cette solution contient un terme exponentiel décroissant $e^{-\omega_0 t/2Q}$. En identifiant avec la forme habituelle d'une décroissance exponentielle $e^{-t/\tau}$, il vient :

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$$

c) Une fois le régime forcé établi, $x(t)$ devient sinusoïdale de pulsation ω . Soit \underline{X} l'amplitude complexe associée à $x(t)$. L'équation différentielle devient :

$$\begin{aligned} \left(-\omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right)\underline{X} &= \omega_0^2 a \\ \underline{X} &= \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q}} \end{aligned}$$

A est donc le module de cette expression, ce qui donne directement le résultat :

$$A(\omega) = \frac{\omega_0^2 a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2}}}$$

d) Aux basses fréquences, $A \simeq a$: M suit le mouvement du ressort sans que celui-ci ne s'étire.

Aux hautes fréquences, A tend vers zéro : l'inertie de M est telle qu'aucun mouvement ne se développe (l'excitation est trop rapide).

e) A est maximale quand son dénominateur est minimal car son numérateur est constant. Son dénominateur est minimal quand le terme sous la racine est minimal. Dérivons ce terme et annulons cette dérivée :

$$2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 2\omega\frac{\omega_0^2}{Q^2} = 0$$

Outre la solution $\omega = 0$ qui est sans intérêt, il y a une autre solution :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

qui n'est physiquement acceptable que si le terme sous la racine est positif, donc si $Q > 1/\sqrt{2}$. Donc $Q_{\min} = 1/\sqrt{2}$.

f) Soit \underline{V} l'amplitude complexe de la vitesse : $\underline{V} = j\omega \underline{X}$. D'où :

$$\begin{aligned} V = |\underline{V}| &= \left| \frac{j\omega\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q}} \right| \\ &= \frac{a\omega_0^2}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2}}} \end{aligned}$$



V a été mis sous cette forme pour que son numérateur soit constant. Cela va faciliter la recherche d'une résonance.

g) Aux basses fréquences, V tend vers zéro : M suit le déplacement de l'autre extrémité avec une très faible vitesse. Aux hautes fréquences, V tend aussi vers zéro. M est quasiment immobile, comme nous l'avons déjà remarqué précédemment.

h) V est maximale quand son dénominateur est minimal, donc quand le terme sous la racine l'est. Cela se produit, de manière évidente, quand le terme entre parenthèses s'annule :

$$\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega'_r = \omega_0$$

La valeur de Q n'intervient donc pas ici et $V_{\max} = aQ\omega_0$.

i) fV_{pp} permet d'obtenir une grandeur proportionnelle à ωA et donc proportionnelle à la vitesse V .

ii) La bande passante est l'intervalle de fréquences telles que :

$$fV_{pp} \geq \frac{fV_{pp \max}}{\sqrt{2}}$$

où $fV_{pp \max}$ est la valeur maximale admise par fV_{pp} . La recherche graphique est indiquée sur la figure 17.14.

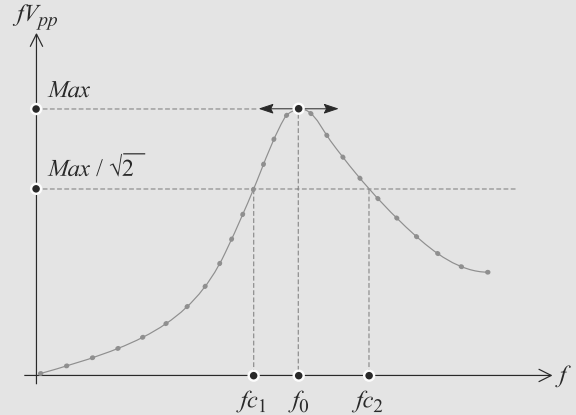


Figure 17.14 Recherche graphique de la bande passante.

Les extrémités de la bande passante sont les fréquences $f_{c1} = 1,94$ Hz et $f_{c2} = 2,56$ Hz. Donc la bande passante a pour largeur $\Delta f = 0,62$ Hz.

Plan

18.1	Moment d'une force	282
18.2	Moment cinétique d'un point matériel	285
18.3	Théorème du moment cinétique	285
	Synthèse	287
	Tests et exercices	288
	Corrigés des exercices	290

Introduction

Le théorème du moment cinétique ressemble beaucoup au PFD. Tout comme l'outil énergétique, il n'est pas indispensable pour l'étude du mouvement d'un point matériel. Mais il se révèle plus pratique que le PFD dans certains cas : les mouvements de rotation.

Prérequis

- Produit vectoriel, produit mixte
- PFD
- Coordonnées cylindriques

Objectifs

- Introduire le moment cinétique et le moment d'une force en un point ou par rapport à un axe ainsi que le bras de levier d'une force
- Introduire le théorème du moment cinétique
- L'utiliser sur le pendule simple

18.1 Moment d'une force

18.1.1 Moment par rapport à un point

Soit M un point matériel soumis à une force \vec{F} et O un point quelconque du référentiel d'étude. Le moment de \vec{F} par rapport au point O est :

Définition

Le moment d'une force par rapport à un point O est défini par :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$



L'unité du moment est donc le N.m.



Il est courant, mais pas obligatoire, de prendre pour O l'origine du repère.

La situation est représentée 18.1.

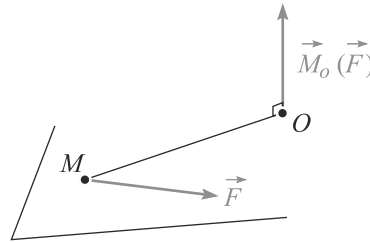


Figure 18.1 Moment d'une force par rapport à un point.

18.1.2 Moment par rapport à un axe



Ce moment par rapport à un axe a même unité que le moment par rapport à un point.



M_Δ est un **scalaire**, donc indépendant de la base choisie, et non un vecteur !

Soit Δ un axe de vecteur unitaire \vec{u}_Δ et O un point de cet axe. Le moment de \vec{F} par rapport à l'axe Δ est la projection de son moment par rapport à O sur Δ :

Définition

Le moment d'une force par rapport à un axe Δ est défini par :

$$M_\Delta(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

M_Δ est indépendant du choix de O . Cela se vérifie par calcul direct.

Soit F_θ la projection orthoradiale de \vec{F} et ρ la distance OM (figure 18.2). Alors $M_\Delta = \rho F_\theta$.

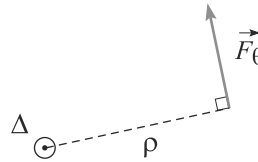


Figure 18.2 Seule la composante orthoradiale de la force contribue à son moment.

18.1.3 Interprétation physique

Le moment d'une force \vec{F} mesure son efficacité à mettre M en rotation autour du point O ou de l'axe Δ .

Cela se retrouve sur la direction du vecteur $\vec{M}_O(\vec{F})$:

- Si \vec{F} est colinéaire à \overrightarrow{OM} , la force ne peut pas mettre M en rotation autour de O . Son moment par rapport à O est bien nul.
- Si \vec{F} est perpendiculaire à \overrightarrow{OM} , l'efficacité de la force est maximale.

Ceci montre que, dans le cas d'une rotation autour d'un axe Δ , seule la composante de \vec{F} perpendiculaire à Δ peut être efficace et, donc, avoir un moment non nul.

Le **bras de levier** est la distance entre l'axe de rotation et la droite d'action de \vec{F} (noté d sur la figure 18.3). La norme du moment est maximale quand le bras de levier est maximal. Vous le savez quand vous fermez une porte en la poussant le plus loin possible de ses gonds, et non le plus près possible !

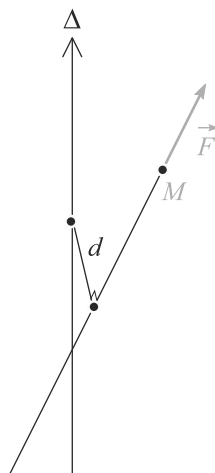
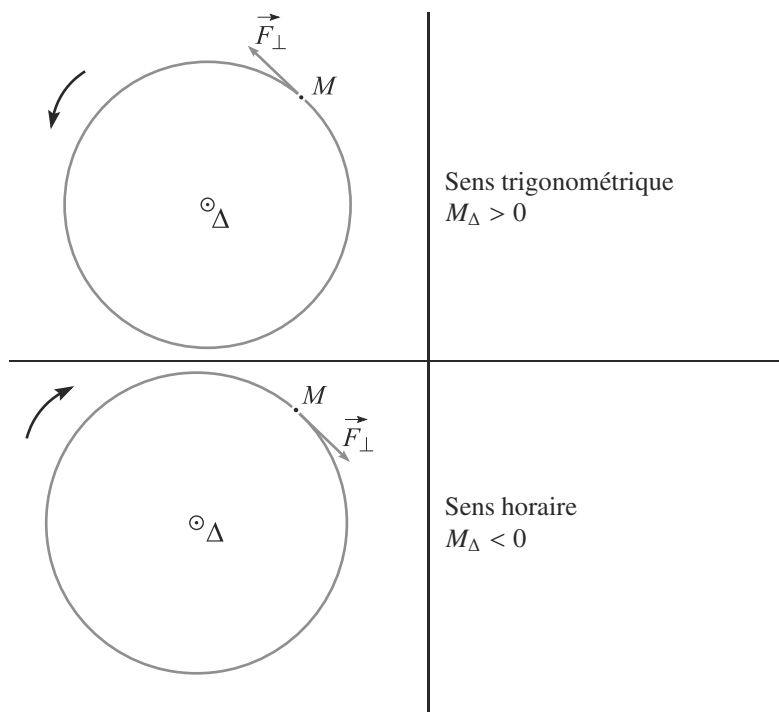


Figure 18.3 Notion de bras de levier.

Enfin, le sens du vecteur moment donne le sens de la rotation. Le tableau suivant montre la correspondance (attention, \vec{u}_Δ pointe vers vous).



18.2 Moment cinétique d'un point matériel

Soit un point matériel M de masse m possédant une vitesse \vec{v} dans un référentiel (R) . Son moment cinétique par rapport à un point O est défini par :

Définition

Le moment cinétique de M par rapport à un point O est défini par :

$$\vec{L}_O(M)_{(R)} = m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M)_{(R)}$$

Soit Δ un axe de vecteur directeur \vec{u}_Δ et O un point sur cet axe. Le moment cinétique du point M par rapport à Δ est défini par la projection :

Définition

Le moment cinétique de M par rapport à un axe Δ est défini par :

$$L_\Delta(M)_{(R)} = \vec{L}_O(M)_{(R)} \cdot \vec{u}_\Delta$$

Son unité est le $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}$.

Cette définition est bien indépendante du choix de O .

18.3 Théorème du moment cinétique

Soit (R) un référentiel galiléen. Un point matériel M est soumis à des forces de résultante \vec{F} et une quantité de mouvement \vec{p} . Soit O un point fixe dans (R) .

$$\frac{d\vec{L}_O(M)_{(R)}}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F})$$



- Notez que (R) doit être galiléen, nécessité qui n'était pas apparue pour simplement définir les moments. Cela vient du fait que le PFD a été utilisé dans la démonstration du théorème.
- Le point O n'est pas forcément l'origine de (R) , mais il doit être fixe dans (R) .

Il apparaît bien dans la démonstration que \vec{u}_Δ doit être un vecteur fixe, donc Δ un axe fixe.

Si M est en rotation uniforme autour de O , l'accélération est colinéaire à \overrightarrow{OM} donc \vec{F} aussi. Donc $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$. Donc $\vec{L}_O(M)$ est constant.

Le théorème exprimé par rapport à un axe Δ fixe dans (R) galiléen s'obtient par projection sur \vec{u}_Δ :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = M_\Delta$$

Méthode 1 utiliser le théorème du moment cinétique

En général, utiliser ce théorème plutôt que le PFD ou un théorème énergétique est une bonne idée dans les mouvements de rotation (par exemple, mouvement circulaire).

1. Il faut d'abord choisir le point O par rapport auquel appliquer le théorème. Ce point n'est pas forcément l'origine du référentiel, mais il doit y être fixe. Si le mouvement est circulaire, un choix naturel est le centre de rotation. Le choix peut aussi être guidé en considérant les moments des forces : toute force dont la droite d'action passe par O aura un moment nul et donc disparaîtra du théorème du moment cinétique.
2. Exprimez, dans la base choisie, les vecteurs intervenant dans le théorème : le moment cinétique du point et les moments des forces non nuls.
3. Dérivez le moment cinétique et appliquez le théorème.

Exemple d'application

Considérons le pendule simple de la figure 18.4. Établissez l'équation différentielle gouvernant $\theta(t)$ en utilisant le théorème du moment cinétique.

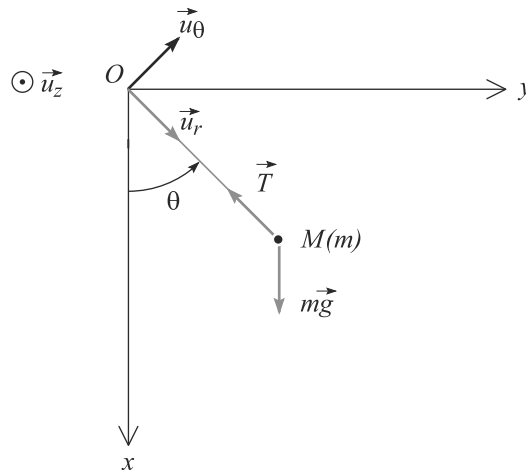


Figure 18.4 Paramétrage d'un pendule simple.

Solution

M est en mouvement circulaire, d'où l'intérêt du théorème du moment cinétique appliqué au centre de rotation O pour son étude. En outre, le moment de la tension du fil est nul.

Exprimons les vecteurs utiles :

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = m(l \vec{u}_r) \wedge (l\dot{\theta} \vec{u}_\theta) = ml^2 \dot{\theta} \vec{u}_z \\ \vec{M}_O(\vec{T}) &= \vec{0} \\ \vec{M}_O(m\vec{g}) &= \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g} = -mgl \sin(\theta) \vec{u}_z\end{aligned}$$



($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) étant une base orthonormée directe, $\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z$. D'autres relations similaires s'en déduisent par permutation circulaire des indices.

Après dérivation de \vec{L}_O , le théorème du moment cinétique donne alors une équation différentielle pour le degré de liberté θ :

$$ml^2\ddot{\theta}\vec{u}_z = -mgl \sin(\theta)\vec{u}_z \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0 \quad (18.1)$$



Vous pouvez retrouver cette équation par le PFD ou par une méthode énergétique.

Synthèse

Savoirs

- Définitions du moment cinétique, du moment d'une force par rapport à un point ou un axe
- Théorème du moment cinétique par rapport à un point ou par rapport à un axe
- Le théorème du moment cinétique est utile pour les mouvements de rotation

Savoir-faire

- Calculer le moment cinétique d'un système par rapport à un point ou un axe
- Calculer le moment d'une force par rapport à un point ou un axe
- Traiter le pendule simple en utilisant le théorème du moment cinétique

Mots-clés

- Moment cinétique,
- moment de force,
- rotation,
- axe de rotation,
- bras de levier.

Tests de connaissances

- 18.1 Le moment d'une force est homogène à une énergie et en partage l'unité.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 18.2 Le moment d'une force est identique à son travail lors d'une rotation.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 18.3 Le théorème du moment cinétique sera utile lors de l'étude des mouvements à force centrale.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 18.4 En mécanique du point, le théorème du moment cinétique n'est pas nécessaire à la description complète d'un système.

- ☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 18.5 Si le moment cinétique est constant, le mouvement est une rotation uniforme.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 18.6 Si la direction du moment cinétique est constante, le mouvement se déroule dans un plan.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 18.7 Un mouvement rectiligne uniforme se fait à moment cinétique constant
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

■ ■ ■
 18.8 Point matériel assujéti à la traction d'un fil
 (D'après Concours communs polytechniques.)

Considérons le système de la figure 18.5. Le point matériel M_1 de masse m évolue dans le plan horizontal. Il est attaché à une extrémité d'un fil inextensible, sans masse et de longueur l .

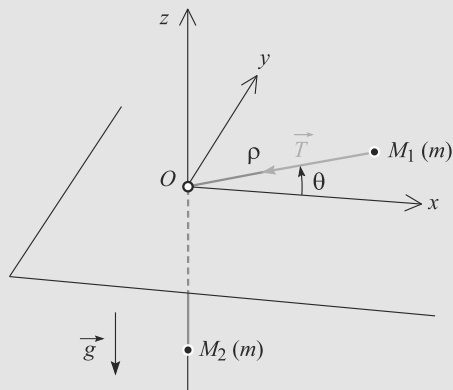


Figure 18.5 Point matériel assujéti à la traction d'un fil.

Le fil passe à travers un trou pratiqué dans le plan en O . À son autre extrémité est attaché un point matériel M_2 de masse m . Aucun frottement n'est pris en compte et la tension du fil en M_1 est notée $\vec{T} = T \vec{e}_\rho$ dans la base cylindrique.

1. Que pouvez-vous dire de la réaction du plan sur M_1 ?

2. Donnez la relation entre $\rho = \|\vec{OM}_1\|$ et z la cote de M_2 lorsque le fil est tendu. L'origine de l'axe Oz est prise en O . Déduisez-en la relation entre $\dot{\rho}$ et \dot{z} .
3. Le fil est initialement tendu avec les valeurs initiales $\dot{\rho}_0 = \dot{z}_0$, $\dot{\theta}_0$ et ρ_0 .
 a) Écrivez les équations du mouvement pour les deux points matériels et déduisez-en un invariant du mouvement exprimé en fonction de ρ et $\dot{\theta}$.
 b) Calculez T en fonction de ρ et des conditions initiales. Le fil peut-il se détendre ?
 c) Existe-il des mouvements à ρ constant ? Quelles relations doivent vérifier les conditions initiales pour réaliser ce cas particulier ? Décrivez alors les trajectoires de M_1 et M_2 .
4. Les conditions initiales pour M_1 sont données sous la forme :

$$\begin{aligned} x_0 &= l & y_0 &= 0 \\ \dot{x}_0 &< 0 & \dot{y}_0 &\neq 0 \end{aligned}$$

sachant que $\dot{z}_0 = 0$ et $\dot{\rho} < 0$.

Donnez les équations du mouvement de M_1 et M_2 ainsi que l'équation vérifiée par t_2 , l'instant où le fil se retend.

■ ■ ■
 18.9 Modèle de l'escarpolette

Considérons un pendule de longueur l_0 dont une extrémité est reliée à un point matériel M de masse m (figure 18.6). Le fil passe en O au travers d'un anneau de taille négligeable et l'autre extrémité est en A tel que $x_A < 0$. Posons $l = OM$.

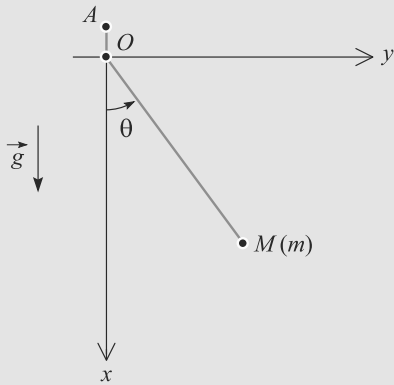


Figure 18.6 Modèle de l'escarpolette.

Le mouvement est supposé rester dans le plan xOy . Initialement le pendule est sur la position $\theta = 0$ et sa vitesse angulaire initiale est notée $\dot{\theta}_0$.

1. Calculez le moment cinétique \vec{L}_O de M par rapport à O .

2. Déterminez l'équation différentielle gouvernant le mouvement du pendule. Retrouvez l'équation du pendule simple quand l est constante égale à l_0 .

Soit θ_{\max} la valeur maximale de θ . Calculez $\cos(\theta_{\max})$ en fonction de l_0 , g et $\dot{\theta}_0$.

3. Considérons le système à un instant où $l = l_0$ et $\theta = 0$. Tirons alors brusquement sur le fil en A , ce qui réduit la longueur du pendule à $l = l_0 - a$. La nouvelle vitesse angulaire en $\theta = 0$ est notée $\dot{\theta}'_0$.

a) Proposez un invariant du mouvement à ce moment. Déduisez-en une relation entre $\dot{\theta}'_0$, $\dot{\theta}_0$, l_0 et a .

b) Soit θ'_{\max} la nouvelle valeur maximale de θ . Calculez $\cos(\theta'_{\max})$.

c) Au passage par ce nouveau maximum, le fil est brusquement relâché de sorte que le pendule retrouve sa longueur l_0 . Déterminez la nouvelle vitesse angulaire en $\theta = 0$, notée $\dot{\theta}''_0$, en fonction de l_0 , a et $\dot{\theta}_0$.

Application numérique : calculez $|\dot{\theta}''_0/\dot{\theta}_0|$ avec $l_0 = 3$ m et $a = 10$ cm. Commentaire ?

18.1

Vrai et Faux ! Ces deux quantités sont homogènes mais l'usage est de ne pas appeler joule l'unité de moment d'une force, seulement N.m.

18.2

Faux, ces quantités sont indépendantes.

18.3

Vrai, il y a alors rotation ce qui est adapté à l'utilisation du moment cinétique.

18.4

Vrai. Comme l'énergie il s'agit d'une méthode parfois plus rapide et élégante que le PFD mais elle n'est pas nécessaire.

18.5

Faux car le point peut s'éloigner du centre ce qui diminue sa vitesse angulaire.

18.6

Vrai car la position est alors toujours orthogonale à cette direction.

18.7

Vrai bien que ce soit un cas où le moment cinétique n'est pas très adapté à la description du mouvement.

18.8 Point matériel assujéti à la traction d'un fil

Il est crucial dans cet exercice de s'arrêter après la lecture de l'énoncé, avant de se lancer dans la résolution, simplement pour visualiser le montage.

Quand le point M_1 est en mouvement, dans le cas général, la longueur du fil située dans le plan s'allonge sous l'action de la force centrifuge sur M_1 ou se raccourcit à cause du poids de M_2 . La partie du fil qui est verticale sous le plan varie donc d'une longueur correspondante.

1. En l'absence de frottements, la réaction du plan sur M_1 est verticale et compense exactement le poids.
2. Le fil étant inextensible, $\rho + |z| = l$ car $\rho > 0$ et $z < 0$. Donc :

$$\rho - z = l \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho} = \dot{z}$$

3. a) M_1 est soumis à la tension du fil, ainsi qu'à son poids et à la réaction du plan, mais ces deux dernières forces se compensent. Le PFD s'écrit donc, en coordonnées polaires du plan :

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{e}_\theta = T\vec{e}_\rho$$



Vous devez savoir retrouver très vite au brouillon l'accélération en coordonnées polaires.

D'où les projections :

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = T \quad (18.2)$$

$$m(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) = 0 \quad (18.3)$$

M_2 est soumis à son poids et à la tension du fil. Le fil étant tendu et inextensible, la tension est homogène dans tout le fil et égale, en norme, à T . D'où la projection du PFD pour M_2 sur l'axe Oz :

$$m\ddot{z} = -T - mg \quad (18.4)$$

D'après la question précédente, nous avons en outre $\ddot{z} = \ddot{\rho}$. Le moment cinétique de M_1 est un invariant du mouvement. En effet, le moment de la tension du fil est nul car cette force passe par O . Donc le théorème du moment cinétique pour M_1 par rapport à O se réduit à :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0}$$

Calculons \vec{L}_O :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= m\vec{OM} \wedge \vec{v} \\ &= m\rho\vec{e}_\rho \wedge (\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \\ \vec{L}_O &= m\rho^2\dot{\theta}\vec{e}_z \end{aligned}$$

Ce vecteur étant constant, nous avons l'invariant :

$$\rho^2\dot{\theta} = \text{cst}$$



Vous donnerez un sens physique à cet invariant dans le chapitre 20.

- b) Le fil peut se détendre si T peut s'annuler. En combinant les équations 18.2 et 18.4 il vient :

$$2T = -mg - m\rho\dot{\theta}^2$$

Exploitions l'invariant du mouvement. À tout instant il est égal à sa valeur initiale donc :

$$\rho^2\dot{\theta} = \rho_0^2\dot{\theta}_0$$

D'où :

$$T = -\frac{m}{2} \left(g + \frac{\dot{\theta}_0^2 \rho_0^4}{\rho^3} \right)$$

T est toujours strictement négative, donc elle ne peut s'annuler et le fil ne se détend jamais.

- c) Si ρ est constant, les équations se réduisent à :

$$T = -mg = -m\rho\dot{\theta}^2$$

Donc $\dot{\theta}$ est constant : le mouvement est circulaire uniforme. La deuxième égalité donne, puisque ici $\rho = \rho_0$ et $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$:

$$\rho_0 = \frac{g}{\dot{\theta}_0^2}$$

Le mouvement peut donc se faire à ρ constant si une certaine relation entre ρ_0 et $\dot{\theta}_0$ est satisfaite.

Dans ce cas, M_2 reste immobile pendant que M_1 est en mouvement circulaire uniforme.

4. D'après l'énoncé, le fil n'est initialement pas tendu ($\dot{\rho}_0 < 0$ alors que $\dot{z}_0 = 0$). En l'absence de la force de tension du fil, M_1 est pseudo-isolé et donc en mouvement rectiligne uniforme, et M_2 en chute libre.

Comme $x_0 = l$, nécessairement l'altitude initiale z_0 de M_2 est nulle.

Le mouvement de M_1 est donc :

$$x(t) = \dot{x}_0 t + l$$

$$y(t) = \dot{y}_0 t$$

et celui de M_2 :

$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2$$

Le fil se tend lorsque $\rho - z = l$ avec $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ donc l'instant t_2 est tel que :

$$\begin{aligned} \rho(t_2)^2 &= (l + z(t_2))^2 \\ (\dot{x}_0 t_2 + l)^2 + (\dot{y}_0 t_2)^2 &= \left(l - \frac{1}{2} g t_2^2\right)^2 \end{aligned}$$

qui est l'équation demandée.

18.9

Modèle de l'escarpolette

L'exercice ne fait qu'appliquer des définitions, mais il faut le faire très rigoureusement.

Dans une question qui semble ouverte, comme la question 30A, faites preuve de bon sens : l'exercice met clairement l'accent sur le moment cinétique, donc commencez par chercher un invariant dans cette direction !

1. Par définition, $\vec{L} = m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$. Le mouvement est circulaire donc, avec les notations habituelles de la base polaire :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho \\ \vec{v} = \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta \end{cases} \Rightarrow \vec{L} = m l^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

2. Appliquons le théorème du moment cinétique à la masse m . Elle est soumise à deux forces, son poids et la tension du fil. Mais la droite d'action de la tension du fil passe par O donc son moment par rapport à O est nul. Il reste :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(m\vec{g})$$

Par projection sur Oz , cela donne :

$$\frac{d}{dt}(l^2 \dot{\theta}) + g l \sin(\theta) = 0$$

Lorsque l est une constante égale à l_0 , cette équation se simplifie en :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l_0} \sin(\theta) = 0$$

qui est bien l'équation du pendule simple.

En multipliant cette équation par $\dot{\theta}$ pour l'intégrer, avec les conditions initiales il vient :

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{g}{l_0} \cos(\theta) = \frac{1}{2} \dot{\theta}_0^2 - \frac{g}{l_0}$$

Quand θ est maximal la vitesse est nulle donc :

$$\cos(\theta_{\max}) = 1 - \frac{l_0 \dot{\theta}_0^2}{2g}$$

3. a) Au moment où nous tirons sur le fil, la force correspondante s'exerce le long du fil donc son moment est nul. Donc le moment cinétique est invariant au cours de cette phase.

Avant la traction, la longueur du pendule est l_0 et la vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$. Après, la longueur devient $l_0 - a$ et la vitesse $\dot{\theta}'_0$. Donc la conservation de la norme du moment cinétique s'écrit :

$$l_0^2 \dot{\theta}_0 = (l_0 - a)^2 \dot{\theta}'_0$$

- b) L'énergie mécanique est un invariant du mouvement sur la deuxième phase, car la seule force qui travaille (le poids) est conservative. Écrivons cette conservation entre l'instant où $\theta = 0$ et le moment où $\theta = \theta'_{\max}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m (l_0 - a)^2 \dot{\theta}'_0{}^2 - m g (l_0 - a) \\ = 0 - m g (l_0 - a) \cos(\theta'_{\max}) \end{aligned}$$

D'où :

$$\cos(\theta'_{\max}) = 1 - \frac{l_0^4 \dot{\theta}_0^2}{2g(l_0 - a)^3}$$

- c) Écrivons la conservation de l'énergie mécanique sur cette troisième phase entre l'instant initial de cette phase où $\theta = \theta'_{\max}$ et l'instant ultérieur où $\theta = 0$:

$$\frac{1}{2} m l_0^2 \dot{\theta}''^2 - m g l_0 = 0 - m g l_0 \cos(\theta'_{\max})$$

D'où :

$$\dot{\theta}''_0 = \frac{\dot{\theta}_0}{\left(1 - \frac{a}{l_0}\right)^{3/2}}$$

Numériquement :

$$\left| \frac{\dot{\theta}''_0}{\dot{\theta}_0} \right| = 1,05$$

L'opération a donc, globalement, augmenté de 5 % la vitesse angulaire et permet donc d'accélérer progressivement le mouvement.

Il est remarquable que ce rapport soit indépendant de la masse m mais aussi de la vitesse initiale $\dot{\theta}_0$.

Plan

19.1	Notations	293
19.2	Grandeurs associées au système dans (R)	293
19.3	Grandeurs associées au mobile fictif	294
19.4	Théorèmes de König	295
19.5	Revenir au problème initial	296
	Synthèse	296
	Tests et exercices	297
	Corrigés des exercices	300

Introduction

Le problème à deux corps désigne un problème particulier, celui de deux points matériels en interaction. Dans le cas où ce système composite n'est soumis à aucune force extérieure, il conduit à des applications remarquables (voir chapitre 20 par exemple). Mais d'autres cas peuvent rester assez simples pour être abordés.

Prérequis

- Toute la mécanique du point !

Objectifs

- Construire les bases de la cinétique et de la dynamique pour les systèmes de points à partir de l'exemple d'un système de deux points matériels
- Introduire les théorèmes du centre d'inertie et du moment cinétique ne faisant intervenir que les actions extérieures aux systèmes
- Introduire le théorème de l'énergie cinétique et constater qu'il fait intervenir un travail de forces intérieures au système

Méthode 1 utiliser la réduction canonique

En mécanique d'un point matériel, nous avons une inconnue vectorielle (la position), autrement dit trois degrés de liberté. En mécanique de deux points matériels M_1 et M_2 , il y en aura donc jusqu'à six.

La réduction canonique est une simplification de ce problème plus complexe grâce à un changement de variable astucieux. Elle transforme ce problème à deux corps en deux problèmes à un seul corps que l'on peut résoudre séparément :

- le mouvement du centre d'inertie G , point matériel fictif possédant la masse totale $m_1 + m_2$, dans le référentiel d'étude (R) ;
- le mouvement du mobile fictif M , point matériel fictif possédant la masse réduite μ , dans le référentiel barycentrique (R^*) du système.

Le mouvement de M_1 et de M_2 dans (R^*) se déduit de celui de M par homothétie. Leur mouvement dans (R) s'en déduit par relation de Chasles.

En général, la simplification n'est vraiment intéressante que si (R) est galiléen et si le système des deux points matériel est isolé, car (R^*) est alors aussi galiléen.

Veillez donc à ne pas confondre :

- les grandeurs mécaniques qui se rapportent au système de deux points, celles qui se rapportent à G et celles qui se rapportent à M ,
- les grandeurs définies dans (R) et celles définies dans (R^*) .

Nous reviendrons plus en détail sur les référentiels non galiléens, et les conditions lesquelles un référentiel peut être considéré comme galiléen, dans le chapitre 21.

19.1 Notations

Les deux points matériels M_1 et M_2 sont respectivement de masse m_1 et m_2 . Leur centre d'inertie est noté G , le mobile fictif M . L'origine du référentiel (R) est noté O .

Forces extérieures au système s'appliquant sur M_1 et M_2 : $\vec{F}_{\text{ext}1}$ et $\vec{F}_{\text{ext}2}$.

Forces intérieures exercées par M_1 sur M_2 et réciproquement : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$. D'après la troisième loi de Newton, ces forces sont colinéaires et opposées : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = F_{1 \rightarrow 2} \vec{u}$ avec \vec{u} vecteur unitaire dirigé de M_1 vers M_2 (figure 19.1).

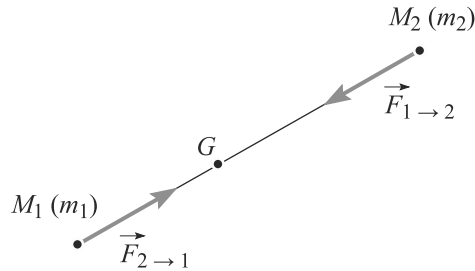


Figure 19.1 Forces intérieures dans un système de deux corps.

19.2 Grandeurs associées au système dans (R)



Le centre d'inertie G est aussi appelé barycentre de masse.

Définition

Caractéristiques mécaniques du système de deux points dans (R) :

$$\text{Centre d'inertie } G : m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$$

$$\text{Masse totale : } m = m_1 + m_2$$

$$\text{Moment cinétique : } \vec{L}_O = \vec{L}_O(M_1) + \vec{L}_O(M_2)$$

$$\text{Énergie cinétique : } E_c = E_c(M_1) + E_c(M_2)$$



Les forces intérieures n'apparaissent pas dans les deux premiers théorèmes. Par contre, elles peuvent travailler et donc apparaître dans le troisième. Le cas où le travail des forces intérieures est nul, celui d'un système rigide, sera étudié en seconde année.



La somme des moments des forces extérieures n'est pas égale au moment de la somme des forces, car ces dernières n'ont pas le même point d'application ! La notation $\vec{M}_O(\vec{F}_{\text{ext}})$ est donc à éviter car ambiguë.

Si (R) est galiléen, les théorèmes généraux pour le système de deux points s'écrivent formellement comme les théorèmes généraux appliqués au point matériel G de masse m :

Théorèmes généraux pour G de masse m dans (R) galiléen :

Théorème du centre d'inertie : $m\vec{a}(G) = \vec{F}_{\text{ext}1} + \vec{F}_{\text{ext}2}$

Théorème du moment cinétique : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}_{\text{ext}1}) + \vec{M}_O(\vec{F}_{\text{ext}2})$

Théorème de l'énergie cinétique : $\Delta E_c = W(\vec{F}_{\text{ext}1}) + W(\vec{F}_{\text{ext}2}) + W(\vec{F}_{1 \rightarrow 2}) + W(\vec{F}_{2 \rightarrow 1})$

Les termes se rapportant à G montrent que ce point matériel peut bien être considéré comme un point matériel de masse $m_1 + m_2$.

19.3 Grandeurs associées au mobile fictif

19.3.1 Référentiel barycentrique

Définition

Le **Référentiel barycentrique** (R^*) est défini par :

- son origine est le centre d'inertie G ,
- ses axes ne tournent pas dans (R) et peuvent donc être pris parallèles à ceux de (R) .

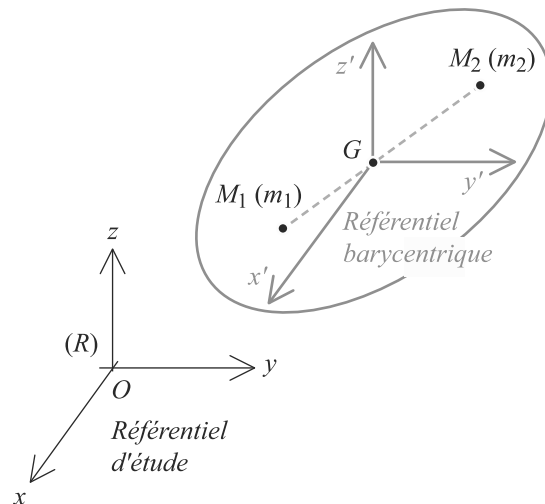


Figure 19.2 Référentiel barycentrique.

Ce référentiel n'est en général pas galiléen car il n'y a pas de raison que G soit en mouvement rectiligne uniforme dans (R) . Nous nous limiterons le plus souvent au cas où il est galiléen.

19.3.2 Mobile fictif

Les grandeurs définies dans le référentiel barycentrique seront notées d'une étoile.

Il s'agit d'un point matériel fictif dont le mouvement est étudié dans (R^*) .

Définition

Caractéristiques mécaniques du **mobile fictif** M dans (R^*) :

$$\text{Masse réduite : } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\text{Position : } \vec{r} = \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1 M_2}$$

$$\text{Vitesse : } \vec{v}^* = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \vec{v}_2^*$$

$$\text{Moment cinétique : } \vec{L}^* = \mu \overrightarrow{GM} \wedge \vec{v}^*$$

$$\text{Énergie cinétique : } E_c^* = \frac{1}{2} \mu \vec{v}^{*2}$$



La masse réduite est homogène à une masse.



Le moment cinétique barycentrique d'un système isolé est un invariant. C'est un résultat important.

Le mouvement de M est gouverné par les théorèmes généraux :

Théorèmes généraux pour M dans (R^*) galiléen :

$$\text{PFD : } \mu \frac{d\vec{v}^*}{dt} = F_{1 \rightarrow 2} \vec{u}$$

$$\text{Théorème du moment cinétique : } \frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{0}$$

$$\text{Théorème de l'énergie mécanique : } E_m^* = \text{cst}$$

19.4 Théorèmes de König

Ces deux théorèmes soulignent le découpage du problème initial en deux problèmes distincts, en présentant E_c et \vec{L}_O comme une somme de deux termes, chaque terme se rapportant à l'un de ces problèmes.

Théorèmes de König pour un système de points matériels :

$$\text{Énergie cinétique : } E_c = E_c^* + E_c(G)_{(R)}$$

$$\text{Moment cinétique : } \vec{L}_O = \vec{L}^* + \vec{L}_O(G)$$

19.5 Revenir au problème initial

1. L'étude du mouvement de M dans (R^*) permet de connaître \overrightarrow{GM} . Les mouvements de M_1 et M_2 dans (R^*) s'en déduisent par homothétie :

$$\overrightarrow{GM_1} = \frac{-m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{GM}$$

$$\overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \overrightarrow{GM}$$

2. L'étude du mouvement de G dans (R) permet de connaître \overrightarrow{OG} . Les mouvements de M_1 et M_2 dans (R) s'en déduisent par relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_1}$$

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_2}$$

Synthèse

Savoirs

- Les éléments cinétiques d'un système de deux points matériels (vitesse, moment cinétique, énergie cinétique et mécanique)
- Définition du référentiel barycentrique
- Théorèmes de König

Savoir-faire

- Exprimer les théorèmes (du centre de masse, du moment cinétique et de l'énergie cinétique) pour un système de deux points matériels
- Passage au mobile fictif pour un système de deux points isolés (étude dans le référentiel barycentrique)
- Passage du mobile fictif aux deux points matériels et aux mouvements réels

Mots-clés

- Centre d'inertie / barycentre de masse,
- référentiel barycentrique,
- moment cinétique,
- énergie cinétique,
- énergie mécanique,
- actions intérieures et extérieures,
- mobile fictif.

Tests de connaissances

- 19.1 Les éléments cinétiques d'un système de deux points matériels sont obtenus par sommation de ceux de chaque point dans le référentiel d'étude.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 19.2 Le référentiel barycentrique, en translation dans le référentiel d'étude, est forcément galiléen.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 19.3 Les théorèmes de König s'analysent en distinguant mouvement d'ensemble du système (ramené à G) et mouvement interne (des points matériels autour de G dans (R^*)).
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 19.4 Un objet tournant isolé peut modifier sa vitesse angulaire et sa quantité de mouvement.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 19.5 Si une voiture peut accélérer c'est grâce au travail de forces intérieures.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 19.6 Dans le cas d'un système satellite artificiel-planète, μ est la masse de la planète.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 19.7 Les trajectoires des deux points matériels et du mobile fictif sont homothétiques.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

19.8 Un modèle d'attachement moléculaire

Nous allons construire un modèle simple de la formation d'une molécule diatomique, plus précisément de son mouvement après sa formation.

Deux atomes identiques de masse m évoluent dans l'espace, de telle sorte que le premier M_1 possède une vitesse constante de norme v_0 et le second M_2 est immobile sur l'origine O .

Ils sont initialement très loin l'un de l'autre, de sorte qu'ils n'interagissent pas. Lorsque M_1 passe en $x = 0$ (voir figure 19.3), les deux atomes forment une liaison et restent solidaires, distants de a .

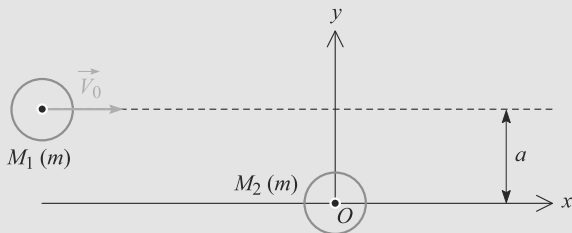


Figure 19.3 Modèle d'attachement moléculaire.

Le système constitué des deux atomes est supposé isolé.

- Déterminez la vitesse de G , centre d'inertie du système, et décrivez son mouvement.
- Calculez le moment cinétique \vec{L}_O du système par rapport à O . Comment évolue-t-il dans le temps ?
- Calculez le moment cinétique de G dans le référentiel barycentrique, noté \vec{L}^* , d'abord en fonction de la vitesse de

rotation $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ de l'ensemble attaché puis via le théorème de König. Déduisez-en ω en fonction de v_0 et a .

- Déterminez l'énergie cinétique du système avant et après l'attachement. Conclusion ?
- Comment obtenir la position de M_1 au cours du temps ?

19.9 Chute de deux masses reliées par un ressort

Deux points matériels M_1 et M_2 de même masse m sont reliés par un ressort (k, l_0). Le système est lâché en chute libre de sorte que M_1 et M_2 restent alignés sur une même verticale. M_2 est supposé être le point de plus haute altitude.

La verticale est repérée par un axe ascendant Oz et le référentiel terrestre (R) est supposé galiléen.

Un opérateur tient initialement le système par M_2 et l'ensemble est au repos. Puis il lâche le système sans vitesse initiale.

- Soit h_2 l'altitude initiale de M_2 . Déduisez-en l'altitude initiale h_1 de M_1 .
- Soit G le centre d'inertie du système constitué des deux masses.
 - Calculez son altitude initiale $z_G(0) = z_0$.
 - Déterminez l'équation horaire $z_G(t)$. Commentaire ?
- Définissez le mobile fictif M associé à ce système. À partir des PFD pour M_1 et M_2 , établissez l'équation du mouvement pour M dans le référentiel barycentrique. Vous noterez p l'altitude de M par rapport à G .
 - Établissez les lois horaires $z_1(t)$ et $z_2(t)$, altitudes de M_1 et M_2 . Commentaire ?

19.10 Un système mécanique au comportement surprenant

(D'après Centrale)

On étudie dans le référentiel terrestre galiléen le système suivant : deux objets ponctuels M et M' de masses respectives m et m' sont reliés par un fil inextensible, sans masse, de longueur l_0 (figure 19.4). On fait passer le fil autour d'une tige cylindrique fixe dont on négligera le diamètre ainsi que les frottements sur le fil. Initialement, on tient M entre ses doigts de manière à ce que le fil fasse avec la verticale un petit angle ε et que M' soit au contact du cylindre. On lâche le système à $t = 0$ alors qu'il est entièrement immobile. On admettra que tous les mouvements s'effectuent dans le plan vertical (Ozx).

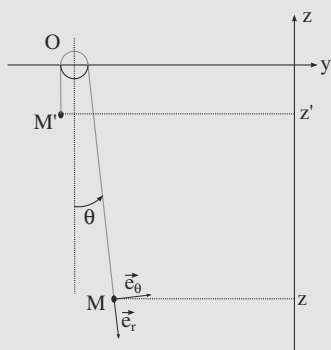
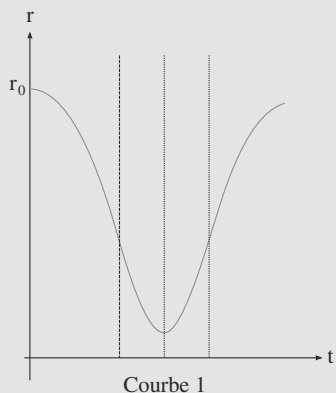


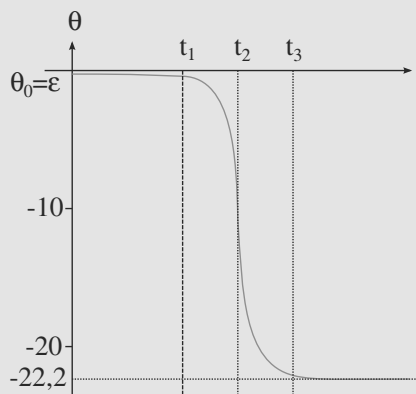
Figure 19.4 Système des deux points M et M' .

On étudie le mouvement qui se développe pour $\mu = \frac{m'}{m} \gg 1$: l'objet M' ne tombe pas au sol et M s'enroule autour de la tige cylindrique. On constate en recommençant un grand nombre de fois l'expérience que le nombre de tours qu'il effectue est sensiblement le même. Des simulations informatiques permettent d'établir les courbes d'évolution de $r = OM$ et θ . Elles sont représentées sur des figures 19.5 et 19.6 :



Courbe 1

Figure 19.5 Courbe d'évolution de r .



Courbe 2

Figure 19.6 Courbe d'évolution de θ .

- Traduire les qualités du fil en relations utilisables dans l'exercice.
- On va montrer dans cette question que le mouvement de M est borné si $\mu > 1$.
 - Établir l'expression de l'énergie mécanique E_m du système en fonction de μ , r , \dot{r} , θ , $\dot{\theta}$, g , m et d'une constante E_i qui ne dépend que du choix de l'origine des énergies potentielles.
 - Donner l'expression de $e_0 = \frac{E_m - E_i}{m}$ et préciser son unité.
 - Qu'appelle-t-on système conservatif ? Le dispositif étudié ici présente-il cette propriété ?
 - À partir de l'expression de e_0 , montrer que si $\mu > 1$ le mouvement est borné, c'est-à-dire que M évolue dans une zone limitée du plan (r, θ) avec $r \leq r_{\max} = \frac{e_0}{g(\mu - 1)}$. Vérifier l'homogénéité de cette relation.
- a) À partir du bilan des actions mécaniques s'exerçant sur M , établir les équations suivantes :

$$\ddot{r} = F(r, \theta, \dot{\theta}, g, \mu) \quad (1)$$

$$\ddot{\theta} = G(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}, g). \quad (2)$$

- En utilisant la courbe 2, proposer une valeur approximative de $\dot{\theta}$ pour $t < t_1$. Quelle forme simple (équation 1') prend alors l'équation différentielle (1) ?
- Intégrer cette équation différentielle et établir la fonction $\dot{r}(t)$ pour $t < t_1$. Quelle est alors la nature du mouvement de M' ? Exprimer $r(t)$ en fonction de g , t et l_0 (on tiendra compte du fait que $\mu \gg 1$).

4. On appelle durée d'inversion l'intervalle de temps compris entre t_1 et t_3 pendant lequel $\theta(t)$ varie fortement.

a) Simplifier l'équation (1) en considérant que $\mu \gg 1$ et que durant la zone d'inversion $\frac{r\dot{\theta}^2}{\mu} \gg g$.

b) On admet que, durant cette durée, la tension exercée par le fil est très grande devant le poids. Quelle est alors la direction de la résultante des forces qui s'appliquent sur M ? Quelle est la nature du mouvement de M ?

c) Comment s'appelle alors le produit $r^2\dot{\theta} = C$? Quelle est sa particularité ? Exprimer alors $\frac{d^2u}{d\theta^2}$ en fonction de μ et $u = \frac{1}{r}$ en utilisant la relation obtenue à partir de (1).

d) En déduire l'expression de $r(\theta)$ (équation (3)) en fonction de r_2 , μ et θ_2 où r_2 désigne la valeur minimale de r et θ_2 l'angle correspondant.

5. On admettra que l'équation (3) reste valable pour les valeurs de $r(\theta)$ très supérieures à r_2 , c'est-à-dire même en dehors de l'intervalle de temps $[t_1 ; t_3]$.

a) Vers quelles valeurs les expressions de $\theta_1 - \theta_2$ et $\theta_3 - \theta_2$ tendent-elles si θ_1 et θ_3 sont les angles pour lesquels r est très supérieur à r_2 ?

b) En déduire l'expression de $\Delta\theta = \theta_3 - \theta_1$, en fonction de $\sqrt{\mu}$. Combien de tours la masse M a-t-elle effectué pendant l'inversion ? Application numérique : $\mu = 50$.

19.1

Vrai.

19.2

Faux, il faut pour cela que le système soit isolé (ou pseudo-isolé).

19.3

Vrai.

19.4

Vrai pour la vitesse angulaire, Faux pour le moment cinétique et la quantité de mouvement car seules des forces extérieures peuvent modifier ces quantités.

19.5

Vrai et Faux : ce sont les forces intérieures qui travaillent mais les frottements avec le sol (forces extérieures) qui permettent l'accélération.

19.6

Faux, c'est la plus petite des deux : celle du satellite.

19.7

Vrai, c'est d'ailleurs l'un des intérêts du mobile fictif.

19.8

Un modèle d'attachement moléculaire

Cet exercice vous demande seulement de savoir appliquer les formules de cours. Profitez-en pour vous assurer que vous distinguez bien les grandeurs qui se rapportent à G , au système, à chaque point, etc.

1. Le système est isolé donc, d'après le PFD appliqué à G , qui est le théorème du centre d'inertie, le mouvement de G est rectiligne uniforme : \vec{v}_G est un vecteur constant.

Partons de la définition de G et dérivons-la par rapport au temps :

$$\begin{aligned} 2m\vec{OG} &= m\vec{OM}_1 + m\vec{OM}_2 \\ \Rightarrow 2\vec{v}(G) &= \vec{v}_0 + \vec{0} \\ \Rightarrow \vec{v}(G) &= \frac{v_0}{2} \vec{e}_x \end{aligned}$$

Donc G suit une droite parallèle à l'axe Ox et placée à une distance $a/2$ de celui-ci, avec une vitesse constante $v_0/2$.

2. Le moment cinétique du système est la somme des moments des deux points. Celui de M_2 est nul car le point est immobile donc :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= m\vec{OM}_1 \wedge \vec{v}_0 \\ &= -mav_0 \vec{e}_z \end{aligned}$$

Le système étant isolé, son moment cinétique est invariant et reste constant dans la suite du mouvement.

3. Dans le référentiel barycentrique, M_1 et M_2 tournent autour de G avec une vitesse angulaire ω . Leur mouvement est circulaire car la distance entre les deux atomes ne varie pas. Donc le vecteur vitesse de M_1 dans ce référentiel peut s'écrire, en coordonnées polaires :

$$\vec{v}_1^* = \frac{a}{2} \omega \vec{e}_\theta$$

Les deux points parcourent le même cercle et sont en positions diamétralement opposées donc la vitesse de M_2 est :

$$\vec{v}_2^* = -\vec{v}_1^* = -\frac{a}{2} \omega \vec{e}_\theta$$

D'où le moment cinétique :

$$\begin{aligned} \vec{L}^* &= m\vec{GM}_1 \wedge \vec{v}_1^* + m\vec{GM}_2 \wedge (-\vec{v}_1^*) \\ &= m\vec{M}_2\vec{M}_1 \wedge \vec{v}_1^* \\ \vec{L}^* &= \frac{1}{2} ma^2 \omega \vec{e}_z = \frac{1}{2} ma^2 \vec{\omega} \end{aligned}$$

Le théorème de König pour le moment cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \vec{L}^* + 2m\vec{OG} \wedge \vec{v}(G) \\ \Rightarrow \vec{L}^* &= \vec{L}_O - 2m\vec{OG} \wedge \vec{v}(G) \\ &= -mav_0 \vec{e}_z - 2m \frac{a}{2} \vec{e}_y \wedge \frac{v_0}{2} \vec{e}_x \\ \vec{L}^* &= -\frac{1}{2} mav_0 \vec{e}_z \end{aligned}$$

En rapprochant les deux résultats, il vient :

$$\omega = -\frac{v_0}{a}$$

4. L'énergie cinétique du système est la somme des énergies cinétiques des deux points. Initialement, M_2 est immobile donc son E_c est nulle. D'où :

$$E_c = E_{c1} = \frac{1}{2} mv_0^2$$

Après attachement, calculons l'énergie cinétique par le théorème de König :

$$\begin{aligned} E_c &= E_c^* + \frac{1}{2} (2m)v(G)^2 \\ &= E_c^* + \frac{1}{4} mv_0^2 \end{aligned}$$

Dans le référentiel barycentrique, les deux points matériels sont en mouvement circulaire uniforme à la même vitesse (même rayon $a/2$, même vitesse angulaire ω) donc :

$$E_c^* = 2 \times \frac{1}{2} m \left(\frac{a}{2} \omega \right)^2 = \frac{1}{4} mv_0^2$$

D'où l'énergie cinétique totale après attachement :

$$E_c = \frac{1}{4}mv_0^2 + \frac{1}{4}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Elle est égale à l'énergie cinétique avant attachement, donc la formation de la molécule s'est faite sans perte d'énergie. Ce résultat peu réaliste montre les limites du modèle, puisqu'une molécule se forme, justement, si l'édifice résultant est plus bas en énergie que ses constituants isolés.

5. Nous avons :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}_1 &= \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}_1 \\ &= \vec{v}(G)t + \overrightarrow{GM}_1\end{aligned}$$

car $\vec{v}(G)$ est constante.

Paramétrons le mouvement circulaire uniforme de M_1 d'après la figure 19.7.

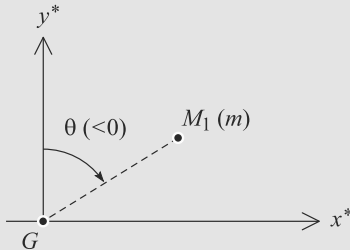


Figure 19.7 Mouvement circulaire dans le référentiel barycentrique.

La vitesse angulaire $\dot{\theta}_1$ est égale à $\omega < 0$ donc $\theta_1(t) = \omega t$ d'après les conditions initiales. D'où les équations dans le référentiel barycentrique :

$$\begin{aligned}x_1^*(t) &= -\frac{a}{2} \sin(\omega t) \\ y_1^*(t) &= \frac{a}{2} \cos(\omega t)\end{aligned}$$

D'où, en revenant dans le référentiel d'étude et en notant $\omega = -v_0/a$:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \frac{v_0}{2} + \frac{a}{2} \sin\left(\frac{v_0 t}{a}\right) \\ y_1(t) &= \frac{a}{2} \cos\left(\frac{v_0 t}{a}\right)\end{aligned}$$

19.9

Chute de deux masses reliées par un ressort

Bien que les raisonnements soient très proches du cours, cet exercice n'autorise pas l'application directe des formules connues : le système n'est pas isolé, donc le référentiel barycentrique n'est pas galiléen !

Comme l'énoncé vous y invite, refaites les raisonnements de cours pour établir de nouveaux résultats. C'est un bon moyen de vérifier que vous avez vraiment compris la logique de la réduction canonique.

1. Appliquons le PFD à M_1 dans le référentiel terrestre. Ce point est en équilibre et soumis à son poids et à la force de rappel. Donc la longueur à l'équilibre l_{eq} du ressort est :

$$\begin{aligned}-mg + k(l_{eq} - l_0) &= 0 \\ \Rightarrow l_{eq} &= l_0 + \frac{mg}{k}\end{aligned}$$



Attention, le vecteur $\vec{u}_{sortant}$ est opposé à l'axe Oz , d'où le signe + dans la force de rappel.

Donc l'altitude initiale de M_1 est :

$$h_1 = h_2 - l_{eq} = h_2 - l_0 - \frac{mg}{k}$$

2. a) Les deux points étant de même masse, G est au milieu du segment $[M_1 M_2]$. Donc :

$$\begin{aligned}z_0 &= \frac{h_1 + h_2}{2} \\ &= h_2 - \frac{l_0}{2} - \frac{mg}{2k}\end{aligned}$$

b) Appliquons le théorème du centre d'inertie pour G . La seule force extérieure est le poids donc :

$$\begin{aligned}2m\ddot{z}_G &= -2mg \\ \Rightarrow z_G(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + z_0\end{aligned}$$

Le système se comporte donc globalement comme un seul point matériel en chute libre.

3. a) Le mobile fictif M est défini par $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1 M_2}$, donc ici :

$$p = z_2 - z_1$$

Les PFD pour M_1 et M_2 s'écrivent, dans le référentiel terrestre :

$$\begin{aligned}m\ddot{z}_1 &= -mg + k(l - l_0) \\ m\ddot{z}_2 &= -mg - k(l - l_0)\end{aligned}$$

Soustrayons-les membre à membre :

$$\begin{aligned}m \frac{d^2}{dt^2}(z_2 - z_1) &= -2k(l - l_0) \\ \frac{m}{2} \ddot{p} &= -k(l - l_0)\end{aligned}$$

Ceci s'identifie bien au PFD écrit pour le mobile fictif de masse réduite $\mu = m/2$.

l étant la longueur du ressort, $l = z_2 - z_1$ donc $l = p$. D'où l'équation :

$$\ddot{p} + \omega^2 p = \omega^2 l_0 \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

b) Cette équation différentielle se résout en :

$$p(t) = l_0 + A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

Le système est initialement au repos donc $\dot{p}(0)$ donc $B = 0$.
La longueur initiale du ressort est l_{eq} donc $p(0) = l_{\text{eq}}$. D'où :

$$p(t) = l_0 + \frac{mg}{k} \cos(\omega t)$$



Dans ce problème unidimensionnel, p représente \overrightarrow{GM} .

En toute généralité, le passage de M à M_1 se fait par l'homothétie :

$$\overrightarrow{GM_1} = \frac{-m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{GM}$$

Donc ici, puisque $m_1 = m_2 = m$:

$$\begin{aligned} z_1 - z_G &= -\frac{p}{2} \\ z_1(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 \\ &\quad + z_0 - \frac{l_0}{2} - \frac{mg}{2k} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

De même :

$$z_2(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + z_0 + \frac{l_0}{2} + \frac{mg}{2k} \cos(\omega t)$$

Le mouvement (compliqué) du système se décompose donc en deux mouvements simples :

- chute libre (mouvement rectiligne uniformément accéléré) de G dans le référentiel terrestre,
- oscillations harmoniques de M autour de G dans le référentiel barycentrique.

19.10 Un système mécanique au comportement surprenant

Ce long exercice est bien un problème d'un système à deux corps même s'il ne nécessite pas d'utiliser de réduction canonique (le système n'est pas isolé). Il convient d'éviter certains pièges (tensions différentes des poids par exemple). Sa résolution permet de faire le tour des notions de mécanique de première année. On prendra garde à bien exprimer les relations entre grandeurs en tenant compte de leur caractère algébrique.

1. Tout d'abord, la longueur du fil permet d'écrire : $l_0 = r - z'$ (fil inextensible) et donc les vitesses radiales de M et verticale de M' s'égalent : $\dot{r} = \dot{z}'$. Étant sans masse le fil transmet les tensions. Ne subissant pas de frottement du cylindre, les tensions subies par M et M' sont donc égales en normes.

2. a) $E_m = E_c + E_p$ et seuls les poids dérivent d'une énergie potentielle. On en déduit :

$$E_m = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} m' \dot{z}'^2 + mgz + m'gz' + cte.$$

En tenant compte que $\dot{r} = \dot{z}'$, $z = -r \cos(\theta)$, on aboutit à :

$$E_m = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} m' \dot{r}^2 - mgr \cos(\theta) + m'gr + E_i,$$

en introduisant la constante E_i demandée dans le texte.

b) On en déduit alors :

$$e_0 = \frac{E_m - E_i}{m} = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - gr \cos(\theta) + \mu gr.$$

e_0 est une énergie massique que l'on exprimera en $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$ ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ est acceptable aussi).

c) Un système est conservatif lorsque son énergie mécanique se conserve au cours du mouvement. C'est bien le cas de ce système pour lequel on néglige tout frottement.

d) La relation du b) permet d'écrire :

$$rg(-\cos(\theta) + \mu) = e_0 - \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2.$$

Et donc $rg(-\cos(\theta) + \mu) < e_0$ ou encore :

$$r < \frac{e_0}{g(-\cos(\theta) + \mu)} < \frac{e_0}{g(\mu - 1)} = r_{\text{max}}.$$

$\frac{e_0}{g}$ a la dimension d'une vitesse au carré sur une accélération : $\left[\frac{e_0}{g} \right] = \frac{L^2}{T^2} \frac{T^2}{L} = L$. C'est donc bien une longueur et la relation est homogène.

3. a) Comme on l'a vu plus haut, $\vec{T}' = T \vec{e}_z$ et $\vec{T} = -T \vec{e}_r$ ($T > 0$). On a aussi $\vec{g} = -g \vec{e}_z$. On peut voir le bilan des forces sur la figure 19.8 :

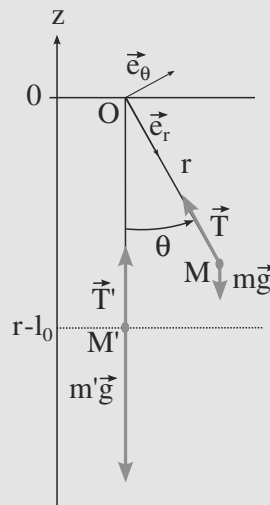


Figure 19.8 Bilan des forces sur les deux points.

Le PFD utilisé sur les deux points matériels donne :

$$m' \ddot{z}' \vec{e}_z = \vec{T}' + m' \vec{g} = (T - m'g) \vec{e}_z \text{ sur } M'$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{T} + m\vec{g} = T\vec{e}_r - mg\vec{e}_z \text{ sur } M.$$

La projection de la première relation donne : $m' \ddot{z}' = T - m'g$.

On calcule alors $\frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$ en polaires.

La projection du PFD sur M donne alors :

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -T + mg \cos(\theta)$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = -mg \sin(\theta)$$

(1) est obtenu en éliminant T entre les deux premières projections et en tenant compte de ce que $\dot{r} = \dot{z}'$:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{T}{m} + g \cos(\theta) = -\mu g - \mu \ddot{r} + g \cos(\theta)$$

$$\text{ou } \ddot{r}(1 + \mu) = r\dot{\theta}^2 - \mu g + g \cos(\theta).$$

On aboutit donc à :

$$\ddot{r} = \frac{1}{1 + \mu} [r\dot{\theta}^2 - \mu g + g \cos(\theta)] \quad (1)$$

la dernière projection donne :

$$r\ddot{\theta} = -2\dot{r}\dot{\theta} - g \sin(\theta)$$

$$\text{et donc } \ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta} + g \sin(\theta)}{r} \quad (2)$$

b) Pour $t < t_1$, on a $\theta \approx \varepsilon$ et donc $\dot{\theta} \approx 0$ et $\ddot{\theta} \approx 0$. (1) donne alors en développant $\cos(\theta)$ au premier ordre en θ :

$$\ddot{r} = g \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \quad (1')$$

c) On intègre cette équation en $\dot{r} = g \frac{1 - \mu}{1 + \mu} t$ car on lâche le système sans vitesse. Le mouvement est donc rectiligne uniformément accéléré sur cette phase. En intégrant de nouveau, on obtient : $r(t) = g \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \frac{t^2}{2} + l_0$ et comme $\mu \gg 1$, on trouve au final :

$$r(t) = -g \frac{t^2}{2} + l_0$$

soit ce qu'on obtient pour une chute libre : dans cette phase du mouvement, T est négligeable devant $m'g$.

4. a) En tenant compte des indications du texte, on trouve $\ddot{r} = \frac{1}{1 + \mu} r\dot{\theta}^2$. On simplifie cette équation en $\ddot{r} = \frac{1}{\mu} r\dot{\theta}^2$ en tenant compte de $\mu \gg 1$.

b) La résultante des forces étant uniquement due à la tension du fil, sa direction est le point O : un mouvement à force centrale se développe alors pour M . La vitesse aréolaire est alors constante pour ce point autour de O .

c) C est la constante des aires qui a la particularité... d'être constante (le mouvement étant à force centrale) ! Pour utiliser (1), on procède d'abord au changement de variables préconisé.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{C}{r^2} = -C \frac{du}{d\theta}$$

$$\text{et donc } \frac{d^2 r}{dt^2} = -C \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{d\theta} \right) = -C \dot{\theta} \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -C^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}.$$

La relation du a) donne alors :

$$-C^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{r\dot{\theta}^2}{\mu} = u^3 \frac{C^2}{\mu}$$

$$\text{et donc } \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{u}{\mu} = 0.$$

d) On intègre cette relation : $u = A \cos\left(\frac{u}{\sqrt{\mu}}\right) + B \sin\left(\frac{u}{\sqrt{\mu}}\right) = A' \cos\left(\frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{\mu}}\right)$. On utilise alors les conditions particulières du minimum de r : pour $r = r_2$, la vitesse radiale est nulle et $\theta = \theta_2$. On a donc $\frac{dr}{dt} = -C \frac{du}{d\theta} = 0$ en $r = r_2$: $\frac{du}{d\theta} = \frac{A'}{\sqrt{\mu}} \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_0}{\sqrt{\mu}}\right) = 0$ et donc $\theta_0 = \theta_2$. On en déduit $A' = 1/r_2$ et donc :

$$r(\theta) = \frac{r_2}{\cos\left(\frac{\theta - \theta_2}{\sqrt{\mu}}\right)}.$$

5. a) Si r est très supérieur à r_2 , $\theta - \theta_2$ est proche de $\pm\pi/2$ (pour que le cosinus du dénominateur devienne petit devant 1. Les deux solutions donnent alors : $\theta_3 - \theta_2 = -\frac{\pi}{2} \sqrt{\mu}$ et $\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\mu}$ en remarquant que θ est négatif sur la figure 19.8.

b) Par différence, on obtient alors $\theta_3 - \theta_1 = -\pi \sqrt{\mu}$. Le point M effectue donc $-\frac{\sqrt{\mu}}{2}$ tours. L'application numérique donne 22,2 tours ce qui est conforme au graphe fourni.



Ne pas négliger 1 devant μ donne $\theta_3 - \theta_1 = -\pi \sqrt{1 + \mu}$ et numériquement 22,4.

Plan

20.1 Propriétés des forces newtoniennes	305
20.2 Invariants du mouvement	305
20.3 Mouvements engendrés par des forces newtoniennes	306
20.4 Propriétés géométriques et mécaniques des cônes non bornés	308
20.5 Propriétés géométriques et mécaniques des ellipses	309
Synthèse	312
Tests et exercices	313
Corrigés des exercices	318

Introduction

C'est un problème à deux corps particulier :

- Le système est isolé, donc (R^*) est galiléen (G est en mouvement rectiligne uniforme dans (R) , ici immobile). Donc le moment cinétique du système est conservé.
- Les forces intérieures sont centrales et conservatives donc l'énergie mécanique est conservée.
- L'un des deux corps est beaucoup plus lourd que l'autre. Alors, le plus léger est pratiquement confondu avec le mobile fictif et sa masse est pratiquement confondue avec la masse réduite. Le plus lourd est donc confondu avec G , de sorte que le référentiel (R^*) est confondu avec (R) .

Les notations seront modifiées par rapport au chapitre 19 : M_1 sera noté M et sa masse m , M_2 sera noté O et sa masse M (avec $m \ll M$).

Nous nous limiterons à une force centrale conservative particulière : la force newtonienne, décroissante en $1/r^2$. Il s'agit donc soit de la force gravitationnelle (formule de Newton), soit de la force électrostatique (formule de Coulomb).

Prérequis

- Énergie
- Systèmes de points
- Moment cinétique et théorème du moment cinétique
- Coordonnées polaires

Objectifs

- Introduire l'énergie potentielle d'interaction
- Établir les propriétés des mouvements à force centrale
- Étudier le profil d'énergie potentielle efficace (états liés, états de diffusion)
- Énoncer les lois de Kepler
- Étudier quelques orbites particulières

20.1 Propriétés des forces newtoniennes

20.1.1 Caractère attractif ou répulsif

Si le centre de force O est choisi comme origine d'un repère spatial,

Définition

Une **force newtonienne** est une force de centre O , conservative, en $1/r^2$:

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{OM} = \vec{r} = r \vec{e}_r$$

- Pour la force gravitationnelle, $k = \mathcal{G}Mm > 0$: cette force est toujours attractive.
- Pour la force électrostatique entre deux charges q et Q , $k = -Qq/4\pi\epsilon_0$. Elle est attractive ($k > 0$) si les charges sont de signes opposées, répulsive sinon.



Retrouvez le caractère attractif ou répulsif d'une force en regardant sur un schéma si la force est orientée vers le centre de force (attractive) ou à l'opposé (répulsive).

20.1.2 Énergie potentielle



Reportez-vous à la méthode page 175 pour le calcul de E_p . Il faut seulement y ajouter l'astuce $\vec{e}_r \cdot d\vec{e}_r = 0$ obtenue en différentiant $\vec{e}_r^2 = 1$.



La constante d'intégration a été prise nulle, ce qui correspond à une énergie potentielle nulle infiniment loin du centre de force.

Loi

Une force newtonienne est conservative :

$$E_p(r) = -\frac{k}{r} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} E_p(r) = -\mathcal{G}\frac{Mm}{r} & \text{force gravitationnelle} \\ E_p(r) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{force électrostatique} \end{cases}$$

20.2 Invariants du mouvement

Un tel système admet de nombreux invariants du mouvement. Les deux plus importants sont :

- le moment cinétique, ce qui permet de prouver que le mouvement est rectiligne (si \vec{r} et \vec{v} sont initialement colinéaires) ou plan (s'ils ne le sont pas) et d'établir :

Loi des aires

Le moment cinétique est un invariant du mouvement. Sa norme définit la constante des aires :

$$C = r^2 \dot{\theta} = \text{cst}$$

où (r, θ) sont des coordonnées polaires définies dans le plan du mouvement (voir ci-dessous).

- l'énergie mécanique, ce qui permet d'étudier l'extension radiale du mouvement via l'énergie potentielle effective (voir paragraphe 20.3.3).

20.3 Mouvements engendrés par des forces newtoniennes

20.3.1 Les trajectoires sont des cônes

Il existe de nombreuses manières d'établir l'équation de la courbe plane décrite par le mobile M . C'est le résultat que vous devez connaître :

Équation polaire d'une trajectoire

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \quad \text{avec} \quad p = \frac{mC^2}{k} \quad \text{et} \quad e \geq 0$$

Les trajectoires sont des cônes, dont les principales propriétés sont rappelées dans la fiche méthode 9.

p est appelé paramètre de la cône et il est algébrique.

e est appelée **excentricité** de la cône.



Certains auteurs définissent p pour qu'il soit toujours positif. Cela ne change rien, ce n'est en fait qu'un choix différent pour l'origine de l'angle θ .



p est homogène à une longueur, mais e est sans dimension.

20.3.2 Énergie mécanique et excentricité

Relation entre énergie mécanique et excentricité

$$e = \sqrt{1 + \frac{2p}{k} E_m} \quad \Leftrightarrow \quad E_m = \frac{k}{2p} (e^2 - 1)$$

20.3.3 Discussion énergétique

En exploitant la loi des aires, l'énergie mécanique peut s'écrire comme une fonction de r seulement.

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{\text{peff}} \quad \text{avec} \quad E_{\text{peff}} = \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r)$$

Méthode 1 Interpréter l'énergie potentielle effective

E_{peff} est une fonction de r seulement, donc il est possible de discuter son profil de potentiel de la même manière que pour les oscillateurs à un degré de liberté. L'ingrédient principal est $E_m \geq E_{\text{peff}}$: seules les valeurs de r satisfaisant cette contrainte sont autorisées.

Selon que la force newtonienne est attractive ou répulsive, l'allure du profil de potentiel est différente. Vous devez connaître les deux cas et ne pas faire de confusion : il est possible d'avoir un mouvement hyperbolique dans les deux cas, autrement dit même une force attractive peut conduire à un mouvement non borné.



Par définition, un état de diffusion correspond à un mouvement non borné.



Cette situation n'est physiquement réalisable qu'en électrostatique avec deux charges de même signe. Un exemple célèbre est l'expérience de Rutherford, où un noyau d'hélium est envoyé sur, et dévié par, un noyau d'or.

Cas d'une interaction répulsive

$E_m > 0$ donc $e > 1$. Le profil de potentiel est représenté figure 20.1.

La trajectoire est hyperbolique, ce qui est confirmé par le graphe qui montre que quelle que soit $E_m > 0$, le mouvement est non borné. Il s'agit donc d'un **état de diffusion**.

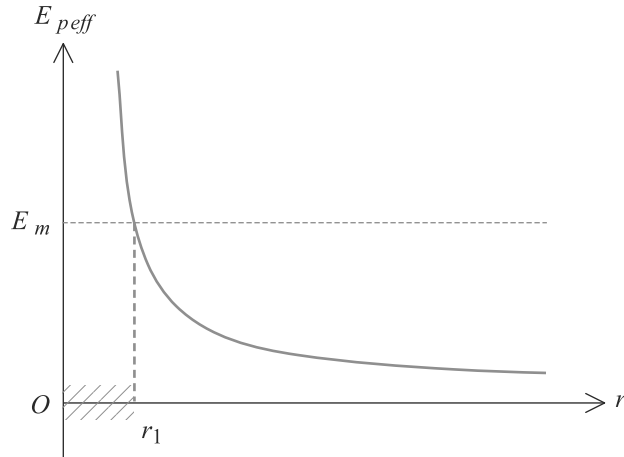


Figure 20.1 Profil de potentiel pour une force newtonienne répulsive.

Cas d'une interaction attractive

Le profil de potentiel est représenté figure 20.2. Il y a cette fois plusieurs cas à classer suivant que le mouvement est borné ou non.

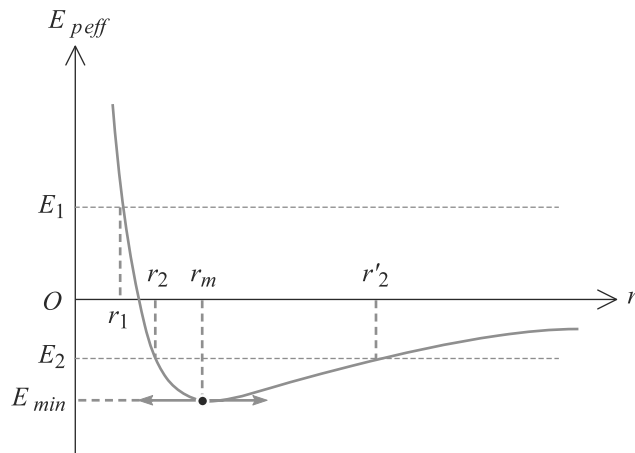


Figure 20.2 Profil de potentiel pour une force newtonienne attractive.

Il y a deux cas de mouvements non bornés, donc d'**états de diffusion** :

- Si $E_m > 0$ (cas E_1), alors $e > 1$ et le domaine radial du mouvement est $r > r_1$. La trajectoire est donc hyperbolique.



Les hyperboles obtenues dans les cas répulsif ou attractif ne sont pas équivalentes ! Dans chacun des cas, ce n'est pas la même branche de l'hyperbole qui est utilisée (voir figures 20.3 et 20.4).

- Si $E_m = 0$, alors $e = 1$, la vitesse s'annule à l'infini (où l'énergie potentielle est nulle, donc l'énergie cinétique aussi). C'est une trajectoire parabolique.

Il y a deux cas de mouvements bornés, donc d'**états liés** :

- Si $E_{\min} < E_m < 0$ (cas E_2), alors $0 < e < 1$ et le domaine radial du mouvement est limité : $r_2 < r < r'_2$. C'est un état lié, la trajectoire est elliptique.
- Si $E_m = E_{\min}$, alors $e = 0$, il y a une seule valeur de r possible. L'état lié est un mouvement circulaire de rayon r_m .

Le cas $E_m < E_{\min}$ est impossible (pas compatible avec les conditions initiales).

20.4 Propriétés géométriques et mécaniques des cônes non bornées

20.4.1 Hyperbole dans le cas répulsif

La branche d'hyperbole parcourue par le mobile fictif est la plus « éloignée » du centre de force (qui joue le rôle de foyer), comme montré figure 20.3.

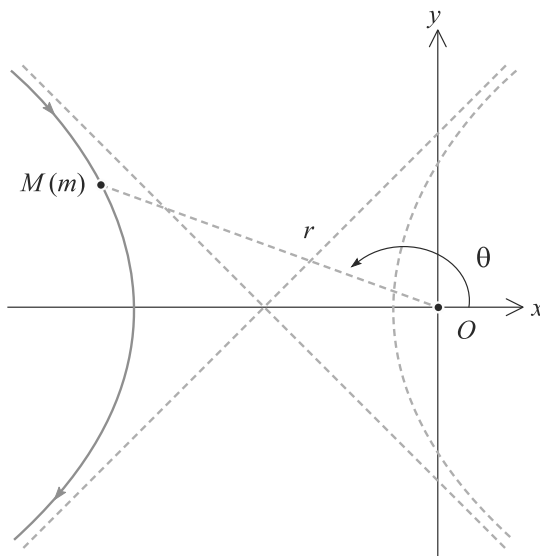


Figure 20.3 Trajectoire hyperbolique dans le cas répulsif.

Les propriétés géométriques de cette hyperbole sont regroupées dans la fiche méthode 9. Remarquons qu'ici $p < 0$ et $e > 1$. L'énergie mécanique est donnée par :

$$a = \frac{-k}{2E_m} > 0$$

20.4.2 Hyperbole dans le cas attractif

La principale différence est que la branche parcourue est la plus « proche » du centre de force (figure 20.4). Cette fois $p > 0$ et $e > 1$.

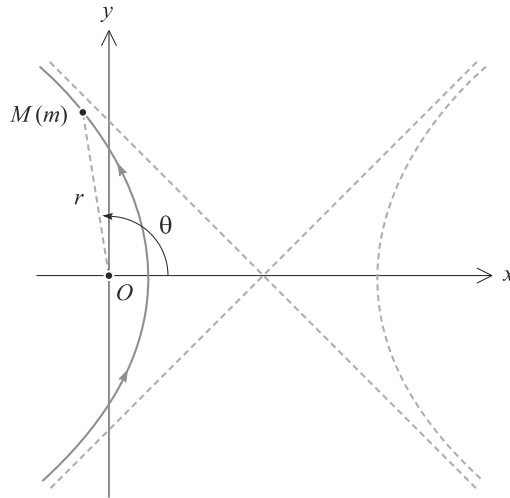


Figure 20.4 Trajectoire hyperbolique dans le cas attractif.

20.4.3 Parabole

Le centre de force est le foyer de la parabole (figure 20.5). La distance minimal d'approche vaut $p/2$.

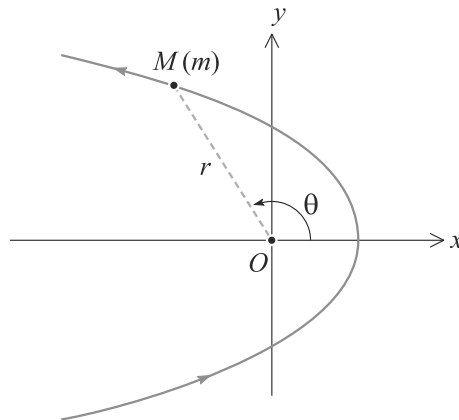


Figure 20.5 Trajectoire parabolique.

20.5 Propriétés géométriques et mécaniques des ellipses

20.5.1 Relations de base

La trajectoire est représentée figure 20.6. L'ellipse admet le centre de force comme l'un de ses foyers. Nous avons $p > 0$ et $0 < e < 1$. L'énergie mécanique est telle que :

$$a = \frac{-k}{2E_m}$$

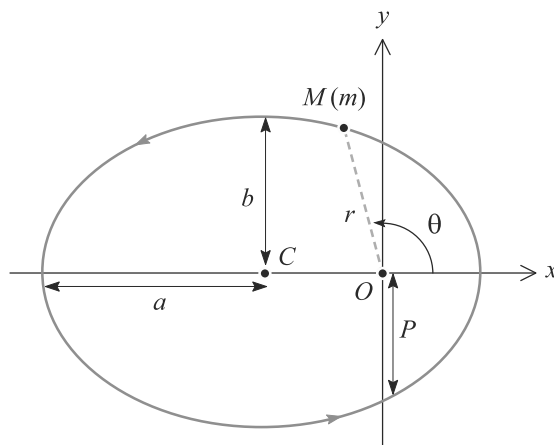


Figure 20.6 Trajectoire elliptique pour une interaction attractive.



La relation pour a se retrouve immédiatement en remarquant que a est la demi-somme des distances extrêmes sur Ox .



Cette fois, $k > 0$ donc $E_m < 0$, donc nous avons bien $a > 0$.

Les positions associées aux distances minimale et maximale sont respectivement appelées :

- **périhélie** et **aphélie** quand le centre de force est le soleil (helios) ;
- **périgée** et **apogée** quand le centre de force est la Terre ;
- plus généralement, **périastre** et d'**apoastre** pour un astre quelconque.

La relation entre a et E_m peut être retrouvée très vite. Au périhélie et à l'aphélie, la distance r passe par un extrémum dont la vitesse \dot{r} est nulle. L'énergie mécanique en ces deux points s'exprime par :

$$E_m = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{k}{r} \Rightarrow r^2 + \frac{k}{E_m} r - \frac{mC^2}{2E_m} = 0$$

La demi-somme des racines (qui se retrouve dans le terme du premier degré) de ce trinôme est égale à a .

20.5.2

Lois de Kepler



Si le centre de force est une planète et le mobile fictif un satellite, ces lois s'appliquent aussi bien, il faut seulement changer le vocabulaire.

Le mobile fictif sera désormais appelé **planète** et le centre de force **étoile**. Le référentiel barycentrique est traditionnellement appelé référentiel de Kepler.

Lois de Kepler

1. Dans le référentiel de Kepler, la planète décrit une ellipse de demi-grand axe a et de période T dont l'étoile est un foyer.
2. Pendant des intervalles de temps égaux, le vecteur position de la planète balaye des aires égales (loi des aires).
3. Le rapport T^2/a^3 est le même pour toutes les planètes gravitant autour de l'étoile.

Méthode 2 Démontrer la troisième loi de Kepler

Si un énoncé vous demande de démontrer complètement cette loi, vous devez restituer tout le raisonnement mené dans votre cours. Retenez que l'aire d'une ellipse, avec les notations utilisées ici, est πab .

Mais si l'énoncé vous demande seulement de trouver la valeur de la constante de Kepler, limitez-vous au cas particulier du mouvement circulaire où $v = r\omega$ et $T = 2\pi/\omega$! C'est plus rapide et, comme de toute façon cette valeur est valable quel que soit le mouvement lié de la planète, elle est générale.

20.5.3 Cas du mouvement circulaire

Les lois de Kepler sont toujours valables, en se souvenant que $a = b$ est le rayon du cercle. La masse et le rayon de la Terre (prise comme centre de force) sont notés M_T et R_T .

Comme le satellite a un moment cinétique constant, sa vitesse angulaire est constante donc sa vitesse aussi. Le PFD projeté sur \vec{u}_r conduit à :

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r}}$$

où g_0 est l'accélération de la pesanteur au niveau du sol.

La valeur de cette vitesse pour une orbite rasante ($r = R_T$) s'appelle la **première vitesse cosmique** :

$$v_{c1} = \sqrt{g_0 R_T} \simeq 7,92 \text{ km.s}^{-1}$$

Lorsqu'un satellite est mis sur orbite, si la vitesse initiale qui lui est communiquée est trop grande, son énergie mécanique risque de devenir positive. Dans ce cas le satellite part en mouvement parabolique et ne pourra donc pas s'installer dans une orbite. Soit v_0 et r_0 les conditions initiales. L'énergie mécanique s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{m M_T}{r_0^2}$$

La parabole correspond à $E_m = 0$. La vitesse associée est appelée **deuxième vitesse cosmique** et vaut donc :

$$v_{c2} = \sqrt{\frac{2GM_T}{r}} = \sqrt{2} v_{c1} \simeq 11,2 \text{ km.s}^{-1}$$



C'est aussi la vitesse circulaire maximale d'un satellite.

Synthèse

Savoirs

- Énergies d'interaction gravitationnelle et électrostatique
- Un mouvement à force centrale est plan et suit la loi des aires (moment cinétique conservatif)
- Conservation de l'énergie mécanique
- Nature des trajectoires en fonction du signe de l'énergie mécanique
- Énergie potentielle efficace
- Lois de Kepler
- Dans le cas d'un état lié, expression de l'énergie mécanique en fonction du demi-grand axe a

Savoir-faire

- Démontrer la planéité d'un mouvement à force centrale
- Démontrer la loi des aires pour un mouvement à force centrale
- Utiliser un profil d'énergie potentielle efficace pour déterminer si un état est lié ou non
- Étudier le cas particulier d'un mouvement circulaire, savoir alors retrouver l'expression de la troisième loi de Kepler

Mots-clés

- Force centrale,
- moment cinétique,
- énergie potentielle d'interaction,
- énergie potentielle efficace,
- loi des aires,
- lois de Kepler,
- mouvement circulaire,
- mouvements elliptique, parabolique et hyperbolique.

Tests de connaissances

Les questions sont posées pour un champ de forces centrales newtoniennes.

- 20.1 Une force attractive a une énergie potentielle qui augmente avec la distance.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 20.2 L'énergie potentielle de gravitation varie comme l'inverse du carré de la distance.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 20.3 Moment cinétique et énergie mécanique sont deux invariants du mouvement.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 20.4 La loi des aires provient de la conservation de l'énergie cinétique.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 20.5 Les lois de Kepler s'appliquent à tout système planétaire.

☐ a. Vrai ☐ b. Faux

- 20.6 On obtient les mêmes trajectoires avec les interactions attractives et répulsives.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 20.7 Une énergie négative signifie état de diffusion.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 20.8 Dans le cas d'une trajectoire circulaire l'énergie mécanique est égale à l'opposé de l'énergie cinétique.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 20.9 Le soleil est au centre de l'ellipse décrite par la terre.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 20.10 Les planètes du système solaires ont un mouvement homothétique les unes par rapport aux autres (des ellipses faiblement excentriques).
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

20.11 Masse du soleil

(D'après Mines de première année PC.)

Le référentiel de Kepler du Soleil peut être considéré comme galiléen. Supposons que la trajectoire de la Terre autour du Soleil est un cercle de rayon R .

- Établissez la relation entre la vitesse angulaire de révolution Ω de la Terre autour du Soleil, en fonction de la constante de gravitation \mathcal{G} , R et la masse du soleil M_S .
- Déduisez-en la durée de l'année terrestre T . Application numérique : calculez M_S .

Données : $R = 150.10^6$ km ; $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}$ N.kg⁻².m²

20.12 Ellipse de transfert

Un satellite de masse m est en « orbite basse » rasante autour de la Terre (masse M) : sa trajectoire est circulaire de rayon $R = 6400$ km, vitesse v_1 . L'objectif est de le transférer vers une autre orbite circulaire dite « haute », l'orbite géostationnaire, de rayon r_2 , vitesse v_2 .

- Déterminez la relation entre v et r pour une orbite circulaire, en fonction de g et R . Donnez aussi la période T . Applications numériques pour l'orbite basse.
 - Précisez rapidement ce que l'orbite géostationnaire a de remarquable. Déduisez-en les expressions et les valeurs numériques de r_2 et v_2 .

- À l'instant $t = 0$, allumons les propulseurs du satellite pour augmenter la norme de sa vitesse. La durée de cette phase est supposée quasi nulle. Le satellite part donc en mouvement elliptique (**ellipse de transfert**). Lorsqu'une demi-ellipse a été parcourue, les propulseurs sont brièvement rallumés pour accélérer le satellite, qui peut alors s'installer sur l'orbite géostationnaire.

- Justifiez rapidement que ce morceau d'ellipse doit être tangent aux deux trajectoires circulaires initiale et finale. Déduisez-en qu'il doit bien s'agir d'une demi-ellipse et précisez son périégée et son apogée. Le centre de la Terre doit-il être l'un des foyers de cette ellipse ?
- Calculez le supplément de vitesse à donner au début et à la fin de la phase de transfert.
- Calculez la durée du transfert.

Données : $g = 9,8$ m.s⁻²

20.13 Le satellite Hipparcos

(D'après Mines de première année PCSI.)

Le satellite Hipparcos, équipé d'un télescope, a servi à étudier de nombreuses étoiles. Suite à un incident technique, il est resté sur son orbite de transfert, de sorte que son altitude varie entre $h = 500$ km et l'altitude géostationnaire $H = 36\,000$ km.

La Terre est assimilée à une sphère de centre O , de rayon $R = 6400$ km, de masse M et le satellite à un point matériel S de masse m . Le référentiel géocentrique est supposé galiléen. La période de rotation propre de la Terre est $T = 86\,164$ s.

1. Montrez que le moment cinétique du satellite par rapport à O , noté \vec{L} , est un invariant du mouvement.
2. Utilisons le système de coordonnées cylindriques de centre O et de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ tel que $\vec{L} = L\vec{u}_z$.
Montrez que le mouvement est plan et exprimez $r^2\dot{\theta}$ en fonction de L et m . Comment s'appelle cette grandeur ?
3. La trajectoire du satellite a pour équation polaire :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e \cos(\theta)}$$

Quelle est l'allure de la trajectoire ? Dans quel intervalle de valeurs doit se trouver e ?

4. Exprimez p et e en fonction de h , H et R . Applications numériques.
5. Exprimez le demi-grand axe a . Application numérique.
6. Exprimez la période T_h de révolution d'Hipparcos en fonction de T , R , H et h . Application numérique en heures.
7. La ceinture de Van Hallen est une région de l'espace remplie de particules chargées piégées dans le champ

magnétique terrestre. Elles aveuglent les détecteurs d'Hipparcos quand ce dernier traverse la ceinture. La ceinture est une région comprise entre deux sphères de rayon $r_1 = 8400$ km et $r_2 = 28\,000$ km centrées sur la Terre.

a) Calculez numériquement les angles θ_1 et θ_2 correspondant à l'entrée et à la sortie d'Hipparcos de la ceinture de Van Hallen.

b) Représentez par un schéma clair la trajectoire d'Hipparcos et l'aire \mathcal{A} balayée par le rayon vecteur \vec{OS} lors d'un passage dans la ceinture de Van Hallen. Dans la suite, vous prendrez $\mathcal{A} \approx 200 \cdot 10^6$ km².

c) Soit t_0 la durée pendant laquelle Hipparcos est situé dans la ceinture, et donc aveuglé. Exprimez le pourcentage de temps pendant lequel Hipparcos est inutilisable à cause des particules chargées, défini comme $\rho = t_0/T_h$. Vous donnerez le résultat analytique en fonction de \mathcal{A} et de l'aire de l'ellipse complète \mathcal{A}_e , puis en ferez une application numérique avec :

$$\mathcal{A}_e = \frac{\pi p^2}{(1 - e^2)^{3/2}}$$

Exercices d'approfondissement

20.14 Un modèle atomique obsolète mais historique : l'atome de Bohr

(D'après Mines de première année.)

Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, basé sur une description « planétaire », est né vers 1915 et a été abandonné vers 1920. Il ne survit aujourd'hui qu'à titre pédagogique, parce que malgré sa simplicité il donne des valeurs correctes pour les ordres de grandeurs de beaucoup de paramètres atomiques.

Le noyau est supposé fixe en O , origine d'un référentiel galiléen. L'électron est repéré par un point M mobile. Bohr a émis l'hypothèse que l'électron était une particule ponctuelle décrivant une trajectoire circulaire de centre O .



L'électron n'est en fait pas assimilable à un point matériel quand il est dans l'atome. Reportez-vous à votre cours d'atomistique.

Nous nous donnons une base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ telle que le mouvement de l'électron se fait dans le plan xOy . Ce plan est aussi muni d'une base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ de sorte que $\vec{OM} = r\vec{u}_r$.

La charge de l'électron est notée $-e$, sa masse m_e et son poids est négligé.

1. Questions préliminaires.

- a) Donnez l'expression de la force à laquelle est soumis l'électron.
- b) Déduisez-en la norme de sa vitesse en fonction de e , m_e , r et ϵ_0 la permittivité du vide.
- c) Calculez la norme de son moment cinétique par rapport à O .
- d) Démontrez que la force dérive d'une énergie potentielle dont vous donnerez l'expression en supposant qu'elle s'annule à l'infini.
- e) Exprimez l'énergie mécanique de l'électron.

2. Pour expliquer les observations spectroscopiques de l'atome d'hydrogène, Bohr a postulé que le moment cinétique de l'électron était **quantifié**, c'est-à-dire ne pouvant prendre que des valeurs multiples d'une valeur fondamentale : $L = n\hbar$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\hbar = h/2\pi$ la constante de Planck réduite.



Reportez-vous à votre cours d'atomistique pour le détail de ces observations.

- Déduisez-en que le rayon r est lui aussi quantifié, alors noté r_n , en l'exprimant en fonction de n et r_1 . Puis exprimez r_1 , appelé rayon de Bohr de l'atome, en fonction de e , ε_0 , m_e et h . Application numérique.
- Exprimez alors l'énergie mécanique quantifiée E_n en fonction de n et E_1 . Exprimez E_1 et calculez-la numériquement en joule puis en électron-volt.
- Calculez la variation d'énergie mécanique ΔE d'un électron passant d'un rayon r_p à un rayon r_q avec $p > q$, en fonction de m_e , e , ε_0 , h , p et q . Commentez.
- Sachant qu'une variation d'énergie ΔE peut être associée à une longueur d'onde λ telle que $\lambda = hc/\Delta E$, déduisez-en la loi de Ritz sous la forme :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{p^2} \right)$$

Exprimez la constante de Rydberg R_H en fonction de e , ε_0 et h . Application numérique en cm^{-1} .

Données : $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$;
 $\varepsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

20.15 Satellites sur orbite circulaire

(D'après Mines-ponts)

On considérera que la Terre est une sphère homogène de rayon R_T et de centre O , immobile dans l'espace, sans rotation propre.

- Un satellite de masse M_S est en orbite circulaire de centre O , à une altitude h de l'ordre de quelques centaines de kilomètres (orbite basse). Établir la relation entre la période de révolution T et h . Exprimer de même la relation entre la vitesse v et h .
- Soient E_c et E_p l'énergie cinétique du satellite et son énergie potentielle dans le champ de gravitation de la Terre ; établir le « théorème du viriel » : $2 E_c + E_p = 0$.
- À chaque position P du satellite correspond un point Q sur la Terre à la verticale de ce point. L'ensemble des points Q définit la trace de la trajectoire. Pour un observateur situé en Q , la durée de visibilité τ d'un satellite est l'intervalle de temps entre son apparition sur l'horizon (point A de la figure 20.7) et sa disparition sous l'horizon (point B). Exprimer τ en fonction de h , G , M_T et R_T . Calculer τ pour $h = 8 \cdot 10^5 \text{ m}$.
- Calculer T/τ .

Pour les besoins de la téléphonie mobile, on place sur des orbites polaires (c'est-à-dire contenues dans un plan méridien terrestre) un ensemble de satellites, identiques,

appelé « train de satellites ». Ces satellites sont disposés régulièrement sur leur orbite polaire commune, à l'altitude de 800 km. Calculer le nombre minimal de satellites nécessaires pour former un « train » afin que tous les points au sol, dans le même plan méridien que l'orbite, voient au moins un satellite à tout instant.

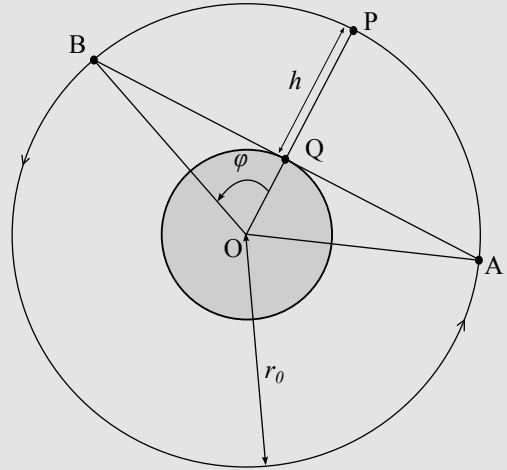


Figure 20.7 Satellite P et ligne des horizons.

Combien d'orbites polaires de ce type faut-il pour couvrir la surface de la Terre, c'est-à-dire pour que chaque point de la surface terrestre voit au moins un satellite à tout instant ? Combien doit-on disposer de satellites en tout ?

- Dans cette question, on prend en compte la rotation de la Terre. Calculer la période et l'altitude d'un satellite placé sur orbite géostationnaire. La notion de durée de visibilité garde-t-elle, dans ce cas, un sens ? Quels sont les avantages et les inconvénients d'un satellite géostationnaire comparé au train de la question 4. ?

Données :

constante de gravitation $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
 rayon de la Terre $R_T = 6\,400 \text{ km}$
 masse de la Terre $M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
 masse du satellite $M_S = 2,0 \cdot 10^3 \text{ kg}$

20.16 Satellite freiné par l'atmosphère

(D'après Mines-ponts)

Cet exercice fait suite à l'exercice **Satellites sur orbite circulaire**. On se place dans les mêmes conditions : Terre homogène sphérique, sans rotation propre. On rappelle les relations trouvées entre la période de révolution T et h :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GM_T}} \text{ et entre la vitesse } v \text{ et } h : v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}$$

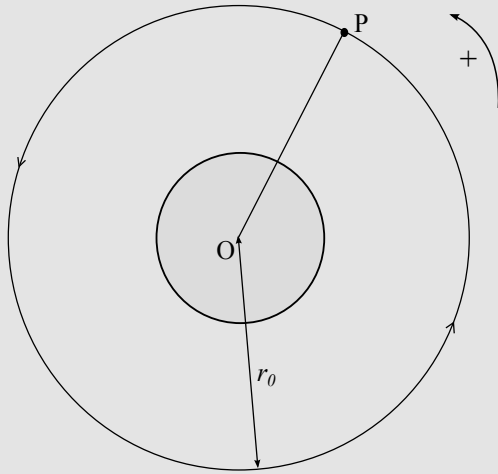


Figure 20.8 Satellite P sur son orbite idéale circulaire.

1. La Terre est entourée d'une atmosphère qui s'oppose au mouvement du satellite. La force de frottement \vec{f}_a créée par l'atmosphère est proportionnelle au carré de la vitesse v du satellite et elle s'exprime par $\vec{f}_a = -\alpha M_S v \vec{v}$, où α a une valeur positive, constante dans cette question. Déterminer la dimension de α . Appliquer alors le théorème du Viriel ($2E_c + E_p = 0$) reste applicable en présence de \vec{f}_a . Établir l'équation différentielle vérifiée par h .
2. Un satellite placé sur une orbite d'altitude 800 km subit une diminution d'altitude d'environ 1 m par révolution ; sa vitesse est, en norme, très peu affectée au bout d'une révolution. En déduire une estimation au premier ordre de α (ne pas s'étonner de la petitesse extrême du résultat !) Calculer, avec la même approximation, ce qu'il adient de l'altitude au bout de 10 ans de fonctionnement du satellite. Comparer à la solution exacte. Le fait d'avoir une augmentation de la vitesse en présence d'une force opposée au mouvement est-il paradoxal ?
3. En réalité, les frottements dépendent de la densité de l'atmosphère, et donc de l'altitude. Dans un certain domaine d'altitude, α varie selon la loi : $\alpha(h) = \frac{\gamma}{h^\beta}$, où γ et β sont positifs. Le même satellite que celui de la question 2. (perdant 1 m pour $h = 800$ km) perd, à l'altitude de 400 km, 2 mètres par révolution. Calculer γ et β .

Données :

constante de gravitation $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

rayon de la Terre $R_T = 6\,400 \text{ km}$

masse de la Terre $M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

masse du satellite $M_S = 2,0 \cdot 10^3 \text{ kg}$

20.17 Agrégat moléculaire

(D'après Concours communs polytechniques.)

Considérons un système isolé de deux atomes (une molécule diatomique) étudié dans son référentiel barycentrique (R^*). La position de l'atome i est notée $\vec{r}_i = \overrightarrow{GM_i}$ avec G le centre d'inertie.

L'énergie potentielle d'interaction de ces atomes est conservative et s'écrit, en notant $r = \|\overrightarrow{M_1 M_2}\|$:

$$E_p(r) = 4\varepsilon \left(\left(\frac{b}{r} \right)^{12} - \left(\frac{b}{r} \right)^6 \right)$$

ε et b sont des constantes positives.

1. Donnez les dimensions de ε et b .
2. Justifiez que (R^*) est galiléen.
3. Quelles propriétés vérifient le moment cinétique \vec{L}_O du système par rapport à O et l'énergie mécanique E_m du système ?
4. Montrez qu'il existe une solution particulière des équations du mouvement telle que les atomes sont immobiles et séparés d'une distance r_0 que vous exprimerez en fonction de b . Que vaut alors E_m ? L'équilibre est-il stable ?
5. Montrez que le mouvement le plus général du système s'obtient en étudiant une particule fictive M . Vous préciserez sa position $\vec{\rho}$, sa masse μ et la force \vec{F} qu'elle subit.
6. Montrez que le mouvement est plan et obéit à la loi des aires. La constante des aires sera notée C . Que pouvez-vous conclure sur les mouvements de M_1 et M_2 ?
7. Montrez que E_m peut s'écrire en fonction de $\rho = \|\overrightarrow{GM}\|$ et $\dot{\rho}$ en faisant intervenir C . Déduisez-en la grandeur définie par :

$$E_{p\text{eff}} = E_m - \frac{1}{2} \mu \dot{\rho}^2$$

Comment interprétez-vous cette grandeur ?

8. Le calcul montre que $E_{p\text{eff}}$ n'admet pas de minimum si :

$$L = \|\vec{L}_O\| \gg L_0 = \sqrt{\frac{72\varepsilon\mu b^2}{5^{5/3}}}$$

Quand $L \leq L_0$, elle admet un minimum en ρ_m et un maximum en ρ_M .

Représentez $E_{p\text{eff}}$ dans ce cas, indiquez les états d'énergie du système correspondant bien à une molécule (états liés).

Données : $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $\varepsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

20.18 Mouvement d'une particule dans une cuvette parabolique

(D'après ENSI.)

Un point M de masse m , soumis à son poids, est libre de se déplacer dans une cavité fixe dans le référentiel (R) terrestre supposé galiléen. Cette cavité a le profil d'un parabolôïde de révolution, d'axe vertical ascendant Oz et d'équation cylindrique $\rho = az$ avec $a > 0$ (voir figure 20.9). Tout frottement est négligé.

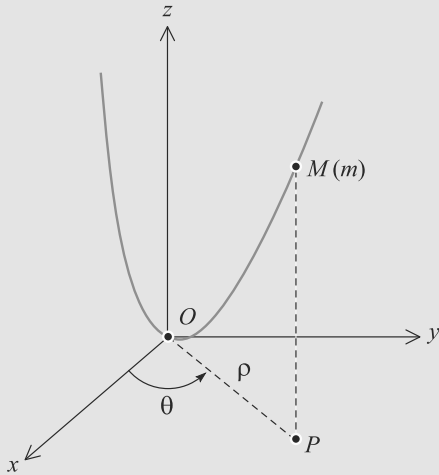


Figure 20.9 Cuvette parabolique.

La base cylindrique sera notée $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

Le contact entre M et la surface est unilatéral : $z \geq \rho^2/a$.

1. Étude du moment cinétique de M par rapport à O , noté \vec{L}_O .
 - a) Calculez \vec{L}_O puis sa projection sur l'axe Oz , notée L .
 - b) Montrez que L est un invariant du mouvement que vous exprimerez en fonction de ρ , θ , et m .
2. Étude énergétique.

a) Exprimez l'énergie cinétique de M , notée E_c , en fonction des coordonnées et de leurs dérivées.

b) Justifiez le fait que le système est conservatif et exprimez l'énergie potentielle $E_p(\rho)$ avec la convention $E_p(0) = 0$.

3. Équation du mouvement.

a) Établissez une équation différentielle du premier ordre, à une seule inconnue, faisant apparaître une **énergie potentielle effective** $E_{peff}(\rho)$ sous la forme :

$$\frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 G(\rho) + E_{peff}(\rho) = E_m$$

où E_m est l'énergie mécanique. Explicitez $G(\rho)$ et $E_{peff}(\rho)$.

b) Tracez le profil de potentiel correspondant. En particulier, étudiez le minimum en $\rho = \rho_m$, que vous exprimerez en fonction de L , m , a et g .

Justifiez que la trajectoire est toujours contrainte dans une région délimitée par deux cercles sur la surface du parabolôïde. Vous établirez une équation donnant le rayons de ces deux cercles, mais ne cherchez pas à la résoudre.

4. Étude d'un mouvement particulier.

a) À quelle condition initiale la trajectoire sera-t-elle un cercle horizontal ? Montrez alors que la norme de la vitesse s'écrit, pour une trajectoire de rayon ρ :

$$v = \rho \sqrt{\frac{2g}{a}}$$

b) Supposons que le point matériel soit en mouvement circulaire de rayon ρ_m . Il est alors légèrement écarté de cette trajectoire par une petite variation de ρ . Montrez que le paramètre $\varepsilon = \rho - \rho_m$ oscille alors approximativement avec une période T que vous donnerez pour $\rho = 1$ m et $a = 2$ m.

Donnée : $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$

20.1

Vrai, elle est entraînée vers les zones de basse énergie potentielle.

20.2

Faux. Elle varie comme l'inverse de la distance.

20.3

Vrai, on dit aussi que ce sont des intégrales premières.

20.4

Faux, elle provient de la conservation du moment cinétique.

20.5

Vrai, pour peu que la masse centrale soit largement la plus importante, mais la constante prend une valeur différente d'un système à l'autre.

20.6

Faux, les états liés (cercles, ellipses) ne peuvent être obtenus qu'avec une interaction attractive, seules les hyperboles sont communes mais pas avec le même foyer occupé.

20.7

Faux, au contraire.

20.8

Vrai.

20.9

Faux, le soleil occupe un des foyers (loi de Kepler).

20.10

Faux. La plupart des planètes ont un mouvement elliptique faiblement excentrique mais ils se déroulent dans des plans légèrement différents, avec les périodes différentes : ils ne sont pas homothétiques.

20.11

Masse du soleil

Cet exercice est une simple manipulation des formules de cours sur le mouvement circulaire. Assurez-vous donc que vous savez écrire le PFD dans ce cas en quelques secondes.

1. Soit \vec{u}_r le vecteur unitaire de la droite Terre-Soleil, orienté vers la Terre. Sachant que le mouvement est circulaire, la projection du PFD sur ce vecteur s'écrit :

$$-mR\Omega^2 = -G\frac{mM_s}{R^2}$$

où m est la masse de la Terre. D'où :

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM_s}{R^3}}$$

2. Comme Ω est constante, elle est reliée à la période par $T = 2\pi/\Omega$. donc :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_s}}$$

$$\Rightarrow M_s = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} = 2,01 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

20.12

Ellipse de transfert

Cet exercice est fondamental et doit absolument être maîtrisé ! Travaillez-le donc en profondeur, veillez à bien faire le lien entre le mouvement circulaire initial et le mouvement elliptique de transfert, puis entre le mouvement elliptique et le mouvement circulaire final.

Savoir ce que sont l'orbite géostationnaire et une ellipse de transfert constitue également un fond culturel scientifique indispensable.

1. a) $GM = gR_T^2$. Voir cours. $v = \sqrt{gR^2/r}$. Pour l'orbite basse, cela donne $v_1 = \sqrt{gR} \approx 7,92 \text{ km.s}^{-1}$ (première vitesse cosmique).

Par définition, $T = 2\pi r/v$ donc

$$T_1 = 2\pi\sqrt{R/g} \approx 1 \text{ h } 25 \text{ min.}$$

- b) Un satellite en orbite géostationnaire reste à la verticale d'un même point de la surface de la Terre, ce qui est très pratique, par exemple, pour les télécommunications ! Donc la période de sa rotation autour de la Terre est égale à la période de rotation propre de la Terre, à savoir $T_T = 24 \text{ h}$. Donc :

$$\begin{cases} T_2 = T_T = \frac{2\pi r_2}{v_2} \\ v_2 = \sqrt{\frac{gR^2}{r_2}} \end{cases}$$

En combinant les deux, il vient :

$$r_2 = \left(\frac{T_T R \sqrt{g}}{2\pi} \right)^{2/3} \approx 42\,300 \text{ km}$$

et donc $v_2 \approx 3,08 \text{ km.s}^{-1}$.

2. a) Par définition, la vitesse est toujours tangente à la trajectoire. À l'instant où le satellite passe de son orbite circulaire à son orbite elliptique, la vitesse doit donc être simultanément tangente aux deux courbes, donc ces dernières sont tangentes entre elles. Idem à l'instant où le satellite repasse en orbite circulaire.

Il est immédiat, sur un graphique, de voir que cela implique que le morceau d'ellipse est une demi-ellipse (figure 20.10). Le périhélie est situé au point où le satellite a allumé ses moteurs la première fois et l'apogée au point où il les a allumés la seconde fois.

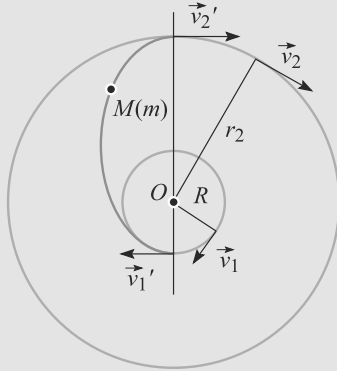


Figure 20.10 Ellipse de transfert.

Le centre de la Terre, qui reste le centre de force, doit rester foyer de la trajectoire à tout instant (cercle ou ellipse).

b) Notons v_1' la vitesse après accélération au périhélie et v_2' celle après décélération à l'apogée. La conservation du moment cinétique, par la constante des aires, donne $Rv_1' = r_2v_2'$.

La conservation de l'énergie mécanique donne, en remarquant que $2a = R + r_2$ puisque nous avons une demi-ellipse :

$$\begin{aligned} E_m &= -\frac{k}{2a} \\ &= -\frac{mgR^2}{R + r_2} \\ E_m &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mgR^2}{r} \end{aligned}$$

Utilisons cette relation au périhélie et à l'apogée :

$$\begin{aligned} v_1' &= R \sqrt{\frac{2gr_2}{R(R + r_2)}} \simeq 10,44 \text{ km.s}^{-1} \\ v_2' &= R \sqrt{\frac{2gR}{r_2(R + r_2)}} \simeq 1,58 \text{ km.s}^{-1} \end{aligned}$$

d'où les suppléments de vitesse :

$$\begin{aligned} \Delta v_1 &= v_1' - v_1 = 2,52 \text{ km.s}^{-1} \\ \Delta v_2 &= v_2 - v_2' = 1,50 \text{ km.s}^{-1} \end{aligned}$$

La conservation du moment cinétique peut constituer une vérification de ces calculs.

c) La durée du transfert est $T/2$, avec T la période de cette trajectoire elliptique. Utilisons la troisième loi de Kepler :

$$\begin{aligned} \frac{T^2}{a^3} &= \frac{4\pi^2}{GM} = \frac{4\pi^2}{gR^2} \\ \Rightarrow \frac{T}{2} &= \pi \sqrt{\frac{(R + r_2)^3}{8gR^2}} \end{aligned}$$

D'où la durée $T/2 \simeq 5 \text{ h } 14 \text{ min}$.

20.13 Le satellite Hipparcos

Les exercices portant sur ce chapitre sont en général assez proches du cours. Veuillez donc à bien connaître les propriétés élémentaires liées au mouvement (en particulier les invariants du mouvement) et à savoir retrouver rapidement les relations géométriques des cônes.

L'énoncé donne la formule $r(\theta)$ avec un signe – au dénominateur, contrairement au cours. Ce n'est qu'une redéfinition de l'angle θ mais ne change rien aux raisonnements.

1. La seule force en présence passe par O puisque O est centre de force, donc son moment est nul. D'après le théorème du moment cinétique, le moment cinétique est alors constant.
2. Par définition, $\vec{L}_O = m\vec{OS} \wedge \vec{v}$ donc \vec{OS} et \vec{v} restent à tout instant dans le plan perpendiculaire à \vec{L} passant par O . Donc le mouvement est plan.

En coordonnées polaires avec $r = OS$, $\vec{OS} = r\vec{u}_r$ et $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ donc :

$$\begin{aligned} \vec{L} &= mr\vec{u}_r \wedge r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ &= mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z \end{aligned}$$

\vec{L} étant un invariant, sa norme est constante donc $C = r^2\dot{\theta}$ est constante, appelée constante des aires.

3. La trajectoire est donc une conique. Comme c'est une courbe fermée d'après l'énoncé, il s'agit d'une ellipse ou d'un cercle. L'énoncé précise que l'altitude est variable, donc c'est une ellipse.

Le dénominateur ne doit pas s'annuler pour que r ne puisse pas devenir infini donc $0 < e < 1$.

4. À l'apogée de la trajectoire :

$$R + H = \frac{p}{1 - e} = r_{\max}$$

et au périhélie :

$$R + h = \frac{p}{1 + e} = r_{\min}$$

En divisant ces relations pour éliminer p , il vient :

$$e = \frac{H - h}{2R + H + h} = 0,72$$

En injectant ce résultat dans l'une des expressions précédentes :

$$p = \frac{2(R + h)(R + H)}{2R + H + h} = 11870 \text{ km}$$

5. Le grand axe correspond à la distance de l'apogée au péri-gée donc :

$$2a = 2R + H + h$$

$$\Rightarrow a = R + \frac{H + h}{2} = 24650 \text{ km}$$

6. La troisième loi de Kepler stipule que le rapport T^2/a^3 est le même pour tout corps soumis à l'attraction gravitationnelle de la Terre.

En appliquant ceci au satellite Hipparcos et à un satellite en orbite géostationnaire (où la période est par définition égale à celle de la rotation propre de la Terre) :

$$\frac{T_h^2}{a^3} = \frac{T^2}{(R + H)^3}$$

$$T_h = T \left(\frac{a}{R + H} \right)^{3/2} = 10 \text{ h } 37 \text{ min}$$

7. a) Un angle θ cherché satisfait la relation :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e \cos(\theta)}$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{p}{r} \right)$$

Pour $r = r_1$ cela donne $\theta_1 = 125^\circ$ et pour $r = r_2$, $\theta_2 = 36,9^\circ$.

- b) Voir figure 20.11.

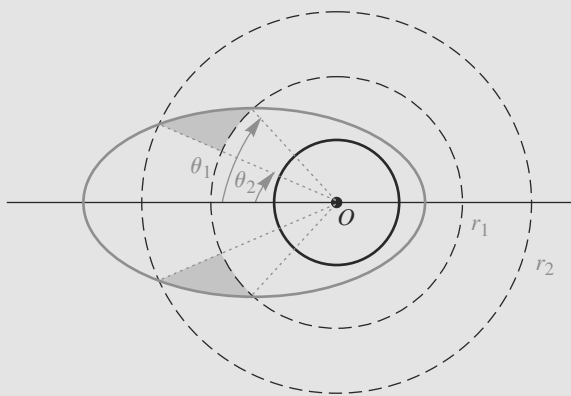


Figure 20.11 Ceinture de van Halen.

- c) La vitesse aréolaire étant constante (loi des aires), la proportion de la période passée dans la ceinture est égale à la proportion de l'aire balayée dans la ceinture :

$$\frac{t_0}{T_h} = \frac{2\mathcal{A}}{\mathcal{A}_e} = \rho$$

Numériquement, $\rho = 0,302$. Le satellite est donc aveuglé 30 % du temps et est utilisable 70 % du temps. Cela reste exploitable.

20.14 Un modèle atomique obsolète mais historique : l'atome de Bohr

Même si les explications physiques données par ce modèle ne sont pas correctes, elles donnent les bonnes formules dans le cas de l'atome d'hydrogène. C'est pourquoi cet exercice vous fait retrouver les lois de votre cours d'atomistique.

La première partie de l'exercice est une série de questions proches du cours sur les forces centrales, mais appliquées à la force électrostatique au lieu de la force gravitationnelle. Vous devez alors rapidement réaliser que cette force sera, ici, toujours attractive et vous rappeler les points de cours associés.

La deuxième partie est plus originale, qualitative, parce qu'elle va vers un autre domaine de la physique. Vous pouvez donc supposer, avec raison, qu'elle est plus facile, plus guidée, que la première.

1. a) L'électron est soumis à l'attraction électrostatique du noyau :

$$\vec{F} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

- b) Le mouvement étant circulaire, son accélération est $\vec{a} = -r\omega^2 \vec{u}_r + r\dot{\omega} \vec{u}_\theta$. Le PFD montre que la composante orthoradiale est nulle : $\dot{\omega} = 0$ donc le mouvement est uniforme. Le PFD se réduit alors à :

$$-m_e r \omega^2 = -\frac{m_e v^2}{r} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{e^2}{m_e 4\pi\epsilon_0 r}}$$

- c) Par définition :

$$\|\vec{L}\| = \|\vec{OM} \wedge m_e \vec{v}\|$$

$$= \left\| r \vec{u}_r \wedge m_e \sqrt{\frac{e^2}{m_e 4\pi\epsilon_0 r}} \vec{u}_\theta \right\|$$

$$\|\vec{L}\| = \sqrt{\frac{m_e r e^2}{4\pi\epsilon_0}}$$

- d) Soit $d\vec{OM}$ un petit déplacement de M . Le travail élémentaire associé est :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

$$= \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \cdot d(r \vec{u}_r)$$

$$\delta W = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \cdot (r d\vec{u}_r + dr \vec{u}_r)$$

Comme \vec{u}_r est unitaire, $d(\vec{u}_r^2) = 0$ donc :

$$\vec{u}_r \cdot d\vec{u}_r = 0$$

D'où :

$$\delta W = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -d\left(\frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)$$

Par identification et sachant qu'elle est nulle à l'infini, l'énergie potentielle est définie et vaut :

$$E_p(r) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

e) L'énergie cinétique se calcule par l'expression de v précédemment donnée. D'où :

$$\begin{aligned} E_m(r) &= E_c + E_p \\ &= \frac{1}{2} m_e \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \\ E_m(r) &= \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

Cette énergie est toujours négative, ce qui est compatible avec l'état lié supposé dans l'énoncé.

2. a) En partant de l'expression de $L = \|\vec{L}\|$ précédemment établie, il vient :

$$\begin{aligned} L^2 &= \frac{m_e r_n e^2}{4\pi\epsilon_0} = n^2 \hbar^2 \\ \Rightarrow r_n &= n^2 \frac{\hbar^2 \epsilon_0}{m_e e^2 \pi} = n^2 r_1 \end{aligned}$$

et donc :

$$r_1 = \frac{\hbar^2 \epsilon_0}{m_e e^2 \pi} = 52,7 \text{ pm}$$

- b) En injectant la valeur de r_n dans l'expression de l'énergie mécanique :

$$E_n = \frac{-m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} = \frac{E_1}{n^2}$$

avec :

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{-m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \\ &= -2,2 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -13,6 \text{ eV} \end{aligned}$$

Cette valeur bien connue correspond à l'état fondamental de l'atome d'hydrogène, son état de plus basse énergie.

- c) L'expression précédente donne :

$$\begin{aligned} \Delta E &= -E_p + E_q \\ &= -\frac{-m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2 p^2} + \frac{-m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2 q^2} \\ \Delta E &= \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \left(-\frac{1}{q^2} + \frac{1}{p^2} \right) \end{aligned}$$

Plus l'électron possède d'énergie, plus il est loin du noyau. Cela donne un sens aux notions de couche électronique et d'état excité de l'électron.

- d) $1/\lambda = \Delta E/\hbar c$ donne directement :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{p^2} \right)$$

D'où :

$$R_H = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^3 c} \simeq 1,1 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}$$

Cette valeur est proche de celle que l'on trouve dans les tables ($109\,740 \text{ cm}^{-1}$)

20.15

Satellites sur orbite circulaire

Méthode mise en jeu : n°2

Aucune difficulté majeure dans cet exercice qui ne demande pas des calculs ardu. Après l'utilisation des lois de base de la mécanique du point, il faut utiliser un peu de géométrie sur la figure donnée puis avoir une interprétation pratique des qualités des deux systèmes envisagés.

1. On utilise le PFD sur le satellite en se servant des coordonnées polaires : $-M_S r_0 \omega^2 \vec{e}_r = -\frac{GM_T M_S}{r_0^2} \vec{e}_r$ avec $r_0 = R_T + h$, ω la vitesse angulaire égale à $2\pi/T$. La projection de cette relation donne $r_0 \omega^2 = \frac{GM_T}{r_0^2} = r_0 \frac{4\pi^2}{T^2}$. On en déduit alors :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GM_T}}$$

qui est l'expression de la troisième loi de Kepler dans ce cas particulier.

On obtient la vitesse par :

$$v = \frac{2\pi r_0}{T} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}$$

2. La force $-\frac{GM_T M_S}{r_0^2} \vec{e}_r$ dérive du potentiel $E_p = -\frac{GM_T M_S}{r_0}$.

L'énergie cinétique s'exprime : $E_c = \frac{1}{2} M_S v^2 = \frac{GM_T M_S}{2r_0}$ en utilisant la relation du 1. On constate alors que $2E_c + E_p = 0$ qui constitue l'expression du théorème du Viriel dans le cas qui nous occupe.

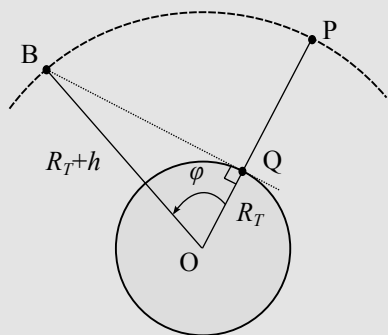
3. Sur la figure 20.12, on voit que $\cos(\varphi) = \frac{R_T}{R_T + h}$ et donc

$\varphi = \arccos\left(\frac{R_T}{R_T + h}\right)$. Par une relation de proportionnalité,

on a donc $\frac{2\varphi}{2\pi} = \frac{\tau}{T}$ qui permet d'obtenir τ .

$$\tau = \frac{\varphi T}{\pi} = 2 \arccos\left(\frac{R_T}{R_T + h}\right) \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GM_T}}$$

ce qui donne 919 s soit 15 min 19 s.

Figure 20.12 Angle φ .

4. D'après le 3., $\frac{\varphi}{\pi} = \frac{\tau}{T}$ et donc :

$$\frac{T}{\tau} = \frac{\pi}{\varphi} = \frac{\pi}{\arccos\left(\frac{R_T}{R_T + h}\right)}$$

ce qui donne numériquement 6,6. Il faut donc 7 satellites pour couvrir l'ensemble du méridien en arrondissant à l'entier supérieur.

En prenant des trains de satellites identiques, il faut 4 séries pour couvrir les zones équatoriales, la plus large à couvrir (les 6,6 précédents doivent être divisés par deux et arrondis à l'entier supérieur).

On en conclut qu'il faut au moins alors 28 satellites pour couvrir le globe en procédant ainsi.

5. La période de rotation d'un satellite géostationnaire est égale à la période de rotation de la Terre qu'on assimilera au jour solaire en première approximation. En utilisant la relation du 1., on trouve :

$$R_T + h = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}}$$

soit 42 300 km. Et donc $h = 35\,900$ km (on trouve 36 800 km en considérant le jour sidéral).

Les avantages d'un tel satellite sont d'être en permanence visible d'une grande zone de la surface du globe pour laquelle il demeure fixe dans le ciel (antenne fixe par rapport au sol pour communiquer avec lui) et on n'a pas à changer de satellite en cours de réception contrairement à ce qui se produit pour le train de satellites. Avec trois satellites, on couvre toutes les régions terrestres à l'exception des pôles mais qui sont peu habités.

L'éloignement des satellites géostationnaires est par contre un problème : les émissions de ceux-ci doivent être plus puissantes que celles des satellites de basse altitude (dans un rapport $\left(\frac{35900}{800}\right)^2$ soit plus de 2000 fois plus). Le lancement de tels satellites est aussi plus coûteux car il doit être placé à bien plus haute altitude. Enfin, l'utilisation de satellites géostationnaires entraîne une plus grande dépendance vis-à-vis de chaque satellite qui ne peut être relayé simplement par un

autre et sa grande distance (environ 0,2 s lumière) entraîne un délai dans les communications qui peut s'avérer gênant à l'utilisation.

20.16

Satellite freiné par l'atmosphère

Dans cet exercice, on obtient une équation différentielle non linéaire mais à variables séparables, il faudra aussi effectuer un développement linéaire de cette équation et utiliser les relations classiques qui sont rappelées en début de texte.

1. La dimension de α est obtenue par : $[\alpha] = \frac{[F]}{[M_S][v]^2} =$

$$\frac{MLT^{-2}}{M(LT^{-1})^2} = L^{-1} : \alpha \text{ est donc l'inverse d'une longueur.}$$

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit : $dE_c = -dE_p + \vec{f}_a \cdot d\vec{OS}$ et, si le théorème du Viriel s'applique, $dE_c = -\frac{dE_p}{2}$.

Ces deux relations donnent alors : $\frac{dE_p}{2} = \vec{f}_a \cdot d\vec{OS} = -\alpha M_S v^3 dt$. Comme $E_p = -\frac{GM_T M_S}{R_T + h}$, on en déduit que

$\frac{GM_T M_S}{2(R_T + h)^2} dh = -\alpha M_S \left(\frac{GM_T}{R_T + h}\right)^{3/2} dt$ en utilisant l'expression de v . Finalement, l'équation en h est :

$$\frac{dh}{dt} + 2\alpha \sqrt{GM_T(R_T + h)} = 0.$$

2. En supposant une petite variation en une révolution, on peut écrire $\frac{dh}{dt} = -\frac{\Delta h}{T}$. On a alors :

$$\alpha \approx \frac{\Delta h}{2T} \frac{1}{\sqrt{GM_T(R_T + h)}}$$

avec $T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GM_T}}$. Au final :

$$\alpha \approx -\frac{\Delta h}{4\pi} \frac{1}{(R_T + h)^2} \text{ soit } 1,53 \cdot 10^{-15} \text{ m}^{-1}.$$

En multipliant la variation observée par le nombre de tours effectués en 10 ans, soient 3 652,5 fois 14,24 tours effectués par jour ($T = 6\,070$ s) : 52 000 tours. On estime donc qu'en 10 ans, le satellite a perdu 52,0 km d'altitude sur 800 km d'altitude initiale (6,5 %) ce qui permet d'espérer qu'il s'agit d'une estimation correcte.

En intégrant l'équation complète, on trouve :

$$\int_{R_T + h_0}^{R_T + h} \frac{dh}{\sqrt{R_T + h}} = -2 \int_0^t \alpha \sqrt{GM_T} dt$$

qui s'intègre en $2(\sqrt{R_T + h} - \sqrt{R_T + h_0}) = -2\alpha \sqrt{GM_T} t$

ce qui permet d'écrire $R_T + h = (\sqrt{R_T + h_0} - \alpha \sqrt{GM_T} t)^2$

et donc $\Delta h = (\sqrt{R_T + h_0} - \alpha \sqrt{GM_T} t)^2 - R_T - h_0$.

Numériquement, on trouve alors $-51,9$ km sur 10 ans : l'estimation précédente était donc excellente.

On peut trouver paradoxal que, malgré le freinage par l'air, la vitesse croisse : c'est contraire à ce qu'on observe à la surface du globe pour les mouvements courant qui peuvent y être observés. Ici, c'est l'énergie mécanique totale qui décroît par frottement et non seulement l'énergie cinétique. Cette dernière croît mais deux fois moins que l'énergie potentielle ne décroît.

3. On est amené à résoudre ici un système de deux équations à deux inconnues : $\alpha(h_1) = \frac{\gamma}{h_1^\beta}$ et $\alpha(h_2) = \frac{\gamma}{h_2^\beta}$. On a vu en 2. que la perte d'altitude était sur une révolution proportionnelle à α et donc $\frac{\alpha(h_1)}{\alpha(h_2)} = \frac{h_2^\beta}{h_1^\beta} = \frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} = \frac{1}{2}$. Comme $\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}$ aussi, on en déduit $\beta = 1$. On obtient alors γ par la relation pour $h = h_1$ trouvée précédemment $\gamma = \alpha(h_1)h_1$: elle donne $1,22 \cdot 10^{-9}$ (sans unité).

20.17

Agrégat moléculaire

Un exercice sur les forces centrales, dans le cadre du programme, est un problème à deux corps. Dans votre cours, vous vous êtes limités au cas où l'un des deux corps est beaucoup plus lourd que l'autre, de sorte que le référentiel d'étude se ramène au référentiel barycentrique.

Cet exercice montre comment les choses se passent dans le cas général : il suffit de passer dans (R^*) et de raisonner non pas sur le corps le plus léger, mais sur le mobile fictif.

Une bonne partie des questions vous fera réviser votre cours du chapitre 19.

1. b a même dimension que r , donc il est homogène à une longueur. Donc ε est homogène à une énergie.
2. Le système est isolé donc son référentiel barycentrique est galiléen.
3. Le système étant isolé, son moment cinétique est un invariant du mouvement.

Comme en outre la seule force intérieure est conservative, l'énergie mécanique est aussi un invariant.

4. La force qui dérive de E_p s'écrit :

$$\begin{aligned} F(r) &= -\frac{dE_p}{dr}(r) \\ &= -4\varepsilon \left(-\frac{12b^{12}}{r^{13}} + \frac{6b^6}{r^7} \right) \end{aligned}$$

Cette force est nulle pour $r_0 = \sqrt[6]{2}b$. Les deux atomes sont alors à distance fixe l'un de l'autre. Cette position d'équilibre est stable si :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_p}{dr^2}(r_0) &\geq 0 \\ \frac{4\varepsilon}{b^2} \left(\frac{156b^{14}}{r_0^{14}} - \frac{42b^8}{r_0^8} \right) &\geq 0 \end{aligned}$$

Cette inégalité est bien vérifiée par $r_0/b = \sqrt[6]{2}$ donc la position d'équilibre est stable.

5. Écrivons le PFD pour chacun des deux atomes dans (R^*) :

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}_1}{dt} &= \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ m \frac{d\vec{v}_2}{dt} &= \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \end{aligned}$$

en notant $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ et $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ les forces que les atomes exercent l'un sur l'autre. Ces forces sont opposées d'après la troisième loi de Newton.

En soustrayant ces deux équations il vient

$$\begin{aligned} m \frac{d(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{dt} &= 2\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ m \frac{d^2 \vec{M}_1 \vec{M}_2}{dt^2} &= \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \end{aligned}$$

En posant $\vec{GM} = \vec{M}_1 \vec{M}_2$, ceci se lit comme le PFD dans (R^*) d'un point matériel M de masse $\mu = m/2$ soumis à une force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$.

6. Le moment cinétique du mobile fictif s'écrit :

$$\vec{L} = \mu \vec{p} \wedge \vec{v}$$

Comme c'est un invariant, cette formule implique que \vec{p} et \vec{v} restent toujours dans un plan perpendiculaire à \vec{L} , donc le mouvement est plan.

Munissons ce plan d'un système de coordonnées polaires. Alors :

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \mu \rho \vec{e}_r \wedge (\dot{\rho} \vec{e}_r + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \\ &= \mu \rho^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \end{aligned}$$

La norme du moment cinétique est constante, d'où la constante des aires $C = \|\vec{L}\|/m$:

$$C = \rho^2 \dot{\theta}$$

La loi des aires est donc vérifiée pour M et donc pour M_1 et M_2 .

7. L'énergie mécanique du système s'écrit, en remarquant qu'ici $r = \rho$:

$$E_m = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 + E_p(\rho)$$

En outre, par définition du centre d'inertie :

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \frac{d\vec{GM}_1}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} \vec{GM} \right) \\ \vec{v}_1 &= -\frac{\vec{v}}{2} \end{aligned}$$

De même :

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{v}}{2}$$

Donc l'énergie mécanique peut se réécrire :

$$E_m = \frac{1}{4}mv^2 + E_p(\rho)$$

Exprimons la vitesse en M en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{4}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + E_p(\rho) \\ &= \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\mu\frac{C^2}{\rho^2} + E_p(\rho) \end{aligned}$$

Le premier terme dépend de $\dot{\rho}$ et les suivants de ρ . Ces derniers forment donc une grandeur appelée énergie potentielle effective :

$$\begin{aligned} E_{p\text{eff}} &= \frac{1}{2}\mu\frac{C^2}{\rho^2} + E_p(\rho) \\ &= \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu\rho^2} + 4\varepsilon\left(\left(\frac{b}{\rho}\right)^{12} - \left(\frac{b}{\rho}\right)^6\right) \end{aligned}$$

Le terme en ρ^{-2} étant toujours positif, $E_{p\text{eff}} \leq E_m$. Cette inégalité détermine les valeurs de ρ accessibles.

8. Aux très petites valeurs de ρ , c'est le terme en $1/\rho^{12}$ qui domine, donc le profil de potentiel est fortement décroissant. Aux grandes valeurs de ρ , c'est le terme en $1/\rho^2$ qui domine et tend vers zéro en décroissant.

Comme la fonction $E_{p\text{eff}}$ n'est pas monotone (d'après l'énoncé), elle doit donc décroître, passer par un minimum, puis croître, passer par un maximum, et enfin décroître jusqu'à tendre vers zéro. D'où le profil de la figure 20.13.

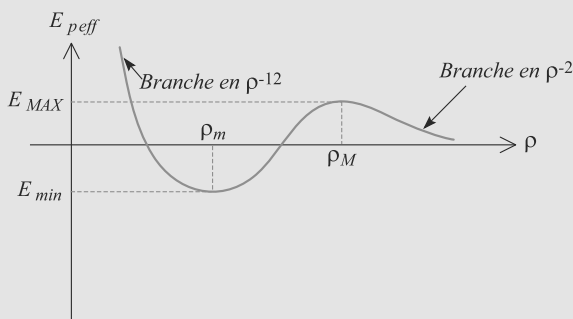


Figure 20.13 Profil de potentiel pour l'agrégat moléculaire.

La figure montre aussi l'état du système selon les valeurs de E_m , compte tenu du fait que $E_{p\text{eff}} \leq E_m$:

- Si $E_{\min} < E_m < 0$, alors ρ est limité à un petit intervalle de valeurs. Il s'agit d'un état lié, la molécule vibre sans se rompre, la longueur de la liaison oscillant autour de la valeur ρ_m .

- Si $0 < E_m < E_{\max}$, le système est dans un état lié comme précédemment si $\rho < \rho_M$ ou dans un état de diffusion si $\rho > \rho_M$.
- Si $E_{\max} < E_m$, le système est dans un état de diffusion et ρ ne peut pas être plus petit qu'une certaine valeur (distance minimale d'approche).

20.18

Mouvement d'une particule dans une cuvette parabolique

Malgré son apparence atypique, cet exercice suit littéralement le déroulement d'un cours sur les forces centrales. Il constitue donc, pour vous, un excellent moyen de savoir si vous avez réellement compris la logique de ce chapitre. Ainsi, il doit vous permettre de distinguer ce qui est raisonnement général et ce qui est résultat spécifique à tel ou tel cas particulier.

Si vous éprouvez des difficultés à le résoudre, utilisez sa structure très explicite pour vous reporter à la partie de cours correspondante et vous en inspirer.

Quand vous aurez mené les calculs demandés, demandez-vous où est la force centrale dans cet exercice. Ce n'est pas une force newtonienne comme vu en cours, mais elle a des propriétés similaires.

1. a) Par définition, $\vec{L}_O = m\vec{OM} \wedge \vec{v}$ où \vec{v} est la vitesse de M . Donc :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z \\ &= \dot{\rho}\left(\vec{e}_\rho + \frac{2\rho}{a}\vec{e}_z\right) + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \Rightarrow \vec{L} &= m(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z) \wedge (\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z) \\ &= -m\rho z\dot{\theta}\vec{e}_\rho + m(z\dot{\rho} - \rho\dot{z})\vec{e}_\theta + m\rho^2\dot{\theta}\vec{e}_z \end{aligned}$$

D'où la projection $L = m\rho^2\dot{\theta}$.

- b) Écrivons le théorème du moment cinétique pour M rapport à O . M est soumis à son poids $m\vec{g}$ et à la réaction de son support \vec{R} :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(m\vec{g}) + \vec{M}_O(\vec{R})$$

Comme il n'y a pas de frottement, \vec{R} est normale au paraboloïde donc n'a pas de composante selon \vec{e}_θ : $\vec{R} = R_\rho\vec{e}_\rho + R_z\vec{e}_z$. D'où :

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(m\vec{g}) &= (\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z) \wedge (-mg\vec{e}_z) \\ &= mgz\vec{e}_\theta \\ \vec{M}_O(\vec{R}) &= (\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z) \wedge (R_\rho\vec{e}_\rho + R_z\vec{e}_z) \\ &= (zR_\rho - \rho R_z)\vec{e}_\theta \end{aligned}$$

D'où le théorème :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = (mgz + zR_\rho - \rho R_z)\vec{e}_\theta$$

Donc il n'y a pas de variation de \vec{L}_O selon \vec{e}_z : la composante correspondante est constante au cours du mouvement. Donc $\rho^2 \dot{\theta} = \text{cst}$.



Ce résultat est bien sûr la loi des aires.

2. a) Avec l'expression de \vec{v} précédemment utilisée :

$$E_c = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

b) Le poids est conservatif et la réaction de support ne travaille pas car il n'y a pas de frottement. Donc le système est conservatif et l'énergie potentielle se réduit à celle du poids. Avec la convention imposée :

$$E_p = mgz = \frac{mg\rho^2}{a}$$

3. a) L'énergie mécanique de M vaut :

$$E_m = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{mg\rho^2}{a}$$

Calculons les termes faisant intervenir d'autres variables que ρ :

$$\dot{z}^2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho^2}{a} \right)^2 = \frac{4\rho^2 \dot{\rho}^2}{a^2}$$

$$\rho^2 \dot{\theta}^2 = \frac{\rho^4 \dot{\theta}^2}{\rho^2} = \frac{L^2}{m^2 \rho^2}$$

D'où l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \underbrace{\left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2} \right)}_{G(\rho)} + \underbrace{mg \frac{\rho^2}{a} + \frac{L^2}{2m\rho^2}}_{E_{\text{peff}}(\rho)}$$

- b) Voir figure 20.14.

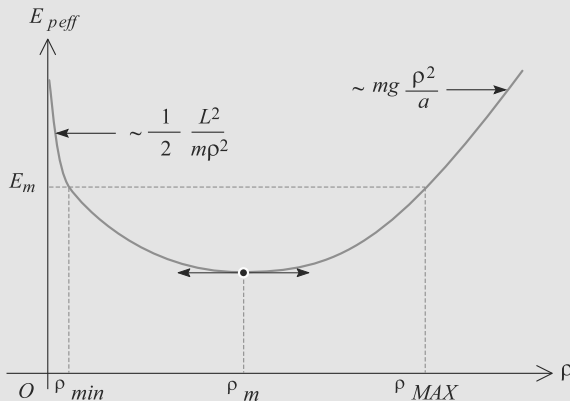


Figure 20.14 Profil de potentiel dans une cuvette parabolique.

Dérivons E_{peff} pour repérer le minimum :

$$\frac{dE_{\text{peff}}}{d\rho}(\rho_m) = 2mg \frac{\rho_m}{a} - \frac{L^2}{m\rho_m^3} = 0$$

$$\Rightarrow \rho_m = \left(\frac{L^2 a}{2m^2 g} \right)^{\frac{1}{4}}$$

L'énergie mécanique est constante et à tout moment $E_{\text{peff}} \leq E_m$. Les valeurs autorisées pour ρ sont donc mises en évidence en traçant la droite horizontale correspondant à E_m .

Il existe donc deux valeurs extrêmes ρ_{\min} et ρ_{\max} encadrant le mouvement, définies par l'égalité $E_{\text{peff}} = E_m$.

4. a) Si la trajectoire est circulaire, ρ est constant. Il n'y a aucune force tangente au mouvement donc l'accélération tangentielle est nulle. Donc le mouvement est circulaire uniforme.

Les projections du PFD sur \vec{e}_ρ et \vec{e}_z donnent alors :

$$-m \frac{v^2}{\rho} = -R_\rho$$

$$0 = R_z - mg$$

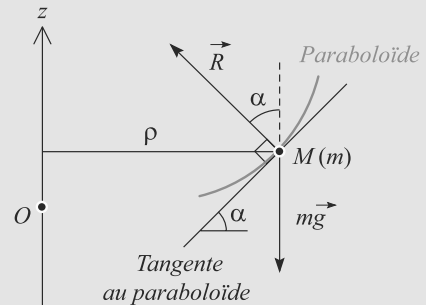


Figure 20.15 Angle entre la réaction et la verticale.

La figure 20.15 introduit l'angle α entre \vec{R} et la verticale. C'est aussi la pente de la courbe $z(\rho)$ donc :

$$\tan(\alpha) = \frac{dz}{d\rho} = \frac{2\rho}{a} = \frac{R_\rho}{R_z}$$

En combinant ces relations, il vient le résultat demandé :

$$v = \rho \sqrt{\frac{2g}{a}}$$

- b) L'équation du mouvement s'obtient en dérivant l'énergie mécanique :

$$m\ddot{\rho} \left(1 + 4\frac{\rho^2}{a^2} \right) + \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \frac{8\rho}{a^2} + 2mg \frac{\rho}{a} - \frac{L^2}{m\rho^3} = 0$$

Remplaçons ρ par $\rho_m + \varepsilon$. Comme $\varepsilon \ll 1$, il est possible de faire les développements limités à l'ordre 1 :

$$\ddot{\rho}^2 \simeq \ddot{\varepsilon}(\rho_m^2 + 2\rho_m\varepsilon) \simeq \ddot{\varepsilon}\rho_m^2$$

$$\dot{\rho}^2 \simeq \dot{\varepsilon}^2(\rho_m + \varepsilon) \simeq \dot{\varepsilon}^2\rho_m$$

$$\rho^3 = (\rho_m + \varepsilon)^3 \simeq \rho_m^3 \left(1 + 3\frac{\varepsilon}{\rho_m} \right)$$

Le terme $\dot{\rho}^2\rho$ n'est non nul qu'à l'ordre 2, il sera donc négligé ici. Il reste :

$$\ddot{\varepsilon} + \left(\frac{2mg}{a} + \frac{3L^2}{m\rho_m^4} \right) \varepsilon = 0$$

C'est l'équation différentielle gouvernant un oscillateur harmonique, donc la pulsation ω est donnée par la racine du coefficient de ε . Il faut calculer L pour en déduire sa période.

$$L = m\rho_m v = m\rho_m^2 \sqrt{\frac{2g}{a}}$$

La période est donnée par $T = 2\pi/\omega$, soit :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a \left(1 + \frac{4\rho_m^2}{a^2} \right)}{8g}} = 1,42 \text{ s}$$

Plan

21.1	Cinématique de deux cas particuliers	328
21.2	Compléments de dynamique	331
21.3	Quelques référentiels	332
	Synthèse	335
	Tests et exercices	336
	Corrigés des exercices	341

Introduction

Vous avez déjà vu un certain nombre de résultats de ce chapitre dans votre cours de Sciences de l'ingénieur. Seuls des cas particuliers sont utiles au cours de physique cette année.

Rappelons qu'un référentiel est défini, entre autre, par la donnée de trois axes et d'une origine **fixes** par rapport à lui.

Sauf mention contraire, (R) et (R') désigneront deux référentiels quelconques. L'origine de (R) est notée O et ses axes fixes (Ox, Oy, Oz) , ceux de (R') O' et $(O'x', O'y', O'z')$.



Soyez très rigoureux avec le mot « fixe » : les axes fixes d'un référentiel sont, par définition, fixes par rapport à ce référentiel. Ils n'ont aucune raison de l'être par rapport à un autre référentiel.

Prérequis

- PFD
- Énergie en référentiel galiléen
- Cinématique

Objectifs

- Déterminer les relations permettant de passer les vitesses et accélérations d'un référentiel à un autre
- Distinguer les référentiels galiléens et non galiléens
- Exprimer les lois de mécanique dans un référentiel non galiléen (cas de la translation pure et de la rotation pure)
- Définir les référentiels de Kepler, de Copernic, géocentriques et terrestre
- Discuter la nature du champ de pesanteur terrestre

21.1 Cinématique de deux cas particuliers

21.1.1 Notion de point coïncident

Les formules qui suivent sont plus faciles à retrouver si vous exploitez la notion de point coïncident.

Méthode 1 Exploiter le point coïncident

Lors de l'étude du mouvement d'un point M dans un référentiel (R') , le **point coïncident avec M à l'instant t** est un point fictif qui est confondu avec M à l'instant t mais est immobile dans (R') .

Le mouvement de ce point coïncident dans un autre référentiel (R) est donc conditionné seulement par le mouvement de (R') par rapport à (R) .

1. Le mouvement précis de M dans (R') n'a pas besoin d'être connu, mais il faut savoir où se trouve M et avoir identifié le mouvement de (R') par rapport à (R) .
2. Imaginez que M soit arrêté dans son mouvement dans (R') et regardez quel mouvement lui reste dans (R) .

Figure 21.1 : le point coïncident $I(t_1)$ à un instant t_1 n'a pas la même trajectoire que M et donc ne coïncide plus avec lui à un instant ultérieur t_2 . C'est un autre point $I(t_2)$ qui joue alors ce rôle.

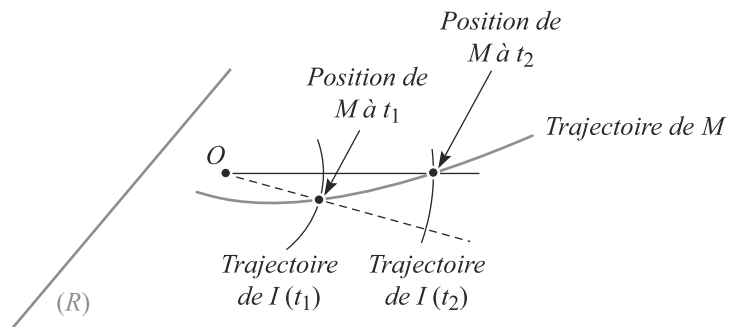


Figure 21.1 Le point coïncident change à chaque instant.

Les deux paragraphes suivants contiennent chacun un exemple pour les deux cas exigibles d'après le programme.

21.1.2 Cas de la translation pure rectiligne

(R') est en translation pure par rapport à (R) si ses axes fixes restent en permanence parallèles à ceux de (R) (figure 21.2). La translation est dite rectiligne si O' est en mouvement rectiligne dans (R) .

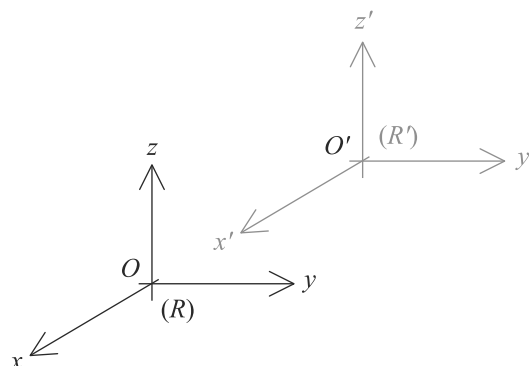


Figure 21.2 Translation pure : dans (R) , O' se déplace mais les axes de (R') ne tournent pas.



Les deux référentiels ont un mouvement particulier l'un par rapport à l'autre, mais cela n'a rien à voir avec le mouvement de M ! Ne confondez pas les mouvements des observateurs et celui de l'objet observé...

Soit un point M en mouvement quelconque. Alors :

Lois

Lois de composition des vitesses et des accélérations pour une translation pure rectiligne :

$$\vec{v}(M)_{(R)} = \vec{v}(M)_{(R')} + \vec{v}(O')_{(R)}$$

$$\vec{a}(M)_{(R)} = \vec{a}(M)_{(R')} + \vec{a}(O')_{(R)}$$

$\vec{v}(O')_{(R)}$ est appelée **vitesse d'entraînement** et $\vec{a}(O')_{(R)}$ **accélération d'entraînement** dans le cas de la translation rectiligne.

Point coïncident

Considérons par exemple une voiture M en mouvement rectiligne accéléré. (R) est choisi comme le référentiel terrestre, lié à la route, et (R') comme lié à la voiture. Donc $O' = M$ à tout instant.

D'après les formules précédentes, la vitesse et l'accélération d'entraînement sont celles de O' dans (R) , donc tout simplement la vitesse et l'accélération de la voiture par rapport à la route.

Si nous utilisons la notion de point coïncident, nous trouvons le même résultat. En effet, M étant immobile dans (R') , il est son propre point coïncident.

21.1.3 Cas de la rotation pure uniforme

(R') est en rotation uniforme par rapport à (R) si O' est fixe dans (R) . Il est alors possible de choisir les axes Oz et $O'z'$ comme confondus. Les axes fixes $O'x'$ et $O'y'$ sont alors en rotation autour de Oz (figure 21.3).

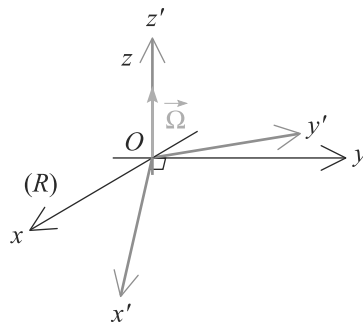


Figure 21.3 Rotation pure : dans (R) , O est fixe mais les axes de (R') tournent.

Cette rotation est dite uniforme si elle se fait à vitesse angulaire constante ω . Alors :

Lois

Lois de composition des vitesses et des accélérations pour une rotation pure uniforme :

$$\vec{v}(M)_{(R)} = \vec{v}(M)_{(R')} + r\omega \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a}(M)_{(R)} = \vec{a}(M)_{(R')} - r\omega^2 \vec{e}_r + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{(R')}$$

Le vecteur $\vec{\Omega} = \omega \vec{e}_z$ s'appelle le vecteur rotation de ce mouvement. Reportez-vous à votre cours de Sciences de l'ingénieur pour le détail de ses propriétés.

$r\omega \vec{e}_\theta$ est appelée **vitesse d'entraînement** et $-r\omega^2 \vec{e}_r$ **accélération d'entraînement** dans le cas de la rotation pure uniforme.

Le terme $\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{(R')}$ est appelé **accélération de Coriolis**.

Point coïncidant

Considérons un manège, modélisé comme un disque horizontal en rotation uniforme. Un technicien M se déplace du centre vers le bord, en suivant un rayon, alors que le manège fonctionne. (R) est un référentiel lié au sol et (R') est lié au manège tournant avec lui.

Dans (R') , M décrit une trajectoire rectiligne.

À un instant t , M se trouve à une distance $r(t)$ du centre du manège. Alors, s'il est immobile dans le manège, sa trajectoire dans (R) serait un cercle de rayon $r(t)$. C'est la trajectoire du point coïncidant I , qui est donc circulaire uniforme. Sa vitesse et son accélération sont données par les formules bien connues :

$$\vec{v} = r\omega \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -r\omega^2 \vec{e}_\rho$$

ce qui redonne bien les formules précédemment établies.

21.1.4

Bilan

Dans les deux cas, nous pouvons écrire :

$$\vec{v}(M)_{(R)} = \vec{v}(M)_{(R')} + \vec{v}_e$$

$$\vec{a}(M)_{(R)} = \vec{a}(M)_{(R')} + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

où \vec{v}_e est la vitesse d'entraînement, \vec{a}_e l'accélération d'entraînement et \vec{a}_c l'accélération de Coriolis. Ces deux premiers termes se déterminent en considérant le point coïncidant.



La base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ définie dans (R) coïncide à chaque instant avec la base cartésienne $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'})$ définie dans (R') .

21.2 Compléments de dynamique

21.2.1 Principe de relativité galiléenne

Si deux référentiels sont galiléens, le PFD est identique dans les deux. Les lois de la physique s'y écrivent donc de la même manière : c'est le **principe de relativité galiléenne**.

Cela est lié au fait que deux référentiels galiléens sont nécessairement en translation pure rectiligne **uniforme** l'un par rapport à l'autre.

21.2.2 Principe fondamental de la dynamique



Rappelez-vous que les forces sont indépendantes du référentiel. Il est donc inutile de préciser dans quel référentiel elles sont définies.

Soit (R_g) un référentiel galiléen. Le PFD s'y écrit $m\vec{a}(M)_{(R_g)} = \vec{F}$.

Soit (R) un référentiel quelconque (pas forcément galiléen). D'après ce qui précède, partant du PFD dans (R_g) , il est possible d'écrire un PFD dans (R) , au prix de deux termes supplémentaires :

PFD dans un référentiel non galiléen :

$$m\vec{a}(M)_{(R)} = \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e & \text{force d'inertie d'entraînement} \\ \vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c & \text{force de Coriolis} \end{cases}$$



La notion de référentiel galiléen reste fondamentale. Ce PFD généralisé n'a pu être établi qu'en partant du PFD en référentiel galiléen.

Ces deux nouvelles forces ne sont pas de vraies forces. D'ailleurs, elles dépendent du référentiel, ce qui n'est pas le cas des autres, et elles n'ont pas de source. Elles ne servent qu'à traduire le caractère non galiléen du référentiel.

21.2.3 Équilibre dans un référentiel non galiléen

Un point matériel est en équilibre dans (R) si son accélération $\vec{a}(M)_{(R)}$ et sa vitesse $\vec{v}(M)_{(R)}$ y sont nulles. Son accélération de Coriolis est alors nulle aussi, mais pas son accélération d'entraînement :

Condition d'équilibre en référentiel non galiléen :

$$\vec{F} - m\vec{a}_e = \vec{0}$$

21.2.4 Théorème du moment cinétique

La démonstration n'a pas changé, nous avons seulement deux termes de plus du côté des forces :

Théorème du moment cinétique en référentiel non galiléen :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{(R)} = \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{F}_{ie}) + \vec{M}_O(\vec{F}_{ic})$$

21.2.5 Énergétique

La force de Coriolis ne travaille jamais, donc le théorème de l'énergie cinétique se généralise en :

Théorème de l'énergie cinétique en référentiel non galiléen :

$$\Delta E_c = W(\vec{F}) + W(\vec{F}_{ic})$$

\vec{F}_{ic} étant en général non conservative, le théorème de l'énergie mécanique devient :

Théorème de l'énergie mécanique en référentiel non galiléen :

$$\Delta E_m = W_{nc}(\vec{F}) + W(\vec{F}_{ic})$$



Dans le cas particulier d'une rotation pure uniforme, la force d'inertie d'entraînement dérive d'un potentiel. Reportez-vous à l'exercice 13.

Méthode 2 Traiter un problème de dynamique en référentiel non galiléen

Les théorèmes généraux s'utilisent comme d'habitude, en ajoutant les forces d'inertie.

- La force d'inertie d'entraînement se calcule à partir de l'accélération d'entraînement.
- La force de Coriolis se calcule par sa définition $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{(R')}$.

Le mouvement de (R') par rapport à (R) se ramène toujours, à ce niveau d'étude, à un mouvement rectiligne ou à un mouvement circulaire uniforme. Ce qu'il faut savoir par cIJur, outre la manière d'utiliser le point coïncidant dans ces deux cas :

- Mouvement rectiligne : $\vec{F}_{ic} = \vec{0}$.
- Mouvement circulaire uniforme : $\vec{F}_{ic} = m\omega^2 \overrightarrow{HM}$, où H est le projeté de M sur l'axe de rotation, est appelée **force centrifuge**. Cette force est alors conservative.

21.3 Quelques référentiels

21.3.1 Référentiel de Copernic



Le fait que ces étoiles paraissent fixes correspond au phénomène de parallaxe. Vous l'observez aussi, dans un véhicule, quand le paysage lointain sur les côtés paraît ne pas défiler.



Les axes fixes du référentiel de Copernic ne sont pas fixes par rapport au soleil ! Ce référentiel n'est pas lié au soleil.

Définition

Un **référentiel de Copernic** est défini par :

- Une Origine : le centre d'inertie du système solaire, pratiquement confondu avec le centre du soleil.
- Trois Axes fixes : dirigés vers trois étoiles tellement lointaines qu'elles paraissent fixes même sur de grandes échelles de temps.

Le référentiel de Copernic est la meilleure approximation de référentiel galiléen utilisée, puisqu'il n'existe aucun référentiel strictement galiléen en réalité.

21.3.2 Référentiels de Kepler, héliocentrique, géocentrique

Définition

Un **référentiel de Kepler** d'un astre quelconque est défini par :

- Une Origine : le centre de l'astre.
- Trois Axes fixes : trois axes qui restent en permanence parallèles à ceux du référentiel de Copernic.

Le référentiel de Kepler du soleil est appelé **référentiel héliocentrique**. Il est pratiquement confondu avec le référentiel de Copernic, puisque les origines de ces deux référentiels sont très proches.

Le référentiel de Kepler de la Terre est appelée **référentiel géocentrique**. Il n'est pas galiléen car le centre de la Terre est en translation elliptique (et non rectiligne) par rapport au référentiel de Copernic.

Il est approximativement galiléen pour des expériences de durée faible devant une année, quand le déplacement de la Terre par rapport au soleil peut être négligé.

21.3.3 Référentiel terrestre local

Définition

Un **référentiel terrestre local** est défini comme lié à la Terre, soit :

- Origine : un point de la Terre, par exemple un point de la surface à proximité de l'endroit où se déroule l'expérience.
- Axes fixes : trois axes qui suivent la Terre dans sa rotation propre.

Ce référentiel n'est donc pas galiléen. Il est en rotation pure par rapport au référentiel géocentrique. Il est approximativement galiléen pour des durées faibles devant 24 h, quand la rotation de la Terre peut être négligée.

Définition de la verticale et du poids :

La verticale est la direction d'un pendule en équilibre à la surface de la Terre soumis seulement à son poids (et, sous-entendu, à la tension de son fil et à la force d'inertie d'entraînement).

La résultante des forces auxquelles est soumis le pendule de masse m est noté $\vec{P} = m\vec{g}$. Elle est appelée **poids** du pendule. \vec{g} est appelée **accélération de la pesanteur**.

En notant O le centre de la Terre, M le pendule, M_T la masse de la Terre et $\vec{OM} = r\vec{e}_r$:

$$\vec{P} = -\left(G\frac{M_T}{r^2}\right)m\vec{e}_r - m\vec{a}_e$$



C'est ce référentiel que vous avez presque toujours pris, même sans le dire, par le passé dans vos exercices de mécanique.



Avec l'approximation que le référentiel terrestre local est galiléen, $\vec{a}_e = \vec{0}$, ce qui redonne la définition habituelle.

D'où la définition :

Définition

Le **vecteur accélération de la pesanteur** est défini par :

$$\vec{g} = -\left(\mathcal{G} \frac{M_T}{r^2}\right) \vec{e}_r - \vec{a}_e$$

Le décalage de la verticale dû à la rotation de la Terre est illustré figure 21.4 avec les notations :

$$\vec{G}_T(M) = -\left(\mathcal{G} \frac{M_T}{r^2}\right) \vec{e}_r$$

$$\Omega^2 \overrightarrow{HM} = -\vec{a}_e$$

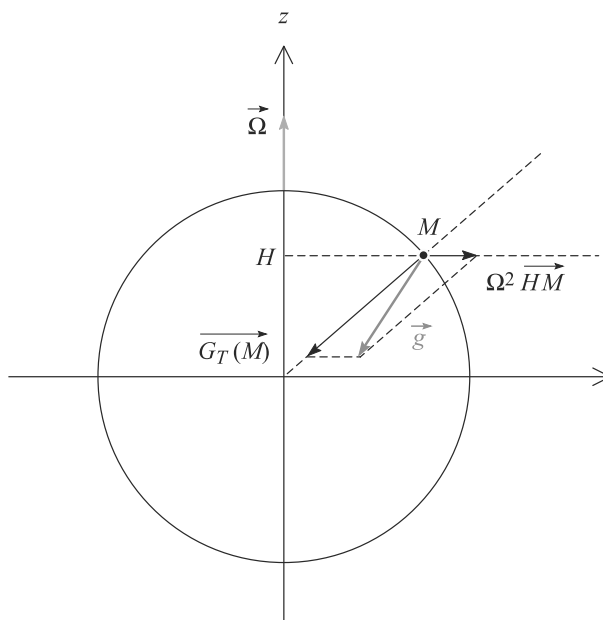


Figure 21.4 Direction de la verticale prenant en compte la rotation de la Terre.

Méthode 3 Écrire le PFD dans le référentiel terrestre

Quand le référentiel terrestre n'est pas supposé galiléen, la force d'inertie d'entraînement est incluse dans la définition du poids. Attention donc à ne pas l'oublier, ni à la compter deux fois ! Le PFD s'écrit :

$$m\vec{a}(M)_{(R)} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_{ic}$$

où \vec{F} contient toutes les autres forces (autres que le poids) s'exerçant sur M .

Synthèse

Savoirs

- Loi de composition des vitesses et des accélérations
- Principe de la relativité galiléenne
- Les référentiels de Kepler, de Copernic, géocentriques et terrestre
- Nature du champ de pesanteur

Savoir-faire

- Critères rendant un référentiel approximativement galiléen
- Reconnaître le mouvement relatif de deux référentiels dans le cas d'une translation pure rectiligne et celui d'une rotation pure uniforme
- Exprimer les lois de mécanique dans un référentiel non galiléen
- Exprimer les forces d'inertie dans un référentiel non galiléen

Mots-clés

- Référentiel galiléen,
- référentiel non galiléen,
- forces d'inertie,
- invariance galiléenne,
- pesanteur.

Tests de connaissances

- 21.1 Les forces d'inertie décrivent une interaction newtonienne.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 21.2 Pour un référentiel non galiléen, l'accélération d'entraînement est la même quel que soit le référentiel galiléen de référence.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 21.3 Dans un référentiel non galiléen en translation, la force de Coriolis est nulle.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 21.4 La force de Coriolis est une force dérivant d'un potentiel.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 21.5 Tout référentiel peut être considéré comme galiléen pour décrire un phénomène assez court
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 21.6 En rotation, la force de Coriolis est la « force centrifuge ».
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 21.7 Dans le système solaire, le référentiel de Kepler est « le plus galiléen » des référentiels.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 21.8 Dans le référentiel terrestre, le PFD n'inclut pas de force d'inertie d'entraînement car c'est un référentiel en rotation pure par rapport aux référentiels galiléens.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 21.9 Les forces d'inertie n'étant pas de vraies forces, elles ne peuvent dériver d'un potentiel.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 21.10 Le travail de la force de Coriolis est toujours négatif.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

21.11 Pendule dans un camion qui démarre

Un camion démarre avec une accélération constante \vec{a}_0 avec $a_0 = 1 \text{ m.s}^{-2}$ dans le référentiel terrestre lié à la route (supposé galiléen). Au bout d'une corde (de masse négligeable et de longueur $l = 1 \text{ m}$) fixée au toit du camion est suspendue une masse $m = 10 \text{ kg}$ repérée par un point M (figure 21.5).

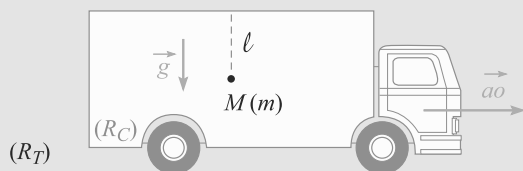


Figure 21.5 Pendule dans un camion qui démarre.

L'accélération de la pesanteur est notée \vec{g} de norme $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

Un passager du camion observe le mouvement de ce pendule, au repos à l'instant du démarrage du camion.

1. Faire le bilan des forces s'appliquant sur M dans le référentiel lié au camion.
2. Déterminez la position de repos de M . Application numérique : calculez l'angle θ_{eq} que fait le pendule avec la verticale dans ce cas.
3. Soit Oz' l'axe descendant le long de cette direction et θ' l'angle que fait le pendule avec Oz' .

a) Déterminez l'équation différentielle gouvernant $\theta'(t)$.

Vous poserez $g' = \sqrt{g^2 + a_0^2}$. Résolvez cette équation dans le cas des petites oscillations.

b) En vous basant sur l'équation du mouvement du pendule simple, donnez le sens physique de g' lors de la phase d'accélération constante du camion.

c) Application numérique : calculez g' et T'_0 la période des oscillations du pendule.

21.12 Stabilité de l'orbite d'un satellite
 (D'après Mines de première année PC.)

Tous les 11 ans en moyenne, le Soleil (de masse M_S) est le siège de brutales éruptions qui éjectent de grandes quantités de particules chargées. Quand ce « vent solaire » atteint la Terre, il peut provoquer des perturbations importantes des télécommunications hertziennes. Des satellites sont donc placés entre le Soleil et la Terre, pour surveiller ces éruptions. Le référentiel d'étude (R) est choisi comme centré sur le Soleil S , avec trois axes fixes (Sx, Sy, Sz) tels que le plan du mouvement de la Terre soit xSy . Ce référentiel tourne autour de Sz par rapport au référentiel de Kepler du Soleil, de sorte que la Terre est toujours sur l'axe Sx .

Le mouvement de la Terre T (masse M_T) est supposé circulaire de rayon R et de vitesse angulaire constante Ω .

Le satellite de surveillance P , de masse m , est placé sur une orbite circulaire à une distance d de la Terre de sorte que P , S et T soient toujours alignés (figure 21.6).

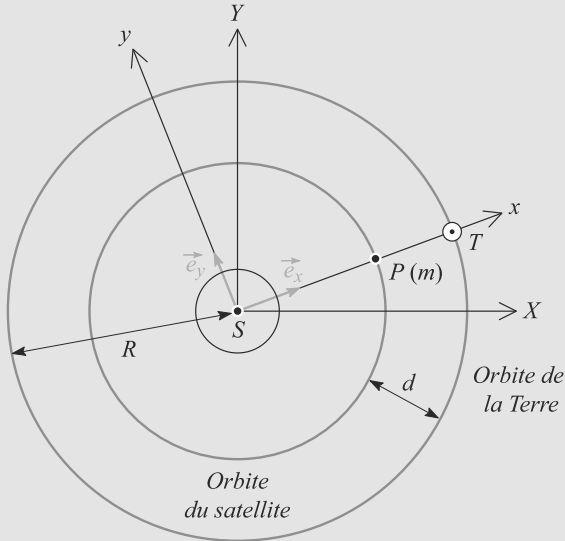


Figure 21.6 Stabilité de l'orbite d'un satellite.

1. Le référentiel (R) est-il galiléen ?
2. Écrivez la condition d'équilibre du satellite dans le référentiel d'étude, en fonction de la constante de gravitation \mathcal{G} , M_S , M_T , R et d .
3. Résolvez cette équation en d , sachant que $d \gg R$. Application numérique.
Indication : $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ pour $|x| \ll 1$.
4. Discutez qualitativement la stabilité de cette position d'équilibre vis-à-vis de petites perturbations supposées avoir lieu le long de l'axe Sx .

Données : $R = 150 \cdot 10^6$ km ; $M_S = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg ;
 $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg

21.13 Ressort horizontal dans un manège

Un ressort est placé sur le plateau d'un manège tournant avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe Oz dans le référentiel terrestre supposé galiléen (figure 21.7). La constante de raideur du ressort est notée k et sa longueur à vide l_0 .

Il est fixé en A à une extrémité et relié à un point matériel M de masse m astreint à se déplacer suivant le rayon OA du plateau. On note $OA = a$.

1. Rappelez la force exercée par le ressort sur M et l'énergie potentielle E_{pe} dont elle dérive.

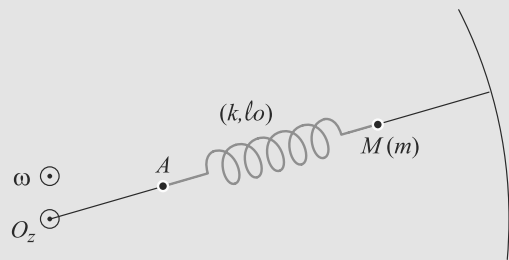


Figure 21.7 Ressort horizontal dans un manège.

2. Montrez que les forces d'inertie dérivent d'un potentiel dans ce problème et calculez l'énergie potentielle E_{pi} dont elles dérivent.
3. Déterminez s'il existe une position d'équilibre stable M_{eq} pour M sur le plateau.
4. Quelle est, dans ce cas, la période des petites oscillations autour de M_{eq} ?
5. Comment choisir k/m pour que ce dispositif permette de contrôler que le manège ne dépasse pas une vitesse angulaire ω_c choisie ?

Exercices d'approfondissement

21.14 Pendule paramétrique

(D'après ENSTIM)

Un pendule simple est constitué d'un point matériel M de masse m , placé à l'extrémité d'un fil inextensible, de longueur l et de masse négligeable. L'autre extrémité du fil est fixée en O' qui oscille sinusoïdalement suivant la verticale, avec une

amplitude D_m et une pulsation ω :

$$\overrightarrow{OO'} = D_m \cos(\omega t) \vec{e}_x.$$

On désigne par θ l'angle que fait le pendule avec la verticale descendante (figure 21.8).

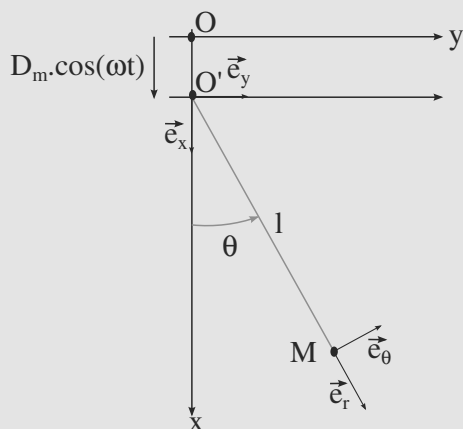


Figure 21.8 Oscillation du pendule paramétrique.

On suppose qu'il n'y a pas de frottement et que le fil reste constamment tendu. On note $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le référentiel terrestre supposé galiléen et $R'(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$ le référentiel lié au support du pendule.

1. Le référentiel R' est-il galiléen ?
2. En utilisant le théorème du moment cinétique en O' , écrire l'équation du mouvement dans R' .
3. Montrer que l'équation peut s'écrire :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2(1 + h(t)) \sin(\theta) = 0$$

Préciser ω_0 et $h(t)$ en fonction des données de l'énoncé.

4. Pour $\omega = 2\omega_0$, la résolution numérique de l'équation donne le résultat de la figure 21.9 :

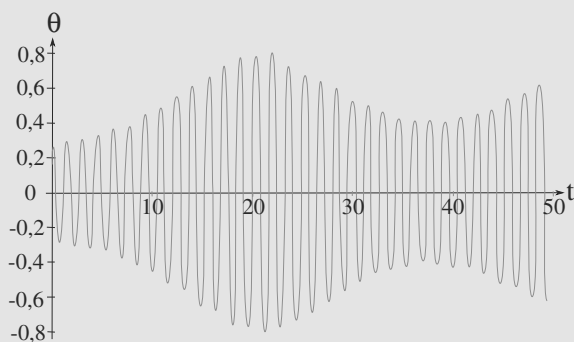


Figure 21.9 Évolution de θ en fonction du temps.

Pour un pendule simple non agité ($D_m = 0$), la période évolue en fonction de l'angle maximal θ_0 atteint lors de l'oscillation comme le montre la courbe de la figure 21.10 :

Comment peut-on interpréter les battements obtenus sur la courbe $\theta(t)$?

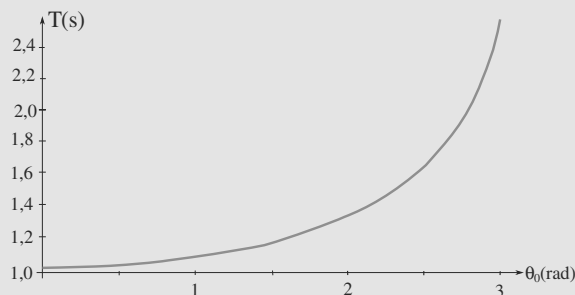


Figure 21.10 Période du pendule simple en fonction de l'angle maximal θ_0 .

■ ■ ■

21.15 Tir d'un obus vers le zénith

(D'après Mines de première année PCSL.)

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'effet du caractère non galiléen du référentiel terrestre sur le tir d'un obus vertical, via la force de Coriolis.

Le référentiel terrestre local est muni d'une origine O à la surface de la Terre (latitude λ) et d'une base cartésienne avec Oz marquant la verticale ascendante et Ox dans le plan méridien dirigé vers le sud. L'axe Oy en découle de sorte que la base cartésienne ainsi définie soit directe (figure 21.11).

Le vecteur rotation de la Terre est noté $\vec{\Omega}$, de norme Ω .

L'obus est noté M , de masse m . Il est lancé depuis une altitude h avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z$.

1. Supposons que le référentiel terrestre local est galiléen. Retrouvez rapidement la loi de vitesse $\vec{v}(t)$ dans la base cartésienne, ainsi que la loi horaire $z(t)$. À quelle date l'obus atteint-il le sol ?
2. Désormais et pour la toute la suite, le référentiel terrestre local n'est pas considéré comme galiléen.
 - a) Calculez numériquement la vitesse angulaire Ω dans les unités du système international.
 - b) Écrivez le PFD pour l'obus. Pourquoi la force d'inertie d'entraînement n'intervient-elle pas explicitement dans l'équation ?
 - c) Justifiez qu'il est possible de traiter la force de Coriolis comme une petite perturbation. Dans ces conditions, la vitesse qui intervient dans son expression sera prise égale à la valeur qu'elle aurait sans la force de Coriolis (l'erreur ainsi commise est supposée faible).



Un tel raisonnement, dit perturbatif, est d'usage fréquent en physique.

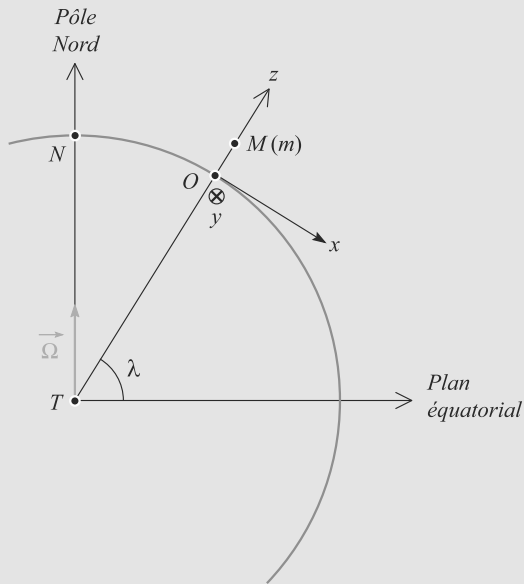


Figure 21.11 Paramétrage à la surface de la Terre.

d) Donnez les projections du PFD dans la base cartésienne. En particulier, établissez que :

$$\ddot{y} = -2\Omega(v_0 - gt) \cos(\lambda)$$

Pourquoi peut-on dire que la chute libre subit une **dévi-**
tion par rapport à la verticale ?

3. Supposons qu'il s'agit d'une chute libre sans vitesse initiale.
 - a) Dans quel sens se fait la déviation ? Vous donnerez la réponse comme une direction cardinale.
 - b) Calculez cette déviation lorsque l'obus touche le sol en fonction de Ω , λ , g et h .
 - c) En 1903, l'expérience de Flammarion a été faite avec un lâcher depuis une hauteur de 67 m au Panthéon à Paris (latitude $48^\circ 51'$ nord). Comparez la valeur expérimentale de 7,6 mm avec la prévision théorique. On donne $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.
 - d) Le résultat dépend-il de l'hémisphère où se déroule l'expérience ?
4. L'obus est maintenant tiré verticalement vers le haut. Étudiez l'évolution de la déviation pendant le mouvement et donnez sa valeur numérique quand l'obus retombe au sol pour $v_0 = 100 \text{ m.s}^{-1}$ et $h = 0$.
Indication : vous pourrez réutiliser la loi horaire $z(t)$ trouvée à la première question, pour les mêmes raisons que vous avez réutilisé la loi de vitesse.

21.16 Limite de Roche de Saturne

(D'après ENSAIT.)

Un satellite vagabond est capturé par le champ gravitationnel de Saturne. L'objet de cet exercice est de comprendre pourquoi il est détruit s'il s'approche trop de la planète. La distance à laquelle se produit ce phénomène s'appelle la **limite de Roche**.

Le satellite est modélisé par une sphère de masse M , de centre O et de rayon R . Il est supposé s'être placé sur une orbite circulaire de rayon r .

Saturne est modélisée par une sphère de centre S , de masse $M_S = 57,2 \cdot 10^{25} \text{ kg}$ et de rayon R_S .

1. Pour ces questions, l'étude est menée dans le référentiel « saturnocentrique », supposé galiléen.
 - a) Définissez en détail ce référentiel.
 - b) Déterminez l'accélération $\vec{a}(O)_S$ du centre du satellite en fonction de la constante de gravitation \mathcal{G} , M_S , r , R et $\vec{e}_r = \vec{SO}/r$.
 - c) Déterminez l'accélération $\vec{a}(M)_S$ du point M défini sur la figure 21.12 (tel que S , M et O soient alignés) et supposé solidaire du satellite.

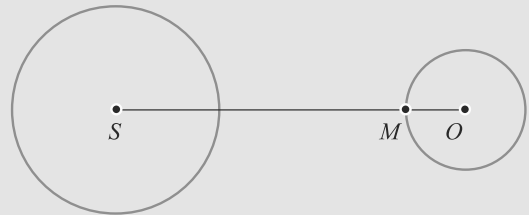


Figure 21.12 Mouvement d'un point à la surface d'un satellite.

2. Plaçons-nous maintenant dans le référentiel du satellite, centré sur O . En supposant que M est de masse m petite devant celle du satellite, déterminez son accélération $\vec{a}(M)_O$.
3. Quelle condition $\vec{a}(M)$ doit-elle satisfaire pour que M se détache du satellite ? Ce cas étant interprété comme la destruction du satellite, déterminez la limite de Roche r_{\max} , valeur maximale de r pour laquelle cela se produit, sachant que $R \ll r_{\max}$.

Vous donnerez r_{\max} sous la forme :

$$r_{\max} = \alpha R_S^3 \sqrt{\frac{\mu_S}{\mu}}$$

où μ_S est la masse volumique de Saturne, μ celle du satellite et α un coefficient sans dimension.

Donnez la valeur numérique de α .

4. Expérimentalement, la valeur trouvée pour α est un peu différente : $\alpha = 2,44$. Le système d'anneaux de Saturne s'étend jusqu'à $1,4 \cdot 10^5$ km du centre de la planète. Il est constitué de blocs de faible taille, sans cohésion entre eux.

Déduisez-en la valeur numérique du rayon de Saturne en supposant $\mu = \mu_S$.

5. En fait, $R_S = 6,033 \cdot 10^4$ km. Déduisez-en les valeurs de μ et μ_S . Commentez. En particulier, Saturne peut-elle avoir la même composition que la Terre ?

21.1

Faux, ce sont des pseudoforces d'origine inertielles.

21.2

Vrai car ces référentiels sont tous en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

21.3

Vrai.

21.4

Faux, son travail est toujours nul (elle n'est pas dissipative).

21.5

Vrai. Assez court signifiant pour qu'on puisse le considérer comme en translation rectiligne uniforme par rapport aux référentiels galiléens durant ce laps de temps.

21.6

Faux, c'est la force d'inertie d'entraînement qui est alors la force centrifuge.

21.7

Vrai, c'est celui qui tourne le moins (dans la mesure où on le confond avec le référentiel de Copernic).

21.8

Faux, ce n'est pas la bonne raison, c'est parce qu'elle est incluse dans le poids.

21.9

Faux. Même si ce ne sont pas de « vraies forces », elles peuvent dériver d'un potentiel (translation uniformément accélérée, rotation uniforme...)

21.10

Faux : il est toujours nul !

21.11

Pendule dans un camion qui démarre

Il s'agit d'un exercice de pendule. Vous devez d'ailleurs reconnaître la démarche : recherche de la position d'équilibre puis passage à une variable de position qui mesure l'écart à cette position d'équilibre pour retomber sur l'équation différentielle générale de l'oscillateur harmonique.

La seule nouveauté est l'ajout de la force d'inertie d'entraînement.

Pour comprendre ce qu'est g' , rappelez-vous ce qui compose g en dehors du champ de gravitation.

1. Le pendule est soumis à son poids et à la tension du fil, ainsi qu'aux forces d'inertie car le référentiel lié au camion n'est pas galiléen.

Ce référentiel est en translation rectiligne par rapport à celui de la route, donc la force de Coriolis est nulle et la force d'inertie d'entraînement vaut $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_0$.

2. À l'équilibre, les forces s'équilibrent suivant la figure 21.13.

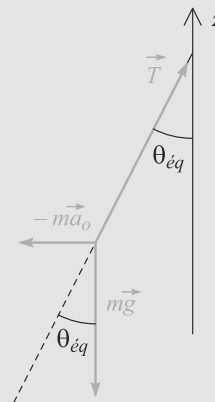


Figure 21.13 Équilibre du pendule dans le camion.

Donc :

$$\begin{aligned}\tan(\theta_{\text{éq}}) &= \frac{a_0}{g} \\ \Rightarrow \theta_{\text{éq}} &= 5,7^\circ = 0,10 \text{ rad}\end{aligned}$$

3. a) La direction du pendule est donc marquée par le vecteur $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_0$. Le PFD s'écrit donc :

$$\begin{aligned}m\vec{a} &= m\vec{g} + \vec{F}_{ie} + \vec{T} \\ &= m\vec{g}' + \vec{T}\end{aligned}$$

Nous sommes donc ramenés à l'équation différentielle du pendule simple en remplaçant \vec{g} par \vec{g}' . Faisons donc le changement de variable $\theta' = \theta - \theta_{\text{éq}}$ pour écrire l'équation différentielle sous la forme :

$$\ddot{\theta}' + \frac{g'}{l} \sin(\theta) = 0$$



Vous pouvez retrouver cette équation à partir du PFD, mais depuis le chapitre 12 cela ne devrait plus être nécessaire.

Aux petites oscillations, l'équation se réduit à :

$$\ddot{\theta}' + \omega_0'^2 \theta = 0$$

avec $\omega_0' = \sqrt{g'/l}$. La solution est alors, compte tenu des conditions initiales :

$$\theta'(t) = -\theta_{\text{éq}} \cos(\omega_0' t)$$

b) g' joue le rôle de l'accélération de la pesanteur lors de la phase d'accélération. Elle contient le terme d'accélération du camion.

Physiquement, cela correspond au fait que l'on se penche naturellement en avant dans un véhicule qui accélère, pour garder l'équilibre.

c) Numériquement, $g' = 9,86 \text{ m.s}^{-2}$ soit une variation de 0,5 % par rapport à g , et $T'_0 = 2\pi/\omega'_0 = 2,0 \text{ s}$.

21.12 Stabilité de l'orbite d'un satellite

Cet exercice est la suite de l'exercice 11 page 313. Vous pouvez donc réutiliser le résultat qui y est établi.

1. Pour que (R) soit galiléen, il faut qu'il soit en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de Kepler. Or, ici les axes de (R) tournent dans le référentiel de Kepler. Donc (R) ne peut pas être galiléen.
2. Le satellite est soumis à l'attraction gravitationnelle du Soleil et à celle de la Terre, ainsi qu'aux forces d'inertie (puisque (R) n'est pas galiléen).

La force de Coriolis est nulle, puisque le satellite est immobile dans (R) . Il reste la force d'inertie d'entraînement, dont l'expression correspond à un mouvement circulaire de rayon d . D'où la projection de l'équilibre des forces sur \vec{u}_r :

$$-\mathcal{G} \frac{mM_S}{(R-d)^2} + \mathcal{G} \frac{mM_T}{d^2} + m(R-d)\Omega^2 = 0$$

Sachant que :

$$\Omega = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R^3}}$$

il vient :

$$\frac{M_T}{d^2} - \frac{M_S}{(R-d)^2} + \frac{R-d}{R^3} M_S = 0$$

3. Faisons apparaître le rapport d/r (numériquement petit) pour un développement limité à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(R-d)^2} &= \frac{1}{R^2 \left(1 - \frac{d}{R}\right)^2} \\ &\approx \frac{1}{R^2} \left(1 + \frac{2d}{R}\right) \end{aligned}$$

En injectant ceci dans la relation établie à la question précédente, il vient :

$$d \approx R^3 \sqrt{\frac{M_T}{3M_S}} = 1,5 \cdot 10^9 \text{ m}$$

Numériquement, $d/R = 0,01$ ce qui est raisonnable par rapport à l'approximation faite.

4. Si le satellite s'éloigne du soleil, la force attractive du Soleil diminue (car elle décroît avec la distance). En même temps, les deux autres forces (attraction de la Terre et force d'inertie) augmentent et contribuent à amplifier la perturbation. Donc la perturbation est globalement amplifiée, ce qui caractérise une position d'équilibre instable.

21.13 Ressort horizontal dans un manège

Le début, proche du cours, ne doit pas poser de problème. La suite utilise des raisonnements classiques de l'étude des positions d'équilibre (l'énergie potentielle est somme de deux termes, mais le principe reste le même).

La fin est plus ouverte et doit vous faire réfléchir à la situation physique.

1. La longueur du ressort est $l = r - a$ donc la force et l'énergie potentielle s'écrivent :

$$\vec{F} = -k(r - a - l_0) \vec{e}_r$$

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k(r - a - l_0)^2$$

sachant que E_{pe} est définie à une constante additive près.

2. Le référentiel lié au manège est en rotation pure uniforme par rapport au référentiel terrestre. Dans ce cas particulier, la force d'inertie d'entraînement, appelée aussi force centrifuge, s'écrit :

$$\vec{F}_{ie} = m r \omega^2 \vec{e}_r$$

Donc son travail élémentaire sur un petit déplacement dr le long d'un rayon s'écrit :

$$\delta W = \vec{F}_{ie} \cdot d\vec{OM}$$

$$= m r \omega^2 \vec{e}_r \cdot dr \vec{e}_r$$

$$\delta W = -d \left(-\frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \right)$$

Il est possible de mettre le travail élémentaire sous la forme d'une différentielle exacte, donc cette force est conservative. Par identification :

$$E_{pi} = -\frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

à une constante additive près.

3. L'énergie potentielle totale du système est donc :

$$E_p = \frac{1}{2} k(r - a - l_0)^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

Une position d'équilibre correspond à dE_p/dr nulle :

$$\frac{dE_p}{dr}(r_{eq}) = k(r_{eq} - a - l_0) - m \omega^2 r_{eq} = 0$$

$$\Rightarrow r_{eq} = k \frac{a + l_0}{k - m \omega^2}$$

avec $k > m \omega^2$ car cette valeur est forcément positive.



Si $k < m\omega^2$, $r < 0$ ne donne pas de position d'équilibre de l'autre côté de l'axe ! l change si nous inversons la position du ressort.

Cette position d'équilibre est stable si la dérivée seconde y est positive :

$$\frac{d^2 E_p}{dr^2}(r_{\text{eq}}) = k - m\omega^2$$

qui est bien positif dans les conditions précédentes. Donc, quand elle existe, la position d'équilibre est stable.

4. Le système n'est soumis qu'à des forces conservatives ou ne travaillant pas (la force de Coriolis) donc son énergie mécanique est un invariant du mouvement. Elle vaut :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} k (r - a - l_0)^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

$$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = m \dot{r} \ddot{r} + k(r - a - l_0) \dot{r} - m \omega^2 r \dot{r} = 0$$

qui conduit à l'équation du mouvement :

$$\ddot{r} + \frac{k - m\omega^2}{m} r = \frac{k}{m} (a + l_0)$$

Ceci est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique. Par identification, la période des petites oscillations est :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k - m\omega^2}}$$

5. Comme $\omega < \sqrt{k/m}$, choisissons k/m voisin de ω_c^2 par valeur inférieure, de sorte que :

$$\omega < \sqrt{\frac{k}{m}} < \omega_c$$

Alors, r_{eq} tend vers l'infini (formellement) au voisinage de $\sqrt{k/m}$. Un interrupteur déclenchant l'arrêt du système peut être placé loin du ressort. Ainsi, si le ressort s'allonge trop sous l'action d'une force centrifuge trop grande, il vient toucher l'interrupteur et le manège s'arrête.

21.14 Pendule paramétrique

Méthode mise en jeu : n°2.

Il faut reconnaître dans cet exercice que le référentiel non galiléen est en translation par rapport au référentiel galiléen ce qui permet d'exprimer les forces d'inertie simplement.

La méthode imposée passe par un calcul de moments : on se référera à ce chapitre en cas de problème.

Enfin, une analyse physique est demandée : prenez le temps de bien réfléchir à ce qu'indique la courbe et pensez au phénomène de résonance.

1. Le référentiel R' n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel R qui est galiléen. R' n'est donc pas galiléen.
2. Il n'y a pas de force d'inertie de Coriolis car R' est en translation par rapport à R . Les forces qui s'exercent sur le système sont le poids, la tension et la force d'inertie d'entraînement (figure 21.14) :

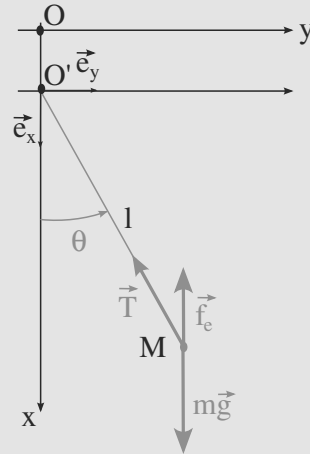


Figure 21.14 Forces appliquées au pendule.

Le théorème du moment cinétique appliqué à M en O' dans R' donne :

$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \vec{M}_{O'}(m\vec{g}) + \vec{M}_{O'}(\vec{T}) + \vec{M}_{O'}(\vec{f}_e)$$

L'expression de la force d'inertie d'entraînement est :

$$\vec{f}_e = -m\vec{a}_e = mD_m\omega^2 \cos(\omega t)\vec{e}_x$$

et donc :

$$\vec{M}_{O'}(\vec{f}_e) = l\vec{e}_r \wedge mD_m\omega^2 \cos(\omega t)\vec{e}_x$$

$$= -m l D_m \omega^2 \cos(\omega t) \sin(\theta) \vec{e}_z$$

Le moment de la tension est nul (c'est une force centrale). Pour le poids :

$$\vec{M}_{O'}(m\vec{g}) = l\vec{e}_r \wedge mg\vec{e}_x = -m l g \sin(\theta) \vec{e}_z$$

Le moment cinétique s'exprime :

$$\vec{L}_{O'} = l\vec{e}_r \wedge m l \dot{\theta} \vec{e}_\theta = m l^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

et donc en projection, on obtient :

$$m l^2 \ddot{\theta} = -m l g \sin(\theta) - m l D_m \omega^2 \cos(\omega t) \sin(\theta).$$

3. On tire de la relation précédente :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) + \frac{D_m}{l} \omega^2 \cos(\omega t) \sin(\theta) = 0$$

et donc, en posant $h(t) = \frac{D_m \omega^2}{g} \cos(\omega t)$ et $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, on obtient finalement :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 (1 + h(t)) \sin(\theta) = 0.$$

4. On observe une courbe semblant proche de $(A + B \cos(\Omega t)) \cos(\omega' t + \varphi)$ c'est-à-dire qui présente des battements dont les périodes sont proches de 1,6 s (32 oscillations en 50 s) et 40 s pour l'enveloppe.

Une résonance se développe aux faibles amplitudes : l'amplitude croît alors. D'après la courbe fournie, la période d'oscillation devient plus grande si l'amplitude croît : on sort alors de la valeur de ω de résonance et l'amplitude décroît. On rejoint la valeur de résonance à nouveau pour les plus faibles amplitudes (quasi harmoniques) et la croissance reprend : on peut ainsi expliquer le battement observé.

21.15

Tir d'un obus vers le zénith

La principale difficulté de l'exercice est de se situer dans l'espace, de savoir dans quel sens est quoi. Faites donc une figure la plus claire possible.

En particulier, pour repérer les directions cardinales, remarquez que Oz marque la verticale, donc les quatre directions cardinales sont dans le plan xOy . L'est et l'ouest sont dans le sens de la rotation de la Terre, donc suivant Oy . Donc le nord et le sud sont suivant Ox , comme l'énoncé l'indique d'ailleurs.

Pour finir, n'oubliez pas que le soleil va, de notre point de vue, d'est en ouest. Donc la Terre tourne dans le sens inverse.

1. L'accélération est constante égale à \vec{g} . Cela s'intègre en $\vec{v} = (-gt + v_0) \vec{u}_z$ et donc :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h$$

L'obus tombe au sol à une date t_1 telle que $z(t_1) = 0$:

$$\begin{aligned} z(t_1) &= -\frac{1}{2}gt_1^2 + v_0t_1 + h = 0 \\ \Rightarrow t_1 &= \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} \end{aligned}$$

2. a) $\Omega = 2\pi \text{ rad.j}^{-1}$ car la Terre fait un tour en un jour. Donc en une seconde, cela donne $\Omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$.
b) L'obus est soumis à son poids et à la force de Coriolis puisque le référentiel étudié n'est pas galiléen. Donc :

$$m\vec{a} = m\vec{g} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

La force d'inertie d'entraînement est incluse dans le poids, puisqu'elle dépend seulement de l'endroit où l'on se trouve et non de l'état de mouvement.

- c) La force de Coriolis étant de faible intensité ($\vec{\Omega}$ a une norme égale à 2π par 24 h), elle ne va pas beaucoup modifier la vitesse de l'obus par rapport à l'étude faite sans elle. L'erreur commise en réutilisant l'expression de la vitesse est alors « d'ordre supérieure », négligeable.
d) D'après la figure 21.15 :

$$\vec{\Omega} = \Omega(-\cos(\lambda) \vec{u}_x + \sin(\lambda) \vec{u}_z)$$

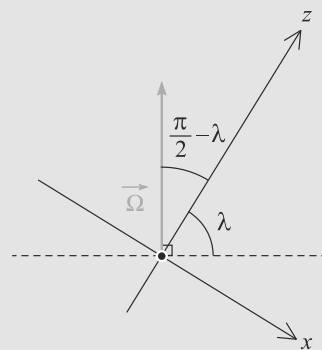


Figure 21.15 Expression de $\vec{\Omega}$ dans le repère local.

D'où les projections :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -2\Omega(v_0 - gt) \cos(\lambda) \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

L'équation en x montre que le mouvement reste plan. Celle en z redonne le mouvement de chute libre verticale attendu. Celle en y montre que la force de Coriolis a induit un déplacement latéral, vers l'est ou vers l'ouest. Ce déplacement est probablement très faible, puisque la force de Coriolis l'est.

3. a) Si $v_0 = 0$, l'accélération en y est positive donc la vitesse en y est croissante. Comme celle-ci est nulle au départ, le mouvement se fait donc toujours suivant les y croissants : la déviation se fait vers l'est pendant toute la chute.
b) Intégrons l'équation en y :

$$y(t) = \frac{1}{3} \Omega \cos(\lambda) g t^3$$

Si la hauteur depuis laquelle la bille est lâchée est notée h , la durée de la chute est $\Delta t = \sqrt{2h/g}$. Donc :

$$\Delta y = \frac{1}{3} \Omega \cos(\lambda) g \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2}$$

- c) $\Delta y \approx 8 \text{ mm}$. Sachant que cette étude a négligé plusieurs facteurs, l'accord avec l'expérience peut être considéré comme satisfaisant.

d) Le passage d'un hémisphère à l'autre joue sur le signe de λ , mais $\cos(\lambda)$ en est indépendant. Donc le phénomène est inchangé d'un hémisphère à l'autre.

Par contre, il est plus marqué près de l'équateur ($\cos(\lambda)$ proche de 1) qu'aux pôles ($\cos(\lambda)$ proche de 0).

4. Intégrons \ddot{y} avec $v_0 \neq 0$:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -2\Omega(v_0 - gt) \cos(\lambda) \\ \dot{y} &= -2\Omega \left(v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \right) \cos(\lambda) \\ &= -2\Omega \cos(\lambda) (z - h) \\ y &= -2\Omega \left(\frac{1}{2} v_0 t^2 - \frac{1}{6} g t^3 \right) \cos(\lambda) \end{aligned}$$

Dans une première phase du mouvement, l'obus va vers le haut donc $z > h$. La vitesse en y est alors négative : déviation vers l'ouest.

Ensuite, l'obus atteint son point le plus haut et commence à retomber. $z > h$ reste valable donc la déviation continue vers l'ouest.

Quand, z devient inférieure à h , donc quand l'obus tombe en dessous de son altitude de départ, la vitesse en y change de signe et la déviation se fait vers l'est.

L'obus touche le sol à la date t_1 calculée à la première question. Donc la déviation vaut $\Delta y = y(t_1) - 0 = y(t_1)$. Numériquement, $\Delta y = -65$ cm. C'est une valeur suffisamment élevée pour être perceptible et mettre en évidence l'action de la force de Coriolis.

21.16

Limite de Roche de Saturne

L'exercice ne présente pas de difficulté particulière, mais exige beaucoup, beaucoup de rigueur ! Reprenez soigneusement chaque formule de cours utilisée, pour ne pas confondre les diverses accélérations, distances, etc.

La modélisation dans cet exercice est très simple, voire simpliste, mais elle conduit à des résultats qualitativement corrects.

1. a) Il s'agit du référentiel de Kepler de Saturne.
- b) Le PFD appliqué au satellite s'applique à son centre d'inertie O et ne fait intervenir que les forces extérieures :

$$M\ddot{a}(O)_S = -\mathcal{G}\frac{MM_S}{r^2}\vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \ddot{a}(O)_S = -\mathcal{G}\frac{M_S}{r^2}\vec{e}_r$$

- c) \vec{SM} et \vec{SO} ont même vecteur unitaire \vec{e}_r , donc :

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{SM}}{r-R} = \frac{\vec{SO}}{r}$$

Donc les accélérations de M et O sont dans les mêmes rapports :

$$\frac{1}{r-R}\ddot{a}(M)_S = \frac{1}{r}\ddot{a}(O)_S$$

$$\Rightarrow \ddot{a}(M)_S = -\left(1 - \frac{R}{r}\right)\mathcal{G}\frac{M_S}{r^2}\vec{e}_r$$

2. Ce référentiel n'est pas galiléen, puisqu'il est en rotation pure autour du référentiel saturnocentrique. Le point M est donc soumis aux attractions gravitationnelles de Saturne et du reste du satellite, aux forces d'inertie et à la réaction \vec{R} du satellite (puisque'il est solidaire du satellite).

La force de Coriolis est nulle car M est au repos dans ce référentiel.

Le mouvement du référentiel du satellite par rapport au référentiel saturnocentrique est une rotation pure donc la force

d'inertie d'entraînement est :

$$\vec{F}_{ie} = -m\ddot{a}(M)_S = -\left(1 - \frac{R}{r}\right)\mathcal{G}\frac{M_S}{r^2}\vec{e}_r$$

Donc le PFD pour M dans le référentiel du satellite s'écrit :

$$m\ddot{a}(M)_O = -\mathcal{G}\frac{mM_S}{(r-R)^2}\vec{e}_r + \mathcal{G}\frac{mM}{R^2}\vec{e}_r$$

$$+ \left(1 - \frac{R}{r}\right)\mathcal{G}\frac{mM_S}{r^2}\vec{e}_r + \vec{R}$$

D'où l'accélération demandée :

$$\ddot{a}(M)_O = -\mathcal{G}\frac{M_S}{(r-R)^2}\vec{e}_r + \mathcal{G}\frac{M}{R^2}\vec{e}_r$$

$$+ \left(1 - \frac{R}{r}\right)\mathcal{G}\frac{M_S}{r^2}\vec{e}_r + \frac{\vec{R}}{m}$$

3. Le point matériel reste solidaire du satellite s'il est immobile par rapport à O donc si $\ddot{a}(M)_O = \vec{0}$, et si $\vec{R} \cdot \vec{e}_r < 0$. D'où la condition pour que M ne se détache pas :

$$-\mathcal{G}\frac{M_S}{(r-R)^2} + \mathcal{G}\frac{M}{R^2} + \left(1 - \frac{R}{r}\right)\mathcal{G}\frac{M_S}{r^2} > 0$$

$$\Rightarrow -M\frac{r^2}{R^2} + \frac{M_S}{\left(1 - \frac{R}{r}\right)^2} < \left(1 - \frac{R}{r}\right)M_S$$

Sachant que $R \ll r$, faisons un développement limité à l'ordre 1 :

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{R}{r}\right)^2} \simeq \left(1 + \frac{2R}{r}\right)$$

D'où, en injectant ce résultat dans le calcul :

$$-M\frac{r^2}{R^2} + \frac{2R}{r}M_S < -\frac{R}{r}M_S$$

$$\Rightarrow R\sqrt[3]{\frac{3M_S}{M}} < r$$

Ceci est la condition de non décollement de M , donc r doit être inférieur à cette valeur pour que M se détache :

$$r_{\max} = R\sqrt[3]{\frac{3M_S}{M}}$$

Par définition de la masse volumique :

$$M_S = \mu_S \frac{4}{3}\pi R_S^3$$

$$M = \mu \frac{4}{3}\pi R^3$$

D'où le résultat demandé :

$$r_{\max} = \sqrt[3]{3}R_S\sqrt[3]{\frac{\mu_S}{\mu}}$$

donc $\alpha = \sqrt[3]{3} = 1,44$.

4. D'après l'énoncé, r_{\max} est égal à $1,4 \cdot 10^8$ km car les anneaux de Saturne sont constitués des débris des corps qui ont passé la limite de Roche. Avec $\mu = \mu_S$, le résultat précédent donne :

$$R_S = \frac{r_{\max}}{\alpha} = 57\,400 \text{ km}$$

5. Pour Saturne, nous avons directement :

$$\mu_S = \frac{M_S}{\frac{4}{3} \pi R_S^3} = 622 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Pour μ , le résultat de la question 3 donne :

$$\begin{aligned} \mu &= \alpha^3 \mu_S \frac{R_S^3}{r_{\max}^3} \\ &= \frac{3\alpha^3 M_S}{4\pi r_{\max}^3} \\ \mu &= 723 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \end{aligned}$$

Donc Saturne est moins dense que de l'eau sur Terre ($1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$). L'écart est trop grand pour envisager que Saturne puisse avoir une composition similaire à la Terre. Cela se comprend en remarquant que Saturne est gazeuse.

Partie 6

Thermodynamique

Plan

22.1	Considérations d'échelle	348
22.2	Paramètres d'état	349
	Synthèse	351
	Tests et exercices	352
	Corrigés des exercices	353

Introduction

Vous verrez essentiellement la thermodynamique comme une théorie des échanges d'énergie et des phénomènes thermiques, car c'est historiquement son rôle. Mais elle construit en fait des raisonnements très généraux pour étudier des systèmes macroscopiques sans avoir à connaître les détails microscopiques, dans de nombreux domaines de la physique.

C'est pourquoi les premiers chapitres de thermodynamique semblent aborder des sujets très divers avant que ne soient posés les concepts généraux (chapitres 25 et 26).

Prérequis

- Quantités de matière
- États de la matière

Objectifs

- Acquérir les raisonnements à l'échelle microscopique
- Acquérir le vocabulaire de base de la thermodynamique (extensif, intensif, mésoscopique...)

22.1 Considérations d'échelle

22.1.1 Du microscopique au macroscopique

Un système microscopique est toujours décrit comme un problème mécanique. Pour une description à l'échelle macroscopique, les équations mécaniques se réduisent à un petit nombre de relations (les **équations d'état**) entre un petit nombre de paramètres (les **paramètres d'état**).

Il y a bien entendu perte d'information dans cette procédure, mais cette perte n'est pas physiquement gênante : pour étudier un gaz contenu dans un piston, la position individuelle de chaque molécule de gaz ne nous intéresse pas.



Cette énorme simplification n'est rigoureusement possible que pour un système en équilibre. Pour un système en évolution, il faudra faire l'approximation que le système « évolue suffisamment lentement » pour passer par des étapes de quasi-équilibre, voir chapitre 25.

Par exemple :

- Le comportement de certains gaz, les gaz parfaits, est descriptible par seulement trois paramètres, volume, température et pression, avec une équation d'état $PV = nRT$.
- En chimie des solutions, l'état d'équilibre d'un système est défini par la seule donnée des concentrations et de la température. Les équations d'état sont les constantes d'équilibre.
- En électrocinétique, l'état électrique d'une résistance est défini par seulement deux paramètres : l'intensité qui la traverse et la tension à ses bornes, et une équation d'état, la loi d'Ohm $U = RI$.

22.1.2 Ordres de grandeur

Soit un système de particules. Nous l'étudions :

- à l'échelle microscopique si le nombre de particules est de l'ordre de 1 (quelques-unes, quelques dizaines, etc),
- à l'échelle macroscopique si le nombre de particules est de l'ordre de la mole, soit $N_A \sim 10^{23}$,
- à l'échelle mésoscopique si le nombre de particules est grand devant 1 mais petit devant N_A , typiquement 10^{10} .

22.2 Paramètres d'état

22.2.1 Paramètres intensifs et extensifs

Méthode 1 Bien distinguer extensivité et intensivité

Un paramètre extensif est **additif**. Ainsi, la réunion de deux systèmes de même masse m donne bien un système de masse $2m$; par contre, la réunion de deux gaz à la température T ne donne pas un gaz à la température $2T$, mais T .

Un paramètre intensif est défini en tout point, alors qu'un paramètre extensif est global. Ainsi, la pression est définie en tout point dans un liquide (dans l'eau, elle vaut 1 atm en un point en surface, 2 atm à 10 m de profondeur, etc) ; par contre, pouvez-vous dire « en quel point le volume d'un gaz vaut 4 L » ? Bien sûr que non, cela n'a pas de sens.

L'intensivité peut aussi se repérer sur l'unité : un paramètre intensif est en général « par mole », « par unité de volume », etc. Par exemple, la pression est une force par unité de surface, la concentration une quantité de matière par unité de volume.

Un paramètre intensif peut en général s'écrire comme le rapport de deux paramètres extensifs.

En pratique, les paramètres intensifs sont souvent plus faciles à mesurer que les paramètres extensifs.

Exemple d'application

Parmi les paramètres suivants, identifiez lesquels sont extensifs et lesquels sont intensifs : concentration, densité, poids, pression, énergie cinétique.

Solution

La concentration est une grandeur volumique donc intensive.

La densité est proportionnelle à la masse volumique (divisée par une constante) donc elle est intensive.

Le poids est proportionnel à la masse (multipliée par une constante) donc il est extensif.

La pression est une force surfacique donc intensive.

L'énergie cinétique est additive (voir par exemple le chapitre 19) donc extensive.

22.2.2 Intérêt de l'échelle mésoscopique

Prenons l'exemple de la masse volumique ρ .

Pour un système homogène de masse totale m et de volume total V , nous avons $\rho = m/V$.

Si le système n'est pas homogène, il faut le découper en petits volumes mésoscopiques dV de masse dm , chacun étant supposé homogène. Alors, pour un petit volume situé au point M :

$$\rho(M) = \frac{dm}{dV}(M)$$

22.2.3 Quelques paramètres d'état bien pratiques

Le système étudié est composé de N particules. Il peut être décrit par des paramètres comme :

Nom	Symbole	Expression	Caractère	Remarques
Masse	m		Extensif	
Volume	V		Extensif	
Quantité de matière	n	$n = \frac{N}{N_A}$	Extensif	$n \sim 10^{-6}$ mol est encore macroscopique
Masse molaire	M	$M = \frac{m}{n}$	Intensif	Connaître l'eau ($M = 18 \text{ g.mol}^{-1}$) et l'air ($M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$)
Densité particulaire	n^*	$n^* = \frac{N}{V}$	Intensif	$n^* = \frac{dN}{dV}$ si système pas homogène
Masse volumique	ρ	$\rho = \frac{m}{V}$	Intensif	$\rho = \frac{dm}{dV}$ si système pas homogène. Connaître $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ pour l'eau.
Volume molaire	V_m	$V_m = \frac{V}{n}$	Intensif	$V_m = 22,4 \text{ L.mol}^{-1}$ pour tout gaz parfait dans les c.n.t.p.



Pour calculer la masse totale du système, il faut donc découper le système en petits volumes dV de masse dm , puis en faire la somme.



c.n.t.p. désigne les conditions normales de température et de pression : 273,15 K et 1 bar.

Synthèse

Savoirs

- Maîtriser le vocabulaire (voir mots clefs)

Savoir-faire

- Écrire les relations sur les systèmes mésoscopiques
- Reconnaître une grandeur intensive, une grandeur extensive

Mots-clés

- Extensif,
- intensif,
- macroscopique,
- microscopique,
- mésoscopique,
- quantité de matière.

Tests de connaissances

- 22.1 La masse volumique est définie au niveau microscopique.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 22.2 Une grandeur intensive est sommable.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 22.3 La pression est une variable intensive.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 22.4 La densité est une variable intensive.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 22.5 Le volume est une variable intensive.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 22.6 La concentration est une variable extensive.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 22.7 La conductivité d'une solution est une variable extensive.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 22.8 La vitesse quadratique moyenne est un paramètre d'état.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

■ ■ ■

22.9 Ordres de grandeurs

Les questions suivantes sont indépendantes et la réponse doit être courte.

1. Retrouvez le volume molaire d'un gaz parfait (équation d'état $PV = nRT$) dans les c.n.t.p. Que devient-il dans les conditions **usuelles**, $P = 1$ bar et $T = 25^\circ\text{C}$?
2. Calculez la masse d'air contenue dans une salle de classe, assimilée à un pavé de $5 \times 5 \times 3$ m, à 20°C sous 1 atm.

■ ■ ■

22.10 Caractéristiques d'un gaz parfait

1. Calculez la masse volumique, la densité particulaire et la densité d'un gaz parfait en fonction de sa pression et de sa température.

2. Application : calculez la densité d'un mélange contenant 16 g de méthane CH_4 et 36 g d'eau vapeur à 800°C sous 35 bar. Ce mélange est utilisé industriellement pour produire du dihydrogène.

■ ■ ■

22.11 Du sucre dans le café

Un morceau de sucre a été dissous dans une tasse de café (hauteur $h = 10$ cm, surface $S = 25$ cm²). À cause de la pesanteur, la concentration en sucre est plus importante dans le fond qu'en surface.

La variation de la masse de sucre avec l'altitude est donnée par la loi $\rho(z) = a(h^2 - z^2)$ où $a = 600$ dans les unités du système international.

Calculez la masse du morceau de sucre dissous.

22.1

Faux, il s'agit d'une moyenne, définie à partir du niveau mésoscopique.

22.2

Faux, au contraire.

22.3

Vrai.

22.4

Vrai.

22.5

Faux, elle est proportionnelle à la quantité de matière du système.

22.6

Faux c'est un rapport de grandeurs extensives donc intensive.

22.7

Faux.

22.8

Vrai. Sa valeur étant liée de manière monotone à la température, on pourrait dire que c'est vrai, mais ce n'est pas un paramètre d'état usuel !

22.9

Ordres de grandeurs

Ce sont de petites applications numériques dont le seul but est de vous remettre en tête quelques formules de base.

1. Dans les deux cas, le volume molaire est donné par :

$$V_m = \frac{V}{n} = \frac{RT}{P}$$

Numériquement, cela donne $22,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ dans les c.n.t.p. et $24,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ dans les conditions dites usuelles.

2. $m = nM$ donc $m = PVM/RT \approx 89,3 \text{ kg}$.

22.10

Caractéristiques d'un gaz parfait

Il s'agit là aussi d'un exercice très simple. Vous y établirez une relation très importante entre densité et masse volumique pour un gaz parfait.

1. Par définition pour un échantillon homogène :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}$$

$$n^* = \frac{N}{V} = \frac{NN_A}{VN_A} = \frac{N_A}{V_m}$$

Ce qui donne $n^* \approx 2,7 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ pour tout gaz parfait dans les c.n.t.p. Quant à la densité :

$$d = \frac{m}{m_{\text{air}}} = \frac{nM}{n_{\text{air}}M_{\text{air}}}$$

où n et n_{air} sont les nombres de mole pour un même volume. Dans les mêmes conditions de température et de pression, deux gaz parfaits ont même volume molaire. Donc $n = n_{\text{air}}$ et

$$M = 29d$$

avec M en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$.



La relation $M = 29d$ pour un gaz **parfait** est à connaître. Il est en outre remarquable qu'elle ne dépende pas des conditions de température et de pression !

Il faut calculer la masse molaire du mélange méthane-eau :

$$M' = \frac{16}{16+36} M(\text{CH}_4) + \frac{36}{16+36} M(\text{H}_2\text{O})$$

$$= 17,4 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\Rightarrow d = 0,6$$

22.11

Du sucre dans le café

Ce petit exercice a pour but de vous apprendre comment réfléchir sur un système inhomogène : il faut le découper en petits systèmes homogènes. C'est le même type de raisonnement que, par exemple, en mécanique lorsque vous découpez une trajectoire en petits morceaux de trajectoire.

Comme ρ ne dépend que de l'altitude, découpons le café en « tranches » d'altitude z et d'épaisseur faible dz , donc de volume $dV = S dz$. Cette tranche étant mésoscopique, nous pouvons la considérer comme homogène. Donc sa masse est $dm = \rho(z) dz$.

La masse totale de sucre dissous est la somme de ces masses élémentaires du fond de la tasse à la surface :

$$m = \int_{\text{fond}}^{\text{surface}} dm$$

$$= \int_0^h \rho(z) dz$$

$$m = \frac{2}{3} a S h^2$$

Numériquement, $m = 1 \text{ g}$, ce qui correspond à un demi-sucre.

Plan

23.1	Modèle du gaz parfait monoatomique	354
23.2	Généralisation au gaz parfait polyatomique	357
23.3	Mélange idéal de gaz parfait	357
23.4	Exemple de fluide réel : le gaz de van der Waals	358
23.5	Coefficients thermoélastiques	358
	Synthèse	360
	Tests et exercices	361
	Corrigés des exercices	364

Introduction

Ce chapitre a pour vocation d'illustrer sur le cas simple des gaz parfaits le fait qu'il est possible de réduire un problème de mécanique complexe à un problème de thermodynamique simple (réduction du nombre de degrés de liberté).

Prérequis

- Principe fondamental de la dynamique
- Écriture des différentielles

Objectifs

- Définir un gaz parfait, obtenir son équation d'état
- Premier aperçu des notions de pression et de température dans un modèle microscopique
- Énergie interne et capacité thermique d'un gaz parfait
- Approche des fluides réels : coefficients thermoélastiques χ_T et α .
- Énergie interne des phases condensées

23.1 Modèle du gaz parfait monoatomique

23.1.1 Hypothèses du modèle



Une bonne réalisation de ce gaz idéal est un gaz noble, comme l'hélium ou l'argon, sous faible pression.

Étudions un gaz de N atomes ponctuels enfermés dans une enceinte de volume V . Nous ferons donc les hypothèses suivantes :

- Particules ponctuelles, de masse m , neutres.
- Les seules interactions subies par les particules sont leurs chocs contre les parois, supposés élastiques (sans perte d'énergie).
- Hypothèse de **chaos moléculaire** : le système est homogène en densité ($n^* = \text{cst}$) et en vitesse (la distribution des vitesses est indépendante du temps, homogène et isotrope).

Dans ces conditions, il est possible de faire l'approximation que toutes les particules ont la même vitesse en norme. Cette vitesse, appelée **vitesse quadratique moyenne**, est donnée par la moyenne des carrés des vitesses :

Définition

La **vitesse quadratique moyenne** est définie par :

$$v = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i \vec{v}_i^2}$$

23.1.2 Pression cinétique

La pression cinétique P est définie comme la résultante (par unité de surface) des forces exercées par les atomes lors de leurs chocs sur les parois ou sur toute surface placée dans l'enceinte.

Une petite surface orientée $d\vec{S}$ subit par ces chocs une force $d\vec{F}$ donnée par :

$$d\vec{F} = P d\vec{S}$$

Un bilan mécanique de ces chocs conduit à :

Définition

La **pression cinétique dans un gaz parfait** est définie par :

$$P = \frac{1}{3} n^* m v^2$$

23.1.3 Température cinétique

La température cinétique est une grandeur macroscopique mesurant l'énergie cinétique d'agitation moyenne des particules. Pour notre gaz parfait :

Définition

La **température cinétique** est définie par :

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} k T$$

avec $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ la constante de Boltzmann.

23.1.4 Température Celsius

La température θ en degrés Celsius est définie par :



La pression est isotrope : les forces de pression s'exercent dans toutes les directions.



L'unité légale de pression est le pascal (Pa) mais le bar est couramment utilisé : $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.



L'unité légale de température est le kelvin, de symbole K.



On parle de « degrés Celsius », mais de « Kelvin ». N'employez pas le mot degré dans ce cas.



Voir chapitre 27 pour la signification de T_T .



À cause de cette définition, il est interdit de faire le rapport de deux températures dans l'échelle Celsius ! En effet, $\frac{\theta_2}{\theta_1} \neq \frac{T_2}{T_1}$.

23.1.5 Équation d'état

En reliant les deux équations obtenues pour la pression et la température, il vient $P = n^* kT$. Avec $n^* = N/V$ et $n = N/N_A$, cela devient :

Définition

La température en échelle Celsius est définie par :

$$\theta(^{\circ}) = T(K) - T_T \quad \text{avec} \quad T_T = 273,15 \text{ K}$$

Définition

L'équation d'état du gaz parfait est :

$$PV = nRT \quad \text{avec} \quad R = kN_A = 8,31 \text{ J.K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

23.1.6 Énergie interne

Dans notre modèle simple, chaque particule n'a que son énergie cinétique. Elle n'a pas d'énergie potentielle car elle n'est soumise à aucune force en dehors des chocs. Donc l'énergie totale possédée par le système se limite à la somme des énergies potentielles. Cette énergie est appelée **énergie interne** :

Définition

L'énergie interne d'un gaz parfait monoatomique est :

$$U = \frac{3}{2} nRT$$

U apparaît comme une **fonction d'état** du système. Elle ne dépend que de la température, propriété remarquable du gaz parfait.

Nous pouvons aussi définir une énergie interne molaire ou massique pour un système homogène :

$$u = \frac{U}{m} \quad \text{et} \quad U_m = \frac{U}{n}$$

23.1.7 Capacité thermique à volume constant

L'évolution de U avec la température est suivie par :



L'unité de U est le joule.



U est qualifiée d'interne car elle ne contient pas l'énergie potentielle liée à des forces extérieures (il n'y en a pas ici de toute façon).

Définition

La capacité thermique à volume constant est :

$$C_v(T) = \frac{dU}{dT}(T)$$

L'unité de C_v est le J.K^{-1} .

La constante d'intégration a été prise nulle en supposant qu'au zéro absolu toute agitation thermique est supprimée.

D'où pour le gaz parfait monoatomique :

$$C_v = \frac{3}{2} nR \quad \Leftrightarrow \quad U = C_v T$$

Nous utiliserons souvent des versions molaire ou massique :

$$c_v = \frac{C_v}{m} \quad \text{et} \quad C_{vm} = \frac{C_v}{n}$$

Il est remarquable que la capacité thermique molaire à volume constant soit tout simplement égale à $3R/2$ pour tout gaz parfait monoatomique, soit $12,5 \text{ J.K}^{-1}\text{mol}^{-1}$.

23.2 Généralisation au gaz parfait polyatomique

À cause de degrés de liberté supplémentaires au niveau microscopique (rotation et vibration des molécules), C_v change d'expression : $C_{vm}(T)$ est constante par paliers de température : $3R/2$ à basse température, $5R/2$ à plus haute température, puis $7R/2$, comme illustré figure 23.1.

Donc $U(T)$ change d'expression en conséquence, mais $PV = nRT$ ne change pas.

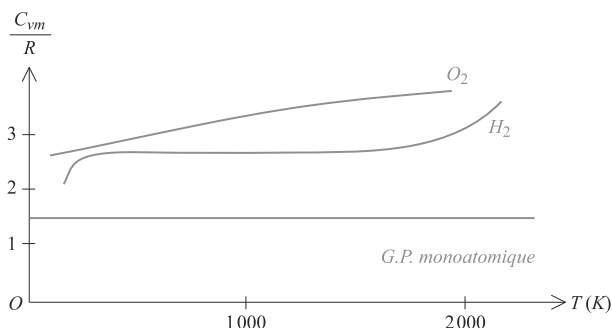


Figure 23.1 Capacité thermique molaire d'un gaz parfait diatomique.

23.3 Mélange idéal de gaz parfait

Dans un mélange gazeux sous la pression P_{tot} , la **pression partielle** du gaz i présent en quantité n_i est définie par :



C'est donc la pression qu'aurait le gaz i seul dans les mêmes conditions.

Définition

La pression partielle d'un gaz est définie par :

$$P_i = \frac{n_i}{\sum_i n_i} P_{\text{tot}}$$

Un mélange de gaz parfaits est dit idéal s'il se comporte lui-même comme un gaz parfait. Alors :

Loi de Dalton

Dans un mélange idéal de gaz parfaits, les pressions partielles s'ajoutent.

23.4 Exemple de fluide réel : le gaz de van der Waals

Si certaines des hypothèses du gaz parfait sont levées, l'équation d'état $PV = nRT$ doit être remplacée. Le physicien van der Waals a proposé l'équation d'état suivante :

Loi

Équation d'état du gaz de van der Waals :

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

Énergie interne associée :

$$U = C_v T - \frac{n^2 a}{V}$$



U est alors fonction de la température et du volume.

Interprétation physique :

Le terme en a vient s'ajouter à la pression cinétique et correspond donc aux forces **attractives** entre molécules (forces de van der Waals).

Le terme en b inclut le fait que les molécules ne sont pas ponctuelles, il faut soustraire au volume total le volume propre de chaque molécule. b s'appelle le **covolume**.

23.5 Coefficients thermoélastiques

23.5.1 Coefficients α et χ_T

Comment varie le volume lorsque la température est modifiée, à pression constante ? La réponse à cette question peut être étudiée par :



α est en K^{-1} .

Définition

Le **coefficient de dilatation isobare** est définie par :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

$\alpha > 0$ en général. Mais l'eau sous pression atmosphérique en dessous de 4°C est une exception bien connue, voir chapitre 27.

Comment varie le volume lorsque la pression est modifiée, à température constante ? De même :

Définition

Le **coefficient de compressibilité isotherme** est définie par :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

En général, un système se comprime ($dV < 0$) quand la pression augmente ($dP > 0$) à température constante. Donc le $-$ assure que χ_T est toujours positif.

α et χ_T peuvent aisément être calculés pour un gaz parfait, mais n'ont d'intérêt que pour un fluide réel. Reportez-vous à l'exercice 14.



χ_T est en Pa^{-1} .

23.5.2 Cas d'une phase condensée

En première approximation, une phase condensée est indilatable et incompressible donc $\alpha = 0$ et $\chi_T = 0$. Alors l'énergie devient presque indépendante du volume :

Loi

L'énergie interne d'une phase condensée est :

$$dU \simeq C_v dT$$



Une phase condensée correspond à un état solide ou liquide.

Synthèse

Savoirs

- Équation d'état, énergie interne, capacité thermique des gaz parfaits
- Définition de la température cinétique
- Décalage des échelles de température celsius et absolue
- Pressions partielles dans un mélange idéal de gaz parfait
- Définition des coefficients thermoélastiques χ_T et α , nature de ces coefficients
- Énergie interne d'une phase condensée

Savoir-faire

- Retrouver l'expression de la pression cinétique
- Calculer χ_T et α à partir d'une équation d'état
- Retrouver l'équation d'état du gaz parfait dans le modèle cinétique

Mots-clés

- Gaz parfait,
- pression cinétique,
- pression partielle,
- température cinétique,
- énergie interne,
- capacité thermique,
- coefficients thermoélastiques,
- phase condensée (liquide, solide).

Tests de connaissances

- 23.1 La pression est une force surfacique.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 23.2 Un gaz parfait est défini par son équation d'état.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 23.3 La température traduit l'énergie cinétique microscopique d'un système.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 23.4 Dans le modèle du gaz parfait, les molécules sont traitées comme des boules de rayon identique.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 23.5 Un mélange de gaz parfait est idéal si les différentes molécules n'ont pas d'interaction entre elles.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 23.6 L'énergie interne est l'énergie mécanique microscopique d'un système.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 23.7 Pour un gaz parfait, l'énergie potentielle microscopique est nulle.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 23.8 Les coefficients thermoélastiques traduisent la capacité d'un système à voir son volume changer par augmentation de température ou de pression.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 23.9 La capacité thermique à volume constant traduit la capacité d'un système à stocker de l'énergie sous forme microscopique quand la température augmente.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

23.10 Compression d'un gaz et d'un liquide (D'après DEUG.)

Un fluide subit une compression isotherme. Son volume initial est V_0 , la variation de volume est ΔV et vous poserez $a = (\Delta V)/V_0 = -2,25 \cdot 10^{-2}$. L'augmentation de pression qui a provoqué cette compression est notée ΔP .

Vous supposerez les coefficients thermoélastiques constants pendant l'opération.

- Question préliminaire : calculez χ_T pour un gaz parfait sous pression atmosphérique.
- Exprimez χ_T en fonction de ΔP et a .
- Application numérique : calculez ΔP pour un liquide ($\chi_T = 1,14 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$) ou pour un gaz parfait. Commentaire ?

23.11 Gonflage d'un pneu (D'après Air.)

Un pneu, supposé de volume constant V_p , est gonflé avec de l'air assimilé à un gaz parfait à l'aide d'une pompe. La pression dans le pneu après le n^{e} coup de pompe est notée P_n .

La pompe comporte un corps cylindrique de longueur L et de section S munie d'un piston (figure 23.2) situé à l'abscisse z . L'extrémité de la pompe au niveau du pneu comporte une valve V_1 (un petit clapet) qui s'ouvre seulement si la pression dans la pompe excède celle du pneu.

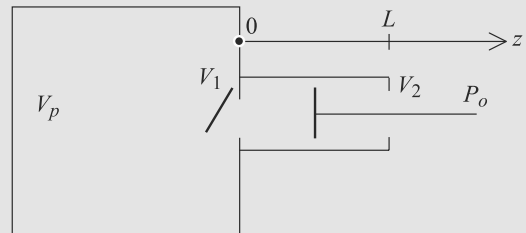


Figure 23.2 Pompe pour le gonflage d'un pneu.

Le piston comporte une valve V_2 qui s'ouvre seulement quand le piston recule, remplissant alors la pompe d'air à la pression atmosphérique P_0 et à la température T_0 . Cette valve se referme dès que le piston est à nouveau poussé.

Le gonflage est supposé se passer à température constante.

- Calculez la position z_n du piston pour laquelle la valve V_1 s'ouvre lors du n^{e} coup de pompe, en fonction de P_0 , P_{n1} et L .
- Achevons le n^{e} coup de pompe jusqu'à $z = 0$. Que vaut alors P_n ? Déduisez-en une relation de récurrence entre P_n et P_{n-1} , puis une relation directe entre P_n et n .
- Combien de coups de pompes faut-il, partant de P_0 , pour gonfler le pneu jusqu'à sa pression d'utilisation P_f ?

Application numérique sachant que le pneu est un tore de rayon $R_m = 34 \text{ cm}$ et de section circulaire de rayon $r = 2,5 \text{ cm}$, avec $S = 3 \text{ cm}^2$; $L = 30 \text{ cm}$; $P_0 = 1 \text{ bar}$; $P_f = 4 \text{ bar}$.

23.12 Équipement de plongée

(D'après ENSI DEUG.)

L'objectif de l'exercice est d'étudier le principe d'un équipement de plongée autonome mis au point par l'équipe Cousteau.

Vous admettez que dans l'eau à une altitude $z < 0$ la pression vaut $P(z) = P_0 - \rho g z$, avec ρ la masse volumique de l'eau et P_0 la pression à la surface de l'eau. L'air est modélisé par un gaz parfait.

1. Plongée sans bouteille.

Les poumons d'un plongeur sont de volume V , la pression qui y règne est égale à la pression de l'eau à l'extérieur et sa température θ_0 est constante.

À l'air libre, le nageur gonfle ses poumons au maximum ($V = V_m$), bloque sa respiration et plonge à la profondeur z sans expirer d'air.

a) Calculez le volume V des poumons à la profondeur z .

b) Arrivé à la profondeur z , il expire la moitié de son air puis remonte. Quel est le volume V' de ses poumons de retour à la surface ?

2. Plongée avec l'équipement de plongée autonome.

Le plongeur s'équipe d'une bouteille indéformable de volume V_b contenant de l'air initialement à la température θ_b et à la pression P_b . Durant son utilisation, la température dans la bouteille est ramenée à la température ambiante θ_a .

La bouteille est équipée d'un détendeur servant à délivrer la quantité d'air nécessaire à la respiration du plongeur, à la pression $P(z)$ locale. Quand la pression P_b dans la bouteille est égale à une pression seuil P_f , le détendeur avertit le plongeur qu'il est temps de remonter.

La respiration du plongeur est supposée régulière, avec une fréquence constante ν , le volume d'air inspiré est V_0 .

a) Calculez la durée Δt d'utilisation avant l'avertissement si le nageur utilise l'appareil en surface.

b) Calculez la durée $\Delta t'$ si le plongeur plonge rapidement à une profondeur z et s'y maintient. Donnez la relation entre Δt et $\Delta t'$. Commentaire ?

3. Problème lors d'une remontée trop rapide.

Le plongeur, débutant, perd son détendeur à la profondeur z . Il prend peur, bloque sa respiration (volume des poumons $V = 2V_0$), et remonte rapidement sans expirer.

a) À quelle profondeur z_1 V sera-t-il égal à V_m ?

b) Sachant que le volume V_m ne peut pas être dépassé, les poumons subissent des lésions souvent fatales si la différence de pression $\Delta P = P - P(z)$ dépasse une valeur Π , avec P la pression dans les poumons.

Calculez la profondeur z_2 à laquelle l'accident risque de se produire.

c) Quel volume ΔV le plongeur aurait-il dû expirer à la profondeur z pour qu'en surface ΔP soit limite et qu'il n'y ait pas d'accident.

Valeurs numériques :

- $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$; $P_0 = 1,013 \text{ bar}$; $\theta_0 = 25^\circ \text{C}$
- $z = -40 \text{ m}$; $V_m = 7 \text{ L}$
- $\theta_b = 50^\circ \text{C}$; $P_b = 250 \text{ bar}$; $V_b = 12 \text{ L}$
- $\theta_a = 10^\circ \text{C}$; $P_f = 50 \text{ bar}$
- $V_0 = 2,5 \text{ L}$; $\nu = 15 \text{ min}^{-1}$
- $\Pi = 0,5 \text{ bar}$

23.13 Étude d'une pompe à vide

(D'après ENS Cachan)

Le dispositif étudié est représenté figure 23.3. Il est constitué d'un réservoir de volume V , initialement rempli d'air à la température T_0 et à la pression P_0 respectivement température et pression de l'atmosphère environnante. Cette enceinte est surmontée d'un cylindre muni d'un piston avec lequel elle communique par une valve K_1 . Le cylindre communique lui-même avec l'atmosphère au moyen d'une valve K_2 .

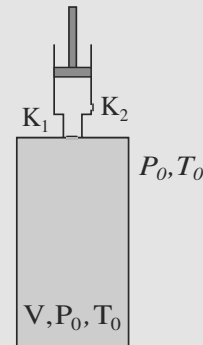


Figure 23.3 Dispositif de pompage.

La valve K_1 est fermée tant que la pression à l'intérieur du cylindre est supérieure à celle de l'enceinte et s'ouvre dans le cas contraire. La valve K_2 n'est fermée que lorsque la pression à l'intérieur du cylindre est inférieure à celle de l'extérieur (de l'atmosphère).

Le piston est animé d'un mouvement de va-et-vient par un moteur extérieur et effectue un aller-retour pendant une durée τ supposée constante. On notera respectivement V_{\min} et V_{\max} les volumes du cylindre en position basse et haute.

Pour simplifier l'étude, le pompage sera considéré isotherme, l'air étant traité comme un gaz parfait.

On recherche la loi d'évolution de la pression P dans l'enceinte au cours du temps. L'instant initial choisi est tel que la pression de l'air est P_0 , le piston étant en position basse. On notera $P[n]$ la pression dans l'enceinte à l'instant $t = n\tau$.

1. On suppose qu'à l'instant $n\tau$ le piston se trouve en position basse, la pression dans le cylindre étant P_0 . Quelle condition doit vérifier $P[n]$ pour que la valve K_1 s'ouvre lors de la remontée du piston ?
2. On s'intéresse à l'évolution de la pression entre les instant $n\tau$ et $(n+1)\tau$. Montrer qu'il existe des constantes a et b à déterminer telles que :

$$P[n+1] - P[n] + a \cdot P[n] = bP_0$$

(équation aux différences)

3. On se propose de faire l'approximation consistant à négliger le caractère discontinu du phénomène. On cherche alors une équation différentielle vérifiée par la fonction $P(t)$ en remplaçant dans l'équation précédente $\frac{P[n+1] - P[n]}{\tau}$ par la dérivée de $P(t)$ notée $P'(t)$ et $P[n]$ par $P(t)$. Écrire l'équation différentielle obtenue alors.
4. Résoudre cette équation.
5. a) Vers quelle limite $P(t)$ tend-elle ? On fera l'application numérique.
b) Montrer que cette valeur pouvait être obtenue par un raisonnement physique très simple.

c) Qu'aurait été la limite de $P[n]$ si on avait travaillé sur l'équation aux différences ?

6. a) Calculer $P[100]$ et $P(100\tau)$. Quelle erreur relative a-t-on commise ?
b) À quel instant t_0 $P(t_0)$ aurait-il égalé $P[100]$ calculé plus haut ? On donnera la valeur de $\frac{t_0}{\tau}$.

Données :

$$P_0 = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} ;$$

$$T_0 = 300 \text{ K} ;$$

$$V = 10^{-2} \text{ m}^3 ;$$

$$V_{\min} = 1 \text{ cm}^3 ;$$

$$V_{\max} = 10 \text{ cm}^3 ;$$

$$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \text{ mol}^{-1}.$$

■ ■ ■

23.14 Coefficient thermoélastique d'un gaz de van der Waals

1. En différentiant l'équation d'état de van der Waals, exprimez dV en fonction de dT pour un gaz de van der Waals.
2. Déduisez-en le coefficient de dilatation isobare α pour ce gaz.

23.1

Faux. Bien que ces quantités soient homogènes, la pression est un scalaire, une force est un vecteur.

23.2

Faux, il est défini par ses propriétés, l'équation d'état est une conséquence de celles-ci.

23.3

Vrai.

23.4

Vrai. En quelque sorte : de rayon nul...

23.5

Vrai.

23.6

Vrai.

23.7

Vrai.

23.8

Vrai.

23.9

Vrai.

23.10 Compression d'un gaz et d'un liquide

Il s'agit d'un exercice très simple d'application des définitions. Comme toujours, pensez à bien visualiser le système physique : un gaz et un liquide ne réagissent pas de la même manière à une compression !

1. Pour un gaz parfait, $PV = nRT$. Donc :

$$\begin{aligned}\chi_T &= -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \\ &= -\frac{1}{V} \left(-\frac{nRT}{P^2} \right) \\ \chi_T &= \frac{1}{P}\end{aligned}$$

Sous pression atmosphérique, $\chi_T = 9,9 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$.

2. χ_T étant constant, sa définition peut s'écrire approximativement :

$$\chi_T \simeq -\frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta P} = \frac{-a}{\Delta P}$$

3. Donc $\Delta P = -a/\chi_T$. Pour le liquide, $\Delta P = 19,7 \text{ MPa}$. Pour le gaz parfait, $\Delta P = 2,3 \text{ kPa}$.

La différence est énorme et montre qu'il faut exercer une pression beaucoup plus importante pour comprimer un liquide autant qu'un gaz.

23.11

Gonflage d'un pneu

L'exercice en lui-même ne comporte qu'une utilisation basique de la loi des gaz parfaits, mais il faut mettre en place une relation de récurrence !

Afin de ne pas confondre les grandeurs avant et après le n^{e} coup de pompe, faites deux schémas : un avant où V_2 est ouverte et V_1 fermée, puis un après où V_2 est fermée et V_1 ouverte.

La figure 23.4 montre la situation lorsque le piston est reculé à fond, et la figure 23.5 quand le piston est poussé à fond.

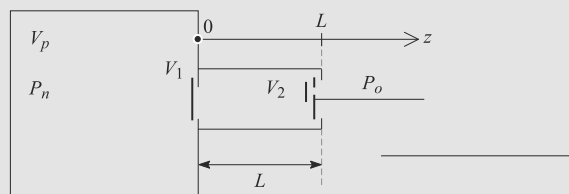


Figure 23.4 Dispositif quand le piston est reculé à fond.

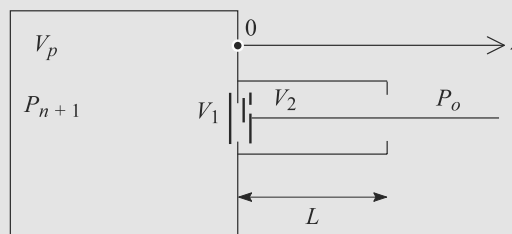


Figure 23.5 Dispositif quand le piston est poussé à fond.

1. La valve V_1 s'ouvre quand les pressions s'égalisent des deux côtés. Le volume dans le piston étant $V(z) = S z_n$:

$$P_{n-1} = \frac{n_0 RT}{S z_n}$$

La valve V_2 étant fermée, la quantité d'air est constante donc la même quantité de matière n_0 vérifie :

$$P_0 S L = n_0 R T_0$$

Donc :

$$z_n = \frac{P_0}{P_{n-1}} L$$

2. Par conservation de la matière :

$$P_n V_p = n_n RT_0 = (n_{n-1} + n_0) RT_0 = P_{n-1} V_p + P_0 S L$$

$$\Rightarrow P_n = P_{n-1} + \frac{P_0 S L}{V_p}$$

En sommant deux à deux ces relations de 0 à n :

$$P_n = P_0 + n \frac{P_0 S L}{V_p}$$

3. Si $P_n = P_f$, cela donne :

$$P_f - P_0 = n \frac{P_0 S L}{V_p}$$

$$\Rightarrow n = \frac{V_p (P_f - P_0)}{S L P_0}$$

V_p est le volume d'un tore. Comme $r \ll R_m$:

$$V_p \simeq \pi \left(\frac{r}{2} \right) 2\pi R_m$$

Numériquement, $n \simeq 35$ coups de pompe.

23.12 Équipement de plongée

1. a) Il y a la même quantité de matière n en surface et pendant la plongée, donc la loi des gaz parfaits à ces deux moments donne :

$$\frac{P_0 V_m}{RT} = \frac{P(z) V(z)}{RT}$$

$$\Rightarrow V(z) = \frac{P_0}{P_0 - \rho g z} V_m$$

b) La conservation de la matière donne immédiatement $V' = V_m/2$.

2. a) Pendant Δt , le plongeur respire $\nu \Delta t$ fois un volume V_0 à la température T_a et à la pression P_0 . La quantité d'air à chaque inspiration est $n = P_0 V_0 / RT_a$.

La quantité d'air absorbé par le plongeur quand l'avertissement intervient est donc :

$$n_{\text{initial}} - n_{\text{restant}} = \nu \Delta t n$$

Cette même quantité absorbée peut s'écrire :

$$n_{\text{initial}} - n_{\text{restant}} = \frac{P_{\text{initial}} V_b}{RT_a} - \frac{P_f V_b}{RT_a}$$

avec P_{initial} la pression initiale dans la bouteille :

$$P_{\text{initial}} = \frac{n_{\text{initial}} RT_a}{V_b} = \frac{P_b T_a}{T_b}$$

n_{restant} dans la bouteille est telle que :

$$P_f = \frac{n_{\text{restant}} RT_a}{V_b}$$

D'où :

$$n_{\text{initial}} - n_{\text{restant}} = \nu \Delta t \frac{P_0 V_0}{RT_a} \quad (23.1)$$

La durée cherchée est donc :

$$\Delta t = \frac{P_b \frac{T_a}{T_b} - P_f}{\nu P_0} \frac{V_b}{V_0} = 53 \text{ min } 24 \text{ s}$$

b) En négligeant le temps de descente, le même raisonnement donne :

$$n_{\text{initial}} - n_{\text{restant}} = \nu \Delta t' \frac{P(z) V_0}{RT_a}$$

En faisant le rapport de cette relation et de (23.1), il vient :

$$\Delta t' = \Delta t \frac{P_0}{P_0 - \rho g z} = 10 \text{ min } 57 \text{ s}$$

L'autonomie a donc diminué avec la profondeur d'un facteur 5.

3. a) La température restant constante, la loi des gaz parfaits indique que PV reste constant pendant la remontée. Donc :

$$P(z) 2V_0 = P(z_1) V_m$$

$$\Rightarrow (P_0 - \rho g z) 2V_0 = (P_0 - \rho g z_1) V_m$$

D'où :

$$z_1 = \frac{P_0}{\rho g} \left(1 - \frac{2V_0}{V_m} \right) + \frac{2V_0}{V_m} z \quad (23.2)$$

Numériquement, $z_1 = -25,6 \text{ m}$.

b) L'inégalité $P(z_1) - P(z_2) > \Pi$ donne, dans le cas limite de l'égalité :

$$\rho g (z_2 - z_1) = \Pi \quad (23.3)$$

$$\Rightarrow z_2 = z_1 + \frac{\Pi}{\rho g} = -20,5 \text{ m} \quad (23.4)$$

c) Soit z_1^* et z_2^* les valeurs de z_1 et z_2 dans ce nouveau cas. En notant V le nouveau volume restant, qui valait $2V_0$ précédemment, les formules (23.2) et (23.4) donnent :

$$z_1^* = \frac{P_0}{\rho g} \left(1 - \frac{V}{V_m} \right) + \frac{V}{V_m} z$$

$$z_2^* = z_1^* + \frac{\Pi}{\rho g}$$

avec cette fois $z_2^* = 0$ donc :

$$z_1^* = -\frac{\Pi}{\rho g} = \frac{P_0}{\rho g} \left(1 - \frac{V}{V_m} \right) + \frac{V}{V_m} z$$

$$\Rightarrow V = \frac{\Pi + P_0}{\rho g \left(\frac{P_0}{\rho g V_m} - \frac{z}{V_m} \right)}$$

$$= V_m \frac{\Pi + P_0}{P_0 - \rho g z}$$

Le volume expiré est $2V_0 - V$ donc :

$$V_{\text{expiré}} = 2V_0 - V_m \frac{P + P_0}{P_0 - \rho g z} = 2,85 \text{ L}$$

Donc le plongeur a tout intérêt à expirer de l'air pendant la remontée.

23.13 Étude d'une pompe à vide

Cet exercice est assez semblable à **Gonflage d'un pneu**. Il peut être abordé après ce dernier pour vérifier que l'utilisation des relations de récurrence est bien comprise.

La particularité de l'exercice est le passage à un modèle continu par développement limité et obtention d'une équation différentielle. Cette dernière est linéaire et ne doit pas poser de problème à ce stade du programme.

1. À $n\tau$, l'équation des gaz parfaits donne $P_0 V_{\min} = xRT_0$. Lors de la remontée du piston, la quantité de matière se conserve jusqu'à ouverture de K_1 . La pression P_c dans le cylindre vérifie alors $P_c V_c = xRT_0$. La valve K_1 s'ouvre à la condition que P_c devienne inférieure à la pression dans l'enceinte lors de la remontée : $P_c = P[n]$ pour $V_c < V_{\max}$. On obtient donc $\frac{xRT_0}{P[n]} < V_{\max}$. On élimine ensuite x : $\frac{P_0 V_{\min}}{P[n]} < V_{\max}$. La condition recherchée est donc :

$$P[n] > P_0 \frac{V_{\min}}{V_{\max}}$$

2. On suppose que K_1 s'ouvre lors de la remontée du piston. À $t = n\tau$, l'équation d'état des gaz parfait donne :

$$P_0 V_{\min} = x_n RT_0 \text{ dans le cylindre}$$

$$P[n]V = y_n RT_0 \text{ dans l'enceinte}$$

où x_n est la quantité de gaz dans le cylindre et y_n la quantité de gaz dans l'enceinte.

Le piston remonte sans que K_2 ne s'ouvre (pression dans le cylindre inférieure à P_0). Par conservation de la matière, l'équation d'état donne :

$$P[n+1](V + V_{\max}) = (x_n + y_n)RT_0 = P_0 V_{\min} + P[n]V$$

On peut alors écrire :

$$(P[n+1] - P[n])(V + V_{\max}) + P[n]V_{\max} = P_0 V_{\min}$$

$$\text{et donc } P[n+1] - P[n] + P[n] \frac{V_{\max}}{V + V_{\max}} = P_0 \frac{V_{\min}}{V + V_{\max}}$$

On identifie donc :

$$a = \frac{V_{\max}}{V + V_{\max}} \quad \text{et} \quad b = \frac{V_{\min}}{V + V_{\max}}$$

3. En reprenant l'équation aux différences et en divisant par τ , on trouve :

$$\frac{P[n+1] - P[n]}{\tau} + \frac{a}{\tau} P[n] = P_0 \frac{b}{\tau}$$

En passant à la limite pour τ faible, on aboutit à l'équation différentielle :

$$\frac{dP(t)}{dt} + \frac{a}{\tau} P(t) = \frac{b}{\tau} P_0$$

4. Cette équation a comme solution générale $P(t) = \frac{b}{a} P_0 + A \exp(-a \frac{t}{\tau})$ et la condition initiale $P(0) = P_0$ permet d'obtenir :

$$P(t) = \frac{b}{a} P_0 + \frac{a-b}{a} P_0 \exp(-a \frac{t}{\tau})$$

En revenant aux volumes définis dans l'exercice, on obtient :

$$P(t) = \frac{V_{\min}}{V_{\max}} P_0 + \frac{V_{\max} - V_{\min}}{V_{\max}} P_0 \exp\left(-\frac{V_{\max}}{V_{\max} + V} \frac{t}{\tau}\right)$$

5. a) Pour un temps suffisamment grand, $P(t)$ tend vers $\frac{V_{\min}}{V_{\max}} P_0$ qui est la solution de régime permanent (et la solution particulière de l'équation sans second membre). Numériquement, on trouve $P(\infty) = 10^4$ Pa.

b) La valeur qu'on vient de trouver n'est autre que celle déterminée en 1. En effet, la pompe fonctionne jusqu'à atteindre cette valeur limite pour laquelle la valve K_1 ne peut plus s'ouvrir.

On peut aussi raisonner sur le cylindre : la pression final dans l'enceinte est celle qu'on trouve si, en remontant le piston, on passe de P_0 pour V_{\min} à $P(\infty)$ pour V_{\max} . La conservation de la matière donne alors $P_0 V_{\min} = x_{\infty} RT_0 = P(\infty) V_{\max}$: la même solution est bien retrouvée.

c) En travaillant sur l'équation aux différences, on est amené à remplacer les pressions indicées n et $n+1$ par la valeur limite à l'infini :

$$P[\infty] - P[\infty] + P[\infty] \frac{V_{\max}}{V + V_{\max}} = P_0 \frac{V_{\min}}{V + V_{\max}}$$

On retrouve bien alors la même solution : $P[\infty] = P_0 \frac{V_{\min}}{V_{\max}}$

6. a) On a montré en 2. que $P[n+1] = P[n] \frac{V}{V + V_{\max}} + P_0 \frac{V_{\min}}{V + V_{\max}}$. À l'ordre suivant, on trouve :

$$P[n+1] = P[n-1] \left(\frac{V}{V + V_{\max}} \right)^2 + P_0 \frac{V_{\min}}{V + V_{\max}} \left(1 + \frac{V}{V + V_{\max}} \right)$$

$$\text{puis} \quad P[n+1] = P[n-2] \left(\frac{V}{V + V_{\max}} \right)^3 + P_0 \frac{V_{\min}}{V + V_{\max}} \times \left(1 + \frac{V}{V + V_{\max}} + \left(\frac{V}{V + V_{\max}} \right)^2 \right)$$

et donc
$$P[n+1] = P[0] \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right)^{n+1} + P_0 \frac{V_{\min}}{V+V_{\max}} \sum_0^n \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right)^i.$$

Or,
$$\sum_0^n \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right)^i = \frac{1 - \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right)^{n+1}}{1 - \frac{V}{V+V_{\max}}} = \frac{1 - \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right)^{n+1}}{\frac{V_{\max}}{V+V_{\max}}} = \frac{1 - \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right)^{n+1}}{V_{\max}} (V+V_{\max}).$$

On en déduit :

$$P[n+1] = P_0 \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right)^{n+1} + P_0 \frac{V_{\min}}{V_{\max}} \left[1 - \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right)^{n+1} \right]$$

ou

$$P[n] = P_0 \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right)^n + P_0 \frac{V_{\min}}{V_{\max}} \left[1 - \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right)^n \right].$$

L'application numérique donne $P[100] = 0,914 \cdot 10^5$ Pa et, avec le même nombre de chiffre significatif le même résultat pour $P(100\tau)$. L'écart relatif, obtenu en poussant les résultats plus loin, donne $4,5 \cdot 10^{-5}$! On voit que le modèle continu donne une excellente approximation du modèle discret.

b) On est amené à résoudre :

$$P(t_0) = \frac{V_{\min}}{V_{\max}} P_0 + \frac{V_{\max} - V_{\min}}{V_{\max}} P_0 \exp \left(-\frac{V_{\max}}{V_{\max} + V} \frac{t_0}{\tau} \right) = P[100]$$

et donc

$$P_0 \exp \left(-\frac{V_{\max}}{V_{\max} + V} \frac{t_0}{\tau} \right) = \left(P[100] - \frac{V_{\min}}{V_{\max}} P_0 \right) \times \frac{V_{\max}}{V_{\max} - V_{\min}}$$

$$\text{puis } -\frac{V_{\max}}{V_{\max} + V} \frac{t_0}{\tau} = \ln \left[\left(\frac{P[100]}{P_0} - \frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right) \frac{V_{\max}}{V_{\max} - V_{\min}} \right]$$

et finalement :

$$\frac{t_0}{\tau} = -\frac{V_{\max} + V}{V_{\max}} \ln \left[\left(\frac{P[100]}{P_0} - \frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right) \frac{V_{\max}}{V_{\max} - V_{\min}} \right].$$

Numériquement, on trouve 100,05 au lieu de 100,00 ce qui confirme la conclusion de a).

23.14

Coefficient thermoélastique d'un gaz de van der Waals

L'exercice est principalement technique. Entraînez-vous à gérer la relation entre différentielle et dérivée partielle pour une fonction d'état.

1. La définition de α est à pression constante. Considérons donc P comme constante et différencions l'équation d'état. Le membre de gauche donne :

$$\begin{aligned} d \left(\left(P + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) \right) &= \left(P + \frac{n^2 a}{V^2} \right) d(V - nb) \\ &\quad + d \left(P + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) \\ &= \left(P + \frac{n^2 a}{V^2} \right) dV \\ &\quad + n^2 a d \left(\frac{1}{V^2} \right) (V - nb) \\ d \left(\left(P + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) \right) &= \left(P - \frac{n^2 a}{V^3} (V - 2nb) \right) dV \end{aligned}$$

Quant au membre de droite :

$$d(nRT) = nR dT$$

Donc :

$$\left(P - \frac{n^2 a}{V^3} (V - 2nb) \right) dV = nR dT$$

2. Donc, par identification :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{nR}{P - \frac{n^2 a}{V^3} (V - 2nb)}$$

et le coefficient de dilatation isobare :

$$\alpha = \frac{nR}{PV - \frac{n^2 a}{V^2} (V - 2nb)}$$



Vous avez donc pu calculer une dérivée de V sans disposer de l'expression de V lui-même !

Vérifions la cohérence du modèle de Van der Waals : si a et b tendent vers 0, nous devons retomber sur les mêmes résultats que le gaz parfait. Nous retrouvons bien $\alpha \rightarrow 1/T$.

Plan

24.1 Principe fondamental de la statique des fluides	368
24.2 Statique d'un fluide homogène incompressible	369
24.3 Statique d'un fluide homogène compressible	370
24.4 Théorème d'Archimède	371
Synthèse	372
Tests et exercices	373
Corrigés des exercices	376

Introduction

Après avoir vu le passage du microscopique au macroscopique sur le cas du gaz parfait, voyons l'étude (purement macroscopique, donc thermodynamique) de fluides, liquide ou gaz, en équilibre.

Prérequis

- Relation mécanique de la statique
- Équations différentielles et intégration
- Gaz parfait

Objectifs

- Établir la relation fondamentale de la statique des fluides
- Dépendance de la pression avec l'altitude pour un liquide, pour l'atmosphère isotherme
- Introduire le facteur de Boltzmann
- Introduire la poussée d'Archimède

24.1 Principe fondamental de la statique des fluides



Cette formule repose sur le choix d'un axe Oz **ascendant**.



Une surface isobare est donc une surface d'altitude constante.

Nous nous limiterons à un fluide au repos, de température uniforme, soumis à la pesanteur supposée uniforme ($g = \text{cst}$). Les paramètres intensifs variables ne dépendent que de l'altitude : masse volumique $\rho(z)$, pression $P(z)$.

L'équilibre des forces de pesanteur et de pression dans le fluide conduit à :

Loi

Principe fondamental de la statique des fluides

$$dP = -\rho(z)g dz$$

24.2 Statique d'un fluide homogène incompressible



Donc le coefficient thermoélastique χ_T sera considéré comme nul.



La loi de Pascal repose aussi sur le choix d'un axe vertical **ascendant**.



La surface libre d'un liquide est la surface isobare définie par $P = P_{\text{atm}}$.

Il s'agira donc d'un liquide : $\rho = \text{cst}$.

Le principe fondamental de la statique s'intègre simplement, avec $P_0 = P(z = 0)$, en :

Loi de Pascal

$$P(z) = P_0 - \rho g z \quad \Leftrightarrow \quad \Delta P = -\rho g \Delta z$$

Conséquence immédiate, le théorème des vases communicants : à l'équilibre, les surfaces libres d'un ensemble de vases communicants sont situées dans un même plan horizontal. Donc la surface libre d'un liquide est toujours plane.

Méthode 1 appliquer la loi de Pascal

La loi de Pascal n'est applicable que dans une unique phase fluide incompressible et à l'équilibre.

- Donnez-vous deux points A et B . Pour qu'ils soient dans la même phase fluide, il faut pouvoir tracer une ligne continue entre eux sans traverser d'interface avec un autre fluide.
- L'axe Oz indiquant la verticale ascendante, $(P_B - P_A) = -\rho g(z_B - z_A)$.

À l'interface entre deux fluides, il y a continuité du champ de pression. Il peut être alors judicieux d'appliquer la loi de Pascal de chaque côté de l'interface, avec un des points placé **sur** l'interface.

Exemple d'application

Un tube cylindrique contient une hauteur h de liquide de masse volumique ρ . Sa partie supérieure est ouverte à la pression atmosphérique. Calculez la pression au fond du tube.

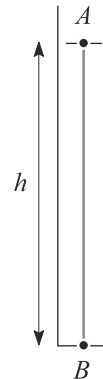
Solution

La surface libre du liquide est à la pression atmosphérique P_0 . Prenons un point A sur la surface libre et un point B au fond du tube. Il est possible de relier A et B par une ligne ne sortant pas du fluide (figure 24.1) donc la loi de Pascal est applicable :

$$P(A) - P(B) = -\rho g h \quad \Rightarrow \quad P(B) = P_0 + \rho g h$$

La pression en B est supérieure à celle en A , ce qui est raisonnable.

Figure 24.1 Variation de pression dans un tube.



24.3 Statique d'un fluide homogène compressible

Cette fois notre modèle de fluide sera plutôt un gaz. Nous travaillons sous les hypothèses suivantes :

- les paramètres intensifs ne dépendent que de l'altitude,
- le fluide n'est soumis qu'à la pesanteur, supposée uniforme,
- le fluide est traité comme un gaz parfait,
- la température est constante dans le gaz.

Ce modèle s'appelle **modèle de l'atmosphère isotherme**, car il peut être utilisé pour décrire l'atmosphère terrestre (au moins dans les grandes lignes).

24.3.1 Champ de pression

L'équation d'état du gaz parfait (masse molaire M) permet de calculer ρ :

$$\rho(z) = \frac{P(z)M}{RT}$$

pour intégrer le principe fondamental de la statique des fluides, avec P_{atm} la pression atmosphérique au niveau du sol :

Loi

Pression dans l'atmosphère isotherme :

$$P(z) = P_{\text{atm}} \exp\left(-\frac{Mg}{RT} z\right)$$

24.3.2 Facteur de Boltzmann

Loi

Soit un système thermodynamique à la température T . La probabilité de trouver une particule du système dans l'état d'énergie E est proportionnelle au facteur de Boltzmann $\exp(-E/kT)$.

Adaptons cet énoncé au modèle de l'atmosphère isotherme. Comme l'air se raréfie avec l'altitude, la probabilité de trouver une molécule de gaz est plus grande près du sol qu'à haute altitude. L'énergie associée à l'altitude est l'énergie potentielle de pesanteur $E_p(z) = mgz$.

Le théorème ci-dessus se traduit alors pour la densité moléculaire par le fait que $n^*(z)$ est proportionnelle au facteur de Boltzmann :

$$n^*(z) = A \exp\left(-\frac{E_p(z)}{kT}\right) = A \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)$$

La constante A est la valeur de n^* au niveau du sol. Le lien avec le champ de pression du paragraphe précédent est assuré par $R = kN_A$ et $m = M/N_A$.



Ce résultat est très général en physique mais sa validité repose sur le fait que le système possède un grand nombre de particules (macroscopique).

24.4 Théorème d'Archimède

La poussée d'Archimède est la résultante des forces de pression exercées sur un corps par le fluide dans lequel il est immergé. Elle est couramment notée \vec{I}_A .

Mécaniquement, son effet est de « modifier le poids » du corps immergé : elle vient s'y soustraire. On parle alors de **poids apparent**.

Méthode 2 Calculer la poussée d'Archimède

La poussée d'Archimède est la résultante des forces de pression sur un corps **totale**ment immergé dans un fluide **au repos** : elle est égale et opposée au poids du fluide déplacé par le corps.

1. Calculez le volume V du corps immergé, qui est aussi le volume de fluide déplacé.
2. Connaissant la masse volumique du fluide, déduisez-en la masse du fluide déplacé puis son poids. Orientez la force correspondante de manière opposée au poids du corps immergé.

Exemple d'application

Soit un corps de volume V , de masse m et de masse volumique ρ , immergé dans un fluide de masse volumique ρ_f . Calculez la poussée d'Archimède qu'il subit et commentez-la.

Solution

Le « fluide déplacé » est donc de volume V donc sa masse et son poids sont :

$$m_f = \rho_f V \quad \Rightarrow \quad \vec{P}_f = m_f \vec{g} = \rho_f V \vec{g}$$

La poussée d'Archimède sur le corps immergée est opposée à ce poids. Elle est donc orientée vers le haut et vaut :

$$\vec{I}_A = -\rho_f V \vec{g}$$

Donc le **poids apparent** du corps dans ce fluide est :

$$\vec{P}_{\text{app}} = \vec{P} + \vec{I}_A = (m - M)\vec{g} = (\rho - \rho_f)V \vec{g}$$

Tout se passe donc comme si le corps avait une masse volumique apparente $\rho - \rho_f$. Tout dépend du signe de cette masse volumique apparente :

- Si le corps est plus dense que le fluide, alors la masse volumique apparente est positive. La situation est donc possible, le corps reste donc totalement immergé.
- Si le corps est moins dense que le fluide, on trouverait une masse volumique apparente négative, ce qui n'est pas physique. Donc l'hypothèse d'équilibre du corps immergé est impossible. Alors, dans le cas d'un liquide, le corps flotte à la surface.

Synthèse

Savoirs

- La relation fondamentale de la statique des fluides
- Loi de Pascal dans un liquide
- Reconnaître le facteur de Boltzmann
- Exprimer la poussée d'Archimède

Savoir-faire

- Calculer les différences de pression dans les fluides
- Calculer une poussée d'Archimède

Mots-clés

- Pression,
- statique,
- pesanteur,
- fluide incompressible homogène (liquide),
- atmosphère isotherme,
- facteur de Boltzmann,
- poussée d'Archimède.

Tests de connaissances

- 24.1 Pour un fluide incompressible, α est nul.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 24.2 Ce qui s'approche le plus d'un fluide homogène incompressible est un liquide.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 24.3 Dans tout fluide, compressible ou non, la pression augmente avec la profondeur.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 24.4 Tout corps plongé dans un liquide reçoit une poussée égale au poids du volume liquide déplacé.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 24.5 La force exercée par l'atmosphère sur une surface est égale en norme au poids de l'atmosphère à l'aplomb de cette surface.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 24.6 La masse au-dessus d'un mètre carré de sol est de dix tonnes.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 24.7 À cent mètres de profondeur, la pression est d'environ 11 bars.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 24.8 La poussée d'Archimède est la résultante des forces de pression qu'exerce le fluide sur l'objet immergé.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 24.9 Avec une force de 10 N, on peut obtenir une pression de 1 bar.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 24.10 Dans le facteur de Boltzmann, le terme dans l'exponentielle est l'opposé du rapport entre énergie potentielle microscopique et énergie cinétique microscopique disponible.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 24.11 L'utilisation du facteur de Boltzmann suppose qu'on traite un système isotherme.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

24.12 Pompe hydraulique

Étudions le principe de la pompe hydraulique. Considérons deux vases communicants de diamètres très différents (sections S_1 et $S_2 \gg S_1$), figure 24.2. Une force \vec{F}_1 est exercée sur le piston de gauche. Calculez la force \vec{F}_2 qui en résulte dans le piston de droite.

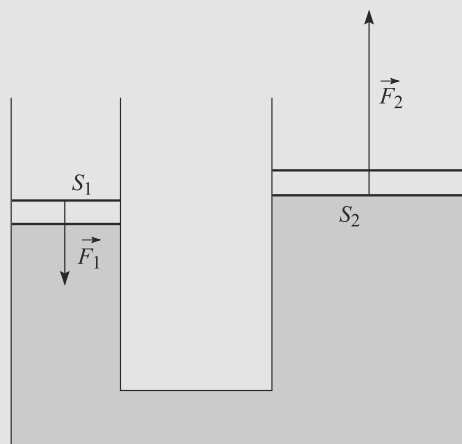


Figure 24.2 Schéma de principe d'une pompe hydraulique.

24.13 Histoires de glace

- Un glaçon flotte dans un verre rempli à ras bord. Faut-il vider partiellement le verre pour éviter qu'il ne déborde lorsque le glaçon fond ?
- En assimilant un iceberg à un cube d'arête a , calculez la hauteur émergée d'un iceberg à 0°C flottant sur l'eau à la même température.
 Masse volumique de la glace : $\rho_g = 920 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ à 0°C .

24.14 Vol d'un aérostat

(D'après G2E.)

Un ballon est constitué d'une nacelle et d'une enveloppe initialement dégonflée. La masse de cet ensemble est de $m = 500 \text{ kg}$. L'enveloppe a un volume maximal $V_{\text{max}} = 1000 \text{ m}^3$ et est gonflée avec de l'hélium. L'enveloppe est munie d'une soupape qui assure l'équilibre mécanique et thermique entre l'hélium et l'atmosphère.

L'air sera traité dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme à la température $T_0 = 290 \text{ K}$ avec une pression au sol de $P_0 = 1 \text{ bar}$. Les frottements de l'air sur le ballon seront négligés. Tous les gaz seront supposés parfaits.

Les masses volumiques de l'hélium et de l'air seront respectivement notées ρ_{He} et ρ_{air} .

La verticale sera repérée par un axe Oz vertical ascendant.

1. Démontrez que la densité de l'hélium par rapport à l'air est indépendante de l'altitude. Application numérique.
2. Phase de décollage : sur cette phase, nous supposons qu'il n'y a aucune fuite d'hélium : tout le gaz injecté dans le ballon y reste. Le volume d'hélium injecté dans l'enveloppe est noté V .
 - a) Calculez la force ascensionnelle \vec{F} , définie comme la résultante des forces exercées sur le ballon en excluant le poids de la nacelle et de l'enveloppe. Vous l'exprimerez en fonction de V , g , d et ρ_{air} .
 - b) Déduisez-en le volume minimal V_{min} pour lequel le ballon décolle et la masse d'hélium à laquelle cela correspond.

3. Phase ascensionnelle : le ballon a été gonflé avec un volume $V_0 = 500 \text{ m}^3$.

- a) Calculez le volume du ballon en fonction de l'altitude z .
- b) Calculez l'altitude h pour laquelle le ballon atteint son volume maximal.

Données :

- Masses molaires : $M_{\text{air}} = 29 \text{ g.mol}^{-1}$;
 $M_{\text{He}} = 4 \text{ g.mol}^{-1}$.
- Masse volumique de l'air au niveau du sol :
 $\rho_{\text{air}0} = 1,3 \text{ g.L}^{-1}$.

Exercices d'approfondissement

24.15 Modèle de l'atmosphère polytropique

(D'après Mines de première année.)

Le modèle de l'atmosphère polytropique est plus raffiné que le modèle de l'atmosphère isotherme, en ce sens qu'il admet une variation de la température avec l'altitude suivant la relation température-pression $P^{-k}(z)T(z) = \text{cst}$ avec $k = 0,15$ et z l'altitude (avec l'axe Oz ascendant). Les valeurs au sol sont notées T_0 et P_0 .

Le volume massique de l'air est noté $v(z)$ et l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.

1. Donnez une relation entre P , v , R , la masse molaire M_{air} et T .
2. Écrivez la relation fondamentale de la statique des fluides avec g , dP/dz et v .
3. La température évolue avec l'altitude suivant la loi $dT/dz = -\delta$ avec δ une constante positive. Calculez δ en fonction de k , M_{air} , g et R . Application numérique.
4. Déduisez-en la loi $T(z)$ en fonction de T_0 , δ et z .
5. Soit une quantité de n moles de gaz parfait à l'altitude z et $V(z)$ son volume. Posons $V(0) = V_0$. Calculez $V(z)$ en fonction de δ , z , T_0 , V_0 et k .
6. Reprenez l'exercice 14. À quel endroit le changement de modèle (de l'atmosphère isotherme à l'atmosphère polytropique) modifie-t-il les résultats ? Reprenez les calculs à cet endroit et commentez le fait qu'un tel ballon peut être utilisé pour étudier la troposphère, partie de l'atmosphère située entre le sol et 10 km d'altitude.

24.16 Le ludion

(D'après IVP.)

Le ludion est représenté figure 24.3 : c'est une petite masse m suspendue à un ballon sphérique rempli d'air, l'ensemble étant placé dans une éprouvette cylindrique verticale. L'éprouvette est supposée beaucoup plus haute que large. La hauteur d'eau dans l'éprouvette est notée h .

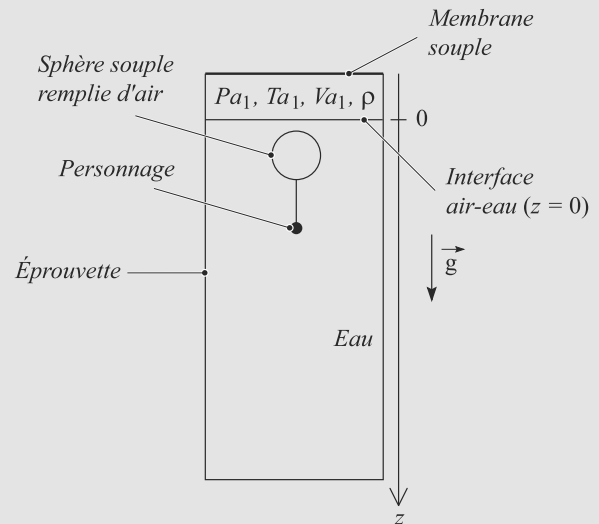


Figure 24.3 Ludion au repos.

L'éprouvette est surmontée d'une membrane souple imperméable. La pression de l'air situé entre la surface de l'eau et la membrane est notée P_a , sa température T_a et son volume V_a . L'air est assimilé à un gaz parfait de masse volumique ρ .

- Lorsque nous n'appuyons pas sur la membrane, le ludion est en équilibre à la surface de l'eau (figure 24.3), le ballon restant immergé. Alors, $P_a = P_{a1}$, $T = T_{a1}$ et $V_a = V_{a1}$.

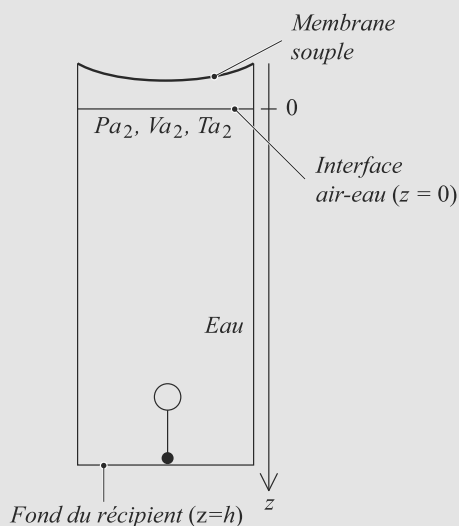


Figure 24.4 Le ludion coule par pression sur la membrane.

- Mais si nous appuyons sur la membrane, nous observons que le ludion tombe au fond de l'éprouvette (figure 24.4). Alors, $P_a = P_{a2}$, $T = T_{a2}$ et $V_a = V_{a2}$.

La verticale est repérée par un axe Oz descendant dont l'origine est placée à la surface de l'eau supposée fixe. L'eau est modélisée comme un fluide incompressible. La pression dans l'eau en un point d'altitude z est notée $P_1(z)$ lorsque nous n'appuyons pas sur la membrane et $P_2(z)$ dans le cas contraire.

1. Calculez les champs de pression $P_1(z)$ et $P_2(z)$ en supposant que la présence du ludion est sans influence sur eux.

2. Le ballon rempli d'air est à la température T_{a1} , à la pression P_{a1} et son volume est noté V_L . Le ludion est repéré par son altitude z et vous ferez l'approximation que le ludion est assez petit pour pouvoir considérer la pression uniforme autour de lui.

- a) Sachant que le volume de la masse m est négligeable devant celui du ballon, calculez la masse m .
- b) En admettant que l'air dans le ballon évolue tel que PV^γ reste constant avec γ un coefficient constant caractéristique du gaz, calculez son volume $V(z)$.
- c) Établissez l'équation différentielle du mouvement gouvernant $z(t)$ en négligeant tout frottement et en supposant que le mouvement est assez doux pour que le théorème d'Archimède reste applicable.
- d) Intégrez une fois cette équation pour exprimer \dot{z}^2 en fonction de z et des données du problème. Calculez numériquement la vitesse à laquelle le ludion atteint le fond de l'éprouvette.
- e) Discutez brièvement en quoi le comportement du ludion serait qualitativement changé ou inchangé si sa masse diminue de 5 % ou augmente de 5 %.

Valeurs numériques :

- Pesanteur : $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$
- Éprouvette : $h = 1 \text{ m}$
- Eau : $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$
- Air : $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$; $\gamma = 1,4$
- $V_{a1} = 10^{-4} \text{ m}^3$; $T_{a1} = 300 \text{ K}$; $P_{a1} = 1 \text{ bar}$
- $P_{a2} = 2 \text{ bar}$
- Ballon : $V_L = 1 \text{ cm}^3$

24.1

Faux, il peut être dilatable.

24.2

Vrai.

24.3

Vrai (voir le principe fondamental de la statique des fluides).

24.4

Faux, elle est égale à l'opposé du poids.

24.5

Vrai.

24.6

Vrai, cela correspond à 10^5 N par mètre carré soit 1 bar.

24.7

Vrai. On compte en effet sur un mètre carré 1 tonne par mètre soit 0,1 bar en plus.

24.8

Vrai.

24.9

Vrai, il suffit de l'appliquer sur un centimètre carré.

24.10

Faux. Le terme en kT du dénominateur n'est pas exactement l'énergie cinétique mais lui est proportionnel.

24.11

Vrai.

24.12

Pompe hydraulique

Méthode mise en jeu : n°1.

L'exercice s'articule essentiellement autour de la définition de la pression comme une force surfacique. Il ne devrait pas poser de difficulté.

La force \vec{F}_1 s'applique sur la surface S_1 et induit donc une augmentation de pression $\Delta P = F_1/S_1$ avec $F_1 = \|\vec{F}_1\|$.

Les deux surfaces libres du liquide dans les deux parties de la pompe sont à la même pression donc la surpression ΔP à gauche est intégralement transmise à droite. La force résultante

s'écrit, en norme :

$$F_2 = \Delta P S_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1 \gg F_1$$

Du fait de la grande différence de section entre les deux parties de la pompe, la force exercée a été considérablement amplifiée.

24.13

Histoires de glace

Méthode mise en jeu : n°2.

En étudiant une poussée d'Archimède, n'oubliez pas que seule la partie immergée du solide est à considérer.

Pour la question 1, comme une partie du glaçon dépasse de la surface de l'eau, on serait tenté de penser que le verre va déborder une fois le glaçon fondu. Mais ce serait oublier que la glace est moins dense que l'eau liquide.

1. La partie immergée du glaçon est soumise à la poussée d'Archimède de l'eau, la partie émergée à la poussée d'Archimède de l'air. Cette dernière sera complètement négligée par rapport à cette première, puisque l'air est environ 1000 fois moins dense que l'eau.

Exprimons l'égalité de la masse du glaçon avant fonte et de l'eau qu'il produit en fondant.

- Avant fonte, notons V_i le volume immergé du glaçon et V_e le volume émergé. La masse m du glaçon est alors :

$$m = \rho_g(V_i + V_e)$$

Le volume d'eau déplacé V_i provoque une poussée d'Archimède $\vec{I}_A = \rho_l V_i \vec{g}$. À l'équilibre, cette poussée est égale et opposée au poids du glaçon donc :

$$\begin{aligned} \rho_g(V_i + V_e) &= \rho_l V_i \\ \Rightarrow m &= \rho_l V_i \end{aligned}$$

- Après fonte, la masse m du glaçon n'a pas changé. Son volume devient donc :

$$V' = \frac{m}{\rho_l} = \frac{\rho_l V_i}{\rho_l} = V_i$$

Donc le niveau d'eau ne bouge pas au cours de la fonte du glaçon et il est inutile de s'inquiéter !

2. Appelons h la hauteur émergée. Avec les mêmes notations que dans la question précédente :

$$\begin{aligned} V_i &= a^2(a - h) \\ V_e &= a^2 h \end{aligned}$$

L'égalité du poids et de la poussée d'Archimède (toujours en négligeant celle de l'air) donne :

$$\begin{aligned} \rho_g a^3 &= \rho_l a^2(a - h) \\ \Rightarrow h &= a - \frac{\rho_g a}{\rho_l} \\ \Rightarrow \frac{h}{a} &= 1 - \frac{\rho_g}{\rho_l} = 8 \% \end{aligned}$$

Ce qui est conforme à l'usage, qui dit qu'un dixième d'un iceberg émerge de la surface de l'eau.

24.14 Vol d'un aérostat

Méthode mise en jeu : n°2.

Grâce à la soupape, il y a toujours égalité des température et pression entre l'hélium et l'air extérieur.

La force ascensionnelle est bien entendu due à la poussée d'Archimède par l'air. Comme l'hélium est moins dense que l'air, la poussée est vers le haut : le ballon monte. Du moins dès que cette force dépasse le poids de l'ensemble matériel+hélium.

Au cours de la phase ascensionnelle, le ballon évolue à masse constante. Comme la pression atmosphérique diminue avec l'altitude, celle dans le ballon aussi. Donc le volume augmente et il y a risque de rupture de l'enveloppe. En pratique, on contourne le problème en évacuant du gaz via la soupape, pour « relâcher la pression » dans l'enveloppe.

1. Grâce à la soupape, l'air et l'hélium sont à la même pression et à la même température. Or, pour un gaz parfait :

$$\rho(z) = \frac{MP(z)}{RT}$$

Donc la densité s'exprime :

$$d = \frac{\rho_{\text{He}}}{\rho_{\text{air}}} = \frac{M_{\text{He}}}{M_{\text{air}}} \approx 0,14$$

2. a) Le ballon est soumis au poids de l'hélium $\rho_{\text{He}}V\vec{g}$, au poids des instruments $m\vec{g}$ et à la poussée d'Archimède de l'air \vec{I}_A . Donc la force ascensionnelle est égale à :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \rho_{\text{He}}V\vec{g} + \vec{I}_A \\ &= \rho_{\text{He}}V\vec{g} - \rho_{\text{air}}V\vec{g} \\ \vec{F} &= -\rho_{\text{air}}V(1-d)\vec{g}\end{aligned}$$

- b) La ballon décolle lorsque cette force devient supérieure au poids de l'ensemble :

$$\begin{aligned}\rho_{\text{air}0}V(1-d)g &\geq (\rho_{\text{He}}V + m)g \\ \Rightarrow V_{\min} &= \frac{m}{\rho_{\text{air}0}(1-2d)} = 534 \text{ m}^3\end{aligned}$$

Cela correspond à une masse :

$$\begin{aligned}m_{\min} &= \rho_{\text{He}}(z=0)V_{\min} \\ &= d\rho_{\text{air}0}V_{\min} \\ m_{\min} &= 97,2 \text{ kg}\end{aligned}$$

3. a) La quantité d'hélium dans le ballon reste constante égale à $m_{\text{He}} = \rho_{\text{He}}V$ mais ρ_{He} et V dépendent de l'altitude z . Donc :

$$\begin{aligned}m_{\text{He}} &= \rho_{\text{He}}(z=0)V_0 = \rho_{\text{He}}(z)V(z) \\ \frac{M_{\text{He}}P(z=0)}{RT_0}V_0 &= \frac{M_{\text{He}}P(z)}{RT_0}V(z) \\ P_0V_0 &= P(z)V(z)\end{aligned}$$

Le modèle de l'atmosphère isotherme donne la dépendance de la pression avec l'altitude, d'où :

$$V(z) = V_0 \exp\left(\frac{M_{\text{air}}g}{RT_0}z\right)$$

Le volume du ballon augmente donc rapidement avec l'altitude.

- b) L'équation $V(h) = V_{\max}$ conduit à :

$$h = \frac{RT_0}{M_{\text{air}}g} \ln\left(\frac{V_{\max}}{V_0}\right) = 5,9 \text{ km}$$

24.15 Modèle de l'atmosphère polytropique

Méthode mise en jeu : n°2.

L'exercice vérifie essentiellement que vous avez compris l'esprit du calcul de l'atmosphère isotherme. Le principe en est le même, avec quelques difficultés techniques supplémentaires.

1. Pour un gaz parfait, $PV = nRT$ avec $n = m/M_{\text{air}}$ et $v = V/m$. D'où :

$$P(z)v(z) = \frac{RT(z)}{M_{\text{air}}}$$

2. La relation s'écrit $dP = -\rho g dz$. Le volume massique est l'inverse de la masse volumique donc :

$$\frac{dP}{dz}(z) = -\frac{g}{v(z)}$$

3. La relation entre T et P donnée par l'énoncé peut s'écrire entre une altitude quelconque et le sol :

$$\begin{aligned}P(z)^{-k}T(z) &= P_0^{-k}T_0 \\ \Rightarrow T(z) &= T_0 \left(\frac{P(z)}{P_0}\right)^k\end{aligned}$$

En dérivant ceci par rapport à l'altitude il vient :

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dz}(z) &= \frac{T_0}{P_0^k} k P(z)^{k-1} \frac{dP}{dz}(z) \\ -\delta &= -\frac{kT_0 P(z)^{k-1} g}{P_0^k v(z)}\end{aligned}$$

En utilisant $P_0^{-k} T_0 = P(z)^{-k} T(z)$, il vient :

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{kT(z)P(z)^{k-1}g}{P(z)^k v(z)} \\ &= kg \frac{T(z)}{P(z)v(z)}\end{aligned}$$

D'après la première question, cela donne :

$$\delta = \frac{M_{\text{air}} kg}{R} = 5,1 \cdot 10^{-3} \text{ K.m}^{-1}$$

4. L'intégration de dT/dz entre le sol et une altitude z quelconque conduit à :

$$T(z) = T_0 - \delta z$$

5. La loi des gaz parfaits donne une expression pour le volume :

$$V(z) = \frac{nRT(z)}{P(z)}$$

Combinons $P(z) = P_0(T(z)/T_0)^{1/k}$ et $T(z) = T_0 - \delta z$:

$$V(z) = \frac{nRT_0}{P_0} \left(\frac{T_0 - \delta z}{T_0} \right)^{1-\frac{1}{k}}$$

Le premier terme s'identifie à V_0 , d'où le résultat :

$$V(z) = V_0 \left(1 - \frac{\delta z}{T_0} \right)^{1-\frac{1}{k}}$$

6. La première utilisation du modèle d'atmosphère se trouve question a). En employant le modèle polytropique, il faut modifier le calcul en tenant compte du fait que la température dépend de l'altitude.

La conservation de la masse d'hélium s'écrit alors :

$$m_{\text{He}} = \rho_{\text{He}}(z=0)V_0 = \rho_{\text{He}}(z)V(z)$$

$$\frac{M_{\text{He}} P_0}{RT_0} V_0 = \frac{M_{\text{He}} P(z)}{RT(z)} V(z)$$

Le calcul de l'altitude total se fait de la même manière, mais avec une nouvelle expression pour $V(h) = V_{\text{max}}$:

$$h = \frac{T_0}{\delta} \left(1 - \left(\frac{V_{\text{max}}}{V_0} \right)^{\frac{k}{k-1}} \right) = 6,5 \text{ km}$$

Nous trouvons un résultat plus élevé qu'avec le modèle isotherme, et probablement plus réaliste.

24.16 Le ludion

Méthode mise en jeu : n°2.

La première chose à faire avec un exercice de ce type est de prendre le temps de lister les notations pour bien vous y retrouver.

Vous avez essentiellement deux ingrédients à combiner : une étude mécanique incluant la poussée d'Archimède et une relation thermodynamique $PV^\gamma = \text{cst}$. Gardez la rigueur exigée en mécanique pour cet exercice et prenez le temps de réfléchir à chaque étape sur la pertinence de votre résultat.

La relation $PV^\gamma = \text{cst}$ sera étudiée au chapitre 25 et porte le nom de Loi de Laplace.

1. L'eau étant un fluide incompressible, la relation fondamentale de la statique des fluides s'intègre avec ρ constante. L'axe Oz étant descendant, il vient :

$$P_1(z) = P_{a1} + \rho g z$$

$$P_2(z) = P_{a2} + \rho g z$$

2. a) À l'équilibre, le poids est exactement compensé par la poussée d'Archimède :

$$m\vec{g} + \vec{I}_A = \vec{0}$$

La masse d'eau déplacée est $m_e = \rho V_L$ donc $\vec{I}_A = -m_e \vec{g}$. Donc $m = \rho V_L$.

b) Le produit PV^γ est constant au cours du mouvement, écrivons-le donc à l'instant initial et à un instant quelconque :

$$P_2(z)V(z)^\gamma = P_{a1}V_L^\gamma$$

En combinant ceci avec l'expression de $P_2(z)$ il vient :

$$V(z) = V_L \left(\frac{P_{a1}}{P_{a2} + \rho g z} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

c) Le ludion est soumis à son poids et à la poussée d'Archimède donc le PFD s'écrit :

$$\begin{aligned}m\ddot{z} &= mg - m_e g \\ &= mg - \rho V_L \left(\frac{P_{a1}}{P_{a2} + \rho g z} \right)^{\frac{1}{\gamma}} g\end{aligned}$$

Avec $m = \rho V_L$, cela se réduit à :

$$\ddot{z} = g \left(1 - \left(\frac{P_{a1}}{P_{a2} + \rho g z} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right)$$

d) Multiplions l'équation différentielle par \dot{z} pour pouvoir l'intégrer entre l'instant initial et un instant ultérieur quelconque :

$$\frac{1}{2} \dot{z}^2 = g z - \frac{P_{a1}^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right)} (P_{a2} + \rho g z)^{1-\frac{1}{\gamma}} + B$$

où B est la constante d'intégration. Initialement $z = 0$ et $\dot{z} = 0$ donc finalement :

$$\dot{z}^2 = 2gz + \frac{2P_{a1}^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)} \left(P_{a2}^{1-\frac{1}{\gamma}} - (P_{a2} + \rho gz)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)$$

La vitesse au fond de l'éprouvette est $\dot{z}(h) = 2,8 \text{ m.s}^{-1}$.

e) Le terme $2gz$ désigne l'action de la pesanteur et le second terme, toujours négatif, la correction due aux phénomènes hydrostatiques.

Si $m > \rho V_L$, le second terme est plus faible donc la vitesse de chute augmente.

Si $m < \rho V_L$, le ludion ne plonge pas dès que nous exerçons une pression sur la membrane et, à hauteur égale, la résultante des forces sur le ludion sera supérieure. Donc la chute sera plus lente.

Premier principe de la thermodynamique

CHAPITRE 25

Plan

25.1	Premier principe	381
25.2	Types de transformation	382
25.3	Travail des forces de pression extérieure	384
25.4	Énergie interne et enthalpie	386
25.5	Bilan énergétique pour un gaz parfait	388
	Synthèse	389
	Tests et exercices	390
	Corrigés des exercices	395

Introduction

Ce chapitre exige un apprentissage très soigneux des définitions et des conditions de validité des théorèmes énoncés ! Vous devez en outre garder une rigueur impeccable dans les notations, en particulier pour ne pas confondre les différentielles exactes, correspondant aux fonctions d'état, et les différentielles non exactes (travail et transfert thermique).

Nous nous limitons ici aux corps purs monophasés ne subissant aucune transformation chimique et aucun changement d'état (la quantité de matière n est donc constante).

Prérequis

- Fonction d'état
- Conservation de l'énergie
- Notion de travail
- Capacité thermique
- Température, pression, énergie interne d'un gaz parfait

Objectifs

- Acquérir le vocabulaire des transformations
- Distinguer travail et transfert thermique
- L'énergie interne est une fonction d'état
- Établir l'intérêt de l'enthalpie
- Introduire les détentes de Joule (Gay-Lussac et Kelvin)
- Introduire la relation de Mayer
- Introduire la loi de Laplace

25.1 Premier principe

25.1.1 Énergie interne, travail, transfert thermique

Un système macroscopique possède une énergie cinétique et une énergie potentielle telles que vous les avez étudiées en cours de mécanique. Ces énergies sont dites **macroscopiques**.

Mais il contient aussi d'autres formes d'énergie qui ont été négligées en mécanique. Ce sont ces formes d'énergie qui interviennent, par exemple, dans les phénomènes thermiques :

- L'énergie cinétique microscopique $E_{c\text{ micro}}$ décrit l'agitation thermique des molécules du système.
- L'énergie potentielle microscopique $E_{p\text{ micro}}$ décrit les forces s'exerçant entre les molécules du système.

L'énergie interne est définie comme la somme de ces deux contributions énergétiques :

Définition

L'énergie interne U est défini par :

$$U = E_{c\text{ micro}} + E_{p\text{ micro}}$$

L'intérêt de U est que c'est un **paramètre d'état** dépendant d'un petit nombre de paramètres.

Il faut donc introduire le travail de forces que nous n'avions pas eu besoin de prendre en compte en mécanique. Les forces conservatives sont prises en compte dans les diverses énergies potentielles déjà introduites. Restent donc les forces non conservatives.

Définition

Les travaux des forces extérieures non conservatives sont classés en deux catégories :

- Le travail de celles entraînant un mouvement macroscopique (déplacement, déformation, etc) est appelé **travail** tout court et noté W .
- Le travail de celles n'entraînant aucun effet mécanique macroscopique est appelé **transfert thermique** et noté Q .

Le travail des forces de pression rentre donc dans W , tandis que, par exemple, le travail dû à un chauffage rentre dans Q .

25.1.2 Énoncé du premier principe

Le théorème de l'énergie mécanique se généralise donc en $\Delta E_m + \Delta U = W + Q$. Mais nous nous limiterons au cas de systèmes mécaniquement au repos (E_m constante). L'énoncé résultant est :

U est une énergie, donc en joule.

W et Q sont des travaux donc homogènes à des énergies.

Un ancien nom pour Q est **chaleur**.





Conséquence immédiate : l'énergie interne d'un système isolé est constante.



Ce chapitre ne propose aucun moyen de calculer Q . En général, il sera donc déduit par $Q = \Delta U - W$.

Loi

Premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U = W + Q$$

D'après leur définition mécanique, W et Q sont positifs quand ils correspondent à de l'énergie reçue par le système. Alors, ΔU est positive aussi : la variation d'énergie interne est positive, donc U a augmenté.

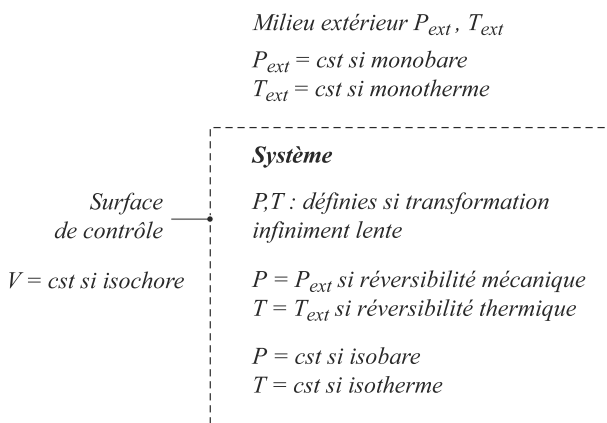
25.2 Types de transformation

Rappel : les paramètres d'état ne peuvent être définis de manière certaine qu'à l'équilibre thermodynamique. Même s'ils sont définis pendant une transformation, ils ne sont pas tenus de respecter les équations d'état.

25.2.1 Définitions

Le système étudié est délimité par une **surface de contrôle**, englobant le système. Tout ce qui est en dehors constitue le milieu extérieur.

La plupart des types de transformation peuvent être résumés sur le schéma de la figure 25.1. Tout ce qui se rapporte au milieu extérieur est noté avec un indice ext, tout ce qui se rapporte au système sans indice.



Ne confondez pas monobare, qui fait référence à la pression de l'extérieur, et isobare, qui fait référence à la pression du système. La seconde suppose que la pression du système est définie, pas la première.

Figure 25.1 Schéma récapitulatif des définitions relatives aux transformations.

25.2.2 Transformation infiniment lente

Définition

Une transformation qui est assez lente pour que les paramètres d'état du système aient le temps d'être définis à chaque instant est dite **infiniment lente**.

En pratique, toute transformation infiniment lente peut être considérée comme **mécaniquement réversible** : $P = P_{\text{ext}}$.



W et Q sont associés à des forces non conservatives donc leur travail élémentaire est une différentielle non exacte, noté δW ou δQ , tandis que U est un paramètre d'état pour lequel la notation dU est légitime.



Un ancien synonyme de mécaniquement réversible est encore parfois employé : quasi-statique.

25.2.3

Transformation adiabatique

Définition

Une **transformation adiabatique** est une transformation telle que $Q = 0$.

Cela est réalisé dans deux cas usuels :

- Système calorifugé : aucun transfert thermique depuis ou vers l'extérieur n'est possible. Des parois ne permettant aucun transfert thermique sont dite **athermanes**.
- Transformation très rapide : considérée comme adiabatique car les transferts thermiques sont des processus lents. Une telle transformation est dite **explosive**.

25.2.4

Cycle

Définition

Une transformation dont l'état initial et l'état final sont identiques est appelée **cycle**.

De toute évidence, sur un cycle, $\Delta U = 0$ donc $W = -Q$ avec la possibilité que W et Q soient non nuls.

25.2.5

Notion de transformations équivalentes

Deux transformations sont équivalentes si elles ont même état initial et même état final.

Une telle transformation est fictive mais est utile pour mener les calculs, grâce au concept de **transformation infiniment lente équivalente** à une transformation réelle. Voir méthode n°1.

Une transformation infiniment lente est découpable en étapes élémentaires pour lesquelles le premier principe est applicable :

Loi

Premier principe sur une étape de transformation infiniment lente :

$$dU = \delta W + \delta Q$$



Ne confondez pas température et transfert thermique ! Un système en transformation adiabatique ne garde pas forcément une température constante. Au contraire, il peut augmenter en température justement parce qu'il est incapable d'évacuer son surplus d'énergie par transfert thermique !

Méthode 1 passer par une transformation équivalente

La variation ΔX de tout paramètre d'état X est par définition indépendante du chemin suivi pour aller de l'état initial EI à l'état final EF. Il est donc possible de la calculer sur n'importe quelle

transformation, même fictive, équivalente à la transformation réelle... par exemple sur la transformation infiniment lente équivalente.

Voyons-le sur l'exemple de U . Un système subit une transformation réelle compliquée.

1. $\Delta U = W + Q$ est valable, mais W et Q sont trop complexes à calculer.
2. Prenons la transformation infiniment lente équivalente. Le premier principe peut être écrit pour chaque étape élémentaire puis intégré :

$$dU' = \delta W' + \delta Q' \Rightarrow \int_{EI}^{EF} dU' = \int_{EI}^{EF} (\delta W' + \delta Q') \Rightarrow \Delta U' = W' + Q'$$

où les grandeurs primées sont associées à la transformation infiniment lente.

3. U étant une fonction d'état, $\Delta U = \Delta U'$ bien que $W \neq W'$ et $Q \neq Q'$.

L'intérêt de cette méthode est que vous disposez de formules pour les étapes élémentaires de transformations infiniment lentes, par exemple $\delta W = -P_{\text{ext}} dV$ ou $dU = C_v dT$ dans des cas détaillés plus loin.

Par exemple, il est possible de modifier l'énergie interne d'un solide en le chauffant (travail nul, transfert thermique non nul) ou en y dissipant du travail mécanique par frottement (travail non nul, transfert thermique nul). Les deux opérations conduisent au même état final, mais les transformations sont différentes.

25.3 Travail des forces de pression extérieure

25.3.1 Méthodes de calcul

Méthode 2 calculer le travail des forces de pression extérieure

La seule formule générale est :

$$W = \int -P_{\text{ext}} dV$$

La connaissance des caractéristiques de la transformation permet de rendre cette intégrale calculable. Par exemple :

- Si la surface de contrôle du système est fixe, il n'y a pas de variation de volume donc $W = 0$.
- Si la transformation est monobare, $W = -P_{\text{ext}} \Delta V$ indépendamment des caractéristiques du système.
- Si la transformation est mécaniquement réversible, P est définie et égale à P_{ext} . Une équation d'état du système peut ensuite être utilisée pour calculer l'intégrale.

Dans le cas d'une transformation mécaniquement réversible, W est aussi l'opposé de l'aire algébrique en diagramme de Clapeyron (P, V).



Pour qu'un système reçoive du travail des forces de pression extérieure, il doit pouvoir se déformer !

Exemple d'application

Appliquons ces formules au cas d'un gaz parfait.

Solution

- Isochore : $W = 0$
- Monobare : $W = -P_{\text{ext}} \Delta V$
- Isobare : une isobare est nécessairement infiniment lente car P est définie pendant la transformation, donc mécaniquement réversible : $P_{\text{ext}} = P$. Comme P constante (égale à P_0), une isobare est nécessairement monobare et la formule précédente s'applique : $W = -P_0 \Delta V$.
- Isotherme : une isotherme est nécessairement infiniment lente donc mécaniquement réversible donc $P_{\text{ext}} = P$. En notant T_0 la température du gaz :

$$W = \int_A^B -P_{\text{ext}} dV = \int_A^B -P dV = \int_{V_A}^{V_B} -\frac{nRT_0}{V} dV = -nRT_0 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$



En fait, seul le dernier cas est vraiment spécifique aux gaz parfaits.

25.3.2

Ne pas confondre les pressions au niveau d'un piston

Beaucoup d'exercices font intervenir un gaz enfermé dans un piston, comme celui de la figure 25.2. Il intervient jusqu'à **trois** pressions dans cet exemple : la pression sur la face extérieure au piston P_0 , la pression sur sa face intérieure P_{ext} et la pression du gaz P , si elle est définie.

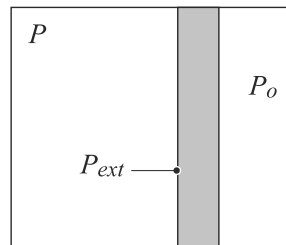


Figure 25.2 Diverses pressions au niveau d'un piston.

La distinction intérieur/extérieur doit être faite du point de vue du système étudié, qui n'est pas le piston mais le gaz ! Donc la pression extérieure intervenant dans le premier principe est celle qui s'exerce au niveau de la surface de contrôle du gaz... donc sur la face **intérieure** du piston. D'où la notation P_{ext} .

La pression P_0 n'est pas ressentie directement par le gaz, puisqu'il n'a aucun contact avec ce qui se trouve à l'extérieur du piston.

Seulement dans le cas où la transformation est mécaniquement réversible il est possible d'identifier ces pressions.

25.4 Énergie interne et enthalpie

25.4.1 Enthalpie

L'enthalpie est une grandeur définie pour avoir le même sens physique que l'énergie interne, mais présenter des propriétés plus sympathiques que U dans le cas de transformations où la pression est un paramètre intéressant (transformations monobares par exemple).



H est homogène à une énergie, donc en joule.

Définition

L'**enthalpie** est un paramètre d'état noté H défini par $H = U + PV$. Sa principale propriété est que, pour une transformation monobare, $\Delta H = Q$.

À l'inverse, U sera plus commode pour les calculs dans le cas de transformations, par exemple isochores ($\Delta U = Q$).

25.4.2 Capacités thermiques

Le comportement de U et H avec la température est caractérisé par les capacités thermiques.

Définition

$$C_v(T, V) = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v \quad \text{capacité thermique à volume constant}$$

$$C_p(T, P) = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p \quad \text{capacité thermique sous pression constante}$$

Pour une transformation isochore, cela nous permet d'écrire que :

$$Q = \Delta U = \int_{EI}^{EF} C_v(T, V) dT \simeq C_v \Delta T \quad \text{si } C_v \text{ dépend peu de la température}$$

et pour une monobare :

$$Q = \Delta H = \int_{EI}^{EF} C_p(T, P) dT \simeq C_p \Delta T \quad \text{si } C_p \text{ dépend peu de la température}$$

25.4.3 Cas d'un gaz parfait

L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température. Il y a deux cas à connaître :

- Gaz parfait monoatomique :

$$U = \frac{3}{2} nRT \quad \Rightarrow \quad C_{vm} = \frac{3}{2} R = 12,5 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$H = \frac{5}{2} nRT \quad \Rightarrow \quad C_{pm} = \frac{5}{2} R = 20,8 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$



Ces valeurs ne sont valables que dans une certaine plage de température ! Voir page 357.

- Gaz parfait diatomique :

$$U = \frac{5}{2} nRT \Rightarrow C_{vm} = \frac{5}{2} R = 20,8 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$$

$$H = \frac{7}{2} nRT \Rightarrow C_{pm} = \frac{7}{2} R = 29,1 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$$

25.4.4 Cas d'une phase condensée



Bien que le résultat ressemble à celui du gaz parfait, il a un sens très différent : les interactions entre particules sont ici loin d'être négligeables ! D'ailleurs il n'existe pas de valeurs universelles pour les capacités thermiques des phases condensées.

L'incompressibilité conduit à $U \simeq H$ et donc $C_v \simeq C_p = C$. En général, C est supposée indépendante de la température.

Considérons une transformation quelconque et la transformation fictive infiniment lente équivalente. Sur une étape de cette dernière, $dH \simeq C dT$. Alors, par intégration :

$$\Delta U \simeq \Delta H \simeq C \Delta T$$

valable aussi pour la transformation réelle.

25.4.5 Loi de Mayer

La différence des capacités thermiques molaires pour les gaz parfaits constitue la loi de Mayer :

Loi de Mayer

$$C_{pm} - C_{vm} = R$$

et leur quotient définit une grandeur sans dimension caractéristique du gaz :

Définition

Le coefficient gamma du gaz est défini par :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

Le coefficient sans dimension γ est caractéristique du gaz étudié : $\gamma = 5/3$ pour un gaz parfait monoatomique, $\gamma = 7/5$ pour un diatomique. Si sa valeur est connue, la loi de Mayer et la définition de γ constituent un système qui se résout en :

$$C_{vm} = \frac{R}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad C_{pm} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

25.4.6 Loi de Laplace

Cette loi est valable pour un gaz parfait avec γ constant et subissant une transformation adiabatique et mécanique réversible. Elle peut s'écrire de trois façons équivalentes :



Apprenez l'une des trois formes seulement, par exemple la seconde, et entraînez-vous à en déduire rapidement les deux autres, soit en injectant directement $PV = nRT$ de manière judicieuse, soit par dérivé logarithmique.

Loi de Laplace

$$TV^{\gamma-1} = \text{cst}_1 \quad \Leftrightarrow \quad PV^\gamma = \text{cst}_2 \quad \Leftrightarrow \quad T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{cst}_3$$

25.5 Bilan énergétique pour un gaz parfait



La courbe de l'adiabatique mécaniquement réversible est toujours plus forte que celle de l'isotherme.

Entraînez-vous à reconstruire le tableau suivant. DL désigne les degrés de liberté pertinents pour la transformation considérée.

Transformation	Isochore	Isobare	Isotherme	Adiab. méca. rév.
Relation entre DL	$\frac{P}{T} = \frac{nR}{V} = \text{cst}$	$\frac{V}{T} = \frac{nR}{P} = \text{cst}$	$PV = nRT = \text{cst}$	$PV^\gamma = \text{cst}$
Diag. Clapeyron				
ΔU	$\Delta U = nC_{vm} \Delta T$	$\Delta U = \Delta H/\gamma$	$\Delta U = 0$	$\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1} \Delta T$
ΔH	$\Delta H = \gamma \Delta U$	$\Delta H = nC_{pm} \Delta T$	$\Delta H = 0$	$\Delta H = \gamma \Delta U$
$W = \int_{EI}^{EF} -P_{\text{ext}} dV$	$W = 0$	$W = -P\Delta V$	$W = -nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$	$W = \Delta U$
Q	$Q = \Delta U$	$Q = \Delta H$	$Q = -W$	$Q = 0$

Synthèse

Savoirs

- Énoncer le premier principe
- Le vocabulaire des transformations (voir mots clefs)
- Loi de Laplace
- $H = U + PV$
- Travail des forces de pression

Savoir-faire

- Calculer Q à partir du premier principe
- Calculer le travail des forces de pression
- Utiliser une transformation fictive pour calculer les variations des fonctions d'état
- Retrouver la loi de Laplace et ces formes équivalentes
- Représenter les transformations en diagramme de Clapeyron
- Retrouver les expressions de C_p et C_v pour les gaz parfaits

Mots-clés

- Isobare,
- isotherme,
- isochore,
- monobare,
- monotherme,
- adiabatique,
- transformation mécaniquement réversible,
- transformation thermiquement réversible,
- transfert thermique (chaleur),
- travail,
- énergie interne,
- enthalpie.

Tests de connaissances

- 25.1 Le premier principe n'est rien d'autre que le principe de conservation de l'énergie.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 25.2 U est une fonction d'état signifie que l'ensemble de l'énergie microscopique d'un système peut être connu à partir de la valeur d'un petit nombre de paramètres d'état.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 25.3 ΔQ n'a pas de sens parce que Q représente une manière d'échanger de l'énergie entre systèmes.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 25.4 Q est défini comme le transfert thermique reçu par un système, il est donc forcément positif.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 25.5 Une détente de Joule-Gay Lussac est une détente contre le vide.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 25.6 Une détente de Joule-Thomson est une détente isotherme.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 25.7 H est une transformation de U conçue pour contenir l'énergie potentielle de pression.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 25.8 Un gaz parfait est tel que U et H ne dépendent que de la température.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 25.9 $U = U(T)$ n'est vrai que pour un gaz parfait.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 25.10 Une transformation isotherme est mécaniquement réversible.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 25.11 Une transformation mécaniquement réversible est forcément isotherme.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 25.12 Une transformation adiabatique se fait à température constante.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 25.13 Sur un cycle, $Q = 0$.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 25.14 Q est une grandeur qu'on peut calculer directement.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

25.15 Relations entre transformations

1. Une transformation isobare est-elle toujours monobare ?
2. Une transformation monobare est-elle toujours isobare ?
3. Une transformation infiniment lente est-elle toujours mécaniquement réversible ?
4. Une transformation adiabatique est-elle toujours infiniment lente ? La température du système doit-elle rester constante ?

25.16 Compression lente ou brutale d'un gaz parfait

(D'après Concours Communs Polytechniques.)

Un gaz parfait est placé dans une enceinte diathermane cylindrique de section S munie d'un piston. Le piston coulisse sans frottement et sa masse m est supposée négligeable devant les forces de pression ($mg \ll P_{\text{atm}}S$).

Initialement, le gaz est en l'équilibre avec l'atmosphère : $T_1 = T_{\text{atm}} = 293 \text{ K}$ et $P_1 = P_{\text{atm}} = 1 \text{ bar}$. Le volume initial de l'enceinte est $V_1 = 5 \text{ L}$.

Après transformation, la pression dans l'enceinte se stabilise à $P_2 = 10 \text{ atm}$.

Calculez ΔU , V_2 , T_2 , W et Q dans les deux cas suivants :

1. l'opérateur appuie très lentement sur le piston,
2. l'opérateur laisse tomber d'un seul coup une masse adéquate sur le piston.

25.17 Détente de Joule-Gay Lussac

(D'après Concours Communs Polytechniques TSI.)

Une enceinte calorifugée et indéformable est coupée en deux compartiments de volumes égaux $V = 40 \text{ L}$, séparés par un robinet initialement fermé. Le compartiment de gauche est rempli de $n = 1 \text{ mol}$ de gaz à la température $T_0 = 293 \text{ K}$ sous la pression $P_0 = 10 \text{ bar}$. Le compartiment de droite est vide (figure 25.3).

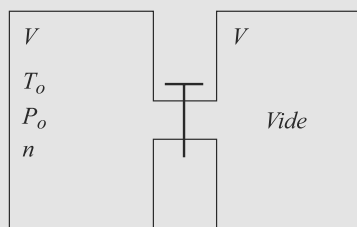


Figure 25.3 Détente de Joule-Gay Lussac.

À l'instant $t = 0$, le robinet est ouvert, permettant la circulation des molécules de gaz entre les deux compartiments. Lorsque l'équilibre est restauré, la température de l'enceinte est T_f et la pression P_f .

1. Le système étudié est l'ensemble délimité par les deux compartiments. Montrez que, sans hypothèse sur la nature du gaz, l'énergie interne du gaz est constante (transformation *isoénergétique*).
2. Calculez T_f et P_f dans le cas d'un gaz parfait.
3. Supposons maintenant que le gaz suit l'équation d'état de van der Waals. En particulier, son énergie interne est donnée par :

$$U(T, V) = nC_{vm}T - \frac{n^2a}{V}$$

Vous supposerez C_{vm} constante.

Que devient le résultat de la détente avec ce gaz ? En particulier, discutez le signe de ΔT .

25.18 Détente de Joule-Kelvin



Cette détente est aussi appelée détente de Joule-Thomson, car William Thomson a été anobli sous le nom de Lord Kelvin. À ne pas confondre avec J.J. Thomson, dont il fut contemporain (fin du XIX^e siècle, début du XX^e siècle), qui a découvert l'électron en inventant le tube cathodique.

Un gaz s'écoule dans une tuyère coupée par une paroi poreuse, comme indiqué sur la figure 25.4. Le tube est indéformable et athermane. Nous ferons les hypothèses suivantes :

- Grâce à la paroi poreuse, l'écoulement est assez lent pour négliger les variations d'énergie mécanique du gaz.
- La pression est uniforme égale à P_1 avant la paroi poreuse et uniforme égale à P_2 après. Évidemment, $P_1 > P_2$ pour que l'écoulement se fasse de la gauche vers la droite.
- L'écoulement est stationnaire : les paramètres d'état du système (défini ci-dessous) sont indépendants du temps.

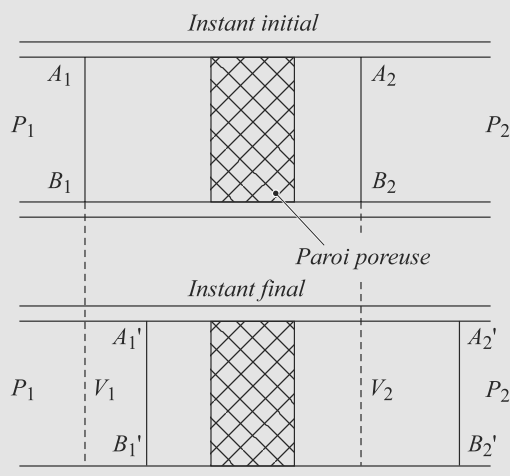


Figure 25.4 Détente de Joule-Kelvin.

Vous prendrez comme système la « tranche » de gaz située initialement entre A_1B_1 et A_2B_2 . À l'instant pris comme instant final, elle s'est déplacée (et déformée), délimitée par $A_1'B_1'$ et $A_2'B_2'$.

1. Grâce au caractère extensif de l'énergie interne, exprimez ΔU en fonction de P_1 , P_2 et des volumes des tranches de gaz indiquées sur la figure 25.4.
2. Déduisez-en que la transformation est *isenthalpique* quelle que soit la nature du gaz.

Exercices d'approfondissement

25.19 Calorimétrie

(D'après Mines Albi.)

Un calorimètre est un récipient calorifugé (parois athermanes) sous pression. On y place des substances en phases condensées, solides et/ou liquides. Il est dit parfait s'il n'y a aucune fuite thermique vers l'extérieur, donc si l'ensemble

calorimètre+contenu est isolé. Nous nous placerons dans ce cas ici.

Plaçons dans le calorimètre $m_1 = 100$ g d'eau à $t_1 = 25$ °C puis $m_2 = 60$ g d'eau à $t_2 = 60$ °C.

1. Pourquoi utiliser l'enthalpie plutôt que l'énergie interne ?

2. Calculez la température d'équilibre sous l'hypothèse que le calorimètre n'a pas de capacité thermique (ne contribue pas au bilan enthalpique).
3. En fait, le calorimètre contribue de manière notable au bilan par sa propre capacité thermique C_{calor} . En pratique, on ne donne pas C_{calor} mais une grandeur appelée *masse en eau* ou *valeur en eau* du calorimètre, définie par :

$$\mu = \frac{C_{\text{calor}}}{c_0}$$

où c_0 est la capacité thermique massique de l'eau.

- a) Quelle est la dimension de μ ? Comment l'interpréter physiquement ?
- b) Reprenons l'expérience de la question 2. La température d'équilibre observée est de $t_f = 36,7^\circ$. Déduisez-en la masse en eau du calorimètre.
4. Le même calorimètre contient maintenant $m_1 = 100$ g d'eau à $t_1 = 25^\circ\text{C}$. Plongeons-y $n = 40$ petites billes de fer de diamètre $\delta = 1$ cm, densité $d = 7,9$ initialement à la température $t_3 = 80^\circ\text{C}$. La température d'équilibre est de $t_4 = 25,3^\circ\text{C}$. Calculez la capacité thermique massique c_{fer} du fer. Commentez.

Donnée : capacité thermique massique de l'eau $c_0 = 4,18 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

25.20 Du café chaud mais pas bouilli (D'après ENSTIM)

Une casserole, sans couvercle, contenant un litre d'eau froide est posée sur la plaque électrique d'une cuisinière. Initialement, la plaque est froide et la température de l'eau vaut $\theta_0 = 20^\circ\text{C}$. Le tableau ci-dessous indique la température de l'eau (homogénéisée par agitation) à différentes dates mesurées depuis la mise sous tension de la plaque chauffante.

t (en min)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
θ (en $^\circ\text{C}$)	20	20	21	23	25	31	39	48	58	68	78	88

1. Tracer la courbe représentant les variations de la température au cours du temps.
2. On modélise le comportement du système en assimilant la courbe expérimentale, au cours des neuf premières minutes de chauffage, à deux segments de droite : le premier, horizontal, de $t = 0$ à $t = T$ et le second, de coefficient directeur a , correspondant au « fonctionnement linéaire » c'est-à-dire à une variation régulière de la température au cours du temps.
- Déterminer, à partir du graphique, les valeurs de T (en min) et de a (en $^\circ\text{C} \cdot \text{min}^{-1}$).

3. On définit le rendement r du chauffage par la relation $r = \frac{Q}{W}$ dans laquelle Q est le transfert thermique (quantité de chaleur) reçu par l'eau (de capacité thermique massique à pression constante : $c_p = 4180 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) et W l'énergie électrique consommée par la résistance.
- a) Sachant que la puissance électrique consommée par la plaque chauffante est $P = 1500$ W, calculer le rendement r_1 lors du fonctionnement linéaire, puis le rendement global r_2 pour les neuf premières minutes de chauffe.
- b) Comment faudrait-il procéder pour améliorer la valeur de r_2 ?
4. On désire à présent chauffer l'équivalent de huit petites tasses de café correspondant à un volume de 0,75 litre. Le café, initialement à 20°C , est placé dans une casserole sans couvercle sur la plaque froide. Pour éviter l'ébullition même partielle et compte tenu du manque d'agitation pendant le chauffage, on se fixe comme limite de temps celle qui correspondrait à une température de 70°C si la température était homogène.
- a) Évaluer la durée maximale de l'opération en négligeant la capacité thermique du récipient et en expliquant les hypothèses sur lesquelles est basé votre calcul.
- b) Votre résultat est-il compatible avec le résultat expérimental : on mesure une durée de 6 min 15 s pour atteindre une température homogène (par agitation) de 70°C ?

25.21 Oscillations d'un piston (D'après Agro.)

Un récipient cylindrique calorifugé de section S et de longueur totale $L = 2$ m est partagé en deux compartiments par une paroi mobile athermane (figure 25.5). Tout frottement sera négligé.

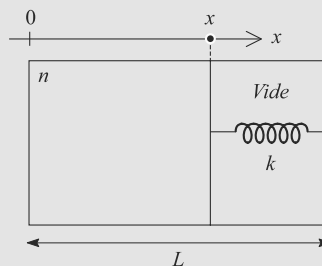


Figure 25.5 Oscillations d'un piston.

Dans le compartiment de gauche, de longueur x se trouve $n = 1$ mol d'argon considéré comme un gaz parfait avec $\gamma = 5/3$. Le compartiment de droite est vide.

Un ressort (raideur k) est installé de manière à exercer sur la paroi une force $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$. À l'équilibre, le compartiment de gauche a pour longueur $x_{\text{eq}} = 3L/4$, la température et la pression de l'argon sont notées T_{eq} et P_{eq} .

1. Calculez k en fonction de P_{eq} , S et L , puis en fonction de la constante des gaz parfaits R , T_{eq} et L .
2. Étude des petits mouvements du piston. Vous poserez $x = x_{\text{eq}}(1 + \xi)$ avec $|\xi| \ll 1$. Pour cette question, vous ne négligez pas la masse m du piston et supposerez que l'argon subit des transformations adiabatiques mécaniquement réversibles.
 - a) Calculez au premier ordre en ξ la pression exercée par l'argon sur le piston. Vous la mettrez sous la forme $P(x) = \alpha - \beta\xi$ et exprimerez les constantes α et β en fonction de P_{eq} et γ .
 - b) Écrivez l'équation du mouvement du piston et déduisez-en la période τ des petites oscillations du piston en fonction de β , k , m , x_{eq} et S .
 - c) En pratique, les oscillations sont amorties. Pourquoi ? Commentez.

25.22 Chauffage d'un gaz par effet Joule

n moles d'un gaz parfait sont placées dans une enceinte munie d'un piston (l'ensemble est athermane). Le piston peut coulisser sans frottement. Dans l'enceinte est également placé un dispositif de chauffage (de capacité thermique négligeable) constitué d'une résistance R alimentée par une source idéale de tension continue E (figure 25.6).

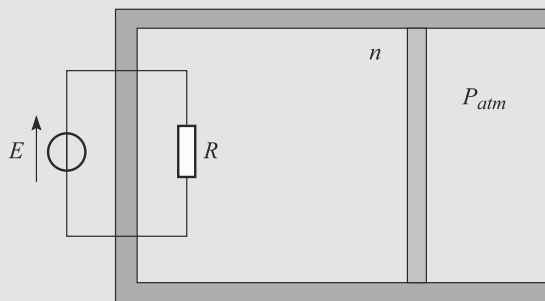


Figure 25.6 Chauffage d'un gaz par effet Joule.

Les propriétés électriques de la résistance évoluent avec la température dans l'enceinte suivant une loi approximativement linéaire :

$$R(T) = \alpha T$$

Initialement, le gaz est à la température T_0 et à la pression P_0 . Sa capacité thermique molaire à pression constante est notée C_{pm} et supposée constante. La résistance a alors la valeur R_0 . La pression à l'extérieur de l'enceinte est égale à la pression atmosphérique P_{atm} .

À l'instant $t = 0$, le courant est établi dans la résistance. La source de tension est maintenue en fonctionnement pendant une durée τ . Le courant est suffisamment peu intense que pour la température du gaz soit définie à tout instant (chauffage lent).

Ensuite, une fois l'équilibre thermodynamique rétabli, le gaz a pour pression P_f , volume V_f et température T_f .

1. Exprimez α en fonction de R_0 et T_0 . Justifiez qualitativement que R augmente avec la température.
2. Qualifiez la transformation subie par le gaz.
3. Exprimez P_f et V_f en fonction de T_f (que vous supposez connue).
4. Exprimez la loi horaire de la température.
5. Déduisez-en la température finale T_f .

25.23 Équilibre de pression dans le soleil

(D'après CCP)

Cet exercice a pour but l'étude d'un modèle de répartition de la pression et de la température dans le soleil. Le soleil sera considéré comme constitué d'un fluide (un gaz parfait) au repos à symétrie sphérique. On notera P , T et ρ les pression, température et masse volumique du fluide solaire. Ces grandeurs ne dépendent que de r la distance au centre O du soleil. Soit $M(r)$ la masse contenue dans une sphère de centre O et de rayon r .

1. Sachant que le disque solaire est vu de la terre sous un angle de $\beta = 32'$ (c'est-à-dire 32 minutes d'arc), déduire la valeur du rayon solaire R_s . Calculer la masse volumique moyenne ρ_s du soleil.
2. Sachant que le champ de gravitation en r est $g(r) = -\frac{GM(r)}{r^2}$ et que l'expression générale de la relation fondamentale de la statique des fluides est $\text{grad}(\vec{P}) = \vec{f}_v$, \vec{f}_v étant la force volumique qui s'exerce en un point M , établir la relation $\frac{dP}{dr} = -G \frac{M(r)\rho(r)}{r^2}$ où G est la constante de gravitation universelle.
3. Calculer la pression au cœur du soleil P_{CS} en identifiant $\frac{P_{CS}}{R_s} \approx -\frac{dP}{dr}$.

On considère que la matière qui constitue le soleil est un gaz parfait d'hydrogène ionisé, composé de protons H^+ et d'électrons e^- . Il y a donc deux particules et la masse molaire moyenne est $M = 5 \cdot 10^{-4}$ kg/mole ; l'équation d'état du soleil s'écrit :

$$P(r) = \frac{\rho(r)}{M} RT(r)$$

4. Calculer la température au cœur du soleil T_{CS} . Il est à noter que c'est à cause des valeurs très élevées de T_{CS} et de P_{CS} que les atomes légers d'hydrogène entrent en collision avec une telle violence qu'ils parviennent à surmonter la répulsion coulombienne pour fusionner en un noyau plus lourd : l'hélium, synonyme de soleil. Estimer alors le gradient réel de température sachant que la température de surface est $T(R_S) = 5\,800\text{ K}$.
5. Lors d'une transformation adiabatique réversible, quelle relation relie les variations de P et de T ? En déduire le gradient de température adiabatique à la distance r du centre du soleil en fonction de $M(r)$.
6. Schwarzschild a établi un critère en vue de comprendre la structure interne du soleil : « La convection (mouvement par différence de densité) apparaît dans un fluide en équilibre hydrostatique si le gradient de température

réel devient inférieur au gradient de température adiabatique »

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{adia} > \left(\frac{dT}{dr}\right)_{reel}$$

Discuter le sens physique de ce critère puis, en supposant que pratiquement toute la masse du soleil est concentrée à l'origine, trouver à quelle distance r_c du centre doit apparaître la convection naturelle. On prendra $\gamma = 5/3$, valeur du gaz monoatomique.

Données :

Masse du soleil : $M_S = 2 \cdot 10^{30}\text{ kg}$;

Distance terre-soleil $a = 150$ millions de kilomètres ;

Constante de gravitation universelle

$G = 6,67 \cdot 10^{-11}\text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$;

25.1

Faux, il suppose que U est en plus une fonction d'état.

25.2

Vrai.

25.3

Vrai, ce n'est pas la variation d'un contenu.

25.4

Faux, Q est algébrique, positif si la quantité est effectivement reçue et négatif dans le cas contraire.

25.5

Vrai.

25.6

Faux, c'est une détente contre l'air ou contre un réservoir de pression.

25.7

Vrai, mais seulement si P est constant.

25.8

Vrai, ce sont les lois de Joule.

25.9

Faux (exemple : corps condensé).

25.10

Vrai, l'équilibrage en température est beaucoup plus long que celui en pression.

25.11

Faux.

25.12

Faux (à ne surtout pas confondre).

25.13

Faux, Q n'est pas la variation d'une fonction d'état.

25.14

Faux, elle se calcule indirectement en utilisant le premier principe.

25.15

Relations entre transformations

Il faut avoir soigneusement appris les définitions du cours ! Vous pouvez retenir l'ensemble des définitions comme des chaînes d'implication.

Certaines implications sont strictes (toujours vraies) comme mécaniquement réversible \Rightarrow infiniment lente.

D'autres sont seulement courantes : une transformation infiniment lente est presque toujours prise mécaniquement réversible, par exemple ; une transformation « très rapide » est en générale adiabatique.

1. Une transformation isobare est toujours monobare :

- isobare \rightarrow infiniment lente : la pression P du système est définie à tout instant ;
- isobare : P est constante ;
- l'état initial et l'état final sont des états d'équilibre : $P = P_{\text{ext}}$.

Donc la transformation est monobare.

Par contre, une transformation monobare n'est pas forcément isobare. Elle n'est même pas forcément infiniment lente !

2. Dans une transformation infiniment lente, la pression P du système est définie à tout instant mais elle n'est pas forcément égale à P_{ext} . Donc une transformation infiniment lente n'est pas toujours mécaniquement réversible.

Cependant, en l'absence de frottements mécaniques (cas courant en thermodynamique), une transformation infiniment lente est *souvent* mécanique réversible.

3. Une transformation adiabatique n'est pas forcément lente. Elle peut même être rapide : la lenteur des échanges thermiques fait qu'une transformation très rapide est approximativement adiabatique.

La température n'est pas forcément constante. Par exemple, un système qui reçoit adiabatiquement du travail et qui ne peut pas évacuer de transfert thermique va certainement s'échauffer !

25.16

Compression lente ou brutale d'un gaz parfait

Méthode mise en jeu : n°2.

Comme il intervient un piston dans cet exercice, attention à ce que vous appelez la pression extérieure (voir paragraphe 25.3.2 page 25.3.2).

La première transformation sera infiniment lente et pas la deuxième. L'évolution des paramètres d'état sera indépendante de la transformation, mais ce ne sera pas le cas de W et Q .

La valeur des paramètres d'état à l'équilibre final ne dépend pas de la nature de la transformation. Nous pouvons donc donner certaines réponses communes aux deux questions.

Les parois étant diathermanes, les deux transformations sont monothermes : $T_2 = T_1 = 293 \text{ K}$.

La transformation monotherme d'un gaz parfait est isoénergétique : $\Delta U = C_v \Delta T = 0$. Donc $W = -Q$ pour les deux transformations.

L'équation d'état $PV = nRT$ pour une transformation monotherme donne $P_1 V_1 = P_2 V_2$ donc :

$$V_2 = \frac{P_1 V_1}{P_2} = 0,5 \text{ L}$$

1. La transformation est monotherme et infiniment lente. Donc chaque étape élémentaire de la transformation est elle-même monotherme : elle commence à la température T_{atm} et finit à la même température. Donc la transformation est isotherme :

$$W = -nRT_{\text{atm}} \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)$$

$$= P_1 V_1 \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)$$

$$W = 1,17 \text{ kJ}$$

donc $Q = -1,17 \text{ kJ}$.

2. Cette fois la transformation est monotherme, mais pas infiniment lente et encore moins isotherme (la température n'est même pas définie avant l'état final). La pression extérieure est dès le début égale à P_2 , donc la transformation est monobare :

$$W = -P_2 \Delta V$$

$$\Rightarrow Q = P_2 (V_2 - V_1) = -4,56 \text{ kJ}$$

Le travail et le transfert thermique diffèrent donc notablement entre une transformation faite lentement et une faite brutalement, même si les états initial et final sont les mêmes.

25.17 Détente de Joule-Gay Lussac

Méthode mise en jeu : n°2.

C'est un grand classique qu'il faut savoir refaire : la détente de Joule-Gay Lussac est une transformation isoénergétique pour tout gaz.

La seule subtilité est dans la définition du système à étudier. Certaines justifications sont difficiles à rédiger si les choses sont mal posées. Le plus simple est de choisir pour système l'ensemble contenu dans les deux compartiments (« gaz+vide », pourrait-on dire) car 1) sa surface de contrôle est fixe donc il ne reçoit aucun travail des forces de pression extérieures et 2) il est thermiquement isolé donc la transformation est adiabatique.

1. Pour le système choisi, la transformation est isochore puisque son volume est fixe donc $W = 0$. Elle est aussi

adiabatique puisque les parois sont athermanes donc $Q = 0$. Donc $\Delta U = 0$. Par additivité :

$$\Delta U = \Delta U_{\text{gaz}} + \Delta U_{\text{vide}}$$

et l'énergie interne du vide est et reste nulle. Donc $\Delta U_{\text{gaz}} = 0$ quelle que soit la nature du gaz. Ce dernier subit donc une transformation isoénergétique.

2. $\Delta T = 0$ donc $T_f = T_0$. L'équation d'état du gaz parfait donne directement :

$$P_f = \frac{nRT_f}{2V} = \frac{P_0}{2}$$

3. La transformation est toujours isoénergétique mais cela n'implique pas que $\Delta T = 0$ car l'énergie interne dépend aussi du volume.

La conservation de l'énergie interne donne :

$$\Delta U = 0 = C_{vm} \Delta T - a \Delta \frac{1}{V}$$

$$\Rightarrow \Delta T = -\frac{2VC_{vm}}{a}$$

Comme $a > 0$, la température ne peut que décroître au cours de la détente.

25.18 Détente de Joule-Kelvin

Voilà encore un exercice très classique dont il faut savoir refaire le raisonnement. Le dispositif expérimental est tel que la détente est isenthalpique pour tout gaz.

La difficulté réside dans la manière de gérer le système étudié. En toute rigueur, c'est un système ouvert, pour lequel nous n'avons pas mis en place les outils appropriés. C'est pourquoi l'énoncé vous invite à vous ramener au cas d'un système fermé en délimitant (par la pensée) une tranche de fluide de composition fixée et à la suivre dans son évolution.

1. Pour alléger les notations, notons avec un indice 1 ce qui concerne la tranche $A_1 B_1 A'_1 B'_1$, 3 pour la tranche $A'_1 B'_1 A_2 B_2$ et 2 pour la tranche $A_2 B_2 A'_2 B'_2$.

En régime stationnaire, l'état d'une tranche ne dépend que de sa position et pas du temps. Donc deux tranches occupant la même position à des instants différents ont même énergie interne. Donc :

$$\Delta U = (U_3 + U_2) - (U_1 + U_3) = U_2 - U_1$$

Le système subit une transformation adiabatique donc $\Delta U = W$ où W est le travail des forces de pression extérieure. Faisons l'inventaire de ces forces :

- La surface de contrôle du système en contact avec la tuyère est fixe, donc il n'y a pas de travail des forces de pression à ce niveau.

- La surface de gauche est en contact avec le reste du gaz, donc $P_{\text{ext}} = P_1$ à ce niveau. Le système est poussé de A_1B_1 à $A'_1B'_1$ de manière monobare : $W_1 = -P_1(0 - V_1) = P_1V_1$.
- La surface de droite est en contact avec le reste du gaz, donc $P_{\text{ext}} = P_2$ à ce niveau. Le système est poussé de A_2B_2 à $A'_2B'_2$ de manière monobare : $W_2 = -P_2(V_2 - 0) = -P_2V_2$.

Donc $U_2 - U_1 = P_1V_1 - P_2V_2$.



Il est naturel de trouver $W_1 > 0$, puisque la tranche est « poussée » de ce côté par le gaz situé avant A_1B_1 : elle reçoit effectivement du travail. De même, $W_2 < 0$ puisque la tranche « pousse » le gaz situé après $A'_2B'_2$: elle fournit effectivement du travail.

2. Cela donne immédiatement $H_1 = H_2$. Par ailleurs, en utilisant l'extensivité de l'enthalpie du système, il vient :

$$\begin{aligned}\Delta H &= (H_3 + H_2) - (H_1 + H_3) \\ &= H_2 - H_1 \\ \Delta H &= 0\end{aligned}$$



Attention à ne pas conclure trop vite ! $H_1 = H_2$ ne prouve pas directement que la transformation est isenthalpique car H_1 n'est pas l'enthalpie initiale de la tranche et H_2 son enthalpie finale. La dernière ligne de calcul est indispensable pour conclure.

La transformation est isenthalpique, quelle que soit la nature du gaz.

25.19 Calorimétrie

Méthode mise en jeu : n°1.

À moins que le calorimètre soit obturé (ce qui n'est pas cas ici), les transformations qui se déroulent en son sein sont toujours monobares, donc l'enthalpie est le « bon » paramètre à étudier.

Tout l'art d'un exercice de calorimétrie est de savoir utiliser les propriétés de l'enthalpie : elle est additive (l'enthalpie d'un système est la somme des enthalpies de ses sous-systèmes) et c'est un paramètre d'état (ses variations ne dépendent que de l'état initial et de l'état final de la transformation).

Le système étudié sera toujours l'ensemble calorimètre+contenu, supposé isolé.

1. Le système évolue sous pression extérieure constante, donc l'enthalpie sera plus adaptée que l'énergie interne. En effet, les transformations sont monobares donc $\Delta H = Q$ sans approximation.
2. Par additivité de l'enthalpie :

$$\Delta H = \Delta H_{\text{vase}} + \Delta H_{\text{eau1}} + \Delta H_{\text{eau2}}$$

La transformation est adiabatique donc $Q = 0$. Comme le vase ne contribue pas, cela se réduit à :

$$\begin{aligned}m_1c_0(t_f - t_1) + m_2c_0(t_f - t_2) &= 0 \\ \Rightarrow t_f &= \frac{m_1t_1 + m_2t_2}{m_1 + m_2} = 38,1^\circ\text{C}\end{aligned}$$

3. a) C_{calor} est en J.K^{-1} et c_0 en $\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ donc μ est homogène à une masse. C'est la masse d'eau qui aurait le même comportement calorimétrique que le calorimètre (d'où son nom). En effet la variation d'enthalpie du calorimètre sous l'action d'un changement de température s'écrit $C_{\text{calor}}\Delta T$ donc aussi $\mu c_0\Delta T$.

b) Ajoutons le calorimètre au bilan :

$$\begin{aligned}\mu c_0(t_f - t_1) + m_1c_0(t_f - t_1) \\ + m_2c_0(t_f - t_2) &= 0 \\ \mu &= \frac{t_2 - t_f}{t_f - t_1} m_2 - m_1 = 20\text{ g}\end{aligned}$$

Le calorimètre se comporte « comme si » il y avait 20 g d'eau supplémentaires à t_1 .

4. Calculons la masse du fer introduit :

$$\begin{aligned}m &= n\rho_{\text{fer}}\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{6}n\rho_{\text{eau}}\pi\delta^3 \\ m &= 6,1\text{ g}\end{aligned}$$

Le bilan enthalpique devient :

$$\begin{aligned}\mu c_0(t_4 - t_1) + m_1c_0(t_4 - t_1) + mc(t_4 - t_3) &= 0 \\ \Rightarrow c &= \frac{(m_1 + \mu)c_0(t_4 - t_1)}{m(t_3 - t_4)} = 0,44\text{ J.g}^{-1}.\text{K}^{-1}\end{aligned}$$

Malgré la forte différence de température, le fer a peu modifié la température de l'eau. Cela se comprend en comparant les capacités thermiques : il faut peu d'énergie pour faire varier la température du fer, mais beaucoup pour celle de l'eau.

25.20 Du café chaud mais pas bouilli

On applique simplement le premier principe dans cet exercice et on suit une modélisation basique de valeurs expérimentales. La difficulté vient de l'interprétation des résultats.

1. Le tracé donne la figure 25.7 :

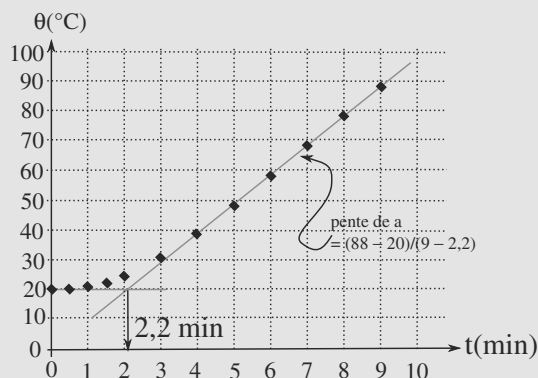


Figure 25.7 Evolution de la température en fonction du temps.

2. On lit sur le graphique $T = 2,2$ min environ, soit 2 min 12 s et $a = 10^\circ\text{C} \cdot \text{min}^{-1}$.
3. a) Lors du fonctionnement linéaire, le premier principe appliqué au chauffage monobare de l'eau donne :

$$Q_1 = \Delta H_1 = mc_p \Delta \theta = mc_p a \Delta t \text{ et } W = P \Delta t.$$

On a donc :

$$r_1 = \frac{mc_p a}{P} = 0,46.$$

Sur l'ensemble du fonctionnement par contre, on trouve :

$$r_2 = \frac{mc_p a \Delta T}{P \Delta t} = 0,35.$$

$r_2 < r_1$ était attendu car le début du chauffage est moins performant : il faut chauffer la plaque métallique avant de chauffer l'eau.

- b) La valeur de r_2 peut être améliorée en coupant l'alimentation électrique avant la fin des neuf minutes (la plaque très chaude continue à élever la température de l'eau) ; on peut aussi mettre un couvercle à la casserole.
4. a) On assimile la masse volumique et la capacité thermique du café à celle de l'eau et le comportement de la plaque et de la casserole seront supposés identiques à celle du problème précédent (l'inertie du début du chauffage est la même). La pente de la partie linéaire sera plus grande car la quantité à chauffer est moindre. On suppose que la valeur de T (temps nécessaire à la montée en température de la plaque) ne change pas et que le coefficient a est inversement proportionnel à la masse de liquide (même rendement). On obtient alors $\Delta t = T + \frac{mc_p \Delta \theta}{Pr_1}$ ce qui donne numériquement 6,0 min.
- b) Le temps de chauffe réel est plus fort : l'inertie ou les pertes ont été sous-estimées dans notre modélisation.



On ne tient pas compte de la capacité thermique de la casserole, ce qui conduit à une majoration du coefficient directeur calculé et donc à une minoration de la durée calculée.

25.21

Oscillations d'un piston

Ceci est autant un exercice de mécanique que de thermodynamique ! Apprenez à passer ainsi d'une branche à l'autre de la physique sans perdre en rigueur dans les raisonnements.

1. À l'équilibre, les forces de pression exercées par l'argon et la force de rappel se compensent :

$$\begin{aligned} -kx_{\text{eq}} + P_{\text{eq}}S &= 0 \\ \Rightarrow k &= \frac{4P_{\text{eq}}S}{3L} \end{aligned}$$

Le volume de l'argon étant $x_{\text{eq}}S$, cela peut se réécrire :

$$k = \frac{16nRT_{\text{eq}}}{9L^2}$$

2. a) Le gaz étant parfait et subissant une transformation adiabatique mécaniquement réversible, nous pouvons appliquer la loi de Laplace entre l'instant initial et un instant quelconque ultérieur :

$$\begin{aligned} PV^\gamma &= P_{\text{eq}}V_{\text{eq}}^\gamma \\ \Rightarrow P(x) &= P_{\text{eq}} \left(\frac{V_{\text{eq}}}{V(x)} \right)^\gamma \end{aligned}$$

Le volume initial est $V_{\text{eq}} = 3LS/4$ et $V(x) = xS$ avec $x = x_{\text{eq}}(1 + \xi)$. Alors :

$$\begin{aligned} P(x) &= P_{\text{eq}} \left(\frac{1}{1 + \xi} \right)^\gamma \\ &\simeq P_{\text{eq}}(1 - \gamma\xi) \end{aligned}$$

Par identification, $\alpha = P_{\text{eq}}$ et $\beta = -\gamma P_{\text{eq}}$.

- b) Le PFD appliqué à la paroi mobile s'écrit :

$$m\ddot{x} = P(x)S - kx$$

Le signe de la force de pression correspond bien au fait que l'argon tend à pousser la paroi vers la droite. D'où l'équation en ξ :

$$\ddot{\xi} + \frac{\beta S + kx_{\text{eq}}}{mx_{\text{eq}}} \xi = 0$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique donc sa période propre se lit dans l'équation :

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{mx_{\text{eq}}}{\beta S + kx_{\text{eq}}}}$$

- c) Nous avons supposé la transformation du gaz mécaniquement réversible, donc sans frottement au niveau de la paroi mobile, ce qui n'est pas forcément réaliste.

Nous avons également négligé la viscosité de l'argon (source de pertes d'énergie) et les transferts thermiques, lents mais inévitables, entre l'argon et l'extérieur à travers les parois.

25.22 Chauffage d'un gaz par effet Joule

Le travail dissipé par effet Joule par une résistance est $\delta W = (E^2/R)dt$. Elle est dissipée par voie thermique, donc comptabilisée dans le transfert thermique.

L'énoncé vous donne C_{pm} , ce qui évoque l'enthalpie. La transformation étant monobare, $\Delta H = Q$, ce sera aisé.

Enfin la résistance variant avec la température, il est impossible d'écrire $Q = (E^2/R)\tau$ sur une durée τ . Vous devez découper en étapes élémentaires de durée dt , durant lesquelles R et T sont quasi constantes. Cela est rendu légitime par le caractère infiniment lent de la transformation.

Le système étudié est le gaz contenu dans l'enceinte.

1. $R = R_0$ pour $T = T_0$ donc :

$$R(T) = \frac{R_0}{T_0} T \Rightarrow \alpha = \frac{R_0}{T_0}$$

2. La transformation est monobare puisque le piston coulisse sans frottement. La température du gaz est définie à tout instant donc elle est infiniment lente.
3. $P_0 = P_f = P_{am}$. La loi des gaz parfaits appliquée à l'instant initial et à l'instant final donne :

$$\begin{cases} P_0 V_0 = nRT_0 \\ P_f V_f = nRT_f \end{cases} \Rightarrow V_f = \frac{V_0 T_f}{T_0}$$

Comme le gaz a chauffé ($T_f > T_0$), il s'est dilaté ($V_f > V_0$).

4. Le gaz reçoit du travail des forces de pression extérieure et du transfert thermique de la résistance. Pour toute transformation monobare, $\Delta H = Q$. Sur une étape élémentaire de cette transformation infiniment lente, $dH = \delta Q$ se traduit par :

$$\begin{aligned} nC_{pm} dT &= \frac{E^2}{R} dt \\ \Rightarrow T dT &= \frac{E^2 T_0}{nC_{pm} R_0} dt \end{aligned}$$



La paroi est athermane, donc le gaz ne reçoit pas de transfert thermique de l'extérieur, mais il en reçoit de l'effet Joule. Donc la transformation n'est pas adiabatique.

En sommant ces étapes élémentaires de l'instant initial $t = 0$ où la température vaut T_0 jusqu'à un instant ultérieur t où la température vaut T , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(T^2 - T_0^2) &= \frac{E^2 T_0}{nC_{pm} R_0} t \\ T(t) &= \sqrt{T_0^2 + \frac{2E^2 T_0}{nC_{pm} R_0} t} \end{aligned}$$

5. $T_f = T(\tau)$ donc :

$$T_f = \sqrt{T_0^2 + \frac{2E^2 T_0}{nC_{pm} R_0} \tau}$$



Si le chauffage du gaz avait été plus intense, la transformation n'aurait pas été infiniment lente. Alors $T(\tau)$ serait restée valable car H est une fonction d'état, mais pas les valeurs intermédiaires $T(t)$.

25.23 Équilibre de pression dans le soleil

La grande difficulté de cet exercice est de s'adapter aux relations qui sont fournies pour le résoudre (une partie d'entre elles seulement apparaît plus loin dans le cours). Vous serez aussi amené à faire de nombreuses approximations et à travailler en ordre de grandeur, en particulier pour estimer les gradients à calculer.

1. On représente la situation sur la figure 25.8 :

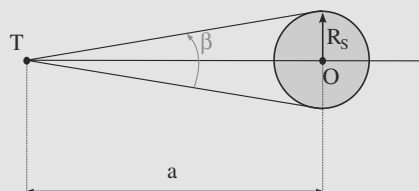


Figure 25.8 Soleil vu d'un point de la Terre.

On utilise le triangle rectangle : $\tan(\beta/2) = \frac{R_S}{a} \approx \frac{\beta}{2}$ car β est faible. On en déduit :

$$R_S \approx \frac{\beta a}{2}$$

Numériquement, $R_S = 697,5 \cdot 10^3$ km.

La masse volumique moyenne est alors : $\rho_S = \frac{M_S}{\frac{4}{3}\pi R_S^3}$ qui

donne numériquement $\rho_S = 1410 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

2. Le soleil étant à symétrie sphérique, le gradient de P se résume à : $\text{grad}(\vec{P}) = \frac{dP}{dr} \vec{e}_r$ où \vec{e}_r est le vecteur unitaire radial des coordonnées sphériques. La RFSF s'écrit alors en projection sur la direction radiale :

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\rho(r)g(r) = -G \frac{M(r)}{r^2} \rho(r),$$

ce qui est bien la relation attendue.

3. $\frac{dP}{dr} = \frac{P_{CS} - P_0}{0 - R_S}$ avec P_0 la pression à la surface du soleil (nulle). On en déduit en se plaçant à la surface et en prenant $\rho(R_S) = \rho_S$:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{P_{CS}}{R_S} = -G \frac{M_S \rho_S}{R_S^2}.$$

On a alors :

$$P_{CS} = G \frac{M_S \rho_S}{R_S}.$$

Numériquement, on obtient : $P_{CS} = 2,70 \cdot 10^{14} \text{ Pa}$.

4. En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits, on trouve $T_{CS} = \frac{P_{CS} M}{R \rho_S}$, soit numériquement $T_{CS} = 11,5 \cdot 10^6$ K.

En utilisant la même estimation que pour le gradient de pression, on trouve :

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{\text{réel}} = \frac{T(0) - T(R_S)}{0 - R_S}.$$

Numériquement, on trouve alors $\left(\frac{dT}{dr}\right)_{\text{réel}} = -0,016 \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$.

5. En différenciant la loi de Laplace entre T et P , on trouve $\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dP}{P}$. Ceci permet d'écrire $\frac{dT}{dr} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dP}{dr} \frac{T(r)}{P(r)}$. En tenant compte de l'équation d'état et de l'expression du gradient de pression, on obtient :

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{\text{adiab}} = \frac{1 - \gamma}{\gamma} \frac{GM(r)}{r^2} \frac{M}{R}.$$

6. Si le fluide est amené à s'élever (sous l'action de la convection), il subit une détente adiabatique. Si la température qu'il acquiert en s'élevant est supérieure à la température du milieu, il est moins dense que le fluide qui s'y trouve : la

convection continue donc de plus belle : si le gradient de température adiabatique est supérieur au gradient réel, la convection se produit.

Le texte nous indique qu'il faut prendre $M(r) \approx M_S$, le critère de Schwarzschild donne alors :

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{\text{adiab}} = \frac{1 - \gamma}{\gamma} \frac{GM_S}{r^2} \frac{M}{R} > \left(\frac{dT}{dr}\right)_{\text{réel}} \approx -\frac{T_{CS}}{R_S}.$$

Comme l'équation d'état donne $T_{CS} = \frac{P_{CS} M}{R \rho}$ et que

$P_{CS} = G \frac{M \rho}{R_S}$, on en déduit :

$$\frac{1 - \gamma}{\gamma} \frac{GM_S}{r^2} \frac{M}{R} > -\frac{M}{R \rho R_S} G \frac{M_S \rho}{R_S},$$

qui se simplifie en :

$$r > R_S \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} = r_c.$$

Numériquement, on trouve : $r_c = 0,63 R_S$.

Deuxième principe de la thermodynamique

CHAPITRE 26

Plan

26.1 Entropie et réversibilité	402
26.2 Identités thermodynamiques	403
26.3 Transformations particulières	403
26.4 Entropie de systèmes particuliers	405
26.5 Troisième principe de la thermodynamique	406
Synthèse	406
Tests et exercices	407
Corrigés des exercices	409

Introduction

Le premier principe est une loi comptable : elle fait le bilan des variations énergétiques dans le système. Mais il lui manque un ingrédient fondamental : pour toute transformation, la transformation inverse est compatible avec le premier principe en changeant juste les signes des échanges énergétiques. Pourtant, beaucoup de transformations réelles sont **irréversibles**.

Le second principe inclut donc le nécessaire pour corriger ce problème.

Prérequis

- Premier principe de la thermodynamique
- Écritures différentielles

Objectifs

- Réversibilité, irréversibilité
- Introduire la fonction d'état entropie S
- Lier création d'entropie et irréversibilité (sens d'évolution des transformations)
- Distinguer échange et création d'entropie
- Introduire l'identité thermodynamique
- Définir thermodynamiquement température et pression
- Exprimer l'entropie du gaz parfait, lien avec la loi de Laplace
- Exprimer l'entropie d'une phase condensée
- Introduire le troisième principe de la thermodynamique

26.1 Entropie et réversibilité

26.1.1 Réversibilité d'une transformation

Définition

Une **transformation** sera dite **réversible** si, en faisant évoluer les paramètres extérieurs en sens inverse, le système revient à l'état initial en passant par les mêmes états intermédiaires.

Cette définition appelle à plusieurs commentaires :

- Le caractère infiniment lent est une condition nécessaire mais pas suffisante pour la réversibilité.
- Les causes d'irréversibilité se trouvent dans les inhomogénéités de paramètres intensifs : de pression (irréversibilité mécanique), de température (irréversibilité thermique).
- La réversibilité mécanique est approximativement réalisée dans de nombreuses situations réelles (frottements solides négligeables). La réversibilité thermique est pratiquement inaccessible en pratique.

26.1.2 Définition de l'entropie et second principe

Le second principe contient à la fois le postulat d'existence du paramètre d'état entropie et l'énoncé d'un critère de réversibilité. Tel qu'il est formulé ici, il ne donne pas la définition exacte de l'entropie. Cela sera fait à travers les identités thermodynamiques au paragraphe 26.2.

Loi

Second principe de la thermodynamique

Pour tout système thermodynamique, il est possible de définir un paramètre d'état **extensif** appelé **entropie**, noté S .

Au cours d'une transformation quelconque, S varie suivant le bilan :

$$\Delta S = S_e + S_c \quad \text{avec} \quad S_c \geq 0$$

S_e est appelée **entropie échangée** avec le milieu extérieur et S_c est appelée **entropie créée**.

$S_c \geq 0$ est le **critère d'évolution** : d'une transformation et de son inverse, seule celle pour laquelle le critère est vérifié est possible.

Conséquences immédiates :

- Une transformation est réversible si $S_c = 0$, irréversible si $S_c > 0$.
- L'entropie d'un système isolé ne peut que croître.



L'entropie a pour unité le J.K^{-1} .



La réversibilité est une propriété idéale, jamais réalisée en pratique. Mais elle est utile par exemple avec la notion de transformation infiniment lente équivalente à une transformation réelle.

26.2 Identités thermodynamiques

Choisissons les degrés de liberté V et S pour exprimer U , les degrés de liberté P et S pour exprimer H . Alors, de manière purement mathématique :

Lois

Première identité thermodynamique : $dU = T dS - P dV$

Deuxième identité thermodynamique : $dH = T dS + V dP$

ce qui fournit de nouvelles définitions (équivalentes) de T et P :

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_P$$

$$P = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S$$

Méthode 1 Utiliser les identités thermodynamiques

Si la transformation étudiée est infiniment lente, les deux identités sont directement applicables. Leur intégration entre l'état initial et d'état final permet de calculer ΔU et ΔH .

Si elle ne l'est pas, faites le calcul sur la transformation infiniment lente équivalente. U et H étant des fonctions d'état, les ΔU et ΔH ainsi calculées seront valables aussi pour la transformation réelle.

Par exemple, le terme $-P dV$ dans la première identité thermodynamique ne peut pas être identifié à $\delta W = -P_{\text{ext}} dV$, sauf si la transformation est mécaniquement réversible.

26.3 Transformations particulières

26.3.1 Transformation réversible

La transformation est réversible donc mécaniquement réversible. Alors,

$$\delta W = -P_{\text{ext}} dV = -P dV \quad \text{donc} \quad \delta Q = T dS.$$

Elle est aussi thermiquement réversible donc T est définie mais aussi égale à T_{ext} à tout instant.

Loi

Variation d'entropie dans le cas réversible :

$$dS = \delta S_e = \frac{\delta Q}{T} \quad \text{et} \quad \delta S_c = 0 \quad \text{pour une transformation élémentaire réversible}$$

$$\Delta S = S_e = \int_{\text{EI}}^{\text{EF}} \frac{\delta Q}{T} \quad \text{et} \quad S_c = 0 \quad \text{pour une transformation réversible}$$

Donc une transformation adiabatique réversible est isentropique.



Les transformations adiabatiques parce que rapides ne sont pas réversibles donc pas isentropiques.



La loi de Laplace est bien sûr valable pour un gaz parfait en transformation adiabatique réversible.

26.3.2 Transformation monotherme

Thermostat

Nous modéliserons en général une transformation monotherme par la mise en contact du système avec un **thermostat**, ou source de chaleur.

Définition

Un **thermostat** est un système indéformable et de capacité thermique infinie, ne subissant que des transformations réversibles. Conséquences :

- Sa température est donc définie à tout instant et constante.
- Le thermostat n'échange que du transfert thermique avec le système.

La variation d'entropie d'un thermostat est donc toujours de la forme :

$$\Delta S_{\text{th}} = \frac{Q_{\text{th}}}{T_{\text{th}}}$$

La température extérieure pour le système, T_{ext} , est donc égale à T_{th} , température du thermostat pendant la transformation monotherme.

Le transfert thermique reçu le système est l'opposé du transfert thermique reçu par le thermostat : $Q = -Q_{\text{th}}$.

Transformation d'un système au contact d'un thermostat

Les grandeurs portant un indice th se rapportent au thermostat, celles sans indice au système étudié, et celles avec un indice Σ au super-système englobant le système étudié et le thermostat.



Une transformation à l'air libre est monotherme, le thermostat est l'atmosphère.

Méthode 2 Écrire un bilan entropique en présence d'un thermostat

L'astuce est de se ramener à un système isolé en englobant le système et son thermostat (ou ses thermostats) dans un seul système noté Σ . Alors :

- Par extensivité de S , $\Delta S_{\Sigma} = \Delta S + \Delta S_{\text{th}}$.
- D'après le second principe, $\Delta S_{\Sigma} = S_{c\Sigma}$ car Σ est isolé.
- Par propriété du thermostat, $\Delta S_{\text{th}} = Q_{\text{th}}/T_{\text{ext}} = -Q/T_{\text{ext}}$.



Si S est additive parce que c'est un paramètre d'état extensif, ce n'est pas le cas de S_c et S_e . Autrement dit, S_c pour le système global Σ n'est pas égal à la somme des S_c du système et du thermostat.

Loi

Variation d'entropie dans le cas monotherme :

$$\Delta S = S_e + S_c \quad \text{avec} \quad S_e = \frac{Q}{T_{\text{ext}}} \quad \text{et} \quad S_c \geq 0$$

26.4 Entropie de systèmes particuliers

26.4.1 Cas d'une phase condensée

Une phase condensée est presque indéformable donc la première identité thermodynamique donne, en notant c la capacité thermique massique et en la supposant indépendante de la température :

Loi

Variation d'entropie d'une phase condensée :

$$\Delta S = mc \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right)$$

où T_i et T_f sont les températures initiale et finale.

26.4.2 Cas d'un gaz parfait

En supposant que les capacités thermiques sont indépendantes de la température :

Loi

Variation d'entropie d'un gaz parfait :

$$\Delta S = nC_{vm} \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + nR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$$

S peut aussi s'écrire en fonction de γ , que nous supposerons constant. Par exemple :

$$S(T, V) = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{TV^{\gamma-1}}{T_0 V_0^{\gamma-1}} \right) \quad (26.1)$$

Ces expressions sont à rapprocher de la loi de Laplace sous l'une ou l'autre de ses formes. Par exemple, si $TV^{\gamma-1}$ est constant, il est bien évident sur l'expression (26.1) que l'entropie est constante aussi : une transformation adiabatique mécaniquement réversible est isentropique.

26.5 Troisième principe de la thermodynamique

Les formules précédentes permettent de calculer des variations d'entropie mais il faut ce troisième principe pour fixer une origine de l'entropie.

Loi

Troisième principe de la thermodynamique

L'entropie de tout corps pur cristallisé au zéro absolu est nulle.

Synthèse

Savoirs

- Énoncer le deuxième principe de la thermodynamique
- Distinguer les transformations réversibles et irréversibles

- Lien entre création d'entropie et irréversibilité
- Entropie d'un gaz parfait, d'une phase condensée
- Énoncer le troisième principe
- Une adiabatique réversible est une isentropique

Savoir-faire

- Calculer sur une transformation la variation d'entropie, les entropies échangée et créée

- Retrouver la loi de Laplace à partir de l'expression de l'entropie d'un gaz parfait

Mots-clés

- Entropie,
- entropie échangée,
- entropie créée,

- réversibilité,
- irréversibilité,
- identité thermodynamique.

Tests de connaissances

- 26.1 Une transformation réversible se fait à entropie constante.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 26.2 Les transformations réversibles sont des transformations idéales (non réelles).
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 26.3 Un système qui se refroidit a donné de l'entropie à l'extérieur.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 26.4 L'entropie est une mesure du désordre microscopique.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 26.5 Sur un cycle, l'entropie d'un système ne varie pas.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 26.6 Sur un cycle, il n'y a pas de création d'entropie.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 26.7 Sur un cycle, il n'y a pas d'échange d'entropie.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

26.8 Solide en contact avec un thermostat

Un solide initialement à la température T_1 est placé en contact avec un thermostat de température $T_0 < T_1$ sous pression atmosphérique.

Calculez l'entropie créée lors de la mise en contact et commentez.

26.9 Détente de Joule-Gay Lussac

(D'après Mines de première année.)

Reprenez la situation et les résultats de l'exercice 26.17. Calculez la variation d'entropie du gaz au cours de la transformation.

26.10 Compression lente ou brutale d'un gaz parfait

Reprenez l'exercice 26.16 et calculez la variation d'entropie du gaz dans les deux cas.

Exercices d'approfondissement

26.11 Contact thermique de deux solides

(D'après ENSIETA.)

Deux solides homogènes Σ_1 et Σ_2 , de capacités thermiques C_1 et C_2 , initialement aux températures T_{10} et T_{20} , sont placés en contact dans une enceinte calorifugée.

- Calculez la température finale T_f du système.
- Considérons Σ_1 seul.
 - Calculez sa variation d'entropie ΔS_1 .
 - Calculez l'entropie d'échange S_{e1} et l'entropie de création S_{c1} .
 - Les signes de ΔS_1 , S_{e1} et S_{c1} ont-ils quelque chose de particulier ?
 - Pourquoi n'utilise-t-on pas le symbole Δ pour les termes entropiques d'échange et de création ?
- De même, calculez ΔS_2 , S_{e2} et S_{c2} .

- Considérons maintenant le système comportant les deux solides. Calculez ΔS , S_e et S_c .

- Quel lien existe-il entre S_{c1} , S_{c2} et S_c ?

26.12 Ressort à gaz

(D'après ESIM)

On étudie la compression ou la détente d'un gaz parfait enfermé dans un récipient. Lorsque le bouchon se déplace, le volume V occupé par le gaz varie. L'atmosphère est à la pression constante P_0 et à la température constante T_0 . La cote z repère la position du bouchon par rapport à la position d'équilibre de ce dernier (figure 26.1). Le bouchon coulisse sans frottement dans le tube vertical de section s qui ferme le récipient. On note V_0 le volume à l'équilibre et m la masse du bouchon.



Figure 26.1 Gaz dans un récipient de volume variable.

On considère un gaz parfait dont le rapport des capacités thermiques à pression constante et à volume constant est indépendant de la température : $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ est constant. Lors du mouvement du bouchon, les transformations du gaz seront

considérées comme adiabatiques et réversibles. Initialement le système est à l'équilibre thermique et mécanique avec l'extérieur. On déplace alors à $t = 0$ le bouchon vers l'extérieur sur une courte distance a .

1. Rappeler la première identité thermodynamique. En déduire l'expression de l'entropie d'un gaz parfait caractérisé par γ en fonction de P et V . Retrouver la loi de Laplace liant ces deux variables pour une transformation adiabatique réversible.
2. Rappeler à quelle(s) condition(s) la compression (ou la détente) peut être rigoureusement considérée comme adiabatique puis réversible. Ces conditions rigoureuses sont-elles accessibles en pratique ? Comment les approcher de façon satisfaisante ?
3. Déterminer la pression à l'équilibre P_e dans le récipient puis écrire la relation liant P_e , V_0 à P et V .
4. Déterminer l'équation du mouvement du bouchon après son déplacement. La variation de V est faible devant V_0 . Linéariser l'équation du mouvement.
5. Déterminer la période des oscillations qui suivent le déplacement initial du bouchon.

Données : $P_0 = 1,0$ bar ; $V_0 = 10$ litres ; $m = 30$ g ; $\gamma = 1,4$; $s = 2$ cm² ; $g = 9,8$ m · s⁻².

26.1

Faux, il faut qu'elle soit aussi adiabatique. Il existe aussi des transformations sans variation globale d'entropie qui ne sont pas réversibles (création d'entropie à l'extérieur du système).

26.2

Vrai, toute transformation réelle est issue d'un déséquilibre et est donc irréversible. S ne se conserve pas : l'irréversibilité crée de l'entropie.

26.3

Vrai.

26.4

Vrai.

26.5

Vrai, S est une fonction d'état.

26.6

Faux, cela n'est vrai que pour les cycles idéaux (réversibles)

26.7

Faux. Ceci n'est vrai que sur un cycle réversible et pour l'ensemble de l'échange. Pour tout cycle, de l'entropie est échangée, que le bilan soit globalement nul ou pas.

26.8

Solide en contact avec un thermostat

Voici un exercice élémentaire qui vous permet de vérifier votre connaissance des définitions du cours.

Un peu de bon sens vous permet de prévoir que l'entropie créée sera non nulle : le solide va se refroidir et la transformation inverse est physiquement impossible !

Le système étudié est le solide. La transformation est monotherme par définition donc :

$$\Delta S = mc \ln \left(\frac{T_0}{T_1} \right) \quad \text{et} \quad S_e = \frac{Q}{T_0}$$

La transformation est monobare car sous pression atmosphérique donc $Q = \Delta H = mc\Delta T$:

$$S_e = \frac{mc(T_0 - T_1)}{T_0} = mc \left(1 - \frac{T_1}{T_0} \right) < 0$$

L'entropie échangée est négative puisque le transfert thermique se fait vers l'extérieur (le solide refroidit).

D'où l'entropie créée dans le solide au cours de la transformation :

$$S_c = \Delta S - S_e = mc \left(\ln \left(\frac{T_0}{T_1} \right) - 1 + \frac{T_1}{T_0} \right)$$

La transformation est donc irréversible sauf si $T_1 = T_0$, ce qui est une trivialité !

26.9

Détente de Joule-Gay Lussac

Méthode mise en jeu : n°1.

Comme vous l'avez vu dans l'exercice 17, la clef du raisonnement est de bien définir le système comme étant l'ensemble gaz+vide, puis de remarquer que les paramètres d'état du vide sont nuls.

Le système étudié est l'ensemble gaz+vide. Nous avons déjà établi que la transformation était isoénergétique.

La variation d'entropie ΔS de ce système est la somme des variations d'entropie des sous-systèmes, puisque S est extensive. Or, la variation d'entropie du vide est nulle donc :

$$\Delta S = \Delta S_{\text{gaz}}$$

Sur la transformation infiniment lente équivalente, elle aussi isoénergétique, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} dU_{\text{gaz}} &= T dS - P dV = 0 \\ \Rightarrow dS_{\text{gaz}} &= \frac{P}{T} dV = \frac{nR}{V} dV \end{aligned}$$

La variation totale d'entropie, valable aussi pour la transformation réelle puisque S est une fonction d'état, est :

$$\Delta S_{\text{gaz}} = nR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = nR \ln(2) > 0 \quad (26.2)$$

Comme il s'agit purement d'entropie créée (puisque le gaz n'échange rien avec l'extérieur), il est normal de trouver un résultat positif. Le fait qu'il ne puisse pas être nul est également évident, car la transformation est clairement irréversible.

26.10

Compression lente ou brutale d'un gaz parfait

Les calculs en eux-mêmes ne sont pas compliqués, mais vous devez anticiper le résultat. La compression rapide est clairement irréversible. Par contre, n'allez pas trop vite pour conclure que la première est réversible ! Elle est infiniment lente, ce qui n'implique pas qu'elle est réversible. Menez donc le calcul avant de conclure.

La transformation étant monotherme dans les deux cas, nous avons donc le même état initial et le même état final. Le système est le gaz parfait dans l'enceinte.

- état initial : $T = T_{\text{ext}}$, V_1 , P_1 ;
- état final : $T = T_{\text{ext}}$, $V_2 < V_1$, P_2 .

Nous pouvons donc déjà calculer ΔS indépendamment de la transformation :

$$\Delta S = nR \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

Par contre, S_e et S_c dépendent de la transformation.

- La transformation est infiniment lente et monotherme, donc isotherme. Alors :

$$\begin{aligned} S_e &= \frac{Q}{T_{\text{ext}}} \\ &= \frac{-W}{T_{\text{ext}}} \\ S_e &= \frac{nRT_{\text{ext}}}{T_{\text{ext}}} \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \end{aligned}$$

Nous trouvons que $\Delta S = S_e$ donc $S_c = 0$: la transformation est en fait réversible.



$\Delta S < 0$ n'a rien de choquant, puisque le système n'est pas isolé.

- Dans le cas rapide, la transformation est seulement monotherme monobare. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} S_e &= \frac{Q}{T_{\text{ext}}} \\ &= \frac{-W}{T_{\text{ext}}} \\ &= \frac{P_2(V_2 - V_1)}{T_{\text{ext}}} \\ S_e &= \frac{nR}{V_2} (V_2 - V_1) \end{aligned}$$

Donc l'entropie créée dans le gaz est $\Delta S - S_e$:

$$\begin{aligned} S_c &= nR \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) - \frac{nR}{V_2} (V_2 - V_1) \\ &= nR \left(\ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) - 1 + \frac{V_1}{V_2} \right) \end{aligned}$$

La transformation est cette fois irréversible, sauf si $V_2 = V_1$ mais c'est un cas trivial.

26.11

Contact thermique de deux solides

Méthode mise en jeu : n°2.

À chaque question, attention au système étudié. Certains systèmes sont isolés, d'autres non.

Les calculs en eux-mêmes ne présentent pas de difficulté, mais vous devez anticiper la conclusion : S est une fonction d'état donc additive, mais S_e et S_c n'ont aucune raison de posséder cette propriété.

Utilisez la méthode n°2 avec subtilité : les températures des solides ne sont pas constantes, donc chaque solide n'est un thermostat pour l'autre que pendant une courte durée dt où sa température a peu varié.

Dans cet exercice il n'y a que des échanges thermiques, qui sont des échanges lents. Nous supposons donc les transformations réelles comme infiniment lentes.

- Le système constitué des deux solides ne reçoit aucun transfert thermique de l'extérieur, donc sa transformation est isenthalpique. Pour une étape élémentaire, cela s'écrit :

$$dH = \delta Q = 0$$

H est extensive donc additive donc $dH = dH_1 + dH_2$ avec :

$$\begin{aligned} dH_1 &= C_1 dT_1 = \delta Q_1 \\ dH_2 &= C_2 dT_2 = \delta Q_2 \end{aligned}$$

en notant δQ_1 et δQ_2 les transferts thermiques reçus par les solides. D'où :

$$C_1 dT_1 + C_2 dT_2 = 0$$

qui donne, après intégration, la température finale :

$$\begin{aligned} C_1(T_f - T_{10}) + C_2(T_f - T_{20}) &= 0 \\ \Rightarrow T_f &= \frac{C_1 T_{10} + C_2 T_{20}}{C_1 + C_2} \end{aligned}$$

- a) Σ_1 subit une transformation isobare de T_{10} à T_f , d'où le bilan entropique, en notant i l'état initial et f l'état final :

$$\begin{aligned} \Delta S_1 &= \int_i^f dS_1 \\ &= \int_i^f C_1 \frac{dT}{T} \\ \Delta S_1 &= C_1 \ln \left(\frac{T_f}{T_{10}} \right) \end{aligned}$$

- b) Sur une étape élémentaire à l'instant t , le solide Σ_1 est en contact avec le solide Σ_2 qui est à la température $T_2(t)$. L'entropie échangée est alors :

$$\begin{aligned} \delta S_{e1} &= \frac{\delta Q_1}{T_2} = \frac{-\delta Q_2}{T_2} = \frac{-C_2 dT_2}{T_2} \\ \Rightarrow S_{e1} &= -C_2 \ln \left(\frac{T_f}{T_{20}} \right) \end{aligned}$$

D'où le terme de création :

$$S_{c1} = \Delta S_1 - S_{e1} = \ln \left(\frac{T_f^{C_1+C_2}}{T_{10}^{C_1} T_{20}^{C_2}} \right)$$

- c) Le signe de S_{c1} doit être positif, d'après le second principe.

- d) S_{e1} et S_{c1} dépendent du chemin suivi, donc ce ne sont pas les variations de certaines fonctions d'état. Le symbole Δ est donc proscrit pour elles.

3. La situation est symétrique entre les deux solides, donc nous pouvons réutiliser les résultats en échangeant les indices.

$$\Delta S_2 = C_2 \ln \left(\frac{T_f}{T_{20}} \right)$$

$$S_{e2} = -C_1 \ln \left(\frac{T_f}{T_{10}} \right)$$

$$S_{e2} = \ln \left(\frac{T_f^{C_1+C_2}}{T_{10}^{C_1} T_{20}^{C_2}} \right)$$

4. S est une fonction d'état donc additive. Pour le système global, nous trouvons :

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \ln \left(\frac{T_f^{C_1+C_2}}{T_{10}^{C_1} T_{20}^{C_2}} \right)$$

Le système est isolé donc $S_e = 0$. Donc $S_c = \Delta S$.

5. Ainsi, $S_c \neq S_{c1} + S_{c2}$: l'entropie créée n'est pas additive. Nous trouvons en fait que $S_c = S_{c1} = S_{c2}$. Ceci est physiquement logique : l'augmentation du désordre (entropie créée) est due à la mise en contact de Σ_1 avec Σ_2 et non pas à des phénomènes à l'intérieur des deux solides séparément.

26.12

Ressort à gaz

Méthode mise en jeu : n°1.

La difficulté de l'exercice ne tient pas à la manipulation des relations concernant l'entropie mais le mélange entre les notions mécaniques, thermodynamiques et mathématiques (DL).

Un bon nombre de question ne sont que des questions de cours, comme cela arrive souvent dans les problèmes de concours.

1. On rappelle : $dU = TdS - PdV$ qui permet d'obtenir pour le gaz parfait :

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}dV = C_v \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}.$$

Cette relation s'intègre en $S(T, V) = C_v \ln(T) + nR \ln(V) + cte$. En utilisant l'équation des gaz parfaits, on remplace T par PV/nR et donc :

$$S(P, V) = C_v \ln(P) + (C_v + nR) \ln(V) + cte'.$$

Comme $C_v + nR = C_p$ d'après la loi de Mayer, on en conclut que :

$$S(P, V) = C_v \ln(P) + C_p \ln(V) + cte'.$$

La loi de Laplace concerne les transformations adiabatiques réversibles des gaz parfaits donc à entropie constante. En regroupant les \ln , on retrouve :

$$S(P, V) = C_v \ln(PV^{C_p/C_v}) + cte' = cte$$

et donc :

$$PV^\gamma = cte.$$

2. Une transformation adiabatique est une transformation sans transfert thermique avec le milieu extérieur : cela signifie une égalité parfaite de température à chaque instant avec l'extérieur. Cela n'est pas réalisé en pratique mais les transferts thermiques étant lents, on peut considérer de nombreuses transformations adiabatiques.

Une transformation est réversible si elle peut se réaliser aussi bien dans un sens que dans l'autre : elle passe par des équilibres successifs continûment. Cela n'est pas réalisable : si aucun déséquilibre ne se manifeste, un système n'évolue pas. On peut cependant approcher la réversibilité en conservant un équilibre interne pour un système (même pression et même température définies partout par exemple). Ce sera le cas ici : l'équilibre en pression est réalisé dans l'enceinte sans que des transferts thermiques importants ne puissent se réaliser.

3. L'équilibre des forces sur le bouchon donne sur l'axe Oz : $P_e s - P_0 s - mg = 0$. On en conclut que :

$$P_e = P_0 + \frac{mg}{s}.$$

La loi de Laplace appliquée à la transformation donne alors :

$$P_e V_0^\gamma = P V^\gamma.$$

4. On projette le PFD sur l'axe Oz :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = (P - P_0)s - mg.$$

Or, $P = P_e \left(\frac{V_0}{V_0 + sz} \right)^\gamma = P_e \left(1 + \frac{sz}{V_0} \right)^{-\gamma}$ car le volume varie de sz par déplacement du bouchon à partir de la position d'équilibre. Comme $\frac{sz}{V_0} \ll 1$, on linéarise cette expression en :

$$P = P_e \left(\frac{V_0}{V_0 + sz} \right)^\gamma = P_e \left(1 - \gamma \frac{sz}{V_0} \right).$$

En reportant dans l'équation du mouvement, on obtient :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = (P_e - \gamma \frac{sz}{V_0} P_e - P_0)s - mg = -\gamma \frac{s^2 z}{V_0} P_e,$$

qu'on peut écrire aussi sous la forme :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \gamma \frac{P_e s^2}{m V_0} z = 0.$$

5. On reconnaît alors une équation d'oscillateur harmonique

de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma P_e s^2}{m V_0}}$ et donc de période :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m V_0}{\gamma P_e s^2}}.$$

Numériquement, on trouve $T = 1,44$ s.

Plan

27.1 Outils pour la description des changements de phase	412
27.2 Diagramme (P, T) d'un corps pur	414
27.3 Diagramme de Clapeyron	416
Synthèse	418
Tests et exercices	419
Corrigés des exercices	422

Introduction

Nous nous limiterons au cas d'un corps pur existant sous une ou plusieurs phases uniformes. La description de l'état du système est alors très simple : une seule pression, une seule température (etc) pour chaque phase.

Prérequis

- Fonctions d'état U , H et S
- Fractions molaires et massiques, titres

Objectifs

- Acquérir le vocabulaire des changements d'état
- Connaître les diagrammes (P, T) pour les états solide, liquide, vapeur et (P, V) pour l'équilibre liquide-vapeur
- Introduire les enthalpies et entropies de changement d'état
- Faire des bilans d'enthalpie et d'entropie pour des systèmes diphasés

27.1 Outils pour la description des changements de phase

Définition

Un **changement d'état** est modélisé comme une transformation monotherme, monobare et réversible, donc isotherme et isobare.



Nous parlons bien ici d'une transformation qui est réduite à un changement d'état. Sinon, découpez la transformation en étapes et appliquez les présents résultats uniquement à l'étape constituant le changement d'état.

27.1.1 Vocabulaire de changement d'état

Dans le cas des états de la matière les plus connus, le vocabulaire de changement d'état est résumé sur la figure 27.1.

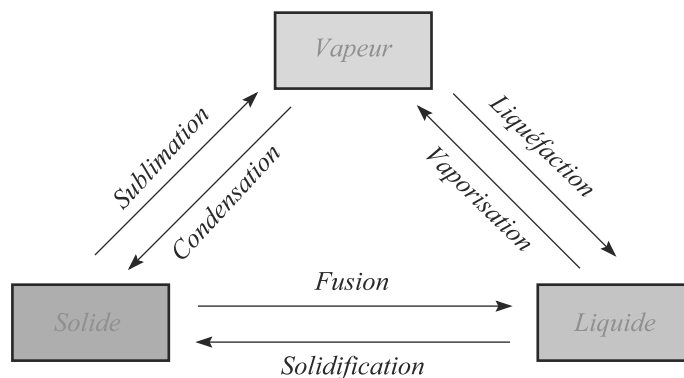


Figure 27.1 Vocabulaire pour les changements d'état usuels.

27.1.2 Enthalpie de changement d'état

La variation d'enthalpie massique sur une étape de changement d'état est :

Définition

L'enthalpie de changement d'état est définie par :

$$L = \Delta h$$

de sorte que $Q = mL$ sur cette étape.

Les valeurs de L pour divers corps purs sont tabulées, c'est-à-dire regroupées dans des bases de données de référence. Par exemple, l'enthalpie de fusion de la glace autour de 0°C sous pression atmosphérique vaut $L_{\text{fus}} = 335 \text{ kJ.K}^{-1}\text{kg}^{-1}$. Donc l'enthalpie de solidification de l'eau liquide dans les mêmes conditions vaut $L_{\text{sol}} = -335 \text{ kJ.K}^{-1}\text{kg}^{-1}$.


27.1.3 Entropie de changement d'état

Comme le changement d'état est réversible et isotherme, $\Delta S = S_e = Q/T$. D'où la variation d'entropie massique :


Définition

L'entropie de changement d'état est définie par :

$$\Delta s = \frac{L}{T}$$

 Vous trouverez parfois encore son ancien nom, **chaleur latente de changement d'état**.

 L'unité de L est le $\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$.

 L'unité de Δs est bien sûr le $\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$.

27.2 Diagramme (P, T) d'un corps pur

27.2.1 Allure du diagramme

Le diagramme (P, T) typique de nombreux corps pur est donné figure 27.2.

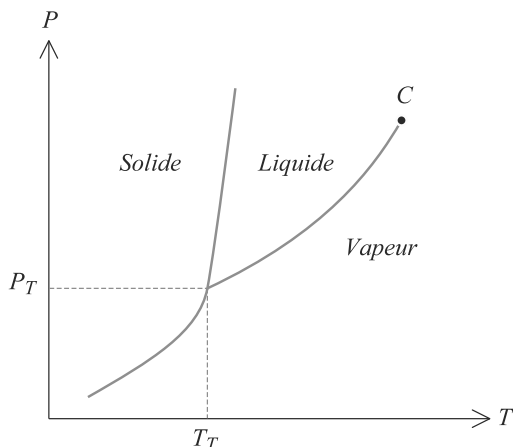


Figure 27.2 Allure typique d'un diagramme (P, T) . Pour la plupart des corps purs, la pente de la courbe d'équilibre solide-liquide est positive.

Dans chaque région marquée « Solide », « Liquide » ou « Vapeur », P et T peuvent varier indépendamment, le système est monophasé.

Sur chaque courbe séparant ces régions, donner une valeur à T fixe celle de P et réciproquement, le système est diphasé. Ces courbes sont appelées **courbes d'équilibre de phase**.

Au point d'intersection des trois courbes d'équilibre de phase, les valeurs de T et P sont imposées, le système est triphasé. C'est le **point triple**.

Au-delà du point critique C , il n'y a plus de différence entre liquide et vapeur ; nous parlons alors d'état **fluide**.

Pour dessiner une allure correcte d'un diagramme (P, T) , veillez à respecter les remarques suivantes :

- Les courbes d'équilibre $S = V$ et $L = V$ sont toujours croissantes.
- Qu'elle soit croissante ou décroissante, la courbe d'équilibre $S = L$ a une pente très importante puisqu'une phase condensée est peu sensible aux variations de pression.

Méthode 1 Exploiter un diagramme (P, T)

Sachez dessiner à main levée l'allure d'un diagramme (P, T) . Vous ne devez pas hésiter en plaçant les phases : le solide est « à gauche » (plutôt à basse température), la vapeur « à droite » (plutôt à haute température et/ou basse pression), etc.

Cherchez à représenter la trajectoire que le système étudié décrit au cours de sa transformation. Si cette trajectoire ne sort pas d'une région, les outils des chapitres précédents suffisent. Si elle traverse une courbe d'équilibre, il y a changement d'état : décomposez alors la transformation en étapes et utilisez les nouveaux outils du présent chapitre pour l'étape de changement d'état.

27.2.2 Vapeur sèche, vapeur saturante



Si la vapeur saturante est en présence d'autres gaz, $P_{\text{sat}}(T)$ est sa pression partielle.

Faites bien la distinction :

- Une vapeur en équilibre avec son liquide (système diphasé) est dite **saturante**. Sa pression n'est fonction que de la température : $P_{\text{sat}}(T)$.
- Une vapeur seule (système monophasé) est dite **sèche**. Sa pression peut dépendre de plusieurs paramètres. Par exemple, si elle est décrite en termes de gaz parfait, elle dépend de la température et du volume : $P(T, V) = nRT/V$.

27.2.3 Cas particulier de l'eau

Quelques rares corps comme l'eau présentent une pente négative pour la courbe d'équilibre $S = L$, comme indiqué figure 27.3.

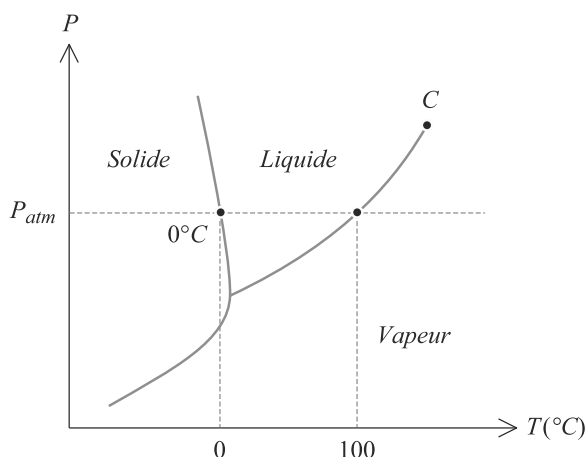


Figure 27.3 Diagramme (P, T) de l'eau.

Pour l'eau le point triple correspond à $T_T \approx 273,16 \text{ K}$ et $P_T \approx 0,006 \text{ bar}$.

Cela a des conséquences remarquables :

- Les glaçons flottent à la surface de l'eau, puisqu'ils sont moins denses.
- Une bouteille d'eau laissée au congélateur finit par éclater, car à masse égale la glace est plus volumineuse que l'eau liquide.
- La glace est glissante quand on marche dessus.

27.2.4 Vaporisation et évaporation

Si nous laissons une coupelle d'eau à l'air libre, l'eau finit par s'évaporer alors que nous ne sommes pas du tout dans les conditions de changement d'état.

En fait, si nous observons ce qui se passe de très près, il existe toujours une fine couche au-dessus du liquide où ce dernier est en équilibre avec sa vapeur. À l'air libre, cette vapeur est éliminée car emportée par les courants d'air. Cela tire l'équilibre de phase dans le sens de la formation de vapeur. Et ainsi de suite, jusqu'à ce que toute l'eau soit passée en vapeur.

C'est le phénomène d'évaporation, différent de la vaporisation par les conditions du phénomène mais aussi sa lenteur.

27.3 Diagramme de Clapeyron

27.3.1 Définition



Dans le cas où le changement d'état a lieu ($T < T_c$), la vapeur située avant le plateau est sèche, celle située sur le plateau est saturante.

C'est un diagramme en coordonnées (P, V) dans le cas liquide-vapeur dont l'allure typique est donnée figure 27.4. Le paramètre d'abscisse peut être le volume V ou le volume massique v .

- Les courbes à température constante sont appelées **isothermes d'Andrews**. Selon la valeur de T , elles présentent ou non un palier de changement d'état. La valeur frontière de T est T_c , température du point critique.
- Le lieu des extrémités des paliers « côté liquide » est la **courbe d'ébullition**.
- Le lieu des extrémités des paliers « côté vapeur » est la **courbe de rosée**.
- La réunion de ces deux courbes est la **courbe de saturation**.

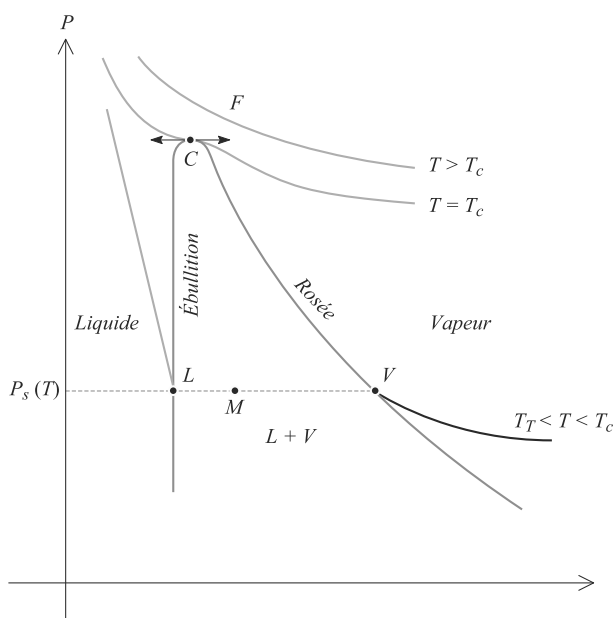


Figure 27.4 Courbe de saturation obtenue à partir des isothermes d'Andrews.

27.3.2 Répartition entre les deux phases

Considérons un mélange diphasé (sur le palier de changement d'état) de masse m , avec m_l la masse de liquide et m_v la masse de vapeur, de sorte que $m = m_l + m_v$.

Définition

$$\text{Titre massique en vapeur : } x_v = \frac{m_v}{m}$$

$$\text{Titre massique en liquide : } x_l = \frac{m_l}{m}$$

Ainsi, $x_l + x_v = 1$.

Le théorème des moments permet de calculer les proportions de liquide et de vapeur. Reportez-vous à la figure 27.5 pendant la lecture de la méthode ci-dessous.

Méthode 2 Écrire le théorème des moments

Le théorème des moments s'appuie sur la lecture en diagramme de Clapeyron d'une isotherme présentant un palier.

- Repérez les abscisses de trois points sur le palier :
 - M , le point d'abscisse v représentatif du mélange diphasé,
 - L , le point d'abscisse v_l situé sur l'extrémité gauche du palier,
 - V , le point d'abscisse v_v situé sur l'extrémité droite du palier.
- Les titres massiques liquide et vapeur sont reliés par deux équations :

$$x_l + x_v = 1$$

$$x_l \overline{LM} = x_v \overline{MV}$$

Résolvez ce petit système pour calculer les titres massiques et donc la composition du mélange.

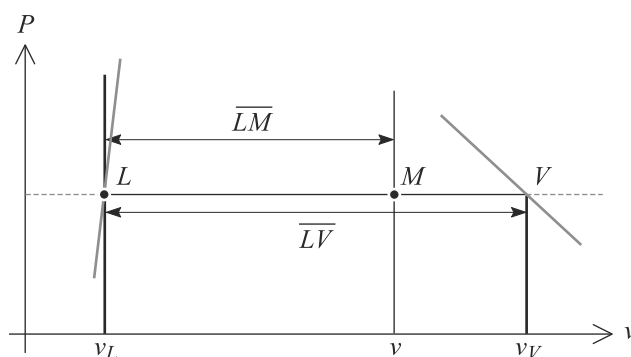


Figure 27.5 Utilisation du théorème des moments.

27.3.3 Paramètres d'état du mélange diphasé

Supposons que le mélange à l'équilibre est diphasé. Les paramètres d'état extensifs s'écrivent, avec des notations évidentes :

$$U = mu = m_l u_l + m_v u_v \Rightarrow u = (1 - x_v) u_l + x_v u_v$$

$$H = mh = m_l h_l + m_v h_v \Rightarrow h = (1 - x_v) h_l + x_v h_v$$

$$S = ms = m_l s_l + m_v s_v \Rightarrow s = (1 - x_v) s_l + x_v s_v$$

Sachant que les valeurs massiques pour une phase données sont des valeurs regroupées dans des bases de données, ces formules permettent aisément de calculer les paramètres d'état de n'importe quel mélange diphasé.

Synthèse

Savoirs

- Allures des courbes (P, T) pour les trois états usuels de la matière
- Allure d'un diagramme (P, V) pour l'équilibre liquide-vapeur

Savoir-faire

- Utiliser des enthalpies et entropies de changement d'état dans des bilans
- Utiliser le théorème des moments
- Placer l'état d'un système sur les graphiques
- Placer les points triple et critique sur les graphiques
- Reconnaître les courbes de rosée et d'ébullition en diagramme (P, V)

Mots-clés

- Changement d'état,
- titre massique,
- courbe d'ébullition,
- courbe de rosée,
- point triple,
- point critique,
- diagramme de Clapeyron,
- isothermes d'Andrews.

Tests de connaissances

- 27.1 La condensation est le passage de vapeur à solide.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 27.2 Pour passer à une phase moins condensée, il faut fournir de l'énergie à un système.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 27.3 Pour passer à une phase moins condensée, il faut fournir de l'entropie à un système.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 27.4 L'enthalpie de changement d'état sert à augmenter l'énergie cinétique microscopique du corps pur.

☐ a. Vrai ☐ b. Faux

- 27.5 Lors d'un changement d'état d'un corps pur, l'entropie du système augmente.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 27.6 En coordonnées de Clapeyron, la courbe de rosée est en contact avec la phase liquide.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 27.7 Au point critique, le fluide est incompressible.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

27.8 Chauffage de l'eau dans différents états

- Un glaçon de $m = 10 \text{ g}$ est initialement à $t_1 = -18^\circ\text{C}$ (température d'un conservateur) et est placé dans une pièce à température ordinaire $t_2 = 20^\circ\text{C}$. Le tout se fait sous pression atmosphérique $P_{\text{atm}} = 1 \text{ atm}$.
 Calculez ΔU et ΔH pour ce glaçon au cours de la transformation.
- Les mêmes 10 g d'eau liquide sont maintenant à $t_3 = 90^\circ\text{C}$ puis placés dans un environnement à $t_4 = 100^\circ\text{C}$, toujours sous pression atmosphérique.
 Calculez ΔU et ΔH dans cette deuxième situation en faisant des approximations raisonnables.

Données :

- Températures de changement d'état sous pression atmosphérique : $T_{\text{fus}} = 0^\circ\text{C}$ pour la fusion ; $T_{\text{vap}} = 100^\circ\text{C}$ pour la vaporisation.
- Capacités thermiques massiques :

$$c_{\text{glace}} = 2,09 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$$

$$c_{\text{eau}} = 4,18 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$$

- Enthalpies de changement d'état :

$$L_{\text{fus}} = 334 \text{ kJ.kg}^{-1} \quad \text{pour la fusion}$$

$$L_{\text{vap}} = 2\,260 \text{ kJ.kg}^{-1} \quad \text{pour la vaporisation}$$

- Masses volumiques :

$$\rho_{\text{glace}} = 918 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$\rho_{\text{eau}} = 1\,000 \text{ kg.m}^{-3}$$

- Les phases condensées seront supposées incompressibles.

- La vapeur d'eau sera considérée comme un gaz parfait.

27.9 Isothermes de l'eau, diagramme de Clapeyron (D'après Centrale)

Le diagramme (figure 27.6) est le diagramme d'état de l'eau en représentation de Clapeyron (pression, volume massique). E est un point du diagramme d'ordonnée 220 bar et obtenu à la température 374°C . On note m_{H_2O} , la masse d'eau totale, $m_{H_2O(l)}$, la masse d'eau liquide et $m_{H_2O(v)}$ la masse d'eau vapeur.

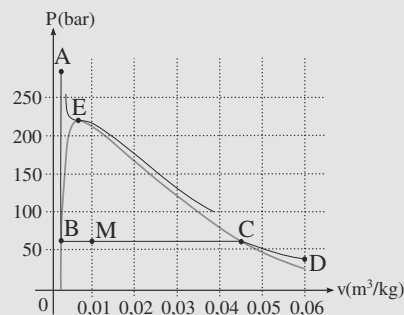


Figure 27.6 Diagramme de Clapeyron de l'eau.

- Est-il possible d'obtenir de l'eau liquide à une température supérieure à 100°C ? Si oui, comment procéder ?
- Le long de l'isotherme $\theta = 300^\circ\text{C}$, entre les points figuratifs A et B dans quel état physique se trouve l'eau ? Même question entre les points C et D, et finalement entre les points B et C. Identifier sur le diagramme les courbes de rosée et d'ébullition ainsi que le point critique.
- Considérons un système de masse m_{H_2O} dont le point figuratif est le point M. Montrer qu'il est possible d'exprimer les fractions massiques d'eau sous forme liquide

$$(x_{liq} = \frac{m_{H_2O(l)}}{m_{H_2O}}) \text{ et sous forme vapeur } (x_{vap} = \frac{m_{H_2O(v)}}{m_{H_2O}})$$

en fonction des longueurs des segments BM, MC et BC. Pour un kilogramme d'eau dans un état dont le point figuratif est le point M, déterminer la masse et le volume de chacune des deux phases. Même question pour un système dont le point figuratif est le point B, puis le point C.

27.10 Détente d'un mélange diphasé

(D'après Concours communs polytechniques.)

Un récipient indéformable est muni d'un piston qui coulisse sans frottement et l'ensemble est calorifugé. La position initiale du piston délimite un volume $V = 10 \text{ L}$. Une masse $m = 10 \text{ g}$ d'eau est introduite dans le cylindre et son état se stabilise sous la forme d'un mélange diphasé à $t = 100^\circ \text{C}$. Le titre massique en vapeur est noté x et la température absolue T .

- Justifiez brièvement que l'entropie massique du mélange peut s'écrire :

$$s(x, T) = c_l \ln(T) + \frac{xL_v}{T}$$

à une constante additive près, avec c_l la capacité thermique du liquide et L_v l'enthalpie de vaporisation.

- Calculez le titre massique x du système.
- En actionnant le piston, faisons subir au système une détente adiabatique réversible de la température t à la température $t' = 50^\circ \text{C}$. En supposant que c_l ne varie pas dans cette plage de températures, calculez le nouveau titre massique en vapeur x' .
- Quel titre massique en vapeur aurions-nous dû avoir à la température t pour qu'au cours de la détente ce titre reste constant ?

Données :

- Capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_l = 4,18 \text{ kJ.K}^{-1}\text{kg}^{-1}$
- Enthalpie massique de l'eau liquide :

$$h_l(t) = 418,42 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

$$h_l(t') = 208,96 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

- Volume massique de l'eau liquide :

$$v_l(t) = 1,04.10^{-3} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}$$

$$v_l(t') = 1,01.10^{-3} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}$$

- Enthalpie massique de l'eau vapeur :

$$h_v(t) = 2671,44 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

$$h_v(t') = 2587,42 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

- Volume massique de l'eau vapeur :

$$v_v(t) = 1,673 \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}$$

$$v_v(t') = 12,04 \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}$$

27.11 Calorimétrie avec changement d'état

Un calorimètre est constitué d'un vase calorifugé de masse en eau $\mu = 25 \text{ g}$, plaçons $m_1 = 200 \text{ g}$ d'eau à la température $t_1 = 20^\circ \text{C}$. Puis ajoutons un cube de glace $m_2 = 80 \text{ g}$ initialement à la température $t_2 = -18^\circ \text{C}$ et agitions jusqu'au rétablissement de l'équilibre thermodynamique.

- La glace a-t-elle entièrement fondu ? Si oui, calculez la température d'équilibre t_f . Si non, précisez la valeur de t_f et calculez la fraction massique de glace qui a fondu.
- Faites un bilan entropique pour l'ensemble eau+glace. Commentaire ?

Données :

- Capacités thermiques massiques :

$$c_{\text{eau}} = 4185 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$$

$$c_{\text{glace}} = 2090 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$$

- Enthalpie massique de fusion à 0°C : $L_{\text{fus}} = 335 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

Exercices d'approfondissement

27.12 Augmentation de la pression de vapeur

(D'après Concours national DEUG.)

Un récipient de volume $V_0 = 1 \text{ m}^3$ constant contient initialement une masse $m_0 = 8 \text{ kg}$ de mercure qui va subir une transformation de température initiale $T_1 = 573 \text{ K}$ à une température finale $T_2 = 673 \text{ K}$.

Les parois sont parfaitement calorifugées, sauf en un endroit où une résistance chauffante, parcourue par un courant électrique, permet un transfert thermique. Les capacités thermiques du récipient et de la résistance chauffante sont négligées.

La résistance chauffante est modélisée par un thermostat de température $T_3 = 800 \text{ K}$ qui apporte une puissance thermique constante $\mathcal{P}_0 = 10 \text{ kW}$.

La fraction massique de mercure sous forme vapeur est notée x . La vapeur sera traitée comme un gaz parfait.

Données pour le mercure :

- Masse molaire : $M = 200 \text{ g.mol}^{-1}$
- Volume massique du liquide : $v_l = 7,7 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$
- Volume massique de la vapeur : $v_v(573 \text{ K}) = 0,7 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$
- Pression de vapeur saturante : $P_{\text{sat}}(573 \text{ K}) = 0,33 \text{ bar}$, $P_{\text{sat}}(673 \text{ K}) = 2,10 \text{ bar}$
- Enthalpie de vaporisation :

$$L_v(573 \text{ K}) = 297 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

$$L_v(673 \text{ K}) = 293,7 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

- Capacité thermique massique pour le liquide : $c_l = 0,135 \text{ kJ.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

1. Étude de l'équilibre à la température T_1 : calculez la masse initiale m_{v1} de vapeur ainsi que son titre massique x_1 .
2. Même question à la température T_2 .
3. Représentez la transformation sur un diagramme (P, V) puis sur un diagramme (P, T) .
4. Bilan thermique.
 - a) Calculez le transfert thermique Q reçu par le mercure au cours de la transformation.
 - b) Déduisez-en la durée Δt de fonctionnement du thermostat.
5. Bilan entropique.
 - a) Calculez la variation d'entropie du mercure.
 - b) Déduisez-en l'entropie créée au cours de la transformation.

27.1 Mesure de l'enthalpie de vaporisation de l'eau

(D'après Centrale TSI.)

Le corps pur étudié ici est l'eau, en phase liquide ou vapeur. L désigne son enthalpie de vaporisation.

1. Un corps pur en équilibre diphasé à la température T est sous une pression P qui dépend de T . La pente dP/dT de la courbe d'équilibre est liée à la température T , à l'enthalpie de changement d'état L et à la différence des volumes massiques Δv . Par homogénéité, la relation entre ces grandeurs doit être de la forme :

$$\frac{dP}{dT}(T) = T^\alpha L^\beta \Delta v^\gamma$$

- a) Déterminez les coefficients α , β et γ . La relation obtenue s'appelle la relation de Clapeyron.

- b) Expliquez rapidement pourquoi la pente de la courbe d'équilibre solide-liquide de l'eau est négative.

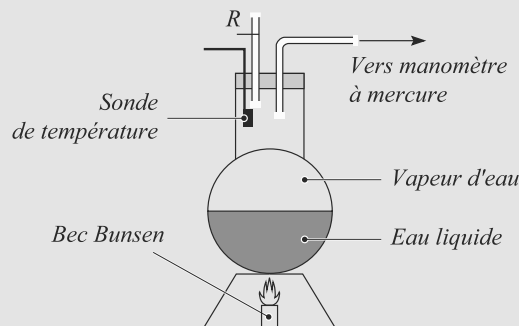


Figure 27.7 Expérience pour la mesure de l'enthalpie de vaporisation de l'eau.

2. Considérons le dispositif expérimental de la figure 27.7. Le ballon ne contient pas d'air et est hermétiquement fermé. Il est chauffé rapidement jusqu'à 100°C puis nous le laissons refroidir jusqu'à 25°C en mesurant la température et la pression dans le ballon. Le graphe de la figure 27.8 montre le résultat des mesures sous la forme de $\ln(P)$ en fonction de $10^3/T$, avec P en bar et T en kelvin.

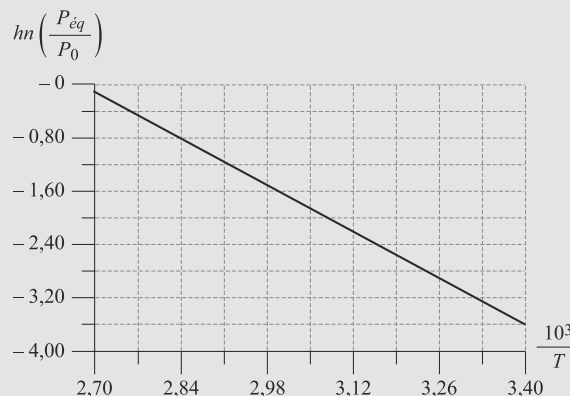


Figure 27.8 Graphe résultant de l'expérience.

- a) La masse volumique de la vapeur d'eau est $\rho = 1 \text{ g.L}^{-1}$. Quelle approximation vous semble alors raisonnable ?
- b) Que remarquez-vous sur cette figure ? En supposant en plus que la vapeur d'eau se comporte comme un gaz parfait (masse molaire $M = 18 \text{ g.mol}^{-1}$), donnez la variation de L avec T dans le domaine de température considéré. Application numérique.

27.1

Vrai, c'est la transformation inverse de la sublimation mais dans le langage courant on l'utilise aussi pour le passage au liquide (liquéfaction).

27.2

Vrai, on doit apporter de l'énergie potentielle microscopique au système (à T constante).

27.3

Vrai puisqu'on lui apporte de la chaleur (à T constante).

27.4

Faux, elle sert à apporter de l'énergie potentielle microscopique.

27.5

Vrai mais seulement si l'on va vers une phase moins condensée (à T constante).

27.6

Faux, au contraire elle représente l'apparition des gouttes de liquide à partir de vapeur, elle est donc en contact avec la phase vapeur.

27.7

Faux. Bien au contraire, la tangente de l'isotherme critique est horizontale en coordonnées de Clapeyron et donc V varie sans que P n'augmente : le fluide est infiniment compressible.

27.8

Chauffage de l'eau dans différents états

Le découpage en transformations fictives est très simple, veillez donc à la qualité de la rédaction pour le justifier.

Les « approximations raisonnables » de la question 2 sont liées au fait que l'on passe d'une phase condensée à une phase vapeur. Il y a une différence numérique importante entre les masses volumiques de ces deux types de phase.

Toutes les transformations considérées ici sont monobares, sous pression atmosphérique. Pour toute transformation monobare, $\Delta H = Q$. Nous en déduisons ΔU grâce à $U = H - PV$:

$$\Delta U = \Delta H - \Delta(PV)$$

$$= Q - \Delta(PV)$$

$$\Delta U = Q - P_{\text{atm}} \Delta V$$

1. Décomposons la transformation en trois étapes fictives :

- Étape 1 : chauffage monobare du glaçon dans un environnement à 0°C (donc monotherme).
- Étape 2 : fusion du glaçon à 0°C .

- Étape 3 : chauffage monobare monotherme de l'eau liquide à 20°C .

Puisque H et U sont des fonctions d'état, nous pouvons écrire :

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3$$

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3$$

Pour une étape de chauffage, nous pouvons écrire $\Delta H = mc \Delta T$ donc $Q = mc \Delta T$. En outre, le volume d'une phase condensée ne varie presque pas (incompressible) donc $\Delta V \approx 0$. Donc $\Delta H \approx \Delta U$. D'où les valeurs numériques :

$$\Delta H_1 \approx \Delta U_1 \approx mc_{\text{glace}}(0 - t_1) = 376 \text{ J}$$

$$\Delta H_3 \approx \Delta U_3 \approx mc_{\text{eau}}(t_2 - 0) = 836 \text{ J}$$



S'il est interdit de faire le rapport de deux températures en degrés Celsius, il est possible d'en faire la différence.

Pour une étape de changement d'état, par définition $\Delta H = Q = mL$. Cette fois le volume change. Avec $\rho = m/V$ pour une phase, il vient :

$$\Delta V = m \Delta \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

D'où le bilan de cette étape :

$$\Delta H_2 = mL_{\text{fus}} = 3\,340 \text{ J}$$

$$\Delta U_2 = mL_{\text{fus}} - P_{\text{atm}} m \left(\frac{1}{\rho_{\text{eau}}} - \frac{1}{\rho_{\text{glace}}} \right) = 3\,340 \text{ J}$$

D'où finalement : $\Delta U \approx \Delta H = 4\,452 \text{ J}$. Le très faible écart entre ΔH et ΔU s'explique par le fait qu'il n'y a que des phases condensées.

2. Par un raisonnement similaire, décomposons la transformation en deux étapes monobares fictives : chauffage du liquide puis vaporisation. Les formules ci-dessus peuvent être réutilisées, en remarquant qu'il y a un facteur 1 000 entre les masses volumiques du liquide et de la vapeur.

Pour l'étape de chauffage :

$$\Delta H_4 \approx \Delta U_4 \approx mc_{\text{eau}}(t_4 - t_2) = 3\,348 \text{ J}$$

Et pour l'étape de vaporisation :

$$\Delta H_5 = mL_{\text{vap}} = 22\,600 \text{ J}$$

$$\begin{aligned} \Delta U_5 &= mL_{\text{vap}} - P_{\text{atm}} m \left(\frac{1}{\rho_{\text{vap}}} - \frac{1}{\rho_{\text{eau}}} \right) \\ &\approx mL_{\text{vap}} - \frac{P_{\text{atm}} m}{\rho_{\text{vap}}} \end{aligned}$$

Enfin, ρ_{vap} peut être tirée de l'équation d'état des gaz parfaits :

$$\rho = \frac{PM}{RT}$$

qui conduit à $\Delta U_5 = 20\,878 \text{ J}$. Donc $\Delta U = 24\,226 \text{ J}$ et $\Delta H = 25\,948 \text{ J}$.

27.9 Isothermes de l'eau, diagramme de Clapeyron

Méthode mise en jeu : n°2.

Cet exercice est avant tout une suite de questions de cours : c'est l'occasion pour vous de savoir si vous possédez le vôtre !

1. Comme le diagramme le prouve, il est possible d'obtenir de l'eau liquide au-dessous du point E, point critique, c'est-à-dire en dessous de 374 °C. On peut donc bien en obtenir au-dessus de 100 °C à condition de rester en dessous de 374 °C et d'élever la pression pour rester à gauche de la courbe d'ébullition.
2. De A à B, l'eau est sous forme liquide car v est faible : c'est l'état le plus condensé qu'on rencontre (liquide ici). De C à D, c'est donc l'état vapeur (le moins dense) qui est représenté. De B à C à lieu la transition de phase : liquide et vapeur sont présents conjointement.

La courbe de rosée est du côté de la vapeur et la courbe d'ébullition du côté du liquide (figure 27.9)

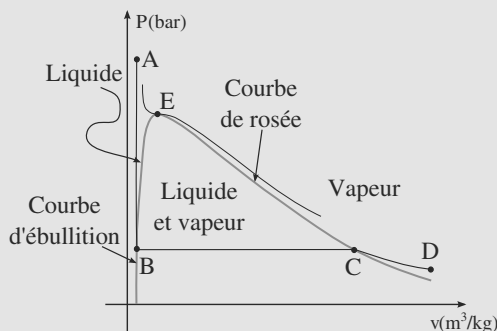


Figure 27.9 Phases et courbes en présence.

3. Il s'agit ici de redémontrer le théorème des moments. Utilisons le caractère extensif du volume du système :

$$V = V_{(l)} + V_{(v)} = m_{H_2O(l)}v_{(l)} + m_{H_2O(v)}v_{(v)}.$$

Or $v_{(l)} = v_{(B)}$ et $v_{(v)} = v_{(C)}$. De plus, $V = m_{H_2O}v$ avec $v = v_{(M)}$ et $x_{liq} + x_{vap} = 1$. On en déduit :

$$v_{(M)} = x_{liq}v_{(B)} + (1 - x_{liq})v_{(C)}.$$

Finalement,

$$x_{liq} = \frac{v_{(C)} - v_{(M)}}{v_{(C)} - v_{(B)}} = \frac{MC}{BC}.$$

On établit de la même manière :

$$x_{vap} = \frac{v_{(M)} - v_{(B)}}{v_{(C)} - v_{(B)}} = \frac{BM}{BC}.$$

Les points B et C représentent des états monophasés : B de l'eau liquide et C de l'eau vapeur (saturants tous deux) et donc $x_{liq(B)} = 1$ et $x_{liq(C)} = 0$ (et donc $x_{vap(B)} = 0$ et $x_{vap(C)} = 1$).

Applications numériques : $x_{vap} = 0,173$ soit 173 g de vapeur et donc 827 g de liquide ;

$$x_{vap} = m_{vap} \cdot v_{vap} = m_{vap} \cdot x(C) = 7,8 \text{ L} ;$$

$$x_{liq} = m_{liq} \cdot v_{liq} = m_{liq} \cdot x(B) = 1,4 \text{ L} ;$$

Au point B, $m_{vap} = 0$, $m_{liq} = 1 \text{ kg}$, $V_{vap} = 0$ et $V_{liq} = 1,7 \text{ L}$.

Au point C, $m_{vap} = 1,00 \text{ kg}$, $m_{liq} = 0$, $V_{vap} = 45 \text{ L}$ et $V_{liq} = 0$.

27.10 Détente d'un mélange diphasé

Méthode mise en jeu : n°2.

La mention d'un titre massique en vapeur doit tout de suite vous évoquer le théorème des moments. Cet exercice est une mise en l'uvre élémentaire de ce théorème.

1. Partant d'un état quelconque où le système est liquide (dont les caractéristiques sont incluses dans la constante mentionnée par l'énoncé), il faut une entropie $mc_l \ln(T)$ pour le porter à la température T (formule valable pour toute phase incompressible).

Ensuite, si une fraction x se vaporise, l'entropie de vaporisation est alors xmL_v/T .

La somme des deux, divisée par m pour avoir une entropie massique, est bien l'expression donnée.

2. D'après le théorème des moments à la température t :

$$x = \frac{v_m(t) - v_l(t)}{v_v(t) - v_l(t)}$$

avec $v_m(t) = V/m = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ le volume massique du mélange à la température t . D'où :

$$x = 59,7 \%$$



Si vous aviez trouvé une valeur négative ou supérieure à 1, cela aurait signifié que le système ne pouvait pas être diphasé dans les conditions de l'énoncé.

3. Une détente adiabatique réversible est isentropique donc $\Delta s = 0$ sur la transformation. Alors, en notant T et T' les températures absolues associées à t et t' :

$$c_l \ln(T) + \frac{xL_v(t)}{T} = c_l \ln(T') + \frac{x'L_v(t')}{T'}$$

Par définition $L_v = h_v(t) - h_l$. Donc :

$$x' = \frac{T'}{h_v(t') - h_l(t')} \left(c_l \ln\left(\frac{T}{T'}\right) + (h_v(t) - h_l(t)) \frac{x}{T} \right)$$

Numériquement $x = 57,2 \%$.

4. Écrivons la formule précédente en imposant $x = x'$. Alors :

$$x = \frac{c_l \ln\left(\frac{T}{T'}\right)}{\frac{h_v(t') - h_l(t')}{T'} - \frac{h_v(t) - h_l(t)}{T}}$$

Numériquement, $x = 45,5 \%$.

27.11 Calorimétrie avec changement d'état

Certains réflexes doivent revenir vite : exercice de calorimétrie, donc bilan enthalpique sur le système (isolé) calorimètre+contenu. Un changement d'état contribue à la variation d'enthalpie par un terme de la forme mL .

Pour la première question, raisonnez en faisant une hypothèse et en critiquant le résultat obtenu.

1. Si la glace a entièrement fondu, toute l'eau est liquide à une température finale positive. Sinon, le système est à l'équilibre eau-glace et donc à 0°C sous pression atmosphérique. Supposons que le glaçon a entièrement fondu. Le système vase+eau+glace est isolé donc sa variation d'enthalpie est nulle. Par extensivité de l'enthalpie :

$$\Delta H = 0 = \Delta H_{\text{vase}} + \Delta H_{\text{eau}} + \Delta H_{\text{glace}}$$

La variation d'enthalpie du vase est, par définition de la masse en eau :

$$\Delta H_{\text{vase}} = \mu c_{\text{eau}}(t_f - t_1)$$

Celle de l'eau :

$$\Delta H_{\text{eau}} = m_1 c_{\text{eau}}(t_f - t_1)$$

La transformation du glaçon peut être décomposée en un chauffage de t_2 à 0°C , un changement d'état puis un chauffage de 0°C à t_f :

$$\Delta H_{\text{glace}} = m_2 c_{\text{glace}}(0 - t_2) + m_2 L_{\text{fus}} + m_2 c_{\text{eau}}(t_f - 0)$$

Finalement :

$$t_f = \frac{\mu c_{\text{eau}} t_1 + m_1 c_{\text{eau}} t_1 + m_2 c_{\text{glace}} t_2 - m_2 L_{\text{fus}}}{(\mu + m_1 + m_2) c_{\text{eau}}}$$

Mais cela donne $t_f \approx -9^\circ\text{C}$ qui n'est pas physiquement acceptable.

Si la glace n'a que partiellement fondu, le bilan enthalpique est plus simple : la température finale vaut nécessairement 0°C . La transformation subie par le glaçon se décompose en un chauffage de toute sa masse jusqu'à 0°C puis le changement d'état d'une masse xm_2 , où x est la fraction massique cherchée.

$$\Delta H_{\text{glace}} = m_2 c_{\text{glace}}(-t_2) + xm_2 L_{\text{fus}}$$

qui conduit à $x \approx 59\%$. Donc 59% du glaçon a fondu, il en reste 33 g et il y a 247 g d'eau liquide.

2. L'entropie étant une fonction d'état extensive comme H , calculons ΔS à l'aide de la décomposition précédente. L'entropie d'une phase condensée varie suivant la loi générale :

$$\Delta S = mc \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$$

Donc les variations d'entropie du vase et de l'eau initiale sont :

$$\Delta S_{\text{vase}} = \mu c_{\text{eau}} \ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right)$$

$$\Delta S_{\text{eau}} = m_1 c_{\text{eau}} \ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right)$$

où $T_0 = 273\text{ K}$.



Dans un terme en $\ln(T)$, il est nécessaire que la température soit en kelvin !

Pour le glaçon entier, il y a eu chauffage :

$$\Delta S_{\text{glace, chauff.}} = m_2 \ln\left(\frac{T_0}{T_2}\right)$$

Pour la masse de glace xm_2 qui a changé d'état, il y a eu en plus fusion :

$$\Delta S_{\text{glace, fus.}} = \frac{xm_2 L_{\text{fus}}}{T_0}$$

D'où finalement :

$$\begin{aligned} \Delta S &= (\mu + m_1) c_{\text{eau}} \ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right) \\ &\quad + m_2 c_{\text{glace}} \ln\left(\frac{T_0}{T_2}\right) + \frac{xm_2 L_{\text{fus}}}{T_0} \\ \Delta S &= 2,8 \text{ J.K}^{-1} \end{aligned}$$

Comme le système est isolé, $S_e = 0$ donc $S_c = \Delta S > 0$: la transformation est irréversible.

27.12 Augmentation de la pression de vapeur

Méthode mise en jeu : n°1.

Il s'agit d'un exercice relativement qualitatif. Appuyez-vous sur les diagrammes demandés pour voir ce qui se passe et trouver les bonnes étapes en lesquelles décomposer la transformation.

1. La loi des gaz parfaits s'écrit $PV = nRT$. Le volume du gaz est presque égal au volume total du fait de la grande différence de volume massique donc $V \approx V_0$. La pression est égale à la pression de vapeur saturante car les deux phases coexistent donc : Donc :

$$m_{v1} = \frac{P_{\text{sat}}(T_1) V_0 M}{RT_1} = 1,39 \text{ kg}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{m_{v1}}{m_0} = 17,3\%$$

Cette valeur est inférieure à m_0 et donc bien compatible avec l'hypothèse d'un système diphasé.

2. Le raisonnement et les formules sont identiques à ce qui précède, seule l'application numérique change :

$$m_{v2} = 7,81 \text{ kg}$$

$$x_2 = 97,7 \%$$

Cela est encore compatible avec l'hypothèse d'un système diphasé, mais le système est presque entièrement sous forme vapeur. Nous sommes proche de la courbe de rosée (voir question suivante).

3. Voir figures 27.10 et 27.11.

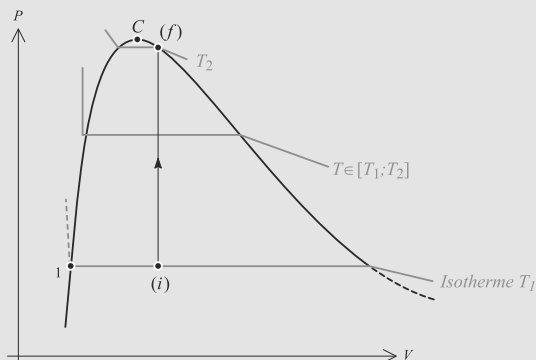


Figure 27.10 Transformation du mercure en diagramme (P, V) .

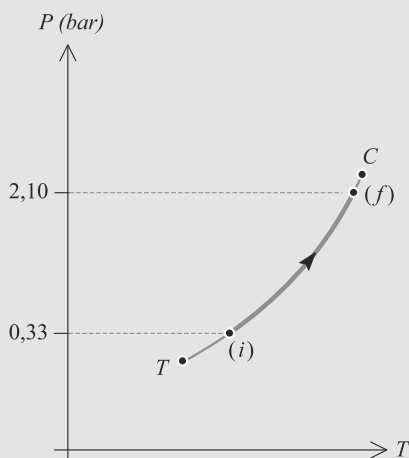


Figure 27.11 Transformation du mercure en diagramme (P, T) .

4. a) Prenons comme système le mercure diphasé. Il occupe la totalité d'une enceinte de volume constant et donc ne reçoit aucun travail des forces de pression. Le premier principe s'écrit alors $\Delta U = Q$.

Calculons ΔU sur une suite de transformations fictives en exploitant le fait que U est une fonction d'état. La suite de transformations est indiquée sur la figure 27.10 :

- Étape 1 : passage isobare et isotherme de l'état initial 1 jusqu'au point A sur la courbe d'ébullition où le mercure est entièrement liquide à la température T_1 . La

variation d'énergie interne ΔU_1 s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta U_1 &= \Delta H_1 - \Delta(PV)_1 \\ &= -x_1 m_0 L_{v1} - P_1(0 - V_0) \\ \Delta U_1 &= -x_1 m_0 L_{v1} + P_1 V_0\end{aligned}$$

en négligeant le volume occupé par le liquide, au vu des données de l'énoncé.

- Étape 2 : chauffage du mercure liquide jusqu'à T_2 au point B. Alors :

$$\Delta U_2 = m_0 c_l (T_2 - T_1)$$

- Étape 3 : dilatation isobare du mercure liquide jusqu'à l'état final diphasé 2. Le calcul est similaire à l'étape 1 :

$$\Delta U_3 = x_2 m_0 L_{v2} - P_2 V_0$$

D'où la variation totale, puisque U est une fonction d'état :

$$\begin{aligned}\Delta U &= \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3 \\ &= m_0(x_2 L_{v2} - x_1 L_{v1}) - V_0(P_2 - P_1) \\ &\quad + m c_l (T_2 - T_1) \\ \Delta U &= 1810 \text{ kJ}\end{aligned}$$

Le transfert thermique reçu est donc $Q = 1810 \text{ kJ}$.

b) $Q = P_0 \Delta t$ donc :

$$\Delta t = \frac{Q}{P_0} = 3 \text{ min } 1 \text{ s}$$

5. a) Réutilisons la décomposition en étapes fictives précédente :

$$\begin{aligned}\Delta S &= -\frac{x_1 m_0}{T_1} L_{v1} + m_0 c_l \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \frac{x_2 m_0}{T_2} L_{v2} \\ &= 2,84 \text{ kJ.K}^{-1}\end{aligned}$$

b) Le thermostat reçoit du système un transfert thermique $-Q$ car le système n'échange d'énergie avec aucune autre source. Donc la variation d'entropie du thermostat est :

$$\Delta S_{\text{th}} = \frac{-Q}{T_3} = -2,47 \text{ kJ.K}^{-1}$$

L'entropie globalement créée est donc :

$$S_c = \Delta S + \Delta S_{\text{th}} = 366 \text{ J.K}^{-1}$$

Elle est positive comme attendu car la transformation est forcément irréversible (il existe une différence de température entre le système et l'extérieur, qui est le thermostat).

27.13

Mesure de l'enthalpie de vaporisation de l'eau

Méthode mise en jeu : n°1.

Vous démontrerez la loi de Clapeyron l'an prochain. Cet exercice vous propose de la découvrir et de la « faire parler ». Les questions sont imbriquées les unes dans les autres, donc si vous ne voyez pas ce qu'il faut faire à une question, revenez à celles qui précèdent.

1. a) T est une température, L est homogène à une énergie par unité de masse et Δv à un volume par unité de masse. Donc :

$$\left[\frac{dP}{dT} \right] = [P][T]^{-1} = [T]^\alpha \left[\frac{E}{m} \right]^\beta \left[\frac{V}{m} \right]^\gamma$$

Une pression est une force par unité de surface donc :

$$[P] = ML^{-1}T^{-2}$$

La dimension de E/m peut être trouvée en pensant à l'énergie cinétique : $E/m = v^2/2$. Donc :

$$\left[\frac{E}{m} \right] = L^2T^{-2}$$

Et un volume est en L^3 . D'où l'équation aux dimensions :

$$ML^{-1}T^{-2}\theta^{-1} = M^{-\gamma}L^{2\beta}T^{-2\beta}\theta^\alpha$$

Ce système se résout immédiatement en $\alpha = -1$, $\beta = 1$ et $\gamma = -1$. D'où la relation de Clapeyron :

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T\Delta v}$$

- b) $dP/dT < 0$ implique $\Delta v < 0$ donc que le solide est moins dense que le liquide. Cela correspond bien à la réalité, puisqu'un glaçon flotte sur l'eau liquide.

2. a) L'eau liquide a une masse volumique de 1 kg.L^{-1} . Le facteur 1000 entre les deux autorise donc l'approximation :

$$\Delta v = v_{\text{vap}} - v_{\text{liq}} \approx v_{\text{vap}}$$

puisque le volume massique est l'inverse de la masse volumique.

- b) Le volume massique de la vapeur se calcule à partir de la loi des gaz parfaits :

$$v_{\text{vap}} = \frac{V}{m} = \frac{RT}{PM}$$

En injectant ceci dans la formule de Clapeyron, il vient :

$$L = \frac{RT^2}{PM} \frac{dP}{dT}$$

Remarquons que :

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dT} = \frac{d \ln(P)}{dT}$$

et $\frac{dT}{T^2} = -d\left(\frac{1}{T}\right)$

D'où :

$$L = -\frac{R}{M} \frac{d \ln(P)}{d(1/T)}$$

Or, la courbe expérimentale est une droite donc sa pente $\frac{d \ln(P)}{d(1/T)}$ est constante. Donc L est indépendante de la température dans les conditions de l'expérience.

Par lecture graphique, il vient $L = 2330 \text{ kJ.kg}^{-1}$.



Ceci est assez proche de la valeur réelle $L = 2260 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

Plan

28.1 Généralités sur un cycle ditherme	427
28.2 Généralisation	428
28.3 Théorème de Carnot	430
Synthèse	431
Tests et exercices	432
Corrigés des exercices	437

Introduction

Le chapitre porte sur des systèmes subissant une transformation cyclique ditherme, donc rentrant **successivement** en contact avec deux thermostats, l'un appelé **source froide** de température T_f , l'autre appelé **source chaude** de température T_c , avec $T_f < T_c$.

Prérequis

- Premier et deuxième principes
- Diagramme de Clapeyron : tracés des transformations
- Bilans d'enthalpie et d'entropie

Objectifs

- Représenter les cycles en coordonnées de Clapeyron
- Définir et calculer efficacité ou rendement d'une machine thermique
- Étude du cycle et du théorème de Carnot

28.1 Généralités sur un cycle ditherme

28.1.1 Bilans thermodynamiques sur un cycle ditherme

Le système étudié reçoit au cours du cycle un travail W , un transfert thermique Q_f de la source froide et un transfert thermique Q_c de la source chaude. D'où, sur un cycle :

$$\text{Premier principe : } W + Q_c + Q_f = 0$$

$$\text{Second principe : } \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0$$



Toutes les combinaisons de signe pour W , Q_c et Q_f ne sont pas possibles ou utiles.

Si le système reçoit effectivement du travail ($W > 0$), le cycle est récepteur. Sinon il est moteur.

28.1.2 Rendement ou efficacité

La seule généralité que nous pouvons donner sur la définition est :

$$\text{efficacité ou rendement} = \frac{\text{énergie récupérée par l'utilisateur}}{\text{énergie fournie à la machine}}$$

de telle sorte que la grandeur soit positive. Elle sera appelée « rendement » si elle est entre 0 et 1 (donc un pourcentage), « efficacité » sinon.

28.1.3 Classification des machines dithermes

Il y a trois cas utiles.

	Moteur thermique	Machine frigorifique	Pompe à chaleur
W	< 0	> 0	> 0
Q_f	< 0	> 0	> 0
Q_c	> 0	< 0	< 0
Efficacité e ou rendement r	$r = \frac{-W}{Q_c}$	$e = \frac{Q_f}{W}$	$e = \frac{-Q_c}{W}$
Schéma			

Par définition W peut s'écrire :

$$W = \oint_{\text{cycle}} -P_{\text{ext}} dV$$

donc $W > 0$ si, en diagramme (P, V) , le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique, le cycle est récepteur (machine frigorifique ou pompe à chaleur). Si le cycle est parcouru dans le sens horaire, le cycle est moteur (moteur thermique).

28.2 Généralisation

De nombreuses machines thermiques moins simples que les trois précédentes peuvent être étudiées avec les mêmes outils. Gardez en mémoire la définition générale du rendement ou de l'efficacité pour l'adapter à chaque cas.

Méthode 1 Étudier un cycle

1. Faites la liste des informations dont vous disposez sur les transformations successives du cycle. Identifiez les deux thermostats et donc les deux étapes monothermes. Attention, bien qu'il y ait souvent quatre étapes dans le cycle, ce n'est pas une obligation ! La seule contrainte est qu'il y ait deux étapes monothermes.
2. Écrivez les deux principes sur un cycle.
3. À ce stade vous devez bien savoir jongler avec les calculs de grandeurs thermodynamiques. Étudiez chaque étape conformément à ce que l'énoncé vous demande.

Il est classique d'« oublier » la loi de Laplace. Quand une étape d'un cycle réversible suivi par un gaz parfait est adiabatique, pensez-y !

Exercice d'application

On considère un gaz parfait diatomique ($C_{pm} = 7/2 R$) qui subit les transformations suivantes :

- compression isotherme : $(P_1, V_1, T_1) \longrightarrow (P_2, V_2, T_1)$
- transformation isobare : $(P_2, V_2, T_1) \longrightarrow (P_2, V_3, T_3 > T_1)$
- détente isotherme : $(P_2, V_3, T_3) \longrightarrow (P_1, V_4, T_3)$
- transformation isobare : $(P_1, V_4, T_3) \longrightarrow (P_1, V_1, T_1)$

1. Représentez le cycle dans un diagramme de Clapeyron.
2. Ce cycle est-il moteur ou récepteur ? Justifiez la réponse.
3. Donnez l'expression du rendement ou de l'efficacité de la machine et calculez-le en fonction de P_1, P_2, T_1 et T_3 .

Solution

1. Voir figure 28.1.

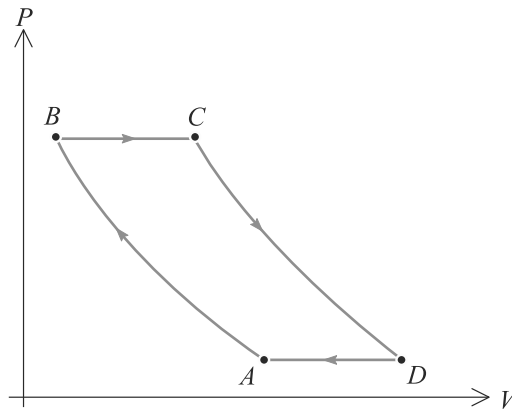


Figure 28.1 Diagramme de Clapeyron d'un cycle d'Ericsson (deux isothermes, deux isobares).

2. Le cycle est parcouru dans le sens horaire, donc l'aire du cycle est positive, donc le travail reçu négatif. Donc le cycle est moteur.

3. C'est un cycle moteur donc son rendement est défini par :

$$r = \frac{-W}{Q_{\text{reçu}}}$$

où $Q_{\text{reçu}}$ est le transfert thermique effectivement reçu par le système au cours d'un cycle.

Sur une étape isotherme, $Q = -W = nRT \ln(P_i/P_f)$. Sur une isobare, $Q = \Delta H = nC_{pm} \Delta T$. Donc :

$$Q_1 = nRT_1 \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) < 0$$

$$Q_2 = nC_{pm}(T_3 - T_1) > 0$$

$$Q_3 = nRT_3 \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) > 0$$

$$Q_4 = nC_{pm}(T_1 - T_3) < 0$$

Le transfert thermique effectivement reçu est donc $Q_2 + Q_3$. D'où le rendement :

$$r = \frac{-W}{Q_2 + Q_3}$$

D'après le premier principe sur un cycle, $W = -Q_1 - Q_2 - Q_3 - Q_4$ donc :

$$\begin{aligned} r &= 1 + \frac{Q_1 + Q_4}{Q_2 + Q_3} \\ &= 1 - \frac{T_1 \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) + \frac{7}{2}(T_3 - T_1)}{T_3 \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) + \frac{7}{2}(T_3 - T_1)} \end{aligned}$$

Puisque $T_3 > T_1$ et $P_2 > P_1$, le terme de droite est inférieur à 1 mais positif. Donc r est bien compris entre 0 et 1.

28.3 Théorème de Carnot



L'efficacité d'une machine frigorifique ou pompe à chaleur ditherme est limitée de la même manière.

Ce théorème introduit une **limite théorique** au rendement d'un moteur.

Théorème de Carnot

Le rendement d'un moteur ditherme réel est toujours inférieur au rendement dit de Carnot :

$$r \leq r_c = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

r_c est défini comme le rendement du cycle idéal de Carnot, constitué de deux étapes adiabatiques et deux étapes isothermes, toutes réversibles.

Synthèse

Savoirs

- Bilans des échanges sur un cycle (énergie interne, entropie)
- Cycle et théorème de Carnot

Savoir-faire

- Définir et calculer le rendement ou l'efficacité d'une machine thermique
- Reconnaître l'énergie produite et l'énergie consommée lors un cycle

Mots-clés

- Moteur,
- pompe à chaleur,
- machine frigorifique,
- climatiseur,
- cycle,
- bilan,
- efficacité,
- rendement,
- cycle ditherme.

Tests de connaissances

28.1 Globalement sur un cycle, H reste inchangée.

☐ a. Vrai ☐ b. Faux

28.2 U reste constante tout au long d'un cycle.

☐ a. Vrai ☐ b. Faux

28.3 L'efficacité quantifie le ratio de l'énergie qu'on cherche à obtenir par rapport à l'énergie qu'on dépense pour ce faire.

☐ a. Vrai ☐ b. Faux

28.4 Climatiseurs et frigos ont même principe de fonctionnement et donc même expression pour l'efficacité.

☐ a. Vrai ☐ b. Faux

28.5 Une pompe à chaleur prend de la chaleur à une source froide pour la donner à une source chaude.

☐ a. Vrai ☐ b. Faux

28.6 Un moteur monotherme cyclique est contraire au deuxième principe de la thermodynamique.

☐ a. Vrai ☐ b. Faux

28.7 Il est nécessaire de se rapprocher du cycle de Carnot pour tout appareil.

☐ a. Vrai ☐ b. Faux

28.8 L'inégalité de Clausius est liée au deuxième principe.

☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

28.9 Efficacité d'une machine frigorifique (D'après INA.)

Le freezer est le compartiment à glaçons d'un réfrigérateur $T_1 = 270$ K. Il fonctionne en utilisant l'atmosphère extérieure comme source chaude (température ambiante $T_0 = 300$ K).

- Calculez l'efficacité théorique de l'appareil.
- En fait, l'appareil fonctionne à 80 % de son efficacité théorique et en régime permanent. Il est alimenté par une puissance mécanique $\mathcal{P}_M = 100$ W.
 - Déterminez la puissance thermique reçue par le freezer.
 - Déterminez la puissance thermique fournie à l'extérieur.
 - Déterminez la création d'entropie par seconde \dot{S}_c .
 - Calculez le pouvoir de congélation de l'appareil, c'est-à-dire la quantité de glace formée en 24 h à 0°C à partir d'eau liquide à 0°C .

Donnée : enthalpie de fusion de la glace $L_{\text{fus}} = 330$ kJ.kg⁻¹.

28.10 Système de refroidissement (D'après Mines de première année.)

Envisageons la machine à gaz parfait de la figure 28.2. Le fluide qui décrit le cycle est de l'hélium, pris comme un gaz parfait et tel que :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}$$

$$M = 4 \text{ g.mol}^{-1}$$

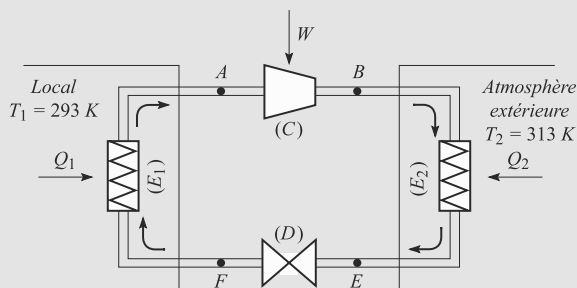


Figure 28.2 Modélisation d'un climatiseur à gaz parfait.

L'hélium traverse successivement :

- un compresseur (C) où il subit une compression adiabatique réversible qui l'amène de $A(T_1, P_1)$ à $B(T_2, P_2)$;
- un échangeur (E_2) où il entre en contact avec un thermostat de température T_2 , donc reçoit un transfert thermique Q_2 et passe dans l'état $E(T_2, P_2)$;
- un détendeur (D) où il se détend de façon adiabatique réversible, ce qui l'amène en $F(T_4, P_1)$;
- un échangeur (E_1) où il entre en contact avec un thermostat de température $T_1 < T_2$, donc reçoit un transfert thermique Q_1 et revient à l'état $A(T_1, P_1)$.

Données : $R = 8,31$ J.K⁻¹.mol⁻¹ ; $T_1 = 293$ K ; $T_2 = 313$ K ; $P_1 = 2$ bar ; $P_2 = 3$ bar.

Tous les calculs sont ramenés à $m = 1$ kg d'hélium.

1. Que pouvez-vous dire de chacune des transformations ?
2. Calculez la capacité thermique massique à pression constante c_p de l'hélium. Application numérique.
3. Calculez les températures T_3 et T_4 en fonction de T_1 , T_2 , P_1 , P_2 et γ . Applications numériques.
4. Calculez les volumes massiques v_A , v_B , v_E et v_F . Applications numériques.
5. Donnez l'allure du diagramme du cycle en coordonnées (P, v) . Vous ferez apparaître les isothermes T_1 et T_2 , et préciserez le sens du parcours du cycle. Conclusion ?
6. Calculez les transferts thermiques Q_1 et Q_2 reçus par l'hélium lors de la traversée des échangeurs (E_1) et (E_2) . Applications numériques.
7. Déduisez-en le travail total W reçu par l'hélium au cours du cycle. Application numérique.
8. Définissez et calculez l'efficacité de l'installation.
9. Calculez la masse d'hélium qui doit, par seconde, décrire le cycle afin d'obtenir la puissance nécessaire au refroidissement du local, soit $\mathcal{P} = 3 \text{ kW}$.
10. Calculez la puissance minimale \mathcal{P}_{\min} du moteur qui actionne le compresseur.

28.11 Chauffage au bois

(D'après ENSIL.)

Un moteur thermique ditherme utilise comme source chaude un réservoir dans lequel nous faisons brûler du bois pour y maintenir une température $t = 300^\circ\text{C}$ et comme source froide un local à $t_1 = 20^\circ\text{C}$.

L'énergie mécanique fournie par ce moteur, supposé réversible, est intégralement transformée en énergie électrique qui est utilisée pour faire tourner une pompe à chaleur entre l'extérieur (température $t_2 = 0^\circ\text{C}$) et le local.

La combustion du bois apporte $E = 1,8 \cdot 10^7 \text{ J.kg}^{-1}$.

L'énergie nécessaire pour maintenir la température du local à t_1 pendant une heure est $Q_n = 43,2 \text{ MJ}$.

1. Faites un schéma de l'ensemble du dispositif constitué du moteur, de la pompe et des trois sources. Vous préciserez les travaux et transferts thermiques.
2. Calculez en fonction des températures absolues T , T_1 et T_2 et du transfert thermique fourni au moteur par la combustion du bois, le transfert thermique total reçu par le local.

Indication : définissez le rendement ou l'efficacité de chaque partie du dispositif.

3. Déduisez-en la consommation horaire de bois.

28.12 Moteur deux temps

(D'après Mines de première année.)

Un scooter de cylindrée inférieure à 50 cm^3 a souvent un moteur à explosion à deux temps. Un gaz (mélange air-essence) subit un cycle à quatre étapes après admission dans un piston :

1. Étape $F \rightarrow B$: compression adiabatique réversible par le piston, de l'état (P_F, V_F) à (P_B, V_C) .
2. Étape $B \rightarrow C$: combustion isochore jusqu'à la pression P_C .
3. Étape $C \rightarrow D$: détente adiabatique réversible, de l'état (P_C, V_C) à (P_D, V_D) .
4. Étape $D \rightarrow F$: refroidissement isochore jusqu'à la pression P_F .

Le mélange gazeux sera assimilé à un gaz parfait avec $\gamma = 1,4$ et de masse molaire $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$. Sa combustion libère une énergie $q = 30 \text{ kJ.cm}^{-3}$.

Le rapport $a = V_D/V_C$ s'appelle le taux de compression du moteur.



$V_D - V_C$ est la cylindrée du moteur. C'est à cela que correspond le chiffre de 50 cm^3 .

Donnée : $P_F = 10^5 \text{ Pa}$; $T_F = 300 \text{ K}$; $P_B = 6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

1. Tracez le cycle en diagramme de Clapeyron en indiquant son sens de parcours.
2. Calculez le taux de compression du moteur. Application numérique.
3. Calculez les transferts thermiques sur chaque étape du cycle en fonction de R , γ , P_F , V_D et des températures T_F , T_B , T_C , T_D . Déduisez-en le travail total reçu par le gaz.
4. Définissez le rendement η du cycle et calculez-le en fonction de a et γ .
5. Le scooter roule à 45 km.h^{-1} à un régime de 7000 tr.min^{-1} et son moteur fournit une puissance $\mathcal{P} = 4,4 \text{ kW}$.
 - a) Calculez la durée d'un cycle.
 - b) Calculez Q , transfert thermique libéré par la combustion à chaque cycle.
 - c) Calculez la consommation d'essence aux 100 km . Commentaire ?

Exercices d'approfondissement

28.13 Réfrigérateur à absorption à trois sources de chaleur

(D'après concours PT)

Un réfrigérateur à absorption est un récepteur thermique qui fonctionne par contact thermique avec 3 « sources de chaleur », sans recevoir de travail mécanique et en effectuant des cycles irréversibles (figure 28.3).

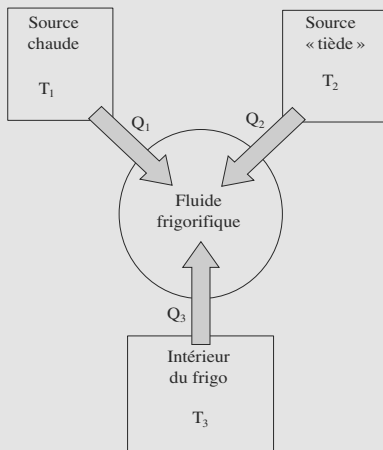


Figure 28.3 Schéma des transferts thermiques pour le frigo.

La source chaude à la température T_1 est constituée par le système de chauffage de la machine. La source tiède à T_2 est constituée par la salle dans laquelle se trouve la machine. La source froide à T_3 est constituée par l'enceinte à refroidir. On a : $T_1 > T_2 > T_3$.

1. Déterminer les signes des transferts thermiques Q_1 et Q_2 au cours d'un cycle de la machine. Comparer les valeurs absolues.
2. Définir le coefficient de performance (ou efficacité) e . Montrer que $e \leq e_C$ (e_C est une valeur limite de e) et déterminer e_C en fonction de T_1 , T_2 et T_3 . Comment faudrait-il choisir T_1 pour que e soit maximum ?

28.14 Congélateur

(D'après Centrale-Supélec.)

Une masse $m = 1$ kg d'eau liquide à $t_1 = 20$ °C est placée dans un congélateur. Le congélateur est modélisé par une machine thermique effectuant des cycles réversibles entre le milieu extérieur à la température constante $t_e = 25$ °C et l'intérieur réduit à la seule masse m . Il n'échange aucun transfert thermique avec d'autres systèmes que ces deux-là.

Après un certain temps τ , l'eau est sortie du congélateur sous forme de glace $t_2 = -10$ °C.

Vous noterez $t_0 = 0$ °C.

1. Faites un schéma symbolique du dispositif (sources et fluide frigorigère) en y indiquant le transfert thermique Q_1 avec l'eau à l'intérieur, le transfert thermique Q_2 avec l'extérieur et le travail W reçu par le fluide.
2. Calculez Q_1 . Application numérique.
3. Établissez un bilan énergétique sur un cycle.
4. Établissez un bilan entropique et déduisez-en Q_2 . Application numérique.
5. Déduisez-en la durée τ et exprimez-la en minutes.

Données :

- Capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_l = 4,2$ kJ.kg⁻¹.K⁻¹
- Capacité thermique massique de la glace : $c_g = 2,1$ kJ.kg⁻¹.K⁻¹
- Enthalpie massique de fusion de la glace à 0 °C sous pression atmosphérique : $L = 334$ kJ.kg⁻¹
- Puissance électrique du moteur : $\mathcal{P} = 50$ W

28.15 Centrale thermo-solaire expérimentale à accumulation

(D'après ENSTIM)

Cet exercice étudie le fonctionnement d'une centrale thermo-solaire : le rayonnement solaire concentré par un grand miroir sphérique de rayon d'ouverture c (le rayon d'ouverture est le rayon de base de la calotte sphérique effectivement réfléchissante), apporte de l'énergie thermique à une chaudière qui sert de source chaude à un moteur ditherme entraînant un générateur électrique. Ce miroir est orientable, si bien que le centre S du Soleil est constamment situé sur son axe principal.

Au niveau du sol, une surface Σ orientée perpendiculairement aux rayons solaires reçoit du Soleil une puissance par rayonnement P_R égale à $\pi_0 \cdot \Sigma$.

1. Déterminer la puissance P_R reçue de la source chaude par le moteur ditherme lorsque le soleil est présent dans le ciel.
2. L'énergie solaire est en fait apportée à une chaudière (Ch) dont la température T_C est constante et qui joue le rôle de source chaude pour un moteur ditherme dont la source froide est l'atmosphère de température T_0 . Sauf indication contraire, ce moteur est supposé fonctionner de façon réversible.

a) Faire un schéma symbolique donnant le principe thermodynamique d'un moteur ditherme en précisant le sens réel des échanges d'énergie.

b) Définir le rendement η_M de ce moteur et établir soigneusement son expression en fonction de T_0 et T_C à l'aide des deux principes de la thermodynamique, en supposant qu'il fonctionne de façon *réversible*.

c) On admet que (Ch) reçoit sous forme de transfert thermique toute la puissance rayonnée P_R incidente sur (P). On raisonne ici en régime permanent, comme si (Ch) se bornait à transférer intégralement la puissance thermique P_R reçue du Soleil au moteur qui délivre alors la puissance mécanique P_M . On définit le rendement global de l'installation comme $\eta_T = \frac{|P_M|}{P_R}$.

Expliquer pourquoi on aurait intérêt à choisir T_C élevée.

Que valent le rendement global de l'installation et la puissance du moteur avec les valeurs réelles ?

d) Si l'on considère que ce moteur fonctionne de façon non réversible, quelle conséquence cela a-t-il sur l'écriture des deux principes ? De même, que peut-on affirmer au sujet de la valeur de son rendement ?

Dans la suite de l'exercice, le fonctionnement du moteur sera de nouveau supposé réversible.

3. En fait, le moteur fonctionne continûment, alors que (P) n'est éclairée par le Soleil que 1/3 du temps, soit 8 heures par jour. (Ch) doit donc « stocker » l'énergie thermique durant l'insolation afin de pouvoir restituer la nuit. Pour ce faire, (Ch) est constituée d'une masse M d'un mélange solide-liquide d'un même corps pur (du nitrate de potassium) ; on suppose que ce mélange évolue à pression constante et que sa température est constamment la température T_C de l'équilibre solide-liquide ; on note m_L la masse de liquide dans (Ch). L'enthalpie massique de fusion de ce corps pur est l_F .

Sur une journée, toute l'énergie thermique reçue du Soleil par (Ch) est intégralement transférée au moteur.

a) Quelle est alors la puissance thermique constante P_C fournie par (Ch) au moteur ? En déduire la puissance mécanique $|P_M|$ du moteur.

b) En effectuant pendant un intervalle de temps dt un bilan d'enthalpie sur (Ch). Déterminer la variation $\frac{dm_L}{dt}$ de la masse de liquide en fonction de P_R et l_F , d'une part durant l'insolation, d'autre part hors insolation. On suppose que l'insolation a lieu quotidiennement entre les dates 8 h et 16 h. Donner l'allure du graphe de $m_L(t)$ entre les dates 0 h et 24 h.

c) Déterminer la masse minimale de nitrate de potassium que doit contenir (Ch) pour assurer une température T_C constante.

Données : $\pi_0 = 1 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$; $c = 5,6 \text{ m}$;
 $l_F = 2,6 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$; $T_C = 740 \text{ K}$; $T_0 = 300 \text{ K}$.

28.16 Complexe sportif patinoire-piscine

(D'après Vêto.)

Étudions une pompe à chaleur fonctionnant de manière réversible avec comme source froide l'eau d'une patinoire et comme source chaude l'eau d'une piscine. À l'instant initial, les deux masses d'eau sont liquides et à la même température T_i .

1. Calculez les capacités thermiques C_1 de l'eau de la piscine, C_2 de l'eau de la patinoire quand elle est liquide, C'_2 de l'eau de la patinoire quand elle est gelée.
2. Évolution des températures tant que les deux masses d'eau restent liquides.

Les températures à l'instant t sont notées $T_1(t)$ pour la piscine et $T_2(t)$ pour la patinoire.

a) À l'aide des deux principes de la thermodynamique, établissez qu'à un instant t :

$$C_1 \frac{dT_1}{T_1} + C_2 \frac{dT_2}{T_2} = 0$$

b) Intégrez cette équation entre l'instant initial et un instant quelconque t .

c) Exprimez la température T_3 de l'eau de la piscine quand la patinoire est à $T_0 = 273,15 \text{ K}$, en fonction de C_1 , C_2 , T_i et T_0 . Que se passe-t-il à ce moment-là ?

Exprimez aussi W_1 , le travail échangé avec la pompe à chaleur en fonction des mêmes variables et de T_3 . Précisez le sens de l'échange.

Applications numériques avec $T_i = 280 \text{ K}$.

3. Évolution des températures quand l'eau de la patinoire se transforme en glace.

Calculez la température T_4 de l'eau de la piscine quand toute l'eau de la patinoire est sous forme de glace à T_0 , en fonction de C_1 , T_0 , T_3 , L et m_2 .

Exprimez aussi W_2 , le travail échangé avec la pompe à chaleur en fonction de C_1 , T_4 , T_3 , m_2 et L . Précisez le sens de l'échange.

Applications numériques.

4. Évolution des températures quand la glace de la patinoire se refroidit.

a) Exprimez T_5 la température de l'eau de la piscine lorsque la patinoire est à la température $T_2 = 263 \text{ K}$, en fonction de C_1 , C'_2 , T_2 , T_0 et T_4 .

Exprimez aussi W_3 , le travail échangé avec la pompe à chaleur en fonction de C_1 , C'_2 , T_4 , T_5 , T_0 et T_2 . Précisez le sens de l'échange.

Applications numériques.

b) Exprimez W_4 l'énergie à fournir à l'eau de la piscine pour élever sa température par chauffage direct de T_5 à T_1 , en fonction de C_1 , T_1 et T_5 .

Application numérique.

c) Nous disposons d'une puissance $\mathcal{P} = 200$ kW supposée constante. Quelle est la durée τ de la mise en température du complexe sportif ? Vous donnerez le résultat en jours, heures, minutes.

Données :

- Capacité thermique massique de l'eau liquide $c_1 = 4,18.10^3 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$; de la glace $c_2 = 2,09.10^3 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- Enthalpie de fusion de la glace $L = 3,34.10^5 \text{ J.kg}^{-1}$
- Eau de la piscine $m_1 = 2.10^6 \text{ kg}$ et $T_1 = 300 \text{ K}$ en régime stationnaire
- Eau de la patinoire $m_2 = 2,5.10^5 \text{ kg}$ et $T_2 = 263 \text{ K}$ en régime stationnaire

28.17 Turbine à vapeur

D'après Concours communs polytechniques.

Cet exercice est la suite de l'exercice 27.10. Vous pourrez réutiliser ici les résultats de ce dernier.

Une masse $m = 1 \text{ kg}$ d'eau le cycle suivant, dit cycle de Rankine, faisant intervenir une turbine à vapeur. Partant d'un état A où l'eau est sous forme de liquide juste saturant :

- Étape $A \rightarrow B$: compression adiabatique réversible de la pression $P_1 = 0,056 \text{ bar}$ à la pression $P_2 = 69,200 \text{ bar}$. Le liquide sortant en B est l'élévation de température du liquide est notée ΔT .
- Étape $B \rightarrow D$: échauffement isobare du liquide jusqu'à un état de liquide saturant à la pression P_2 .
- Étape $D \rightarrow E$: vaporisation totale sous pression P_2 .
- Étape $E \rightarrow F$: détente adiabatique réversible de P_2 à P_1 dans la turbine.
- Étape $F \rightarrow A$: liquéfaction totale sous pression P_1 de la vapeur présente dans l'état F .

L'eau liquide sera supposée incompressible, de volume massique v_l , de capacité thermique massique c_l et de coefficient de dilatation isobare α constants à toute température.

1. Représentez ce cycle dans un diagramme de Clapeyron en y faisant figurer la courbe de saturation.
2. La variation élémentaire d'entropie massique du liquide s'écrit :

$$ds = c_l \frac{dT}{T} - \alpha v_l dP$$

Notons $\Delta T = T_B - T_A$ l'élévation de température dans l'étape $A \rightarrow B$. Calculez ΔT dans le cas où $\Delta T \ll T_A$. Vous négligerez ΔT dans toute la suite.

3. Calculez le titre massique en vapeur x_F et l'enthalpie massique h_F du système diphasé dans l'état F .
4. Calculez les transferts thermiques reçus par l'eau Q_1 dans l'étape $F \rightarrow A$ et Q_2 dans $B \rightarrow E$.
5. Calculez le travail W reçu par le fluide sur un cycle.
6. Définissez et calculez le rendement ρ du cycle et comparez-la au rendement théorique de Carnot.
7. Calculez la variation d'enthalpie massique Δh_{AB} au cours de la compression $A \rightarrow B$.
8. Comparez Δh_{AB} à W et concluez sur le fait que W peut s'écrire simplement en fonction des enthalpies massiques à l'entrée (état E) et à la sortie (état F) de la turbine.

Le tableau suivant regroupe des valeurs thermodynamiques utiles pour le liquide saturant (indice l) et la vapeur saturante (indice v). Les volumes massiques sont en $\text{m}^3.\text{kg}^{-1}$ et les enthalpies massiques en kJ.kg^{-1} .

$t(^{\circ}\text{C})$	$P_{\text{sat}}(\text{bar})$	h_l	v_v	v_l
35	0,056	146,34	25,24	2560,67
285	69,200	1261,11	0,028	2768,83

Pour l'eau liquide :

$$\begin{aligned} v_l &= 10^{-3} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1} \\ c_l &= 4,18 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1} \\ \alpha &= 1,5.10^{-4} \text{ K}^{-1} \end{aligned}$$

28.1

Vrai, c'est le propre des fonctions d'état.

28.2

Faux. U peut connaître des variations lors du cycle mais elle revient à sa valeur initiale après un cycle.

28.3

Vrai.

28.4

Vrai, on cherche à tirer de l'énergie d'une source froide (intérieur du frigo ou pièce à climatiser) au moyen d'un travail (fourni pour faire tourner un compresseur).

28.5

Vrai.

28.6

Vrai, c'est même un des énoncés possible du deuxième principe.

28.7

Faux. Pour le rendement, c'est mieux mais on cherche aussi à obtenir une puissance importante ce qui interdit les transformations trop lentes et donc de s'approcher près de la réversibilité.

28.8

Vrai, il s'agit d'indiquer que l'entropie échangée sur un cycle est négative.

28.9

Efficacité d'une machine frigorifique

L'exercice met en jeu les formules de base du cours, mais demande des résultats en puissance et non en énergie. Rappelez-vous donc la relation entre ces deux notions.

1. Définissons l'efficacité :

$$e = \frac{Q_1}{W} = \frac{T_1}{T_0 - T_1} \approx 9$$

2. L'efficacité réelle est donc $e_r = 7,2$. a) Le travail reçu sur une durée Δt est $W = \mathcal{P}_M \Delta t$. Le transfert thermique reçu est alors Q_1 , correspondant à une puissance thermique \mathcal{P}_{1r} :

$$e_r = \frac{Q_1}{W} = \frac{\mathcal{P}_{1r} \Delta t}{\mathcal{P}_M \Delta t} \\ \Rightarrow \mathcal{P}_{1r} = e_r \mathcal{P}_M = 720 \text{ W}$$

- b) Le premier principe sur un cycle donne :

$$0 = W + Q_1 + Q_0$$

En divisant par la durée Δt du cycle :

$$\mathcal{P}_M + \mathcal{P}_{1r} + \mathcal{P}_{0r} = 0 \\ \Rightarrow \mathcal{P}_{0r} = -820 \text{ W}$$

- c) Sur un cycle, $\Delta S = S_e + S_c = 0$ donc :

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_0}{T_0} + S_c = 0$$

Divisons ce résultat par Δt :

$$\frac{\mathcal{P}_{1r}}{T_1} + \frac{\mathcal{P}_{0r}}{T_0} + \dot{S}_c = 0 \\ \Rightarrow \dot{S}_c = 66,7 \cdot 10^{-3} \text{ W.K}^{-1}$$

- d) Le transfert thermique fourni par la machine au freezer est $-\mathcal{P}_{1r} \Delta t$. Ce transfert thermique est intégralement utilisé pour congeler de l'eau, puisqu'il n'y a aucun changement de température. Il est donc aussi égal à $mL_{\text{sol}} = -mL_{\text{fus}}$, donc :

$$m = \frac{\mathcal{P}_{1r} \Delta t}{L_{\text{fus}}} = 188,5 \text{ kg}$$

28.10

Système de refroidissement

Voici un exercice basique qui peut vous servir à mettre en place les bons réflexes sur ce type d'exercice. Identifiez bien la nature de chaque étape et, pour chacune, mettez en jeu les compétences du chapitre 25.

Les premières questions ne relèvent pas particulièrement des machines thermiques, mais simplement de révisions générales sur les gaz parfaits.

1. $A \rightarrow B$ et $E \rightarrow F$ sont adiabatiques réversibles d'après l'énoncé.

$B \rightarrow E$ peut être supposée monotherme à la température T_2 et monobare sous la pression P_2 .

De même, $F \rightarrow A$ est monotherme à la température T_1 et monobare sous la pression P_1 .

2. À partir de la loi de Mayer :

$$C_{pm} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = \frac{5}{2} R \\ \Rightarrow c_p = \frac{5}{2} \frac{R}{M} = 5,2 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$$



L'hélium est donc considéré comme un gaz parfait *monatomique*, ce qui est physiquement raisonnable (gaz noble, donc molécule monoatomique et peu réactif).

3. Pour les deux transformations adiabatiques réversibles, la loi de Laplace est applicable :

$$T_3 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \approx 345 \text{ K}$$

$$T_4 = T_2 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \approx 266 \text{ K}$$

4. $PV = nRT$, $n = m/M$ et $v = V/m$ donc $v = RT/PM$. Numériquement :

$$v_A = 3,05 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$v_B = 2,39 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$v_E = 2,17 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$v_F = 2,77 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

5. Voir figure 28.4. Le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique, donc il est récepteur ($W > 0$).

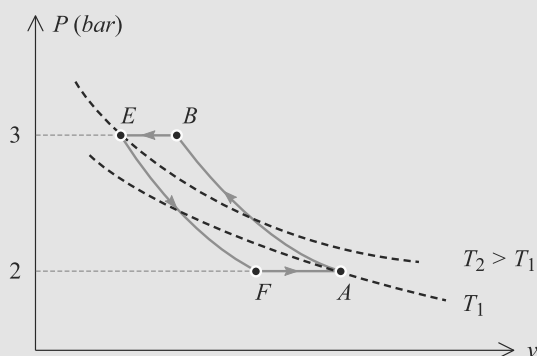


Figure 28.4 Cycle de l'hélium dans le climatiseur.



Les deux étapes monothermes ne sont pas isothermes : elles ne sont pas confondues avec les isothermes d'Andrews !

6. Pour une transformation monobare, $Q = \Delta H = mc_p \Delta T$. Donc :

$$Q_1 = mc_p(T_1 - T_4) = 140,4 \text{ kJ}$$

$$Q_2 = mc_p(T_2 - T_3) = -164 \text{ kJ}$$

7. Le premier principe sur un cycle s'écrit :

$$\Delta U = W + Q_1 + Q_2 = 0$$

$$\Rightarrow W = -Q_1 - Q_2 = 24,6 \text{ kJ}$$

8. L'énergie obtenue lors d'un cycle est Q_1 et l'énergie fournie pour cela est W . Donc l'efficacité est :

$$e = \frac{Q_1}{W} = 5,7$$

9. L'énergie considérée est Q_1 donc $Q_1 = \mathcal{P} \Delta t$ avec Δt la durée cherchée. Donc :

$$\frac{m}{\Delta t} = \frac{m\mathcal{P}}{Q_1}$$

Or, $Q_1/m = c_p(T_1 - T_4)$ d'après ce qui précède. Donc $m/\Delta t = 21 \text{ g.s}^{-1}$.

10. Par définition, $\mathcal{P}_{\min} = W/\Delta t$. Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\min} &= \frac{W}{Q_1} \frac{Q_1}{\Delta t} \\ &= \frac{\mathcal{P}}{e} \\ \mathcal{P}_{\min} &= 527 \text{ W} \end{aligned}$$

28.11

Chauffage au bois

Tout repose sur la clareté du schéma de la première question. Si ce schéma est bien fait, la suite n'est qu'application du cours.

1. Voir figure 28.5.

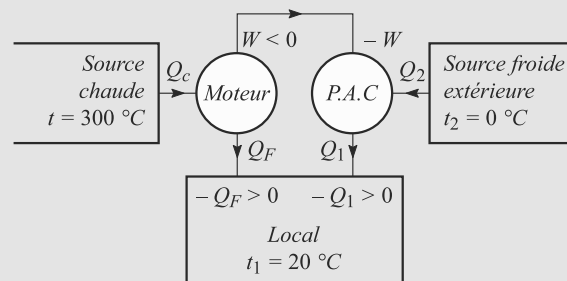


Figure 28.5 Schéma de fonctionnement du dispositif par chauffage au bois.

2. Le moteur étant réversible, son rendement est donné par le théorème de Carnot. Avec les notations de la figure :

$$r = \frac{-W}{Q_c} = 1 - \frac{T_1}{T}$$

De même l'efficacité de la pompe est :

$$e = \frac{-Q_1}{-W}$$

car le travail reçu par la pompe est $-W$ ici. Les deux principes sur un cycle réversible s'écrivent :

$$-W + Q_1 + Q_2 = 0$$

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

D'où l'efficacité :

$$e = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

Le transfert thermique reçu par le local est, toujours d'après la figure :

$$\begin{aligned} Q &= -Q_f - Q_1 \\ &= Q_c + W - eW \\ &= Q_c - rQ_c + erQ_c \end{aligned}$$

$$Q = Q_c \frac{T_1}{T} \frac{T - T_2}{T_1 - T_2}$$

3. La masse m de bois nécessaire est le rapport de l'énergie nécessaire par E donc ici :

$$m = \frac{Q_c}{E}$$

Or, $Q = Q_n$ donc :

$$m = \frac{TQ_n}{T_1 E} \frac{T_1 - T_2}{T - T_2} = 0,31 \text{ kg}$$

28.12

Moteur deux temps

Voilà un grand classique ! Lorsque vous construisez le diagramme (P, V) demandé, essayez de vous remémorer les formules connues pour les diverses étapes. Les grandes lignes des réponses suivantes doivent alors apparaître naturellement sur votre brouillon.

1. Voir figure 28.6.

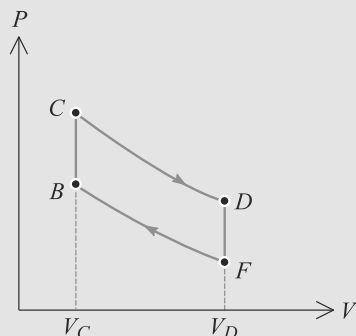


Figure 28.6 Fonctionnement du moteur deux temps en diagramme de Clapeyron.

2. L'étape $F \rightarrow B$ est adiabatique réversible pour un gaz parfait, donc la loi de Laplace est applicable :

$$P_F V_F^\gamma = P_B V_B^\gamma$$

D'après l'énoncé, $V_B = V_C$ et $V_F = V_D$ donc :

$$a = \frac{V_D}{V_C} = \left(\frac{P_B}{P_F} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = 3,6$$

3. Sur les deux étapes isochores, nous avons $\Delta U = Q$. Pour un gaz parfait, $\Delta U = C_v \Delta T$. Donc :

$$Q_{BC} = C_v (T_C - T_B)$$

$$Q_{DF} = C_v (T_F - T_D)$$

Pour un gaz parfait, nous avons aussi :

$$C_v = \frac{nR}{\gamma - 1} = \frac{P_F V_D}{T_F (\gamma - 1)}$$

en exploitant la loi des gaz parfaits en F . Donc :

$$Q_{BC} = \frac{P_F V_D}{T_F (\gamma - 1)} (T_C - T_B)$$

$$Q_{DF} = \frac{P_F V_D}{T_F (\gamma - 1)} (T_F - T_D)$$

Sur les deux étapes adiabatiques, $Q = 0$ donc :

$$Q_{FB} = Q_{DC} = 0$$

Le premier principe sur un cycle permet d'en déduire W :

$$\Delta U = W + Q = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow W &= -Q_{FB} - Q_{BC} - Q_{CD} - Q_{DF} \\ &= \frac{P_F V_D}{T_F (\gamma - 1)} (T_C + T_F - T_D - T_B) \end{aligned}$$

4. Le rendement est le rapport de l'énergie récupérée sur l'énergie fournie donc ici :

$$\eta = \frac{-W}{Q_{BC}} = 1 + \frac{T_F - T_D}{T_C - T_B}$$

La loi de Laplace sur les deux étapes adiabatiques peut s'écrire :

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}$$

$$T_F V_D^{\gamma-1} = T_B V_C^{\gamma-1}$$

qui conduit à :

$$T_D = T_C a^{1-\gamma}$$

$$T_F = T_B a^{1-\gamma}$$

D'où le rendement :

$$\eta = 1 - a^{1-\gamma} = 0,4$$

5. a) 7000 tours par minute correspondent à 117 tours par seconde. Il y a donc 117 cycles par seconde, donc chaque cycle dure $\Delta t = 1/117 = 8,57$ ms. b) La puissance libérée est $\mathcal{P} = -W/\Delta t$. Combinons ceci avec $\eta = -W/Q_{CB}$. Il vient :

$$Q = Q_{CB} = \frac{\mathcal{P} \Delta t}{\eta} = 94,3 \text{ J}$$

c) Soit d la distance parcourue et v la vitesse. La durée du trajet est donc :

$$\tau = \frac{d}{v} = 8000 \text{ s}$$

Cela correspond à $N = \tau/\Delta t = 933\,489$ cycles. Soit V le volume de carburant consommé. L'énergie nécessaire est :

$$NQ = qV$$

$$\Rightarrow V = \frac{NQ}{q} = \frac{\mathcal{P}\tau}{q\eta} = \frac{\mathcal{P}d}{q\eta v}$$

Numériquement, $V = 2,93$ L.

Cette consommation est très faible. En réalité, les transformations sont irréversibles, ce qui entraîne des pertes bien plus grandes et donc une consommation plus importante.

28.13 Réfrigérateur à absorption à trois sources de chaleur

Méthode mise en jeu : n°1.

Cet exercice permet de revisiter les méthodes de résolutions utilisées avec les machines thermiques habituellement di-thermes en les adaptant à un problème légèrement différent.

1. La source à T_1 servant à chauffer le fluide frigorigère, $Q_1 > 0$.

Or, $Q_3 > 0$ car l'enceinte doit être refroidie : le transfert thermique doit se faire vers le fluide frigorigère.

Le premier principe donne sur un cycle :

$$\Delta U = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0.$$

On en déduit $Q_2 = -Q_1 - Q_3 < 0$ car $Q_1 > 0$ et $Q_3 > 0$. De plus, $|Q_2| = |Q_1 + Q_3| > |Q_1|$ car les deux transferts sont de même signe.

2. L'énergie qu'on voudrait la plus grande est Q_3 puisqu'il s'agit de refroidir le plus possible l'intérieur du frigo. Celle qu'on espère la plus petite (celle qui coûte) est Q_1 (puisque qu'on chauffe). On en déduit alors :

$$e = \frac{Q_3}{Q_1}.$$

Pour obtenir e , on utilise un bilan entropique sur un cycle :

$$\Delta S = 0 \geq \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3}.$$

En utilisant alors le résultat du 1., on en déduit :

$$0 \geq \frac{Q_1}{T_1} + \frac{-Q_1 - Q_3}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3}.$$

En divisant par Q_1 , on obtient alors :

$$0 \geq \frac{1}{T_1} + \frac{-1-e}{T_2} + \frac{e}{T_3},$$

puis en regroupant :

$$\frac{-1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \geq e\left(\frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_2}\right)$$

et enfin :

$$e \leq \frac{T_3}{T_1} \frac{T_1 - T_2}{T_2 - T_3} = e_C.$$

e_C est maximal si $\frac{de_C}{dT_1} = \frac{\partial}{\partial T_1} \left(\frac{T_3}{T_1} \frac{T_1 - T_2}{T_2 - T_3} \right) = 0$ et donc $\frac{de_C}{dT_1} = \frac{T_3}{T_2 - T_3} \frac{T_2}{T_1^2} = 0$ ce qui n'est obtenu mathématiquement qu'à l'infini : T_1 doit donc être le plus grand possible pour obtenir une efficacité maximale la meilleure possible : $e_{C\max} = \frac{T_3}{T_2 - T_3}$ en l'occurrence.

28.14 Congélateur

Cet exercice est très proche du cours, mais comporte une subtilité : la température de l'eau, qui sert de source froide, n'est pas constante. Veuillez donc à écrire les bilans d'abord sous forme élémentaire (différentielle) avant de les intégrer.

1. Voir figure 28.7.

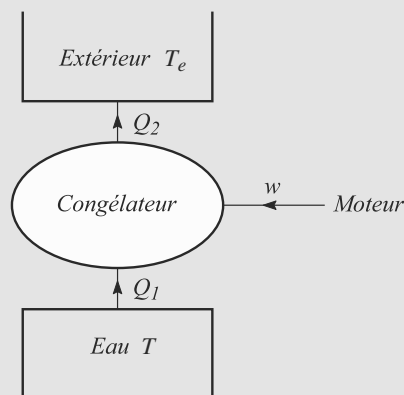


Figure 28.7 Schéma de fonctionnement du congélateur.

2. Le transfert thermique reçu par l'eau est $-Q_1$. Comme la transformation est monobare, $\Delta H_{\text{eau}} = -Q_1$.

La transformation subie par l'eau peut être découpée en trois étapes :

- Refroidissement de t_1 à t_0 : $\Delta H_1 = mc_l(t_0 - t_1)$
- Congélation : $\Delta H_2 = -mL$
- Refroidissement de t_0 à t_2 : $\Delta H_3 = mc_g(t_2 - t_0)$

Donc :

$$-Q_1 = mc_l(t_0 - t_1) - mL + mc_g(t_2 - t_0)$$

$$\Rightarrow Q_1 = mc_l t_1 + mL - mc_g t_2 = 439 \text{ kJ}$$

3. Sur un cycle réversible, le second principe s'écrit :

$$\Delta S = S_e = \int_{\text{cycle}} \left(\frac{\delta Q_1}{T} + \frac{\delta Q_2}{T_e} \right) = 0$$

où T est la température absolue du fluide pendant ce cycle.

Le premier terme vaut :

$$\begin{aligned} S_{e1} &= \int_{\text{cycle}} \left(\frac{-mc_l dT_1}{T} + \frac{L dm}{T_0} + \frac{-mc_g dT}{T} \right) \\ &= -mc_l \ln \left(\frac{T_0}{T_1} \right) + \frac{mL}{T_0} - mc_g \ln \left(\frac{T_2}{T_0} \right) \end{aligned}$$

Le second terme vaut :

$$S_{e2} = \int_{\text{cycle}} \frac{\delta Q_2}{T_e} = \frac{Q_2}{T_e}$$

L'égalité $S_{e1} + S_{e2} = 0$ conduit à :

$$\begin{aligned} Q_2 &= T_e m \left(c_l \ln \left(\frac{T_0}{T_1} \right) - \frac{L}{T_0} + c_g \ln \left(\frac{T_2}{T_0} \right) \right) \\ &= -476,4 \text{ kJ} \end{aligned}$$

4. Par définition, $W = \mathcal{P}\tau$ donc :

$$\tau = \frac{-Q_1 - Q_2}{\mathcal{P}} = 12 \text{ min } 29 \text{ s}$$

28.15

Centrale thermo-solaire expérimentale à accumulation

Méthode mise en jeu : n°1.

Le début de cet exercice est une succession de questions de cours : il permet de faire le point sur la connaissance qu'on en a. L'originalité du problème étudié provient du 3. où on utilise un changement d'état pour lisser sur la journée l'afflux d'énergie solaire et faire tourner la centrale en continu.

1. Le miroir étant toujours orienté pour recevoir le maximum d'énergie du soleil, $P_R = \pi_0 \cdot \pi c^2 = 98,5 \text{ kW}$.
2. a) Un moteur ditherme reçoit de l'énergie thermique d'une source chaude Q_c et la transforme en partie en énergie mécanique W et en partie en énergie thermique transmise à la source froide Q_f comme l'indique la figure 28.8 :

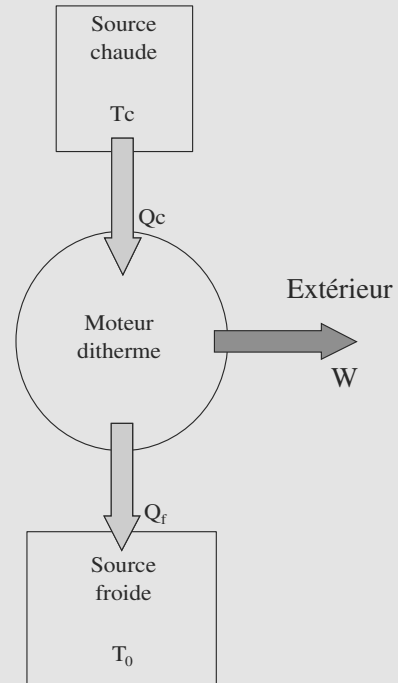


Figure 28.8 Échanges d'un moteur ditherme.

Notez que Q_c est reçu par le moteur, Q_f par la source froide et W par l'extérieur : ce sont trois quantités positives telles qu'elles sont définies dans ce corrigé.

b) Nous cherchons le rendement η_M du moteur : $\eta_M = \frac{W}{Q_c}$ car on cherche à optimiser W en utilisant le moins de Q_c possible. Le premier principe donne sur un cycle :

$$\Delta U = Q_c - Q_f - W = 0.$$

Un bilan entropique sur un cycle donne :

$$\Delta S = 0 \geq \frac{Q_c}{T_c} - \frac{Q_f}{T_f}.$$

On se place dans le cas réversible qui réalise l'égalité. Ceci permet d'écrire :

$$Q_f = \frac{T_f Q_c}{T_c}$$

et donc :

$$\Delta U = Q_c \left(1 - \frac{T_f}{T_c} \right) - W = 0$$

Le rendement idéal du moteur est alors :

$$\eta_M = \frac{W}{Q_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c}.$$

c) On se rend compte que $\eta_M = 1 - \frac{T_f}{T_c}$ est d'autant plus grand que T_c est élevé : on a donc intérêt à avoir une source

chaude la plus chaude possible pour optimiser ce rendement optimal !

Numériquement, avec les valeurs fournies par l'énoncé, on trouve :

$$\eta_T = 0,59.$$

La puissance du moteur est alors :

$$P_M = \eta_T P_R = 58,6 \text{ kW}.$$

d) Si le cycle n'est pas idéal (i.e. si c'est un cycle réel !) le bilan d'entropie change :

$$\Delta S = 0 > \frac{Q_c}{T_c} - \frac{Q_f}{T_f},$$

et l'égalité n'est plus réalisée. On trouve alors :

$$\eta_M = \frac{W}{Q_c} < 1 - \frac{T_f}{T_c} = \eta_{M \max}.$$

3. a) Ne fonctionnant qu'un tiers du temps, le miroir solaire fournit un tiers de la puissance précédente en moyenne : $P_C = P_R/3 = 32,8 \text{ kW}$ en moyenne. La puissance du moteur diminue d'autant et donc :

$$P_M = \eta_T P_R/3 = 19,5 \text{ kW}.$$

b) Effectuons un bilan enthalpique pendant dt sur le nitrate de potassium :

$$dH = (+dm_L)l_F = (P_R \pi c^2)dt - \frac{P_R \pi c^2}{3}dt \text{ durant l'insolation}$$

$$\text{et } dH = (+dm_L)l_F = -\frac{P_R \pi c^2}{3}dt \text{ sinon.}$$

On obtient alors :

$$\frac{dm_L}{dt} = \frac{2P_R \pi c^2}{3l_F} \text{ pendant l'insolation,}$$

$$\text{Et } \frac{dm_L}{dt} = -\frac{P_R \pi c^2}{3l_F} \text{ sinon.}$$

Numériquement, cela donne respectivement :

$$+0,253 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1} \text{ et } -0,126 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}.$$

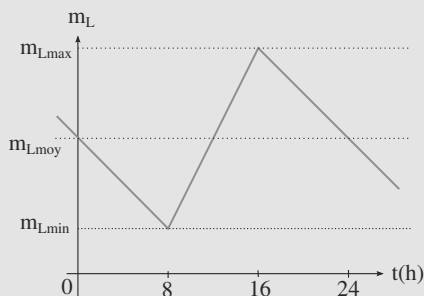


Figure 28.9 Évolution de m_L sur 24 h.

c) La masse minimale de nitrate de potassium correspond à la masse qui doit être liquéfiée durant l'insolation du dispositif : $\frac{dm_L}{dt} = \frac{\Delta m_L}{\Delta t} = \frac{2P_R \pi c^2}{3l_F}$ et donc :

$$\Delta m_L = \frac{2P_R \pi c^2}{3l_F} \Delta t = m_{L \min}.$$

On trouve numériquement : $m_{L \min} = 7\,270 \text{ kg}$.

28.16

Complexe sportif patinoire-piscine

La principale difficulté de cet exercice est que les températures des sources chaude et froide ne sont pas constantes : ce ne sont pas des thermostats idéaux. Le début de l'exercice vous invite donc à découper le cycle en étapes élémentaires, sur chacun desquelles les températures seront quasi constantes (comme dans l'exercice 14).

Les valeurs numériques des masses d'eau et de glace sont élevées, ce qui est normal dans ce contexte, et implique que vous allez trouver des échanges énergétiques énormes.

1. Par définition :

$$C_1 = m_1 c_1 = 8,36 \cdot 10^9 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$$

$$C_2 = m_2 c_2 = 1,05 \cdot 10^9 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$$

$$C'_2 = m_2 c'_2 = 5,22 \cdot 10^8 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$$

2. a) Sur un cycle élémentaire réversible, le premier principe s'écrit :

$$\delta W + \delta Q_1 + \delta Q_2 = 0$$

avec δQ_1 le transfert thermique reçu de la piscine et δQ_2 celui reçu de la patinoire. Le second principe s'écrit, puisque le cycle est réversible :

$$dS = \delta S_e = \frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2}$$

La piscine reçoit donc un transfert thermique $-\delta Q_1$. Comme elle subit une transformation monobare, $dH_1 = -\delta Q_1$. Comme s'il s'agit d'une phase condensée, $dH_1 = C_1 dT_1$. Donc :

$$C_1 dT_1 = -\delta Q_1$$

De même :

$$C_2 dT_2 = -\delta Q_2$$

Le second principe s'écrit alors :

$$C_1 \frac{dT_1}{T_1} + C_2 \frac{dT_2}{T_2} = 0$$

- b) Par calcul direct :

$$C_1 \ln\left(\frac{T_1(t)}{T_i}\right) + C_2 \ln\left(\frac{T_2(t)}{T_i}\right) = 0$$



Il s'agit bien d'une intégration, pas d'une prise de primitive, donc le membre de droite est bien nul.

c) L'égalité précédente s'écrit à cet instant :

$$C_1 \ln\left(\frac{T_3}{T_i}\right) + C_2 \ln\left(\frac{T_0}{T_i}\right) = 0$$

qui se résout en :

$$T_3 = T_i \left(\frac{T_0}{T_i}\right)^{-\frac{C_2}{C_1}} = 280,9 \text{ K}$$

À cette température, la patinoire cesse de refroidir et son eau se met à geler.

De même, intégrons le premier principe :

$$\begin{aligned} dU &= \delta W_1 + \delta Q_1 + \delta Q_2 = 0 \\ \Rightarrow \Delta U &= W_1 - C_1(T_3 - T_i) - C_2(T_0 - T_i) \\ \Rightarrow W_1 &= C_1(T_3 - T_i) + C_2(T_0 - T_i) \\ &= 10^8 \text{ J} \end{aligned}$$

La pompe à chaleur reçoit donc du travail, ce qui cohérent pour une pompe à chaleur.

3. La piscine continue à changer de température, tandis que la patinoire subit un changement d'état. Le second principe sur un cycle élémentaire réversible s'écrit :

$$dS = 0 = \delta S_e = \frac{-C_1 dT_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_0}$$

La transformation subie par la patinoire est toujours monobare donc $dH_2 = -\delta Q_2$ comme précédemment. Mais il s'agit d'un changement d'état donc $dH_2 = -L dm_2$. D'où :

$$-C_1 \frac{dT_1}{T_1} - \frac{L dm_2}{T_0} = 0$$

qui s'intègre en :

$$\begin{aligned} -C_1 \ln\left(\frac{T_4}{T_3}\right) + \frac{L m_2}{T_0} &= 0 \\ \Rightarrow T_4 &= T_3 \exp\left(\frac{L m_2}{C_1 T_0}\right) = 291,3 \text{ K} \end{aligned}$$

Le premier principe permet de calculer W_2 :

$$dU = 0 = \delta W_2 - C_1 dT_1 - L dm_2$$

qui s'intègre en :

$$W_2 = C_1(T_4 - T_3) - L m_2 = 3,95 \cdot 10^9 \text{ J}$$

qui est toujours positif donc reçu par la pompe.

4. a) Par un calcul identique à la question c) :

$$T_5 = T_4 \left(\frac{T_2}{T_0}\right)^{-\frac{C_2'}{C_1}} = 292 \text{ K}$$

$$W_3 = C_1(T_5 - T_4) + C_2'(T_2 - T_0) = 4,68 \cdot 10^8 \text{ J}$$

b) Pour chauffer la piscine directement, il aura fallu une énergie :

$$W_4 = \Delta H_4 = C_1(T_i - T_5) = 6,67 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Ceci est à comparer à l'énergie fournie en exploitant la patinoire :

$$W_1 + W_2 + W_3 = 4,5 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La différence entre les deux processus est donc importante et l'utilisation de la patinoire est plus économique. c) Lors d'une phase de durée Δt_i où une énergie W_i est reçue, nous avons :

$$\mathcal{P} = \frac{W_i}{\Delta t_i} \Leftrightarrow \Delta t_i = \frac{W_i}{\mathcal{P}}$$

D'où sur les trois phases :

$$\tau = \frac{W_1 + W_2 + W_3}{\mathcal{P}} = 4 \text{ j } 2 \text{ h } 57 \text{ min}$$

En fait la patinoire est utilisable rapidement (les deux premières phases durent 5 h 38 min au total) mais c'est le chauffage de la piscine qui prend du temps.

28.17

Turbine à vapeur

La première question est cruciale. Placez convenablement chaque point en réfléchissant bien à sa position par rapport à la courbe de saturation, selon que le système est monophasé ou diphasé en ce point. Souvenez-vous aussi que les courbes isothermes se déplacent vers le haut du diagramme quand la température augmente.

Plusieurs essais peuvent être nécessaires pour trouver les positions relatives de chaque point. Prenez le temps qu'il faut pour cela.

1. Voir figure 28.10.

2. La transformation sur cette étape est adiabatique réversible, donc isentropique. La relation donnée par l'énoncé devient donc :

$$ds = 0 \Rightarrow c_l \frac{dT}{T} = \alpha v_l dP$$

qui s'intègre entre A et B en :

$$c_l \ln\left(\frac{T_A + \Delta T}{T_A}\right) = \alpha v_l (P_2 - P_1)$$

Le développement limité au premier ordre en $\Delta T/T_A$ du logarithme donne alors :

$$\begin{aligned} c_l \frac{\Delta T}{T_1} &\approx \alpha v_l (P_2 - P_1) \\ \Rightarrow \Delta T &= T_A \frac{\alpha v_l (P_2 - P_1)}{c_l} = 0,076 \text{ K} \end{aligned}$$

qui est une variation effectivement très faible.

3. Entre E \rightarrow F la transformation est adiabatique réversible donc isentropique donc :

$$\begin{aligned} c_l \ln(T_E) + \frac{L_v(T_E)}{T_E} &= c_l \ln(T_F) + \frac{x_F L_v(T_F)}{(T_F)} \\ \Rightarrow x_F &= \frac{T_F}{h_v(T_F) - h_l(T_F)} \times \\ &\quad \left(c_l \ln\left(\frac{T_E}{T_F}\right) + \frac{h_v(T_E) - h_l(T_E)}{T_E} \right) \end{aligned}$$



Ce résultat est repris de l'exercice 28.10.

L'étape $F \rightarrow A$ étant un changement d'état sous pression P_1 , elle est isotherme donc $t_F = t_A = 35^\circ\text{C}$. De même pour l'étape $D \rightarrow E$ sous pression P_2 , $T_E = 285^\circ\text{C}$.

Numériquement, $x_F = 66,2\%$.

L'enthalpie massique du mélange est, par définition :

$$h_F = (1 - x_F)h_l(T_F) + x_F h_v(T_F) = 1\,740 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

4. L'étape $F \rightarrow A$ est monobare donc $\Delta H = H_A - H_F = Q_1$.
Donc :

$$\begin{aligned} Q_1 &= m(h_A - h_F) \\ &= x_F m(h_v(T_F) - h_l(T_F)) \\ Q_1 &= -1\,600 \text{ kJ} \end{aligned}$$

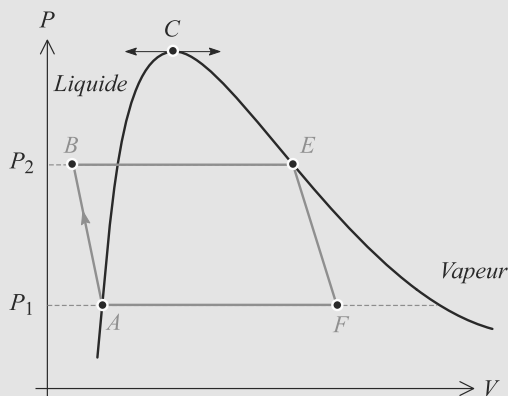


Figure 28.10 Cycle de Rankine de la turbine à vapeur.

De même dans $B \rightarrow E$, les deux étapes sont monobares donc $Q_2 = H_E - H_B$. L'étape $B \rightarrow D$ est un échauffement et l'étape $D \rightarrow E$ un changement d'état (donc $T_D = T_E$). Il vient alors :

$$\begin{aligned} Q_2 &= H_E - H_D + H_D - H_B \\ &= m(h_v(T_D) - h_v(T_B)) + m c_l(T_D - T_B) \\ Q_2 &= 2\,550 \text{ kJ} \end{aligned}$$

5. Les étapes $A \rightarrow B$ et $E \rightarrow F$ étant adiabatiques, le transfert thermique reçu sur tout le cycle est $Q = Q_1 + Q_2$. Le premier principe sur un cycle donne alors :

$$\begin{aligned} \Delta U &= W + Q = 0 \\ \Rightarrow W &= -Q_1 - Q_2 = -960 \text{ kJ} \end{aligned}$$

$W < 0$ montre le caractère moteur du cycle (c'est une turbine).

6. Le rendement pour un cycle moteur est le rapport entre le travail récupéré et le transfert thermique fourni donc :

$$\rho = \frac{-W}{Q_2} = 37,4\%$$

Pour un cycle de Carnot idéal, le rendement serait :

$$\rho_c = 1 - \frac{T_F}{T_E} = 44,8\%$$

Le rendement réel est donc bien inférieur au rendement de Carnot.

7. Par définition, $H = U + PV$ donc en grandeurs massiques :

$$\begin{aligned} h &= u + Pv \\ \Rightarrow dh &= du + P dv + v dP \end{aligned}$$

La première identité thermodynamique donne en outre $du = T ds - P dv$. Donc :

$$dh = T ds + v dP$$

Sur l'étape $A \rightarrow B$, $ds = 0$ donc, par intégration entre A et B :

$$\Delta h_{AB} = v_l(P_B - P_A) = 6,91 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

car v_l est indépendant de la température.

8. Numériquement, $\Delta h_{AB} \ll |W|$ donc le seul endroit où le fluide reçoit un travail non négligeable est dans la turbine. Donc :

$$W \simeq h_F - h_E$$

Partie 7

Électromagnétisme

Plan

29.1 Distributions de charges	446
29.2 Méthodes de calcul du champ électrique	452
29.3 Théorème de Gauss	454
Synthèse	459
Tests et exercices	460
Corrigés des exercices	463

Introduction

Une charge électrique, par sa seule présence, exerce une force sur toute autre particule chargée. Nous dirons que cette charge **rayonne un champ électrique** autour d'elle, ou que la seconde particule est **plongée dans un champ électrique** et donc subit une force de nature électrique.

Le programme de première année se limite au cas où la charge électrique qui rayonne le champ électrique est constante et immobile. Le champ électrique est dit **électrostatique**.

Prérequis

- Force de Coulomb
- Calcul intégral

Objectifs

- Décrire les distributions de charges par des distributions continues ou discrètes
- Par additivité, écrire les expressions des champs engendrés par des distributions discrètes ou continues
- Développer les raisonnements de symétrie et d'invariance
- Introduire le théorème de Gauss
- Ramener les calculs d'intégrales double et triple à des calculs d'intégrale simple dans les cas riches en symétries

29.1 Distributions de charges

29.1.1 Types de distribution

Une charge ponctuelle seule constitue une distribution. Un ensemble de charges ponctuelles est une distribution **discrète**.

Si une région de l'espace (volume, surface ou courbe) est entièrement remplie par des charges, la distribution correspondante est dite **continue**. Il lui est alors associé une densité de charge, ρ si elle est volumique, σ si elle est surfacique et λ si elle est linéique.



Une distribution volumique n'est pas forcément associée à une distribution surfacique ! Par exemple, ce n'est pas parce qu'une sphère contient des charges dans son volume ($\rho \neq 0$) qu'elle en contient sur sa surface (σ peut être nulle).

29.1.2 Champ électrique rayonné par une distribution

Dans toute la suite, P désignera un point de la distribution de charges et M le point quelconque de l'espace où est calculé le champ électrique.

Définition

Charge ponctuelle :	$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \ \vec{PM}\ ^3} \vec{PM}$
Distribution discrète $\{q_i\}$:	$\vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 \ \vec{P_iM}\ ^3} \vec{P_iM}$
Distribution volumique V :	$\vec{E}(M) = \iiint_{P \in V} \frac{\rho(P) dV(P)}{4\pi\epsilon_0 \ \vec{PM}\ ^3} \vec{PM}$ $dq(P) = \rho(P) dV(P)$
Distribution surfacique S :	$\vec{E}(M) = \iint_{P \in S} \frac{\sigma(P) dS(P)}{4\pi\epsilon_0 \ \vec{PM}\ ^3} \vec{PM}$ $dq(P) = \sigma(P) dS(P)$
Distribution linéique L :	$\vec{E}(M) = \int_{P \in L} \frac{\lambda(P) dl(P)}{4\pi\epsilon_0 \ \vec{PM}\ ^3} \vec{PM}$ $dq(P) = \lambda(P) dl(P)$



Ne confondez pas ρ paramètre des coordonnées cylindriques et ρ densité volumique de charge !



- L'unité du champ électrique est le $V.m^{-1}$, celle de ρ est le $C.m^{-3}$, celle de σ le $C.m^{-2}$ et celle de λ le $C.m^{-1}$.
- Les distributions continues seront traitées comme des distributions discrètes dont les points sont des « petits volumes » chargés $dq(P)$. Une somme sur ces petits volumes se fait, mathématiquement, comme une intégrale.

29.1.3 Invariances et symétries

$\vec{E}(M)$ est un vecteur qui se décompose sur trois vecteurs de base et chaque composante est une fonction des trois coordonnées de M :

$\vec{E}(M) = E_x(x, y, z) \vec{e}_x + E_y(x, y, z) \vec{e}_y + E_z(x, y, z) \vec{e}_z$	cartésiennes
$= E_\rho(\rho, \theta, z) \vec{e}_\rho + E_\theta(\rho, \theta, z) \vec{e}_\theta + E_z(\rho, \theta, z) \vec{e}_z$	cylindriques
$= E_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\theta + E_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\varphi$	sphériques

L'étude des invariances et des symétries a pour but de simplifier cette écriture **avant** de commencer les calculs.

Invariances

Définition

Une **invariance** est une propriété géométrique de la distribution qui supprime la dépendance des composantes de $\vec{E}(M)$ avec certaines coordonnées de M .



Le paramètre θ et le vecteur \vec{e}_θ n'ont pas la même signification en coordonnées cylindriques et sphériques. Ne vous laissez pas abuser par la notation.

- Invariance par translation le long d'un axe : comme rien ne change physiquement quand nous nous déplaçons le long de cet axe, le champ électrique ne doit pas changer non plus (toutes choses égales par ailleurs). La figure 29.1 le montre sur l'exemple d'un axe Oz . Il faudra donc choisir une base exploitant au moins un axe fixe : cartésienne ou cylindrique.

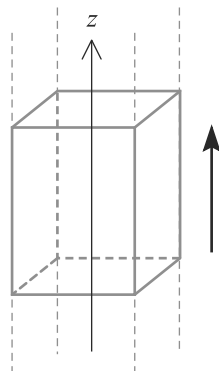


Figure 29.1 Invariance par translation le long d'un axe.

- Invariance par rotation autour d'un axe : de même, le champ électrique ne doit pas changer quand l'angle de rotation autour de cet axe varie parce que, physiquement, la situation n'a pas changé. La figure 29.2 le montre sur un exemple. Il faudra donc choisir une base exploitant au moins un angle de rotation : cylindrique ou sphérique.

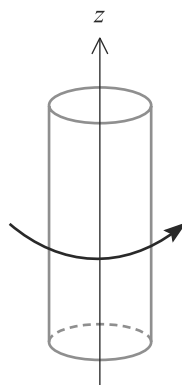


Figure 29.2 Invariance par rotation autour d'un axe.

- Invariance par rotation autour d'un point : seule la base sphérique est conçue pour exploiter cette invariance (figure 29.3).

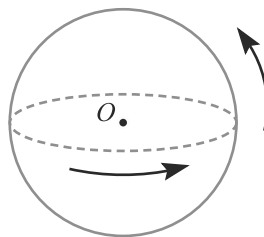


Figure 29.3 Invariance par rotation autour d'un point.

Méthode 1a Rechercher et exploiter les invariances

Ne cherchez pas à déterminer simultanément les invariances et les symétries.

1. Observez la forme de la distribution et cherchez « à l'œil » les invariances : par rotation autour d'un axe, par translation le long d'un axe ou par rotation autour d'un point.
2. Déduisez-en une base appropriée à son étude.
3. Considérez le champ électrique comme une fonction de trois coordonnées.
4. Chaque invariance de la distribution se traduit par une invariance du champ électrique et fait disparaître une coordonnée dans l'expression de chaque composante.

Remarque : la nature vectorielle de \vec{E} n'est pas utilisée ici.

Exemple d'application

Un fil rectiligne de longueur infinie est chargé uniformément. Étudiez les invariances de la distribution qu'il représente et ses conséquences sur le champ qu'elle rayonne en un point M quelconque hors du fil.

Solution

La distribution est linéique, donc il faut introduire une densité de charge linéique λ . Elle est uniforme, donc λ est constante.

Reportez-vous à la figure 29.4.

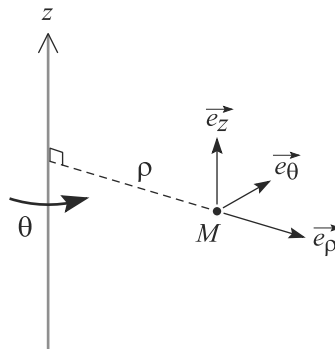


Figure 29.4 Invariances d'un fil rectiligne infini homogène.

1. La distribution est inchangée si nous nous déplaçons le long de l'axe Oz (un observateur verrait strictement le même fil avant et après déplacement). Il y a donc une invariance par translation le long de Oz .

La distribution est inchangée si nous effectuons une rotation d'angle quelconque autour de l'axe Oz . Il y a donc invariance par rotation autour de Oz .

2. La base adaptée à ces deux invariances est la base cylindrique.
3. Le champ électrique vu comme une fonction des coordonnées (ρ, θ, z) de M est donc :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(\rho, \theta, z)$$

4. L'invariance par translation le long de Oz supprime la coordonnée z .
L'invariance par rotation autour de Oz supprime la coordonnée θ .

Finalement, le champ électrique en un point M n'est plus fonction que de ρ : $\vec{E}(M) = \vec{E}(\rho)$.



Pour être tout à fait rigoureux, ce sont les composantes de \vec{E} qui ne dépendent pas de θ sur cet exemple. Cela réapparaîtra dans l'étape suivante, l'étude des symétries.

Symétries

Définition

Une **symétrie** est une propriété géométrique de la distribution qui supprime certaines composantes de $\vec{E}(M)$.

Soit un plan \mathcal{P} quelconque et une distribution \mathcal{D} . Notons \mathcal{D}' la distribution obtenue par symétrie par rapport à \mathcal{P} .

- \mathcal{P} est un **plan de symétrie de la distribution** si \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont identiques (superposables). Voir figure 29.5 pour un exemple.

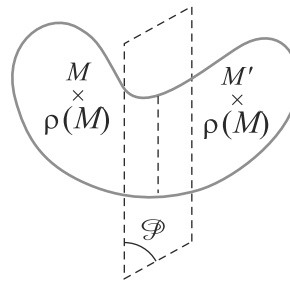


Figure 29.5 Plan de symétrie d'une distribution.

- \mathcal{P} est un **plan d'antisymétrie de la distribution** si \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont l'opposée l'une de l'autre en tout point. Voir figure 29.6 pour un exemple.

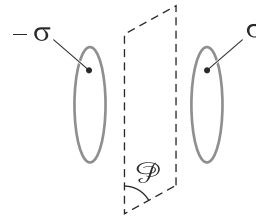


Figure 29.6 Plan d'antisymétrie d'une distribution.

Méthode 1b Rechercher et exploiter les symétries

Ne cherchez pas à déterminer simultanément les invariances et les symétries.

1. Placez un point M dans l'espace, là où vous voulez calculer le champ électrique.
2. Observez la distribution et cherchez les plans de symétrie et d'antisymétrie de la distribution qui passent par M .

3. Considérez le champ électrique comme un vecteur qui se décompose sur la base choisie.
4. Chaque plan de symétrie ou d'antisymétrie se traduit par l'annulation d'une ou deux composantes du champ électrique.

Remarque : la nature fonctionnelle de \vec{E} n'est pas utilisée ici.

Exemple d'application

Étudiez les symétries du fil de l'application de la méthode 1a. Concluez sur la manière la plus simple possible d'écrire le champ électrique.

Solution

1. Soit un point M hors du fil.
2. Voir figure 29.7. Le plan \mathcal{P} perpendiculaire au fil et passant par M est plan de symétrie. Le plan \mathcal{P}' contenant le fil et passant par M est plan de symétrie. Il n'y a pas de plan d'antisymétrie.

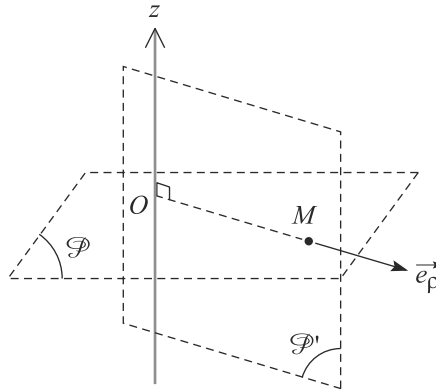


Figure 29.7 Plans de symétrie du fil rectiligne.

3. Dans la base cylindrique, le vecteur $\vec{E}(M)$ se décompose en :

$$\vec{E}(M) = E_\rho \vec{e}_\rho + E_\theta \vec{e}_\theta + E_z \vec{e}_z$$

4. Le plan \mathcal{P} est engendré par $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ et $\vec{E}(M)$ est dans ce plan. Donc $E_z = 0$.
Le plan \mathcal{P}' est engendré par $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_z)$. De même, $E_\theta = 0$.

Finalement, le vecteur $\vec{E}(M)$ s'écrit $\vec{E}(M) = E_\rho \vec{e}_\rho$.

En combinant ceci et le résultat issu de l'étude des invariances, il vient que E_ρ est elle-même une fonction de ρ seulement. D'où :

$$\vec{E}(M) = E_\rho(\rho) \vec{e}_\rho$$



Ce n'est pas parce que seule la composante E_ρ reste qu'elle ne dépend que de ρ . Nous pourrions tout à fait imaginer que la composante E_ρ ne dépende que de θ ... Cela sera plus apparent dans l'étude d'un autre champ, le champ magnétique.

29.2 Méthodes de calcul du champ électrique

Dans la totalité du cours sur le champ électrique, nous aborderons trois méthodes pour le calculer.

- Méthode intégrale, en appliquant directement la définition appropriée de $\vec{E}(M)$ donnée dans le paragraphe 29.1.2. Cette méthode peut être fastidieuse, mais elle est universelle.
- Théorème de Gauss, détaillé ci-dessous au paragraphe 29.3, quand la distribution est riche en invariances et en symétries.
- Calcul par le potentiel, détaillée dans le chapitre 30, qui est une méthode intégrale parfois plus simple que la précédente.

Méthode 2 Calculer le champ électrique par méthode intégrale

Cette méthode très générale ne doit être utilisée qu'en dernier recours ou si l'énoncé vous y oblige.

1. Menez l'étude des symétries pour simplifier au maximum l'expression du champ électrique avant calcul.
2. Écrivez l'intégrand correspondant à votre calcul. Cela revient à « découper » la distribution en petits morceaux élémentaires.
3. Exprimez chaque terme dans la base choisie, avec les notations de l'énoncé. S'il apparaît plusieurs coordonnées non indépendantes, exprimez-les les unes en fonction des autres pour n'en garder qu'une.
4. Intégrez. Si vous avez mené l'étape précédente jusqu'au bout, vous devez arriver à une intégrale qui n'a plus qu'une seule variable d'intégration.

N'oubliez pas en outre que vous savez d'avance (par l'étude des symétries) dans quelle direction est le champ électrique résultant. Ne calculez donc que la ou les composantes utiles !

Exemple d'application

Calculez le champ électrique rayonné par le fil des applications des méthodes précédentes en tout point hors du fil, par méthode intégrale.

Solution

1. Nous avons déjà établi que $\vec{E}(M) = E_\rho(\rho) \vec{e}_\rho$ en coordonnées cylindriques.
2. Découpons le fil en petits segments. Chaque petit segment est localisé en un point P , est de longueur dz et porte une charge $dq(P) = \lambda dz$. Donc sa contribution au champ total en M est :

$$d\vec{E}(M) = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|^3} \vec{PM}$$

Le champ total étant suivant \vec{e}_ρ , ne calculons que la projection suivant ce vecteur :

$$d\vec{E}(M) \cdot \vec{e}_\rho = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|^3} \vec{PM} \cdot \vec{e}_\rho$$

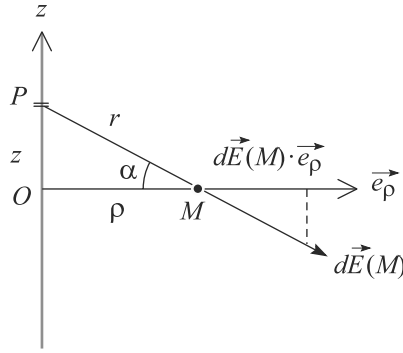


Figure 29.8 Paramétrage du fil infini.

3. Le paramétrage est celui de la figure 29.8. Nous avons a priori trois paramètres de position jouant le même rôle : l'angle α , la position z du point P et la distance $r = \|\overrightarrow{PM}\|$. Il faut en éliminer deux. Choisissons de garder seulement α .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PM} \cdot \vec{e}_\rho &= \rho \\ \frac{\rho}{r} &= \cos(\alpha) \\ z = \rho \tan(\alpha) &\Rightarrow dz = \frac{\rho}{\cos(\alpha)^2} d\alpha\end{aligned}$$



ρ n'est pas variable dans ce calcul car M est fixe.

D'où la contribution du petit segment :

$$d\vec{E}(M) \cdot \vec{e}_\rho = \frac{\lambda \cos(\alpha) d\alpha}{4\pi\epsilon_0\rho}$$

4. En intégrant ceci, nous allons aboutir à la projection du champ total sur \vec{e}_ρ , autrement dit $E_\rho(\rho)$. Mais cela nous suffit à remonter au champ vectoriel.

$$E_\rho(\rho) = \int_{\text{fil}} \frac{\lambda \cos(\alpha) d\alpha}{4\pi\epsilon_0\rho}$$

Cette intégrale est symbolique. La variable d'intégration est α , qui varie entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. Remarquons que la situation est symétrique, nous pouvons donc intégrer seulement sur la moitié du fil ($0 \leq \alpha \leq \pi/2$) et multiplier le résultat par 2 :

$$E_\rho(\rho) = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\lambda \cos(\alpha) d\alpha}{4\pi\epsilon_0\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}$$

D'où le champ électrique :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \vec{e}_\rho$$

29.3 Théorème de Gauss

29.3.1 Flux du champ électrique à travers une surface

Soit une surface S quelconque, pas forcément plane. Par définition, le **flux du champ électrique à travers S** est :

Définition

Flux du champ électrique à travers S :

$$\phi = \iint_{M \in S} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M)$$

où $d\vec{S}(M) = dS(M) \vec{n}(M)$, avec $dS(M)$ un petit morceau de la surface S au voisinage du point M et $\vec{n}(M)$ un vecteur normal à cette surface en M (figure 29.9).

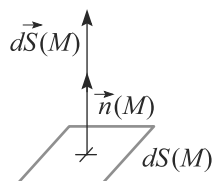


Figure 29.9 Petit élément de surface orienté.

Pour l'utilisation dans le théorème de Gauss, nous prendrons les surfaces S **fermées**. Dans ce cas particulier, nous utiliserons une notation spécifique :

Définition

Notation pour le **flux à travers une surface fermée** :

$$\phi = \oiint_{M \in S} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M)$$

Le rond sur le symbole intégral sous-entend que S est fermée.



Le flux n'est défini qu'à travers une surface ! Veillez donc à ne pas écrire une expression avec une intégrale simple ou triple.



Si les $d\vec{S}(M)$ sont choisis sortant de S , comme c'est l'usage, ϕ est appelé **flux sortant** de S .

Méthode 3 Calculer le flux du champ électrique

1. Faites l'inventaire des invariances et symétries pour avoir une expression de \vec{E} simplifiée au maximum dans une base adaptée.
2. Décomposez la surface S en petits éléments dont vous pourrez exprimer l'aire (des carrés, des couronnes, des bandes, etc). Le vecteur unitaire $\vec{n}(M)$ doit être l'un des vecteurs de la base, si la base a été bien choisie.
3. Faites le produit scalaire $\vec{E} \cdot d\vec{S}$. L'intégrale doit alors prendre une forme calculable par les méthodes habituelles.

Exemple d'application

Reprenez le fil rectiligne des applications des méthodes précédentes. Soit S un cylindre fermé d'axe Oz , de hauteur h et de rayon r . Calculez le flux sortant du cylindre.

La figure 29.10 montre le paramétrage.

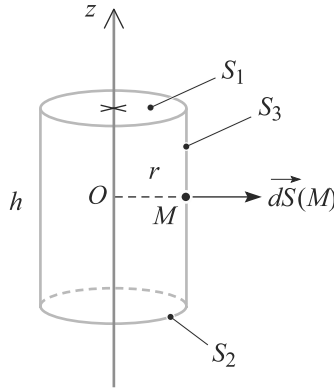


Figure 29.10 Cylindre de Gauss pour le calcul du champ rayonné par un fil.

Solution

1. La recherche de l'expression de \vec{E} a été faite précédemment :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \vec{e}_\rho$$

2. Le cylindre fermé est constitué de trois surfaces : S_1 le disque supérieur, S_2 le disque inférieur et S_3 la surface latérale. Le flux ϕ à travers le cylindre est donc la somme de trois flux :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$$

ϕ_i est le flux à travers la surface S_i .



Si vous oubliez S_1 et S_2 , la surface n'est pas fermée. Le flux est encore défini, mais ce n'est pas celui que l'énoncé demande !

- Si M est sur S_1 , la normale au cylindre en M est $\pm\vec{e}_z$. Elle est donc perpendiculaire à $\vec{E}(M)$. Cela est vrai pour tout M sur S_1 donc $\phi_1 = 0$.
- De même, $\phi_2 = 0$.
- Si M est sur S_3 , la petite surface $dS(M)$ ressemble à une feuille de papier courbée : un profil d'arc de cercle de rayon $d\theta$ horizontalement, un profil rectiligne de longueur dz verticalement. Donc sa surface est $dS(M) = r d\theta \times dz$.

La normale à cette petite surface correspond à un rayon du cylindre, donc à $\pm\vec{e}_\rho$. Si nous la choisissons sortante, elle est égale à \vec{e}_ρ . D'où :

$$d\vec{S}(M) = r d\theta dz \vec{e}_\rho$$

3. D'où le produit scalaire, sachant que $\rho = r$ ici :

$$\vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M) = \frac{\lambda r d\theta dz}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} d\theta dz$$

Le flux est donc :

$$\phi = \phi_3 = \iint_{S_3} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} d\theta dz$$

L'intégrale double apparaît donc comme le produit de deux intégrales simples indépendantes, avec θ variant de 0 à 2π et z variant de 0 à h :

$$\phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

29.3.2 Charge totale d'une distribution

Pour une distribution continue, la charge électrique totale s'obtient en découpant la distribution en petites charges dq et en les additionnant.

Définition

La charge totale Q d'une distribution est :

Distribution volumique : $Q = \iiint_{P \in V} \rho(P) dV(P)$

Distribution surfacique : $Q = \iint_{P \in S} \sigma(P) dS(P)$

Distribution linéique : $Q = \int_{P \in L} \lambda(P) dl(P)$

Méthode 4 Calculer la charge totale d'une distribution continue

Si une distribution continue est homogène, sa charge électrique totale est immédiate : $Q = \rho V$ (volumique), $Q = \sigma S$ (surfacique) ou $Q = \lambda l$ (linéique).

Sinon :

1. Découpez la distribution en petits éléments (de volume dV , de surface dS , de longueur dl) bien choisis pour qu'il soit aisé d'en faire la somme. Ce choix doit être guidé par les invariances de la distribution : découpage en petits segments pour une invariance par translation, en petites couronnes pour une invariance par rotation autour d'un axe, etc.
2. La somme sur ces petits éléments apparaît comme une intégrale qu'il faut traiter symboliquement, comme en mécanique : les bornes d'intégration ne sont explicitées qu'à la fin, quand la variable d'intégration est clairement identifiée.

Exemple d'application

Un disque de rayon R est chargé en surface (densité surfacique σ). Calculez la charge totale qu'il porte, d'abord s'il est chargé uniformément, puis dans le cas $\sigma = ar$ où r est la distance à son centre et a une constante positive.

Solution

Si le disque est homogène, σ est constante donc $Q = \sigma\pi R^2$.

Sinon, il faut découper le disque en éléments sur lesquels σ peut être considérée comme constante. Comme σ ne dépend que de r , la distribution de charge est invariante par rotation. L'élément de surface cherché est donc une couronne de rayon r , de très fine épaisseur dr (figure 29.11).

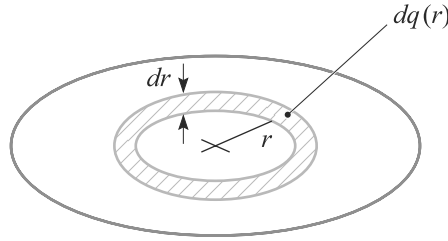


Figure 29.11 Découpage d'un disque en couronnes infiniment fines.



En toute rigueur, σ n'est pas tout à fait constante sur cette couronne, variant de a à $a(r+dr)$ d'un bord à l'autre. Mais comme dr est petit, cela constitue une approximation « d'ordre supérieur ». Mathématiquement, le résultat sera exact après intégration.

Une petite couronne a pour surface $dS(r) = 2\pi r \times dr$ donc porte une charge :

$$dq(r) = \sigma(r) dS(r) = 2\pi r^2 dr$$

La charge totale s'obtient en additionnant les charges de toutes les couronnes pour $0 \leq r \leq R$, ce qui s'écrit :

$$Q = \int_{\text{disque}} dq = \int_0^R 2\pi r^2 dr = \frac{2\pi R^3}{3}$$



C'est en faisant de nombreux exercices que vous acquerez une intuition du découpage à utiliser !

29.3.3

Énoncé du théorème de Gauss

Le flux sortant du champ électrique à travers une surface fermée S est proportionnel à la charge totale contenue dans S . Le coefficient de proportionnalité est $1/\epsilon_0$. En notant Q_{int} cette charge totale :

Théorème de Gauss :

$$\phi = \oiint_{M \in S} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Ce théorème n'a de sens que si S est fermée.

Méthode 5 Calculer un champ électrique par le théorème de Gauss

Le théorème de Gauss est une méthode de calcul de \vec{E} intéressante dans les cas où il y a beaucoup d'invariances et de symétries. Le critère pour savoir s'il y en a suffisamment est la facilité du calcul du flux.

1. Simplifiez au maximum l'expression générale de \vec{E} par les invariances et symétries.

2. Placez le point M où vous voulez calculer \vec{E} .
3. Construisez une surface S **fermée**, dite surface de Gauss, qui soit compatible avec les symétries du problème et qui passe par M .
4. Calculez le flux ϕ de \vec{E} à travers S . Il est courant que, si vous avez bien choisi votre surface, \vec{E} soit constant en norme sur S , ce qui simplifie bien les choses.
5. Calculez la charge totale Q_{int} de la distribution contenue dans S .
6. L'égalité $\phi = Q_{\text{int}}/\epsilon_0$ vous permet de déterminer \vec{E} .

Exemple d'application

Retrouver le champ électrique rayonné par le fil infini étudié précédemment, par le théorème de Gauss cette fois.

Solution

1. L'expression simplifiée de $\vec{E}(M)$ a été faite précédemment. Elle est de la forme :

$$\vec{E}(M) = E_\rho(\rho) \vec{e}_\rho$$

2. Le point M est un point quelconque de l'espace hors du fil, de coordonnées (ρ, θ, z) .
3. La surface de Gauss doit passer par M , pour faire apparaître $\vec{E}(M)$ lors du calcul du flux, et respecter les symétries de la distribution. Un cylindre apparaît donc comme le meilleur choix.

Prenons donc un cylindre d'axe Oz et de rayon r . Il présente alors la même invariance par rotation autour de Oz que la distribution.

Nous ne pouvons pas le prendre de hauteur infinie pour avoir la même invariance par translation le long de Oz , car le flux serait lui aussi infini. Prenons-le de hauteur h quelconque et nous verrons ensuite quoi faire de ce paramètre.

Nous sommes ramenés à la situation de la figure 29.10.



Le résultat ne devra pas dépendre de h , puisque ce paramètre est totalement arbitraire.

4. Le flux a été calculé précédemment, mais il faut reprendre le calcul car ici nous ne connaissons pas à l'avance l'expression du champ. Seul le flux à travers la surface latérale est non nul et vaut :

$$\phi = \int_{S_3} E_\rho(\rho) \vec{e}_\rho \cdot d\vec{S} \vec{e}_\rho = E_\rho(\rho) \int_{S_3} dS$$

Cette intégrale étant tout simplement la surface latérale du cylindre, elle vaut $2\pi\rho h$.



Si vous explicitez $dS = \rho d\theta dz$ et calculez la double intégrale, vous trouvez le même résultat.

5. La charge contenue dans le cylindre est entièrement sur le fil. Une portion de longueur h du fil se trouve incluse dans le cylindre, donc :

$$Q_{\text{int}} = \lambda h$$

6. Le théorème de Gauss donne alors :

$$E_\rho(\rho) 2\pi\rho h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

D'où l'expression de E_ρ et celle du champ électrique :

$$\vec{E}(M) = E_\rho(\rho) \vec{e}_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \vec{e}_\rho$$

Le résultat est bien indépendant de h et identique à celui établi par méthode intégrale.

Synthèse

Savoirs

- Expression intégrale du champ pour les distributions continues
- Le champ électrique est une quantité vectorielle
- Théorème de Gauss

Savoir-faire

- Simplifier les expressions du champ électrique par raisonnements de symétrie et d'invariance
- Découper les distributions de charges pour un calcul simple du champ électrique par méthode intégrale
- Choisir correctement une surface de Gauss
- Justifier les calculs de flux et de charge intérieure

Mots-clés

- Champ électrostatique,
- charge électrique,
- distribution de charge discrète,
- distribution de charge continue,
- flux,
- théorème de Gauss,
- invariance,
- symétrie.

Tests de connaissances

- 29.1 Les invariances d'une distribution de charges permettent d'obtenir la direction du champ électrique.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 29.2 Un plan de symétrie qui ne passe pas par le point M où l'on veut connaître le champ électrique n'est d'aucune utilité.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 29.3 La charge d'une distribution volumique est $Q = \rho V$.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 29.4 La représentation la plus réaliste des charges est la distribution discrète... mais pas la plus maniable.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 29.5 Dans le théorème de Gauss, il est impératif d'orienter le vecteur normal sortant pour calculer le flux.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 29.6 Quand il n'y a pas assez de symétries, le théorème de Gauss ne s'applique pas.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 29.7 Il est toujours plus simple d'utiliser le théorème de Gauss plutôt qu'une autre méthode.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 29.8 Le champ électrique est homogène à une charge divisée par ϵ_0 et une distance au carré.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 29.9 Son unité en découle
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

29.10 Charges totales dans une distribution

Calculez la charge totale contenue dans les distributions suivantes.

1. Cube d'arête a uniformément chargé en volume.
2. Cube d'arête a uniformément chargé en surface.
3. Sphère de rayon R uniformément chargée en surface et en volume.
4. Portion de fil métallique de longueur L portant une distribution linéique uniforme.
5. Portion de fil métallique de longueur L non homogène : $\lambda(x) = ax + b$.
6. Sphère de rayon R chargée en volume avec $\rho(r) = ar$.

29.11 Champ rayonné par des plans infinis

1. Calculez le champ rayonné dans tout l'espace par un plan infini uniformément chargé de densité surfacique $\sigma > 0$.
2. Déduisez-en le champ rayonné par un *condensateur plan*, système constitué de deux plans infinis parallèles uniformément chargés de charges opposées et distants de e .

29.12 La sphère dans tous ses états

Soit une sphère de rayon R . Calculez le champ électrique qu'elle rayonne en tout point de l'espace si :

1. si elle est uniformément chargée en volume ;
2. si elle est uniformément chargée en surface.

29.13 Cylindre chargé en volume

On considère un cylindre de rayon R et d'extension infinie suivant son axe. Il est rempli d'une distribution uniforme de charges de densité ρ et le reste de l'espace est vide comme le montre la figure 29.12 :

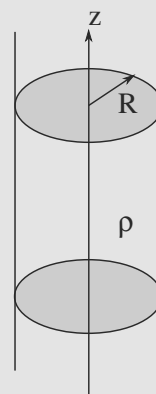


Figure 29.12 Cylindre infini chargé en volume.

1. Déterminer les symétries de la distribution de charges. Que peut-on en déduire sur la direction du champ électrostatique \vec{E} ?
2. Quelles sont les invariances de la distribution de charges ? Que peut-on en déduire ?
3. Déterminer le champ électrostatique \vec{E} rayonné par cette distribution dans tout l'espace. Représenter $E(r)$. Le champ est-il continu en R ? Pourquoi est-ce ainsi ?

29.14 Champ rayonné par un segment chargé

1. Calculez le champ électrique rayonné en un point M de son plan médiateur par un fil de longueur L uniformément chargé. Vous utiliserez, pour donner le résultat, le demi-angle θ_0 sous lequel le fil est vu depuis le point M .
2. Déduisez-en le champ rayonné par le même fil, mais de longueur infini et en tout point de l'espace.

29.15 Condensateur cylindrique

(D'après ESEM.)

Un condensateur cylindrique est modélisé par deux cylindres coaxiaux, de rayons respectifs R_1 et $R_2 > R_1$ et de longueur grande devant ces rayons (figure 29.13). Les deux cylindres sont chargés uniformément en surface, le cylindre intérieur avec une densité surfacique $\sigma_1 > 0$ et le cylindre extérieur avec une densité surfacique $\sigma_2 < 0$.

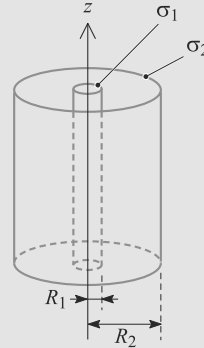


Figure 29.13 Condensateur cylindrique.

Exercices d'approfondissement

29.16 Le premier modèle atomique : le modèle de Thomson

(D'après Mines de première année.)

J.J. Thomson, qui a découvert l'électron en 1897, avait proposé une conception de l'atome. Bien qu'il se soit révélé faux, son modèle est instructif et met en jeu des raisonnements qui rentrent dans le cadre du programme.

Dans l'atome d'hydrogène, Thomson a supposé que la charge positive était uniformément répartie en volume, tandis que la charge négative était assimilable à une particule ponctuelle chargée se déplaçant dans ce volume.

La charge positive totale est notée e , la charge de l'électron $-e$. La sphère délimitant l'atome est de centre O et de rayon r_0 . L'électron est de masse m_e et repéré par le point M (figure 29.14).

1. Étude du champ de l'ion H^+ .
 - a) Calculez ρ , la densité volumique de charge associée à la charge positive.
 - b) Étudiez les symétries et invariances du champ électrique rayonné en tout point.
 - c) Calculez le champ électrique rayonné par l'ion en tout point M de l'espace, en fonction de e , r_0 , $r = \|\vec{OM}\|$, ε_0 et \vec{OM} . Vous distinguerez les cas $r < r_0$ et $r > r_0$, avec r la distance de M au centre O . Commentaire ?

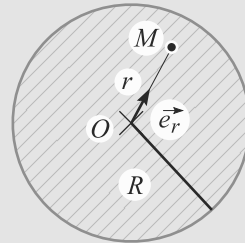


Figure 29.14 Modèle atomique de Thomson.

2. Étude du mouvement de l'électron.

Son poids est négligé, il n'est donc soumis qu'à l'attraction électrostatique de la charge positive. Vous supposez qu'il n'y a pas ionisation : r reste inférieur à r_0 .

a) Démontrez que l'équation du mouvement peut s'écrire :

$$\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = -\omega_0^2 \vec{OM}$$

Exprimez la fréquence propre de cet oscillateur harmonique en fonction de e , r_0 , ε_0 et m_e .

- b) La plus petite fréquence observée à l'époque de Thomson dans le spectre de l'hydrogène était $f_{\min} = 460 \text{ THz} = 160 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$. Déduisez-en une valeur numérique d'un majorant de r_0 . C'est l'ordre de grandeur du rayon du noyau. Commentez.

■■■

29.17 Sphère inhomogène*(D'après Mines de Douai.)*

Une sphère de rayon R est chargée en volume de manière inhomogène :

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - k \frac{r^2}{R^2} \right)$$

où ρ_0 et k sont des constantes positives et r la distance au centre de la sphère (figure 29.15).

1. Calculez le champ électrique rayonné par cette sphère en tout point de l'espace, intérieur ou extérieur, situé à une distance d du centre.

2. Calculez k pour que, à l'intérieur de la sphère, le champ passe par un maximum en $R/2$.

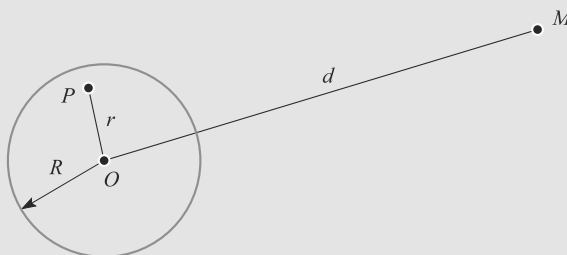


Figure 29.15 Sphère inhomogène.

29.1

Faux, elles permettent de connaître les dépendances de ses composantes en fonction des variables d'espace.

29.2

Faux. Il peut permettre de connaître la symétrie des composantes par rapport à ce plan.

29.3

Faux, c'est Vrai seulement si la distribution est uniforme, sinon il faut découper la distribution et sommer (intégrer) le résultat sur l'ensemble du volume.

29.4

Vrai. Certes, au niveau microscopique les charges sont quasi ponctuelles et discrètes... mais au niveau macroscopique (et même parfois mésoscopique) une distribution continue est plus performante pour décrire les phénomènes.

29.5

Vrai car on calcule toujours le flux sortant de la surface dans ce théorème.

29.6

Faux. Il s'applique mais il peut se révéler stérile : on ne peut pas toujours en déduire la forme du champ s'il n'y a pas suffisamment de symétries car le flux n'est pas alors calculable.

29.7

Faux : voir ce qui précède.

29.8

Vrai, on le constate sur la forme du champ d'une charge ponctuelle.

29.9

Faux, son unité d'usage est liée à sa relation avec le potentiel (V.m^{-1}).

29.10 Charges totales dans une distribution

Méthode mise en jeu : n°4.

Vous ne trouverez jamais ce type d'exercice dans un oral de concours, mais il constitue un bon entraînement pour maîtriser l'une des techniques utilisées dans le théorème de Gauss : le calcul de Q_{int} .

Pour les deux dernières questions, la difficulté est de savoir comment *découper* la distribution en petits éléments considérés comme homogènes. Prenons le cas de la sphère. Comme ρ ne dépend que de r , un tel élément doit être ca-

ractérisé par r constant, donc une sphère de rayon r . Mais il faut un volume, donc cette sphère est munie d'une petite épaisseur dr . C'est ce qu'on appelle une *coquille sphérique*.

Les densités volumiques seront notées ρ , surfaciques σ et linéiques λ . Les volumes seront notés V , les surfaces S et les longueurs L .

1. Comme ρ est constante, $Q = \rho V$. Donc $Q = \rho a^3$.
2. La surface chargée du cube vaut $S = 6a^2$. Donc $Q = 6a^2 \sigma$.
3. Il y a des charges dans le volume et sur la surface donc :

$$Q = \rho V + \sigma S = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho + 4 \pi R^2 \sigma$$

4. $Q = \lambda L$.
5. Cette fois le fil n'est pas homogène. Comme la densité linéique dépend de x , un tronçon de fil situé en x et de petite longueur dx a une densité linéique quasi constante égale à $\lambda(x)$. Il porte une charge $dq = \lambda(x) dx$.

La charge totale du fil est la somme des charges portées par les petits tronçons :

$$Q = \int_0^L dq = \int_0^L (ax + b) dx = \frac{aL^2}{2} + bL$$

6. Découpons la sphère en morceaux que nous pouvons considérer comme homogènes. Comme ρ ne dépend que de r , une surface $r = \text{cst}$ sera homogène. Découpons donc la boule en coquilles sphériques de rayon r et d'épaisseur faible dr . Une coquille peut être considérée comme homogène.

Une coquille a pour surface $S = 4\pi r^2$ et donc pour volume : $dV = S dr = 4\pi r^2 dr$ et pour charge électrique :

$$dq(r) = \rho(r) dV = 4\pi r^3 dr$$

La charge totale de la boule est la somme des charges des coquilles :

$$Q = \int_0^R dq(r) = \pi a R^4$$

29.11 Champ rayonné par des plans infinis

Méthodes mises en jeu : n°1a, 1b, 3, 4 et 5.

Il s'agit vraiment d'un exemple de base qu'il faut maîtriser parfaitement. Il établit d'ailleurs des résultats qui seront réinvestis plus tard : existence d'une discontinuité du champ électrique à la traversée d'un plan chargé, modélisation d'un condensateur plan par deux plans chargés...

1. Le problème est paramétré figure 29.16.

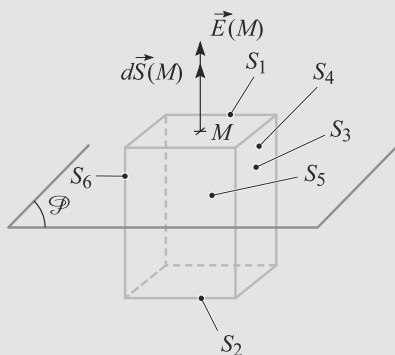


Figure 29.16 Surface de Gauss pour le calcul du champ rayonné par un plan.

La distribution de charges est invariante par n'importe quelle translation dans le plan, et par toute rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan.

Travaillons en coordonnées cartésiennes, les axes Ox et Oy étant dans le plan et Oz perpendiculaire au plan. Alors la distribution est invariante par translation le long de Ox et Oy donc :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(z)$$

Soit M un point hors du plan et O sa projection sur le plan. Tout plan perpendiculaire au plan et contenant M est plan de symétrie. $\vec{E}(M)$ est contenu dans tous ces plans, donc contenu dans leur intersection qui est la droite (OM) . Donc :

$$\vec{E}(M) = E_z \vec{e}_z$$

En combinant les deux résultats, il apparaît que E_z ne dépend que de z , d'où la forme simplifiée :

$$\vec{E}(M) = E_z(z) \vec{e}_z$$



Rappelons encore que le fait que la composante z ne dépende que de z est une coïncidence due à la simplicité du problème. Il est réellement nécessaire d'étudier invariants et symétries, et de ne pas conclure trop vite.

En outre, le plan chargé est lui-même un plan de symétrie. Donc le champ électrique est changé en son opposé lors de cette symétrie. Cela veut dire que $E_z(z)$ est impaire :

$$E(z) = -E(-z)$$

Soit M un point tel que $z > 0$. Choisissons comme surface de Gauss un pavé contenant M sur sa face supérieure et symétrique par rapport au plan chargé, de hauteur h et de section S .



Le résultat final ne devra pas dépendre de S car ce paramètre est arbitraire.

Le flux de \vec{E} à travers ce pavé se décompose en six termes, un par face du pavé.

- Les flux ϕ_3, ϕ_4, ϕ_5 et ϕ_6 à travers les quatre faces perpendiculaires au plan chargé sont nuls, car les normales sont toujours suivant \vec{e}_x ou \vec{e}_y , donc perpendiculaires au champ électrique.
- Les flux ϕ_1 et ϕ_2 à travers les deux faces restantes sont égaux, par symétrie par rapport au plan chargé. Calculons donc seulement ϕ_1 . Tous les vecteurs normaux sur cette surface sont égaux à \vec{e}_z donc :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \iint_{S_1} E_z(z) \vec{e}_z \cdot d\vec{S} \vec{e}_z \\ &= E_z(z) \iint_{S_1} dS \\ \phi_1 &= E_z(z) S \end{aligned}$$

car la surface de S_1 est égale à S .

Donc le flux total à travers le cylindre est :

$$\phi = 2\phi_1 = 2E_z(z)S$$

Appliquons le théorème de Gauss :

$$\begin{aligned} 2S E_z(z) &= \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow E_z(z) &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

D'où le résultat final :

$$\begin{aligned} \vec{E}(z > 0) &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \\ \vec{E}(z < 0) &= \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \end{aligned}$$

2. Plaçons le plan chargé positivement en $z = 0$ et le plan chargé négativement en $z = e$. Les champs électriques sont additifs, nous pouvons donc additionner vectoriellement les champs rayonnés par chaque plan.

Le plan chargé positivement rayonne le champ calculé question précédente. Soit $\vec{E}_+(M)$ ce champ. Pour le plan chargé négativement, il faut changer le signe de σ et se placer autour de $z = e$:

$$\begin{aligned} \vec{E}_-(z > e) &= \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \\ \vec{E}_-(z < e) &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \end{aligned}$$

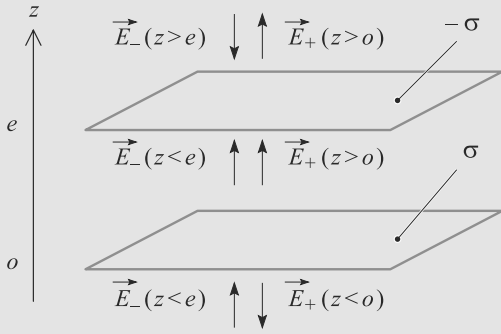


Figure 29.17 Addition des champs rayonnés par les plans d'un condensateur.

La figure 29.17 montre la direction de chaque champ électrique dans les différentes régions de l'espace.

- Les deux champs s'ajoutent dans l'espace entre les plans :

$$\vec{E}(0 < z < e) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

- Ils s'annulent l'un l'autre en dehors :

$$\vec{E}(z < 0) = \vec{E}(z > e) = \vec{0}$$



Sur cet exemple, vous constatez que la discontinuité du champ électrique à la traversée du plan est $E(0^+) - E(0^-) = \sigma/\epsilon_0$. Cette formule est en fait générale, vous la démontrerez l'an prochain.

29.12

La sphère dans tous ses états

Méthodes mises en jeu : n° 1a, 1b, 3, 4 et 5.

Les calculs sont très classiques. Attendez-vous à devoir commenter l'éventuelle discontinuité de \vec{E} observée dans le second cas (puisque'il y a une distribution surfacique).

1. La symétrie du problème est sphérique. Soit M un point quelconque. Tout plan contenant O et M est plan de symétrie, donc \vec{E} est selon \vec{e}_r dans la base sphérique.

Il y a invariance par rotation donc \vec{E} ne dépend pas de θ et φ . D'où :

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$$

La surface de Gauss sera donc une coquille sphérique C de rayon r . Le flux à travers cette surface est :

$$\phi = \oint_{M \in C} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M)$$

Le vecteur $d\vec{S}(M)$ est normal à la sphère donc radial, colinéaire à \vec{e}_r . D'où :

$$\begin{aligned} \phi &= \oint_C E(r) dS \\ &= E(r) \oint_C dS \\ \phi &= E(r) 4\pi r^2 \end{aligned}$$

Pour le calcul de la charge intérieure à C , il y aura deux cas, selon que M est situé dans la distribution de charge (figure 29.18), ou à l'extérieur (figure 29.19).

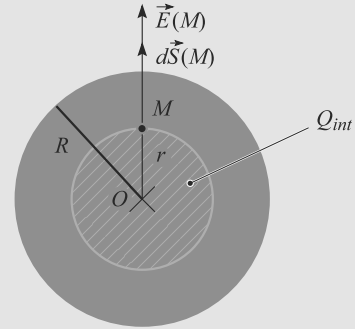


Figure 29.18 Surface de Gauss pour un point intérieur à la sphère.

- $r > R$: M est à l'extérieur. Q_{int} est alors la charge totale de la distribution :

$$Q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

D'où le théorème de Gauss :

$$\begin{aligned} E(r) 4\pi r^2 &= \rho \frac{4}{3\epsilon_0} \pi R^3 \\ \Rightarrow \vec{E}(r > R) &= \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \end{aligned}$$



C'est un résultat fondamental : le champ électrique rayonné par une sphère homogène chargée en volume est, à l'extérieur de cette sphère, égal à celui d'une charge ponctuelle de même charge et placée au centre de la sphère.

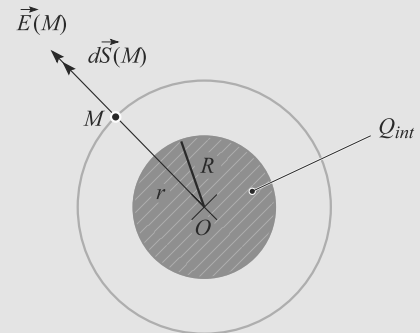


Figure 29.19 Surface de Gauss pour un point extérieur à la sphère.

- $r < R$: M est à l'intérieur de la sphère. Seul le calcul de Q_{int} change. C'est la charge contenue dans la sphère de rayon r et non R :

$$Q_{\text{int}} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

Après calcul :

$$\vec{E}(r < R) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \vec{e}_r$$

Le champ électrique est continu en $r = R$ et bien sûr partout ailleurs (figure 29.20).

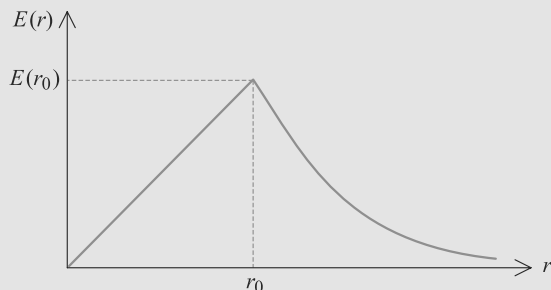


Figure 29.20 Champ rayonné par une sphère homogène chargée en volume.

2. Pour la sphère chargée en surface, l'analyse des symétries est la même et le choix de la surface de Gauss aussi. Il faut donc seulement reprendre le calcul des charges intérieures :

- $r > R$: toute la charge Q se trouve incluse dans la surface de Gauss.

$$Q_{\text{int}} = Q = 4\pi R^2 \sigma$$

D'où le champ :

$$\begin{aligned} E(r) 4\pi r^2 &= \frac{4\pi R^2 \sigma}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \vec{E}(r > R) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \end{aligned}$$



Le champ rayonné par les deux sphères à l'extérieur est donc identique. C'est remarquable, mais cela reste particulier à la géométrie sphérique.

- $r < R$: il n'y a aucune charge contenue dans la surface de Gauss, donc le champ est nul.

$$\vec{E}(r < R) = \vec{0}$$

Le champ présente donc une discontinuité à la traversée de la surface chargée de la sphère (figure 29.21), contrairement à la sphère chargée en volume, où \vec{E} était continu partout. Calculons-la :

$$E(R^+) - E(R^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - 0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

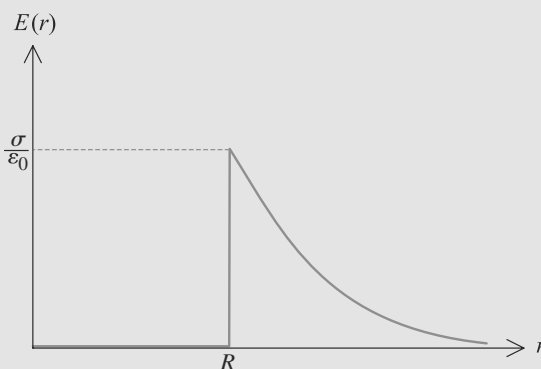


Figure 29.21 Champ rayonné par une sphère homogène chargée en surface.

29.13

Cylindre chargé en volume

Méthode mise en jeu : n° 1a, 1b, 3 et 5.

Cet exercice d'application directe du cours permet de faire le point sur l'acquisition des méthodes de raisonnement qui permettent de déterminer le champ électrostatique. Une bonne connaissance des coordonnées cylindriques est un préalable à sa résolution.

Dans ce corrigé, on utilise les coordonnées cylindriques représentées figure 29.22 :

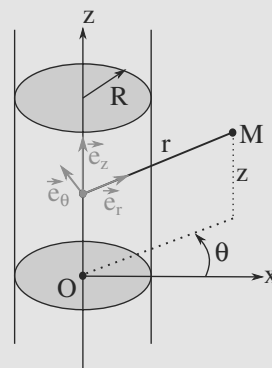


Figure 29.22 Coordonnées cylindriques.

1. Le plan contenant l'axe Oz et un point M quelconque de l'espace est plan de symétrie pour la distribution : il l'est aussi pour le champ et donc E_θ est nul.

De même, le plan orthogonal à l'axe et passant par M est plan de symétrie pour la distribution de charges et donc pour le champ électrostatique : E_z est donc nul.

On peut donc en déduire que le champ électrostatique est radial : $\vec{E}(M) = E(M) \vec{e}_r$.

2. Une translation suivant l'axe Oz laisse la distribution invariante et donc les composantes cylindriques du champ aussi : $\frac{\partial E(M)}{\partial z} = 0$. De même, une rotation autour de l'axe Oz d'angle θ laisse la distribution invariante : $\frac{\partial E(M)}{\partial \theta} = 0$.

On en déduit donc que $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$.

3. On va utiliser le théorème de Gauss : le problème connaît suffisamment de symétries pour qu'il soit utilisable avec profit. La surface de Gauss (S) qu'on va considérer est un cylindre de hauteur h , de rayon r et d'axe Oz (figure 29.23) :

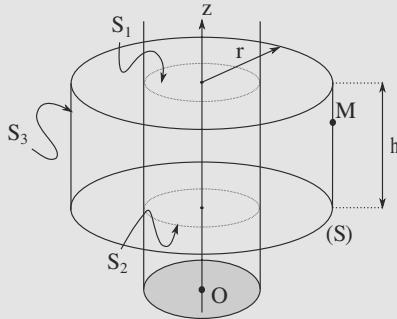


Figure 29.23 Cylindre de Gauss.

Les surfaces S_1 et S_2 ont des vecteurs dirigés selon l'axe Oz et donc le produit scalaire $\vec{E}(M) \cdot d\vec{S}$ est nul sur ces deux surfaces : il n'y a de flux sortant que sur la surface latérale S_3 où le vecteur surface sortant est orienté suivant \vec{e}_r :

$$\begin{aligned} \oiint_{(S)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_3} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_{S_3} E(r)\vec{e}_r dS \vec{e}_r = E(r) \iint_{S_3} dS \end{aligned}$$

Le théorème de Gauss appliqué à cette surface donne alors :

$$\text{si } r < R, E(r)2\pi rh = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho\pi r^2 h}{\epsilon_0} \text{ et donc } E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0};$$

$$\text{si } r > R, E(r)2\pi rh = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho\pi R^2 h}{\epsilon_0} \text{ et donc } E(r) = \frac{\rho R^2}{2r\epsilon_0}.$$

On en déduit la représentation graphique de $E(r)$ représentée figure 29.24 :

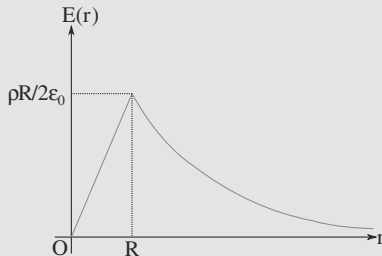


Figure 29.24 Champ électrostatique en fonction de r .

On constate la continuité mathématique de $E(r)$. Elle provient physiquement de l'absence de distribution surfacique en $r = R$.

29.14

Champ rayonné par un segment chargé

Méthodes mises en jeu : n°1b, 2.

Le fil de longueur L ne contient pas assez de symétries pour construire autour de lui une surface de Gauss sur laquelle \vec{E} soit simple, donc le théorème de Gauss n'est pas utilisable. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle l'énoncé ne vous demande le champ que dans le plan médiateur.

La deuxième question semble beaucoup plus générale, puisqu'elle demande le champ dans tout l'espace. Attention, donc, à bien justifier la manière dont vous réutilisez le résultat de la première question.

1. Travaillons en base cylindrique dont l'axe Oz est l'axe du fil.

Soit M un point du plan médiateur du fil. Ce plan est plan de symétrie, ainsi que le plan contenant le fil et M . Donc $\vec{E}(M)$ est l'intersection de ces deux plans. Donc $\vec{E}(M)$ est suivant \vec{e}_ρ .

Enfin, dans le plan médiateur z est constant égal à 0. Finalement :

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_\rho$$



Ceci n'est valable que dans le plan médiateur ! En dehors de ce plan, la composante en \vec{e}_z apparaît.



L'étude des invariances n'a pas été menée car inutile ici (méthode intégrale).

Nous pouvons faire un dessin dans un plan de coupe contenant le fil et le point M : figure 29.25.

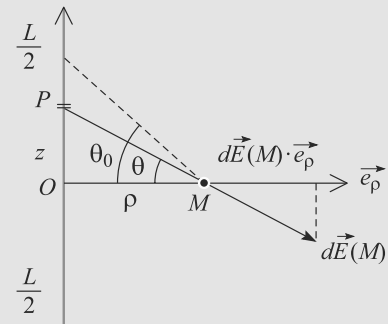


Figure 29.25 Calcul du champ rayonné un morceau de fil rectiligne.

Découpons donc le fil en petits tronçons de longueur dz , localisés en P et de charge $dq = \lambda dz$. Chacun de ces tronçons rayonne un champ en M :

$$d\vec{E}(M) = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|^3} \vec{PM}$$

Le champ total étant suivant \vec{e}_ρ , calculons seulement la projection de $d\vec{E}(M)$ sur \vec{e}_ρ :

$$d\vec{E} \cdot \vec{e}_\rho = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0 PM^2} \cos(\theta)$$

Les variables d'intégration z , PM et θ ne sont pas indépendantes. Choisissons de garder θ .

$$\begin{aligned} PM &= \frac{\rho}{\cos(\theta)} \\ z &= \rho \tan(\theta) \\ \Rightarrow dz &= \frac{\rho d\theta}{\cos^2(\theta)} \end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$d\vec{E} \cdot \vec{e}_\rho = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 \rho} \cos(\theta) d\theta$$

La projection du champ total sur \vec{e}_ρ s'obtient par intégration. Utilisons directement la symétrie de l'intégrand, qui est paire autour de O :

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{e}_\rho = E_\rho(\rho) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_A^B \cos(\theta) d\theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 \rho} 2 \int_0^{\theta_0} \cos(\theta) d\theta \end{aligned}$$

L'intégrale porte alors sur $\theta \in [0, \theta_0]$:

$$E_\rho(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho} \sin(\theta_0)$$

D'où le champ électrique en M :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho} \sin(\theta_0) \vec{e}_\rho$$



Ce champ n'est pas défini sur le fil : le champ est discontinu à la traversée du fil.

2. Il suffit de repartir de la question précédente en faisant tendre θ_0 vers $\pi/2$. Cela redonne le résultat classique :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho} \vec{e}_\rho$$

Ce résultat semble valable seulement dans le plan médiateur, mais pour le fil infini tout plan perpendiculaire au fil est plan médiateur. Donc le résultat est valable dans tout l'espace.

29.15

Condensateur cylindrique

Méthodes mises en jeu : n°1a, 1b, 3, 4 et 5.

Bien que l'exercice tienne en peu de questions, vous devez voir, derrière son énoncé, tout l'algorithme de calcul d'un champ électrique ! Vous avez donc à répondre, en fait, à toute une série de questions.

1. Considérons une section de longueur h du condensateur. La charge portée par le cylindre intérieur est $Q_1 = \sigma_1 S_1$ où $S_1 = 2\pi R_1 h$ est la surface de la section de cylindre. Donc $Q_1 = \sigma_1 2\pi R_1 h$.

De même, le cylindre extérieur porte une charge $Q_2 = \sigma_2 2\pi R_2 h$.

La neutralité électrique $Q_1 = -Q_2$ conduit alors à :

$$\sigma_2 = -\frac{R_1}{R_2} \sigma_1$$

2. La distribution est invariante par rotation autour de l'axe Oz et par translation le long de Oz . Donc le champ électrique en un point M quelconque peut s'écrire $\vec{E}(M) = \vec{E}(r)$ en base cylindrique.

Le plan contenant l'axe Oz et le point M est plan de symétrie, ainsi que le plan perpendiculaire à Oz et contenant M . Donc $\vec{E}(M) = E_r \vec{e}_r$.

Finalement, le champ électrique se réduit à $\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r$.

Procédons avec le théorème de Gauss. La surface de Gauss sera prise comme un cylindre d'axe Oz , de hauteur h et de rayon r , passant par M (figure 29.26).

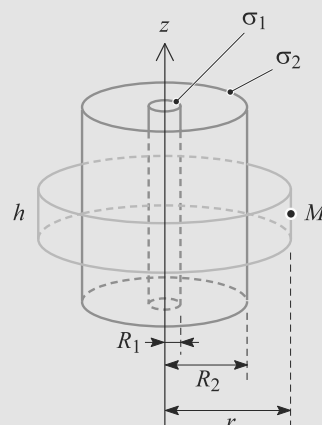


Figure 29.26 Surface de Gauss pour le condensateur cylindrique.

Le flux à travers ce cylindre est la somme des flux à travers ces faces. Le champ électrique est radial, donc les flux à travers les deux sections du cylindre sont nuls. Il reste le flux à

travers la surface latérale :

$$\begin{aligned}\phi &= \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint E_r(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r \\ \phi &= E_r(r)S\end{aligned}$$

où S est la surface latérale : $S = 2\pi rh$. D'où :

$$\phi = E_r(r)2\pi rh$$

Pour le calcul de la charge intérieure, il y a trois cas à distinguer :

- $r < R_1$: il n'y a aucune charge dans la surface de Gauss donc $E_r = 0$.
- $R_1 < r < R_2$: une longueur h du cylindre de rayon R_1 est incluse dans la surface de Gauss. Elle porte la charge Q_1 calculée dans la première question. D'où :

$$E_r(r) = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r}$$

- $r > R_2$: une longueur h des deux cylindres chargés est incluse dans la surface de Gauss. D'après l'énoncé et la première question, la charge totale est alors nulle, donc le champ aussi.

Donc le champ électrique s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{E}(r < R_1) &= \vec{E}(r > R_2) = \vec{0} \\ \vec{E}(R_1 < r < R_2) &= \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r} \vec{e}_r\end{aligned}$$

Il présente donc deux discontinuités, en $r = R_1$ et $r = R_2$, comme le montre la figure 29.27.

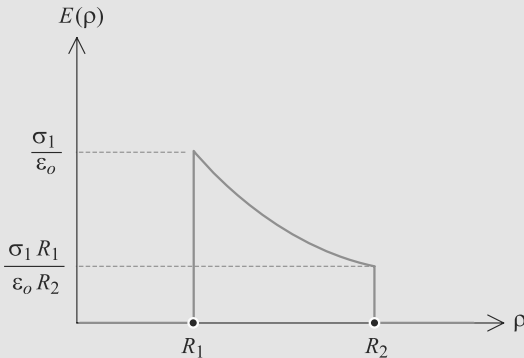


Figure 29.27 Champ rayonné par un condensateur cylindrique.



Vous pouvez vérifier que ces discontinuités sont toutes deux égales à σ/ϵ_0 , comme dans l'exercice 12. Ceci constitue en fait un résultat général que vous verrez en deuxième année.

29.16

Le premier modèle atomique : le modèle de Thomson

Méthodes mises en jeu : n°1a, 1b, 3, 4 et 5.

Malgré les apparences, cet exercice reprend le calcul classique du champ rayonné par une boule homogène.

Vous devez remarquer que la deuxième partie relève plus de la mécanique et adapter votre rédaction en conséquence.

1. a) Il n'y a de charge que dans la sphère de volume r_0 et la répartition est homogène, donc :

$$\begin{aligned}\rho(r < r_0) &= \frac{e}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \\ \rho(r > r_0) &= 0\end{aligned}$$

- b) La distribution est à symétrie sphérique donc $\vec{E}(M) = \vec{E}(r)$ en coordonnées sphériques.

Soit M un point quelconque. Tous les plans contenant O et M sont de symétrie et contiennent $\vec{E}(M)$, donc le champ est selon \vec{e}_r .

Finalement, $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$. c) Cas $r > r_0$. Prenons comme surface de Gauss une sphère de rayon r et de centre O . Alors :

$$\begin{aligned}\phi &= \iiint \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \iiint E(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r \\ \phi &= \iiint E(r) dS = E(r)4\pi r^2 \\ Q_{\text{int}} &= e \\ \Rightarrow E(r) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ \Rightarrow \vec{E}(r > r_0) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{OM}\end{aligned}$$



Reportez-vous aux figures 29.19 et 29.18 car la situation est similaire.

Cas $r < r_0$. Prenons comme surface de Gauss une sphère de rayon r et de centre O . Le calcul du flux est identique, mais celui de la charge intérieure devient :

$$\begin{aligned}Q_{\text{int}} &= \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{er^3}{\epsilon_0 r_0^3} \\ \Rightarrow E(r) &= \frac{er}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \\ \Rightarrow \vec{E}(r < r_0) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \vec{OM}\end{aligned}$$

Le champ est donc continu dans tout l'espace, ce qui était prévisible car il n'y a qu'une distribution volumique. En outre, son expression à l'extérieur de la distribution est formellement identique à celle d'une charge e ponctuelle placée en O .

2. a) Le PFD appliqué à l'électron, qui n'est soumis qu'à l'attraction électrostatique de l'ion, donne :

$$m_e \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = -e \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \overrightarrow{OM}$$

qui est bien l'équation demandée. Par identification :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^3 m_e}}$$

D'où la fréquence propre :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{e^2}{16\pi^3 \epsilon_0 r_0^3 m_e}}$$

- b) Cette dernière expression montre que la fréquence est une fonction décroissante du rayon. Donc la valeur maximale du rayon r_{\max} est donnée par la valeur minimale de la fréquence f_{\min} :

$$r_{\max} = \left(\frac{e^2}{16\pi^3 \epsilon_0 m_e f_{\min}^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 0,31 \text{ nm}$$

Cette valeur numérique surestime largement le rayon habituellement utilisé pour l'atome d'hydrogène, 53 pm. Ce modèle n'est donc pas vraiment fidèle à la réalité.

29.17 Sphère inhomogène

Méthodes mises en jeu : n° 1a, 1b, 3, 4 et 5.

Étudiez l'exercice 12 avant celui-ci.

La distribution étant à symétrie sphérique, vous devez penser au théorème de Gauss. Mais elle est inhomogène, c'est donc sur le calcul de la charge intérieure que vous devez vous attendre à rencontrer des difficultés.

La gestion de cette difficulté a été abordée dans l'exercice 10.

1. La distribution est invariante par rotation autour du point O , centre de la sphère. Donc travaillons en coordonnées sphériques. Cette invariance fait disparaître les dépendances angulaires : $\vec{E}(M) = \vec{E}(r)$.

Soit M un point quelconque. Tous les plans contenant la droite (OM) sont plans de symétrie de la distribution. Donc $\vec{E}(M)$ est dans l'intersection de tous ces plans, qui est la droite (OM) . Donc :

$$\vec{E}(M) = E_r(d) \vec{e}_r$$

car, ici, la distance au point M est notée d .

Appliquons le théorème de Gauss avec, pour surface de Gauss, une sphère de centre O et de rayon d (donc passant par M).



Reportez-vous aux figures 29.19 et 29.18 car la situation est similaire.

Le calcul du flux est le même, que M soit dans la sphère ou à l'extérieur :

$$\begin{aligned} \phi &= \oiint E_r(d) \vec{e}_r \cdot d\vec{S} \vec{e}_r \\ &= E_r(d) \oiint dS \end{aligned}$$

Cette intégrale est la surface de la sphère de Gauss, donc $4\pi d^2$. D'où $\phi = E_r(d) 4\pi d^2$.

Par contre le calcul de la charge intérieure diffère. Découpons la distribution en coquilles sphériques de rayon r et d'épaisseur dr . La charge d'une coquille est donc $dq(r) = \rho(r) 4\pi r^2 dr$. D'où la charge intérieure dans le cas $d < R$:

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \int_0^d dq(r) \\ &= \int_0^d \rho_0 \left(1 - k \frac{r^2}{R^2} \right) 4\pi r^2 dr \\ Q_{\text{int}} &= 4\pi \rho_0 \left(\frac{d^3}{3} - k \frac{d^5}{5R^2} \right) \end{aligned}$$

et le champ dans le cas $d < R$:

$$\begin{aligned} E_r(d) 4\pi d^2 &= \frac{4\pi \rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{d^3}{3} - k \frac{d^5}{5R^2} \right) \\ \Rightarrow E_r(d) &= \frac{\rho_0 d}{3\epsilon_0} \left(1 - \frac{3kd^2}{5R^2} \right) \end{aligned}$$

Dans le cas $d > R$:

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \int_0^R \rho_0 \left(1 - k \frac{r^2}{R^2} \right) 4\pi r^2 dr \\ &= 4\pi \rho_0 \left(\frac{1}{3} - \frac{k}{5} \right) \end{aligned}$$



$Q_{\text{int}}(d > R)$ est tout simplement la charge totale de la sphère. Attention à ne pas intégrer au-delà de R , la distribution s'arrête là !

Le théorème de Gauss donne alors :

$$E_r(d)4\pi d^2 = 4\pi\rho_0\left(\frac{1}{3} - \frac{k}{5}\right)$$

$$\Rightarrow E_r(r) = \frac{\rho_0}{15\varepsilon_0 d^2}(5 - 3k)$$

D'où les expressions vectorielles du champ électrique :

$$\vec{E}(d < R) = \frac{\rho_0 d}{3\varepsilon_0} \left(1 - \frac{3kd^2}{5R^2}\right) \vec{e}_r$$

$$\vec{E}(d > R) = \frac{\rho_0}{15\varepsilon_0 d^2}(5 - 3k) \vec{e}_r$$

2. D'après l'énoncé la condition est à chercher à l'intérieur de la sphère, donc à partir de l'expression pour $d < R$.

$$\frac{dE_r}{dr}(d) = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} \left(1 - \frac{9kd^2}{5R^2}\right)$$

Il y a un extremum si cette dérivée est nulle donc si :

$$k = \frac{5}{9} \left(\frac{R}{d}\right)^2 = 2,22$$

Plan

30.1	Potentiel rayonné par une distribution de charge	472
30.2	Circulation du champ électrique le long d'un contour	476
30.3	Énergie potentielle électrique	477
30.4	Topographie du champ électrique	478
	Synthèse	480
	Tests et exercices	481
	Corrigés des exercices	484

Introduction

Bien que les propriétés du champ électrique définies dans le chapitre précédent soient suffisantes pour étudier tout exercice, elles ne sont pas toujours efficaces d'utilisation. Le potentiel électrique est un outil associé au champ électrique et qui, parfois, permet d'arriver plus vite au résultat.

Prérequis

- Champ électrique
- Gradient
- Circulation d'un vecteur le long d'une courbe

Objectifs

- Définir et calculer le potentiel électrostatique
- Introduire l'énergie potentielle d'une charge dans un champ, l'énergie d'interaction de deux charges ponctuelles
- Définir et reconnaître les caractéristiques des cartes de champ
- Estimer la capacité d'un condensateur plan

30.1 Potentiel rayonné par une distribution de charge

30.1.1 Expressions du potentiel

Le potentiel V est une grandeur scalaire (non vectorielle) définie en tout point de l'espace. Il est défini à une constante additive près. En prenant cette constante nulle, ce qui revient à poser le potentiel nul à une distance infinie de la distribution de charges, il est défini par :

Définition

Le **potentiel électrique rayonné par une distribution** est défini par :

$$\text{Distribution discrète : } V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{P_iM}\|}$$

$$\text{Distribution volumique : } V(M) = \iiint_{P \in V} \frac{\rho(P) dV(P)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|}$$

$$\text{Distribution surfacique : } V(M) = \iint_{P \in S} \frac{\sigma(P) dS(P)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|}$$

$$\text{Distribution linéique : } V(M) = \int_{P \in L} \frac{\lambda(P) dl(P)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|}$$

Le potentiel est homogène à une tension électrique, il est en volt (V).

Si la distribution de charge va jusqu'à l'infini (par exemple un fil infini ou un plan infini), il n'est plus possible de prendre le potentiel nul à l'infini. Il faut alors fixer l'origine des potentiels ailleurs, ce qui revient à ajouter à ces expressions une constante.

La relation entre \vec{E} et V peut être établie sur le cas d'une distribution réduite à une charge ponctuelle, puis généralisée par additivité des champs et des potentiels :

Relation champ-potential électriques :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V)$$



\vec{E} pointe dans la direction des potentiels **décroissants**, à cause du signe $-$.



Cette formule montre que V est défini à une constante additive près. Vous pourrez donc choisir librement l'origine des potentiels sans changer \vec{E} .

Méthode 1 Calculer un potentiel électrique quand \vec{E} est connu

Si le champ électrique est connu, ne dépend qu'une seule coordonnée de M et n'a qu'une seule composante non nulle (cas pas si rare !) la relation $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V)$ se ramène à une simple prise de primitive pour remonter à V .

Sinon, rabattez-vous sur la méthode n°1b, plus lourde mais plus générale.

Exemple d'application

Calculez le potentiel rayonné par une sphère uniformément chargée en volume ($\rho > 0$), en réutilisant l'expression du champ électrique établi dans l'exercice 12.

Solution

La distribution est à symétrie sphérique, donc V aussi : $V(M) = V(r)$ en coordonnées sphériques.

D'après l'expression du gradient en coordonnées sphériques, nous avons donc :

$$\vec{E}(r) = -\frac{dV}{dr}(r) \vec{e}_r$$

La primitive peut être déterminée rapidement dans le cas $r > R$ en prenant le potentiel nul à l'infini :

$$\vec{E}(r > R) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r \Rightarrow V(r > R) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$$

Pour $r < R$, il apparaît une constante d'intégration A :

$$\vec{E}(r < R) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \vec{e}_r \Rightarrow V(r < R) = \frac{-\rho r^2}{6\varepsilon_0} + A$$

A est fixé par la continuité de V en $r = R$. Cela est possible car il n'y a pas de distribution surfacique à cet endroit :

$$V(r = R) = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} = \frac{-\rho R^2}{6\varepsilon_0} + A \Rightarrow A = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$

D'où le potentiel dans tout l'espace :

$$V(r < R) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0} (3R^2 - r^2)$$

$$V(r > R) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$$

Le graphe de ce potentiel est donné figure 30.1.

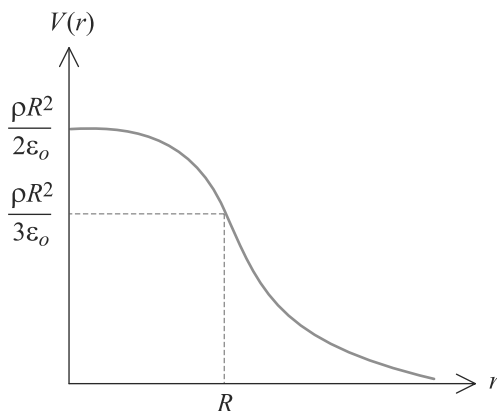


Figure 30.1 Potentiel rayonné par une sphère homogène chargée en volume.

Méthode 2 Calculer le potentiel par méthode intégrale

Si le champ \vec{E} n'est pas connu ou a une expression trop complexe, il faut procéder de manière similaire à la méthode intégrale pour le calcul de \vec{E} . Ce sera tout de même plus simple, car V n'est pas un vecteur.

1. Déterminez une base adaptée au problème.
2. Découpez la distribution en petits éléments, comme vous le feriez pour le calcul intégral de \vec{E} , et calculez le potentiel rayonné par chaque élément au point M étudié.
3. Additionnez (intégrez) ces potentiels pour obtenir le potentiel total rayonné en M .

Quand il n'y a pas de distribution linéique, il est toujours possible de prendre V continu.



Les symétries de la distribution n'ont pas de conséquence directe sur V , puisque V n'est pas un vecteur !

Exemple d'application

Calculez le potentiel rayonné sur son axe Oz par un disque de rayon R uniformément chargé en surface ($\sigma > 0$).

Solution

1. Travaillons en coordonnées cylindriques d'axe Oz . Le potentiel dépend en toute généralité des trois paramètres (ρ, θ, z) mais nous nous restreignons aux points de l'axe Oz . Donc le potentiel ne sera ici fonction que de z .
Le plan du disque est plan de symétrie donc $V(z) = V(-z)$. Prenons un point M tel que $z > 0$.
2. Découpons le disque en couronnes de rayon r et d'épaisseur dr (figure 30.2).

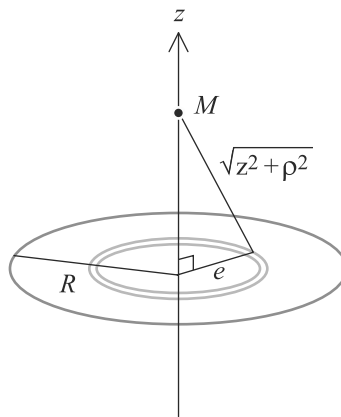


Figure 30.2 Découpage d'un disque en couronnes pour le calcul du potentiel sur l'axe.

3. La charge d'une telle couronne est $dq = \sigma 2\pi r dr$ et tous les points d'une couronne sont à la même distance $\sqrt{r^2 + z^2}$ de M . D'où le potentiel total :

$$\begin{aligned} V(z > 0) &= \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + r^2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - z) \end{aligned}$$

Doù la généralisation pour z quelconque :

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - |z|)$$

30.1.2 Continuité du potentiel et du champ électrique

V et \vec{E} réels sont toujours continus **hors des charges** mais certaines modélisations de distributions de charges font apparaître des discontinuités qu'il faut savoir maîtriser :

- Le champ électrique est discontinu à la traversée d'une surface chargée (exemple : disque chargé). V reste continu.
- \vec{E} et V sont tous les deux discontinus sur une distribution linéique de charges et sur des charges ponctuelles.

30.2 Circulation du champ électrique le long d'un contour

30.2.1 Définition

Soit une courbe Γ reliant un point de départ A et un point d'arrivée B . La circulation de \vec{E} le long de ce **contour** est défini comme :

Définition

Circulation le long d'un contour Γ :

$$C_{A \rightarrow B} = \int_{M \in \Gamma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}(M)$$

La figure 30.3 montre un élément de contour $d\vec{l}(M)$ au voisinage d'un point M , ainsi que le champ électrique $\vec{E}(M)$ régnant à cet endroit. Le produit scalaire de ces deux vecteurs est la circulation élémentaire le long du petit élément de contour.

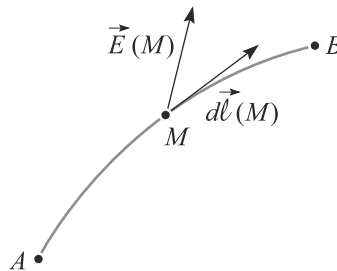


Figure 30.3 Calcul de la circulation le long d'un petit élément de contour.

Si le contour est une courbe fermée, une notation spéciale est utilisée :

$$C = \oint_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

30.2.2 Circulation et différence de potentiel

Toute fonction scalaire obéit à la relation $\overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot d\vec{l} = dV$ (voir fiche méthode 4). L'intégrale de cette relation entre deux points A et B :

Relation circulation-tension :

$$C_{A \rightarrow B} = V(A) - V(B)$$

donne l'interprétation physique de la circulation : c'est la **différence de potentiel**, ou tension, entre A et B , notion qui vous est familière en électricité !



Dans le vocabulaire de l'électromagnétisme, une courbe est appelée un contour.



Cette expression est analogue à celle du travail le long d'une trajectoire en mécanique, voir chapitre 11.



Ne confondez pas la circulation, définie sur un contour (donc écrite avec une intégrale simple), et le flux, défini sur une surface (donc écrit avec une intégrale double).



Vous verrez en deuxième année que cette propriété n'est pas générale.

Méthode 3 calculer la circulation du champ électrique

Il y a deux manières de calculer la circulation de \vec{E} entre deux points A et B le long d'un contour :

- Si V est connu, le résultat est directement $C = -\Delta V$ puisque \vec{E} est un champ de gradient.
- Sinon, la méthode est similaire à celle du calcul d'un flux. Après avoir simplifié l'expression de \vec{E} par les symétries et invariances, découpez votre contour en petits tronçons $d\vec{l}$ que vous exprimerez dans la base choisie. Puis calculez le produit scalaire $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ et intégrez.

Cette méthode est typiquement utile pour calculer V .

Exemple d'application

Reprenez la sphère étudiée de la méthode n°1a. Calculez la circulation de \vec{E} le long d'une ligne Γ allant de l'infini jusqu'à un point situé à la distance $a > R$ du centre.

Solution

Le champ électrique est connu, donc le calcul est direct.

$$\begin{aligned} C &= \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{+\infty}^a \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot dr \vec{e}_r \\ C &= -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 a} \end{aligned}$$

Remarquez que ceci est égal $-V(a)$. Cela est cohérent avec la propriété $C = -\Delta V$ et V pris nul à l'infini.

30.2.3

Caractère conservatif de la circulation

La circulation ne dépend pas de la courbe allant de A à B : le champ électrique est dit à **circulation conservative**.

Hors du cas statique, cette propriété est perdue, comme vous le verrez en seconde année.



30.3 Énergie potentielle électrique

30.3.1 Définition

Une charge électrique q placée dans un champ électrique \vec{E} subit une force :

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

La relation entre \vec{E} et V permet alors d'écrire $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$ avec :



Tout comme pour V , si la distribution s'étend jusqu'à l'infini, ce choix n'est plus possible.



Il est possible de montrer en mécanique que toute force conservative peut s'écrire $\vec{F} = -\text{grad}(E_p)$.



Ce n'est donc pas directement la somme de l'énergie potentielle dont dérive $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ et de celle dont dérive $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$, car ce serait compter deux fois la même chose (troisième loi de Newton).

Définition

Énergie potentielle électrique

$$E_p = qV + \text{cst}$$

La constante d'intégration est souvent prise nulle, ce qui revient à fixer l'origine des énergies potentielles à l'infini.

30.3.2 Énergie potentielle propre d'un système isolé de deux charges

Considérons un système isolé de deux charges ponctuelles q_1 et q_2 immobiles. L'énergie potentielle du système est l'énergie minimale que doit fournir un opérateur (fictif) pour construire le système. Un calcul détaillé montre en effet que :

$$E_p = \frac{1}{2}(q_1 V_1 + q_2 V_2)$$

30.4 Topographie du champ électrique

30.4.1 Lignes de champ

Une ligne de champ est une courbe admettant, en chaque point, le champ \vec{E} pour tangente (figure 30.4).

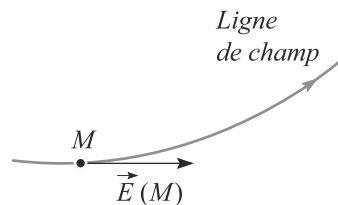


Figure 30.4 En un point M , $\vec{E}(M)$ est tangent à sa ligne de champ.

- Deux lignes de champ ne peuvent pas se rencontrer en un point vide de charge. Sinon, elles admettraient deux tangentes non parallèles, donc il y aurait deux directions distinctes pour le même \vec{E} en ce point. Sauf bien sûr si \vec{E} y est nul.
- Par contre, les lignes de champs **convergent** vers un point occupé par une charge ponctuelle négative et **divergent** depuis un point occupé par une charge ponctuelle positive.
- Dans une région de l'espace **vide de charge**, plus les lignes de champ sont serrées, plus le champ électrique est intense.

30.4.2 Équipotentiellles



Rappel : \vec{E} est dirigé suivant les potentiels décroissants.

Une surface définie par $V = \text{cst}$ s'appelle une **équipotentielle**. Par exemple, les équipotentiellles d'une charge ponctuelle sont des sphères.

- Le potentiel est maximal en un point d'où divergent les lignes de champ, donc d'où se trouve une charge positive. En effet, prenons une surface de Gauss assez petite pour ne contenir que la charge positive. Le flux à travers cette surface est positif car $Q_{\text{int}} > 0$: le champ électrique est donc sortant. Comme il est dirigé vers les potentiels décroissants, la charge est sur un maximum (figure 30.5).

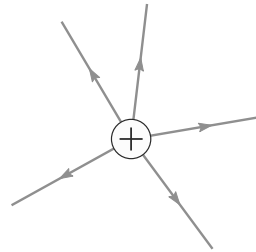


Figure 30.5 Topographie du champ électrique autour d'une charge positive.

- De même, le potentiel est minimal sur une charge négative (figure 30.6).

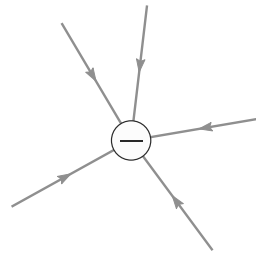


Figure 30.6 Topographie du champ électrique autour d'une charge négative.

- Donc le potentiel ne peut donc pas admettre d'extremum en un point où ne se trouve aucune charge.
- Les lignes de champ sont orthogonales en tout point aux équipotentiellles : $\vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV = 0$ sur une équipotentielle (figure 30.7).

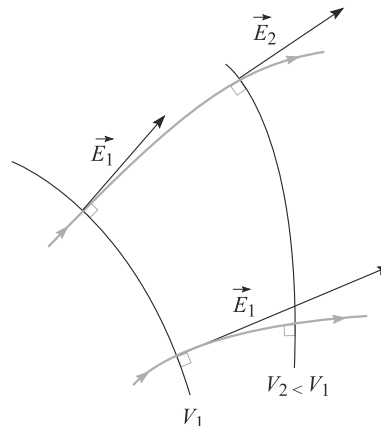


Figure 30.7 Les lignes de champ sont normales aux équipotentiellles.

La figure 30.8 montre un exemple de carte du champ électrique rayonné par trois fils rectilignes parallèles identiques à la figure. Remarquez que les lignes de champ sont orientées (dans le sens de \vec{E}) mais pas les équipotentiels.

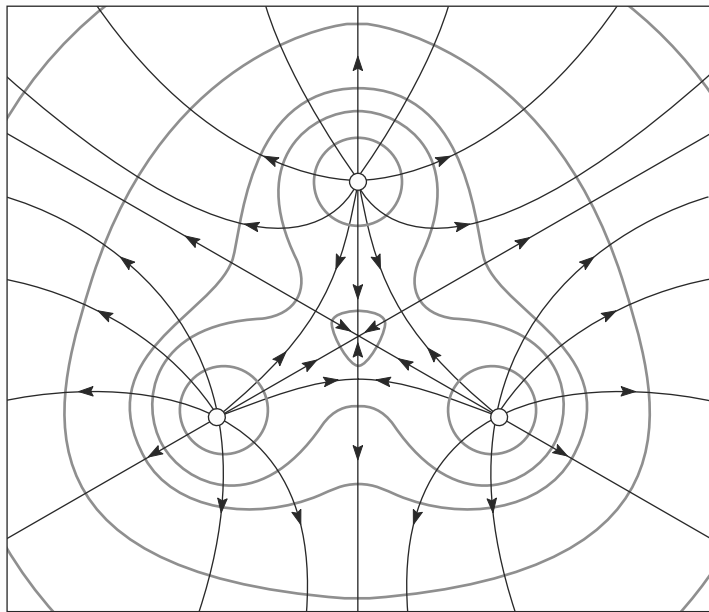


Figure 30.8 Exemple de topographie du champ électrique.

Synthèse

Savoirs

- Potentiel électrique d'une charge ponctuelle, d'une distribution discrète ou continue
- Relation entre champ et potentiel électriques
- Continuité du potentiel
- Énergie potentielle d'une charge dans un champ extérieur

Savoir-faire

- Calculer un potentiel à partir d'un champ (par circulation) et inversement
- Calculer un potentiel par méthode intégrale
- Analyser une carte de champ

Mots-clés

- Potentiel électrique,
- circulation,
- énergie potentielle,
- ligne de champ,
- surface équipotentielle.

Tests de connaissances

- 30.1 Le potentiel est une grandeur scalaire.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 30.2 Une zone de champ électrique nul est équipotentielle.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 30.3 Le potentiel électrique est homogène à une charge divisée par ϵ_0 et une distance au carré.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 30.4 L'unité du champ électrique est le volt par mètre.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 30.5 Les lignes de champ électrique se referment sur elles-mêmes.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 30.6 Il n'existe aucun croisement de lignes de champ électrique.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 30.7 Dans le vide, lignes de champ parallèles équivalent à champ uniforme.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 30.8 Les points de potentiel électrique nul sont dotés de propriétés particulières.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

Dans un énoncé de concours, les expressions du gradient dans les différentes bases seraient rappelées. Dans ce livre, vous les trouverez fiche méthode 3.

30.9 La sphère dans tous ces états, suite

Calculez le potentiel rayonné par une sphère uniformément chargée en surface. En particulier, gardez un IJil sur les propriétés de continuité du champ et du potentiel. Vous pouvez réutiliser les résultats de l'exercice 30.12 page 460.

30.10 Distribution s'étendant jusqu'à l'infini

Soit \mathcal{P} un plan uniformément chargé en surface. L'objectif est de calculer le potentiel qu'il rayonne dans tout l'espace.

Vous pourrez réutiliser les résultats établis dans l'exercice 30.11 page 460.

1. Vous prendrez l'origine des potentiels sur le plan. Pourquoi cette indication est-elle nécessaire ?
2. Calculez le potentiel rayonné par ce plan. Commentez.

30.11 Cylindre chargé en volume (suite)

On reprend l'exercice 30.13 du chapitre 30 **Cylindre chargé en volume**. Le champ électrostatique rayonné était :

$$\text{si } r < R, E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0};$$

$$\text{si } r > R, E(r) = \frac{\rho R^2}{2r\epsilon_0}.$$

1. Déterminer le potentiel électrostatique associé au champ rayonné. On prendra l'origine du potentiel sur l'axe Oz. Aurait-on pu la prendre à l'infini ?
2. Tracer $V(r)$.

30.12 Modélisation du condensateur plan

Soit deux plans infinis parallèles d'axe normal Oz et chargés uniformément en surface. Le premier, d'équation $z = 0$, a une densité de charge $\sigma > 0$, le second, en $z = e$, une densité $-\sigma$ (figure 30.9).

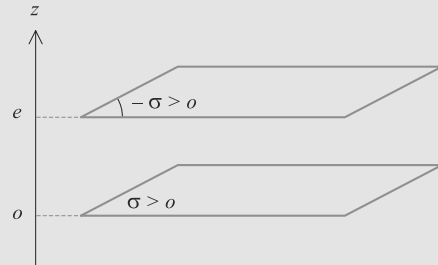


Figure 30.9 Condensateur plan.

Vous pourrez réutiliser les résultats de l'exercice 11 page 460.

1. Établissez l'expression du potentiel à l'intérieur du condensateur. Vous le prendrez nul sur la plaque négative.
2. Déduisez-en U , la différence de potentiel entre l'armature positive et l'armature négative.
3. Les deux plans ne sont pas infinis, mais ont une surface S grande devant e^2 , de sorte que les résultats précédents restent valables (sauf au voisinage des bords, ce que nous négligerons).

Pour un tel dispositif, on définit la **capacité** comme le rapport Q/C , où $Q > 0$ est la charge totale portée par l'armature positive et C la circulation du champ électrique de l'armature positive à l'armature négative. Exprimez C en fonction de S et e .

Exercices d'approfondissement

30.13 Condensateur cylindrique, suite (D'après ESEM.)

Reprenez le condensateur cylindrique de l'exercice 15 page 461. Vous noterez l la longueur de ce condensateur, en supposant que $l \gg R_1, R_2$.

Le potentiel de l'armature intérieure est noté V_1 et celui de l'armature extérieure V_2 .

1. Calculez la différence de potentiel $V_1 - V_2$ en fonction de ϵ_0 , l , R_1 , R_2 et Q_1 la charge portée par l'armature intérieure.
2. Déduisez-en l'expression de la capacité du condensateur.
3. Déduisez-en la capacité par unité de longueur du condensateur, notée Γ . Application numérique avec $R_1 = 1$ cm et $R_2 = 5$ cm.

30.14 Potentiel de Yukawa de l'atome d'hydrogène (D'après ENAC.)

Une modélisation parfois utilisée du potentiel rayonné par un atome d'hydrogène est le potentiel de Yukawa. En coordonnées sphériques, il s'exprime par :

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/a_0}$$

où $a_0 \approx 53$ pm est une constante caractéristique de l'hydrogène. Nous voulons déterminer la distribution de charge qui rayonne un tel potentiel. L'atome est donc supposé à symétrie sphérique et centré sur un point O .



Le potentiel de Yukawa a aussi joué un rôle historiquement plus proche (dès les années 1930), dans l'étude des forces qui s'exercent à l'intérieur du noyau des atomes.

1. Calculez le champ électrique rayonné dans tout l'espace.
2. Calculez, par le théorème de Gauss, la charge $q(r)$ contenue dans une sphère de centre O et de rayon r .
3. Déduisez-en $q(r \rightarrow +\infty)$ et $q(r \rightarrow 0)$. Interprétez.
4. En utilisant deux fois le théorème de Gauss, sur une sphère de rayon r puis sur une sphère de rayon $r + dr$, calculez la charge électrique $dq(r)$ contenue dans une coquille sphérique de rayon r et d'épaisseur dr .
5. Déduisez-en qu'il existe, en plus de la charge concentrée en O , une distribution volumique $\rho(r)$ non uniforme donnée par :

$$\rho(r) = \frac{\epsilon_0}{r^2} \frac{d(r^2 E)}{dr}$$

6. Montrez qu'il existe une coquille sphérique de rayon $r = r_0$ contenant le maximum de charge électrique. Interprétation ?

30.15 Hexapôle électrostatique (D'après X)

On étudie la possibilité de guider le mouvement de molécules polaires avec un système électrostatique formé de six électrodes cylindriques et parallèles (C_i , $i = 1, 2, \dots, 6$) disposées aux sommets d'un hexagone régulier auquel elles sont orthogonales (figure 30.10).

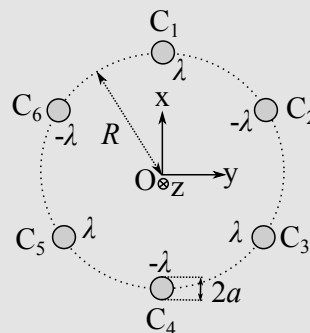


Figure 30.10 Configuration spatiale de l'hexapôle électrostatique.

Leur rayon a est très inférieur au côté R de l'hexagone, $a \ll R$. Elles portent des densités linéiques de charge égales alternativement à λ ($\lambda > 0$) pour les électrodes impaires et $-\lambda$ pour les paires ; on considérera que ces charges sont fixes et uniformément réparties à leurs surfaces. On négligera les effets d'extrémité, l'ensemble pouvant être considéré comme invariant par translation selon l'axe central Oz du système. On utilisera un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) avec comme repère orthonormé $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

1. Analyse des symétries
 - a) Quelles conclusions sur le champ \vec{E} et le potentiel électrostatique V tire-t-on de l'invariance par translation du système ?
 - b) Considérer la symétrie par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe. Quelle propriété du champ électrique \vec{E} en déduit-on ?
 - c) Même question pour l'un des trois plans passant par l'axe central et les axes de deux électrodes opposées.
 - d) Montrer que les trois plans passant par l'axe et à égale distance des électrodes sont équipotentiels.
 - e) Quelle est la période angulaire d'invariance du système par rotation autour de l'axe Oz ?

2. Soit une électrode de densité linéique de charge λ . Déterminer le champ électrostatique créé par cette électrode en un point P à l'aide de la distance D de ce point à son axe ($D > a$). En déduire une expression du potentiel électrostatique correspondant.
3. On considère maintenant l'ensemble des électrodes du système. Montrer que, en le choisissant nul sur l'axe central, le potentiel électrostatique en un point P est donné par l'expression :

$$V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5}\right)$$

où D_i désigne la distance de P à l'axe de l'électrode C_i .

4. Pour expliciter le potentiel en fonction des coordonnées de P , il est commode de considérer le plan xOy comme plan de représentation des nombres complexes. Le point P y est repéré par $Z = x + iy = r \cdot \exp(i\theta)$, les axes des électrodes impaires le sont par $(R, jR, j^2 R)$ et

ceux des électrodes paires par $(-R, -jR, -j^2 R)$, avec $j = \exp(i2\pi/3)$ racine cubique de l'unité.

Montrer que :

$$\frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5} = \left| \frac{R^3 + Z^3}{R^3 - Z^3} \right|$$

On s'intéresse à la partie centrale $r \ll R$. Montrer que le potentiel électrostatique y est donné par :

$$V(r, \theta, z) \approx \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{r}{R}\right)^3 \cos(3\theta)$$

Cette expression respecte-t-elle les symétries étudiées en question 1. ?

5. Déterminer les potentiels V_0 des électrodes impaires dans l'hypothèse $a \ll R$ en fonction de R , a et λ . Quel est celui des électrodes paires ?

30.1

Vrai, c'est son avantage de calcul par rapport au champ.

30.2

Vrai, c'est le cas d'un conducteur en équilibre électrique.

30.3

Faux : c'est la dimension d'un champ qui est donnée là. Pour un potentiel, il faut diviser par une distance (pas une distance au carré).

30.4

Vrai, c'est en effet l'unité d'usage.

30.5

Faux. Surtout pas, les lignes de champ indiquent les potentiels décroissants : elles ne se referment pas.

30.6

Faux. Les lignes de champ électrique peuvent se croiser mais uniquement en des points de champ nul.

30.7

Vrai, on l'obtient en utilisant le théorème de Gauss sur un tube de champ.

30.8

Faux, le potentiel étant défini à une constante près, le choix de $V = 0$ est arbitraire.

30.9 La sphère dans tous ces états, suite

Méthode mise en jeu : n°1a.

Cet exercice vérifie simplement votre connaissance des définitions et votre capacité à exploiter les formules du gradient.

Le potentiel hérite de la symétrie sphérique de la distribution : $V(M) = V(r)$. D'après l'expression du gradient en coordonnées sphériques, nous avons donc :

$$\vec{E}(r) = -\frac{dV}{dr}(r) \vec{e}_r$$

D'où :

$$\begin{aligned} \vec{E}(r > R) &= \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \Rightarrow V(r > R) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} \\ \vec{E}(r < R) &= \vec{0} \Rightarrow V(r < R) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

En $r = R$, le champ est discontinu mais il est encore possible de prendre le potentiel continu (figure 30.11).

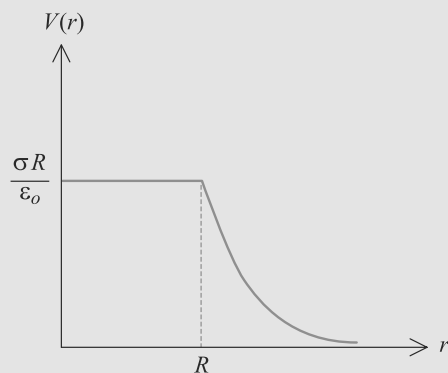


Figure 30.11 Potentiel rayonné par une sphère homogène chargée en surface.

30.10 Distribution s'étendant jusqu'à l'infini

Méthode mise en jeu : n°1a.

Cet exercice est très proche du précédent, avec une autre géométrie.

1. Le plan s'étend jusqu'à l'infini, il est donc impossible de choisir l'origine des potentiels à l'infini. Il faut donc se donner cette origine ailleurs.
2. Les symétries imposent $V(z)$ donc en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E}(z) = -\frac{dV}{dz}(z) \vec{e}_z$$

D'où le potentiel :

$$\begin{aligned} \vec{E}(z > 0) &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \Rightarrow V(z > 0) = -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \\ \vec{E}(z < 0) &= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \Rightarrow V(z < 0) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

Le champ est discontinu sur le plan, mais il est encore possible de prendre le potentiel continu (figure 30.12).

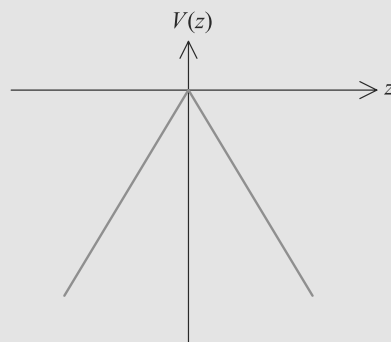


Figure 30.12 Potentiel rayonné par un plan chargé.

30.11 Cylindre chargé en volume (suite)

Méthode mise en jeu : n° 1.

Cet exercice d'application directe du cours permet, comme le précédent, de faire le point sur l'acquisition des méthodes.

1. La relation générale qu'on utilise est $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ qui se résume ici à $E(r) = -\frac{dV}{dr}$ car le champ n'a qu'une composante radiale ne dépendant que de r . On prend donc l'opposé de la primitive de $E(r)$:

$$\text{si } r < R, V(r) = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} + A;$$

$$\text{si } r > R, V(r) = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln(r) + B.$$

L'origine choisie concerne la première expression : $A = 0$ et par continuité de V ,

$$V(R) = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln(R) + B = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}.$$

On en déduit :

$$B = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln(R)$$

Finalement, on obtient :

$$\text{si } r < R, V(r) = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0};$$

$$\text{si } r > R, V(r) = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R}\right) - \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}.$$

On ne peut prendre l'origine du potentiel à l'infini dans ce problème : des charges s'y trouvent. En témoigne l'expression trouvée pour $r > R$ qui diverge à l'infini.

2. On trace alors $V(r)$ (figure 30.13) :

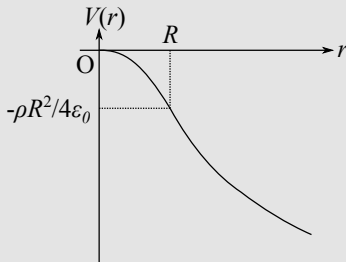


Figure 30.13 Potentiel en fonction de r .

On constate la continuité mathématique de la pente en R : elle est liée à la continuité de $E(r)$ (absence de distribution surfacique en $r = R$).

30.12 Modélisation du condensateur plan

Méthodes mises en jeu : n° 1a, 2.

Cet exercice reprend des résultats vus en cours. Assurez-vous donc que vous savez le faire efficacement.

1. Le potentiel hérite des invariances de la distribution et ne dépend que de z : $V(M) = V(z)$. D'après l'expression du gradient en cartésiennes :

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dz} \vec{e}_z$$

Le champ étant nul à l'extérieur du condensateur, le potentiel y est constant. D'après les conditions de l'énoncé, il est nul pour $z > e$.

L'expression du champ à l'intérieur du condensateur est déjà connue, d'où :

$$\frac{dV}{dz} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow V(z) = -\frac{\sigma z}{\varepsilon_0} + A$$

La constante A est fixée par la condition $V(e) = 0$:

$$V(z) = \frac{\sigma(e-z)}{\varepsilon_0}$$

Le potentiel pour $z < 0$ s'en déduit par continuité. D'où la figure 30.14.

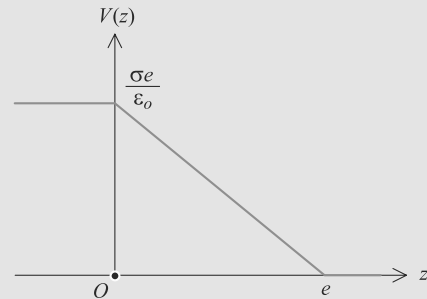


Figure 30.14 Potentiel rayonné par un condensateur plan.

2. $U = V(0) - V(e) = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}.$

3. Par définition, la circulation de \vec{E} d'une armature à l'autre est :

$$C = \int_0^e \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^e \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_x \cdot dx \vec{e}_x = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}$$

Nous retrouvons $C = U$, ce qui est une propriété fondamentale de la circulation. Ensuite, $Q = \sigma S$ conduit à :

$$C = \frac{Qe}{S\varepsilon_0} \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

30.13 Condensateur cylindrique, suite

Méthodes mises en jeu : n° 1a, 2.

Cet exercice teste surtout votre connaissance des définitions et vérifie que vous avez fait le lien entre le potentiel défini en cours d'électromagnétisme et celui exploité en électricité (c'est le même !)

1. Par définition, la différence de potentiel $V_1 - V_2$ est reliée à la circulation du champ électrique de l'armature 2 à l'armature 1 :

$$V_1 - V_2 = - \int_{\text{armature 2}}^{\text{armature 1}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

N'importe quel contour allant de l'armature 2 à l'armature 1 convient, puisque \vec{E} est à circulation conservative. Prenons donc un segment porté par le rayon des cylindres. Alors $d\vec{l} = d\rho \vec{e}_\rho$. D'où :

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= - \int_{R_2}^{R_1} \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0 \rho} \vec{e}_\rho \cdot d\rho \vec{e}_\rho \\ &= - \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \int_{R_2}^{R_1} \frac{d\rho}{\rho} \\ V_1 - V_2 &= \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \end{aligned}$$

La charge Q_1 vaut $Q_1 = \sigma_1 2\pi R_1 l$ donc :

$$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{2\pi \varepsilon_0 l} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

2. Par définition, la capacité est le rapport :

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi \varepsilon_0 l}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}$$

3. Donc la capacité linéique vaut $\Gamma = C/l$:

$$\Gamma = \frac{2\pi \varepsilon_0}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)} = 34,6 \text{ pF.m}^{-1}$$

30.14 Potentiel de Yukawa de l'atome d'hydrogène

Les premières questions sont faciles si vous appliquez rigoureusement les méthodes de cours, mais les deux dernières questions sont plus techniques. N'oubliez pas la physique de l'exercice : vous étudiez l'atome d'hydrogène, pour lequel vous savez bien qu'il y a une charge négative (l'électron) qui s'étale dans le volume autour du noyau (quasi ponctuel) sous forme de couches.

1. La relation entre champ et potentiel est ici :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= - \frac{dV}{dr} \vec{e}_r \\ \Rightarrow \vec{E} &= \frac{e}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{r}{a_0} \right) e^{-r/a_0} \vec{e}_r \end{aligned}$$

2. Un petit élément de surface de la sphère est de la forme $d\vec{S} = dS \vec{e}_r$ et \vec{E} est radial de la forme $E(r) \vec{e}_r$. D'où le flux :

$$\begin{aligned} \phi &= \oiint E(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r \\ &= E(r) \oiint dS \\ \phi &= E(r) 4\pi r^2 \end{aligned}$$

D'où le théorème de Gauss :

$$\begin{aligned} E(r) 4\pi r^2 &= \frac{q(r)}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow q(r) &= e \left(1 + \frac{r}{a_0} \right) e^{-r/a_0} \end{aligned}$$

3. Pour $r \rightarrow 0$, il vient $q \rightarrow e$: il y a donc, concentrée en O , une charge ponctuelle e . C'est le noyau de l'atome d'hydrogène. Pour $r \rightarrow +\infty$, $q \rightarrow 0$: la charge électrique globale de l'atome est nulle. Il doit donc exister dans l'espace autour du noyau une charge $-q$ qui compense celle du noyau.
4. Le flux à travers la sphère de rayon r a déjà été calculé :

$$\phi(r) = E(r) S(r)$$

où $S(r) = 4\pi r^2$ est la surface de la sphère. La charge contenue dans cette sphère est $q(r) = \varepsilon_0 \phi(r)$, déjà calculée aussi.

Le flux à travers la sphère de rayon $r + dr$ s'en déduit :

$$\phi(r + dr) = E(r + dr) S(r + dr)$$

La charge contenue dans cette sphère est $q(r + dr)$. D'où :

$$dq(r) = q(r + dr) - q(r) = \varepsilon_0 (\phi(r + dr) - \phi(r))$$

Cela se ramène à un développement limité au premier ordre en dr :

$$dq(r) = \varepsilon_0 \frac{d\phi}{dr}(r) dr = \varepsilon_0 \frac{d(ES)}{dr}(r) dr$$

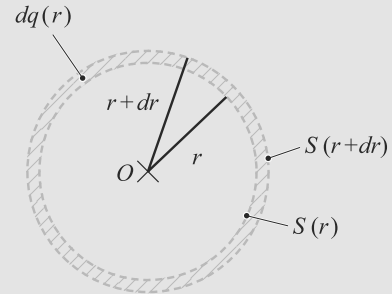


Figure 30.15 Découpage du volume en coquilles sphériques minces.

5. Soit $\rho(r)$ la densité volumique de charge dans la coquille sphérique délimitée par ces deux sphères (figure 30.15). Elle est reliée à la charge contenue dans cette coquille par :

$$dq(r) = \rho(r) S(r) dr = \rho(r) 4\pi r^2 dr$$

D'où :

$$\begin{aligned} \rho(r) 4\pi r^2 dr &= \varepsilon_0 \frac{d(E 4\pi r^2)}{dr}(r) dr \\ \Rightarrow \rho(r) &= \frac{\varepsilon_0}{r^2} \frac{d(r^2 E)}{dr}(r) \end{aligned}$$

6. Sachant que l'électron se trouve dans une couche, sa charge électrique doit apparaître comme largement concentrée à une distance particulière du noyau. Il faut donc chercher la coquille sphérique contenant la plus grande charge électrique $dq(r)$. La valeur de r correspondante est donc trouvée en dérivant dq/dr .

$dq/dr = \rho 4\pi r^2$ conduit à :

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dr}(r) &= 4\pi\epsilon_0 \frac{d(r^2 E)}{dr} \\ &= -e \frac{r}{a_0^2} e^{r/a_0} \\ \Rightarrow \frac{d^2 q}{dr^2}(r) &= -\frac{1}{a_0^2} \left(1 - \frac{r}{a_0}\right) e^{r/a_0}\end{aligned}$$

L'annulation de cette dérivée donne immédiatement $r_0 = a_0$. L'essentiel de la charge $-e$ est donc concentré au voisinage de l'orbite $r = a_0$. C'est là que se trouve l'électron dans son état fondamental et cela correspond donc au « rayon classique » de l'atome d'hydrogène.

30.15

Hexapôle électrostatique

Méthode mise en jeu : n° 1.

Ce vaste exercice centré sur le potentiel d'un dispositif particulier permet d'abord de reprendre les méthodes classiques sur un cas simple. Les calculs finals sont plus délicats et il faut les réaliser avec confiance : le résultat est donné et doit permettre de se rassurer au fil du calcul.

1. Analyse des symétries

- Si la distribution de charge est invariante par translation suivant Oz , les composantes du champ électrostatique comme le potentiel ne dépendent pas de la variable z .
- La distribution de charges étant symétrique par rapport au plan Mxy , le champ $\vec{E}(M)$ est inclus dans ce plan : la composante E_z est donc nulle.
- Puisque les trois plans passant par l'axe central et les axes de deux électrodes opposées sont des plans de symétrie (figure 30.16) pour la distribution de charges, ils le sont aussi pour le champ. Le champ est donc radial sur ces plans.

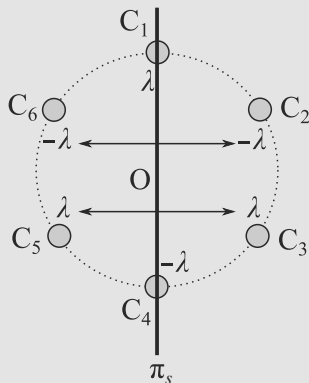


Figure 30.16 Exemple de plan de symétrie.

- d) Les trois plans passant par l'axe et à égale distance des électrodes sont des plans d'antisymétrie pour la distribution de charge (figure 30.17). Le champ électrostatique leur est donc orthogonal à ces endroits. Les équipotentielles étant par nature orthogonales au champ \vec{E} , on en déduit que ces plans sont équipotentiels.

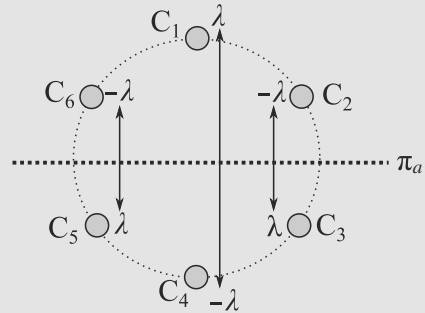


Figure 30.17 Exemple de plan d'antisymétrie.

- e) La rotation de plus petit angle qui laisse la distribution invariante est celle d'angle $2\pi/3$ soit 120° . On passe alors d'une électrode à la suivante de même signe.

2. Le plan contenant l'axe du cylindre et un point M quelconque de l'espace est plan de symétrie pour la distribution, le plan orthogonal à l'axe et passant par M aussi : le champ appartient à l'intersection de ces plans et donc $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e}_D$ en utilisant les coordonnées polaires locales.

Une translation suivant l'axe Oz laisse la distribution invariante et donc les composantes cylindriques du champ aussi : $\frac{\partial E(M)}{\partial z} = 0$. De même, une rotation autour de l'axe Oz d'angle θ laisse la distribution invariante : $\frac{\partial E(M)}{\partial \theta} = 0$.

On en déduit que $\vec{E}(M) = E(D)\vec{e}_D$.

On va utiliser le théorème de Gauss sur le cylindre (S) de hauteur h , de rayon D et d'axe celui du cylindre (figure 30.18) :

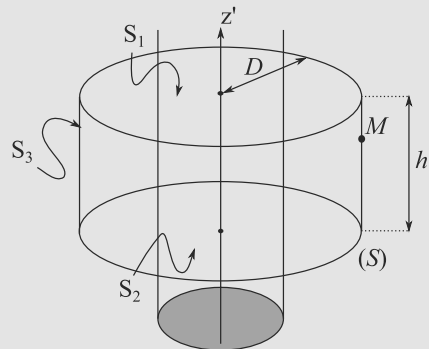


Figure 30.18 Cylindre de Gauss.

Les surfaces S_1 et S_2 ont des vecteurs dirigés selon l'axe et donc le produit scalaire $\vec{E}(M) \cdot d\vec{S}$ est nul sur ces deux surfaces : il n'y a de flux sortant que sur la surface latérale S_3 où le vecteur surface sortant est orienté suivant \vec{e}_D :

$$\begin{aligned} \oint_{(S)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_3} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_{S_3} E(D) \vec{e}_D dS \vec{e}_D = E(D) \iint_{S_3} dS \end{aligned}$$

Le théorème de Gauss appliqué à cette surface donne alors :

Pour $a < D$, $E(D)2\pi Dh = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$ et donc

$$\vec{E} = E(D)\vec{e}_D = \frac{\lambda}{2\pi D\epsilon_0} \vec{e}_D. \text{ Comme } \vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V(D)),$$

$$E(D) = \frac{\lambda}{2\pi D\epsilon_0} = -\frac{dV}{dD} \text{ et on en déduit :}$$

$$V(D) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{D}{D_0}\right)$$

en prenant l'origine des potentiels pour $D = D_0$.

3. Par superposition, on somme tous ces potentiels pour obtenir le potentiel total. En P , il a donc comme expression :

$$V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5}\right) + V(O).$$

Sur l'axe, où on place l'origine des potentiels, les D_i sont tous égaux. Et donc $V(O)$ est nul. On a donc bien

$$V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5}\right).$$

4. Dans le plan complexe, on a : $D_1 = |R - \underline{Z}|$, $D_3 = |jR - \underline{Z}|$, $D_5 = |j^2 R - \underline{Z}|$ pour les électrodes positives et $D_2 = |-j^2 R - \underline{Z}|$, $D_4 = |-R - \underline{Z}|$, $D_6 = |-jR - \underline{Z}|$ pour les électrodes négatives (figure 30.19).

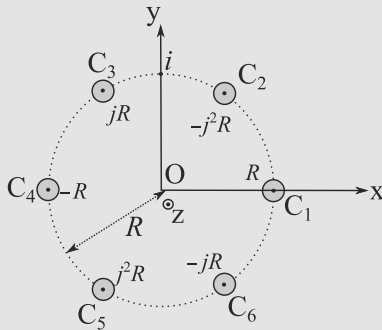


Figure 30.19 Électrodes représentées dans le plan complexe.

On en déduit $D_1 D_3 D_5 = |(R - \underline{Z})(jR - \underline{Z})(j^2 R - \underline{Z})|$. En développant, on trouve :

$$D_1 D_3 D_5 = |R^3 - \underline{Z}^3 - (j + j^2 + j^3)R^2 \underline{Z} + (j^2 + j + 1)R \underline{Z}^2|$$

Comme $j^2 + j + 1 = 0$, il ne reste plus que $D_1 D_3 D_5 = |R^3 - \underline{Z}^3|$. Pour obtenir $D_2 D_4 D_6$, il suffit alors de remplacer R par $-R$ dans l'expression précédente : $D_2 D_4 D_6 = |R^3 + \underline{Z}^3|$ en tenant compte du module. On retrouve donc bien l'expression attendue :

$$\frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5} = \left| \frac{R^3 + \underline{Z}^3}{R^3 - \underline{Z}^3} \right|$$

On effectue alors un DL basé sur le fait que $r < R$:

$$\frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5} = \left| \frac{1 + \frac{\underline{Z}^3}{R^3}}{1 - \frac{\underline{Z}^3}{R^3}} \right| \approx \left| 1 + 2 \frac{\underline{Z}^3}{R^3} \right|. \text{ On a alors :}$$

$$1 + 2 \frac{\underline{Z}^3}{R^3} = (1 + 2 \frac{r^3}{R^3} \cos(3\theta)) + 2i \frac{r^3}{R^3} \sin(3\theta)$$

et donc

$$\left| 1 + 2 \frac{\underline{Z}^3}{R^3} \right| = [(1 + 2 \frac{r^3}{R^3} \cos(3\theta))^2 + 4 \frac{r^6}{R^6} \sin^2(3\theta)]^{1/2}.$$

On conserve le terme d'ordre le plus bas (autre celui d'ordre 0) : c'est le terme d'ordre 3 et donc :

$$\left| 1 + 2 \frac{\underline{Z}^3}{R^3} \right| \approx [1 + 4 \frac{r^3}{R^3} \cos(3\theta)]^{1/2} \approx 1 + 2 \frac{r^3}{R^3} \cos(3\theta).$$

Le développement du \ln donne alors :

$$V(r, \theta, z) \approx \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{r}{R}\right)^3 \cos(3\theta)$$

Cette expression respecte les symétries vue en question 1 : le potentiel est indépendant de z , $2\pi/3$ -périodique, pair et comportant des équipotentielles nulles en $\pi/6, \pi/2, \dots$

5. Prenons l'exemple de l'électrode 1 :

$$D_1 = a, D_3 = D_5 = \sqrt{\left(\frac{3}{2}R\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2} = \sqrt{3}R.$$

$$D_2 = D_6 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}R\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2} = R \text{ et } D_4 = 2R. \text{ On reporte dans l'expression du 3. :}$$

$$V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a3R^2}{R^2 2R}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{3a}{2R}\right).$$

Pour les électrodes paires, les signes des potentiels qu'on somme sont juste permutés et donc ces électrodes sont au potentiel $-V_0$.

Plan

Synthèse	490
Corrigés des exercices	493

Introduction

Comme nous l'avons déjà fait en mécanique chapitre 20, il y a une analogie formelle entre force de Coulomb et force de Newton, via le coefficient k qui vaut $k = -q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0$ et $k = Gm_1 m_2$ respectivement. Il est alors possible de refaire tous les calculs menés sur le champ électrique avec le remplacement formel :

$$q \leftrightarrow m \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow -G$$

Prérequis

- Les résultats sur le potentiel et le champ électrostatique
- La force de gravitation

Objectifs

- Développer l'analogie entre électrostatique et gravitation
- Calculer des champs de gravitation par théorème de Gauss ou méthode intégrale
- Montrer l'équivalence du champ extérieur d'une distribution à symétrie sphérique à celui obtenu avec toute la masse au centre

- Définissons un **champ gravitationnel**, additif, rayonné par des **distributions de masse** :

Distribution ponctuelle :

$$\vec{G}(M) = \sum_i -G \frac{m_i}{\|\vec{P_i M}\|^3} \vec{P_i M}$$

Distribution volumique :

$$\vec{G}(M) = \iiint_{P \in V} -G \frac{\rho(P) dV(P)}{\|\vec{P M}\|^3} \vec{P M}$$

avec ρ masse volumique

Distribution surfacique :

$$\vec{G}(M) = \iint_{P \in S} -G \frac{\sigma(P) dS(P)}{\|\vec{P M}\|^3} \vec{P M}$$

avec σ masse surfacique

Distribution linéique :

$$\vec{G}(M) = \int_{P \in L} -G \frac{\lambda(P) dl(P)}{\|\vec{P M}\|^3} \vec{P M}$$

avec λ masse linéique

- Une masse m placée en M où règne un champ de gravitation $\vec{G}(M)$ subit une force gravitationnelle $\vec{F}(M) = m\vec{G}(M)$.
- Le champ gravitationnel est un champ de gradient et donc à circulation conservative :

$$\vec{G} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \Leftrightarrow \oint \vec{G} \cdot d\vec{l} = 0$$

- Donc la force gravitationnelle est conservative : $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$ avec l'énergie potentielle gravitationnelle $E_p = mV$. Pour une distribution de masse m_0 réduite à un point P et une masse ponctuelle m placée en M :

$$V(M) = -G \frac{m_0}{\| \overrightarrow{PM} \|} \quad \text{et} \quad E_p(M) = mV(M)$$

- Il existe un théorème de Gauss :

$$\oiint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$$

où S est une surface fermée et M_{int} la masse totale contenue dans S .

Synthèse

Savoirs

- Théorème de Gauss en gravitation
- Pour le champ extérieur, toute la masse d'une distribution sphérique peut être ramenée au centre
- Existence d'un potentiel de gravitation et d'une énergie potentielle associée

Savoir-faire

- Transposer le savoir-faire de l'électrostatique en gravitation
- Calculer des champs de gravitation par théorème de Gauss ou par méthode intégrale

Mots-clés

- Gravitation,
- théorème de Gauss,
- analogie électrostatique gravitation.

Exercices d'application

31.1 Champ gravitationnel terrestre

(D'après Mines d'Alès.)

La Terre est assimilée à une sphère homogène de rayon R_T et de masse M_T .

1. Calculez la force gravitationnelle qu'elle exerce sur une masse ponctuelle m située en M . Commentez.
2. Calculez l'énergie potentielle gravitationnelle associée. Que vaut-elle au centre de la Terre ?

31.2 Phénomène de microgravité

(D'après Géologie Nancy.)

La Terre est modélisée comme une distribution de masse sphérique homogène de centre O et de rayon R . L'intensité du champ qu'elle rayonne à sa surface est notée g_0 .

Une mer circulaire de rayon $r \ll R$ de masse volumique ρ_0 et de profondeur $p \ll r$ est « creusée » dans la croûte terrestre de masse volumique ρ_c . La figure 31.1 montre la situation, et la figure 31.2 en fait un agrandissement.

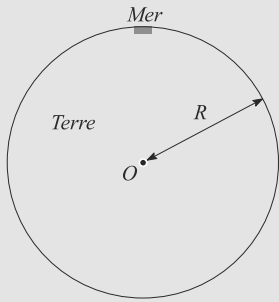


Figure 31.1 Mer circulaire à la surface de la Terre.

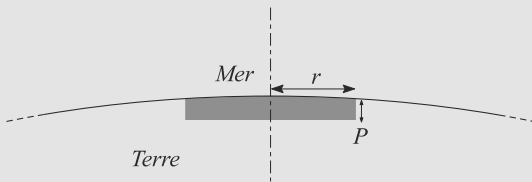


Figure 31.2 Vue agrandie de la mer circulaire.

1. Question préliminaire. Déterminez le champ gravitationnel rayonné par un disque homogène de rayon r et d'épaisseur p au centre d'une de ses faces dans le cas particulier $p \leq r$.
2. Exprimez l'intensité $g(p)$ du champ gravitationnel total rayonné au centre M de la surface de la mer comme une combinaison linéaire de plusieurs champs gravitationnels.

3. Déduisez-en le rapport :

$$\alpha = \frac{g(p) - g_0}{g_0}$$

Application numérique avec $g_0 = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$;
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$; $\rho_0 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$;
 $\rho_c = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$; $p = 10 \text{ km}$.
 Commentez cette valeur.

31.3 Aplatissement des planètes

(D'après Centrale)

Dans cet exercice, on tient compte de l'aplatissement de la planète pour déterminer son champ de gravitation. La modélisation proposée peut sembler grossière mais c'est une première approche de l'effet de l'aplatissement sur le champ de gravitation donnant des résultats intéressants.

1. Expliquer qualitativement, mais précisément, pourquoi la rotation propre d'une planète est la cause de son aplatissement aux pôles.
2. À cause de cet aplatissement, le champ gravitationnel de la planète qu'on considère n'est pas exactement un champ newtonien. On modélise la répartition de sa masse par une sphère contenant deux cavités sphériques vides (figure 31.3).

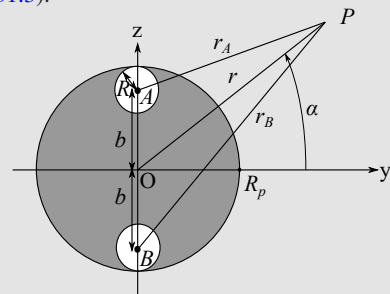


Figure 31.3 Modèle de planète aplatie.

Montrer que cette répartition crée le même champ gravitationnel que la superposition des trois sphères :

(S_0) est homogène de masse volumique $\rho > 0$, de masse M_0 , de centre O , de rayon R_p .

(S_1) et (S_2) sont homogènes de masse volumique $-\rho > 0$, de masse $-m$, centrée respectivement en A et B , de rayon $R = R_p - b$.

On pose $b = OA = OB$ et $M_p = M_0 - 2m$

3. a) Rappeler le champ de gravitation rayonné par une distribution de répartition sphérique homogène en dehors de cette distribution. En déduire le potentiel de gravitation hors de la sphère.

b) Exprimer le potentiel gravitationnel $V(r, \alpha)$ en un point P de l'espace créé par la planète en fonction des données précédentes.

c) On se place loin de la planète c'est-à-dire que $r \gg R_p$. Montrer que le potentiel $V(r, \alpha)$ se met alors sous la forme :

$$V(r, \alpha) = -\frac{GM_p}{r} \left(1 - J_2 \frac{R_p^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \right) \right)$$

où J_2 une constante positive dont on donnera l'expression en fonction de M_p , m , R_p et b .

d) Application numérique : le rayon équatorial de la planète R_p est supérieur de 11 % au rayon polaire b (cas de Saturne). Calculer la valeur de J_2 .

4. Déterminer l'expression du champ de gravitation rayonné par la planète pour $r \gg R_p$.

31.4 Effondrement gravitationnel d'un nuage gazeux

(D'après Mines d'Alès.)

Un nuage de gaz interstellaire présente une forme sphérique. Sa masse volumique ρ_0 est uniforme, son rayon est initialement R_0 et sa masse M .

Ce nuage subit un effondrement gravitationnel : il commence à se contracter sous l'effet des interactions gravitationnelles. Au cours de cet effondrement, il reste sphérique, son centre ne se déplace pas et son rayon est noté $r(t)$.

Vous pourrez réutiliser les résultats de l'exercice 1.

Considérons une particule de masse m localisée au point M sur la surface du nuage. Vous supposerez qu'elle se déplace

radialement et reste sur la surface de la sphère quand son rayon décroît (figure 31.4).

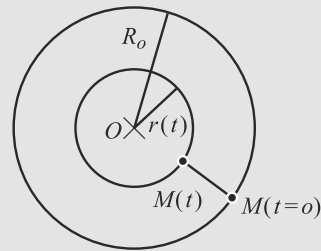


Figure 31.4 Effondrement gravitationnel d'un nuage gazeux.

1. Trouvez l'expression de sa vitesse radiale $v = \dot{r}$ en fonction de r , R_0 , M et \mathcal{G} .
2. Déterminez le temps τ que met la masse à atteindre le centre du nuage, en supposant qu'aucun phénomène ne l'en empêche. Donnez τ en fonction de ρ_0 et \mathcal{G} .

Indication : sachant que $r < R_0$, introduisez l'angle θ tel que $\sqrt{r/R_0} = \sin(\theta)$.

Application numérique avec $\rho_0 = 10^{-19} \text{ kg.m}^{-3}$ et $M = 10^{30} \text{ kg}$.

3. En fait, l'effondrement est arrêté par des phénomènes de pression quand le rayon atteint une valeur $R = 10^9 \text{ m}$. L'énergie potentielle du nuage a donc considérablement diminué dans l'opération. Qualitativement, qu'est devenue cette énergie perdue ?

31.1

Champ gravitationnel terrestre

Le calcul se ramène à celui du champ de gravitation terrestre.

C'est un exercice d'application directe des formules de cours. Vous devez vous convaincre que le calcul du champ est, formellement, le même que dans l'exercice 12 page 460 : une distribution volumique homogène sphérique. Vous pouvez d'ailleurs résoudre cet exercice en prenant le résultat approprié et en effectuant le changement de variable $q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0 \rightarrow -\mathcal{G}m_1 m_2$.

Pour la rédaction, attention : la masse de la Terre est une donnée du problème, pas sa masse volumique. Même si vous introduisez la masse volumique dans le calcul, le résultat final doit être présenté sans.

1. La force subie est $\vec{F} = m\vec{G}(M)$ où $\vec{G}(M)$ est le champ gravitationnel rayonné par la Terre en M .

Travaillons en coordonnées sphériques (r, θ, φ) centrées sur la Terre.

- La Terre est une distribution invariante par rotation autour de son centre donc les composantes de $\vec{G}(M)$ ne dépendent pas de θ et φ : $\vec{G}(M) = \vec{G}(r)$.
- Soit M la position de la masse m . Tous les plans contenant M et le centre de la Terre sont plans de symétrie donc $\vec{G}(M)$ est situé dans leur intersection, qui est la droite (OM) . Donc $\vec{G}(M) = G_r \vec{e}_r$.

Finalement, $\vec{G}(M) = G_r(r) \vec{e}_r$.

Appliquons le théorème de Gauss avec une surface de Gauss qui est une sphère S de rayon r centrée sur la Terre, donc passant par M (figures 31.5 et 31.6). Le flux de \vec{G} à travers cette surface est :

$$\begin{aligned} \phi &= \iint_{M \in S} \vec{G}(M) \cdot d\vec{S}(M) \\ &= \iint_{M \in S} G_r(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r \end{aligned}$$

car un petit élément de surface de cette sphère est radial, donc suivant \vec{e}_r . D'où :

$$\phi = G_r(r) \iint dS = G_r(r) 4\pi r^2$$

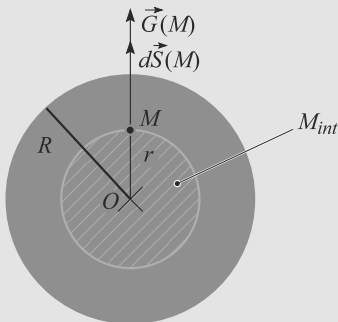


Figure 31.5 Surface de Gauss pour un point intérieur à la sphère.

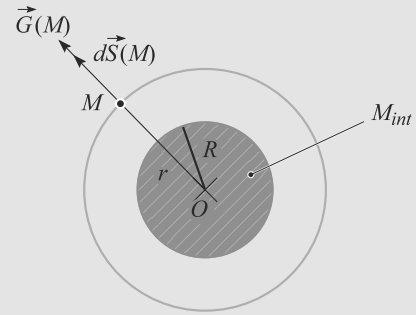


Figure 31.6 Surface de Gauss pour un point extérieur à la sphère.

Pour le calcul de la masse intérieure à S , il faut distinguer deux cas :

- Point à l'intérieur $r < R_T$: seule une fraction de la masse de la Terre est incluse dans S . Soit ρ la masse volumique de la Terre. Alors la masse intérieure est :

$$m_{\text{int}} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$



C'est parce que la Terre est supposée homogène que ρ est constante.

ρ est déterminée à partir de la masse totale de la Terre :

$$M_T = \rho \frac{4}{3} \pi R_T^3 \Rightarrow \rho = \frac{3M_T}{4\pi R_T^3}$$

D'où la masse intérieure :

$$m_{\text{int}} = M_T \frac{r^3}{R_T^3}$$

et le champ :

$$\begin{aligned} G_r(r) 4\pi r^2 &= -4\pi \mathcal{G} M_T \frac{r^3}{R_T^3} \\ \Rightarrow \vec{G}(M) &= -\mathcal{G} \frac{M_T r}{R_T^3} \vec{e}_r \end{aligned}$$

- Point à l'extérieur $r > R_T$: toute la Terre est incluse dans S , donc $m_{\text{int}} = M_T$. Le champ est donc :

$$G_r(r) 4\pi r^2 = -4\pi \mathcal{G} M_T \Rightarrow \vec{G}(M) = -\mathcal{G} \frac{M_T}{r^2} \vec{e}_r$$

Finalement, la force subie par la masse m est :

$$\vec{F}(r < R_T) = -\mathcal{G} \frac{m M_T r}{R_T^3} \vec{e}_r$$

$$\vec{F}(r > R_T) = -\mathcal{G} \frac{m M_T}{r^2} \vec{e}_r$$

L'allure de la force est donnée figure 31.7.

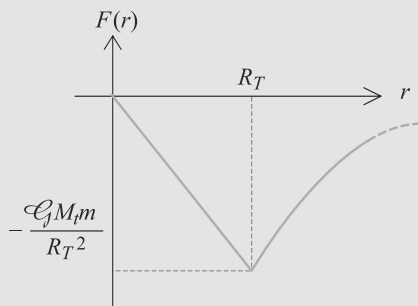


Figure 31.7 Force gravitationnelle exercée par la Terre.

La force subie par un point à l'extérieur de la Terre est donc identique à celle qu'il subirait si la Terre était réduite à une masse située en son centre et portant la masse M_T .



Cela justifie les raisonnements faits, par exemple, au chapitre 20 : nous avons calculé l'action gravitationnelle d'un astre ou d'une planète en l'assimilant à un point; en fait, le calcul reste exact si ce n'est pas un point mais une sphère homogène.

2. Soit $V(M)$ le potentiel gravitationnel en M . Alors, l'énergie potentielle est $E_p(M) = mV(M)$ donc $\vec{F} = -\vec{\text{grad}}(E_p)$. En coordonnées sphériques, sachant que le champ gravitationnel est purement radial, cette expression se réduit à :

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dr} \vec{e}_r$$

E_p s'en déduit par intégration et la constante d'intégration est fixée pour que E_p soit nulle à l'infini :

$$E_p(r > R_T) = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{r}$$

Pour $r < R_T$, la constante d'intégration est fixée pour assurer la continuité du potentiel et donc de l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} E_p(r) &= \mathcal{G} \frac{mM_T r^2}{2R_T^3} + A \\ E_p(R_T) &= \mathcal{G} \frac{mM_T}{2R_T} + A = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{R_T} \\ \Rightarrow A &= -\mathcal{G} \frac{3mM_T}{2R_T} \end{aligned}$$

D'où les résultats :

$$\begin{aligned} E_p(r < R_T) &= -\mathcal{G} \frac{mM_T}{2R_T} \left(3 - \frac{r^2}{R_T^2} \right) \\ E_p(r > R_T) &= -\mathcal{G} \frac{mM_T}{r} \end{aligned}$$

Au centre de la Terre, l'énergie potentielle gravitationnelle vaut alors :

$$E_p(r = 0) = -\mathcal{G} \frac{3mM_T}{2R_T}$$

L'allure de $E_p(r)$ est donnée figure 31.8.

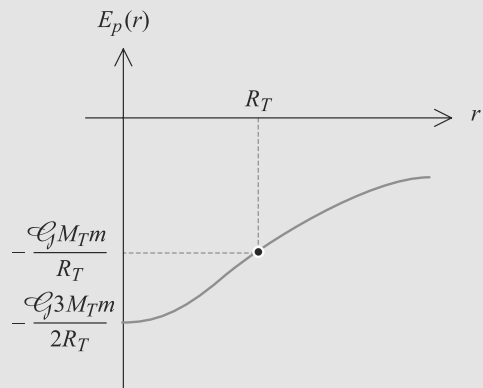


Figure 31.8 Énergie potentielle dans le champ gravitationnel terrestre.

31.2

Phénomène de microgravité

La seule subtilité de cette exercice est évoquée dans la deuxième question : le champ gravitationnel, de par sa nature vectorielle, est additif. La distribution de masse de cet exercice est complexe, mais elle est composée de plusieurs distributions très simples.

1. Dans les conditions de l'énoncé, le disque est indiscernable d'un plan épais infini vu du centre d'une des faces. Calculons donc le champ rayonné par un plan épais infini en un point d'une de ses faces.

Le problème est paramétré figure 31.9. Pour tout point M d'une face, la distribution est invariante par rotation autour de l'axe Mx . Donc $\vec{G}(M)$ est suivant \vec{e}_x .

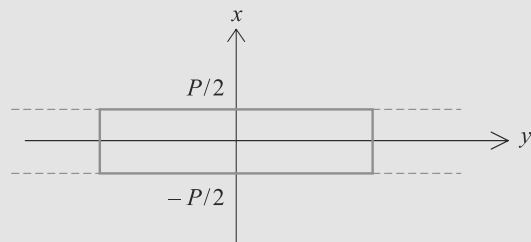


Figure 31.9 Paramétrage d'un plan épais infini.

La distribution est invariante par toute translation dans le plan yOz donc $\vec{G}(M)$ ne dépend que de la coordonnée x . Finalement :

$$\vec{G}(M) = G(x) \vec{e}_x$$

En outre, le plan $x = 0$ est plan de symétrie donc $G(x) = -G(-x)$. Le champ est impaire.

Appliquons le théorème de Gauss à la surface de la figure 31.9, un cylindre Σ de section S et de hauteur a .

Le flux du champ gravitationnel à travers ce cylindre est la somme des flux sur ses faces. Le flux à travers la surface latérale est donc nul, il ne reste que les flux à travers les deux faces en x et en $-x$:

$$\begin{aligned}\phi &= \iint_{M \in \Sigma} \vec{G}(M) \cdot d\vec{S}(M) \\ &= G(x)S - G(-x)S \\ \phi &= 2G(x)S\end{aligned}$$

La masse contenue dans Σ est $M_{\text{int}} = \rho S a$ d'où :

$$G(x) = -2\pi G \rho a$$

Appliquons ce résultat au point situé sur la face supérieure. Comme il n'y a pas de distribution de masse linéique ou volumique, le champ gravitationnel est continu et nous pouvons utiliser le résultat précédent en $a = p$:

$$\vec{G} = -2\pi G \rho p \vec{e}_r$$



Vérifiez que vous trouvez un champ attractif, donc orienté vers les masses !



Figure 31.10 Additivité du champ gravitationnel pour le calcul.

2. La figure 31.10 montre comment la distribution de charge peut être obtenue : partant de la Terre, il faut soustraire un morceau de croûte terrestre pour y ajouter la mer circulaire. Cette suite d'opérations se retrouve dans l'expression du champ gravitationnel :

$$\vec{G}(M) = \vec{G}(M)_{\text{terre}} - \vec{G}(M)_{\text{croûte}} + \vec{G}(M)_{\text{mer}}$$

Pour les deux derniers champs, utilisons l'expression établie à la question précédente. En notant M_T la masse de la Terre :

$$\begin{aligned}\vec{G}(M) &= -G \frac{M_T}{R} \vec{e}_r + 2\pi G \rho_c p \vec{e}_r - 2\pi G \rho_0 p \vec{e}_r \\ &= -(g_0 + 2\pi G p (\rho_0 - \rho_c)) \vec{e}_r\end{aligned}$$

D'où l'intensité cherchée :

$$g(p) = g_0 + 2\pi G p (\rho_0 - \rho_c)$$

3. D'après ce qui précède :

$$\alpha = \frac{2\pi G p (\rho_0 - \rho_c)}{g_0} = -0,07\%$$

Cet écart à la valeur « moyenne » du champ gravitationnel terrestre est mesurable avec des appareils assez précis (phénomène de microgravité).

Le signe – était prévisible, car la mer a pris place d'un matériau plus dense, la croûte terrestre.

31.3

Aplatissement des planètes

Dans cet exercice, il va falloir adapter ce que vous savez faire en électrostatique à la gravitation : principe de superposition, théorème de Gauss, calcul de potentiel. Le développement final a plus à voir avec le chapitre suivant puisqu'on est amené à effectuer un DL et que le potentiel obtenu est en partie multipolaire.

1. La forme de la planète résulte d'un équilibre de forces volumiques qui s'exercent dans le référentiel de la planète, celles de gravitation, celles de pression et celles liées à la force d'inertie d'entraînement (ou force centrifuge ici). Inexistantes aux pôles, celles-ci ont tendance à étirer la planète selon l'équateur.
2. En gravitation, le principe de superposition s'applique comme en électrostatique : la superposition des trois distributions (dont deux purement fictives) donne bien la distribution du modèle proposé. Le champ produit est alors la somme de ceux produits par les trois distributions séparément $r \gg R_p$. Il en va de même du potentiel.
3. a) On utilise ici un résultat classique utilisé pour une planète à symétrie sphérique et provenant du théorème de Gauss : le champ rayonné hors d'une sphère à symétrie sphérique est identique à celui d'un point matériel de masse M_p placé au centre de la distribution. Ainsi :

$$\vec{G}(P) = -\frac{GM_p}{r^2} \vec{e}_r,$$

Où r est la distance de P au centre de la distribution sphérique et \vec{e}_r le vecteur unitaire radial des coordonnées sphériques associées à ce centre.

Comme $\vec{G}(P) = -\vec{\text{grad}}(V) = -\frac{GM_p}{r^2} \vec{e}_r$, on en déduit

$$V(P) = -\frac{GM_p}{r} \text{ en prenant l'origine du potentiel à l'infini.}$$

- b) On superpose les différents potentiels des sphères :

$$V(r, \alpha) = -\frac{GM_0}{r} + \frac{Gm}{AP} + \frac{Gm}{BP},$$

et donc :

$$\begin{aligned}V(r, \alpha) &= -\frac{GM_0}{r} \\ &+ Gm \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2br \sin(\alpha)}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2 + 2br \sin(\alpha)}} \right)\end{aligned}$$

c) On se place dans le cas où $b < R_p \ll r$. On effectue alors des DL au deuxième ordre en b/r :

$$AP^{-1} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{r^2} - 2\frac{b}{r} \sin(\alpha)}} \\ \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b}{r} \sin(\alpha) + \frac{3}{8} \left(-2\frac{b}{r} \sin(\alpha) \right)^2 \right)$$

soit :

$$AP^{-1} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{b}{r} \sin(\alpha) + \frac{b^2}{2r^2} ([-1 + 3 \sin^2(\alpha)]) \right)$$

De même, on trouve :

$$BP^{-1} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{b}{r} \sin(\alpha) + \frac{b^2}{2r^2} ([-1 + 3 \sin^2(\alpha)]) \right)$$

On regroupe alors les résultats :

$$V(r, \alpha) = -\frac{GM_0}{r} + \frac{Gm}{r} \left(2 + \frac{b^2}{r^2} (-1 + 3 \sin^2(\alpha)) \right)$$

et donc

$$V(r, \alpha) = -\frac{G(M_0 + 2m)}{r} + \frac{Gm}{r} \frac{b^2}{r^2} (-1 + 3 \sin^2(\alpha))$$

ou encore :

$$V(r, \alpha) = -\frac{GM_p}{r} \left(1 - \frac{m}{M_p} \frac{b^2}{r^2} (-1 + 3 \sin^2(\alpha)) \right).$$

On identifie alors :

$$J_2 = \frac{2m}{M_p} \frac{b^2}{R_p^2}.$$

d) Le texte précise que $R_p = 1,11 b$ et donc $b/R_p = 100/111$. On peut aussi obtenir le rapport des masses :

$$\frac{m}{M_p} = \frac{m}{M_0 - 2m} = \frac{\frac{4}{3} \pi \rho (R_p - b)^3}{\frac{4}{3} \pi \rho R_p^3 - \frac{8}{3} \pi \rho (R_p - b)^3}.$$

On simplifie alors : soit $1,95 \cdot 10^{-3}$.

On trouve alors : $J_2 = 1,58 \cdot 10^{-3}$ ce qui est une petite correction par rapport au modèle sphérique.

4. On obtient le champ en utilisant le gradient de V :

$$\vec{G} = -\vec{\text{grad}}(V) = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \alpha} \vec{e}_\alpha :$$

$$G_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{GM_p}{r^2} \left(1 - 3J_2 \frac{R_p^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \sin^2(\alpha) - \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$\text{et } G_\alpha = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \alpha} = -\frac{GM_p}{r^4} 3J_2 R_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha).$$

31.4

Effondrement gravitationnel d'un nuage gazeux

Cet exercice est assez technique mais, malgré les apparences, la seule force en présence est la force gravitationnelle, conservative. Donc l'énergie mécanique du nuage est constante. Pensez à exploiter cette propriété.

Vous allez aboutir à une équation différentielle non linéaire. Retenez que, en physique cette année, vous n'avez à connaître que deux méthodes de résolution pour ces équations : par séparation des variables et par facteur intégrant.

1. La masse m n'est soumise qu'à la force gravitationnelle, qui est conservative. Donc son énergie mécanique est un invariant du mouvement :

$$E_m(R_0) = E_c(R_0) + E_p(R_0) \\ = -\mathcal{G} \frac{mM}{R_0} \\ E_m(r) = E_c(r) + E_p(r) \\ = \frac{1}{2} mv^2 - \mathcal{G} \frac{mM}{r}$$



Quand le nuage se contracte, m ne passe pas à l'intérieur de la sphère, puisque la sphère diminue de rayon.

La conservation de l'énergie s'écrit alors :

$$-\mathcal{G} \frac{mM}{R_0} = \frac{1}{2} mv^2 - \mathcal{G} \frac{mM}{r} \\ \Rightarrow v = -\sqrt{2\mathcal{G}M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0} \right)}$$

car la vitesse est négative, puisque r décroît.

2. Procédons par séparation des variables :

$$v = \frac{dr}{dt} = -\sqrt{2\mathcal{G}M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0} \right)} \\ \Rightarrow dt = -\frac{dr}{\sqrt{2\mathcal{G}M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0} \right)}}$$

Intégrons ceci entre l'instant initial $t = 0$ où $r = R_0$ et l'instant final $t = \tau$ où $r = 0$:

$$\int_0^\tau dt = \int_{R_0}^0 -\frac{dr}{\sqrt{2\mathcal{G}M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0} \right)}} \\ \tau = \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{G}M}} \int_0^{R_0} \frac{\sqrt{r} dr}{\sqrt{1 - \frac{r}{R_0}}}$$

puis effectuons le changement de variable proposé par l'énoncé :

$$\sqrt{\frac{r}{R_0}} = \sin(\theta) \Rightarrow r = R_0 \sin^2(\theta) \\ dr = 2R_0 \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta$$

D'où :

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2GM}} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sqrt{R_0} \sin(\theta) 2R_0 \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}} \\ = -\frac{2R_0^{3/2}}{\sqrt{2GM}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)^2 d\theta$$

Ceci s'intègre par linéarisation :

$$\sin(\theta)^2 = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \\ \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)^2 d\theta = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{4}$$

D'où la durée de l'effondrement :

$$\tau = \frac{\pi R_0^{3/2}}{2\sqrt{2GM}}$$

Sachant que la masse du nuage sphérique est :

$$M = \rho_0 \frac{4}{3} \pi R_0^3$$

il vient :

$$\tau = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3\pi}{2\rho_0 G}} = 2,1 \cdot 10^{14} \text{ s}$$

ce qui fait environ 6,7 millions d'années.



Cette valeur paraît élevée, mais elle est pourtant réaliste. Certains nuages stellaires s'effondrent très lentement.

3. L'énergie potentielle perdue est transférée en énergie cinétique. Comme le nuage est globalement au repos, cette énergie cinétique est récupérée au niveau microscopique (agitation thermique). Donc la température du nuage augmente. Il est envisageable que le nuage soit assez chaud pour amorcer des réactions nucléaires (cas d'une étoile qui s'effondre avant de se stabiliser en continuant à briller).

Plan

32.1 L'approximation dipolaire	498
32.2 Potentiel et champ rayonnés à grande distance	499
32.3 Action d'un champ électrique extérieur sur un dipôle électrostatique	501
Synthèse	502
Tests et exercices	503
Corrigés des exercices	506

Introduction

Le dipôle électrostatique est un modèle simple de système électrique mais ses applications sont nombreuses, par exemple en chimie pour comprendre les propriétés des molécules polaires.

De nombreuses distributions de charges sont, en première approximation, modélisables par un dipôle électrostatique.

Prérequis

- Potentiel électrique
- Champ électrique
- Développement limité à l'ordre 1
- Force et moment

Objectifs

- Introduire les distributions dipolaires et les potentiel et champ générés à grande distance
- Établir l'action d'un champ extérieur sur un dipôle rigide
- Utilisation de l'énergie potentielle pour prévoir orientation et déplacement d'un dipôle dans un champ extérieur

32.1 L'approximation dipolaire

Dans de nombreux cas, une distribution de charges **électriquement neutre**, même complexe, possède deux points particuliers : le barycentre de ses charges positives P portant une charge $q > 0$, et le barycentre de ses charges négatives N portant une charge $-q < 0$. Si ces deux points ne sont pas confondus, la distribution est dite **dipolaire**.



Vous avez déjà dû rencontrer cette grandeur en chimie. Son unité est le C.m, mais l'usage préfère le debye (D), tel que $1 \text{ D} = \frac{1}{3} 10^{-29} \text{ C.m.}$

Une telle distribution est caractérisée par un **moment dipolaire** défini par :

Définition

Le **moment dipolaire d'une distribution** est défini par :

$$\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$$

Il s'agit d'une grandeur vectorielle, comme illustré figure 32.1.

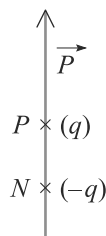


Figure 32.1 Dipôle électrostatique associé à une distribution.

L'intérêt de cette notion est que les champ et potentiel électriques rayonnés par une telle distribution sont, pour des points M assez éloignés, indépendants du détail de la distribution !

Dans votre cours, vous avez donc étudié le cas très simple du doublet de charges opposées : une charge ponctuelle q positive en P et une charge ponctuelle $-q$ négative en N . Les résultats obtenus sont donc, à grande distance, valables pour des distributions plus compliquées.

32.2 Potentiel et champ rayonnés à grande distance

32.2.1 Expressions

La distance NP est notée a et le milieu O du segment $[NP]$ est pris comme origine. Le potentiel et le champ électriques rayonnés à grande distance ($r \gg a$) par un moment dipolaire \vec{p} peuvent être écrits sans référence à une base, avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et $r = \|\vec{r}\|$:

Loi

Expressions intrinsèques de V et \vec{E} rayonnés par \vec{p} :

$$V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

Les principales différences avec le champ rayonné par une seule charge est sa décroissance en $1/r^3$ (au lieu de $1/r^2$) et sa dépendance angulaire. Le champ d'un dipôle décroît donc plus vite que celui d'une charge ponctuelle.

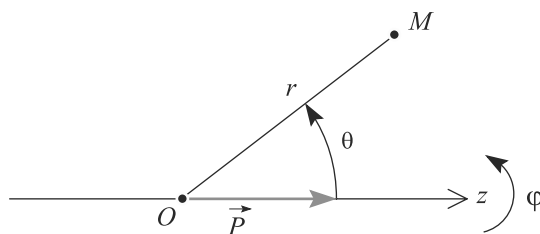


Figure 32.2 Invariance par rotation d'un dipôle électrostatique autour de son axe.

Il est aussi possible de les exprimer dans une base sphérique dont l'axe Oz porte \vec{p} . La distribution étant invariante par rotation autour de cet axe, (figure 32.2), ces expressions ne font alors pas intervenir l'angle φ . Dans le plan $\varphi = 0$, les coordonnées r et θ définissent alors une simple base polaire :

Loi

Expressions sphériques de V et \vec{E} rayonnés par $\vec{p} = p \vec{e}_z$:

$$V(M) = \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos(\theta) \vec{e}_r + \sin(\theta) \vec{e}_\theta)$$



Reportez-vous à la fiche méthode 3 pour des précisions sur la base sphérique.

32.2.2 Topographie

La carte des lignes de champ et des équipotentiels est donnée figure 32.3.



Tout ce qui précède repose sur l'hypothèse de grande distance $r \gg a$. Il ne faut donc pas utiliser ces résultats au voisinage du dipôle.

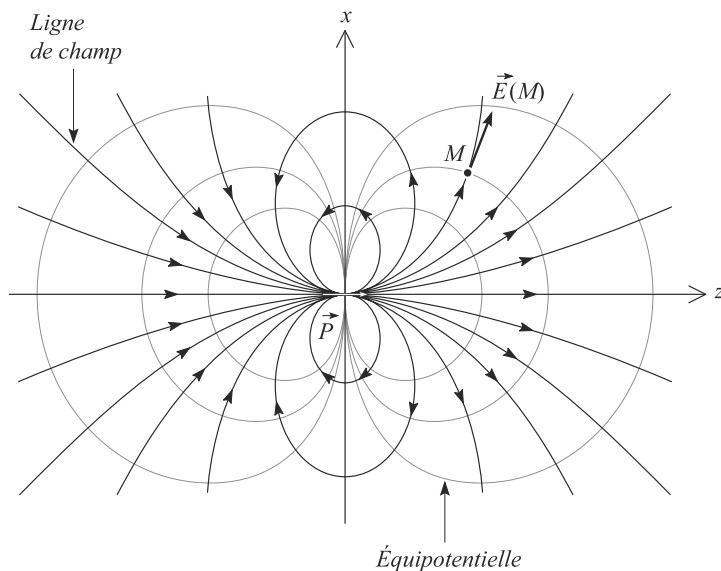


Figure 32.3 Carte des lignes de champ et des équipotentiels pour un dipôle électrostatique. La carte tridimensionnelle s'obtient par rotation autour de l'axe du dipôle.

32.3 Action d'un champ électrique extérieur sur un dipôle électrostatique

32.3.1 Formulaire

Loi

Action d'un champ électrique extérieur \vec{E} permanent sur un dipôle \vec{p} :

$$\text{Moment (couple)} : \vec{M}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

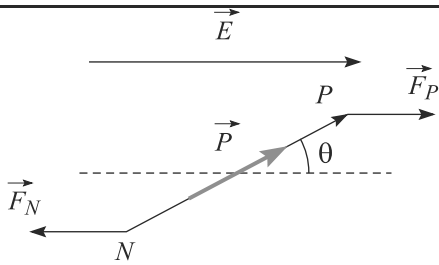
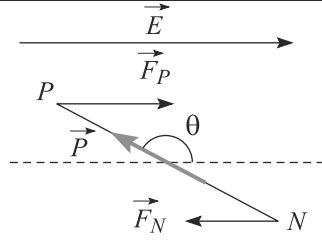
$$\text{Énergie potentielle} : E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Dans le cas où le champ est en plus uniforme, vous devez savoir que la force qu'il exerce sur le dipôle est nulle :

$$\vec{F} = q\vec{E} + (-q)\vec{E} = \vec{0}$$

32.3.2 Étude qualitative

E_p est extrême quand \vec{p} et \vec{E} sont colinéaires. Il y a donc deux positions d'équilibre :

Alignement de \vec{p} et \vec{E}	Schéma	Équilibre
De même sens		E_p minimale, équilibre stable
De sens opposés		E_p maximale, équilibre instable

Loi

Un dipôle électrostatique tend à s'aligner avec le champ électrique et à migrer vers les régions de champ intense.

Synthèse

Savoirs

- Reconnaître une distribution dipolaire
- Définition du moment dipolaire
- Modèle équivalent à deux charges
- Nature de l'approximation dipolaire (développement limité à l'ordre 1 à grande distance de la distribution)
- Énergie potentielle du dipôle

Savoir-faire

- Calculer le moment dipolaire d'une distribution dipolaire
- Retrouver le potentiel et le champ électrostatiques engendrés par un dipôle
- Utiliser l'énergie potentielle pour retrouver l'orientation et le déplacement d'un dipôle dans un champ extérieur

Mots-clés

- Dipôle,
- distribution dipolaire,
- moment dipolaire,
- force,
- moment,
- énergie potentielle.

Tests de connaissances

- 32.1 Toute distribution de charges est dipolaire.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 32.2 $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{OM}_i$ est indépendant de O si la distribution est dipolaire.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 32.3 Tout plan contenant P et N est plan de symétrie pour la distribution dipolaire de charges.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 32.4 Deux distributions de même moment dipolaire définissent le même potentiel partout dans l'espace.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 32.5 Un ion est une distribution dipolaire.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 32.6 Une molécule dont les liaisons sont polarisées est dipolaire.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 32.7 Le potentiel électrique dipolaire décroît en $1/r^2$.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 32.8 Les molécules d'eau, dipôles électrostatiques, sont attirées par les ions et s'agglutinent à leur voisinage.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

32.9 Moments dipolaires de quelques molécules

Les propriétés de symétrie des distributions de charge permettent de prévoir beaucoup de choses sur l'éventuelle polarité d'une molécule. Que pouvez-vous dire des moments dipolaires des molécules suivantes ?

1. dihydrogène H_2
2. dioxyde de carbone CO_2
3. eau H_2O

32.10 Doublet électrostatique

(D'après Concours communs polytechniques.)

Considérons un ensemble de charges ponctuelles q_i situées en M_i dans un volume fini et telles que la charge totale est nulle : $\sum_i q_i = 0$.

Le moment dipolaire de cette distribution est défini par :

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{OM}_i$$

où O est un point quelconque.

1. Vérifiez que \vec{p} ne dépend pas du choix de l'origine O .
2. Retrouvez à partir de cette définition l'expression classique $\vec{p} = q\vec{NP}$ en précisant ce que sont q , N et P .
3. Dans la molécule HF, la distance entre les noyaux est $d = 0,92 \cdot 10^{-10}$ m.
 - a) Supposons la liaison purement ionique. Alors H^+ est un simple proton et F^- possède un cortège électronique réparti de manière isotrope autour de son noyau. Effectuez l'inventaire des charges (protons et électrons) présents dans F^- , sachant que le numéro atomique du fluor est $Z = 9$.
 - b) Calculez le moment dipolaire $p = \|\vec{p}\|$, en debye, de ce modèle de molécule HF.

c) En réalité, le moment dipolaire de HF est déterminé expérimentalement à $p = 1,83$ D. Désignons par H et F les positions des noyaux, et par N le barycentre des charges électriques négatives de la liaison $H-F$. Déduisez-en la distance FG .

32.11 Dipôle dans le champ d'un condensateur plan (D'après Vêto.)

Un condensateur plan est constitué de deux plans uniformément chargés, l'un de charge surfacique $-\sigma < 0$ et d'abscisse $x = -a < 0$, l'autre de charge σ et d'abscisse a sur un axe Ox perpendiculaire aux plans.

Rappelons que le champ électrique entre les armatures d'un condensateur plan est uniforme et donné par :

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$$

où \vec{e}_x est le vecteur directeur de Ox .

Un dipôle électrostatique \vec{p} est placé sur l'axe Ox en $x = 0$. L'angle qu'il fait avec \vec{e}_x est noté α (figure 32.4).

1. Déterminez son énergie potentielle E_p pour α quelconque, en fonction de $p = \|\vec{p}\|$, σ , α et ϵ_0 .
2. Discutez les positions d'équilibre de ce dipôle.
3. Modélisons ce dipôle comme constitué de deux charges ponctuelles, N de charge $-q < 0$ placée en $x = -b$ et P de charge $q > 0$ placée en $x = b$. Elles sont de même masse m .
 - a) Pourquoi le dipôle ne quitte-t-il pas sa position ?
 - b) Étudiez les petites oscillations du dipôle autour de sa position d'équilibre stable. Vous poserez $\theta = \alpha - \alpha_{\text{eq}}$, où α_{eq} est la valeur de α à l'équilibre stable. Donnez la période de ses oscillations dans ce cas.

4. Le dipôle est maintenant supposé au repos sur sa position d'équilibre stable. Rappelons que le potentiel rayonné en un point M par un dipôle \vec{p} placé en O est :

$$V_d(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et $r = \|\vec{r}\|$.

- Déterminez le potentiel $V_c(M)$ rayonné par les armatures du condensateur en un point M d'abscisse x telle que $-a < x < a$. Le potentiel de l'armature positive sera noté U et celui de l'armature négative choisi nul.
- Déduisez-en le potentiel total $V(M)$ en fonction de θ , angle repérant M défini précédemment.
- Après avoir factorisé la partie angulaire dans le potentiel, montrez qu'il existe deux équipotentielles particulières $V = U/2$ que vous caractériserez.

- d) Tracez l'allure de quelques lignes de champ.

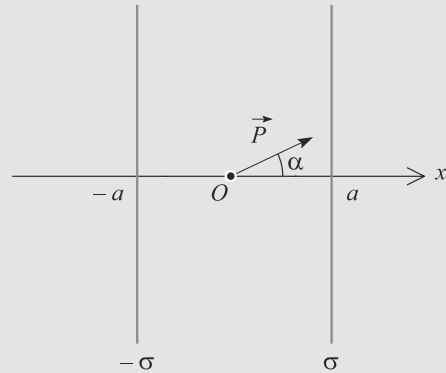


Figure 32.4 Dipôle dans le champ d'un condensateur plan.

Exercices d'approfondissement

32.12 Dipôles répartis dans un plan

Considérons un plan infini D_1 de normale Oz . Des dipôles électriques sont répartis uniformément sur sa surface (figure 32.5) avec une densité surfacique dipolaire :

$$\vec{p}_S = \frac{d\vec{p}}{dS} = p_S \vec{e}_z$$

supposée constante.

Le but de cet exercice est de calculer le champ électrique rayonné par cette distribution.

- Étudiez les symétries et les invariances de cette distribution. Déduisez-en la forme de \vec{E} .
- Le théorème de Gauss est-il applicable pour déterminer \vec{E} ici ?

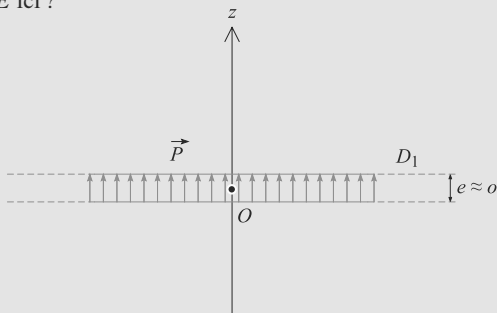


Figure 32.5 Dipôles répartis dans un plan.

- Considérons un disque D_2 de rayon R et de centre O (figure 32.6).
 - Déterminez le potentiel $V(z)$ rayonné par le disque sur son axe Oz .

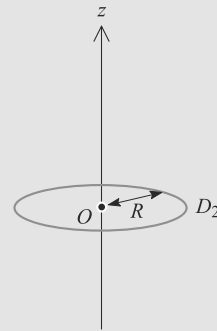


Figure 32.6 Disque chargé de dipôles.

- Déduisez-en le champ électrique associé.
 - Déduisez-en alors le champ électrique rayonné par le plan D_1 .
4. À quelles distributions surfaciques de charges est équivalent D_1 ? Le résultat obtenu était-il alors prévisible ?

32.13 Mouvement de molécules polaires dans un hexapôle électrostatique (D'après X)

L'exercice fait suite à l'exercice 31.15 du chapitre 31 : **Hexapôle électrostatique** et analyse le principe du piégeage dans une région restreinte de l'espace de molécules CH_3F qui possèdent un moment dipolaire électrique, en utilisant l'interaction avec un champ électrostatique hétérogène

On analyse ici le mouvement des molécules, possédant un moment dipolaire permanent \vec{d} , dans le champ électrique de l'hexapôle électrostatique dérivant du potentiel $V(r, \theta, z) \approx \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0} \left(\frac{r}{R}\right)^3 \cos(3\theta)$ trouvé au chapitre 31. Dans le vide, les molécules, libres de tourner, ont un mouvement de rotation ; l'énergie et le moment cinétique correspondant sont quantifiés. Seule compte, pour le couplage avec le champ électrique, la projection $d_{\text{eff}} = \frac{\vec{d} \cdot \vec{E}}{\|\vec{E}\|}$ du moment dipolaire sur la direction du champ électrique ; d_{eff} est une constante positive, négative ou nulle, donnée pour chaque état moléculaire.

1. Rappeler l'expression générale de l'énergie potentielle d'un dipôle \vec{d} dans un champ électrostatique \vec{E} . L'écrire à l'aide de d_{eff} .
2. Déterminer l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(r, \theta, z)$ en coordonnées cylindriques dans la partie centrale de l'hexapôle. Expliciter l'expression de l'énergie potentielle puis celle de la force exercée par l'hexapôle électrostatique sur une molécule en fonction de son moment dipolaire effectif d_{eff} .
3. Montrer que l'équation différentielle régissant le mouvement d'une molécule de masse m dans le champ hexapolaire s'écrit sous la forme $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -K \vec{r}$ où $\vec{r} = r \vec{e}_r$ et K est une constante à déterminer. À quelle condition sur le signe de d_{eff} le mouvement est-il périodique ? Quelle est alors la pulsation ω_0 correspondante ? Quel est le mouvement des molécules ayant d_{eff} de signe contraire ?
4. Résoudre cette équation différentielle pour un mouvement périodique d'une molécule située à l'instant $t = 0$ sur l'axe central et ayant une vitesse $\vec{v}(t = 0) = v_{0x} \vec{e}_x + v_{0y} \vec{e}_y + v_{0z} \vec{e}_z$. Un jet moléculaire effusif est généré à partir d'une enceinte contenant CH_3F gazeux, à température T , munie d'un orifice de sortie. Le jet est collimaté par un diaphragme de petit diamètre donnant pour direction moyenne du jet celle de l'axe central Oz de l'hexapôle.
5. Montrer que l'hexapôle permet de refocaliser les molécules, en opérant une sélection selon le moment dipolaire. Préciser la distance de première refocalisation.
6. Application numérique. On donne $R = 2,5 \text{ cm}$, $a = 2,5 \text{ mm}$ et $V_0 = 50 \text{ kV}$. On analyse le mouvement des molécules CH_3F ayant un moment dipolaire $|d_{\text{eff}}| = 3 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$. Calculer ω_0 .

Données numériques :

Unité atomique de masse : $1 \text{ u} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Masse de CH_3F : $m = 34 \text{ u}$

Permittivité du vide : $\epsilon_0 \approx 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

32.14 Actions de divers champs sur un dipôle

Un dipôle électrostatique \vec{p} est placé dans un champ électrique extérieur \vec{E}_0 permanent. Le but de l'exercice est d'étudier l'action sur le dipôle pour plusieurs formes de \vec{E}_0 en illustrant les phénomènes à l'échelle moléculaire.

Notons V_O le potentiel en un point O et φ l'angle (\vec{E}_0, \vec{p}) . Le dipôle, une molécule d'ammoniac NH_3 , est placé, sauf mention contraire, en un point M .

1. Justifiez que la molécule d'ammoniac peut être assimilée à un dipôle électrostatique.
2. Le champ extérieur est celui d'un cation Ag^+ ponctuel placé en O . Le dipôle est placé en M assez loin du cation pour que l'approximation dipolaire reste valable.
 - a) Calculez l'énergie potentielle du dipôle dans le champ du cation en fonction de ϵ_0 , la charge élémentaire e , $p = \|\vec{p}\|$, $r = \|\vec{OM}\|$ et φ .
 - b) Comment s'oriente \vec{p} ? Étudiez sa position d'équilibre stable. Pour cette position particulière, déterminez la force subie par le dipôle.
 - c) Montrez que ces résultats expliquent l'existence d'un composé comme $[\text{Ag}(\text{NH}_3)]^+$.
3. Le champ extérieur est maintenant celui d'un autre dipôle électrostatique \vec{p}_0 situé en O . Notons $\theta_0 = (\vec{r}, \vec{p}_0)$.
 - a) Comment s'oriente \vec{p} ? Étudiez sa position d'équilibre stable.
 - b) Pour cette position particulière, calculez son énergie potentielle électrostatique en fonction de ϵ_0 , $p_0 = \|\vec{p}_0\|$, r , θ_0 et p .

Rappel : le champ électrique rayonné en M par un moment dipolaire p_0 placé en O s'écrit :

$$\vec{E}_0(M) = \frac{3(\vec{p}_0 \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}_0}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

- c) Les ions $[\text{Ag}(\text{NH}_3)]^+$ et $[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2]^+$ sont modélisés par, respectivement, une association dipôle-ion et dipôle-ion-dipôle alignés dans cet ordre. La distance ion-dipôle est $r_0 = 0,25 \text{ nm}$ et le moment dipolaire de l'ammoniac est $p_0 = 0,5 \cdot 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$.

Calculez numériquement l'énergie potentiel d'interaction ion-dipôle, dipôle-dipôle et l'énergie totale de chacun de ces ions. Quel est le plus stable, selon vous ? Justifiez qualitativement la structure de $[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2]^+$.

Donnée : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

32.1

Faux, si la somme des charges est non nulle, la distribution est polaire.

32.2

Vrai, il s'agit d'une définition intrinsèque du moment.

32.3

Faux, le champ et le potentiel au loin possèdent plus de symétrie que les distributions.

32.4

Faux, c'est seulement vrai au loin mais pas près des charges.

32.5

Faux, il s'agit d'une distribution polaire.

32.6

Faux. C'est souvent le cas (l'eau par exemple) mais pas obligatoirement (dioxyde de carbone) : la molécule ne doit être trop symétrique.

32.7

Vrai, alors qu'un potentiel polaire décroît en $1/r$.

32.8

Vrai, c'est le phénomène de solvation.

32.9

Moments dipolaires de quelques molécules

Il s'agit seulement de petits raisonnements sur les symétries géométriques de ces molécules. Vous avez probablement déjà rencontré ces raisonnements, en cours de chimie, avec le modèle VSEPR.

Sans indication supplémentaire, cet exercice exige de vous un minimum de connaissance sur les électronégativités comparées de quelques éléments chimiques.

Utilisons la définition $\vec{p} = q\vec{NP}$, avec N le barycentre des charges négatives, P celui des charges positives et q la charge en valeur absolue portée par N et P .

1. La molécule est symétrique, donc les deux atomes ne portent aucune charge (différence d'électronégativité nulle). Donc $q = 0$ et $\vec{p} = \vec{0}$. Le dihydrogène est apolaire.



Figure 32.7 Molécule de dihydrogène.

2. La molécule est symétrique, donc N et P sont confondus : P est sur le carbone et N est au milieu des deux oxygènes, donc aussi sur le carbone. Donc $\vec{NP} = \vec{0}$ et $\vec{p} = \vec{0}$.

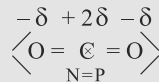


Figure 32.8 Molécule de dioxyde de carbone.

3. Le plan médiateur des deux H est plan de symétrie, donc \vec{p} est dans ce plan. En effet, N est sur l'oxygène et P est au milieu des deux hydrogènes. Donc \vec{p} est porté par l'axe de symétrie de la molécule.

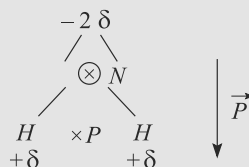


Figure 32.9 Molécule d'eau.

32.10

Doublet électrostatique

Cet exercice jette un pont entre électrostatique et chimie en illustrant la manière dont les propriétés électriques des atomes sont reliées à une de leurs propriétés chimiques, leur polarité.

Le début exige un peu de rigueur dans les calculs, mais il n'y a pas de difficulté particulière.

1. Soit O' un autre point.

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \sum_i q_i (\vec{OO'} + \vec{O'M_i}) \\ &= \left(\sum_i q_i \right) \vec{OO'} + \sum_i q_i \vec{O'M_i} \end{aligned}$$

Comme la charge totale est nulle, il vient :

$$\sum_i q_i \vec{OM_i} = \sum_i q_i \vec{O'M_i}$$

donc \vec{p} est bien indépendant du choix de O .

2. Par définition, le barycentre G d'une distribution de charge est :

$$\left(\sum_i q_i \right) \vec{OG} = \sum_i q_i \vec{OM_i}$$

Pour utiliser cette définition, coupons en deux la somme dans la définition de \vec{p} , pour avoir une somme portant sur les charges positives et une somme portant sur les charges négatives.

$$\vec{p} = \sum_{i, q_i > 0} q_i \vec{OM_i} + \sum_{i, q_i < 0} q_i \vec{OM_i}$$

Introduisons alors P le barycentre des charges positives et N celui des charges négatives. Alors :

$$\vec{p} = \left(\sum_{i, q_i > 0} q_i \right) \vec{OP} + \left(\sum_{i, q_i < 0} q_i \right) \vec{ON}$$

Posons égale à q la somme des charges positives. Comme la charge totale est nulle, la somme des charges négatives est égale à $-q$. D'où :

$$\begin{aligned} \vec{p} &= q\vec{OP} - q\vec{ON} \\ &= q\vec{NP} \end{aligned}$$

qui est la définition vue en cours. Dans cette expression, l'indépendance avec O est évidente.

3. a) L'ion F^- porte 9 charges $+e$ et 10 charges $-e$, où e est la charge élémentaire.

L'ion H^+ porte une charge $+e$.

- b) Donc $q = e$ avec les notations précédentes et $\|\vec{NP}\| = d$. D'où :

$$p = ed = 4,42 \text{ D}$$

- c) Revenons à la définition de \vec{p} donnée dans l'énoncé en choisissant pour O le noyau de fluor F . Alors :

$$\begin{aligned} p &= -10eFN + eFH = -10eFN + ed \\ \Rightarrow FN &= \frac{-p + ed}{10e} = 5,4 \text{ pm} \end{aligned}$$

N est très proche du fluor, mais pas confondu avec lui donc la liaison chimique n'est pas purement ionique.

32.11 Dipôle dans le champ d'un condensateur plan

L'expression de ce champ électrique a été établie à l'exercice 11 page 460.

Les deux premières questions relèvent uniquement du cours et devraient donc être traitées rapidement. La troisième est plus une question de mécanique, vous devez donc être capable d'appliquer les lois générales à ce nouveau cas (énergie potentielle électrostatique).

1. Par définition, $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ donc ici :

$$E_p = \frac{p\sigma}{\varepsilon_0} \cos(\alpha)$$

2. Les extrema de E_p sont donc ceux de $\cos(\alpha)$:

- Position d'équilibre instable si $\cos(\alpha)$ est maximal, donc $\alpha = 0$. Alors \vec{p} est anticollinéaire au champ (figure 32.10).

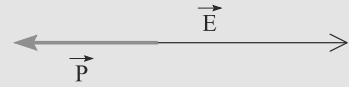


Figure 32.10 Position d'équilibre instable du dipôle dans le condensateur.

- Position d'équilibre stable si $\cos(\alpha)$ est minimal, donc $\alpha = \pi$. Alors \vec{p} est collinéaire au champ (figure 32.11).

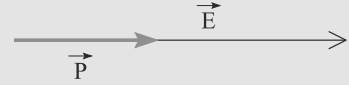


Figure 32.11 Position d'équilibre stable du dipôle dans le condensateur.

3. Supposons que α est proche de π , donc que le dipôle reste au voisinage de sa position d'équilibre stable. Le champ ne déplace pas le dipôle car il est uniforme (les forces exercées sur N et P se compensent).

Donc N et P ont des mouvements de rotation de rayon b et de vitesse angulaire $\dot{\alpha}$ autour de l'origine $x = 0$.

L'énergie mécanique du dipôle est alors la somme des énergies cinétiques des deux masses qui le constituent, et de son énergie potentielle :

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2} m(b\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} m(b\dot{\alpha})^2 + \frac{p\sigma}{\varepsilon_0} \cos(\alpha) \\ &= m(b\dot{\alpha})^2 + \frac{p\sigma}{\varepsilon_0} \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Cette énergie mécanique est constante donc sa dérivée par rapport au temps est nulle :

$$2mb^2\ddot{\alpha} - \frac{p\sigma}{\varepsilon_0} \sin(\alpha) = 0$$

α reste proche de π donc faisons un développement limité au premier ordre de $\sin(\alpha)$ au voisinage de $\alpha = \pi$:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &\simeq \sin(\pi) + (\alpha - \pi) \cos(\pi) \\ &\simeq \pi - \alpha \end{aligned}$$

D'où l'équation du mouvement :

$$\begin{aligned} 2mb^2\ddot{\alpha} - \frac{p\sigma}{\varepsilon_0}(\pi - \alpha) &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{p\sigma}{2mb^2\varepsilon_0} \theta &= 0 \end{aligned}$$

qui est celle d'un oscillateur harmonique. La période de ses oscillations est donc :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2mb^2\varepsilon_0}{p\sigma}}$$

4. a) Les notations sont celles de la figure 32.4 dans l'énoncé.

Calculons la circulation du champ sur un contour Γ allant de l'armature négative à un point M d'abscisse x :

$$\begin{aligned}\Delta V_c &= V_c(x) - V_c(-a) = - \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= - \int_{-a}^x -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \cdot dx \vec{e}_x \\ \Rightarrow V_c(x) &= \frac{(x+a)\sigma}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

Faisons le même calcul, mais sur un contour Γ' allant de l'armature négative à l'armature positive :

$$\begin{aligned}V_c(a) - V_c(-a) &= U = \frac{2a\sigma}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow V_c(x) &= \frac{U}{2} \left(1 + \frac{x}{a}\right)\end{aligned}$$



Ce petit calcul est riche en possibilités d'erreurs de signe. Vérifiez simplement que le résultat redonne bien $V(-a) = 0$ et $V(a) = U$.

- b) Dans sa position d'équilibre stable, le dipôle est colinéaire au champ électrique donc $\vec{p} = -p\vec{e}_x$ avec $p > 0$. Donc :

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = pr \cos(\pi - \theta) = -pr \cos(\theta)$$

Géométriquement, $x = r \cos(\theta)$. Donc :

$$\begin{aligned}V(M) &= V_c(M) + V_d(M) \\ &= \frac{U}{2} \left(1 + \frac{r}{a} \cos(\theta)\right) + \frac{-pr \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ V(M) &= \frac{U}{2} + \cos(\theta) \left(\frac{Ur}{2a} - \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)\end{aligned}$$

- c) $V = U/2$ est réalisé quand le dernier terme de cette équation est nul, donc dans deux cas.

Si $\cos(\theta) = 0$, alors $x = 0$: le plan médian du condensateur est une équipotentielle $U/2$.

L'autre possibilité est :

$$\begin{aligned}\frac{Ur}{2a} - \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} &= 0 \\ \Rightarrow r &= \sqrt[3]{\frac{pa}{2\pi\epsilon_0 U}}\end{aligned}$$

qui correspond à un cercle de rayon r .

- d) Voir figure 32.12.

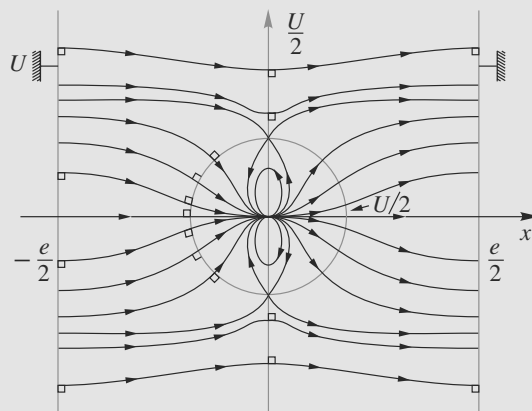


Figure 32.12 Lignes de champ autour du dipôle dans le condensateur plan.

32.12

Dipôles répartis dans un plan

L'énoncé est très directif, mais les opportunités sont nombreuses de partir dans une mauvaise direction à cause d'une faute de calcul. Dès la première lecture de l'énoncé, la dernière question doit attirer votre attention et vous encourager à comprendre que vous allez trouver un résultat très particulier.

1. Soit un point M quelconque hors du plan. Le plan étant infini, il est toujours possible de définir O comme le projeté de M sur le plan et l'axe Oz comme passant par M .

La distribution est invariante par toute translation dans le plan donc $\vec{E}(M) = \vec{E}(z)$.

Tout plan contenant M et l'axe Oz est plan de symétrie de D_1 donc $\vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z$.

Donc finalement :

$$\vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z$$

2. Le plan D_1 est un plan d'antisymétrie pour lui-même (la symétrie par D_1 retourne les dipôles et donc inverse les charges). Le problème n'est donc pas assez riche en symétries pour utiliser le théorème de Gauss.
3. a) Découpons le disque en anneaux de rayon r et d'épaisseur dr , donc de surface $dS = 2\pi r dr$ (figure 32.13). Cet anneau contient donc $p_s dS$ dipôles.

Le potentiel rayonné par un dipôle \vec{p} est, avec les notations du cours :

$$V(M) = \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

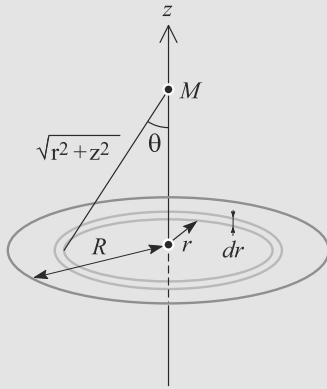


Figure 32.13 Découpage du disque en anneaux fins.

Ici il y a $p_S 2\pi r dr$ dipôles, d'où le potentiel rayonné par l'anneau en M :

$$dV(M) = \frac{p_S 2\pi r \cos(\theta) dr}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)}$$

Choisissons de garder la variable θ . Alors :

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= \frac{r}{z} \Rightarrow dr = \frac{z}{\cos^2(\theta)} d\theta \\ \cos(\theta) &= \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \end{aligned}$$

Il vient donc :

$$dV(M) = \frac{p_S \sin(\theta) d\theta}{2\epsilon_0}$$

Le potentiel total s'obtient en intégrant sur tous les anneaux, donc θ variant de 0 à θ_R défini par :

$$\begin{aligned} \cos(\theta_R) &= \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \\ \Rightarrow V(M) &= \int_0^{\theta_R} \frac{p_S \sin(\theta) d\theta}{2\epsilon_0} \\ &= \frac{p_S}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \end{aligned}$$

b) La relation $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V)$ donne ici :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= -\frac{dV}{dz} \vec{e}_z \\ &= \frac{p_S}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z \end{aligned}$$

c) Le plan infini D_1 s'obtient à partir du disque D_2 en faisant tendre son rayon R vers l'infini. Nous trouvons alors un champ rayonné nul !

4. Chaque dipôle peut être modélisé par un doublet de charges, une positive et une négative, séparés par une petite distance a .

Alors, D_1 est équivalent à deux plans infinis uniformément chargés en surface distants de a , un plan contenant les charges positives de chaque dipôle et l'autre contenant les charges négatives. Nous sommes alors ramenés au modèle du condensateur plan.



La distribution surfacique σ de chaque plan est alors définie par $p_S = \sigma a$.

Or, le condensateur plan rayonne un champ nul en dehors de l'espace entre les deux plans. Le résultat établi ici était donc bien prévisible.

32.13 Mouvement de molécules polaires dans un hexapôle électrostatique

On fait de la mécanique dans cet exercice et peu d'électrostatique. Si l'expression du gradient en polaire est connue ainsi que les relations entre force et énergie potentielle, l'ensemble ne devrait pas poser de problème.

1. On rappelle que $E_P = -\vec{d} \cdot \vec{E}$ pour un dipôle \vec{d} dans un champ \vec{E} . Ici, on a donc $E_P = -d_{\text{eff}} \|\vec{E}\|$.
2. Comme $V(r, \theta, z) \approx \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{r}{R}\right)^3 \cos(3\theta)$ et $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$, on obtient deux composantes du champ :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{3r^2}{R^3} \cos(3\theta)$$

$$\text{et } E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{3r^2}{R^3} \sin(3\theta).$$

Vectoriellement, on a donc :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{3r^2}{R^3} (-\cos(3\theta)\vec{e}_r + \sin(3\theta)\vec{e}_\theta).$$

On en déduit :

$$E_P = -d_{\text{eff}} \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{3r^2}{R^3}$$

$$\text{et } \vec{f} = -\vec{\text{grad}}(E_P) = d_{\text{eff}} \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{6r}{R^3} \vec{e}_r$$

3. Le PFD appliqué au dipôle donne : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} = d_{\text{eff}} \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{6r}{R^3} \vec{e}_r$. On reconnaît alors la constante K donnée dans le texte : $K = -d_{\text{eff}} \frac{6\lambda}{\pi\epsilon_0 R^3}$.

Le PFD conduit alors à $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{K}{m} \vec{r} = 0$ qui donne un mouvement périodique à la condition que $K > 0$ et donc $d_{\text{eff}} < 0$. Dans ces conditions,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{-d_{\text{eff}}}{m} \frac{6\lambda}{\pi\epsilon_0 R^3}}$$

est la pulsation de l'oscillateur harmonique obtenu.

Pour les molécules de signe différent, elles sont éjectées de l'axe, la force électrostatique étant alors répulsive ($d_{\text{eff}} > 0$) ou dérivent hors de l'axe sans interaction pour $d_{\text{eff}} = 0$.

4. La projection sur les axes donne les équations différentielles :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 ; \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0 ; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Cette dernière relation s'intègre en $z = v_{0z}t + z_0$ et traduit la dérive sur l'axe à vitesse constante. Les deux autres équations donnent des solutions en $A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$. Les conditions initiales permettent alors d'obtenir $x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$ et $y(t) = \frac{v_{0y}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$.

Les molécules décrivent une sinusoïde dans le plan déterminé par Oz et la vitesse initiale (incliné de $\arctan(v_{0x}/v_{0y})$ par rapport à Ox).

5. Les molécules qui traverseront à nouveau l'axe sont celles de moment dipolaire négatif, les autres s'en écartent. Pour récupérer le jet il faut placer sur l'axe un orifice à une distance telle que les molécules soient au voisinage de l'axe : $\sin(\omega_0 t) = 0$ (figure 33.14) :

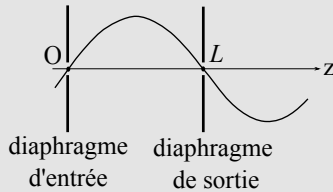


Figure 32.14 Trajectoire des particules focalisées.

La première longueur L permettant cela est telle que $\omega_0 t = \pi$. Or $L = v_{0z}t$. On en déduit $\omega_0 t = \omega_0 \frac{L}{v_{0z}} = \pi$ et donc :

$$L = \frac{v_{0z}\pi}{\omega_0}.$$

6. L'application numérique donne alors $\omega_0 = 1\,060 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ soit une fréquence de 168 Hz.

32.14 Actions de divers champs sur un dipôle

Cet exercice très progressif possède une structure de questions imbriquées : vous devez répondre aux premières questions avant de pouvoir aborder correctement les suivantes.

1. L'hydrogène étant moins électronégatif que l'azote, le barycentre des charges négatives est sur l'atome d'azote et le barycentre des charges positives au milieu des trois hydrogènes. Donc NH_3 est une molécule polaire, possédant un moment dipolaire \vec{p} orienté d'après la figure 32.15.

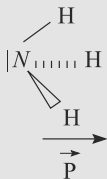


Figure 32.15 Moment dipolaire de l'ammoniac.

2. a) Par définition $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$. Le cation étant assimilé à une charge positive ponctuelle, il rayonne un champ :

$$\vec{E}_0 = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

où \vec{e}_r est le vecteur directeur de \vec{OM} . Donc :

$$E_p = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{p} \cdot \vec{e}_r$$

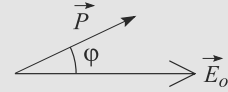


Figure 32.16 Angle entre le dipôle et le champ extérieur.

L'angle entre \vec{p} et \vec{e}_r est φ (figure 32.16), d'où :

$$E_p = -\frac{pe \cos(\varphi)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

b) Le dipôle cherche à minimiser son énergie potentielle. À r fixé, il réalise cette situation si $\varphi = 0$. Il est alors aligné avec le champ (même sens, même direction) et en équilibre stable.

La force subie par le dipôle est la somme des forces subies par les deux charges N et P qui le constituent :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -q\vec{E}(N) + q\vec{E}(P) \\ &= \frac{qe}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-1}{\|\vec{ON}\|^2} + \frac{1}{\|\vec{OP}\|^2} \right) \vec{e}_r \end{aligned}$$

Les points O , N et P sont alignés. Supposons que le point M marquant la position du dipôle corresponde à N (comme la taille du dipôle est petite devant sa distance au cation, la position précise de M entre N et P a peu d'importance).

Notons a la longueur (petite devant r) du dipôle. Alors $\|\vec{ON}\| = r$ et $\|\vec{OP}\| = r + a$.

Il est alors possible de faire un développement limité au premier ordre en a/r :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{qe}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-1}{r^2} + \frac{1}{(r+a)^2} \right) \vec{e}_r \\ &= \frac{qe}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(-1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{r}\right)^2} \right) \vec{e}_r \\ &\simeq \frac{qe}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(-1 + 1 - 2\frac{a}{r} \right) \vec{e}_r \\ &= -\frac{eqa}{2\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r \\ \vec{F} &= -\frac{pe}{2\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r \end{aligned}$$

car $p = qa$.

c) La molécule NH_3 subit de la part de Ag^+ la force calculée question précédente, qui est attractive car $e > 0$. Donc les deux entités ont tendance à s'attirer pour former un édifice, l'ion $[\text{Ag}(\text{NH}_3)]^+$, comme illustré figure 32.17.

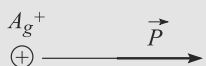


Figure 32.17 Action du champ rayonné par le cation Ag^+ sur le moment dipolaire de l'ammoniac.

3. a) Les notations sont résumées figure 32.18.

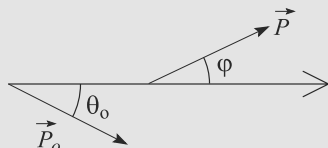


Figure 32.18 Action d'un champ dipolaire sur un autre dipôle.

L'énergie potentielle s'écrit toujours $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$, où cette fois \vec{E}_0 est le champ électrique rayonné par le dipôle \vec{p}_0 . Elle est minimale, correspondant à une position d'équilibre stable, si \vec{p} et \vec{E}_0 sont colinéaires. Alors :

$$E_p = -p \parallel \vec{E}_0 \parallel$$

b) θ_0 étant l'angle entre \vec{r} et \vec{p}_0 , l'expression donnée par l'énoncé pour \vec{E}_0 devient :

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 &= \frac{3p_0 r \cos(\theta_0) \vec{r} - r^2 \vec{p}_0}{4\pi\epsilon_0 r^5} \\ \parallel \vec{E}_0 \parallel^2 &= \frac{9p_0^2 r^4 \cos^2(\theta_0) + r^4 p_0^2 - 6p_0^2 r^4 \cos(\theta_0)^2}{4\pi\epsilon_0 r^{10}} \\ \parallel \vec{E}_0 \parallel &= \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3 \cos^2(\theta_0) + 1} \end{aligned}$$

D'où l'énergie potentielle dans ce cas particulier :

$$E_p = \frac{-pp_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3 \cos^2(\theta_0) + 1}$$

c) Cas de $[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2]^+$: il s'agit d'une interaction ion-dipôle (voir question c)). D'après la réponse à la question a) avec $\varphi = 0$:

$$E_{p\text{id}} = -\frac{ep_0}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} = -11,5 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

Ceci est aussi l'énergie totale de l'ion $[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2]^+$ donc :

$$\begin{aligned} E([\text{Ag}(\text{NH}_3)_2]^+) &= -11,5 \cdot 10^{-20} \text{ J} \\ &= -69,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$



Rappel : pour passer d'une énergie moléculaire (par molécule) à une énergie molaire (par mole), il suffit de multiplier par le nombre d'Avogadro.

Cas de $[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2]^{2+}$: il s'agit d'une interaction dipôle-dipôle. D'après l'énoncé, la structure de cet ion est nécessairement de la forme indiquée sur la figure 32.19.

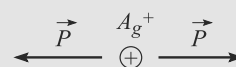


Figure 32.19 Structure de l'ion obtenu par capture de deux NH_3 .

Donc l'énergie potentielle d'interaction dipôle-dipôle est donnée par la réponse à la question b) avec $\vec{p} = -\vec{p}_0$ donc $\theta_0 = \pi$ et $r = 2r_0$:

$$E_{p\text{dd}} = \frac{-p_0^2}{8\pi\epsilon_0 r_0^3} = -18 \cdot 10^{-31} \text{ J}$$

L'énergie totale de cet ion est la somme des énergies de ses constituants, donc $2E_1$, plus l'énergie d'interaction entre ses constituants, donc $E_{p\text{dd}}$:

$$\begin{aligned} E[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2]^{2+} &= 2E_1 + E_{p\text{dd}} \\ &= -138 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

C'est donc l'ion $[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2]^{2+}$ qui est le plus stable.

Ces valeurs numériques ne peuvent être que des ordres de grandeur, car de nombreux phénomènes à l'échelle moléculaire ont été négligés (effets quantiques par exemple) et les calculs ont été menés dans le cadre de l'approximation dipolaire, valable seulement si les dipôles sont assez loins les uns des autres.



Malgré cela, ce sont les bons ordres de grandeur.

Plan

33.1	Champ magnétique rayonné par un conducteur filiforme	512
33.2	Propriétés de symétrie du champ magnétique	514
33.3	Calcul du champ magnétique rayonné par un conducteur filiforme	516
33.4	Propriétés vectorielles du champ magnétique	518
33.5	Théorème d'Ampère	520
33.6	Topographie du champ magnétique	521
	Synthèse	522
	Tests et exercices	523
	Corrigés des exercices	526

Introduction

Une charge électrique, de par sa seule présence, produit une modification des propriétés de l'espace autour d'elle appelée champ électrique. Lorsqu'elle est en mouvement, s'ajoute au champ électrique qu'elle rayonne un second phénomène que, historiquement, l'on a longtemps cru distinct : un champ magnétique.

Le programme de première année se limite à la magnétostatique, cas où le champ magnétique est indépendant du temps et où il est possible d'ignorer le champ électrique rayonné par les charges en mouvement.

Prérequis

- Calcul de circulation
- Calcul intégral
- Raisonnement par symétrie et invariance

Objectifs

- Introduire les lois de base de la magnétostatique (loi de Biot et Savart, théorème d'Ampère) pour les distributions filiformes de courant
- Constater le caractère axial du champ magnétique
- Constater les différences entre cartes de champ magnétique et électrique

33.1 Champ magnétique rayonné par un conducteur filiforme

33.1.1 Distribution linéique de courant

Un conducteur filiforme traversé par un courant d'intensité I constitue une **distribution linéique de courant**.

Définition

Dans une distribution linéique de courant, un petit segment $d\vec{l}$ traversé par un courant I définit un **élément de courant** $I d\vec{l}$.

33.1.2 Loi de Biot et Savart

Considérons un élément de courant $I d\vec{l}(P)$ situé en P , comme celui de la figure 33.1.

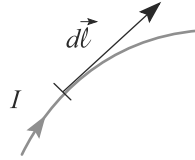


Figure 33.1 Élément de courant.

Sa contribution au champ magnétique rayonné en M est représentée figure 33.2 :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

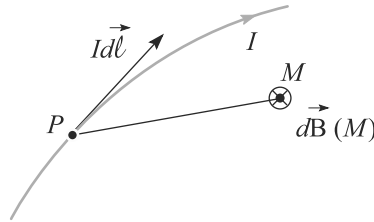


Figure 33.2 Contribution au champ rayonné d'un élément de courant.



- L'unité de champ magnétique est le tesla (T).
- $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ est la perméabilité magnétique du vide.

Le champ magnétique total en M est la somme de ces contributions pour tous les points P de la distribution :

Loi de Biot et Savart

$$\vec{B}(M) = \oint_{P \in L} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

Le fait que l'intégrale porte sur un contour fermé correspond simplement au fait que le circuit électrique doit être fermé pour que le courant puisse circuler !

33.2 Propriétés de symétrie du champ magnétique

33.2.1 Invariances de la distribution

Tout comme le champ électrique, le champ magnétique hérite des invariances de ses sources.

Méthode 1 Rechercher et exploiter les invariances

La méthode est identique à celle développée pour le champ électrique page 449. Cherchez les invariances de la distribution et reportez-les sur le champ magnétique **considéré comme une fonction**.

Exemple d'application

Étudiez les invariances du champ magnétique rayonné par un fil électrique rectiligne infini traversé par un courant I .

Solution

Soit Oz l'axe du fil. Travaillons en coordonnées cylindriques (figure 33.3). Le champ magnétique s'écrit donc :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(\rho, \theta, z)$$

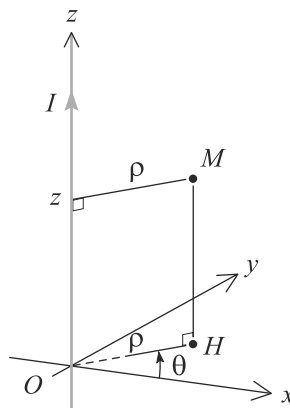


Figure 33.3 Étude des invariances d'un fil rectiligne infini.

- Le fil est invariant par translation le long de Oz , donc la dépendance en z disparaît.
- Le fil est invariant par rotation autour de Oz , donc la dépendance en θ disparaît.

Le champ magnétique est donc de la forme $\vec{B}(\rho)$.



Précisément, ce sont les composantes de \vec{B} qui sont indépendantes de θ et de z .

33.2.2 Symétries de la distribution

Les choses ne se passent pas comme pour le champ électrique car, contrairement aux charges électriques, les courants portent une orientation.

Un plan de symétrie ou d'antisymétrie doit laisser la forme géométrique de la distribution invariante, mais :

- un plan de symétrie ne retourne pas les courants ;
- un plan d'antisymétrie retourne les courants.

Méthode 2 Rechercher et exploiter les symétries

1. La recherche des plans de symétrie et d'antisymétrie se fait comme pour les distributions de charge électrique, page 450. Rappelons qu'il faut se donner le point M où calculer \vec{B} et considérer les plans de symétrie ou d'antisymétrie **passant par M** .
2. Les conséquences sur $\vec{B}(M)$ **considéré comme un vecteur** sont différentes : $\vec{B}(M)$ est orthogonal à un plan de symétrie et inclus dans un plan d'antisymétrie.



À cause de son comportement vis-à-vis des symétries, \vec{B} est appelé un **pseudovecteur**, ou **vecteur axial**. À l'opposé, \vec{E} est un **vecteur polaire**.

Exemple d'application

Étudiez les symétries dans le cas du fil infini abordé méthode précédente.

Solution

Soit M un point quelconque hors du fil. $\vec{B}(M)$, en tant que vecteur, se décompose sur la base cylindrique :

$$\vec{B}(M) = B_\rho \vec{e}_\rho + B_\theta \vec{e}_\theta + B_z \vec{e}_z$$

La figure 33.4 montre un plan d'antisymétrie et un plan de symétrie :

1. • Le plan orthogonal au fil passant par M est plan d'antisymétrie donc $\vec{B}(M)$ est inclus dedans. Donc $B_z = 0$.
• Le plan contenant le fil et passant par M est plan de symétrie donc $\vec{B}(M)$ lui est orthogonal. Donc seule la composante B_θ est non nulle.



Trouver un plan de symétrie permet de conclure plus vite car cela annule deux composantes d'un seul coup.

2. En combinant ce résultat avec celui de la recherche d'invariances, il apparaît que le champ magnétique en M s'écrit :

$$\vec{B}(M) = B_\theta(\rho) \vec{e}_\theta$$



La nécessité d'étudier séparément invariances et symétries apparaît clairement ici. C'est la composante B_θ qui est non nulle, mais elle dépend de ρ .

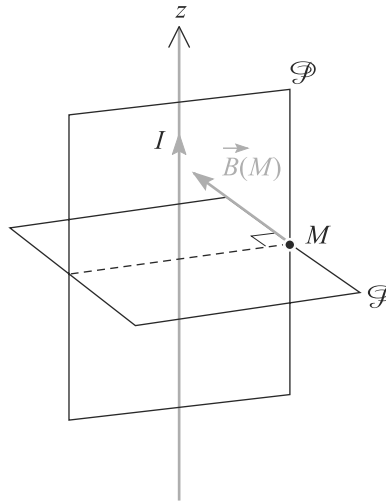


Figure 33.4 Plans de symétrie et d'antisymétrie du fil infini.

33.3 Calcul du champ magnétique rayonné par un conducteur filiforme

Comme pour le champ électrique, la première manière de mener le calcul est de partir de la définition intégrale. Nous verrons plus bas une seconde méthode, le théorème d'Ampère.

Méthode 3 Calculer le champ magnétique par méthode intégrale

Le raisonnement est le même que pour le champ magnétique, page 452.

1. Simplifiez l'expression de \vec{B} à l'aide des symétries de la distribution.
2. Découpez la distribution en petits éléments de courant.
3. Calculez la contribution $d\vec{B}$ de chaque petit élément de courant au champ total en veillant à n'avoir qu'une seule variable d'intégration.
4. Calculez l'intégrale donnée par la loi de Biot et Savart, en veillant à ne s'occuper que des composantes de \vec{B} qui seront non nulles.

Exemple d'application

Calculez le champ magnétique rayonné par le fil rectiligne infini des exemples précédents en tout point de l'espace hors du fil.

Solution

1. Nous avons déjà étudié les invariances et symétries. En base cylindrique, le champ magnétique se réduit à $\vec{B}(M) = B_\theta(\rho) \vec{e}_\theta$.
2. Prenons pour origine O le projeté de M sur le fil. La figure 33.5. Prenons un petit segment de fil de longueur dz situé en P , de cote z .

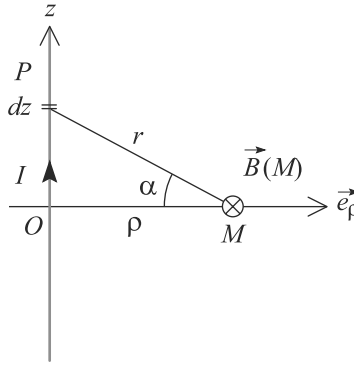


Figure 33.5 Calcul du champ rayonné par le fil par la méthode intégrale.

3. Calculons seulement la projection sur \vec{e}_θ du champ magnétique que ce petit segment rayonne en M :

$$\begin{aligned} d\vec{B}(M) \cdot \vec{e}_\theta &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(d\vec{l} \wedge \vec{PM}) \cdot \vec{e}_\theta}{\|\vec{PM}\|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(dz \vec{e}_z \wedge (-z \vec{e}_z + \rho \vec{e}_\rho)) \cdot \vec{e}_\theta}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \\ d\vec{B}(M) \cdot \vec{e}_\theta &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\rho dz}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

car $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_z = \vec{0}$ et $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho = \vec{e}_\theta$. Il serait possible d'intégrer sous cette forme, mais introduisons l'angle α indiqué sur la figure.

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{z}{\rho} \Rightarrow dz = \frac{\rho}{\cos(\alpha)^2} d\alpha \\ \cos(\alpha) &= \frac{\rho}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \Rightarrow \frac{\rho}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} = \frac{\cos(\alpha)^3}{\rho^2} \end{aligned}$$

Donc le champ rayonné par $dz(P)$ se réduit à :

$$d\vec{B}(M) \cdot \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos(\alpha) d\alpha}{\rho}$$

4. La composante suivant \vec{e}_θ du champ total rayonné en M est donc :

$$\vec{B}(M) \cdot \vec{e}_\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos(\alpha) d\alpha}{\rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

D'où le résultat :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{e}_\theta$$

Le champ présente donc l'allure de la figure 33.6.

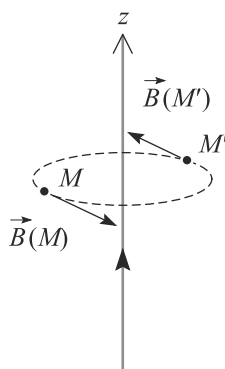


Figure 33.6 Le champ magnétique « tourne » autour du fil.

33.4 Propriétés vectorielles du champ magnétique

33.4.1 Flux du champ magnétique

Il est admis en première année que \vec{B} est à flux conservatif. En particulier, il est nul à travers toute surface fermée.

Définition

Le flux du champs magnetique \vec{B} est à circulation conservative

$$\phi = \oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

La figure 33.7 rappelle la manière de représenter le flux d'un champ à travers une petite surface $d\vec{S}$. La formule précédente en est la somme sur la surface complète.

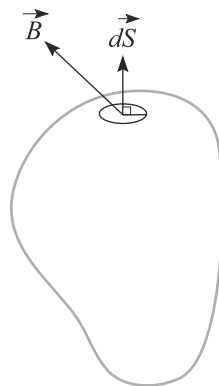


Figure 33.7 Flux de \vec{B} à travers une petite surface.

Le champ électrique n'avait pas cette propriété, ce qui était associé à l'existence de charges électriques ponctuelles (théorème de Gauss autour d'une charge ponctuelle). Donc **il n'existe pas de charge magnétique**.



L'unité de flux, le T.m^2 , est appelée le weber (Wb).

33.4.2 Circulation du champ magnétique

Contrairement au champ électrostatique, \vec{B} n'est pas à circulation conservative. Nous calculerons le plus souvent des circulations sur des contours fermés (appelés aussi **circuits**), ce qui s'écrit :

Définition

Circulation de \vec{B} le long d'un circuit Γ :

$$C_{\Gamma} = \oint_{M \in \Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l}(M)$$

Nous avons vu deux manières de calculer la circulation du champ électrique, mais une seule est applicable au champ magnétique, puisqu'il n'existe pas d'équivalent du potentiel pour \vec{B} .



Le résultat dépend de la forme du contour puisque, justement, \vec{B} n'est pas à circulation conservative.

Méthode 4 Calculer la circulation du champ magnétique

Il faut procéder par calcul intégral.

1. En général, lors d'un calcul de circulation, l'expression complète de \vec{B} n'est pas connue (le but est, justement de la déterminer par le théorème d'Ampère, voir page 520). Simplifiez alors au maximum l'expression générale de \vec{B} par les invariances et symétries.
2. Découpez le contour en petits éléments de courant de telle manière que le produit scalaire $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ soit simple à calculer et à intégrer.
3. Intégrez sur tout le contour.

Exemple d'application

Reprenons le fil rectiligne infini des méthodes précédentes. Le contour est un cercle Γ perpendiculaire au fil, de rayon ρ (figure 33.8). Calculez la circulation du champ magnétique rayonné par le fil sur Γ .

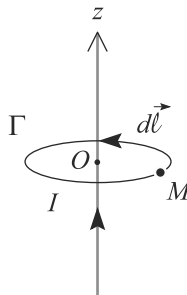


Figure 33.8 Calcul de la circulation du champ le long d'un contour fermé.

Solution

1. Nous avons déjà établi que, en coordonnées cylindriques, $\vec{B}(M) = B_{\theta}(\rho) \vec{e}_{\theta}$.

2. Le contour étant un cercle centré sur le fil, un petit élément de ce contour s'écrit $dl \vec{e}_\theta$. La longueur d'un arc de cercle de rayon ρ et d'ouverture angulaire $d\theta$ est $dl = \rho d\theta$. D'où :

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\theta(\rho) \rho d\theta$$

3. L'intégration est alors immédiate, en remarquant que ρ est constant puisqu'il s'agit du rayon du cercle. Comme B_θ ne dépend que de ρ , elle est constante aussi pour cette intégrale :

$$C_\Gamma = \int_0^{2\pi} B_\theta(\rho) \rho d\theta = B_\theta(\rho) \rho \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \rho B_\theta(\rho)$$

33.5 Théorème d'Ampère

La circulation de \vec{B} le long d'un contour fermé Γ est proportionnelle au courant électrique total enlacé par ce contour. La constante de proportionnalité est égale à μ_0 .

Théorème d'Ampère

$$\oint_{M \in \Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l}(M) = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

Méthode 5 Calculer un champ magnétique par le théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère est une méthode de calcul de \vec{B} intéressante quand la distribution de courants est riche en invariances et symétries. Techniquement, elle est intéressante si le produit scalaire $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ est simple à écrire sur un contour bien choisi.

1. Simplifiez au maximum l'expression générale de \vec{B} par les symétries et invariances.
2. Placez le point M où vous voulez calculer \vec{B} puis construisez un contour Γ **fermé**, dit contour d'Ampère, qui soit compatible avec les symétries du problème et **qui passe par M** .
3. Calculez la circulation C de \vec{B} le long de Γ . Il est courant que, si vous avez bien choisi votre contour, \vec{B} soit constant en norme sur Γ .
4. Calculez l'intensité totale $I_{\text{enlacé}}$ du courant qui passe la surface délimitée par Γ .
5. L'égalité $C = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$ vous permet de déterminer \vec{B} .



L'orientation choisie pour Γ détermine le sens positif de $I_{\text{enlacé}}$ par la règle des trois doigts.

Exemple d'application

Retrouvez le champ magnétique rayonné par le fil infini grâce au théorème d'Ampère.

Solution

1. Nous avons déjà établi que $\vec{B}(M) = B_\theta(\rho) \vec{e}_\theta$ en coordonnées cylindriques.
2. Le point M est pris quelconque hors du fil. Le contour d'Ampère adapté est alors le cercle perpendiculaire au fil et passant par M . Comme ρ est constant sur ce cercle, la norme du champ magnétique est aussi constante. Cela nous ramène à la figure 33.8.

3. Nous avons déjà mené le calcul de la circulation le long de ce cercle $C = 2\pi\rho B_\theta(\rho)$.
4. Un seul courant traverse le disque délimité par le cercle Γ , le courant I du fil. Donc $I_{\text{enlacé}} = I$.
5. Le théorème d'Ampère donne alors :

$$2\pi\rho B_\theta(\rho) = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B_\theta(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

qui redonne bien le résultat établi par méthode intégrale :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{e}_\theta$$

33.6 Topographie du champ magnétique



La définition des lignes de champ magnétique est la même que pour \vec{E} , ce sont des lignes tangentes en tout point à \vec{B} .

Il n'existe pas d'équivalent aux équipotentiels pour le champ magnétique. Nous ne considérerons alors que les lignes de champ magnétique.

- Deux lignes de champ ne peuvent se couper, sauf en un point de champ magnétique nul.
- Sur l'exemple du fil rectiligne infini, nous constatons que les lignes de champ s'enroulent autour des sources de champ magnétique (figure 33.9), le sens de rotation dépendant du sens de circulation du courant.

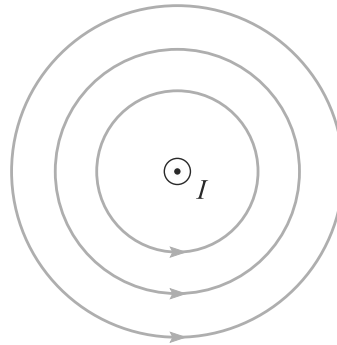


Figure 33.9 Enroulement des lignes de champ magnétique autour de leur source.

Synthèse

Savoirs

- Loi de Biot et Savart
- Théorème d'Ampère
- Caractère axial du champ magnétique
- Le champ magnétique est à flux conservatif (absence de charge magnétique)

Savoir-faire

- Repérer invariances et symétries des distributions pour simplifier l'expression du champ magnétique
- Choisir un contour d'Ampère respectant les symétries de la distribution étudiée
- Reconnaître une carte de champ magnétique

Mots-clés

- Champ magnétique,
- courant,
- loi de Biot et Savart,
- théorème d'Ampère,
- contour,
- carte de champ.

Tests de connaissances

- 33.1 Les champs électrique et magnétique ont même dimension physique.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 33.2 La loi de Biot et Savart sous-tend le caractère axial du champ magnétique.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 33.3 Le champ magnétique a la dimension de μ_0 fois une intensité divisée par une distance au carré.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 33.4 Un plan de symétrie pour une distribution de courant est un plan d'antisymétrie pour le champ magnétique.

☐ a. Vrai ☐ b. Faux

- 33.5 Les invariances des distributions ont des conséquences différentes pour les composantes des champs électriques et magnétiques.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 33.6 Le théorème d'Ampère ne s'applique que sur des contours soigneusement choisis.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 33.7 Le champ magnétique n'est pas défini sur les fils qui l'engendrent.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

33.8 Champ dans un câble coaxial

Un câble coaxial est constitué de deux cylindres de même axe, de rayons R_1 et $R_2 > R_1$, conducteurs, sur lesquels circulent des courants I et $-I$ respectivement (figure 33.10). Ces courants circulent de manière uniforme sur les surfaces métalliques des cylindres.

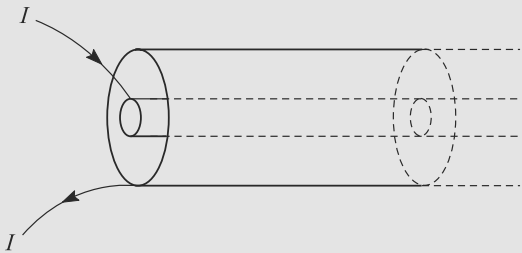


Figure 33.10 Câble coaxial.

- Calculez le champ magnétique rayonné dans tout l'espace.
- Déduisez-en un intérêt pratique de ce type de câble.

33.9 Champ magnétique rayonné par une bobine

- Établissez par calcul direct le champ magnétique rayonné par une boucle de courant (appelée **spire**) de rayon R en tout point M de son axe. Vous donnerez le résultat en fonction de α , angle sous lequel est vue la spire depuis M , puis en fonction de z , abscisse de M . Tracez la courbe donnant la norme du champ en fonction de z .
- Que devient le résultat pour un bobinage serré de N spires, l'ensemble restant d'épaisseur négligeable ?

- Calculez le champ rayonné par un bobinage de n spires par unité de longueur formant un ensemble de longueur l (appelé **solénoïde**) ? Vous donnerez le résultat en fonction de α_1 et α_2 , angles sous lesquels sont vues les deux extrémités du solénoïde depuis le point M (figure 33.11).
- Déduisez-en le champ magnétique rayonné par un solénoïde infini sur son axe.

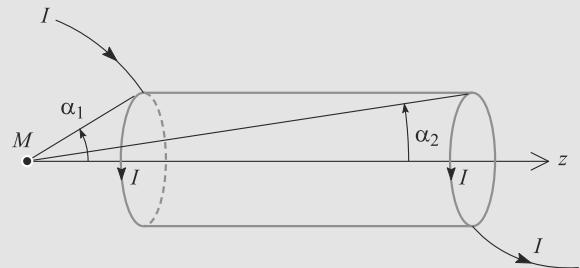


Figure 33.11 Paramétrage pour le champ rayonné par une bobine.

33.10 Bobines de Helmholtz

(D'après Agrégation interne.)

Rappelons que le champ magnétique rayonné par une spire de rayon R , traversée par un courant I , en un point M de son axe Ox est donné par :

$$\vec{B}_e(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin(\alpha)^3 \vec{e}_x$$

où α est l'angle sous lequel est vue la spire depuis le point M .

1. Exprimez le rapport B/B_0 , où $B = \|\vec{B}(M)\|$ et B_0 sa valeur au centre de la spire en fonction de la variable $u = x/R$. Tracez $B(u)$.
2. Le montage des bobines de Helmholtz consiste en deux bobines plates identiques (N spires chacune, même rayon R , même courant I , même axe) placées à la distance R l'une de l'autre. Ce montage est représenté figure 33.12.

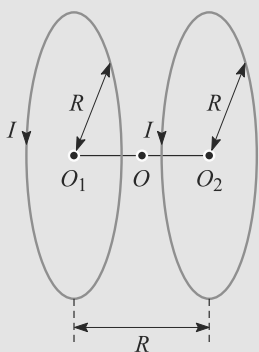


Figure 33.12 Bobines de Helmholtz.

- a) Calculez le champ magnétique en O , point situé sur l'axe au milieu des deux bobines.

- b) Construisez graphiquement l'allure du champ en tout point de l'axe Ox . **L'équation de cette courbe n'est pas demandée.** Concluez sur une utilisation possible de ce montage.

■ ■ ■

33.11 Spire carrée

Considérons une spire carrée de côté a parcouru par un courant I constant, illustrée figure 33.13.

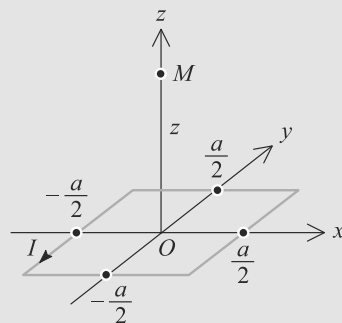


Figure 33.13 Spire carrée.

1. Déterminez le champ magnétique rayonné par cette spire sur son axe Oz , le point O étant au centre du carré.
2. Application numérique en O avec $a = 10$ cm et $I = 1$ A.

Exercices d'approfondissement

■ ■ ■
33.12 Champ rayonné par un solénoïde épais
(D'après ENGEES.)

Le champ magnétique rayonné par un solénoïde de rayon a , de longueur $2l$, d'axe Ox traversé par un courant I et possédant n spires par unité de longueur rayonne en son centre O un champ magnétique :

$$\vec{B}(O) = \mu_0 n I \frac{l}{\sqrt{l^2 + a^2}} \vec{e}_x$$



Cette formule a été établie exercice 9.

Données : $I = 30$ A ; $2l = 10$ cm ; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ SI.

Pour augmenter ce champ, superposons un grand nombre de solénoïdes jointifs ayant même n , même axe et même longueur. Leurs rayons varient de $a = R_1$ à $a = R_2$ (figure 33.14). Il y a n' solénoïdes par unité d'épaisseur.

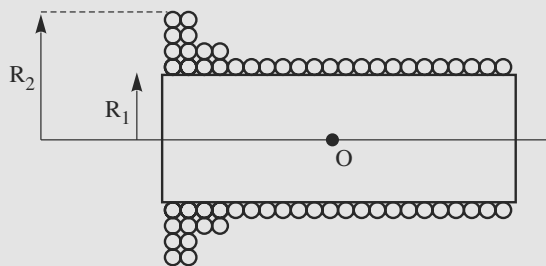


Figure 33.14 Solénoïde épais.

1. Écrivez la contribution $d\vec{B}(O)$ au champ $\vec{B}(O)$ par la couche comprise entre les rayons r et $r + dr$.
 2. Déduisez-en le champ total rayonné en O .
- Indication :

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \ln \left(\frac{u_2 + \sqrt{u_2^2 + 1}}{u_1 + \sqrt{u_1^2 + 1}} \right)$$

3. Si $R_2 = 2R_1 = l$, montrez que $\|\vec{B}(O)\| = 0,4\mu_0 nn' II$.
4. Nous voulons obtenir un champ en O de 10 T. Donnez la valeur numérique du nombre de spires nécessaire.

33.13 Bobine torique

Une bobine torique est une bobine en forme de tore de section carrée a et de rayon intérieur R . Elle est constituée de N spires parcourues par un courant I (figure 33.15).

1. Déterminez le champ magnétique rayonné par cette distribution.
2. Calculez le flux de ce champ à travers les N spires et mettez-le sous la forme $\phi = LI$ où L est un coefficient que vous discuterez.

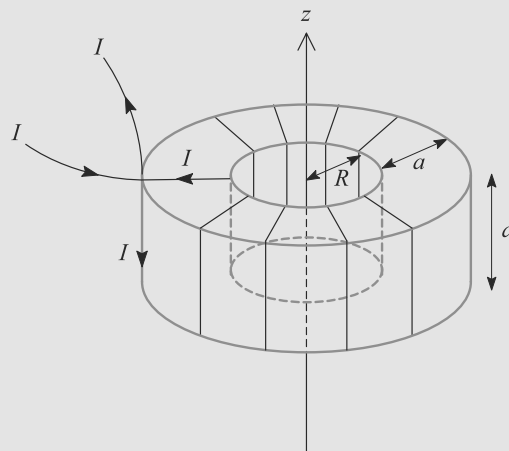


Figure 33.15 Bobine torique.

33.1

Faux, ils diffèrent d'une quantité homogène à une vitesse (voir force de Lorentz).

33.2

Vrai, par le produit vectoriel qu'elle contient.

33.3

Faux, il ne faut diviser que par une distance (voir loi de Biot et Savart).

33.4

Vrai car le champ magnétique est un vecteur axial.

33.5

Faux, elles sont identiques : supprimer la dépendance en certaines coordonnées d'espace.

33.6

Faux il s'applique sur tout contour fermé mais il n'est fructueux pour calculer un champ que si les symétries sont suffisamment importantes et le contour bien choisi.

33.7

Vrai. En effet, l'expression du champ diverge au voisinage des fils portant les courants.

33.8 Champ dans un câble coaxial

Méthodes mises en jeu : n° 1a, 1b, 3 et 4.

Cet exercice basique vérifie que vous avez bien compris ce qu'est le courant enlacé qui apparaît dans le théorème d'Ampère. Faites une figure claire indiquant le contour d'Ampère à chaque utilisation du théorème.

1. Le câble est représenté figure 33.16 et paramétré en coordonnées cylindriques. Le point où est calculé \vec{B} est noté M .

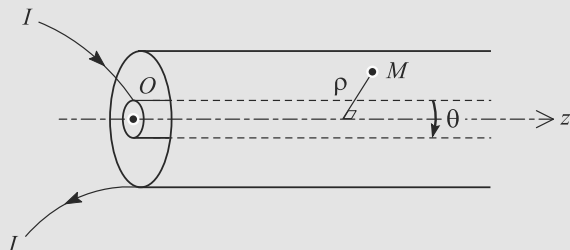


Figure 33.16 Paramétrage du câble coaxial.

Le plan MOz est plan de symétrie donc \vec{B} lui est orthogonal. Donc $\vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_\theta$.

La distribution de courant est invariante par translation suivant Oz et par rotation autour de Oz . Donc les composantes de \vec{B} ne dépendent pas de θ ni de z . Finalement :

$$\vec{B}(M) = B(\rho)\vec{e}_\theta$$

Utilisons le théorème d'Ampère sur un cercle d'axe Oz passant par M . La circulation de \vec{B} vaut :

$$\begin{aligned}\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint B(\rho)\vec{e}_\theta \cdot d\vec{l}\vec{e}_\theta \\ &= B(\rho) \oint dl \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= 2\pi\rho B(\rho)\end{aligned}$$

Le théorème d'Ampère s'écrit donc :

$$2\pi\rho B(\rho) = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

Le courant enlacé par ce contour dépend de la valeur de ρ :

- Si $\rho < R_1$, il n'y a aucun courant enlacé.
- Si $R_1 \leq \rho \leq R_2$, $I_{\text{enlacé}} = I$.
- Si $\rho > R_2$, le courant enlacé vaut $I - I = 0$.

D'où le champ magnétique :

$$\begin{aligned}\vec{B}(\rho < R_1) &= \vec{0} \\ \vec{B}(R_1 \leq \rho \leq R_2) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{e}_\theta \\ \vec{B}(\rho > R_2) &= \vec{0}\end{aligned}$$

Ce champ est représenté figure 33.17.

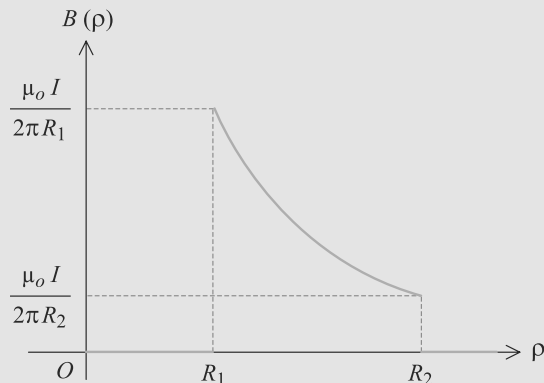


Figure 33.17 Champ rayonné par un câble coaxial.

2. Le champ magnétique rayonné à l'extérieur du câble est nul, ce qui limite d'éventuels problèmes de parasites au voisinage du fil.

33.9

Champ magnétique rayonné par une bobine

Méthodes mises en jeu : toutes !

Il s'agit essentiellement de questions de cours. En dehors de la dernière question, qui est assez riche en symétrie, le théorème d'Ampère n'est pas utilisable et il faut se rabattre sur la méthode intégrale.

1. Le paramétrage est donné figure 33.18. Travaillons en coordonnées cylindriques d'axe Oz . Soit M un point de l'axe.

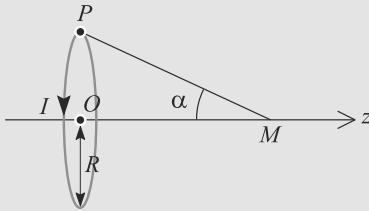


Figure 33.18 Paramétrage d'une spire.

La distribution (la spire) est invariante par rotation autour de Oz donc les composantes de $\vec{B}(M)$ sont indépendantes de l'angle θ . Nous travaillons spécifiquement à $\rho = 0$ (points sur l'axe) donc $\vec{B}(M) = \vec{B}(z)$.

Tous les plans contenant l'axe Oz et M sont plans d'antisymétrie pour la spire donc $\vec{B}(M)$ est inclus dans leur intersection, qui est l'axe Oz . D'où :

$$\vec{B}(M) = B(z) \vec{e}_z$$

Découpons la spire en petits éléments $d\vec{l}$. La contribution à $\vec{B}(M)$ d'un petit élément situé en P est représentée figure 33.19 et vaut :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

$d\vec{l}$ et \overrightarrow{PM} sont orthogonaux entre eux et nous n'avons besoin de calculer que la projection de $d\vec{B}(M)$ sur l'axe Oz donc :

$$\begin{aligned} dB_z(M) &= d\vec{B}(M) \cdot \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ dB_z(M) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin(\alpha)}{r^2} \end{aligned}$$

En outre :

$$\sin(\alpha) = \frac{R}{r}$$

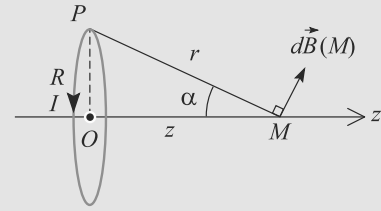


Figure 33.19 Contribution d'un élément de courant de la spire au champ rayonné.

D'où :

$$\begin{aligned} B_z(M) &= \int_{\text{fil}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin(\alpha)}{R^2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin(\alpha)^3}{R^2} \int_{\text{fil}} dl \\ B_z(M) &= \frac{\mu_0 I \sin(\alpha)^3}{2R} \end{aligned}$$

Le champ demandé est donc, en fonction de α :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I \sin(\alpha)^3}{2R} \vec{e}_z$$

Pour l'exprimer en fonction de z , il suffit de remarquer que :

$$\sin(\alpha) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

Il vient alors :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

qui est représenté figure 33.20.



En prenant la limite du champ rayonné à grande distance par la spire ($z \gg R$), nous retrouvons le champ rayonné par un dipôle magnétique.

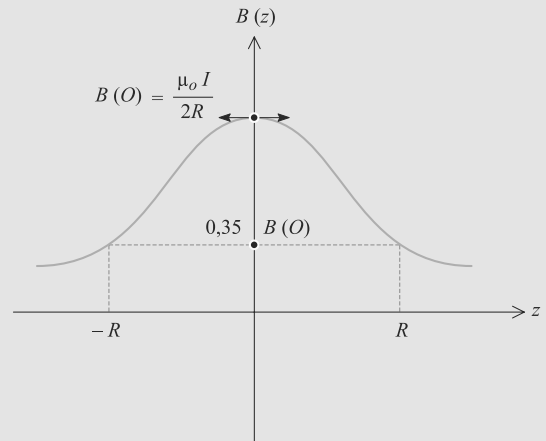


Figure 33.20 Champ rayonné par une spire.

2. Cela revient à additionner les champs rayonnés par chaque spire. Comme les spires sont toutes dans le même plan, cela se réduit à multiplier le résultat de la question précédente par N :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 N I \sin(\alpha)^3}{2R} \vec{e}_z$$

3. La bobine peut être découpée en spires coaxiales mais, contrairement à la question précédente, pas dans le même plan. Le champ possède les mêmes symétries que dans le cas de la spire donc il est de même forme.

Considérons une tranche de bobine d'épaisseur dz . Elle contient donc $dN = n dz$ spires. Le paramétrage est donné figure 33.21.

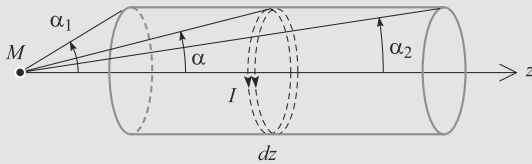


Figure 33.21 Découpage d'une bobine en spires pour le calcul du champ rayonné.

D'après la question précédente, le champ rayonné en M par cette tranche est :

$$\begin{aligned} d\vec{B}(M) &= \frac{\mu_0 dN I \sin(\alpha)^3}{2R} \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 n I}{2R} dz \sin(\alpha)^3 \vec{e}_z \end{aligned}$$

z et α ne sont pas indépendantes :

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{R}{z} \\ \Rightarrow dz &= \frac{-R}{\sin(\alpha)^2} d\alpha \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \vec{B}(M) &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{-\mu_0 n I}{2} \sin(\alpha) \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)) \vec{e}_z \end{aligned}$$

4. Cette fois le point M peut être n'importe où dans l'espace. Le solénoïde étant de longueur infinie, nous avons une invariance de plus : l'invariance par translation le long de l'axe Oz . Donc $\vec{B}(M) = \vec{B}(\rho)$ où ρ est la distance à l'axe (coordonnées cylindriques).

Le plan contenant M et perpendiculaire à Oz est plan de symétrie donc $\vec{B}(M)$ lui est orthogonal. Donc $\vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_z$. D'où la forme du champ :

$$\vec{B}(M) = B(\rho) \vec{e}_z$$



À la différence des questions précédentes, cette forme est valable dans tout l'espace.

Il faut distinguer deux cas, selon que M est à l'intérieur ou l'extérieur du solénoïde, pour appliquer le théorème d'Ampère.

- M à l'intérieur, $\rho < R$: prenons le contour d'Ampère indiqué figure 33.22, de dimensions $h \times l$ avec un côté passant par l'axe du solénoïde. Le courant enlacé est nul.

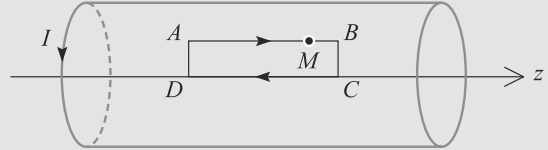


Figure 33.22 Contour d'Ampère pour un point à l'intérieur du solénoïde.

La circulation peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} C &= \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

\vec{B} étant orthogonal aux côtés BC et DA , les termes correspondants sont nuls. Le champ sur le côté CD a été calculé question précédente, nous sommes dans le cas particulier $\alpha_1 \rightarrow \pi$ et $\alpha_2 \rightarrow 0$ donc :

$$\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{e}_z \quad \text{sur le côté } CD$$

D'où la circulation :

$$C = B(\rho)l - B(O)l$$

Cette circulation est nulle d'après le théorème d'Ampère. Il apparaît donc que le champ magnétique est **uniforme** à l'intérieur du solénoïde et vaut :

$$\vec{B}(\rho < R) = \mu_0 n I \vec{e}_z$$

- M à l'extérieur $\rho > R$: prenons le contour d'Ampère indiqué figure 33.23, de dimensions $h \times l$.

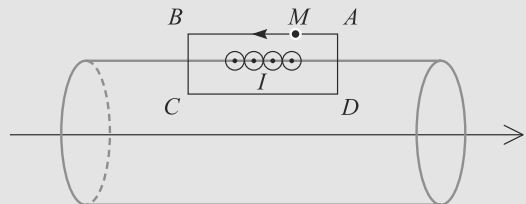


Figure 33.23 Contour d'Ampère pour un point extérieur au solénoïde.

Ce contour est traversé par nl fils donc le courant enlacé est $-nI$, le signe $-$ étant dû à l'orientation du contour.

La circulation de \vec{B} le long de ce contour s'écrit :

$$C = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

\vec{B} étant orthogonal aux côtés BC et DA , les termes correspondants sont nuls. Nous connaissons le champ sur le côté CD , il vient donc :

$$C = B(\rho)l - \mu_0 n I l$$

Le théorème d'Ampère donne alors :

$$\begin{aligned} B(\rho)l - \mu_0 n I l &= -\mu_0 n I l \\ \Rightarrow B(\rho) &= 0 \end{aligned}$$

Le champ est donc nul à l'extérieur du solénoïde.

D'où le bilan :

$$\begin{aligned} \vec{B}(\rho < R) &= \mu_0 n I \vec{e}_z \\ \vec{B}(\rho > R) &= \vec{0} \end{aligned}$$

33.10 Bobines de Helmholtz

Si vous ne connaissez pas déjà la propriété fondamentale de ce montage (dernière question), mémorisez-la une fois l'exercice résolu !

L'exercice est simple dans ses calculs, mais vous avez intérêt à utiliser une calculatrice graphique pour tracer l'allure de $B(u)$. Ne perdez pas du temps à mener une étude de la fonction « à la main », ce n'est pas ce qu'on vous demande !

1. Au centre de la spire, $\alpha = \pi/2$ donc :

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_x$$

En outre :

$$\sin(\alpha) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$



Reportez-vous à la figure 33.18 de l'exercice 9 pour le paramétrage d'une spire.

D'où le résultat :

$$\begin{aligned} \frac{B}{B_0} &= \frac{R^3}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \\ \Rightarrow B(u) &= \frac{1}{(1 + u^2)^{3/2}} B_0 \end{aligned}$$

$B(u)$ est tracée figure 33.24.

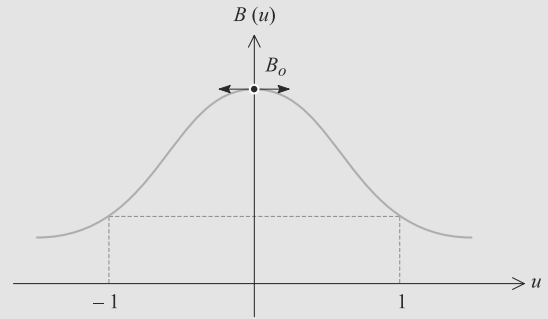


Figure 33.24 Champ rayonné par une spire en variable réduite u .

2. Le champ rayonné par une bobine de N spires à une distance $R/2$ de son centre est N fois celui d'une spire. Pour la bobine de gauche, le champ cherché est donc :

$$B\left(u = \frac{1}{2}\right) = \frac{NB_0}{\left(1 + \frac{1}{4}\right)^{3/2}} = \frac{8NB_0}{5\sqrt{5}}$$

Le champ rayonné par la bobine de droite est $B(u = -1/2)$. Comme $B(u)$ est paire, les deux champs sont égaux donc le champ cherché est :

$$\vec{B}(O) = \frac{16NB_0}{5\sqrt{5}} \vec{e}_x$$

La figure 33.25 montre comment les deux courbes de champ, chacune centrée sur une spire, s'additionnent pour donner le champ total sur l'axe.

Il apparaît que le champ varie très peu dans l'intervalle $[0, R]$ donc ce montage permet de réaliser un champ quasiment uniforme entre les bobines.

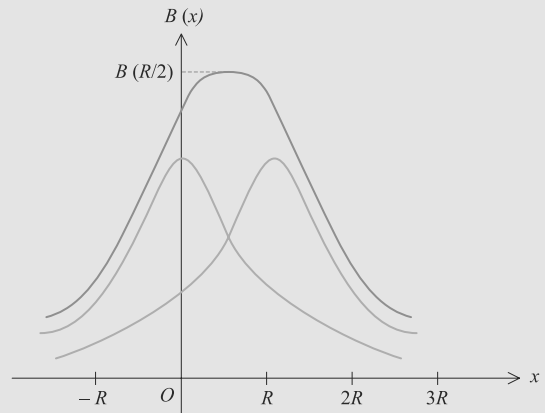


Figure 33.25 Champ rayonné par deux bobines en configuration de Helmholtz.

33.11

Spire carrée

Méthodes mises en jeu : n° 1a, 1b, 2.

La mise en œuvre est élémentaire, suivant directement les méthodes du cours. Mais les calculs sont touffus, donc faites autant de figures que nécessaire pour bien voir les orientations, les angles entre vecteurs, etc.

1. Soit M un point d'abscisse z sur l'axe Oz .

Les deux plans contenant OM et les milieux de deux côtés opposés sont plans d'antisymétrie donc \vec{B} est contenu dans leur intersection, qui est l'axe Oz . Donc $\vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_z$.

Dans cet exercice M se trouve forcément sur l'axe Oz , donc nous ne ferons varier que son abscisse z . Donc le champ sera ici de la forme :

$$\vec{B}(M) = B(z)\vec{e}_z$$

Par symétrie, chaque côté du carré doit contribuer de la même manière au champ magnétique total en un point M de cote z . Nous n'allons donc calculer que le champ rayonné par un côté.

La figure 33.26 montre le paramétrage pour un côté.

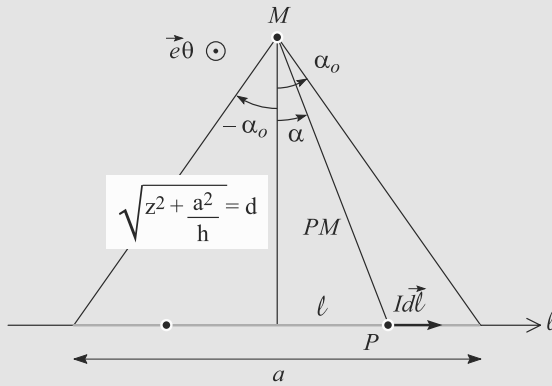


Figure 33.26 Paramétrage pour un côté du carré.

Le champ rayonné par ce côté s'écrit :

$$\vec{B}_1(M) = \oint_{\text{côté}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

avec :

$$\begin{aligned} d\vec{l} &= dl \vec{e}_\rho \\ \tan(\alpha) &= \frac{l}{d} \Rightarrow dl = \frac{d}{\cos(\alpha)^2} d\alpha \\ \cos(\alpha) &= \frac{d}{\|\vec{PM}\|} \Rightarrow \frac{1}{\|\vec{PM}\|^3} = \frac{\cos(\alpha)^3}{d^3} \end{aligned}$$

En décomposant $\vec{PM} = \vec{PA} + \vec{AM}$, il vient :

$$\begin{aligned} \vec{B}_1(M) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \cos(\alpha_0) d\alpha \vec{e}_\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \sin(\alpha_0) \vec{e}_\theta \\ \vec{B}_1(M) &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi d} \frac{1}{\sqrt{4d^2 + a^2}} \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

Nous ne sommes intéressés que par la projection de ce champ sur l'axe Oz . La figure 33.27 indique l'angle intervenant dans le calcul.

$$\begin{aligned} B_{1z}(M) &= \vec{B}_1(M) \cdot \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi d} \frac{1}{\sqrt{4d^2 + a^2}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ B_{1z}(M) &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi d} \frac{1}{\sqrt{4d^2 + a^2}} \sin(\theta) \end{aligned}$$

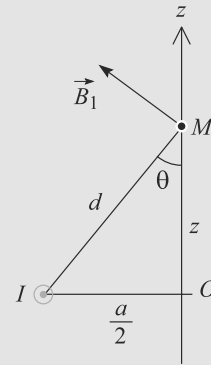


Figure 33.27 Angle entre le champ et l'axe Oz .

D'après la figure :

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \frac{a}{2d} \quad \text{et} \quad d = \sqrt{\frac{a^2}{4} + z^2} \\ \Rightarrow B_{1z}(M) &= \frac{\mu_0 I a^2}{\pi(a^2 + 4z^2) \sqrt{2a^2 + 4z^2}} \end{aligned}$$

La projection du champ total s'obtient en multipliant par le nombre de côtés. D'où le champ total :

$$\vec{B}(M) = \frac{4\mu_0 I a^2}{\pi(a^2 + 4z^2) \sqrt{2a^2 + 4z^2}} \vec{e}_z$$

2. En $z = 0$, il vient $B(O) = 1,13 \cdot 10^{-5} \text{ T}$.

33.12

Champ rayonné par un solénoïde épais

Méthodes mises en jeu : n° 1a, 1b, 2.

L'exercice est plutôt technique. Vous devez chercher à vous ramener à des systèmes simples connus. Ce solénoïde épais peut être vu comme composé d'un grand nombre de solénoïdes, coaxiaux mais de rayons différents.

1. Entre r et $r + dr$, il y a $n' dr$ solénoïdes donc il suffit de multiplier le résultat de l'énoncé par ce nombre :

$$d\vec{B}(O) = \mu_0 n n' dr I \frac{l}{\sqrt{l^2 + r^2}} \vec{e}_x$$

2. Par sommation sur r :

$$\begin{aligned} \vec{B}(O) &= \int_{R_1}^{R_2} d\vec{B}(O) \\ &= \mu_0 n n' I l \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\sqrt{l^2 + r^2}} \vec{e}_x \\ &= \mu_0 n n' I l \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\left(\frac{r}{l}\right)}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{l^2}}} \vec{e}_x \\ \vec{B}(O) &= \mu_0 n n' I l \ln \left(\frac{\frac{R_2}{l} + \sqrt{1 + \frac{R_2^2}{l^2}}}{\frac{R_1}{l} + \sqrt{1 + \frac{R_1^2}{l^2}}} \right) \vec{e}_x \end{aligned}$$

3. Avec les valeurs données, le terme logarithmique de ce résultat se réduit à :

$$\ln \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}} \right) = 0,4$$

D'où le résultat attendu, en norme :

$$\|\vec{B}(O)\| = 0,4 \mu_0 n n' I l$$

4. Chaque solénoïde a $n \times 2l$ spires et il y a $n' \times (R_2 - R_1)$ solénoïdes sur l'épaisseur. D'où le nombre de spires :

$$N = n 2l n' (R_2 - R_1)$$

En outre, de la question précédente nous tirons :

$$n n' = \frac{B(O)}{0,4 \mu_0 I l}$$

D'où le résultat :

$$N = \frac{B(O) 2(R_2 - R_1)}{0,4 \mu_0 I} = 33157 \text{ spires}$$

33.13

Bobine torique

Méthodes mises en jeu : n° 1a, 1b, 3 et 4.

Poser le calcul est simple si vous êtes rigoureux dans le développement du théorème d'Ampère ; faites une figure claire pour visualiser le courant enlacé.

La deuxième question, plus originale, suggère le lien entre inductance et propriétés magnétiques d'une bobine. Ce lien sera étudié en seconde année.

1. Nous travaillerons en coordonnées cylindriques d'axe Oz pour repérer le point M où calculer le champ.

Le plan MOz est plan de symétrie donc $\vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_\theta$.

La distribution est invariante par rotation autour de Oz donc les composantes de \vec{B} sont indépendantes de θ . Finalement :

$$\vec{B}(M) = B(\rho, z) \vec{e}_\theta$$

Appliquons le théorème d'Ampère avec comme contour le cercle d'axe Oz passant par M . La circulation de \vec{B} vaut :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi \rho B(\rho, z)$$

Le courant enlacé dépend des valeurs de ρ et de z :

- Si le cercle ne passe pas dans le tore (figure 33.28), le courant enlacé est nul donc le champ en M aussi.

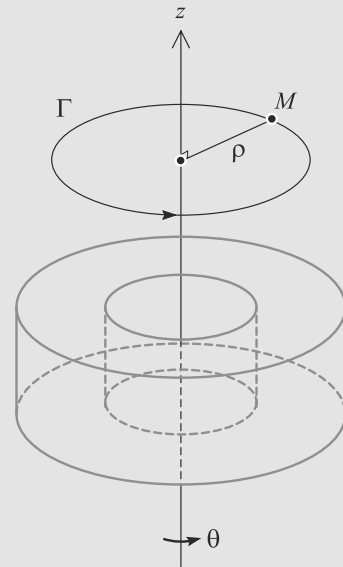


Figure 33.28 Contour d'Ampère ne passant pas dans le tore.

- Si le cercle passe dans le tore (figure 33.29), il enlace tous les côtés intérieurs des spires donc $I_{\text{enlacé}} = NI$. D'où :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi \rho} \vec{e}_\theta$$

pour tout point intérieur au tore.

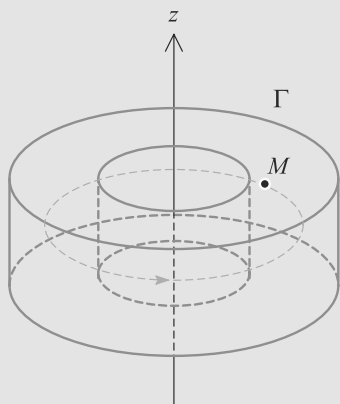


Figure 33.29 Contour d'Ampère passant dans le tore.



Malgré les apparences, $\vec{B}(M)$ dépend de z ! La formule donnée n'est valable que pour z tel que le cercle passe dans le tore.

2. Un morceau de surface d'une spire s'écrit $d\vec{S} = dS \vec{e}_\theta$ donc le flux à travers une spire vaut :

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \iint_{\text{spire}} \frac{\mu_0 N I}{2\pi \rho} \vec{e}_\theta \cdot dS \vec{e}_\theta \\ &= \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \iint_{\text{spire}} \frac{dS}{\rho}\end{aligned}$$

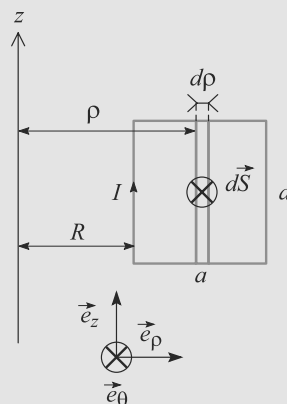


Figure 33.30 Vue en coupe de la bobine torique.

D'après vue en coupe de la figure 33.30, $dS = a d\rho$ donc :

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{a\mu_0 N I}{2\pi} \int_R^{R+a} \frac{d\rho}{\rho} \\ &= \frac{a\mu_0 N I}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)\end{aligned}$$

Donc le flux à travers les N spires est $\phi = N\phi_1$:

$$\phi = \frac{a\mu_0 N^2 I}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

D'où le coefficient cherché :

$$L = \frac{a\mu_0 N^2}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

μ_0 est en H.m^{-1} et a est une longueur donc L est en henry. Elle est homogène à une inductance.

Plan

34.1 Généralités	533
34.2 Charge dans un champ électrique permanent uniforme	534
34.3 Charge dans un champ magnétique permanent uniforme	534
Synthèse	534
Tests et exercices	535
Corrigés des exercices	537

Introduction

Ce chapitre relève plus de la mécanique que de l'électromagnétisme. Vous devez seulement vous habituer à un nouveau type de force et résoudre le problème de dynamique en conséquence.

Prérequis

- Principe fondamental de la dynamique
- Forces électrique et magnétique
- Puissance des forces

Objectifs

- Traiter les deux cas particuliers de mouvements de particules chargées dans des champs uniformes et constants

34.1 Généralités

Une particule chargée ponctuelle q placée en un point M où règnent un champ électrique \vec{E} et un champ magnétique \vec{B} subit de leur part une force dite de Lorentz.

Définition

La Force de Lorentz sur une charge q est définie par :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$



- Cette force apparaît comme la somme d'une force électrique $q\vec{E}$ et d'une force magnétique $q\vec{v} \wedge \vec{B}$.
- La force magnétique ne travaille jamais. Elle peut donc seulement faire tourner le vecteur vitesse, et c'est la force électrique qui peut provoquer une accélération.
- Malgré les apparences, cette force est bien indépendante du référentiel d'étude. Mais cela implique que \vec{E} et \vec{B} , eux, ne le sont pas.

34.2 Charge dans un champ électrique permanent uniforme

Le problème de dynamique est très simple. En général, une particule chargée a une masse si faible que son poids est largement négligeable devant la force électrique.

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} &= q\vec{E} \\ \Rightarrow \vec{v} &= \frac{q}{m} \vec{E} t + \vec{v}_0 \\ \Rightarrow \vec{r}(t) &= \frac{q}{2m} \vec{E} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \end{aligned}$$

où \vec{r}_0 et \vec{v}_0 sont la position et la vitesse initiales de la particule.

Comme $\vec{F} = q\vec{E} = -q\overrightarrow{\text{grad}}(V)$, la force électrique est conservative et donc l'énergie mécanique de la particule est un invariant du mouvement :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m\vec{v}^2 + qV = \text{cst}$$

34.3 Charge dans un champ magnétique permanent uniforme



Puisque cette force ne travaille pas, nous savons déjà que la vitesse sera constante en norme.

Le PFD s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Si \vec{v}_0 est colinéaire à \vec{B} , un calcul immédiat montre que le mouvement est rectiligne uniforme : le champ magnétique n'a aucun effet.

Si \vec{v}_0 est perpendiculaire à \vec{B} , le mouvement est hélicoïdal. Le calcul est développé dans l'exercice 5.

Synthèse

Savoirs

- Expression de la force de Lorentz et de la puissance qu'elle développe

Savoir-faire

- Obtenir les mouvements de particules chargées dans des champs uniformes et constants

Mots-clés

- Force de Lorentz

Tests de connaissances

- 34.1 Grâce à un champ électrique, on peut donner la vitesse qu'on veut à une particule chargée.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux
- 34.2 On néglige le poids des particules devant la force de Lorentz par commodité.

☐ a. Vrai ☐ b. Faux

- 34.3 Le champ magnétique sert à dévier les particules chargées et le champ électrique sert à les accélérer.
☐ a. Vrai ☐ b. Faux

Exercices d'application

34.4 Tension accélératrice

(D'après Mines de première année.)

Une particule de charge q et de masse m est placée entre deux plaques chargées distantes de d , entre lesquelles règne un champ électrique $\vec{E} = E \vec{e}_y$ supposé uniforme (figure 34.1). Elle est lâchée en A sur une des plaques sans vitesse initiale.

- Déterminez la suite du mouvement. Où aboutit la particule lorsqu'elle touche la seconde plaque ?
- Calculez la tension $U = V_A - V_B$ entre les deux plaques. Cette tension est appelée **tension accélératrice**.
- Quel est le signe du produit qU ? Établissez la vitesse de la particule en fin d'accélération en fonction de sa masse et de qU .
- Remplissez numériquement le tableau ci-dessous, relatif à l'accélération d'un électron. Commentez.

Tension accélératrice	1 V	1 kV	1 MV
Vitesse atteinte (m.s ⁻¹)			

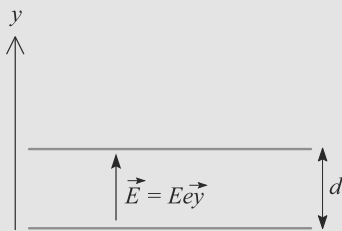


Figure 34.1 Accélération d'une particule entre deux plaques chargées.

34.5 Particule dans un champ magnétique uniforme

(D'après Mines-Ponts MP.)

Une particule de charge $q > 0$ et de masse m est placée dans un champ magnétique constant $\vec{B} = B \vec{e}_z$.

Initialement, elle est placée à l'origine du repère avec une vitesse initiale située dans le plan yOz et faisant un angle α avec Oy .

- Établissez deux équations différentielles faisant intervenir les coordonnées cartésiennes x et y de la particule. Vous poserez :

$$\omega_c = \frac{qB}{m}$$

- En combinant ces deux équations, établissez deux équations indépendantes, l'une gouvernant $x(t)$ et l'autre $y(t)$.
- Déterminez la trajectoire de la particule.

34.6 Générateur magnétohydrodynamique

(D'après Mines de première année.)

Considérons le dispositif de la figure 34.2. A_1 et A_2 sont deux armatures planes conductrices distantes de D perpendiculaires au plan de la figure. Un champ magnétique uniforme règne entre les plans, lui aussi perpendiculaire au plan de la figure.

Un dispositif non représenté injecte entre les armatures un plasma, gaz ionisé électriquement neutre constitué de cations et d'électrons. Sous l'action du champ magnétique, les électrons et les cations sont séparés verticalement. Les électrons accumulés sur A_2 peuvent alors donner naissance à un courant électrique I dans le circuit.

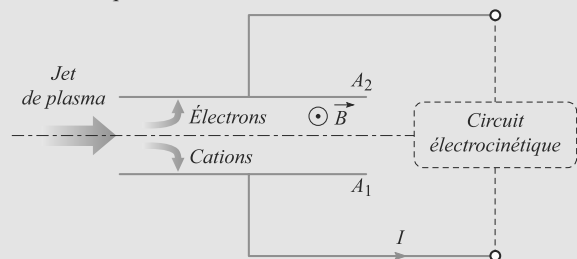


Figure 34.2 Générateur magnétohydrodynamique.

Cela réalise un générateur de courant **magnétohydrodynamique**.

1. Les armatures sont initialement déchargées. Expliquez sans calcul ce qui se passe au niveau des deux armatures et décrivez l'évolution vers un régime permanent dans lequel le jet de plasma traverse l'espace entre les armatures sans être dévié.

2. Montrez que ce régime permanent correspond à l'existence entre les armatures d'un champ électrique \vec{E} que vous exprimerez en fonction de \vec{B} et de la vitesse \vec{v} des particules du jet.
3. Application numérique : calculez la tension à vide $V_1 - V_2$ entre les armatures avec $v = 500 \text{ m.s}^{-1}$; $B = 2 \text{ T}$; $D = 1 \text{ cm}$.

Exercices d'approfondissement

34.7 Étude d'un faisceau d'électrons (D'après Mines-Ponts)

On considère un faisceau électronique cylindrique, émis en O, de rayon a , de section $s = \pi a^2$ dans une région $0 < z < l$. On notera $I_0 = I(z) > 0$ le courant électrique qui traverse une section du faisceau. On pourra utiliser les coordonnées cylindriques (r, θ, z) exprimées dans la base cylindrique locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ représentée sur la figure 34.3.

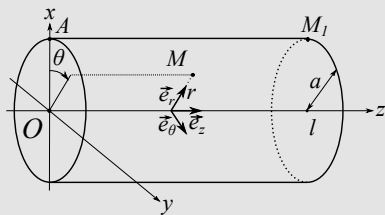


Figure 34.3 Coordonnées cylindriques.

1. a) Représenter sur un schéma le sens du courant I_0 . Exprimer I_0 en fonction de a , u_0 , vitesse des électrons et de la charge volumique électronique ρ , supposée uniformément répartie dans le cylindre.
b) On va calculer le champ électrique \vec{E} en faisant l'hypothèse qu'il est le même qu'en électrostatique. Montrer

que \vec{E} créé par cette distribution cylindrique de charges ne dépend alors que de la distance radiale r à l'axe du cylindre (effets de bord négligés). En déduire l'expression de \vec{E} en fonction de r , de la permittivité du vide ϵ_0 ainsi que de I_0 , u_0 , et a à l'intérieur du faisceau.

2. On considère qu'un électron situé à la périphérie du faisceau évolue dans le champ uniforme $\vec{E}(a)$. Calculer la déviation radiale Δr qu'il subit en fonction de e , m , \vec{E} et de $\tau = l/u_0$ la durée du trajet d'un électron périphérique entre (A) et (M_1). En déduire que l'on ne peut considérer que le faisceau d'électrons reste approximativement cylindrique qu'à une certaine condition, que l'on écrira sous la forme $I_0 \ll I_1$. On exprimera I_1 en fonction de m , e , a , u_0 , ϵ_0 et l . On dira alors que l'on néglige la défocalisation du faisceau.
3. a) Déterminer le champ magnétique créé par le courant d'électrons pour $r > a$. Montrer que ce champ est identique à celui d'un fil dans lequel circule le courant I_0 .
b) Déterminer la condition pour que la force de Lorentz se résume à sa partie électrique comme on l'a considéré précédemment en $r = a$.

On donne : $\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = c^2$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

34.1

Faux. La vitesse de la lumière est une limite à la vitesse qu'on peut donner aux particules. Dès qu'on s'en approche, on quitte le domaine de la mécanique newtonienne pour rejoindre celui de la mécanique relativiste.

34.2

Faux, le poids est négligeable dès que les champs sont d'intensité très moyenne (faites un calcul d'ordre de grandeur pour vous en rendre compte).

34.3

Vrai.

34.4

Tension accélératrice

Voici un exercice d'électrostatique élémentaire. Le champ électrique est constant, vous devez tout de suite réaliser que le mouvement sera uniformément accéléré.

À partir de là, la première question est un exercice de dynamique newtonienne classique.

La question suivante vérifie que vous n'avez pas oublié la définition du potentiel issue du cours d'électromagnétisme, plus riche que celle vue en cours d'électrocinétique.

1. La particule n'est soumise qu'à la force électrique, son poids étant négligeable. Cette force est constante, donc le mouvement est uniformément accéléré. La particule va donc aller jusqu'à en B en suivant l'axe Oy .
2. U est, par définition, l'opposé de la circulation du champ électrique entre A et B :

$$\begin{aligned} U &= - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= - \int_d^0 E dl \\ U &= Ed \end{aligned}$$

3. Appliquons le théorème de l'énergie mécanique entre A et B . L'énergie mécanique est un invariant, puisque la seule force en présence est conservative. Donc, en notant v_B la vitesse en B :

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= -\Delta E_p \\ \frac{1}{2} m v_B^2 - 0 &= -q(V_B - V_A) = qU \end{aligned}$$

Donc $qU > 0$ et la vitesse en B est :

$$v_B = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

4. L'application numérique directe donne :

U	1 V	1 kV	1 MV
$v_B \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$	$5,9 \cdot 10^5$	$1,9 \cdot 10^7$	$5,9 \cdot 10^8$

Ce sont des valeurs très élevées à notre échelle. La valeur pour 1 MV est d'ailleurs supérieure à la vitesse de la lumière, ce qui est impossible. En effet, aux très hautes vitesses, il faudrait utiliser une autre mécanique que la mécanique newtonienne : la mécanique relativiste.

34.5

Particule dans un champ magnétique uniforme

Cet exercice élémentaire relève plus de la question de cours. Profitez-en pour rafraîchir vos réflexes de mécanique.

1. La particule n'est soumise qu'à la force magnétique, son poids étant négligeable. Le PFD s'écrit donc :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Or, $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$ donc les projections du PFD sur les trois axes sont :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x} \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

D'où les équations différentielles en x et y :

$$\begin{cases} \ddot{x} - \omega_c \dot{y} = 0 \\ \ddot{y} + \omega_c \dot{x} = 0 \end{cases}$$

2. La première équation s'intègre en $\dot{x} - \omega_c y = 0$, la constante d'intégration étant nulle parce qu'initialement la vitesse en x est nulle et la particule est sur l'origine. En injectant cela dans la seconde équation, il vient :

$$\ddot{y} + \omega_c^2 y = 0$$

Par un raisonnement similaire :

$$\ddot{x} + \omega_c^2 x = 0$$

3. Ces deux équations admettent des solutions sinusoïdales de pulsation ω_c . En y la solution est de la forme :

$$y(t) = A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t)$$

Les conditions initiales $y(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = v_0 \cos(\alpha)$ conduisent à :

$$y(t) = \frac{v_0 \cos(\alpha)}{\omega_c} \sin(\omega_c t)$$

La relation $\dot{x} = \omega_c y$ avec la condition initiale $x(0) = 0$ conduit à :

$$x(t) = \frac{v_0 \cos(\alpha)}{\omega_c} (1 - \cos(\omega_c t))$$

Le mouvement dans le plan xOy est donc un mouvement circulaire de rayon R tel que :

$$R = \frac{v_0 \cos(\alpha)}{\omega_c} = \frac{mv_0 \cos(\alpha)}{qB}$$

Le mouvement circulaire est mis en évidence en remarquant que $y^2 + (x - R)^2 = R^2$. Il est centré sur $(R, 0)$, comme le montre la figure 34.4.

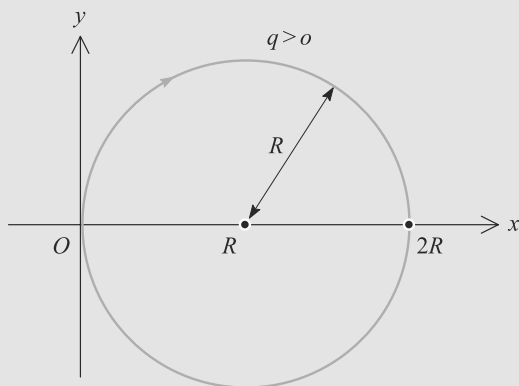


Figure 34.4 Mouvement circulaire dans le plan xOy .

S'y ajoute un mouvement de translation rectiligne uniforme selon Oz :

$$z(t) = v_0 \sin(\alpha)t$$

Le mouvement dans l'espace est donc hélicoïdal (figure 34.5).

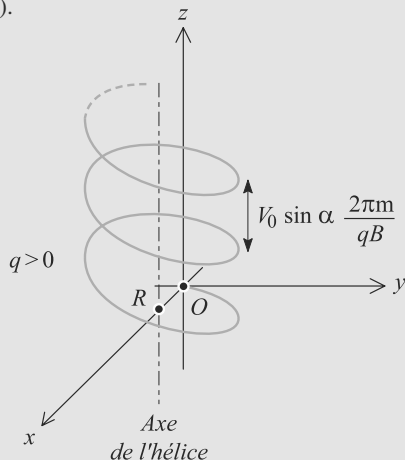


Figure 34.5 Trajectoire hélicoïdale dans un champ magnétique.

34.6

Générateur magnétohydrodynamique

Malgré un titre intimidant, cet exercice est très simple. Il ne s'agit que d'application des définitions du cours.

1. Sur A_1 , les cations arrivant arrachent des électrons pour retrouver leur neutralité et l'armature se charge positivement. Sur A_2 , il y a accumulation d'électrons et l'armature se charge négativement.

Il apparaît donc une différence de potentiel entre les plaques, et donc un champ électrique dirigé vers les potentiels décroissants. Cette tension augmente avec le temps, donc le champ électrique aussi, jusqu'à contrer l'effet de déviation de \vec{B} .

Le régime permanent est atteint quand les actions des deux champs se compensent. Alors, les particules du plasma qui traversent l'espace entre les plaques ne ressent plus aucune force et ne sont donc plus déviées.

2. En régime permanent, l'équilibre des forces signifie que la force de Lorentz est nulle :

$$q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$$

où q est la charge d'un électron ou d'un cation. D'où le champ électrique :

$$\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B}$$

3. La tension est définie comme la circulation de \vec{E} entre les armatures :

$$V_1 - V_2 = - \int_{A_2}^{A_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = ED$$

Comme \vec{v} et \vec{B} sont orthogonaux en régime permanent, il vient :

$$V_1 - V_2 = DvB = 10 \text{ V}$$

34.7

Étude d'un faisceau d'électrons

De nombreuses questions de cet exercice se ramènent à des questions classiques mais sous une forme inhabituelle. En magnétostatique, la distribution de courant n'est pas filiforme mais le problème s'y ramène.

1. a) Les électrons sont de charge négative et vont dans le sens des z croissants : I est en sens inverse comme indiqué sur la figure 34.6 :

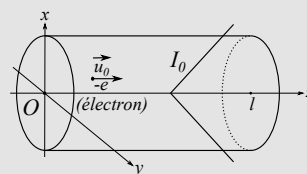


Figure 34.6 Sens du courant dans le faisceau.

Pour obtenir I_0 , on raisonne sur la charge dq qui traverse la section s du faisceau pendant dt : $dq = \rho s u_0 dt$ car les charges traversant s pendant dt se trouvent dans le volume élémentaire représenté figure 34.7 :

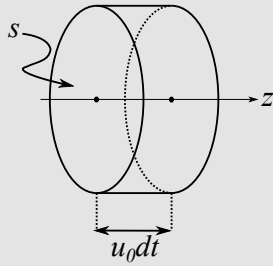


Figure 34.7 Volume contenant les charges traversant s pendant dt .

On en déduit la valeur de $I_0 = -\rho\pi a^2 u_0$ (ρ est négatif alors que I_0 est pris conventionnellement positif).

b) On raisonne comme en électrostatique. La symétrie cylindrique permet de dire que le plan MOz est plan de symétrie tout comme le plan passant par M et orthogonal à Oz . Le champ électrique est donc sur l'intersection de ces plans, i.e. radial. La distribution de charges est invariante par rotation autour de Oz et la composante radiale du champ ne dépend donc pas de θ . Elle ne dépend pas non plus de z car la distribution est invariante par translation le long de l'axe (en assimilant cette distribution à une distribution infinie, les effets de bords étant ignorés). On a donc :

$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r.$$

On utilise alors le théorème de Gauss sur un cylindre (S) d'axe Oz , de hauteur h et rayon r (figure 34.8) :

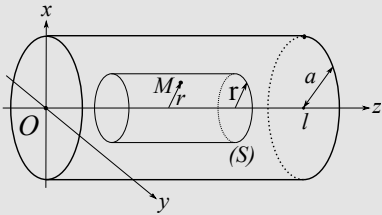


Figure 34.8 Cylindre de Gauss considéré.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 2\pi r h E(r) = \frac{\rho\pi r^2 h}{\epsilon_0} = \frac{-I_0\pi r^2 h}{\epsilon_0\pi a^2 u_0}$$

On a donc :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{-I_0 r}{2\pi\epsilon_0 a^2 u_0} \vec{e}_r.$$



En dehors du cylindre le champ a pour expression :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{-I_0}{2\pi\epsilon_0 r u_0} \vec{e}_r$$

2. Le PFD donne $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}(a)$ et en considérant le champ uniforme, en projection sur la direction radiale :

$$\ddot{r} = \frac{eI_0 a}{2\pi\epsilon_0 m a^2 u_0}$$

qui s'intègre en :

$$\dot{r} - 0 = \frac{eI_0 t}{2\pi\epsilon_0 m a u_0}$$

$$\text{puis } r - a = \Delta r = \frac{eI_0 t^2}{4\pi\epsilon_0 m a u_0} = \frac{-eE(a)t^2}{2m}$$

$$\text{ou } \Delta r = \frac{-eE(a)\tau^2}{2m}.$$

Le faisceau restera cylindrique si $\frac{\Delta r}{a} \ll 1$ soit, en reprenant l'expression obtenue ci-dessus :

$$\frac{eI_0 \tau^2}{4\pi\epsilon_0 m a^2 u_0^3} \ll 1$$

qui aboutit à :

$$I_0 \ll \frac{4\pi\epsilon_0 m a^2 u_0^3}{e\tau^2} = I_1.$$

3. a) Le plan OMz est un plan de symétrie pour la distribution de courant : $\vec{B}(M)$ lui est donc orthogonal et il est donc orthoradial ($\vec{B} = B(M)\vec{e}_\theta$). La distribution de courant est invariante par rotation autour de Oz : $B(M)$ ne dépend donc pas de θ . Elle est aussi invariante par translation selon Oz (en négligeant les effets de bord comme précédemment) et $B(M)$ ne dépend pas non plus de z . Au final, on peut affirmer que $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$.

On utilise le théorème d'Ampère sur un cercle (C) d'axe Oz , de rayon r et orienté par Oz (figure 34.9) :

$$\oint_{(C)} \vec{B}(M) d\vec{l} = \mu_0 I_{enlacé}$$

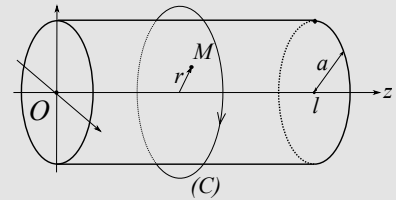


Figure 34.9 Contour d'ampère (C).

Le calcul de la circulation donne :

$$\oint_{(C)} \vec{B}(M) d\vec{l} = \oint_{(C)} B(r) r d\theta = B(r) r \oint_{(C)} d\theta = B(r) 2\pi r$$

où que se situe le cercle (C). Le courant enlacé est orienté suivant Oz et donc $I_{enlacé} = -I_0$. Au final, on trouve donc :

$$\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \vec{e}_\theta.$$

Le courant enlacé est le même que celui d'un fil situé sur Oz donc le champ aussi (pour $r > a$)

- b) Pour négliger la partie magnétique de la force de Lorentz, il faut que $|-eu_0 B(a)| \ll |-eE(a)|$. Cela se ramène à $\left| u_0 \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a} \right| \ll \left| \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 u_0 a} \right|$ qui conduit à $u_0^2 \ll \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = c^2$.

On voit donc que la condition pour négliger la partie magnétique de la force de Lorentz est $u_0 \ll c$, c'est-à-dire que le faisceau d'électrons ne doit pas être relativiste.

Partie 8

Fiches méthode

Aux concours, comme durant les deux années de préparation, les élèves de CPGE sont amenés à rédiger un grand nombre de problèmes dans différentes matières. L'article qui suit a pour vocation d'attirer leur attention sur l'importance de prendre de bonnes habitudes dès la première année et de délivrer quelques conseils pour améliorer leurs copies.

De l'importance de l'entraînement

Trop d'élèves, par manque de temps ou par paresse, rendent des copies de devoirs faits chez eux ou en temps limité d'une qualité douteuse. Il ne s'agit pas ici du fond mais de la forme : copies peu attrayantes, mal écrites, brouillonnes, à l'orthographe approximative... Souvent avec la conviction qu'aux concours, ils feront un effort particulier et que tout sera mieux.

C'est une illusion.

Il est impératif de s'entraîner dès les premières copies à soigner la forme comme on doit soigner le fond. Les bonnes habitudes sont difficiles à prendre et les mauvaises difficiles à éliminer. Ne croyez pas que ne s'attacher qu'à la recherche de solution doit tout pardonner. Il est impératif de soigner la forme sous peine que le fond ne soit pas perçu ou pas examiné. Aussi devez-vous dès les premiers devoirs rédigés vous en soucier.

Soigner la forme : dans quel but ?

Le but d'un préparatoire est bien sûr d'intégrer une école en réussissant un concours ! Il faut donc bien réussir les épreuves écrites pour commencer et donc que vos copies soient lues par les correcteurs avec plaisir car sa bienveillance vous sera alors acquise.

Il en va de même durant l'année avec vos professeurs. S'ils n'ont pas d'effort particulier à faire pour comprendre vos copies, ils ne vous en apprécieront que mieux et seront mieux disposés vis-à-vis de leur contenu (cela ne vous dispense pas de soigner le fond : de solides connaissances sont bien sûr nécessaires !)

Le mot d'ordre est donc : apprenez à mieux communiquer à l'écrit, le correcteur vous en saura gré.

Des conseils purement formels...

Vous pourrez trouver tous ces conseils dans les rapports de jury des différentes épreuves de concours publiés sur internet. Ils sont régulièrement rappelés...

Vous éviterez la précipitation et l'écriture frénétique : utilisez du brouillon pour préparer les questions et en particulier les calculs. Ne vous lancez dans la rédaction qu'après avoir fait le tour de la question : tout ceci évitera les ratures et questions inachevées ou même parfois à peine ébauchées.

Soignez la clarté de votre présentation et évitez d'écrire trop petit ou trop gros. Utilisez les lignes et ne déborderez pas les marges ni les en-tête ou pied de page. Ayez une cohérence de présentation : saut de ligne après chaque question, calculs décalés d'un ou deux centimètres par rapport au texte, mise en valeur des résultats (soulignés ou encadrés au moyen d'une règle). Présentez les questions en suivant l'ordre du texte : utilisez des copies différentes au besoin si vous sautez des questions ou s'il y a plusieurs problèmes différents à aborder.

... ou plus en rapport avec le contenu !

Il existe des moyens plus spécifiques aux matières scientifiques et à la physique en particulier pour bien communiquer avec le correcteur. Qu'est-ce alors qu'une rédaction de qualité ?

Rappelez succinctement la situation physique étudiée et ne commencez surtout pas sans un mot d'introduction des lignes de calcul dont on ne sait d'où elles sortent. Indiquez les lois utilisées et sur quel système elles le sont. Évitez les sauts d'étape de calculs et indiquez toujours ce que vous faites (développement limité, intégration, dérivation par rapport au temps ou à la position, etc), signalez l'usage de la calculatrice pour des résolutions numériques si vous êtes amené à en faire...

Gardez une place toute particulière pour les schémas. Trop de copies en sont dépourvues alors qu'ils permettent de se remettre la situation physique étudiée en tête (le correcteur connaît certes le sujet mais apprécie la clarté de l'exposé : un schéma est très souvent très éclairant). En outre, les schémas permettent d'introduire les notations nouvelles que le texte n'aura pas spécifiées. Enfin, un schéma annexe (agrandissement d'une partie d'un schéma, nouveau point de vue, changement d'échelle...) convaincra le correcteur que la question est maîtrisée et sans zone d'ombre.

Lorsque le résultat est donné dans l'énoncé, la démonstration doit être particulièrement soignée. Il est dans ce cas préférable de ne pas traiter la question plutôt que d'écrire une démonstration incohérente en enchaînant une succession d'erreurs qui révèle un faible niveau d'appropriation des concepts (extrait d'un rapport de CCP). Le correcteur n'apprécie pas le manque d'honnêteté intellectuelle.

Le bouquet final

Soyez enfin sensibles à ce qui conclut les questions : le résultat final. Celui-ci doit être homogène (vérifiez-le avant d'encadrer ou de souligner le résultat) et la plupart du temps suivi d'une application numérique. Votre esprit critique doit pouvoir s'exercer sur sa cohérence. Une étude rapide de cas limites peut révéler des aberrations qui devront alors être signalées. De même, si une application numérique est d'un ordre de grandeur visiblement incorrect (une étoile de rayon 1 m ou un satellite allant à deux fois la vitesse de la lumière par exemple), vous devez le signaler même si vous n'avez pas détecté l'origine de l'erreur.

De très nombreux rapports de concours (et l'expérience du rédacteur) indiquent que les applications numériques sont négligées : souvent pas faites, données sans unité ou parfois

avec l'indication S.I. (ce qui n'est pas suffisant). L'évaluation du résultat est pourtant une étape essentielle en sciences physiques que vous ne devez pas négliger. Entraînez-vous, comme pour l'analyse dimensionnelle, sur le moindre exercice. Des automatismes acquis tôt sont souvent bien utilisés par la suite.

L'ensemble de ce qui est dit ici, qui relaie probablement le discours de vos professeurs, doit vous servir de guide pour améliorer la perception qu'on a de vos connaissances. Toutes choses égales par ailleurs, une copie soignée et bien présentée, montrant un réel souci d'être compris est toujours mieux appréciée qu'un torchon sans rédaction ni aucun résultat mis en valeur. Commencez dès le début de sup à vous soucier de la forme pour que, les automatismes aidant, vous n'ayez plus ensuite qu'à vous attaquer aux problèmes de contenu !

Pour aller dans le sens des propos tenus ici, suit un extrait de rapport de concours récent.

Extrait du rapport d'une épreuve du concours Mines-Pont 2008

Le jury a ainsi eu le plaisir de lire d'excellentes copies alliant rigueur et concision. À l'inverse, de nombreuses copies ne font que présenter des relations mathématiques, justes ou fausses d'ailleurs, sans aucun mot d'explication.

Le jury rappelle qu'un minimum de rédaction est indispensable pour rendre la copie compréhensible par le lecteur. Or, pour presque tous les candidats, « on a » ou « on sait que » ou, pire encore : « on a que », grammaticalement faux, semblent être le summum de l'explication, **alors que ces embryons de phrases ne justifient rien.**

Il faut citer les noms des théorèmes utilisés. Cela peut être fait de façon concise en utilisant, par exemple, les formulations ci-dessous :

- La relation de roulement sans glissement se traduit par : ...
- Le bilan des actions mécaniques subies par le système est : ...
- Le théorème du moment cinétique appliqué en C à la bille dans son référentiel barycentrique s'écrit : ...
- Par application du théorème de l'énergie cinétique : ...
- D'après le principe des actions réciproques : ...

Trop souvent, l'expression est peu claire. La question 4 a donné lieu à un festival de réponses incompréhensibles. Beaucoup de candidats sont capables de dire tout et son contraire dans une même phrase. Certaines phrases, si on peut les appeler ainsi, n'ont pas de verbe. Certains écrivent dix lignes de charabia sans la moindre ponctuation. Les candidats sont invités à relire ce qu'ils viennent d'écrire à la fin de chaque question.

Très peu de copies proposent des schémas des systèmes étudiés. Pourtant, s'il y a un domaine de la physique qui se prête bien à la schématisation des systèmes, c'est la mécanique ! Un simple schéma fait à main levée permet de voir d'un seul coup d'oeil quelles sont les dimensions mises en jeu, les directions des vecteurs et leur sens.

Le sujet invitait les candidats à formuler des commentaires pertinents. Les petites phrases de conclusion à propos d'un résultat sont toujours récompensées par le jury. Par exemple, on peut commenter l'influence d'une masse ou d'une longueur sur une période d'oscillations, commenter la présence d'un signe moins, etc.



Le jury ne comprend pas pourquoi les candidats se privent d'un outil si précieux.

Pour les futurs candidats au concours, le jury aimerait rappeler les conseils suivants :

- Lire attentivement le sujet.
- Faire des grands schémas. Cela clarifie les idées du candidat, évite les erreurs, et constitue souvent une justification aux yeux du correcteur.
- Toujours écrire une phrase d'introduction avant un calcul. Cette phrase doit contenir le nom de la loi ou du théorème appliqué.
- Vérifier l'homogénéité des résultats.
- Vérifier qu'un vecteur est égal à un autre vecteur et non à un scalaire.
- Encadrer le résultat final.
- Commenter l'influence des paramètres dans l'équation obtenue.
- À la fin de chaque question, relire rapidement ce que l'on a écrit pour vérifier que les explications sont claires et cohérentes avec ce qui précède.

L'expérience montre que les candidats qui suivent ces conseils obtiennent de bonnes notes.

Relations usuelles

Deux relations fondamentales sont :

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$$

$$\cos(x)^2 - \sin(x)^2 = \cos(2x)$$

De celles-ci d'autres relations découlent :

$$\cos(x)^2 = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin(x)^2 = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\sin(2x) = 2 \cos(x) \sin(x)$$

$$1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

Pensez aussi à visualiser un angle, son complémentaire et son supplémentaire sur le cercle trigonométrique (figure FM.2.1). En particulier, sachez repérer la tangente sur le schéma.

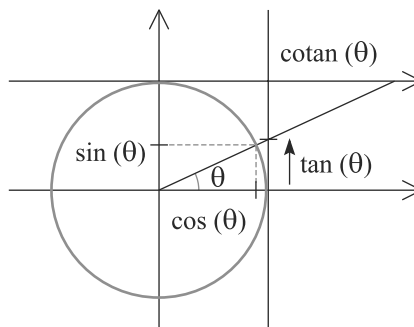


Figure FM.2.1 Repérage des fonctions trigonométriques sur le cercle trigonométrique.

Ainsi :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

$$\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) = \sin(x) \end{cases} \Rightarrow \tan(\pi - x) = -\tan(x)$$

$$\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi + x) = -\sin(x) \end{cases} \Rightarrow \tan(\pi + x) = \tan(x)$$

Angles orientés

Dans certains domaines de la physique, en particulier l'optique, les angles orientés sont abondamment utilisés. En outre, les angles des bases cylindrique et sphériques sont orientés. Il faut donc savoir les gérer.

Méthode Gérer les angles orientés

Vous commettrez très vite des erreurs de signe si vous n'êtes pas très, très soigneux avec les angles orientés !

1. Pour éviter toute erreur, écrivez la relation angulaire étudiée avec des angles non orientés, autrement dit avec des valeurs absolues sur chaque angle.
2. Ensuite, enlevez les valeurs absolues en gardant un œil sur votre figure : si un angle est dans le sens trigonométrique (choisi comme sens positif), laissez son signe inchangé ; s'il est dans le sens horaire, inversez son signe.

Exemple d'application

Soit les deux angles complémentaires, orientés en opposition, de la figure [FM.2.2](#). Quelle relation y a-t-il entre eux ?

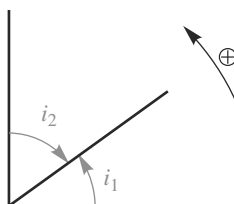


Figure FM.2.2 Exemple d'angles complémentaires orientés en opposition.

Solution

Si ces angles n'étaient pas orientés, la relation serait $i_1 + i_2 = \pi/2$. Comme il sont orientés, cette relation est $|i_1| + |i_2| = \pi/2$.

Le sens trigonométrique étant choisi comme positif, $|i_1| = i_1$ et $|i_2| = -i_2$. Donc $i_1 - i_2 = \pi/2$.

Vous trouverez regroupés ici un certain nombre de résultats fondamentaux sur les systèmes de coordonnées cartésiens, cylindriques et sphériques.

Selon les chapitres, seuls certains résultats pourront être utiles. Fiez-vous donc aux conseils de votre enseignant pour savoir lesquels.

Base cartésienne

Les trois vecteurs de base sont fixes, au sens qu'ils ne suivent pas le point dans son déplacement (en mécanique ils sont dits fixes par rapport au référentiel).

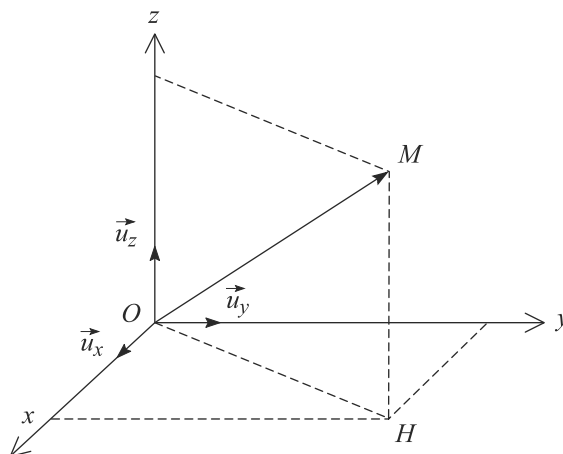


Figure FM.3.1 Système de coordonnées cartésiennes.



Dans l'expression du gradient, il est sous-entendu que lors de la dérivation par rapport à une variable, les deux autres sont à considérer comme des constantes. En thermodynamique, nous ressentons le besoin de l'explicitier dans la notation.

Les trois coordonnées d'un point sont (x, y, z) réels quelconques.

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{v}(M) = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$$

$$\vec{a}(M) = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f)(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M) \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}(M) \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}(M) \vec{u}_z$$

Base cylindrique

Cette base nécessite de définir un axe Oz et deux de ses trois vecteurs sont mobiles, ils suivent le point dans son mouvement. Cela implique que ces deux vecteurs de base ont des dérivées temporelles non nulles.

La base à deux dimensions obtenues en se limitant au plan $z = 0$ s'appelle la base polaire. Les trois coordonnées d'un point sont (ρ, θ, z) avec $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ et z réel quelconque.

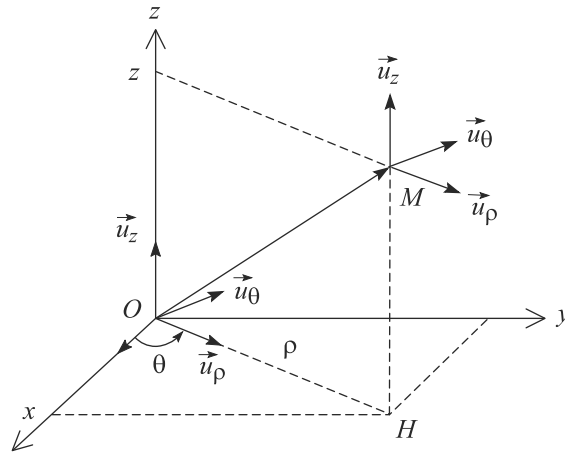


Figure FM.3.2 Système de coordonnées cylindriques.

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

$$\vec{v}(M) = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$$

$$\vec{a}(M) = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f)(M) = \frac{\partial f}{\partial \rho}(M) \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta}(M) \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}(M) \vec{u}_z$$

Base sphérique

Cette base nécessite de définir un axe Oz et ses trois vecteurs sont mobiles.

Pour un système qui serait invariant par rotation d'angle φ (symétrie de révolution autour de Oz), les vecteurs \vec{u}_r et \vec{u}_θ définissent dans le plan $\varphi = 0$ une base polaire (voir par exemple chapitres 32 et 33).



Attention à ne pas confondre le ρ des coordonnées cylindriques, noté r dans certains énoncés, et le r des coordonnées sphériques ! De même θ ne représente pas le même angle dans les deux bases.



L'expression sphérique de l'accélération n'est pas donnée car elle n'est pas nécessaire en première année.

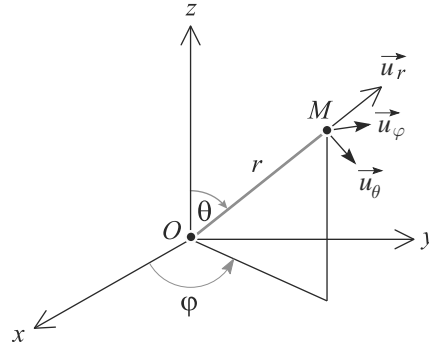


Figure FM.3.3 Système de coordonnées sphériques.

Les trois coordonnées d'un point sont (r, θ, φ) avec $r > 0$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$.

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{OM}\| = r$$

$$\vec{v}(M) = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \sin(\theta) \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f)(M) = \frac{\partial f}{\partial r}(M) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}(M) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi}(M) \vec{u}_\varphi$$

Projeter un vecteur sur un axe



- Par construction, la valeur d'un produit scalaire est un nombre indépendant de la base choisie.
- Pour ce calcul, l'angle θ peut être orienté ou non. Le cosinus est une fonction paire, de toute façon...

Une projection est un produit scalaire. Soit \vec{d} un vecteur et Δ un axe de vecteur directeur \vec{u}_Δ . La projection de \vec{d} sur Δ est, par définition,

$$\vec{d} \cdot \vec{u}_\Delta = \|\vec{d}\| \cos(\theta) \quad \text{avec} \quad \theta = (\vec{u}_\Delta, \vec{d})$$

Le vecteur $(\vec{d} \cdot \vec{u}_\Delta) \vec{u}_\Delta$ est le **vecteur projeté** de \vec{d} sur Δ .

Méthode Décomposer sur une base et projeter

La décomposition du vecteur \vec{d} dans la base orthonormée (\vec{u}_1, \vec{u}_2) est de la forme :

$$\vec{d} = a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2$$

Grâce au produit scalaire, les coefficients a_1 et a_2 se déterminent par projection :

$$a_1 = \vec{d} \cdot \vec{u}_1 = \|\vec{d}\| \cos(\vec{d}, \vec{u}_1)$$

$$a_2 = \vec{d} \cdot \vec{u}_2 = \|\vec{d}\| \cos(\vec{d}, \vec{u}_2)$$

Il suffit donc de lire les angles que fait \vec{d} avec les vecteurs de base \vec{u}_1 et \vec{u}_2 pour déterminer sa décomposition.

Vérifiez votre résultat en prenant des valeurs particulières simples, par exemple \vec{d} colinéaire à \vec{u}_1 et \vec{d} colinéaire à \vec{u}_2 .

Exemple d'application

Décomposons le poids dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ sur la figure [FM.4.1](#).

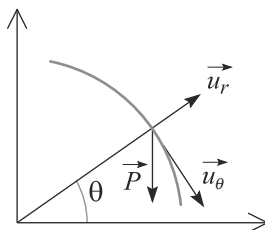


Figure FM.4.1 Mobile sur une rampe circulaire.

Solution

Si $\theta = 0$, le poids est colinéaire à \vec{u}_θ donc le terme en \vec{u}_θ doit être $+\cos(\theta)$.

Donc le terme en \vec{u}_r doit être $\pm \sin(\theta)$. Quand $\theta = \pi/2$, le poids est colinéaire à \vec{u}_r et opposé à lui, ce qui fixe le signe restant. D'où :

$$\vec{P} = mg(-\sin(\theta) \vec{u}_r + \cos(\theta) \vec{u}_\theta)$$

Résoudre des équations différentielles linéaires

La plupart des équations différentielles vues en physique cette année sont linéaires : la somme de deux solutions de l'équation est aussi une solution.

Ces équations seront en outre à coefficients constants et avec un second membre nul, constant ou sinusoïdal. Pour un physicien, résoudre une telle équation différentielle doit être une mécanique mise en œuvre avec rapidité et efficacité.

Méthode générale

Soit $x(t)$ la fonction inconnue gouvernée par l'équation différentielle linéaire. La résolution passe par la recherche de deux fonctions intermédiaires :

- La solution de l'équation sans second membre $x_{SSM}(t)$ est déterminée d'après un formulaire que vous devez connaître par cœur (voir plus bas). Il y apparaît autant de constantes d'intégration que le degré de l'équation différentielle (donc une ou deux en pratique).
- Une solution particulière $x_P(t)$ qui est déterminée **a priori** à l'aide du second membre.

Alors :

$$x(t) = x_{SSM}(t) + x_P(t)$$

Les constantes d'intégration apparaissant dans $x_{SSM}(t)$ sont déterminées à l'aide des conditions initiales. Attention au piège classique :

Seule la solution complète, somme de la solution sans second membre et de la solution particulière, a un sens physique. Elle seule doit satisfaire les conditions initiales.

Recherche de la solution particulière



Dans le cas sinusoïdal, il existe une autre méthode de recherche de la solution particulière : la méthode complexe, vue par exemple en électricité au chapitre 13.

Les cas apparaissant en physique sont simples, de sorte qu'une « astuce » suffit à déterminer $x_P(t)$: chercher une solution particulière de même nature que le second membre. C'est la détermination **a priori**.

- Si le second membre est nul, $x_P = 0$ convient automatiquement.
- Si le second membre est constant, cherchez pour x_P une fonction constante.
- Si le second membre est sinusoïdal de pulsation ω , cherchez $x_P(t)$ sous forme sinusoïdale de même pulsation.

Recherche de la solution sans second membre

Dans ce qui suit, les équations différentielles sont écrites sans second membre car ce dernier n'a pas de rôle dans la recherche de $x_{\text{SSM}}(t)$. Le membre de gauche sera donc de la forme :

$$a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x$$

Premier ordre

Loi

Les solutions au premier sont toujours exponentielles :

$$\tau \dot{x} + x \Rightarrow x_{\text{SSM}}(t) = A e^{-t/\tau}$$

Deuxième ordre

Le cas où il n'y a pas de terme en \dot{x} est le cas très important de l'oscillateur harmonique.

Loi

Solutions de l'équation de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x \Rightarrow x_{\text{SSM}}(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ A' \cos(\omega_0 t) + B' \sin(\omega_0 t) \end{cases}$$

Dans le cas où il y a un terme en \dot{x} , plusieurs solutions sont possibles. Il faut étudier le signe du discriminant du polynôme caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$$

Notons r_1 et r_2 les racines de ce polynôme.

$\Delta < 0$: régime pseudopériodique

Alors les racines du polynôme sont complexes :

$$r_1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{\omega_0}{Q} - j \sqrt{-\Delta} \right) \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{\omega_0}{Q} + j \sqrt{-\Delta} \right)$$

Le terme issu de la partie réelle se factorise pour donner l'exponentielle décroissante de la solution. Le terme issu de la partie imaginaire donne la pseudopulsation :

$$\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$



Il existe de nombreuses notations différentes pour les coefficients de cette équation. Apprenez par cœur les solutions avec une seule notation et sachez ensuite vous adapter aux notations imposées par l'exercice.



Ne confondez pas ω_0 et ω . La première intervient dans l'amplitude et la seconde dans la phase.



Pour savoir comment définir ω et β , souvenez-vous que la quantité sous la racine doit être positive.



Ne confondez pas ω et β . Physiquement, ω s'interprète comme une pseudopulsation, pas β .

Loi

Solutions pour le régime pseudopériodique avec $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$:

$$\begin{aligned}\Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad x_{\text{SSM}}(t) &= Ae^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \cos(\omega t + \varphi) \\ &= e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} (A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t))\end{aligned}$$

$\Delta > 0$: régime apériodique

Alors les racines du polynôme sont réelles :

$$r_1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{\omega_0}{Q} - \sqrt{\Delta} \right) \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{\omega_0}{Q} + \sqrt{\Delta} \right)$$

Posons . Alors :

Loi

Solutions pour le régime apériodique avec $\beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$:

$$\begin{aligned}\Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad x_{\text{SSM}}(t) &= e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} (A \cosh(\beta t) + B \sinh(\beta t)) \\ &= e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} (A' e^{\beta t} + B' e^{-\beta t})\end{aligned}$$

$\Delta = 0$: régime critique

Alors les deux racines du polynôme sont égales à $-\omega_0/2Q = \omega_0$ donc :

Loi

Solutions pour le régime critique :

$$\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{\text{SSM}}(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$$

Comprendre ce que représentent les différentielles

Les grandeurs « infiniment petites », ou « infinitésimales » utiles en physique correspondent à ce que les mathématiciens appellent les **différentielles**. Vous en avez déjà manipulé, même sans le savoir, au lycée :

- Dans une intégrale, l'intégrand $f(x)$ est accompagné d'une grandeur dx qui vous indique, par exemple, la variable d'intégration (ici x) et assure l'homogénéité de la formule.
- La dérivée de f par rapport à x peut s'écrire comme le rapport de deux différentielles :

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$$

Sachant que df et dx sont petits, cette écriture est cohérente avec la définition de la dérivée (limite du taux de variation).

Deux types de différentielles

Différentielle exacte

Ce sont les différentielles que vous connaissez déjà. Par exemple, dx représente une **petite variation de la grandeur** x . Leur propriété essentielle est la manière dont elles s'intègrent :

$$\int_A^B dx = [x]_A^B = x(B) - x(A) = \Delta x$$

Cette intégrale symbolique (voir annexe 7) se calcule facilement, justement parce que dx est une différentielle **exacte** : l'intégrale apparaît elle aussi comme une variation de x .

Définition

Une différentielle exacte est une variation. Son intégrale est aussi une variation.

La notation dx (avec un d minuscule) est réservée aux différentielles exactes et la notation Δx (avec un delta majuscule) est réservée aux intégrales de différentielles exactes.

Ainsi, la valeur de l'intégrale $\Delta x = x(B) - x(A)$ ne dépend donc que des valeurs de x au point de départ et au point d'arrivée.

- En mécanique, cela est utile pour calculer le travail d'une force, et caractérise une **force conservative**.

dx et Δx ont donc le même sens physique : les deux sont des variations, mais l'une petite et l'autre quelconque.



- En thermodynamique, cela permet de faire des bilans énergétiques sur des transformations et caractérise une **fonction d'état**.
- En électrostatique, cela permet de calculer une différence de potentiel via la circulation du champ électrique.

Différentielle non exacte

En mécanique, le travail d'une force non conservative dépend non seulement du point de départ et du point d'arrivée, mais aussi de la forme de la trajectoire reliant les deux. Vous connaissez la formule :

$$W_{M_1 \rightarrow M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \delta W$$

Le travail s'écrit sous forme intégrale, mais sa valeur ne peut pas apparaître comme une simple variation car cette variation serait identique pour toutes les trajectoires ayant mêmes extrémités. Il n'existe donc pas de primitive F telle que l'intégrale soit égale à $F(B) - F(A)$.

Définition

Une différentielle non exacte est une petite quantité, mais pas une variation. Son intégrale ne peut donc pas non plus s'écrire comme une variation.

La notation δx (avec un delta minuscule) est utilisée pour les différentielles non exactes. Leur intégrale est notée sans symbole, par exemple X .

Exemple

En mécanique, le travail d'une force conservative est $\delta W = -dE_p$. D'où, entre deux points M_1 et M_2 :

$$\begin{aligned} W_{M_1 \rightarrow M_2} &= \int_{M_1}^{M_2} \delta W \\ &= \int_{M_1}^{M_2} -dE_p \\ &= -[E_p]_{M_1}^{M_2} \\ &= -(E_p(M_2) - E_p(M_1)) \\ W_{M_1 \rightarrow M_2} &= -\Delta E_p \end{aligned}$$

C'est seulement grâce à l'égalité $\delta W = -dE_p$ que le travail est devenu indépendant de la forme de la trajectoire entre M_1 et M_2 .

Vous trouverez d'autres exemples dans le chapitre 11 avec les calculs de travaux de force, dans le chapitre 25 en remarquant que le travail des forces de pression dépend de la transformation, ou encore dans le chapitre 30 pour les calculs de différence de potentiel.



Quand vous ne savez pas si une différentielle est exacte ou pas, employez la notation δ . Par exemple en mécanique, un travail élémentaire est noté δW . Ensuite, s'il est prouvé que la force est conservative, ce travail est renoté $d(-E_p)$.



Vous pouvez même sauter de la deuxième ligne à la dernière car, par définition, l'intégrale de dE_p peut se noter ΔE_p !

Règles de calcul

De par sa grande parenté avec la dérivée, la différentielle obéit aux mêmes règles de calculs qu'elle. Dans ce qui suit, x et y sont des fonctions, a est une simple constante.

$$d(x + y) = dx + dy$$

$$d(ax) = a dx$$

$$d(xy) = dx.y + x.dy$$

$$d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}$$

$$d \ln(x) = \frac{dx}{x}$$

Une intégrale symbolique est une intégrale dont les bornes d'intégration ne portent pas sur la variable d'intégration. Il faut donc expliciter la relation entre la variable des bornes d'intégration et la variable d'intégration pour pouvoir la calculer.

Exemple en mécanique

En mécanique, le travail d'une force le long d'une trajectoire reliant un point M_1 à un point M_2 peut être écrit :

$$W_{M_1 \rightarrow M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \mathcal{P}(t) dt$$

Les bornes d'intégration sont des points de l'espace et la variable d'intégration est le temps. Il faut donc comprendre cette intégrale comme :

$$W_{M_1 \rightarrow M_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t) dt$$

où t_1 est la date à laquelle le point matériel est en M_1 et t_2 celle où il est en M_2 .

Exemple en thermodynamique

En thermodynamique, le travail des forces de pression reçu par un gaz parfait passant d'un état initial EI à un état final EF, lors d'une transformation mécaniquement réversible, s'écrit :

$$W = \int_{EI}^{EF} -\frac{nRT}{V} dV$$

Les bornes d'intégration sont abstraites, elles désignent des états, tandis que la variable d'intégration est le volume du gaz. Il faut comprendre :

$$W = \int_{V_i}^{V_f} -\frac{nRT}{V} dV$$

où V_i est le volume initial et V_f le volume final.

Exemple en électromagnétisme

En électromagnétisme, la charge électrique portée par un fil rectiligne L de longueur a et placé sur un axe Ox s'écrit :

$$Q = \int_L \lambda dx$$

La variable d'intégration est x , position d'un point du fil, mais les bornes d'intégration sont abstraites, « l'intégrale porte sur toute la longueur du fil ». Remarquant que, le long du fil, x varie de 0 à a , l'intégrale est en fait :

$$Q = \int_0^a \lambda dx$$

Une intégrale symbolique est une intégrale ordinaire, c'est seulement son écriture qui n'est pas explicite. Cela permet d'écrire l'intégrale indépendamment du paramétrage choisi dans l'exercice.

Il est souvent préférable de travailler l'intégrand pour mettre en évidence la variable d'intégration avant d'expliciter les bornes d'intégration.

Les développements limités constituent l'outil d'approximation numéro un de la physique. C'est aussi un outil d'analyse puissant.

Définition

Soit une fonction f suffisamment régulière dont nous voulons étudier le comportement au voisinage d'un point x_0 .

Le développement limité de f en x_0 est un polynôme qui se comporte presque comme f et permet donc de l'étudier. Plus nous sommes proche de x_0 , meilleure est l'**approximation** de f par ce polynôme.

Ce polynôme est donné par la formule de Taylor-Young vue en cours de mathématiques :

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + xf'(x_0) + \frac{x^2}{2}f''(x_0) + o(x^2)$$

Cette approximation est valable tant que $x_0 + x$ n'est pas trop éloigné de x_0 , autrement dit $|x| \ll 1$. Par conséquent, chaque terme de cette somme est plus petit que le précédent. C'est à vous de choisir le degré du polynôme : plus il est de degré élevé, meilleure est l'approximation. En pratique, nous n'irons pas plus loin que le degré 2.

La notation $o(x^2)$ représente l'erreur commise par cette approximation et signifie « quantité inconnue mais négligeable devant le terme en x^2 ».

Règles de calcul

Une fois f remplacée par son polynôme de Taylor, les calculs se font comme avec n'importe quel polynôme. La seule subtilité est la suivante :

Si un calcul fait intervenir plusieurs développements limités, tous les polynômes de Taylor doivent être du même ordre.

Par exemple, si vous faites le produit de deux polynômes de Taylor de degré 1, le polynôme résultant sera de degré 2, mais le terme en x^2 n'aura aucun sens. Ainsi, le résultat du calcul sera un polynôme d'ordre 1.

Développements limités usuels en zéro

Les formulaires de développements limités usuels sont toujours donnés en $x_0 = 0$. Ils sont données ici à l'ordre 2 au plus.

Si vous voulez le DL d'une fonction f au voisinage d'un autre point que zéro, par exemple a , il suffit d'écrire le DL de $f(x - a)$ au voisinage de zéro.

Exemple de cos développée autour de la position d'équilibre θ_{eq} pour un oscillateur :

$$\cos(\theta_{\text{eq}} - \theta) = 1 - \frac{(\theta_{\text{eq}} - \theta)^2}{2} + o((\theta_{\text{eq}} - \theta)^2)$$

ce qu'en physique nous écrivons plus volontiers :

$$\cos(\theta_{\text{eq}} - \theta) \simeq 1 - \frac{(\theta_{\text{eq}} - \theta)^2}{2} \quad \text{avec} \quad |\theta| \ll 1$$

Fonction	Polynôme de Taylor	Remarques
$\sin(x)$	x	Pas de terme de degré pair car sin est impaire.
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2}$	Pas de terme de degré impair car cos est paire.
$\tan(x)$	x	Impaire, peut se déduire du DL de $\sin(x)/\cos(x)$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2}$	
$\ln(1 + x)$	$x - \frac{x^2}{2}$	
$(1 + x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1)x^2$	Valable pour α réel, ainsi $\alpha = 1/2$ donne le DL de $\sqrt{1 + x}$

Exemples

Faisons deux calculs au voisinage de 0 sur la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(1 + x)}{e^x}$$

Pour obtenir un DL au premier ordre, il suffit de développer numérateur et dénominateur au premier ordre :

$$f(x) \simeq \frac{x}{1 + x} \simeq x(1 - x) = x - x^2$$

Et comme c'est un DL d'ordre 1, le terme en x^2 n'a pas de sens. Donc $f(x) \simeq x$ à l'ordre 1.

Voyons le DL d'ordre 2. Tout l'art réside dans la manière de ne pas faire trop de calculs inutiles. Il faut d'abord développer numérateur et dénominateur à l'ordre 2 :

$$f(x) \simeq \frac{x - \frac{x^2}{2}}{1 + x + \frac{x^2}{2}}$$

Remarquez que, au numérateur, nous pouvons mettre x en facteur. Donc dans le DL du dénominateur en $1/(1 + X) \simeq 1 - X + \dots$ tout terme de degré 2 donnera globalement

un terme d'ordre 3 qui sera éliminé... Il est donc inutile de faire un DL d'ordre 2 au dénominateur !

$$f(x) \simeq \left(x - \frac{x^2}{2}\right)(1 - x)$$

Là encore, tout terme de degré 3 ou plus doit être écarté donc il reste :

$$f(x) \simeq x - \frac{3}{2}x^2$$

Nous **devons** trouver le même terme de degré 1 que précédemment, ce qui est bien le cas. Notez au passage que le terme de degré 2 trouvé dans le calcul du DL d'ordre 1 était bel et bien faux !

Amusez-vous donc à faire le même calcul en ne faisant pas ces simplifications en cours de route et vous verrez la différence de complexité ! N'oubliez pas qu'il s'agit d'une approximation, donc toute « correction » inférieure au degré de précision voulue est à écarter.

Hyperbole dans le cas répulsif

La branche d'hyperbole parcourue par le mobile fictif est la plus « éloignée » du centre de force (qui joue le rôle de foyer), comme montré figure FM.9.1.

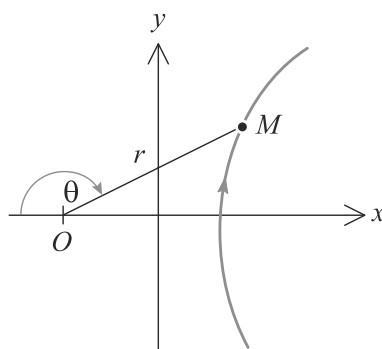


Figure FM.9.1 Trajectoire hyperbolique dans le cas répulsif.

En polaires : $r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$ avec $p = \frac{mC^2}{k} < 0$ et $e > 1$

Distance minimale à O : $r_{\min} = \frac{-p}{e - 1}$ obtenue en $\theta = \pi$

En cartésiennes : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = \frac{-p}{e^2 - 1} > 0$ et $b = \sqrt{-pa}$

Énergie mécanique : $a = \frac{-k}{2E_m} > 0$



Vérifiez que, avec $e > 1$, le dénominateur peut s'annuler. C'est la raison pour laquelle le mouvement est non borné.

Hyperbole dans le cas attractif

La principale différence est que la branche parcourue est la plus « proche » du centre de force (figure FM.9.2). Cette fois $p > 0$ et $e > 1$.



N'oubliez pas que, cette fois, $p > 0$.

Donc la distance minimale d'approche est obtenue pour $\theta = 0$:

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e}$$

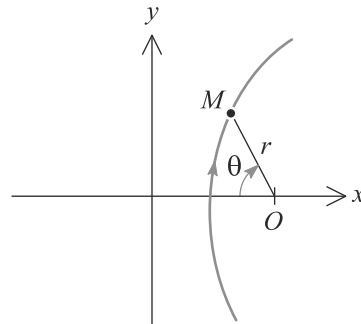


Figure FM.9.2 Trajectoire hyperbolique dans le cas attractif.

Relations de base

La trajectoire est représentée figure FM.9.3. L'ellipse admet le centre de force comme l'un de ses foyers.

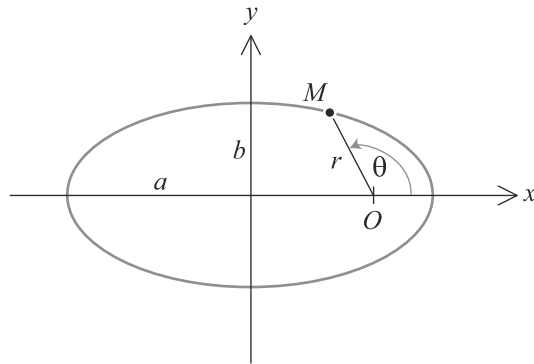


Figure FM.9.3 Trajectoire elliptique pour une interaction attractive.

En polaires : $r = \frac{p}{1+e \cos(\theta)}$ avec $p = \frac{mC^2}{k} > 0$ et $0 < e < 1$

Excentricité : $e = \frac{c}{a}$

Distances minimale et maximale : $r_{\min} = \frac{p}{1+e}$ et $r_{\max} = \frac{p}{1-e}$

En cartésiennes : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = \frac{1}{2}(r_{\min} + r_{\max}) = \frac{p}{1-e^2}$ et $b = \sqrt{pa}$

Énergie mécanique : $a = \frac{-k}{2E_m}$

Index

A

accélération, 141
d'entraînement, 329, 330
admittance, 207
Ampère (théorème d'), 520
amplificateur non inverseur, 235
amplificateur opérationnel, 232
idéal, 234
amplitude complexe, 205
angle de déviation, 6
d'un rayon, 5
aphélie, 310
aplanétisme, 19
apoastre, 310
apogée, 310
approximation dipolaire, 498
Archimède
poussée d'—, 371
théorème d'—, 371
argument d'un rapport, 206
associations
de dipôles, 101
série et parallèle, 100
athermanes (parois), 383
axe optique, 18

B

bande passante, 246
à -3 dB, 222
bilan énergétique, 118, 120, 124
bilan entropique en présence d'un thermostat, 404
Biot et Savart (loi de), 513
bobine, 89
Boltzmann
constante de —, 355
facteur de —, 370
boucles de rétroaction, 234
bras de levier, 284

C

capacité thermique
à pression constante, 386
à volume constant, 356, 386
caractéristique statique, 87
Carnot (théorème de), 430
cascader des filtres actifs, 248
centre *C* (miroir), 49
centre d'inertie, 292, 293
centre optique, 35
champ
de pression (continuité du), 369
électrique, 446, 447, 533
permanent uniforme, 534
gravitationnel, 489
magnétique, 512, 533
circulation du —, 518
flux du —, 518
permanent uniforme, 534
changement de phase, 412
chaos moléculaire, 354
charge, 245
ponctuelle, 447
totale d'une distribution, 456
chute libre, 141, 152
circuit, 519
RLC série, 121
circulation, 476
conservative, 477, 490, 518
du champ magnétique, 519
le long d'un contour, 476
Clapeyron (diagramme de), 416
coefficient
de compressibilité isotherme, 359
de dilatation isobare, 359
gamma du gaz, 387
thermoélastique, 358
collimateur, 64, 69
comportement intégrateur ou dérivateur, 248

condensateur, 89
 conditions de Gauss, 20
 conducteur filiforme, 512
 côniques, 306
 continuité, 120, 475
 contour, 476
 d' Ampère, 520
 conventions récepteur et générateur, 86
 courbe
 d'ébullition, 416
 d'équilibre de phase, 414
 de rosée, 416
 de saturation, 416
 fermée, 476
 covolume, 358
 critère d'évolution, 402
 cycle, 383, 429

D

Dalton (loi de), 358
 décade, 246
 décrément logarithmique, 124
 définition de la verticale et du poids, 333
 densité
 particulaire, 350
 Descartes (formule de), 51
 deuxième identité thermodynamique, 403
 diagramme
 (P, T), 414
 (P, T) d'un corps pur, 414
 (P, T) de l'eau, 415
 de Bode, 246
 différence de potentiel, 476
 dioptré, 3
 dipôle, 84, 88
 actif, 88
 électrostatique, 498
 passif, 88
 RLC série, 221, 268
 distance focale, 33
 distribution
 continue, 446
 de charges, 446
 de masse, 489
 discrète, 446, 447
 linéique, 447, 456, 489
 de courant, 512
 surfactive, 447, 456, 489
 volumique, 447, 456, 489

E

échelle mésoscopique, 350
 efficacité, 428
 élément de courant, 513
 elliptique, 308
 énergie
 interne, 356, 381, 386
 potentielle, 173, 305
 effective, 306
 électrique, 477
 gravitationnelle, 490
 enthalpie, 386
 de changement d'état, 413
 entropie, 402
 créée, 402
 de changement d'état, 413
 échangée, 402
 équation d'état, 348, 356
 équation différentielle, 237
 équilibre
 instable, 187
 stable, 187
 équipotentielle, 479
 espace
 image, 32, 48
 objet, 32, 48
 objet et image réels, 49
 objet et image virtuels, 49
 état
 de diffusion, 187, 188, 307
 fluide, 414
 lié, 187, 188, 308
 étoile, 310
 excentricité, 306
 extensivité, 349

F

facteur de puissance, 208
 filtrage, 243
 filtre
 coupe-bande, 248
 linéaire, 243
 passe-bande, 248
 passe-bas, 248
 du premier ordre, 247
 passe-haut, 248
 fluide déplacé, 371
 flux du champ électrique, 454
 focale, 49
 fonction d'état, 356

fonction de transfert harmonique, 244
 force, 150
 conservative, 173, 174
 d'inertie d'entraînement, 331
 dérivant d'un potentiel, 174
 de Coriolis, 331
 de frottement fluide linéaire, 153
 de Lorentz, 533
 de pression, 371
 de rappel élastique, 155
 électrostatique, 304
 extérieure, 293
 gravitationnelle, 304, 490
 intérieure, 293
 newtonienne, 305
 formule
 de conjugaison, 35
 foyers, 21, 35, 49
 fréquence, 204

G

gain, 244
 en décibel, 246
 Gauss
 conditions de —, 19
 surface de —, 457
 théorème de —, 452, 457, 490
 gaz parfait, 386, 405
 diatomique, 387
 monoatomique, 354, 386
 polyatomique, 357
 générateur
 de Norton, 101
 de Thévenin, 101
 Goniomètre, 69
 grandeur complexe associée, 205
 grandeur efficace, 208
 grandissement, 35

H

homothétie, 292, 296
 hyperbole, 308
 hyperbolique, 307

I

image, 19, 35
 réelle, 19, 33
 virtuelle, 19, 33

impédance, 207
 d'entrée, 233
 de sortie, 233
 indice optique, 3
 intégrateur simple idéal, 236
 intensité, 84–86, 91
 intensivité, 349
 invariance(s), 447, 449, 457, 514, 520
 par rotation autour d'un axe, 448
 par rotation autour d'un point, 448
 par translation le long d'un axe, 448
 invariants du mouvement, 305
 irréversibilité, 402
 isochronisme, 188
 isothermes d'Andrews, 416

K

Kepler
 loi de —, 310
 référentiel de —, 310
 König (théorème de), 295

L

l'atmosphère isotherme (modèle de), 370
 lampe spectrale, 70
 lampes spectrales, 62
 Laplace
 loi de —, 387
 laser, 63
 lentille(s), 32, 33
 convergentes, 33
 divergentes, 33
 minces accolées, 37
 lignes de champ, 478, 479, 521
 liquide, 369, 414
 loi(s)
 d'Ohm complexe, 207
 de Biot et Savart, 516
 de Kepler, 310
 de Mayer, 387
 de Snell-Descartes, 5
 des aires, 305
 des mailles, 86, 87, 104
 des noeuds, 85, 104
 longueur à l'équilibre, 156
 Lorentz (force de), 533
 lunette, 65, 69
 auto-collimatrice, 67
 de visée, 65

M

machine frigorifique, 428
 macroscopique, 348
 masse, 86
 linéique, 489
 molaire, 350
 réduite, 292, 295
 surfactive, 489
 volumique, 350, 489
 Mayer (loi de), 387
 mécaniquement réversible, 384
 mélange idéal de gaz parfait, 357
 méthode intégrale, 452, 474, 516
 micromètre, 66, 69
 microscopique, 348
 Millman (théorème de), 234
 miroir, 48
 concave, 49, 52, 53
 convexe, 49, 52, 53
 mobile fictif, 292, 294, 295
 moment cinétique d'un point matériel, 285
 moment d'une force, 282
 par rapport à un axe, 283
 par rapport à un point, 282
 moment dipolaire, 499
 moteur, 428
 thermique, 428
 mouvement circulaire, 142, 308
 uniforme, 143

N

Newton (formule de), 51
 Norton, 101
 notation complexe, 269

O

objet, 19
 réel, 19, 33
 virtuel, 19, 33
 objet-image, 19
 oculaire, 66, 68
 ordre du filtre, 245
 oscillateur harmonique, 155, 188

P

palier de changement d'état, 416
 parabole, 309

parabolique, 308
 paramètre d'état, 348, 349, 381
 particule chargée, 446
 Pascal (loi de), 369
 périastre, 310
 périgée, 310
 périhélie, 310
 période T , 204
 phase condensée, 359, 387, 405
 piston, 385
 plan
 d'antisymétrie, 450, 515
 d'incidence, 2, 3
 de symétrie, 450, 515
 plan focal
 image, 21
 objet, 21
 planète, 310
 poids apparent, 371
 point
 coïncidant, 328–330
 critique, 414
 de fonctionnement, 87
 triple, 414
 pompe à chaleur, 428
 pont diviseur
 de courant, 104
 de tension, 104
 portrait de phase, 189, 190
 position d'équilibre, 187
 potentiel, 452, 472–474
 barrières de —, 187
 électrique, 86
 profil de —, 187
 puits de —, 187
 potentiel et champ
 rayonnés à grande distance, 499
 premier principe, 383, 427
 de la thermodynamique, 381
 première identité thermodynamique, 403
 pression, 368, 370
 cinétique, 355
 partielle, 358
 principe
 d'inertie, 151
 de relativité galiléenne, 331
 des actions réciproques, 151
 du retour inverse de la lumière, 4
 fondamental de la dynamique, 331
 fondamental de la dynamique (PFD), 151
 fondamental de la statique des fluides, 368
 probabilité, 370

problème à deux corps, 292
 pseudopériode, 124
 pseudopulsation, 123
 pseudovecteur, 515
 puissance, 89, 172
 fournie, 87
 moyenne, 208
 reçue, 87
 pulsation, 204
 de coupure, 222

Q

quadripôle, 243

R

référentiel non galiléen
 équilibre dans un —, 331
 rayon de courbe, 49
 rayons lumineux, 2
 récepteur, 428
 réduction canonique, 292
 référentiel, 138, 327
 barycentrique, 292, 294
 de Copernic, 332
 de Kepler, 333
 géocentrique, 333
 galiléen, 151
 héliocentrique, 333
 terrestre local, 333
 réflexion
 lois de —, 3
 totale, 4, 5
 réfraction
 limite, 4, 5
 lois de —, 3
 réfringent (milieu), 4
 régime
 apériodique, 122, 191
 critique, 123
 libre pseudopériodique, 190
 linéaire, 233–235
 pseudo-périodique, 123
 saturé, 234
 sinusoïdal forcé, 204, 268
 transitoire, 117
 relation de conjugaison, 20
 rendement, 428, 430
 représentation complexe, 205
 résistance, 89

résonance, 220
 en élongation, 269
 en intensité, 221, 223
 en puissance, 223
 en tension, 223
 en vitesse, 270
 réticule, 64–66, 68
 réversibilité, 402
 mécanique, 402
 rotation pure uniforme, 329, 330

S

second principe, 427
 de la thermodynamique, 402
 Snell-Descartes (lois de), 2, 4
 solide, 414
 sommet (miroir), 49
 source
 chaude, 427
 froide, 427
 idéale de courant, 92
 idéale de tension, 92
 sources de lumière, 61
 blanche, 61
 spectre, 62–64
 spectroscopie, 62, 69
 stigmatiques, 20
 stigmatisme, 19, 20
 suiveur, 236
 surface
 de contrôle, 382
 de Gauss, 458
 fermée, 454
 surtension, 224, 270
 symétrie, 450, 452, 457, 515, 516, 520
 système
 calorifugé, 383
 de coordonnées cartésiennes, 139
 de coordonnées cylindriques, 140
 optique centré, 18

T

température
 Celsius, 355
 cinétique, 355
 temps
 de décroissance, 124
 de relaxation, 120
 tension, 84

- théorème(s)
 - d' Ampère, 520
 - de König, 295
 - de l'énergie cinétique, 173, 294, 332
 - de l'énergie mécanique, 332
 - de Millman, 234
 - de superposition, 105
 - des moments, 417
 - des vases communicants, 369
 - du centre d'inertie, 294
 - du moment cinétique, 282, 285, 286, 294, 331
- thermostat, 404
- Thévenin (modélisation de), 101
- titre massique, 416
- topographie, 478, 521
- trajectoire
 - elliptique, 307
 - hyperbolique, 307
 - parabolique, 307
- transformation, 382
 - adiabatique, 383
 - adiabatique et mécanique réversible, 387
 - cyclique ditherme, 427
 - équivalente, 383
 - explosive, 383
 - infiniment lente, 382
 - infiniment lente équivalente, 383
 - isobare, 382
 - isochore, 382
 - isotherme, 382
 - monobare, 382, 384
 - monotherme, 382, 404
 - réversible, 403
 - Thévenin \leftrightarrow Norton, 101
- translation pure rectiligne, 328, 329
- travail
 - d'une force le long d'une trajectoire, 172
 - des forces de pression, 384
 - élémentaire, 171
- travail et transfert thermique, 381
- troisième principe de la thermodynamique, 406

V

- van der Waals (gaz de), 358
- vapeur, 414
 - sèche, 415
 - saturante, 415
- vaporisation et évaporation, 415
- vecteur
 - axial, 515
 - polaire, 515
- vergence, 33
- viseur à frontale fixe, 65
- vitesse
 - d'entraînement, 329, 330
 - quadratique moyenne, 355
- vitesse cosmique
 - deuxième, 311
 - première, 311
- volume molaire, 350