

MATH 002 : ANALYSE
BAC 1
(semestre 1)



Par : Franck Kalala Mutombo, Ph.D.
Collaborateur(s) : Ass Didier Kumwimba Seya

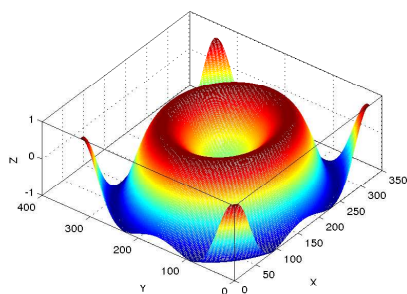


FIGURE 1 – $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$

Faculté Polytechnique
Université de Lubumbashi
2012-2013

Transcrit par Franck Kalala Mutombo

Ce cours n'est pas un polycopié officiel. Aussi, il n'est pas certifié sans erreurs.

Pour toute remarque ou correction, vous pouvez me contacter l'adresse.

franckkalala@gmail.com

Table des matières

1	Note sur l'espace $\mathbb{R}^n$ et sa topologie	2
1.1	Espace vectoriel	2
1.2	L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$	3
1.3	L'espace normé $\mathbb{R}^n$	4
1.4	Normes équivalentes	5
1.5	Distance	6
1.6	Ouverts et Fermé	9
1.7	Intérieur	10
1.8	Adhérence	11
1.9	Convergence dans $\mathbb{R}^n$	12
1.10	Compacité	14
1.11	Sous-suites ou suites extraites	14
1.12	Recouvrement-Ouvert	14
1.13	Sous suites et sous recouvrement-Ouvert	14
1.14	Compact	14
1.15	Compact en dimension finie	15
2	Suites et Séries Numériques	17
2.1	Suites	17
2.2	Exercices de récapitulation	18
2.3	Séries numériques	19
2.4	Exercices récapitulatifs	22
2.5	Séries à termes positifs	23
2.6	Exercices récapitulatifs	26
2.7	Les test de d'Alembert et de la racine	26
2.8	Exercices récapitulatifs	28
2.9	Séries alternées et convegence absolue	29
2.10	Exercices récapitulatifs	33
2.11	Séries Entières	33
2.12	Exercices récapitulatifs	36
2.13	Fonctions représentées par une série entière	37
2.14	Exercices récapitulatifs	41
2.15	Série de Taylor et de MacLaurin	42

2.16	Développement en série entières de fonctions usuelles	45
3	Dérivées partielles	49
3.1	Fonctions de plusieurs variables réelles	49
3.2	Limite et Continuité pour les fonctions de plusieurs variables	52
3.3	Dérivées Partielles	60
3.4	Règles de chaînes	65
3.5	Accroissement et Différentielles	69
3.6	Dérivées des fonctions composées	75
3.7	Dérivées directionnelles	78
3.8	Normales et plan tangents	82
3.9	Equation du plan tangent	83
3.10	Approximation Linéaire	84
3.11	Dérivées d'ordre supérieures	86
3.12	Notion de différentiabilité pour les fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	89
3.13	Fonctions inverses (optionnel)	95
3.13.1	Le théorème de l'inverse local	95
3.14	Théorème de fonctions implicites	99
3.15	Extremas des fonctions de plusieurs variables	101
3.16	Une technique plus général de l'étude de valeurs extrêmes d'une fonction de plusieurs variabbles	103
3.17	Points stationnaires à l'aide du développement de Taylor : cas d'une fonction d'une variable.	103
3.18	Extension du développement de Taylor au cas de plusieurs variables	104
3.18.1	Fonction de n variables indépendantes	104
3.18.2	De la nature des points stationnaires	105
3.19	Les multiplicateurs de Lagrange	112
4	Intégrales Multiples	119
4.1	Intégrales Doubles	119
4.2	Aire et Volume	124
4.3	Intégrales doubles en coordonnées polaires	129
4.4	Aire de Surfaces	131
4.5	Integrales triples	133
4.6	Moment d'inertie et centre de masse	138
4.7	Coordonnées cylindriques	140
4.8	Coordonnées sphériques	142
4.9	Changement de variables et Jacobiens	144
5	Calcul vectoriel	150
5.1	Champs de vectoriels	150
5.2	Intégrale curvilignes	154
5.3	Indépendance du chemin	159
5.4	Théorème de Green-Riemann	164

5.4.1	Application du théorème de Green-Riemann au calcul de l'aire A d'une région R	166
5.4.2	Forme vectorielle de la formule de Green-Riemann	166
5.5	Intégrales de surface	168
5.5.1	Flux du champ vectoriel $\mathbf{F}$ à travers S	170
5.6	Théorème de flux-divergence ou de Gauss-Ostrogradsky	171
5.7	Théorème de Stokes	175
6	Une notion des équations différentielles	178
6.1	Equation à variables séparables	181
6.2	Equations différentielles linéaire du premier ordre	181
6.3	Equations différentielles linéaire du second ordre	183
6.4	Equations différentielles linéaires non homogènes	186
6.5	Résolution par les séries entières	188

Introduction

L'analyse mathématique est l'étude approfondie du calcul différentiel et intégral. Ce cours porte sur le calcul différentiel des fonctions de plusieurs variables. On commence par y établir les propriétés algébriques, géométriques et topologiques de l'espace euclidien à n dimensions $\mathbb{R}^n$. On y étudie ensuite les suites et séries numériques. On continue par l'étude et applications du calcul différentiel de fonctions numériques à plusieurs variables $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. En particulier on énonce tout court le théorème des fonctions inverses et des fonctions implicites, leur illustrations par des exemples. On y aborde par la suite les intégrales multiples de fonctions numériques de plusieurs variables. On y développe les intégrales doubles et triples, on étudie également les transformations des coordonnées. Nous abordons également l'étude du calcul vectoriel, qui inclut les champs de vecteurs, les intégrales curvilignes, l'indépendance du chemin, les intégrales des surfaces, le théorème de Green-riemann, le théorème de flux-divergence et le théorème de Stokes. Ces notions seront utiles par la suite dans tout le cursus. Nous terminons par une brève introduction des quelques notions élémentaire des équations différentielles. Un cours à part entière sera consacré aux équations différentielles dans les années à venir.

Tout étudiant est réputé être familier avec le calcul différentiel des fonctions réelles d'une variable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ acquis dans les années préparatoires. Une exception a été faite cette année en passant en revue toutes les notions fondamentales sur les fonctions réelles d'une variable dans le seul but de mettre tout le monde au même niveau.

Chapitre 1

Note sur l'espace $\mathbb{R}^n$ et sa topologie

1.1 Espace vectoriel

Soit E un ensemble. On dispose sur cet ensemble d'une opération (notée additivement) et on dispose par ailleurs d'une application $K \times E \rightarrow E$ qui à tout couple (λ, x) associe λx . On dit que E est un espace vectoriel lorsque

- (1) E est un groupe commutatif (pour l'addition)
- (2) pour tout vecteur x de E , $1.x = x$ (1 désignant le neutre de la multiplication de K).
- (3) pour tous $\lambda, \mu \in K$ et pour tout vecteur x de E , $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
- (4) pour tous $\lambda, \mu \in K$ et pour tout vecteur x de E , $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- (5) pour tout $\lambda \in K$ et tous vecteurs $x, y \in E$, $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

Exemple. L'espace

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &= \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-fois}} \\ &= \{x = (x_1, \dots, x_n), \text{ tel que } x_i \in \mathbb{R} \ \forall i \in \{1, \dots, n\}\}\end{aligned}$$

Il est clair que $\mathbb{R}^n$ est muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si on définit l'addition par l'addition des coordonnées et le produit par un réel par le produit de toutes les coordonnées par ce réel. Il est clair aussi que cet espace vectoriel est de dimension n . Une base, appelée base canonique, de $\mathbb{R}^n$ est donnée par les vecteurs $\vec{e}_i$ ($1 \leq i \leq n$).

$$\vec{e}_i = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{in})$$

avec

$$\delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } \delta_{ii} = 1$$

Les nombres $x_1 \cdots, x_n$ sont appelés les coordonnées du point $\mathbf{x}$ ou les composantes du vecteur $\mathbf{x}$.

1.2 L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$

Definition 1.2.1 Soit E un espace vectoriel réel. On appelle produit scalaire sur E une application qui est

(i) bilinéaire :

$$(\cdot|\cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}'|\mathbf{y}) &= \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}'|\mathbf{y}) \\ (\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{y}') &= \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}|\mathbf{y}') \end{aligned}$$

(ii) symétrique :

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{y}|\mathbf{x})$$

(iii) définie positive, c'est-à-dire :

$$(\mathbf{x}|\mathbf{x}) \geq 0, \text{ et si } (\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0 \text{ alors } \mathbf{x} = \vec{0}.$$

Proposition 1.2.2 Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé espace euclidien. L'application

$$(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

donnée par

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

est un produit scalaire

Preuve : exercice

Exemple 1.2.3 Soit $[a, b]$ un intervalle et $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On définit un produit scalaire sur E en posant, pour $f, g \in E$: $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$.

Proposition 1.2.4 (Inégalité de Cauchy-Schwartz) Pour tout $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$, on a

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x}|\mathbf{x})(\mathbf{y}|\mathbf{y})$$

Preuve : au cours

On dit que deux vecteurs sont orthogonaux si $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$.

1.3 L'espace normé $\mathbb{R}^n$

La plupart d'espace vectoriels réels peuvent être muni d'une notion de "longueur d'un vecteur" ; on parle plutôt de "norme de vecteur".

Definition 1.3.1 Une norme sur E est une application $\|\cdot\|$ de E dans $\mathbb{R}$ telle que, quels que soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ dans E , et α dans $\mathbb{R}$,

- (i) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$,
- (ii) $\|\mathbf{x}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = 0$,
- (iii) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$,
- (iv) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Un espace vectoriel réel muni d'une norme est dit normé. On montre que tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire est normé. Il en résulte que $\mathbb{R}^n$ ou

$$E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$$

sont normés.

Proposition 1.3.2 Si l'application $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire, alors l'application $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}|\mathbf{x})^{1/2}$ est une norme.

Preuve : exercice

Application : si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont non nuls, l'inégalité de Cauchy-Schwartz donne

$$-1 \leq \frac{(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \leq +1.$$

Il existe donc un réel un ϕ tel que $0 \leq \phi \leq \pi$ et $\cos \phi = \frac{(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}$. Ce nombre ϕ est appelé la mesure de l'angle de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$.

Exemples de normes 1. On appelle *norme euclidienne*, la norme

$$\|\mathbf{x}\| = \left[\sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right]^{1/2}$$

définit par la proposition 1.3.2.

2. Les fonctions définie par

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

et

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$$

sont des normes. Le vérifier en exercice.

1.4 Normes équivalentes

Definition 1.4.1 Deux normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sont équivalents s'il existe deux nombres réels α et β strictement positifs tels que

$$\forall \mathbf{x} \in E, \quad \alpha \|\mathbf{x}\|_a \leq \|\mathbf{x}\|_b \leq \beta \|\mathbf{x}\|_a.$$

on note $\|\cdot\|_a \sim \|\cdot\|_b$. Montrer que cette définition induit une relation d'équivalence.

On peut montrer que toutes les normes de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Proposition 1.4.2 On a les inégalités suivantes

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n \|\mathbf{x}\|_\infty$$

Démonstration : Soit $\mathbf{x}$ dans $\mathbb{R}^n$, supposons que x_r soit la plus grande valeur absolue des coordonnées de $\mathbf{x}$, i.e. $\|\mathbf{x}\|_\infty = |x_r|$. On a alors

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = |x_r| = \sqrt{x_r^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|\mathbf{x}\|.$$

On a aussi

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2 = \|\mathbf{x}\|_1^2$$

et enfin

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n |x_r| = n \|\mathbf{x}\|_\infty.$$

Il existe des espaces vectoriels qui peuvent être munis des normes non équivalentes. On montre par exemple que $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ possède en outre la norme résultant du produit scalaire

$$\|f\| = \left(\int_a^b (f(t))^2 dt \right)^{1/2}$$

la norme

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$$

et la norme

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| \mid t \in [a, b]\},$$

et ces trois normes ne sont pas équivalentes.

Une partie de A de $\mathbb{R}^n$ est dite bornée si

$$\{\|\mathbf{x}\| \mid \mathbf{x} \in A\}$$

est une partie majorée de $\mathbb{R}$. Cette propriété ne dépend pas du choix de la norme.

Proposition 1.4.3 *Toute norme $\|\cdot\|$ dans un espace vectoriel normé e.v. $(E, \|\cdot\|)$ vérifie, pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$*

$$||\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Preuve : au cours

Remarques : dans la suite du cours on notera la norme par $\|\cdot\|$ ou pour simplification par $|\cdot|$ s'il n'y a aucune confusion à craindre.

1.5 Distance

Soit E un ensemble non vide (on utilisera le plus souvent $\mathbb{R}^n$ ici). On dit qu'une application

$$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

est une distance sur E si elle vérifie

(1.) (SEPARATION) pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E \times E$, $\{\mathbf{x} = \mathbf{y}\} \Leftrightarrow \{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}$,

(2.) (SYMETRIE) pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E \times E$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$,

(3.) (INEGALITE TRIANGULAIRE) pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in E \times E \times E$,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$

On dit que (E, d) est un espace métrique.

Exemples.

1. $E = \mathbb{R}$, muni de la distance d définie pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^2$ par $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ est un espace métrique.

2. $E = \mathbb{R}^n$, muni de la DISTANCE DE MANHATTAN d_1 définie pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

3. $E = \mathbb{R}^n$, muni de la DISTANCE EUCLIDIENNE d_2 définie pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^n |(x_i - y_i)|^2 \right)^{1/2}$$

4. $E = \mathbb{R}^n$, muni de la DISTANCE DE MINKOWSKI d_p définie pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

5. $E = \mathbb{R}^n$, muni de la DISTANCE INFINIE ou distance TCHEBYCHEV d_∞ définie pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|.$$

Beaucoup plus général un espace vectoriel normé est muni d'une distance induite par la norme. Il suffit en effet de poser

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

et on peut vérifier aisément que ce bien une norme. Mais la réciproque n'est pas vrai.

Proposition 1.5.1 (*Propriétés des distances induite par des normes.*)

Cette distance possède les propriétés suivantes :

- (1) pour tout $x \in E$, $d(0, x) = \|x\|$,
- (2) pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $d(\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = |\lambda|d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$,
- (3) pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in E^3$, $d(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Démonstration : exercice

Remarque : toute norme induit une distance, mais toutes les distances ne proviennent pas d'une norme.

Nous nous plaçons désormais dans des espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|)$ ou $(E, |\cdot|)$. En général nous prendrons $E = \mathbb{R}^n$. Il nous faudra ensuite nous approcher d'un élément de cet espace et regarder ce qui se passe autour de lui (comme par exemple, le définir comme la limite d'une suite d'éléments de l'espace métrique). Il nous faudra donc définir la notion de voisinage et les outils que nous utiliserons ici sont les boules.

Définition 1.5.2 (*BOULE FERMÉE, OUVERTE, SPHERE*)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. Soient x_0 un point de E et $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

- (1) $B(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in E; \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r\}$ est appelé boule FERMÉE de centre x_0 et de rayon r .
- (2) $B(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in E; \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}$ est appelé boule OUVERTE de centre x_0 et de rayon r .
- (3) $S(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in E; \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = r\}$ est appelé SPHERE de centre $\mathbf{x}_0$ et de rayon r .

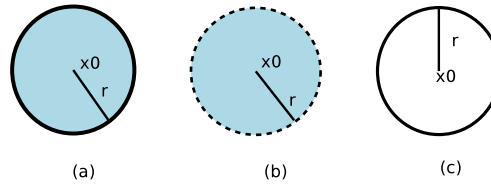


FIGURE 1.1 – Exemples sur $\mathbb{R}^2$ avec la norme euclidienne d'une (a) Boule fermée, (b) boule ouvert (c) Sphere.

Dans le cas où $\mathbf{x}_0 = 0$ (vecteur nul) et $r = 1$ on a ce qu'on appelle les boules ou sphères unités.

Cette notion de boules dépend de la norme considérée. On peut montrer qu'étant donnée deux normes équivalentes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$, toute boule de centre $\mathbf{x}_0$ et définie au moyen de la norme $\|\cdot\|_a$ contient une autre boule de même centre mais définie par la norme $\|\cdot\|_b$. En effet de l'équivalence de deux normes on l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall \mathbf{x} \in E, \quad \alpha \|\mathbf{x}\|_a \leq \|\mathbf{x}\|_b.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} B_b(\mathbf{x}_0, \alpha r) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_b < \alpha r\} \\ &\subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_a < r\} = B_a(\mathbf{x}_0, r). \end{aligned}$$

Une partie $U \in \mathbb{R}^n$ est ouverte si, pour chacun des ses points, il existe une norme et une boule ouverte, d'éfinie pour cette norme, centrée en ce point et contenu dans U . cela veut dire

$$\forall \mathbf{x} \in U, \quad \exists \|\cdot\|_x, \quad \exists B_x(\mathbf{x}, \epsilon) \subseteq U.$$

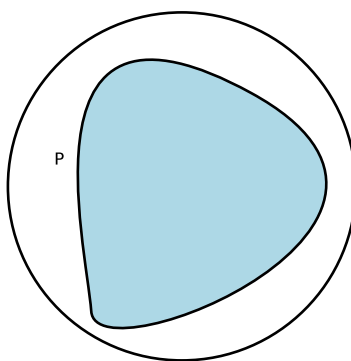
Exercice 1.5.3 Montrer qu'une boule ouverte est un ouvert.

Definition 1.5.4 (BOULE UNITE OUVERTE, FEREMEE, SPHERE)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n.

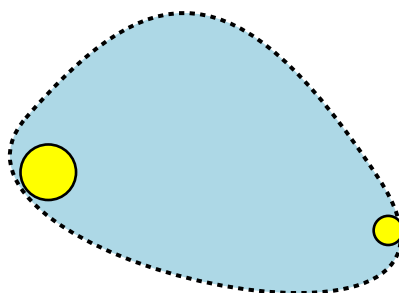
- (1) $B(0, 1) = \{\mathbf{x} \in E, \quad \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ est appel boule UNITE FERMEE.
- (2) $B(0, 1) = \{\mathbf{x} \in E, \quad \|\mathbf{x}\| < 1\}$ est appel boule UNITE OUVERTE.
- (3) $S(0, 1) = \{\mathbf{x} \in E, \quad \|\mathbf{x}\| = 1\}$ est appel SPHERE UNITE.

Definition 1.5.5 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. Une partie bornée P de E est une partie de E pour laquelle on peut trouver une boule (ouverte ou fermée) qui contient tous les points de P (voir figure 1.3 pour un exemple).

FIGURE 1.2 – Exemples de partie bornée de $\mathbb{R}^2$ pour la norme euclidienne.

1.6 Ouverts et Fermé

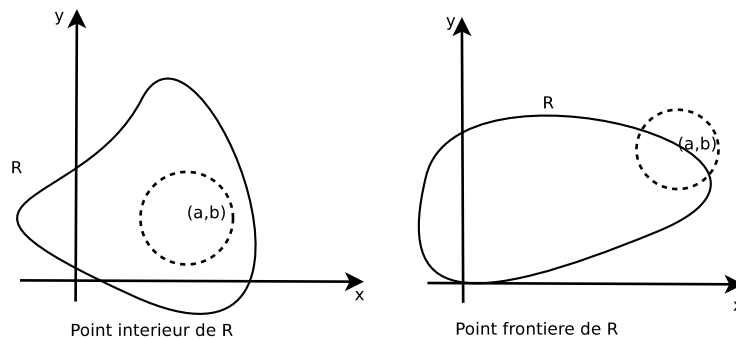
Definition 1.6.1 (*PARTIE OUVERTE*) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. Une partie ouverte (ou un ouvert) de E est une partie U de E telle que pour tout $\mathbf{x} \in U$, il existe $r > 0$ réel, tel que $B(\mathbf{x}, r) \subset U$. Autrement dit, tout point de U est le centre d'une boule ouverte de rayon non-nul, incluse dans U .

FIGURE 1.3 – Exemples sur $\mathbb{R}^2$ de partie ouverte, avec la distance euclidienne.

Definition 1.6.2 (*PARTIE FERMÉE*) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. Une partie fermée (ou un fermé) de E est une partie telle que son complémentaire U de E est un ouvert.

Disque ouvert-Disque fermé

Un disque ouvert se compose de tous les points situés à l'intérieur d'un cercle. Un disque fermé contient à la fois les points à l'intérieur du cercle et sur celui-ci. Un point (a, b) est un point intérieur d'une région R s'il existe un disque de centre (a, b) entièrement inclu dans la région R . Un point (a, b) est un point frontière de R si chaque disque centré en (a, b) contient à la fois des points de R et des points en dehors de R . Une région est fermée si elle contient tous ses points frontières. Une



région est ouverte si elle ne contient aucun de ses points frontières ou si chaque point de la région est un point intérieur. Une région qui contiendrait certains mais pas tous ses points frontières n'est ni ouverte ni fermée. Ces concepts sont analogues aux caractères fermé, ouvert et semi-ouvert des intervalles de la droite réelle.

Proposition 1.6.3 (BOULES OUVERTES, FERMEES) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. On a alors :

1. une boule ouverte est un ouvert,
2. une boule fermée est un fermé.

On peut vérifier facilement les propriétés suivantes :

Proposition 1.6.4 L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est un ouvert ; le vide est un ouvert ; une réunion quelconque d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert ; une intersection de deux ouverts est un ouvert.

Remarque 1.6.5 Une intersection d'une infinité d'ouverts n'est nécessairement ouverte, par exemple, l'axiome d'Archimède,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B\left(x_0, \frac{1}{n}\right) = \{x_0\},$$

ce qui n'est pas un ouvert.

1.7 Intérieur

Définition 1.7.1 Soient $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. et $A \subset E$. Un point x de E est dit intérieur à A si A est un voisinage de x , autrement dit, si A contient une boule ouverte contenant x . L'intérieur de A , noté $\text{Int}(A)$ est l'ensemble des points intérieurs à A .

Proposition 1.7.2 Propriété de l'intérieur

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. et $A \subset E$. L'intérieur de A est la plus grande partie ouverte incluse dans A .

Remarque 1.7.3 (1) $x \in \text{Int}(A) = \cup_{P \in \mathcal{O}_A} P$

(2) $\text{Int}(A)$ est un ouvert.

(3) A est un ouvert $\Rightarrow \text{Int}(A) = A$.

1.8 Adhérence

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. Soit A une partie quelconque de E . Alors E contient au moins une partie fermée contenant A (en effet E est fermé). Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties fermées contenant A . Alors $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ est la plus petite partie fermée contenant A . Et $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ est bien une partie fermée (comme intersection de familles fermées).

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. et $A \in E$. Un point x de E est dit adhérent à A si tout voisinage de x rencontre A , autrement dit, si toute boule ouverte contenant x contient au-moins un élément de A . L'adhérence de $A \in E$, notée $\overline{A}$ ou $\text{adh}(A)$, est l'ensemble des points adhérents à A .

Remarque 1.8.1 On a $a \in \overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$

(1) $\overline{A}$ est un fermé.

(2) $A \subset \overline{A}$.

(3) A est un fermé $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

Proposition 1.8.2 Adhérence du complémentaire Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. Soit A une partie quelconque de E .

$$\overline{\mathbb{C}_E A} = \mathbb{C}_E \text{Int}(A)$$

Definition 1.8.3 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. On appelle frontière de $A \subset E$, notée $\text{Fr}(A)$ l'ensemble défini par

$$\text{Fr}(A) = A - \text{Int}(A).$$

On dit que x est un point frontière de A si et seulement si $x \in \text{Fr}(A)$.

Proposition 1.8.4 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. Soient $A \in E$ et P un ouvert de E . Alors

$$A \cap P = \emptyset \Leftrightarrow A \cap P = \emptyset$$

Proposition 1.8.5 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. Soient $A \in E$, $\mathbf{x} \in E$ et $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$. On a alors :

(1) $x \in A \Leftrightarrow$ il existe $r > 0$, tel que $B(\mathbf{x}, r) \subset A$,

(2) $x \in A \Leftrightarrow$ pour tout $r > 0$, $B(\mathbf{x}, r) \cap A \neq \emptyset$,

(3) $x \in \text{Fr}(A) \Leftrightarrow$ pour tout $r > 0$, $B(\mathbf{x}, r) \cap A = \emptyset$ et $B(\mathbf{x}, r) \cap \mathbb{C}_E A \neq \emptyset$.

Proposition 1.8.6 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n.

1. $\text{Adh}(B(0, 1)) = B(0, 1)$,
2. $\text{Int}(B(0, 1)) = B(0, 1)$,
3. $\text{Fr}(B(0, 1)) = \{\mathbf{x} \in E; d(0, \mathbf{x}) = 1\}$.

1.9 Convergence dans $\mathbb{R}^n$

Definition 1.9.1 Soit E un espace métrique et (a_n) une suite d'éléments de E . On dit qu'elle converge vers a si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq k, \quad \|a_n - a\| \leq \epsilon.$$

Cette notion de convergence ne change pas si on remplace la norme $\|\cdot\|$ par une norme équivalente $\|\cdot\|_b$. Si on a $\|\cdot\| \leq \beta \|\cdot\|_b$, montrons que

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists k' \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq k', \quad \|a_n - a\|_b \leq \epsilon.$$

En effet soit $\epsilon > 0$; posons $\epsilon' = \epsilon/\beta$. Pour cet $\epsilon' > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall i \geq k$, $\|a_n - a\| \leq \epsilon' = \epsilon/\beta$. Mais alors $\|a_n - a\|_b \leq \beta \|a_n - a\| \leq \epsilon$.

Proposition 1.9.2 Notion de convergence en termes de voisinages. Soit (a_n) une suite dans E . Elle converge vers $a \in E$ ssi

$$\forall V \text{ voisinage de } a \quad \exists k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq k, \quad a_n \in V$$

Démonstration : Supposons que (a_n) converge vers a et soit V un voisinage de a . Par définition de voisinage, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(a, \epsilon) \subseteq V$ et, par définition de convergence, pour cet ϵ ,

$$\exists k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq k, \quad \|a_n - a\| \leq \epsilon/2 < \epsilon.$$

On a donc, pour $n \geq k$, $a_n \in V$. Inversement, si on a la condition indiquée pour tout voisinage de a , on l'a en particulier pour tout centre a .

Proposition 1.9.3 Soit $a_n = (a_{n1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n \in \mathbb{R}^n$. La suite (a_n) converge vers $b = (b_1, \dots, b_n)$ si et seulement si, pour $p = 1, 2, \dots, n$, la suite de réels $(a_{ip})_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers b_p .

Démonstration : Comme

$$|a_{np} - b_p| \leq \|a_n - b\|_\infty,$$

si la suite (a_n) converge vers b , la suite (a_{np}) converge vers b_p .

Inversement supposons que pour chaque $p = 1, 2, \dots, n$, la suite (a_{np}) converge vers b_p . Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier k_p tel que $\forall n \geq k_p, \|a_n - b_p\| < \epsilon$. Soit

k le plus grand des indices $k_1, k_2, \dots, k_n$. On a $\forall n \geq k, \|a_n - b\| = \max(|a_{n1} - b_1|, \dots, |a_{nn} - b_n|) \leq \epsilon$.

La convergence d'une suite de $\mathbb{R}^n$ peut donc se vérifier coordonnée par coordonnée.

La proposition 1.9.3 permet d'étendre certains résultats sur les suites de réels en des résultats analogues sur les suites dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.9.4 Soient (a_n) et (b_n) deux suite dans $\mathbb{R}^n$ convergeant respectivement vers a et b et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. La suite $(a_n + b_n)$ converge vers $a + b$
2. La suite (αa_n) converge vers αa .

Démonstration : se servir de la proposition 1.9.3 et regarder coordonnée par coordonnée.

Comme dans le cas de $\mathbb{R}$, on peut définir dans un espace métrique (E, d) une notion de suite de Cauchy et on peut que c'est un espace métrique **complet**.

Definition 1.9.5 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . On dit que (a_n) est une suite de Cauchy si :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists k \in \mathbb{N}, \quad \forall i, j \geq k, \quad d(a_i, a_j) \leq \epsilon.$$

Definition 1.9.6 On dit que une espace métrique est complet si toute suite Cauchy est convergente.

Quand aux exemples nous savons déjà que $\mathbb{R}$ est complet tandis que $\mathbb{Q}$ ne l'est pas. La complétude de $\mathbb{R}$ fournit facilement celle de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.9.7 (Complétude de $\mathbb{R}^n$). Si (a_n) est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^n$, elle converge dans $\mathbb{R}^n$.

Preuve : exercice. Si E est un espace métrique complet et A une partie fermée de E , A est lui même complet.

Proposition 1.9.8 Soit E un espace métrique, $A \subseteq E$, A est fermée, si et seulement si pour toute suite convergente (a_n) d'éléments de A , la limite a est encore dans A .

Démonstration : 1) Soit A un fermé de E et soit (a_n) une suite qui converge vers a . Montrons que $a \in A$. Sinon $a \in \mathbb{C}A$ qui est un ouvert. Mais alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(a, \epsilon) \subseteq \mathbb{C}A$ et donc cette boule ne peut contenir aucun a_n ce qui est impossible puisque (a_n) converge vers a .

2) Réciproquement supposons que toute suite convergente (a_n) d'éléments de A converge vers un élément de A et montrons que A est fermé. Soit $a \in \overline{A}$ (l'adhérence de A). Pour chaque entier n la boule ouverte $B(a, 1/n)$ coupe A . On peut donc y choisir un élément a_n . Par construction, comme $d(a, a_n) < 1/n$ la suite (a_n) converge vers a . Donc $a \in A$, et $A = \overline{A}$, donc A est fermé.

Corollaire 1.9.9 *Si A est un fermé d'un espace métrique complet, A est complet.*

Preuve : Soit (a_n) une suite de Cauchy dans A . Elle est tout aussi bien une suite de Cauchy dans E . Comme E est complet la suite (a_n) a une limite a dans E . Mais comme A est fermé cette limite a est dans A par la proposition qui précède.

Signalons une propriété importante des suites bornées dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire des suites (a_n) dont la suite des normes $(\|a_n\|)$ est bornée dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.9.10 *(Théorème de Bolzano-Weierstrass). Toute suite bornée de (a_n) dans $\mathbb{R}^n$ possède une sous-suite convergente.*

1.10 Compacité

La notion de compacité sera utile dans la théorie de fonctions de plusieurs variables. Il est donc utile de la rappeler ici. Et pour la définir, nous utilisons les sous-suites, d'où l'intérêt d'avoir rappelé quelques résultats sur les suites dans la section précédente. Encore une fois, dans tout ce qui suit, nous nous placerons dans l'e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$.

1.11 Sous-suites ou suites extraites

Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E et $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante, alors la suite $(x_{\phi(n)})_n \in \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ est appelée suite extraite ou sous-suite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1.12 Recouvrement-Ouvert

Soit $A \subset E$, un recouvrement ouvert de A est une famille d'ouverts $(\mathcal{O}_i)_i$ tels que $A \subset (\bigcup \mathcal{O}_i)$, $i \in I$.

1.13 Sous suites et sous recouvrement-Ouvert

Soit $A \subset E$, alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes

1. *De toute suite de points de A on peut extraire une sous-suite qui converge vers un point de A .*
2. *De tout recouvrement ouvert de A on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

1.14 Compact

Une partie A qui vérifie une de ces deux propriétés est un compact.

1.15 Compact en dimension finie

Soit $A \subset E$. Si A est fermé et borné dans E on dit qu'il est compact.

Exercice 1.15.1 1. Montrer que tout singleton de $\mathbb{R}^n$ est fermé.

2. Montrer que $[a, b]$ est l'adhérence de (a, b) et (a, b) l'intérieur de $[a, b]$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Montrer que

$$\text{Fr}(B[a, r]) = \text{Fr}(B(a, r)) = \{\mathbf{x} | d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = r\}$$

4. Chercher l'intérieur de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, l'adhérence de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, et la frontière de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

5. dans $\mathbb{R}^2$, dessinez les boules

$$B_\infty[0, 1], \quad B_2[0, 1], \quad B_1[0, 1] \quad B_\infty[0, 1/2]$$

6. Pour chacun des ensembles suivants, donnez son intérieur, son adhérence et sa frontière :

(i) Le plan d'équation $z = 0$ dans $\mathbb{R}^2$;

(ii) $\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ dans $\mathbb{R}^2$;

(iii) $\{1/n | n \in \mathbb{N}^*\}$ dans $\mathbb{R}$;

(iv) $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 < 1, z \geq 0\}$ dans $\mathbb{R}^3$.

7. (E, d) désignant un espace métrique, et X un ensemble quelconque, soit f une application injective de X dans E . Montrer qu'on obtient une distance δ sur X en posant

$$\delta(x, y) = d[f(x), f(y)].$$

Applications. Montrer que

(a) $d_0(x, y) = |\text{Arctg } y - \text{Arctg } x|$, est une distance sur $\mathbb{R}$

(b) $d_1(x, y) = |\text{Log } y/x|$ est une distance sur $\mathbb{R}_+^*$.

8. (a) Quels que soient les nombres réels positifs a, b, c vérifiant $c \leq a + b$, montrer que l'on a :

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \geq \frac{c}{1+c}.$$

(b) (E, d) désignant un espace métrique, montrer qu'on obtient une nouvelle distance δ sur E en posant

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

(c) Montrer que les distances d et δ définissent la même topologie et les mêmes suites de Cauchy.

9. Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que toute suite (x_n) vérifiant la condition

$$(n \in \mathbb{N}) \quad d(x_n, x_{n+1}) < 2^{-n}$$

est de Cauchy.

10. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x + 1 \text{ et } x > -1\}$

(a) A est-il voisinage de $(0, 1/3)$, $(0, 0)$, $(1/4, 1/4)$, $(1, 1)$, $(3, 2)$?

(b) Déterminer $\overline{A}$, $Fr(A)$, $Int(A)$

11. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 \leq |\mathbf{x}| \leq 4\}$

(a) A est-il un ouvert ? un fermé ? justifier votre réponse.

(b) Déterminer $\overline{A}$, $Fr(A)$, $Int(A)$

12. Montrer que $\mathbb{R}^2$ est complet.

Chapitre 2

Suites et Séries Numériques

2.1 Suites

Les suites avaient déjà été abordées dans la partie précédente du cours. Pour tous les résultats essentiels sur les suites je vous renvoie donc de revoir avec attention ce qui a été dit au paravant.

Definition 2.1.1 (Rappel) Soit (a_n) une suite de nombre réels. La suite (a_n) converge vers a , ce qui s'écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ ou } a_n \rightarrow a \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre positif k tel que

$$|a_n - a| < \epsilon \text{ quand } n > k.$$

Quand un tel nombre a n'existe pas, on dit que la suite n'a pas de limite ou qu'elle diverge.

Definition 2.1.2 La notation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

signifie que, quelque soit m réel strictement positif, il existe un nombre k tel que

$$a_n > m \text{ quand } n > k.$$

Theorem 2.1.3 Soit une suite (a_n) et une fonction f telle que $f(n) = a_n$ et définie pour tout x réel supérieur à 1.

(1) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = a$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = a$.

(2) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \pm\infty$

Exemple 2.1.4 Utiliser la définition 2.1.3 et le résultat du théorème 2.1.1 pour déterminer si la suite (a_n) converge ou diverge, a_n étant défini par

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}$$

Solution : au cours

Theorem 2.1.5 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ si $|r| < 1$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = \infty$ si $|r| > 1$

Preuve : au cours

Theorem 2.1.6 Si (a_n) , (b_n) et (c_n) sont les suites telles que $a_n \leq b_n \leq c_n$ pour tout n et si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$$

Preuve : au cours

Exemple 2.1.7 Utiliser le théorème 2.1.6 pour calculer la limite de la suite

$$\left(\frac{\cos^2 n}{3^n} \right)$$

Solution : au cours

Exercice 2.1.8 Soit la suite (a_n) . Montrer que si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

2.2 Exercices de récapitulation

Exercice 2.2.1 Déterminer si la suite converge ou diverge et si elle converge, calculer sa limite

1. $(\operatorname{Arctan} n)$

2. $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

3. $(e^{-n} \ln n)$

4. $\left(\frac{n^{-10}}{\sec n} \right)$

5. une suite est définie de façon récurrente par la formule $x_{k+1} = x_k - \tan x$.

(a) si $x_1 = 3$, calculer approximativement les cinq premiers termes de la suite. Quelle sera la valeur de $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n$?

- (b) si $x_1 = 6$, calculer approximativement les cinq premiers termes de la suite. Quelle sera la valeur de $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n$?
- (c) supposant que $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = L$, montrer que $L = n\pi$ où n est un entier.
6. La fameuse suite de Fibonacci est définie par $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$ avec $a_1 = a_2 = 1$.
- (a) Quels sont les dix premiers termes de cette suite ?
- (b) Les termes de la suite $r_k = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ sont des approximations de Φ , la divine proportion. Quels sont approximativement les dix premiers termes de cette suite ?
- (c) En supposant que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \Phi$, démontrer que

$$\Phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

2.3 Séries numériques

Definition 2.3.1 Une série numérique est une expression de la forme

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

ou avec le symbole de sommation

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ou } \sum a_n.$$

chaque a_k est un terme de la série et a_n et n ième terme de la série.

Definition 2.3.2 (1) La somme partielle d'indice k de la série $\sum a_n$ est

$$S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

(2) La suite des sommes partielles de la série $\sum a_n$ est $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots$

On a :

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_k &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k \end{aligned}$$

Definition 2.3.3 Une série $\sum a_n$ est convergente ou converge si sa suite de sommes partielles (S_n) converge, c'est à dire qu'il existe un nombre S tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Cette limite est appelée la somme de la série $\sum a_n$ et nous écrivons

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

La série $\sum a_n$ est divergente ou diverge si (S_n) diverge. Une série divergente n'a pas de somme.

Nota : Il n'est pas généralement pas facile de trouver une expression de S_n .

Example 2.3.4 Soit la série

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

(a) écrire S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 et S_6

(b) écrire S_n

(c) Montrer que la série est convergente et calculer sa somme.

Solution : au cours

Definition 2.3.5 (Série harmonique) Une série harmonique est de la forme

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \cdots = \sum \frac{1}{n}$$

Démontrer qu'une série harmonique est divergente.

Theorem 2.3.6 (Série géométrique) Soit $a \neq 0$. La série géométrique

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots$$

(1) converge si $|r| < 1$ et sa somme est égale à

$$S = \frac{a}{1-r}$$

(2) diverge si $|r| \geq 1$.

Preuve : exercice au cours

Exercice 2.3.7 Vérifier que la série suivante converge et calculer sa somme

$$\sum \frac{1}{3^{n-1}}$$

Theorem 2.3.8 Si une série $\sum a_n$ est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

La réciproque de ce théorème est fausse, s'inspirer de la série harmonique. Preuve : au cours

Theorem 2.3.9 (1) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, alors la série $\sum a_n$ est divergente.

(2) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, d'autres tests sont nécessaires pour déterminer si la série $\sum a_n$ est convergente ou divergente.

Exercice 2.3.10 Utiliser le test 2.3.9 pour dire si les séries suivantes convergent ou divergent

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n}$

Theorem 2.3.11 Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries telles que $a_j = b_j$ pour $j > k$, où k est un entier positif, alors elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.

Preuve : Désignons par S_n et T_n les sommes partielles de rang n de $\sum a_n$ et $\sum b_n$ respectivement. Alors pour $n \geq k$ on a :

$$S_n - S_k = T_n - T_k$$

ou

$$S_n = T_n + (S_k - T_k)$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n + (S_k - T_k).$$

Soit les deux limites existent et les deux séries convergent, soit elles n'existent pas et les deux séries divergent. Dans le cas où les deux séries convergent, leur somme différera de $S_k - T_k$

Theorem 2.3.12 Quel que soit k entier positif, les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots \quad \text{et} \quad \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots$$

convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux.

Exemple 2.3.13 Montrer que la série suivante est convergente :

$$\frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots + \frac{(n+2)}{(n+3)} + \cdots$$

Theorem 2.3.14 Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont des séries convergentes de somme A et B respectivement, alors

- (1) $\sum(a_n + b_n)$ convergent et sa somme est $A + B$
- (2) $\sum ca_n$ convergent et sa somme est cA
- (3) $\sum a_n - b_n$ convergent et sa somme est $A - B$

Example 2.3.15 Montrer que la série suivante est convergent et calculer sa somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{7}{n(n+1)} + \frac{2}{3^{n-1}} \right]$$

Theorem 2.3.16 Si $\sum a_n$ est une série convergente et $\sum b_n$ une série divergente, alors $\sum(a_n + b_n)$ est divergente.

Preuve : au cours

Example 2.3.17 Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} + \frac{1}{n} \right)$$

2.4 Exercices récapitulatifs

Exercice 2.4.1 1. Trouver (a) S_1 , S_2 et S_3 ; (b) S_n ; (c) la somme de la série si elle converge.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{(2n+5)(2n+3)}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$

2. Etudier la convergence des séries géométriques et calculer la somme en cas de convergence

(a) $3 + \frac{3}{4} + \dots + \frac{3}{4^{n-1}} + \dots$

(b) $0.37 + 0.0037 + \dots + \frac{37}{(100)^n} + \dots$

(c) $1 + \left(\frac{e}{3}\right) + \dots + \left(\frac{e}{3}\right)^{n-1} + \dots$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-5)^{n-1} 4^{-n}$

3. Trouver les valeurs de x pour lesquelles la série est convergente et calculer sa somme.

(a) $1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n+1} x^n + \dots$

(b) $3 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{3} + \dots + \frac{(x-1)^n}{3^{n-1}} + \dots$

4. Etudier la convergence de la série en s'inspirant du théorème 2.3.12

(a) $\frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \dots$

(b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n+3} + \dots$

(c) $-4 - 2 - \frac{4}{3} - \dots - \frac{4}{n} - \dots$

5. On laisse tomber une balle en caoutchouc d'une hauteur de 10 m et elle se met à rebondir. En supposant que chaque rebond est la moitié du bond précédent, calculer la distance totale parcourue par la balle avant qu'elle ne retourne à l'état de repos complet. Rép : 30 m

6. Etudier la convergence de la série. En cas de convergence calculer la somme.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n \right]$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{4}{n} \right]$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n} - 2^{-3})$

7. Où est l'erreur dans la "démonstration" de ce que 0 est la somme de la série géométrie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = [1 + (-1)] + [1 + (-1)] + [1 + (-1)] + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

2.5 Séries à termes positifs

Il n'est pas toujours facile de trouver une expression S_n dans le cas des séries convergentes. Il n'y a pas une méthode générale pour calculer la somme d'une série si celle-ci existe.

Theorem 2.5.1 Si $\sum a_n$ est une série à termes positifs et s'il existe un nombre M tel que, quelque soit n ,

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n < M$$

alors la série converge et sa somme S est inférieure à M . Par contre, si un tel nombre M n'existe pas la série diverge.

Preuve : au cours

Theorem 2.5.2 (Test intégral) Soit f la fonction associée à la série $\sum a_n$ en posant $f(n) = a_n$ et définie pour tout x réel supérieur à 1. Si f est positive, continue et strictement décroissante, alors la série $\sum a_n$

(a) converge si $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge

(b) diverge si $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ diverge

Preuve :

L'aire du polygone rectangulaire inscrit est donnée par :

$$\sum_{k=2}^n = f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$$

où n est un entier supérieur à 2. L'aire du polygone rectangulaire circonscrit est donnée par :

$$\sum_{k=1}^{n-1} = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1).$$

L'aire sous le graphique de f depuis 1 jusqu'à n est comprise entre ces deux valeurs

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Soit S_n la somme partielle de rang n de la série $\sum f(n)$, cette dernière inégalité s'écrit aussi :

$$S_n - f(1) \leq \int_1^n f(x)dx \leq S_{n-1}.$$

Si $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge et est égale à $K \geq 0$, il s'ensuit que pour tout n entier positif,

$$S_n - f(1) \leq K \quad \text{ou} \quad S_n \leq K + f(1).$$

La série est convergente (voir théorème 2.5.1). Par contre, si l'intégrale impropre diverge

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x)dx = +\infty$$

et comme $\int_1^n f(x)dx \leq S_{n-1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = +\infty$; autrement dit, la série $\sum f(n)$ diverge.

Exemple 2.5.3 Monter que la série harmonique est divergente en utilisant le test intégral.

Solution : au cours

Definition 2.5.4 Une **série de Riemann** est une série de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

où p est un nombre réel strictement positif.

Theorem 2.5.5 La série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

(1) converge si $p > 1$

(2) diverge si $p \leq 1$

Preuve :

Le cas $p = 1$ correspond à la série harmonique qui diverge. Soit alors $p > 1$ et posons $f(n) = 1/n^p$ et considérons $f(x) = 1/x^p$. Cette fonction est positive et continue pour $x \geq 1$. On montre que f est strictement décroissante ($f'(x) = -px^{-p-1} < 0$ pour tout $x \geq 1$). On peut donc appliquer le test intégral du théorème 2.5.2 : si $p > 1$ la série est convergente et si $0 < p < 1$ la série est divergente. (montrez cela).

Theorem 2.5.6 Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ des séries à termes positifs.

(1) Si $\sum a_n$ converge et $a_n \leq b_n$ pour tout n entier positif, alors $\sum b_n$ converge.

(2) Si $\sum a_n$ diverge et $a_n \geq b_n$ pour tout n entier positif, alors $\sum b_n$ diverge.

Preuve : exercice

Example 2.5.7 Utiliser le test de comparaison pour étudier la convergence des séries

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+5^n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}-1}$$

Theorem 2.5.8 (forme limite du test de comparaison) Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ des séries à termes positifs. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$$

alors, les séries sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.

Preuve : Si $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = c > 0$, il existe donc un nombre k tel que

$$\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2} \text{ quand } n > k$$

ou encore

$$\frac{c}{2}b_n < a_n < \frac{3c}{2}b_n \text{ quand } n > k.$$

Si la série $\sum a_n$ converge, alors la série $\sum (c/2)b_n$, dominé par la série convergente $\sum a_n$, est aussi convergente. La série

$$\sum b_n = \sum \left(\frac{2}{c}\right) \left(\frac{c}{2}\right) b_n$$

converge. Inversement, si $\sum b_n$ converge, $\sum a_n$ converge aussi car elle est dominée par la série convergente $\sum (3c/2)b_n$. Nous avons établi que $\sum a_n$ converge si et seulement si $\sum b_n$ converge.

2.6 Exercices récapitulatifs

Exercice 2.6.1 1. (a) Montrer que la fonction f associée à la série à partir de l'expression de son n ième terme satisfait aux hypothèses du test intégral.

(b) A l'aide du test intégral, étudier la convergence de la série.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+16n^2}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

2. Déterminer par comparaison si la série diverge ou converge

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+n^2+1}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n^2}$

3. Appliquer la forme limite du test de comparaison pour étudier la série

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+4}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n^2-7}{e^n(n+1)^2}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

4. Quelles sont les valeurs de k pour lesquelles la série converge

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k \ln n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^k}$

5. Soit $\sum a_n$ une série à terme positifs convergente et f telle que $f(n) = a_n$. Supposons que f soit continue et strictement décroissante pour $n \geq N$ où N est un entier. Démontrer que l'erreur commise en approchant la somme de la série par $\sum_{n=1}^N a_n$ est inférieure à $\int_N^{\infty} f(x)dx$

6. Calculer une valeur approchée de la somme la série donnée avec trois décimales exactes. (justifiez en utilisant l'exercice précédent).

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

2.7 Les test de d'Alembert et de la racine

Theorem 2.7.1 Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs et supposons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

(1) Si $L < 1$, la série est convergente.

- (2) Si $L > 1$, la série $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ est divergente.
 (3) Si $L = 1$ on ne peut rien dire.

Preuve :

- (1) Supposons $L < 1$ et soit un nombre r tel que $L < r < 1$. Comme $a_{n+1}/a_n \rightarrow L$ quand $n \rightarrow \infty$, il existe un entier k tel que $n \geq k$ on ait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < r \quad \text{ou} \quad a_{n+1} < a_n$$

En donnant à n les valeurs successives $N, N+1, N+2, \dots$, nous obtenons

$$\begin{aligned} a_{N+1} &< a_N r \\ a_{N+2} &< a_{N+1} r < a_N r^2 \\ a_{N+3} &< a_{N+2} r < a_N r^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

et, de façon générale,

$$a_{N+m} < a_N r^m, \quad m > 0.$$

Du test de comparaison il découle alors que la série

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \dots + a_{N+m} + \dots$$

converge puisque ses termes sont inférieurs à ceux de la série géométrique

$$a_N r + a_N r^2 + \dots + a_N r^n + \dots.$$

or cette série ne rien d'autre que la série $\sum a_n$ amputés de ses N premiers termes. Puisque ce nombre fini de termes n'affecte pas la convergence(), nous pouvons conclure à la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- (2) similaire au cas (1).
 (3) c'est le cas pour les série $\sum (1/n^2)$ et $\sum (1/n)$. D'autres tests sont nécessaires quand la limite vaut 1.

Exemple 2.7.2 Étudier la convergence de la série

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

Solution :

(1) Appliquons le test de d'Alembert :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0.\end{aligned}$$

Puisque $0 < 1$, la série converge.

(2) La série diverge. Montrer cela en exercice.

(3) Exercice. Montrer que cette série converge vers le nombre e .

Theorem 2.7.3 Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs et supposons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

(1) Si $L < 1$, la série est convergente.

(2) Si $L > 1$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$, la série est divergente.

(3) Si $L = 1$ on se rien dire.

Preuve :

(1) Prendre un nombre r qui est tel que $L < r < 1$ et utiliser la définition pour montrer que

$$a_n < r^n$$

pour un certain k tel que $n > k$. Conclure.

Example 2.7.4 Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{n^n}$$

2.8 Exercices récapitulatifs

Exercice 2.8.1 1. Décider suivant le test de d'Alembert pour étudier la série

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^5}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 10}{n!}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$

2. Utiliser le test de la racine pour étudier la série

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^{n/2}}$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

3. Etudier la convergence de la série

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{99^n(n^5+2)}{n^2 10^{2n}}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n n!$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Arctan} n}{n^2}$$

2.9 Séries alternées et convergence absolue

Les séries alternées sont l'une de deux formes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad \text{avec } a_k > 0, \quad \forall k.$$

Theorem 2.9.1 (Test de Leibniz)

La série alternée

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$$

est convergente si les deux conditions suivantes sont remplies :

- (1) $a_k \geq a_{k+1}$, quelque soit k
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Preuve :

De l'inégalité (1) on a :

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq \cdots \geq a_k \geq a_{k+1} \geq \cdots .$$

Considérons les sommes partielles de rang pair

$$S_2, S_4, S_6, \cdots, S_{2n}, \cdots .$$

Ces sommes partielles comportent un nombre pair de termes de la série. On a :

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

on a :

$$0 \leq S_2 \leq S_4 \leq \cdots \leq S_{2n} \leq \cdots .$$

La suite S_n est donc croissante. Les 4 premiers termes sont :

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 - a_2, \quad S_3 = a_1 - a_2 + a_3, \quad S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4$$

et général

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} + a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1.$$

Ainsi la suite S_n est suite bornée et donc convergente. Il existe donc un certain S tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S \leq a_1.$$

Les sommes partielles de rang impair sont données par :

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}.$$

On a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S, \quad \text{puisque} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0.$$

La limite commune de la suite des sommes partielles de rang pair et de la suite des sommes partielles de rang impair est la limite de la suite des sommes partielles

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \leq a_1$$

et la série est donc convergente.

Exercice 2.9.2 Déterminer si la série alternées est convergente ou divergente.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n}{4n^2 - 3} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n}{4n - 3}$$

Solution :

(1) Soit $a_n = f(n) = \frac{2n}{4n^2 - 3}$. Le théorème de Leibniz demande de vérifier que :

(i) $a_k \geq a_{k+1}$ quelque soit k .

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Un moyen de vérifier le premier point (i) et de montrer que $f(x) = 2x/(4x^2 - 3)$ est décroissante pour $x \geq 1$. En effet on a :

$$f'(x) = \frac{-8x^2 - 6}{(4x^2 - 3)^2} < 0.$$

Ce qui montre $f(x)$ est strictement décroissante et donc $f(k) \geq f(k+1)$, autrement dit, $a_k \geq a_{k+1}$ quelque soit k entier strictement positif. Une manière de prouver

cela consisterai á montrer directement que $a_k - a_{k+1} \geq 0$.

$$\begin{aligned} a_k - a_{k+1} &= \frac{2k}{4k^2 - 3} - \frac{2(k+1)}{4(k+1)^2 - 3} \\ &= \frac{8k^2 + 8k + 6}{(4k^2 - 3)(4k^2 + 8k + 1)} \geq 0. \end{aligned}$$

Ou encore, $a_k \geq a_{k+1}$ est équivalent á $a_{k+1}/a_k \leq 1$.

Pour le second point (ii) on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{4n^2 - 3} = 0.$$

Donc la série alternée est convergente.

(2) Montrer que cette série est divergente.

Le théorème suivant estime l'erreur en approximant S par S_n dans une série alternée.

Theorem 2.9.3 Soit $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ une série alternée qui satisfait les deux conditions du théorème de Leibniz. Si S désigne sa somme et S_n une somme partielle alors l'erreur commise en tenant S_n comme valeur approximative de S est telle que :

$$|S - S_n| \leq a_{n+1};$$

Preuve :

La série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ privée de ses n premiers termes á savoir

$$(-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + (-1)^{n+2} a_{n+3} + \dots,$$

satisfait aussi les conditions du théorème de Leibniz et dès lors a une somme R_n qui peut s'écrire

$$S - S_n = R_n = (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \dots)$$

et

$$|R_n| = (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \dots)$$

Le même raisonnement que celui de la démonstration du théorème de Leibniz conduit á $|R_n| \leq a_{n+1}$. Par conséquent,

$$E = |S - S_n| = |R_n| \leq a_{n+1}$$

Definition 2.9.4 Une série $\sum a_n$ est dite absolument convergente si la série

$$\sum |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots$$

est convergente.

Example 2.9.5 (1) Montrer que la série alternée

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} + \cdots$$

est absolument convergente.

(2) Montrer que la série harmonique alternée

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

(a) est convergente (b) n'est pas absolument convergente.

Solution : au cours

Definition 2.9.6 Une série $\sum a_n$ est conditionnellement convergente si $\sum a_n$ est convergente et $\sum |a_n|$ est divergente.

Theorem 2.9.7 Si une série $\sum a_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Preuve : Soit $b_n = a_n + |a_n|$. On peut montrer que $0 \leq b_n \leq 2|a_n|$. En utilisant l'hypothèse, conclure.

Exercice 2.9.8 Étudier la convergence de la série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^7} - \frac{1}{2^8}$$

Hint : Utiliser le théorème 2.9.7.

Theorem 2.9.9 (Test d'absolue convergence de d'Alembert.) Soit $\sum a_n$ une série dont les termes ne sont pas nuls et supposons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

(1) Si $L < 1$, la série est absolument convergente.

(2) Si $L > 1$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, la série est divergente.

(3) Si $L = 1$, on ne peut rien dire.

Preuve : similaire au test de d'Alembert du théorème 2.7.1.

Exercice 2.9.10 Étudier si la série suivante est absolument convergente, conditionnellement convergente ou divergente :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 4}{2^n}$$

2.10 Exercices récapitulatifs

Exercice 2.10.1 1. Vérifier si la série (a) respecte les conditions du test de Leibniz et (b) converge ou diverge

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2+7}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{2n}+1}{e^{2n}-1}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}$

2. Déterminer si la série est absolument convergente ou divergente

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{n}}{\sqrt{n^3+4}}$

3. Calculer une valeur approchée à trois décimales exactes de la somme de la série

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^2$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)!}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$

2.11 Séries Entières

Definition 2.11.1 Soit x une variable. Une série entière en x est une série de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

dans laquelle a_k est un nombre réel.

Étant donné une série entière, telle que définit ci-haut, pour quelle valeur de x la série est-elle convergente ? cette question sera abordée dans cette section. Toute série converge quand $x = 0$. Les autres valeurs de x s'obtiennent à partir du test de convergence absolue de d'Alembert.

Exemple de série entière

La formule $S = a/(1 - r)$ de la somme d'une série géométrique peut s'écrire :

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1 - x}$$

à condition que $|x| < 1$.

Si $f(x) = 1/(1 - x)$ pour $|x| < 1$, cette équation devient

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots.$$

Nous disons que $f(x)$ est représentée par cette série entière.

Exemple 2.11.2 Trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles la série

$$1 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5^2}x^2 + \cdots + \frac{n}{5^n}x^n + \cdots$$

est absolument convergente.

Solution : Posons

$$u_n = \frac{n}{5^n}x^n = \frac{nx^n}{5^n}$$

alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+1}}{5^{n+1}} \frac{5^n}{nx^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)x}{5n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{5n} \right) |x| = \frac{1}{5}|x|. \end{aligned}$$

La série est absolument convergente si les inégalités suivante ont lieu :

$$\frac{1}{5}|x| < 1, \quad |x| < 5, \quad -5 < x < 5.$$

La série diverge si $x > 5$, ou $x < -5$. Les valeurs 5 et -5 de x doivent faire l'objet d'une étude particulière.

En $x = 5$, la série devient

$$1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots,$$

et n'est pas convergente car $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$. C'est la même conclusion en $x = -5$. Donc la série est absolument convergente pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle ouvert $]-5, 5[$ et diverge ailleurs.

Exercice 2.11.3 Trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles la série

- (1) $1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$
 (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$.

Theorem 2.11.4 1. Quand une série entière $\sum a_n x^n$ converge en un nombre c non nul, alors elle est absolument convergente en x tel $|x| < |c|$.
 2. Quand une série entière $\sum a_n x^n$ diverge en un nombre d non nul, alors elle est divergente en x tel $|x| > |d|$.

Preuve : au cours

Theorem 2.11.5 Pour la série entière $\sum a_n x^n$, une seule des situations suivantes est vraie :

- (1) La série ne converge qu'en $x = 0$.
 (2) La série est absolument convergente pour tout x .
 (3) Il existe un nombre $r > 0$ tel que la série soit absolument convergente pour tout x dans l'intervalle ouvert $] -r, r[$ et divergente quand $x < -r$ ou $x > r$

Le nombre r est appelé rayon de convergence de la série. En $-r$ ou r , la série peut être convergente ou divergente, cela dépend de la série en question. L'ensemble des nombres pour lesquels la série entière converge est appelé son intervalle de convergence associé à un rayon de convergence r , l'intervalle de convergence est l'un des intervalles suivants

$$]-r, r[,]-r, r], [-r, r[, [-r, r].$$

Exercice 2.11.6 Montrer que l'intervalle de convergence de la série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$$

est : $[-1, 1[$

Definition 2.11.7 Une série entière en $x - a$ est une série de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - a)^n = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots + a_n(x - a)^n + \cdots$$

Adapter le resultat du théorème 2.11.5 au cas d'une série entière en $x - a$.

Example 2.11.8 Quel est l'intervalle de convergence de la série

$$1 - \frac{1}{2}(x - 3) + \frac{1}{3}(x - 3)^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1}(x - 3)^3 + \cdots?$$

Solution : Posons

$$u_n = (-1)^n \frac{(x-3)^n}{n+1}$$

alors,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{n+2} \frac{n+1}{(x-3)^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n+2} (x-3) \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right) |x-3| \\ &= (1)|x-3| = |x-3|. \end{aligned}$$

D'après le test de d'Alembert, la série est absolument convergente lorsque $|x-3| < 1$, c'est-à-dire

$$-1 < x-3 < 2 \quad \text{ou} \quad 2 < x < 4.$$

La série est donc absolument convergente pour tout x dans l'intervalle ouvert $]2, 4[$. Elle diverge pour $x < 2$ ou $x > 4$.

Quand $x = 4$, nous obtenons :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \dots$$

qui converge en application directe du test de Leibniz. Quand $x = 2$ on obtient la série harmonique qui est divergente. Finalement l'intervalle de convergence est $]2, 4[$.

Exercice 2.11.9 2.12 Exercices récapitulatifs

Les fonctions de Bessel apparaissent dans les problèmes d'oscillations.

(1) La fonction de Bessel $J_\alpha(x)$ de première espèce d'ordre α est définie par la série entière

$$J_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+\alpha)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha}$$

Montrer que cette série entière est convergente quelque soit x réel.

(2) On emploie parfois le polynôme du sixième degré

$$1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304}$$

pour approximer la fonction de Bessel $J_0(x)$ de première espèce d'ordre 0 pour

$0 \leq x \leq 1$. Montrer que l'erreur E dont cette approximation est affectée est inférieure à 0.00001.

(3) Quel est le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.5 \cdots (2n-1)}{3.6.9 \cdots (3n)} x^n$$

(4) Quel est le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{10^n} (x-5)^n$$

(5) Quel est l'intervalle de convergence de la série entière ?

(a) $\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[3]{n} 3^n} x^n$

(b) $\sum_1^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!} x^{2n}$

(c) $\sum_1^{\infty} \frac{\ln n}{e^n} (x-e)^n$

(d) Démontrer que le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est $1/k$ où $k = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n|$ et $k \neq 0$.

(e) Démontrer que si r est le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$, $\sqrt{r}$ est le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^{2n}$.

(f) Démontrer que, si $\sum a_n$ est absolument convergente, $\sum a_n x^n$ est absolument convergente pour tout x situé dans l'intervalle.

(g) Démontrer que si $]-r, r[$ est l'intervalle de convergence de $\sum a_n x^n$, alors la série est conditionnellement convergente.

2.13 Fonctions représentées par une série entière

Faisons correspondre à chaque x de l'intervalle de convergence d'une série entière un nombre $f(x)$ égal à la somme de la série

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Nous disons alors la série entière $\sum a_n x^n$ est une représentation en série entière pour $f(x)$ ou encore f est représentée par la série entière.

Exemple 2.13.1 La somme d'une série géométrique, convergente pour $|x| < 1$ est représentée par la série entière

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

et on écrit :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

Lorsque une fonction f est représentée par une série entière en x , alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

pour tout x dans l'intervalle de convergence de la série.

Theorem 2.13.2 Soit f définie pour tout x d'un intervalle centré à l'origine de rayon $r > 0$, intervalle de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Alors pour $-r < x < r$,

$$(1) \quad f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$$

$$(2) \quad \int_0^x f(t) dt = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Les séries obtenues par dérivation et intégration ont même rayon de convergence que la série dont elles sont issues. Seules la convergence aux extrémités peuvent changer.

Example 2.13.3 Développer en série la fonction

$$\frac{1}{(1+x)^2} \quad \text{pour } |x| < 1.$$

à partir du développement en série entière de $1/(1+x)$.

Solution : Il résulte :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad \text{pour } |x| < 1$$

D'après le théorème 2.15.6, on peut dériver on peut dériver chaque membre et le membre de droit terme à terme, ce qui donne

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + \cdots + (-1)^n n x^{n-1} + \cdots$$

Enfin, on peut multiplier les deux membres par -1 , de sorte que

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + \cdots + (-1)^n n x^{n-1} + \cdots$$

Example 2.13.4 Développer en série entière $\ln(1+x)$ pour $|x| < 1$.

Solution : Pour $|x| < 1$.

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \\ &= \int_0^x [1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + \dots] dt,\end{aligned}$$

En intégrant chaque terme de la série on a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

pour $|x| < 1$.

Exemple 2.13.5 Estimer $\ln(1.1)$ avec cinq décimales exactes.

Solution : On va se servir du développement en série entière de $\ln(1+x)$ de l'exemple précédent pour $|x| < 1$. En $x = 0.1$, ce développement donne la valeur de $\ln(1.1)$ sous forme de série alternée :

$$\begin{aligned}\ln(1.1) &= 0.1 - \frac{(0.1)^2}{2} + \frac{(0.1)^3}{3} - \frac{(0.1)^4}{4} + \frac{(0.1)^5}{5} - \dots \\ &\approx 0.1 - 0.005 + 0.000333 - 0.000025 + 0.000002 - \dots\end{aligned}$$

La somme des quatre premiers termes arrondie à cinq décimales vaut

$$\ln(1.1) \approx 0.09531.$$

L'erreur ne dépasse pas la valeur absolue du cinquième terme à savoir 0.000002. Dès lors, la valeur 0.09531 est correcte jusqu'à la cinquième décimale.

Exercice 2.13.6 (1) Trouver une représentation en série entière de la fonction $\operatorname{Arctg} x$.

(2) Développer en série entière la fonction xe^{-2x} .

Theorem 2.13.7 Quel que soit x réel

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Solution : On peut montrer que cette série est absolument convergente pour toute valeur de x . Soit f la fonction définie par cette série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Une dérivation de chaque membre donne

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots; \end{aligned}$$

on a donc

$$f'(x) = f(x) \text{ pour tout } x.$$

On obtient

$$f(x) = f(0)e^x \text{ avec } f(0) = 1$$

nous avons finalement

$$f(x) = e^x.$$

Il en découle que le nombre e est la somme de la série convergente à termes positifs

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots.$$

En substituant x par $-x$ on obtient

$$e^{-x} = 1 + (-1)x + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-x)^n}{n!} + \cdots$$

ou

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

On peut additionner terme à terme les séries de e^x et e^{-x} pour obtenir

$$e^x + e^{-x} = 2 + 2 \cdot \frac{x^2}{2!} + 2 \cdot \frac{x^4}{4!} + \cdots + 2 \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots.$$

Le développement en série de

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

est donnée par

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \operatorname{sh} x &= 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \end{aligned}$$

Exemple 2.13.8 Évaluer $\int_0^{0.1} e^{-x^2} dx$

Solution : au cours

2.14 Exercices récapitulatifs

Exercice 2.14.1 1. (a) Donner une représentation en série entière de $f(x)$,
(b) donner une représentation en série entière de $f'(x)$ et $\int_0^x f(t)dt$.

(a) $\frac{1}{3-2x}, |x| < \frac{3}{2}$

(b) $\frac{1}{2+7x}, |x| < \frac{2}{7}$

2. Trouver une série entière en x qui ait la somme donnée et trouver son rayon de convergence

(a) $\frac{x^2}{1-x^2}$

(b) $\frac{x^2-3}{x-2}$

(c) $\frac{x}{2-3x}$

3. Démontrer que (et non vérifier !)

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{si } |x| < 1$$

4. Trouver une représentation en série entière de la fonction $\text{Arc tg } x$

5. Utiliser l'exercice précédent pour démontrer que

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n(2n+1)}$$

6. Calculer la valeur approchée de $\pi/4$ fournie par les cinq premiers termes de la série entière de $\text{Arc tg } x$ et estimer l'erreur dont est affectée cette valeur approchée.

7. Calculer une valeur approchée de l'intégrale avec quatre décimales correctes

(a) $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{10}} dx$

(b) $\int_{0.1}^{0.2} \frac{\text{Arc tg } x}{x} dx$

(c) $\int_0^{0.5} e^{-x^3} dx$

2.15 Série de Taylor et de MacLaurin

Soit f une fonction qui admet une représentation en série entière de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

Quelle peut être l'expression de a_n ? A Quelles conditions suffisantes une fonction f doit satisfaire pour admettre une représentation en série entière ?

Theorem 2.15.1 (Série de MacLaurin) Quand une fonction f admet un développement en série entière de la forme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

sur un intervalle de rayon $r > 0$, alors $f^{(k)}(0)$ existe pour tout entier k et $a_n = f^{(n)}(0)/n!$. D'où

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \dots$$

Supposons que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

et soit r le rayon de convergence de cette série. La représentation de $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, etc. sont données par :

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ f''(x) &= 2a_2 + (3.2)a_3x + (4.3)a_4x^2 + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \\ f'''(x) &= (3.2)a_3 + (4.3.2)a_4x + \dots = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} \end{aligned}$$

et pour k entier strictement positif quelconque

$$f^k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

Chaque série obtenue par dérivation a même rayon de convergence r que la série de $f(x)$. En substituant 0 à x dans chacune d'elles, nous obtenons

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = 2a_2, \quad f'''(0) = (3 \cdot 2)a_3,$$

et pour k entier strictement positif quelconque

$$f^k(0) = k(k-1)(k-2) \cdots (1)a_k.$$

En posant $k = n$

$$f^n(0) = n!a_n$$

Theorem 2.15.2 (Série de Taylor) Quand une fonction f admet un développement en série entière de la forme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

sur un intervalle de rayon $r > 0$, alors $f^{(k)}(a)$ existe pour tout entier k et $a_n = f^{(n)}(a)/n!$. D'où

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Notons que le cas particulier $a = 0$ de la série de Taylor (Brook Taylor, mathématicien anglais) correspond à la série de MacLaurin (mathématicien écossais). Les séries de MacLaurin et de Taylor s'écrivent comme suit :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Definition 2.15.3 (Polynôme de Taylor)

Soit f une fonction dont les n premières dérivées sont définies en a . On appelle polynôme de Taylor de degré n de f en a le polynôme suivant :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

ou

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f^k(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Quand $a = 0$, ce polynôme s'appelle **polynôme de Maclaurin**. Il est à noter que par rapport à la série de Taylor ou de MacLaurin, $P_n(x)$ en est la $(n+1)$ ième somme partielle.

Theorem 2.15.4 (Formule de Taylor avec reste) Soit f une fonction $(n+1)$ fois dérivable sur un intervalle qui contient a . Pour un point x de l'intervalle, différent de a , il existe un nombre θ situé entre x et a tel que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad \text{ou} \quad R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Si $a = 0$ on obtient la formule de MacLaurin avec reste. Le reste porte le nom de **reste de Lagrange**.

Preuve : au cours.

On va servir du reste de Lagrange pour déduire des conditions suffisantes d'existence d'une représentation en série entière pour une fonction f

Theorem 2.15.5 Supposons que f admette des dérivées de tous ordres en tous points d'un intervalle contenant a et soit $R_n(x)$ le reste de Lagrange de f en a . Si, quelque soit x dans l'intervalle,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0,$$

alors $f(x)$ est représentée par la série de Taylor de $f(x)$ en a .

Preuve :

Theorem 2.15.6 Quel que soit x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$$

Example 2.15.7 Trouver la série de MacLaurin de $\sin x$ et montrer qu'elle représente bien $\sin x$ pour tout nombre réel x .

Solution : Nous obtenons la série de MacLaurin suivante (vérifier en exercice !) :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

A ce point ce que on connaît est que si $\sin x$ admet une représentation en série entière c'est celle qui ci dessus. Démontrer que cette série représente effectivement la fonction $\sin x$ demandera de faire appel au théorème 2.15.6 avec $a = 0$. Puisque quelque soit n entier strictement positif on a :

$$|f^{n+1}(x)| = |\cos x| \quad \text{ou} \quad |f^{n+1}(x)| = |\sin x|,$$

$|f^{n+1}(\theta)| \leq 1$ quelque soit θ et le reste de Lagrange est majorée de la façon suivante :

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{n+1}(\theta)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On conclut du théorème 2.15.6 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

et la série de MacLaurin représente bien $\sin x$ pour tout x .

2.16 Développement en série entières de fonctions usuelles

Pour développer la fonction $f(x)$ en série de puissance $(x - a)$ on trouve les dérivées successives $f'(a)$, $f''(a)$, $\dots$, $f^n(a)$, $\dots$ si elles existent et sont finies, nous obtenons la série de Taylor

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x - a)^n + \dots$$

En vertu de ce qui précède, il faut encore démontrer en plus que cette série possède un rayon de convergence non nul, est que sa somme est précisément $f(x)$ et non une autre fonction. On parvient parfois à évaluer le reste $R_n(x) = f(x) - s_n(x)$ et à démontrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Dans la majorité des cas une telle évaluation est difficile ou irréalisable. On peut alors obtenir le développement par d'autres méthodes sans calculer les dérivées de $f(x)$ au point a . Nous donnons ci bas les développements en séries en x des fonctions les plus usuelles. Nous obtenons le terme général si son expression peut être devinée aisément.

Fonctions exponentielles

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (r = \infty) \\ e^{-x} &= 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \quad (r = \infty) \end{aligned}$$

Les deux développements peuvent être obtenus en évaluant le reste.

Fonctions trigonométriques

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (r = \infty) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (r = \infty)\end{aligned}$$

On peut aussi obtenir ces deux développements en évaluant le reste. Nous obtenons par division terme à terme du développement de $\sin x$ et $\cos x$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots \quad (r = \frac{\pi}{2})$$

La fonction $\cotgx$ ne se développe pas suivant les puissances de x (pourquoi ?)

Fonctions hyperboliques

(Sinus hyperbolique de x : shx)

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (r = \infty)$$

(Cosinus hyperbolique de x : chx)

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (r = \infty).$$

(Tangente hyperbolique de x : thx)

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 - \cdots \quad (r = \frac{\pi}{2}).$$

Les développement des fonctions hyperboliques et ceux des fonctions trigonométriques ne se distinguent que par les signes.

Fonctions logarithmiques

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (r = 1). \\ \ln(1-x) &= -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \quad (r = 1).\end{aligned}$$

Ces développements s'obtiennent par intégration terme à terme des développements

$$\frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + \dots$$

Nous obtenons par soustraction terme à terme :

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \dots \right] \quad (r=1).$$

Série du binôme

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \dots \quad (r=1).$$

Pour un m entier positif la série s'arrête au terme à la puissance m (les coefficients suivant sont nuls). La formule obtenue s'appelle formule binôme de Newton. Le développement est valable pour n'importe quel m réel. Pour $-\frac{1}{2} < x < 1$ on peut se servir dans la démonstration du reste sous forme de Lagrange. On peut démontrer par d'autres moyens la validité du binôme de Newton.

Fonctions trigonométriques inverses

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^7}{7} + \dots \quad (r=1).$$

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots \quad (r=1).$$

Fonction hyperboliques inverses

Argument shx :

$$\text{Argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^7}{7} + \dots \quad (r=1)$$

Argument thx :

$$\text{Argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \dots \quad (r=1).$$

Les fonctions

$$\ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) = \text{Argch} x, \quad (\text{argument } chx)$$

et

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \text{Argcoth} x, \quad (\text{argument } coth x)$$

ne se développent pas en série suivant les puissances de x (elles ne sont définies en aucun point de l'intervalle $]-1, 1[$ et, en particulier, au point $x = 0$).

Exercice 2.16.1 Démontrer que le développement de Maclaurin de la fonction $f(x) = e^x$ est :

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Exercice 2.16.2 Travailler par vous mêmes les exercices :

(1) Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Est ce que la fonction f peut-elle être représentée en série de MacLaurin ?

(2) Calculer l'approximation que fournit les deux premiers termes non nuls d'une série de MacLaurin, ainsi qu'une estimation de l'erreur commise pour

(i) $\sin(0.1)$

(ii) $\sin x$ pour tout x réel dans $[-1, 1]$

(3) Calculer avec une précision de quatre décimales $\int_0^1 \sin(x^2) dx$

(4) La période T d'un pendule de longueur L , déplacé dans sa position d'équilibre d'un angle θ_0 , est donnée par l'intégrale impropre

$$T = 2\sqrt{\frac{2L}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d\theta.$$

Si on pose $\sin u = (\frac{1}{k}) \sin(\frac{1}{2}\theta)$ où $k = \sin(\frac{1}{2}\theta_0)$, alors montrer que

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 u}} du.$$

Montrer que la série du binôme de $(1 - x)^{-1/2}$ permet d'obtenir

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{1}{4}k^2\right).$$

Estimer T si $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$.

Chapitre 3

Dérivées partielles

3.1 Fonctions de plusieurs variables réelles

Quelles sont les fonctions de plusieurs variables ? Dans ce chapitre nous allons étudier les fonctions de plusieurs variables dans des cadres particuliers ($\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$), mais également dans un cadre très général ($\mathbb{R}^n$). Nous n'étudierons pas le cas encore plus général dans lequel la dimension des espaces est infinie. Nous laissons cela pour un cours un peu plus avancé. Ces fonctions seront donc de la forme

$$f : E \subset \mathbb{R}^p \rightarrow F \subset \mathbb{R}^q.$$

où p et q sont des entiers naturels > 0 . Autrement dit, les éléments de l'ensemble de départ E seront des vecteurs du type $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$, et les éléments de l'ensemble d'arrivée seront des vecteurs du type $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_q(\mathbf{x}))$, où $\mathbf{x}$ est un vecteur de E . Nous considérons plusieurs cas de fonctions à plusieurs variables, donc voici quelques illustrations graphiques.

Exemples de représentations graphiques de certaines classes de fonctions de plusieurs variables.

- (1) $p = 1, q = 1$. $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow J \subset \mathbb{R}$: c'est le cas le plus simple, celui qui est connu depuis l'école secondaire et nous avons déjà rappelé quelques résultats importants concernant ce type de fonctions dans les chapitres antérieurs.*
- (2) $p = 1, q > 1$. $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow F \subset \mathbb{R}^q$: elles sont représentées par exemple par des courbes paramétrées ($q = 2$ ou 3),*
- (3) $p = 2, q = 1$. $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow J \subset \mathbb{R}$: elles sont représentées par exemple par des surfaces (on les appelle également champs scalaires), ou des courbes de niveau,*
- (4) $p = 2, q > 1$. $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow F \subset \mathbb{R}^q$: elles sont représentées par exemple par des surfaces paramétriques, ou des champs vectoriels ($q = 2$ ou 3).*
- (5) $p = 3, q = 3$. $f : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow F \subset \mathbb{R}^3$: elles sont représentées par exemple par des champs vectoriels.*

Dès que p et q sont > 3 , il est assez difficile d'avoir une vision graphique de leur représentation, mais cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas d'interprétation possible. Les variables peuvent représenter bien autre chose que l'espace : cela peut être des populations, des traits caractéristiques (taille, âge, maturité, gènes,...), etc. Nous essaierons de donner quelques illustrations tout au long de ce cours. Dans la suite de ce cours, nous distinguerons parfois des résultats pour deux types bien distincts de fonctions :

-les fonctions scalaires $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ (qu'on appelle aussi fonctions réelles de variables réelles),

-les fonctions vectorielles $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $q > 1$.

ATTENTION : certains résultats seront donnés pour les fonctions scalaires alors que d'autres le seront pour les fonctions vectorielles.

Il y a plusieurs applications qui font intervenir les fonctions de plusieurs variables réelles. L'aire d'un rectangle est un exemple d'une fonction de plusieurs variables qui fait intervenir la longueur L et la largeur l . La température d'un objet situé en un point de l'espace va dépendre de coordonnées rectangulaires, x, y, z . Plus précisément une fonction de plusieurs variables se définit comme suit :

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

La fonction de plusieurs variables f peut être aussi vue comme une correspondance qui à chaque n -uplet $(x_1, \dots, x_n)$ de D (le domaine de f) associe exactement un nombre réel, noté $f(x_1, \dots, x_n)$. Les nombres $f(x_1, \dots, x_n)$ qui correspondent à tous les $(x_1, \dots, x_n)$ de D constituent l'ensemble image de f . En dimension 2 par exemple on a :

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \mathbf{x} = (x, y) \mapsto f(x, y)$$

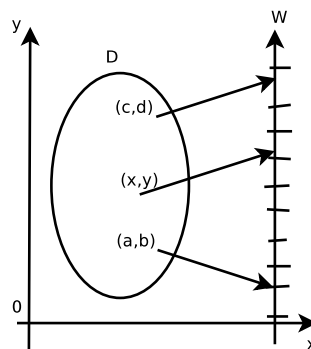
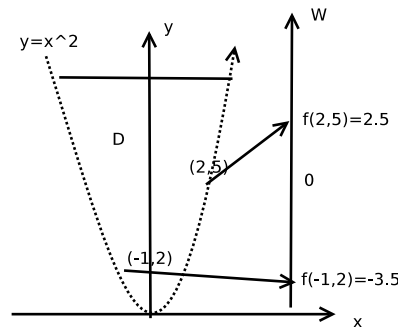


FIGURE 3.1 – Domaine D et image W d'une fonction à deux variables

Exemple 3.1.1

$$f(x, y) = \frac{xy - 5}{2\sqrt{y - x^2}} \quad (3.1)$$

Le radical qui apparaît au dénominateur de la fonction ci dessus nous oblige de retenir les points qui sont tels que $y - x^2 > 0$; ou encore $y > x^2$. Le domaine de définition D de la fonction f est donc l'ensemble de tous les points situés au dessus de la parabole $y = x^2$. Une fonction de trois variables peut se définir de la même



façon,

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$$

Example 3.1.2

$$f(x, y, z) = \frac{xe^y + \sqrt{z^2 - 1}}{2xy \sin 4z} \quad (3.2)$$

La formule $V = Llh$ du volume du parallélépipède est une illustration d'une fonction de plusieurs variables.

Nota : La représentation graphique d'une fonction de deux variables f est celle de l'équation $z = f(x, y)$ dans un système de coordonnées xyz ce qui donne habituellement une surface S . Chacun des points du domaine D de $f(x, y)$ porte les coordonnées $(x, y, 0)$. L'image $f(x, y)$ est donc la distance (munie de son signe) entre le plan xy et la surface.

Example 3.1.3 Dessiner la fonction $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ considérée sur le domaine

$$D = \{(x, y) : x^2 - y^2 \leq 4\}$$

Le domaine D est constitué de points situés à l'intérieur ou sur le bord du cercle $x^2 - y^2 = 4$ dans le plan xy . Le graphique de f est la partie de la paraboloid $z = 4 - x^2 - y^2$ située au dessus du plan xy . [fig ici]. La trace dans le plan $z = m$ est donnée par $m = 4 - x^2 - y^2$ ou $x^2 + y^2 = 4 - m$ qui sont des cercles (courbes de niveau de f) de rayon $\sqrt{4 - m}$, avec $m = 0, 1, 2, 3$.

Exercice 3.1.4 (i.) Dessiner les courbes de niveau de f définie par $f(x, y) = 2(x^2 - y^2)$.

(ii.) Tracer quelques courbes de niveau de f définie par $f(x, y, z) = 2z - \sqrt{x^2 + y^2}$.

(iii.) Quelle est l'équation de la surface de niveau de f qui passe par le point P ?

– $f(x, y) = y \operatorname{Arctg} x$; $P(1, 4)$

$$- f(x, y) = (2x + y^2)e^{xy}; \quad P(0, 2)$$

Exercice 3.1.5 1. Quel est le domaine de définition de f ?

(a) $f(x, y) = 2x - y^2$

(b) $f(x, y) = \frac{y+2}{x}$

(c) $f(x, y, z) = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$

(d) $f(x, y, z) = 2 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} z$

2. Trouver les courbes de niveau de f qui se rapportent aux valeurs indiquées de k .

(a) $f(x, y) = y^2 - x^2, k = -4, 0, 9$

(b) $f(x, y) = xy, k = -4, 1, 1$

(c) $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y + 3)^2, k = 1, 4, 9$.

3. Conformément à la loi de gravitation universelle de Newton, entre une particule de masse m_0 situé à l'origine d'un système des coordonnées xyz et une particule de masse m située en un point (x, y, z) s'exerce une force F d'amplitude

$$F(x, y, z) = \frac{Gm_0m}{x^2 + y^2 + z^2}$$

où G est la constante de gravitation universelle. De combien de variables indépendantes F est-elle fonction? Si m_0 et m sont fixés, de quelle forme sont les surfaces de niveau de la fonction? Quelle est la signification concrète de ces surfaces de niveau?

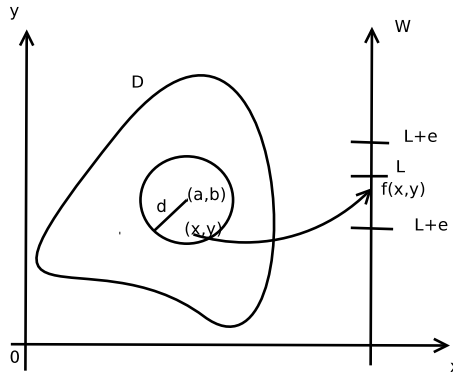
3.2 Limite et Continuité pour les fonctions de plusieurs variables

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$. Les points du domaine D de f peuvent varier en s'approchant d'une certaine valeur et au même moment les valeurs de la fonction f s'approche d'une certaine valeur. En dimension deux on peut traduire cela en ce termes :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L \quad \text{ou} \quad f(x, y) \rightarrow L \quad \text{quand} \quad (x, y) \rightarrow (a, b) \quad (3.3)$$

Qui se lit : L est la limite de $f(x, y)$ quand (x, y) tend vers (a, b) . En termes précis nous disons ceci : fixons un $\epsilon > 0$ quelconque et l'intervalle ouvert $]L - \epsilon, L + \epsilon[$ sur l'axe W comme sur la figure. Au cas où 3.3 est vérifié, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout point (x, y) à l'intérieur du cercle de rayon δ centré en (a, b) , sauf peut-être (a, b) lui-même, l'image $f(x, y)$ appartient à l'intervalle $]L - \epsilon, L + \epsilon[$. Ou de façon équivalente :

$$\text{si } 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta \quad \text{alors} \quad |f(x, y) - L| < \epsilon$$



Definition 3.2.1 Soit f une fonction de deux variables définie partout à l'intérieur d'un cercle centré en (a, b) , sauf peut-être en (a, b) lui-même. L'expression

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

signifie que pour tout $\epsilon > 0$, il exist un δ tel que : si

$$\text{si } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \text{ alors } |f(x, y) - L| < \epsilon$$

On peut facilement étendre cette vue de la notion de limite á des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$ et à valeur dans $\mathbb{R}^p$.

Definition 3.2.2 Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p : x \rightarrow f(x)$ et soit a un point de l'adhérence $\overline{D}$ de D et soit b un point de $\mathbb{R}^p$. On dit que L est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a dans D si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \|x - a\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| \leq \epsilon.$$

et on écrit souvent

$$\lim_{x \rightarrow a \text{ et } x \in A} f(x) = L$$

Dans le cas où le domaine de définition de f est D tout entier ($\text{dom} f = D$), on écrit simplement :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

Proposition 3.2.3 Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p : x \rightarrow f(x)$ et $a \in \overline{D}$. S'il existe $L \in \mathbb{R}^p$ te que

$$\lim_{x \rightarrow a \text{ et } x \in A} f(x) = L$$

ce L est unique.

Démonstration : Supposons que L_1 et L_2 soient deux limites. On aurait

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall x \in D, \|x - a\| \leq \delta_1 \Rightarrow \|f(x) - L_1\| \leq \epsilon.$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0, \forall x \in D, \|x - a\| \leq \delta_2 \Rightarrow \|f(x) - L_1\| \leq \epsilon.$$

Soit $\epsilon > 0$ et soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Comme $a \in \overline{D}$, il exist un point x de D tel que $\|x - a\| \leq \delta$. Mais alors, pout cet x , on á la fois

$$\|f(x) - L_1\| \leq \epsilon \text{ et } \|f(x) - L_2\| \leq \epsilon.$$

Donc

$$\|L_1 - L_2\| \leq \|L_1 - f(x)\| + \|f(x) - L_2\| \leq 2\epsilon.$$

Mais ceci ayant bien lieu pour tout $\epsilon > 0$, on a que $\|L_1 - L_2\| = 0$ et donc $L_1 = L_2$.

Exercice 3.2.4 Montrer que si a est un réel tel que $\forall \epsilon > 0, 0 \leq a < \epsilon$ alors $a = 0$.

Remarque 3.2.5 Si on ne suppose pas $a \in \overline{D}$, la définition est vide de sens. En effet, si $a \notin \overline{D}$ et δ assez petit, il n'existe pas de points $x \in D$ tels que $\|x - a\| \leq \delta$ et n'importe quel L vérifie la définition de limite.

Exercice 3.2.6 Montrer en utilisant la définition que la limite de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow (x^2 + y^2) \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

est 0.

Solution : On a :

$$|f(x, y) - (0, 0)| = \left| (x^2 + y^2) \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right| \leq |x^2 + y^2|.$$

On aura donc, pour $\epsilon > 0$ quelconque donné,

$$|f(x, y) - (0, 0)| \leq \epsilon$$

dès que $|x^2 + y^2| \leq \epsilon$. Prenons alors $\delta = \sqrt{\epsilon}$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta = \sqrt{\epsilon}$. Donc $|x^2 + y^2| \leq \epsilon$ ou encore $|f(x, y) - (0, 0)| \leq \epsilon$. La limite de $f(x, y)$ lorsque (x, y) tend vers est donc 0.

On peut montrer que si les limites de f et g existent quand (x, y) s'approche de (a, b) , alors on a

$$a. [f(x, y) + g(x, y)] = \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) + \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} g(x, y)$$

$$b. \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)}{\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} g(x, y)} \text{ si } \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} g(x, y) \neq 0.$$

$$c. \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \sqrt{f(x, y)} = \sqrt{\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)} \text{ si } \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) > 0.$$

Exemple 3.2.7

$$\begin{aligned}
 \lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} (x^2 - y^2)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} \sqrt{x^2 + y^2}} \\
 &= \frac{9 - 16}{\sqrt{\lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} x^2 + y^2}} \\
 &= \frac{-7}{\sqrt{9 + 16}} = -\frac{7}{5}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Exemple 3.2.8 Montrer que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ n'existe pas.

Puisque f est rationnelle, remplacer (x, y) par $(0, 0)$ conduirai á annuler le dénominateur. En un point quelconque de $(x, 0)$ de l'axe des x , la fonction prend la valeur

$$f(x, 0) = \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1, \text{ à condition que } x \neq 0$$

et en un point quelconque $(0, y)$ de l'axe des y , la fonction prend la valeur

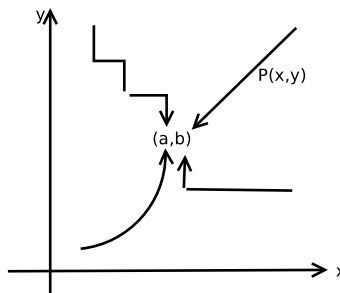
$$f(0, y) = \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = -1, \text{ à condition que } y \neq 0$$

Tout cercle centré en $(0, 0)$ contient de points en lesquels f vaut $+1$ et des point en lesquels f vaut -1 . Il s'ensuit que la limite n'existe pas.

Principe de deux chemins

Si deux chemins vers un point $P(a, b)$ donnent lieu à deux limites différentes pour f , alors

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \text{ n'existe pas.}$$



Exemple 3.2.9 En utilisant le principe de plusieurs chemin montre que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

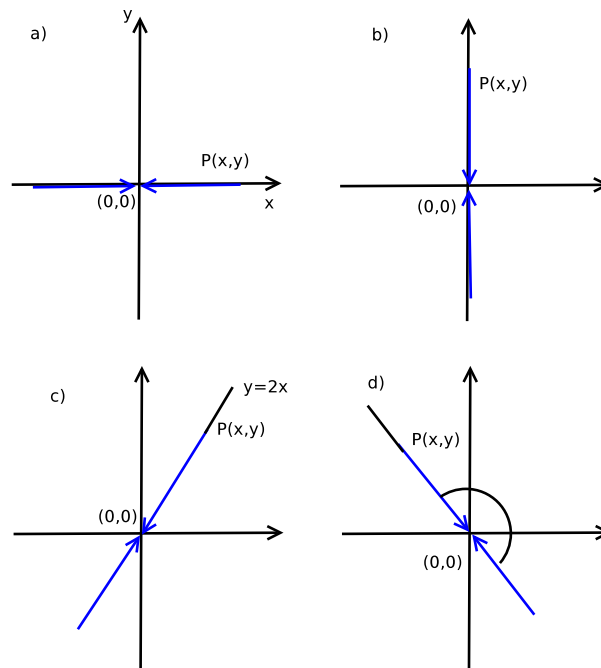
n'existe pas.

Quand le point $P(x, y)$ s'approche de $(0, 0)$ le long de l'axe des x (voir figure a)), son ordonnée y est constamment nulle et f se réduit à x^2/x^2 soit 1. La limite de $f(x, y)$ selon ce chemin est 1. Par contre $P(x, y)$ s'approche de $(0, 0)$ selon l'axe des y , (voir figure b)), son abscisse x étant constamment nulle, la limite de $f(x, y)$ est -1 . Il ya bien sur d'autres chemins; par exemple le chemin d'équation $y = 2x$ (voir figure c). On verifie sur ce chemin que la limite est $-3/5$.

Une autre technique consistera à écrire l'expression de $f(x, y)$ en coordonnées polaires (voir figure d). $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ et

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta}{r^2} = \cos 2\theta$$

ce qui montre que, le long du rayon $\theta = k$, la fonction prend la valeur constante $\cos 2k$, qui est aussi la limite lorsque $P(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Ainsi, $f(x, y)$ peut tendre n'importe quelle valeur entre -1 et 1 selon la valeur de k choisie. Selon le principe de deux chemin la limite n'exite pas.



Nota : La règle de deux chemins ne permet pas de conclure à l'existence d'une limite, elle sert surtout à démontrer qu'une limite n'existe pas.

Exercice 3.2.10 Etudier la limite

(1.) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

(2.) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 y^3}{2y^5 - 2x^5}$

A l'aide de coordonnées polaires étudier les limites :

1. $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)}$
2. $f(x, y) = \frac{\sin(2x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

Montrer que la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad (3.5)$$

est continue en chaque point excepté l'origine.

Exercice résolu

Soit la fonction

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2 + 1}$$

et étant donné $\epsilon > 0$ comment doit-on choisir (x, y) proche de $(0, 0)$ pour avoir

$$|f(x, y) - f(0, 0)| < \epsilon$$

Solution Puisque $f(0, 0) = 0$,

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{x + y}{x^2 + y^2 + 1} \right|$$

Il est demandé combien proche doit être (x, y) de $(0, 0)$ pour avoir

$$\left| \frac{x + y}{x^2 + y^2 + 1} \right|.$$

Puisque le dénominateur ne peut être plus grand que 1, nous avons :

$$\begin{aligned} \left| \frac{x + y}{x^2 + y^2 + 1} \right| &\leq |x + y| \leq |x| + |y| \\ &\leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

qui sert plus petit que ϵ si

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Donc, l'inégalité originale sera vérifiée si la distance entre (x, y) et $(0, 0)$ est plus petit que $\epsilon/2$. C'est-à-dire que nous pouvons choisir notre δ dans la définition de la limite le nombre $\epsilon/2$.

Definition 3.2.11 Une fonction de deux variables est continue en un point intérieur (a, b) de son domaine de définition si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Pour la continuité en un point frontière, il convient d'ajouter que (x, y) doit appartenir au domaine D de f .

La fonction f est continue sur domaine D si elle est continue en tout point (a, b) de D . La surface représentative d'une fonction continue ne présente ni trou, ni escarpement. On peut étendre les définitions de limite et continuité aux de trois variable de la manière suivante :

Definition 3.2.12 Etant donnée une fonction de trois variables définie partout à l'intérieur d'une sphère centrée en (a, b, c) sauf peut-être en (a, b, c) lui-même. L'expression

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} f(x, y, z) = L.$$

signifie que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que si

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < \delta,$$

alors

$$|f(x, y, z) - L| < \epsilon.$$

Example 3.2.13 Montrer que

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,2,-1)} \frac{(x+y+3z)^3}{(x-1)(y-2)(z+1)}$$

n'existe pas.

Faisons approcher le point $P(x, y, z)$ du point $(1, 2, -1)$ le long de la droite (vecteur) l parallèle au vecteur $v(a, b, c)$. Le vecteur l admet les équations paramétriques suivantes :

$$x = 1 + at \quad y = 2 + bt \quad z = -1 + ct; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Les valeurs de f pour les points $P(x, y, z) \neq (1, 2, -1)$ sont données par :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{(x+y+3z)^2}{(x-1)(y-2)(z+1)} \\ &= \frac{(at+bt+3ct)^3}{(at)(bt)(ct)} \\ &= \frac{(a+b+3c)^3}{abc} \end{aligned}$$

On voit que tous les chemins qui vont de $P(x, y, z)$ à $(1, 2, -1)$ sont différents. Conformément au principe de deux chemins la limite n'existe pas.

Exercice 3.2.14 1. Démontrer que la limite n'existe pas

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2}$$

- (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$
- (c) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy+yz+xz}{x^2+y^2+z^2}$
2. Calculer la limite, quand elle existe, à l'aide des coordonnées polaires
- (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$
- (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}$
3. Déterminer la partie du plan de l'espace des xyz sur laquelle f est continue
- (a) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2-z^2}$
- (b) $f(x, y, z) = \sqrt{xyz} \operatorname{tg} z$

Continuité en cas de plusieurs variables

Une fonction de trois variables est continue en un point (a, b, c) intérieur à une région si

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} f(x, y, z) = f(a, b, c).$$

La continuité en un point frontière découle de l'extension de la définition ci dessus aux points frontières.

Exercice 3.2.15 (1.) Dire comment proche doit on choisir le point (x, y, z) de l'origine pour avoir

$$|f(x, y, z) - f(0, 0, 0)| < \epsilon$$

- (a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $\epsilon = 0.01$
- (b) $f(x, y, z) = \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2+1}$, $\epsilon = 0.015$
- (c) $f(x, y, z) = \tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 z$, $\epsilon = 0.03$
- (2.) Est-ce que la fonction $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ est-elle continue au point $(0, 0, 0)$? expliquez

Composition des fonctions de plusieurs variables

On examinera les cas de fonctions de deux variables. Soit $f(x, y)$ est une fonction de deux variables et g une fonction d'une variable. La composée de f et g est donnée par :

$$h(x, y) = g(f(x, y)) = g$$

à condition que l'ensemble image de f soit une partie du domaine de définition de g .

Exercice 3.2.16 Exprimer $g(f(x, y))$ par rapport à x et y et déterminer le domaine de définition de la fonction composée

(a.) $f(x, y) = xe^y$, $g(t) = 3t^2 + t + 1$

(b.) $f(x, y) = y - 2x^2$, $g(t) = \sin\sqrt{t}$

(c.) $f(x, y) = y \ln x$, $g(w) = e^w$

(d.) Démontrer par la définition que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = cL$$

étant donné que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$ et que c est un nombre réel quelconque.

3.3 Dérivées Partielles

Les dérivées partielles sont des dérivées obtenues en gardant constante toutes les variables indépendantes dans la fonction sauf une par rapport à laquelle on différencie. Concrètement, étant donné la fonction $f(x, y)$, affectons une des variables, mettons x , d'un accroissement h ; diviser l'accroissement qui en résulte pour f par h ; et faire tendre h vers 0. C'est ainsi qu'on arrive au concept de dérivée partielle $f'_x(x, y)$ de f par rapport à x . On procède de la même manière pour y .

Definition 3.3.1 Soit f une fonction de deux variables. Les dérivées partielles premières de f par rapport à x et y sont les fonctions $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x, y)$ telles que :

$$f'_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f'_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

et en général on a :

Definition 3.3.2 Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in D$. Pour $i = 1, \dots, n$, on appelle dérivée partielle par rapport à x_i de f en $a = (a_1, \dots, a_n)$, et on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ la dérivée de la fonction partielle de f prise en a_i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, \dots, x_i, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{x_i - a_i}$$

On peut poser $x_i - a_i = h$ et si $x_i \rightarrow a_i$, $h \rightarrow 0$ et on écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h}$$

Remarque. une fonction peut posséder des dérivées partielles en un point sans pour autant être continue en ce point ! C'est pour cela que l'on donne la condition suffisante suivante pour qu'une fonction soit continue en un point.

Theorem 3.3.3 Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que les n fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ soient continues au point $(a_1, \dots, a_n) \in D$. Alors f est aussi continue en ce point.

Preuve : exercice

Interprétation géométrique (cas de dimension 2.)

Soit (x_0, y_0) un point dans le domaine de la fonction $z = f(x, y)$, le plan $y = y_0$ va couper la surface selon la courbe $z = f(x, y_0)$ comme le montre la figure 3.19. Cette courbe est le graph de la fonction $z = f(x, y_0)$ dans le plan $y = y_0$. La coordonnée verticale dans ce plan est z , la coordonnée horizontale est x .

La dérivée de $z = f(x, y_0)$ par rapport à x au point $x = x_0$ est définie par :

$$\frac{d}{dx}f(x, y_0)|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (3.6)$$

Pourvu que cette limite existe. Cette limite est appelée dérivées partielles de f par

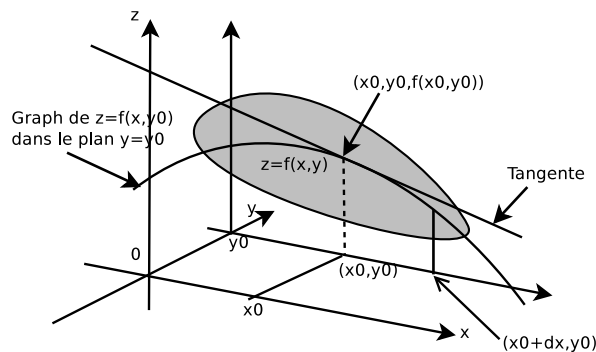


FIGURE 3.2 – L'intersection du plan $y = y_0$ avec la surface $z = f(x, y)$, vu au dessus dans le troisième quadrant dans le plan xy

rapport à x au point (x_0, y_0) . La pente à la courbe $z = f(x, y_0)$ au point $x = x_0$ est définie comme étant la valeur de la dérivée partielle par rapport à x . La tangente à la courbe $z = f(x, y_0)$ au point $x = x_0$ comme étant la droite dans le plan $y = y_0$ passant par le point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ avec cette pente.

La notation usuelle pour la dérivée partielle de $z = f(x, y)$ par rapport à x au point (x_0, y_0) sont comme suite :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ or } f'_x(x_0, y_0)$$

ou bien

$$\frac{\partial z}{\partial x}|_{x_0, y_0}$$

Exemple 3.3.4 Trouver $\frac{\partial f}{\partial x}$ if

$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$$

solution

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dx}(100 - x^2 - y^2) = 0 - 2x - 0 = -2x.$$

La dérivée partielle par rapport à y se définit de la même manière. Nous alors deux droites (tangentes) associée avec $z = f(x, y)$ au point (x_0, y_0) . Si $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ sont tous deux continues au point (x_0, y_0) le plan déterminé par les deux droites sera le plan à la surface $z = f(x, y)$ au point (x_0, y_0) .

Exemple 3.3.5 Trouver $\frac{\partial f}{\partial y}$ si

$$f(x, y) = e^x \ln(x^2 + y^2 + 1).$$

solution Traitant, x , e^x , and x^2 comme constantes nous appliquons la règle de chaînes pour une fonction d'une variable (dans ce cas y) on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial(e^x \ln(x^2 + y^2 + 1))}{\partial y} = e^x \frac{\partial \ln(x^2 + y^2 + 1)}{\partial y} \\ &= e^x \cdot \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \cdot \frac{\partial(x^2 + y^2 + 1)}{\partial y} = \frac{e^x}{x^2 + y^2 + 1} \cdot 2y \\ &= \frac{2ye^x}{x^2 + y^2 + 1} \end{aligned}$$

Les formules de dérivation partielle d'un produit et d'un quotient sont semblables à celles qui ont été établies pour les fonctions d'une variable. En effet si $u = f(x, y)$ et $v = g(x, y)$, alors on a :

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv) = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x}}{v^2}$$

La règle de dérivation de puissance est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^n) = nu^{n-1} \frac{\partial u}{\partial x}$$

Exemple 3.3.6 Soit $z = xy^2 e^{xy}$. Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Réponse :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^{xy} + 2xy e^{xy} = y(y + 2x) e^{xy}.$$

Exercice 3.3.7 Trouver

$$(1.) \quad \frac{\partial}{\partial z}(xy)^{\sin z}$$

(2.) $\frac{\partial}{\partial y}(z \sin^{-1}(y/x))$

(3.) La loi de gaz parfait peut prendre la forme $PV = knT$ où n est le nombre de molécules de gaz, V le volume, T la température, P la pression et k une constante. Montrer que :

$$\frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial V} = -1$$

(4.) Les ingénieurs chargés de la construction de autoroutes se préoccupent de la pénétration du froid dans le sol et utilisent pour calculer la température T à l'heure t et à la profondeur x (en m) la foomule :

$$T = T_0 e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x)$$

où T_0, ω et λ sont des constantes. La période de $\sin(\omega t - \lambda x)$ est 24 heures.

(a) Calculer et interpréter $\frac{\partial T}{\partial t}$ et $\frac{\partial T}{\partial x}$.

(b) Montrer que T satisfait l'équation de la chaleur à une dimension

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

où k est une constante.

(5.) Montrer que toute fonction de la forme :

$$w = (\sin ax)(\cos by)e^{-\sqrt{a^2+b^2}z}$$

satisfait l'équation de Laplace de dimension trois :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

Dérivées partielles secondes

Les dérivées partielles f'_x et f'_y sont elles aussi des fonctions de deux variables. C'est pourquoi nous pouvons envisager de calculer leurs dérivées partielles premières. Celles ci sont appelées dérivées partielles secondes de f et on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f'_x &= (f'_x)'_x = f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} f'_x &= (f'_x)'_y = f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} f'_y &= (f'_y)'_x = f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} f'_y &= (f'_y)'_y = f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Les dérivées sont appelées dérivées secondes partielles mixtes de f .

Theorem 3.3.8 Soit f une fonction des variables x et y . Si f , f'_x , f''_{xy} et f''_{yx} sont continues en tout point d'une certaine région ouverte R , alors

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

en tout point de R .

Il en est de même pour les fonctions de trois variables : si $w = f(x, y, z)$ et si les dérivées premières et secondes sont continues, les dérivées partielles mixtes suivantes sont égales :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}$$

Exercice 3.3.9 Calculer toutes les dérivées partielles secondes de f définie par

$$f(x, y) = x^3 y^2 - 2x^2 y + 3x$$

Exercice 3.3.10 1. Calculer les dérivées partielles premières de

(a) $f(x, y) = 2x^4 y^3 - xy^2 + 3y + 1$

(b) $f(x, y) = (x^3 - y^2)^5$

(c) $f(x, y) = \sqrt{4x^2 - y^2} \sec x$

(d) $f(x, y) = xe^y + y \sin x$

(e) $f(x, y, z) = \text{Arc sin } \sqrt{xy} + \sin yz$

2. Calculer $\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$ si $f = \sin xyz$

3. Montrer que la fonction v satisfait l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

(a) $v = (\sin akt)(\sin kx)$

(b) $v = (x - at)^4 + \cos(x + at)$

4. La température en un point (x, y) d'une plaque de métal est donnée par $T = 10(x^2 + y^2)^2$ où T est exprimée en degrés et x et y en centimètres. Quelle est la vitesse de variation instantanée de T à partir de $(1, 2)$ dans la direction

(a) de l'axe des x ?

(b) de l'axe des y ?

5. On dit d'une fonction f qu'elle est harmonique si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

sur tout domaine de définition. Démontrer que la fonction donnée est harmonique.

$$(a) f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(b) f(x, y) = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$$

$$(c) f(x, y) = \cos x \sinh y + \sin x \cosh y$$

6. Montrer que toute fonction de la forme

$$w = (\sin ax)(\cos by)e^{-\sqrt{a^2+b^2}z}$$

satisfait l'équation de Laplace de dimension trois

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

7. Calculer $f'_x(0.5, 0.2)$ et $f'_y(0.5, 0.2)$ et comparer les valeurs obtenues avec les approximations qu'en fournissent avec $h = 0.01$ les formules que voici.

$$f'_x(x, y) \approx \frac{f(x - 2h, y) - 4f(x - h, y) + 3f(x, y)}{2h}$$

$$f'_y(x, y) \approx \frac{f(x, y - 2h) - 4f(x, y - h) + 3f(x, y)}{2h}$$

$$(a) f(x, y) = y^2 \sin(xy)$$

$$(b) f(x, y) = xy^3 + 4x^3y^2$$

3.4 Règles de chaînes

Règles de chaînes pour les fonctions le long des courbes paramétriques

Considérons une fonction décrite par une courbe de l'espace par :

$$f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow f(t) = (x, y, z)$$

avec

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

f peut être vue comme fonction d'une seule variable t . Pour chaque t la valeur de la fonction au surr la courbe au point $x(t), y(t), z(t)$ est la valeur de la composée $f(x(t), y(t), z(t))$. Pour calculer le taux de variation de f le long de la courbe par rapport à t nous allons tout simplement calculer la différentielle de cette composée par rapport à t .

Le plus souvent on calcule df/dt en substituant $x(t), y(t), z(t)$ dans la formule pour f et calculer la différentielle directement par rapport à t . Mais le plus souvent

nous travaillons avec des fonctions pour lesquelles l'expression mathématique n'est pas disponible. Nous allons donner ici des techniques pour calculer les différentielles de telles fonctions.

Règle de chaines pour les fonctions de deux variables

Theorem 3.4.1 *Si $w = f(x, y)$ possède des dérivées partielles continues f_x et f_y et si $x = x(t)$, $y = y(t)$ sont de fonctions différentiables de t , alors la fonction composite $w = f(x(t), y(t))$ est une fonction différentiable de t et*

$$\frac{df}{dt} = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \quad (3.7)$$

ou bien

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (3.8)$$

Exercice 3.4.2 (1.) *Utiliser la règle de chaîne pour trouver la dérivée de*

$$f(x, y) = xy$$

par rapport à t le long de la courbe

$$x = \cos t, \quad y = \sin t$$

(2.) *Démontrer le théorème 3.4.1*

Règle de chaines pour les fonctions de trois variables

Si $w = f(x, y, z)$ possède des dérivées partielles continues et $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ sont de fonctions différentiables de t alors on a :

$$\frac{df}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} + f_z \frac{dz}{dt} \quad (3.9)$$

ou bien

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (3.10)$$

Exercice 3.4.3 *Exprimer dw/dt comme une fonction de t si $w = xy + z$ et $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ (cette dérivée montre comment w varie le long de l'hélice dans son domaine).*

Règle de chaines pour les fonctions définies sur une surface

Si $w = f(x, y, z)$ et si $x = x(r, s)$, $y = y(r, s)$, $z = z(r, s)$ alors la fonction composite

$$w = f(x = x(r, s), y = y(r, s), z = z(r, s))$$

est une fonction de r et s . Si x, y, z et f possèdent des dérivées partielles continues, alors les dérivées partielles de w par rapport à r et s existent et sont données par les équations suivantes :

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \quad (3.12)$$

- Exercice 3.4.4** (1.) Trouver $\partial w/\partial r$ and $\partial w/\partial s$ comme fonctions de r et s si $w = f(x, y, z) = x + 2y + z^2$, et $x = r/s$, $y = r^2 + e^s$, $z = 2r$.
- (2.) Monter que toute fonction différentiable de la forme $w = f(s)$, où $s = y + ax$, est une solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial w}{\partial x} - a \frac{\partial w}{\partial y} = 0 ; (a \neq 0 \text{ constant})$$

Fonctions de plusieurs variables

Supposons que

$$w = f(x, y, z, u, \dots, v)$$

est une fonction différentiable des variables $x, y, z, u, \dots, v$ (un nombre finit), et que nous souhaitons étudier le comportement de f quand ces variables sont reliées à un autre ensemble fini des variables $p, q, r, s, \dots, t$ par les équations

$$\begin{aligned} x &= x(p, q, r, s, \dots, t) \\ y &= y(p, q, r, s, \dots, t) \\ &\vdots \\ v &= v(p, q, r, s, \dots, t) \end{aligned}$$

Supposons que nous voulons calculer, $\partial w/\partial p, \partial w/\partial q, \partial w/\partial r, \dots, \partial w/\partial t$. La règle des chaînes donne :

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial p} \dots + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial p} \quad (3.13)$$

Il y a des équations analogues pour $\partial w/\partial q, \dots, \partial w/\partial t$. voici les étapes à suivre dans le calcul de $\partial w/\partial p$ dans l'équation 3.13

- (1.) Différentier w par rapport à chaque variable intermédiaire pour trouver :

$$\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \dots, \frac{\partial w}{\partial v}$$

- (2.) Différentier chaque variable variable intermédiaire par rapport à la variable indépendante choisie (dans ce cas p) pour trouver :

$$\frac{\partial x}{\partial p}, \frac{\partial y}{\partial p}, \dots, \frac{\partial v}{\partial p}$$

- (3.) Additionner les produits des dérivées correspondantes dans l'étape (1.) et (2.) pour trouver le membre de droite de 3.13

Exercice 3.4.5 Si nous substituons les coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ dans une fonction $w = f(x, y)$ qui possède des dérivées partielles continues, montrer que

$$\frac{\partial w}{\partial r} = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta$$

et

$$\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = -f_x \sin \theta + f_y \cos \theta$$

Montrer que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 = f_x^2 + f_y^2$$

Exercice 3.4.6 1. Dérivation de fonctions composées

- (a) Calculer $\partial w / \partial x$, $\partial w / \partial y$

i. $w = u \sin v$; $u = x^2 + y^2$, $v = xy$

ii. $w = uv + v^2$; $u = x \sin y$, $v = y \sin x$

- (b) Calculer $\partial z / \partial x$ et $\partial z / \partial y$

i. $z = r^3 + s + v^2$; $r = xe^y$; $s = ye^x$, $v = x^2y$

ii. $z = pq + qw$; $p = 2x - y$; $q = x - 2y$, $w = -2x + 2y$

2. En faisant usage des dérivées partielles, calculer dy/dx pour $y = f(x)$ définie implicitement par l'équation donnée.

(a) $2x^3 + x^2y + y^3 = 1$

(b) $6x + \sqrt{xy} - 3xy^2 + 2x = 0$

(c) $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$

3. Calculer $\partial z / \partial x$ et $\partial z / \partial y$ pour $z = f(x, y)$ définie implicitement par l'équation donnée

(a) $2xz^3 - 3yz^2 + x^2y^2 + 4z = 0$

(b) $xe^{yz} - 2ye^{xz} + 3ze^{xy} = 1$

(c) $yx^2 + z^2 + \cos xyz = 4$

4. Une fonction f de deux variables est homogène de degré n si $f(x, y) = k^n f(x, y)$ pour tout t tel que (tx, ty) appartienne au domaine de définition de f . Montrer qu'une telle fonction satisfait

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = nf(x, y).$$

5. Si $w = f(x, y)$ avec $x = e^r \cos \theta$ et $y = e^r \sin \theta$, montrer que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = e^{-2r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)$$

6. Soit $w = f(u, v)$ avec $u = g(x, y)$ et $v = k(x, y)$. Montrer que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Calculer $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$

7. Un gaz satisfait à la loi des gaz parfait $PV = 700T$. Il est chauffé à raison de $2^\circ/\text{min}$ et sa pression augmente à la vitesse de 2.5 cm de mercure par minute. Calculer la vitesse à laquelle le volume augmente au moment où la température est 200° et la pression 50 cm de mercure. Rép : -112 cm de mercure.

3.5 Accroissement et Différentielles

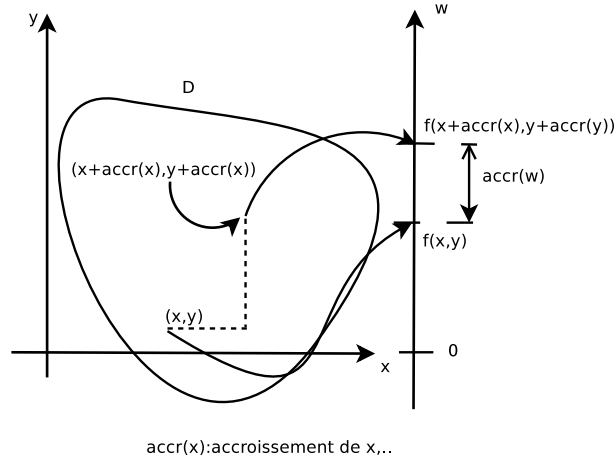
Definition 3.5.1 Soit $w = f(x, y)$ et Δx et Δy les accroissements respectifs de x et de y . L'accroissement Δw de $w = f(x, y)$ est définie par

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

L'accroissement Δw correspond au changement de valeur que subit la fonction entre (x, y) et $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Si on interprète $f(x, y)$ comme la température en un point (x, y) d'une plaque de métal D , Δw est la différence de température entre les points (x, y) et $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Exercice 3.5.2 Soit $w = 3x^2 - xy$

- (i.) Si x et y reçoivent des accroissements respectifs Δx et Δy , quel l'accroissement Δw qui en résulte ?
- (ii.) Que vaut Δw lorsque (x, y) passe de $(1, 2)$ à $(1.01, 1.98)$?



Theorem 3.5.3 Soit $w = f(x, y)$ où f est définie sur la région rectangulaire $R = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$. On suppose que f'_x et f'_y existent sur tout R et sont continues au point (x_0, y_0) de R . Si Δx et Δy sont tels que $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ appartient à R et si

$$\Delta w = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

alors il existe des fonctions ϵ_1 et ϵ_2 de Δx et Δy qui tendent vers 0 quand $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ et telles que

$$\Delta w = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

proof 3.5.4 On peut réécrire la différence Δw sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Delta w &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + \dots \\ &\quad + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] \end{aligned} \tag{3.14}$$

Fixons Δy et considérons la fonction g de la seule variable x définie par

$$g(x) = f(x, y_0 + \Delta y) \quad \text{pour } a < x < b$$

Il s'ensuit que $g'_x = f'_x(x, y_0 + \Delta y)$ pour $a < x < b$. Le théorème des accroissements finis appliqué à g sur $[x_0, x_0 + \Delta x]$ fournit l'équation

$$g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) = g'(u)\Delta x,$$

pour une certaine valeur u située entre x_0 et $x_0 + \Delta x$. Écrire avec f , cette expression prend la forme :

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = f'_x(u, y_0 + \Delta y)\Delta x. \tag{3.15}$$

Considérons maintenant la fonction h de la seule variable y définie par $h(y) = f(x_0, y)$ pour $c < y < d$, alors $h'_x = f'_y(x_0, y)$ et le théorème des accroissements finis appliqué à h sur $[y_0, y_0 + \Delta y]$ donne

$$h(y_0, y_0 + \Delta y) - h(y_0) = h'(v)\Delta y$$

pour une certaine valeur v de y situé entre y_0 et $y_0 + \Delta y$. Écrite en f cette expression devient

$$f(y_0, y_0 + \Delta y) - f(y_0, y_0) = f'_y(x_0, v)\Delta y \quad (3.16)$$

Introduisons 3.15 et 3.16 dans 3.14 :

$$\Delta w = f'_x(u, y_0 + \Delta y)\Delta x + f'_y(x_0, v)\Delta y. \quad (3.17)$$

$\Delta w = f'_x(u, y_0 + \Delta y)\Delta x + f'_y(x_0, v)\Delta y$. Des points représentatif de $(u, y_0 + \Delta y)$ et (x_0, y_0) sont indiqués dans la figure (fig ici). Définissons ϵ_1 et ϵ_2 , fonction Δx et Δy , comme suit :

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= f'_x(u, y_0 + \Delta y)\Delta x - f'_x(x_0, y_0)\Delta x \\ \epsilon_2 &= f'_y(x_0, v)\Delta y - f'_y(x_0, y_0)\Delta y \end{aligned}$$

Il aisé de voir dans dans la figure (ici) que $u \rightarrow x_0$ quand $\Delta x \rightarrow 0$ et que $v \rightarrow y_0$ quand $\Delta y \rightarrow 0$.

Dès lors, grâce à la continuité de f'_x et f'_y , il est évident que ϵ_1 et ϵ_2 tendent vers 0 quand $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$.

En écrivant les équations précédentes sous la forme

$$\begin{aligned} f'_x(u, y_0 + \Delta y) &= f'_x(x_0, y_0) + \epsilon_1 \\ f'_y(x_0, v) &= f'_y(x_0, y_0) + \epsilon_2 \end{aligned}$$

et en les introduisant dans 3.17, Δw prend la forme

$$\Delta w = \left[f'_x(x_0, y_0) + \epsilon_1 \right] \Delta x + \left[f'_y(x_0, y_0) + \epsilon_2 \right] \Delta y$$

ce qui est la conclusion attendue.

Definition 3.5.5 Soit $w = f(x, y)$ et soit Δx et Δy les accroissements de x et de y .

(1.) Les différentielles dx et dy des variables indépendantes x et y sont

$$dx = \Delta x \text{ et } dy = \Delta y$$

(2.) La différentielle de la variable dépendante w est

$$dw = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy$$

Avec le théorème précédent on peut écrire :

$$\Delta w = dw + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

ou encore

$$\Delta w - dw = \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

Ainsi dw peut servir d'approximation à Δw quand Δx et Δy approchent 0.

Definition 3.5.6 Soit $w = f(x, y)$. La fonction f est différentiable en (x_0, y_0) si Δw peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta w = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

Une fonction f de deux variables est différentiable sur une région R si elle est différentiable en chaque point de R .

Theorem 3.5.7 Si $w = f(x, y)$ et si f'_x et f'_y sont continues sur une région rectangulaire R alors f est différentiable

Theorem 3.5.8 (continuité comme conséquence de la différentiabilité.) Si une fonction f de deux variables est différentiable en (x_0, y_0) , alors elle est continue en (x_0, y_0)

proof 3.5.9 Étant donné deux accroissements Δx et Δy de x et de y , l'accroissement Δw qui en découle peut s'écrire :

$$\Delta w = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

ou encore

$$\Delta w = [f'_x(x_0, y_0) + \epsilon_1] \Delta x + [f'_y(x_0, y_0) + \epsilon_2] \Delta y$$

En égalant ces expressions et en posant $x = x_0 + \Delta x$ et $y = y_0 + \Delta y$, il vient

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = [f'_x(x_0, y_0) + \epsilon_1] (x - x_0) + [f'_y(x_0, y_0) + \epsilon_2] (y - y_0).$$

Dès lors,

$$\left[\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) - f(x_0, y_0) \right] = 0$$

, ou encore

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

qui est bien la continuité de $f(x, y)$ en (x_0, y_0) .

Corollary 3.5.10 Si f est une fonction dont les dérivées partielles f'_x et f'_y sont continues sur une région rectangulaire R , alors f est continue sur R .

Nota

La seule existence des dérivées f'_x et f'_y ne suffit pas à assurer la continuité de f , alors que pour les fonctions à une variable, l'existence de la dérivée entraînerait la continuité de f (on y reviendra plus tard sur cette question).

On peut étendre la différentiabilité aux fonctions de plus de deux variables. Ainsi, soit $w = f(x, y, z)$ une fonction définie sur une région convenable R , dont les dérivées f'_x, f'_y, f'_z existent sur R et sont continues en (x, y, z) . Aux accroissements $\Delta x, \Delta y$ et Δz respectifs de x, y, z correspond un accroissement de w

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme

$$\Delta w = f'_x(x, y, z)\Delta x + f'_y(x, y, z)\Delta y + f'_z(x, y, z)\Delta z + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y + \epsilon_3\Delta z$$

où $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ sont des fonctions de $\Delta x, \Delta y$, et Δz dont la limite 0 quand $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow (0, 0, 0)$.

Definition 3.5.11 Soit $w = f(x, y, z)$ et soit $\Delta x, \Delta y$, et Δz des accroissements respectifs de x, y et z .

(1) Les différentielles dx, dy et dz des variables indépendantes x, y et z sont

$$dx = \Delta x \quad dy = \Delta y \quad dz = \Delta z$$

(2) la différentielle dw de la variable dépendante w est :

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

La différentielle dw est une bonne approximation de Δw pour des accroissements faibles de x, y et z .

Example 3.5.12 Les dimensions en cm d'un parallélépipède passent de 9,6 et 4 à 9.02, 5.97 et 4.01 respectivement.

(1) Estimer le changement de volume qui en résulte à l'aide de la différentielle.

(2) Calculer exactement ce changement de volume.

Solution

(1) Soit $V = xyz$ le volume du parallélépipède rectangle de dimension x, y et z . Prenons ensuite dx, dy et dz comme de erreurs de mesurages. Le volume calculé est alors affecté 'd'une erreur

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = yzdx + xzdy + xydz$$

$x = 9, dx = 0.02, y = 6, dy = -0.03, z = 4, dz = 0.01$, cette erreur vaut environ

$$dV = 24(0.02) + 36(-0.03) + 54(0.01) = -0.06 \text{ cm}^3$$

Le volume va donc diminuer d'environ 0.06 cm^3

(2) La variation exacte du volume est

$$\Delta V = (9.02)(5.97)(4.01) - (9)(6)(4) = -0.063906 \text{ cm}^3$$

Exercice 3.5.13 1. Pour des accroissements Δx de x et Δy de y , chercher une expression de Δw , dw et $dw - \Delta w$.

(a) $w = 5y - xy$

(b) $w = xy - y^2 + 3x$

2. Chercher les expressions possibles de ϵ_1 et ϵ_2 satisfaisant la condition dans leur définition pour

(a) $f(x, y) = 4y^2 - 3xy + 2x$

(b) $f(x, y) = (2x - y)^2$

(c) $f(x, y) = x^3 + y^3$

3. On mesure les dimensions d'une boîte rectangulaire fermée et on trouve 1 m, 1.25 m, et 1.5 m, avec une erreur pouvant aller jusqu'à $\pm 0.15 \text{ cm}$. A l'aide des différentielles, calculer l'erreur maximale possible de la valeur calculée (a) de l'aire (b) du volume.

4. Calculer l'aide de la différentielle une approximation de la variation de f consécutive à la variation indiquée des variables indépendantes

$$f(x, y, z) = x^2 z^3 - 3yz^2 + x^{-3} + 2y^{\frac{1}{2}}z \quad (1, 4, 2) \text{ à } (1.02, 3.97, 1.96)$$

5. Lorsque les trois résistance R_1 , R_2 et R_3 sont connectées en parallèle, la résistance totale est du circuit est donnée par

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Quelle est l'erreur maximum dont risque d'être affectée la valeur de R si les valeurs mesurées de R_1 , R_2 et R_3 sont respectivement 100, 200 et 300 ohms avec une erreur limitée à $\pm 1\%$?

6. Méthode de Newton pour un système à deux inconnues.

Considérons un système général d'équations non-linéaire de deux équations en x et y de la forme :

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

où f et g sont des fonctions de deux variables. Nous voulons approcher les coordonnées (a, b) d'un point d'intersection des graphiques de deux équations. Soit (x_1, y_1) une première approximation qui diffère de la solution exacte (a, b) de Δx et Δy . Soit Δf et Δg les accroissements de f et g consécutifs au déplacement de (x_1, y_1) jusqu'à (a, b) . Montrer que l'on a :

$$\Delta f = -f(x_1, y_1) \quad \text{et} \quad \Delta g = -g(x_1, y_1)$$

et

$$df \approx -f(x_1, y_1) \quad \text{et} \quad dg \approx -g(x_1, y_1)$$

Montrer qu'on a le système suivant en les inconnues Δx et Δy

$$\begin{cases} f'_x(x_1, y_1)\Delta x + f'_y(x_1, y_1)\Delta y \approx -f(x_1, y_1) \\ g'_x(x_1, y_1)\Delta x + g'_y(x_1, y_1)\Delta y \approx -g(x_1, y_1) \end{cases} \quad (3.18)$$

On obtient alors une seconde approximation qui est meilleure que (x_1, y_1) donnée par

$$(x_2, y_2) = (x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$$

Ce procédé peut être renouvelé à partir de (x_2, y_2) et conduire à une troisième approximation (x_3, y_3) . Une précision souhaitée, spécifiée par un $\epsilon > 0$, sera atteinte lorsque $|\Delta x| < \epsilon$ et $|\Delta y| < \epsilon$.

Appliquer cette méthode aux systèmes

$$(a) \quad x^2 + y^2 - 1 = 0; y - \sin x = 0 \quad (x_1, y_1) = (0.5, 0.5)$$

(b)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ \frac{(x-1)^2}{10} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1 \end{cases}$$

$$(x_1, y_1) = (2, 1)$$

3.6 Dérivées des fonctions composées

Comme pour le cas d'une fonction à une variable on va examiner la dérivée de fonctions composées dans le cas de plusieurs variables. soit la fonction de deux variables

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \rightarrow w = f(x, y) = (u, v).$$

avec $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$.

Theorem 3.6.1 Si $w = f(x, y)$ avec $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$, et si f, g et h sont

différentiables alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

Démonstration

Quand x subit un accroissement Δx tandis que y est maintenue constante ($\Delta y = 0$), il en résulte les accroissements suivants de u et v :

$$\begin{aligned}\Delta u &= g(x + \Delta x, y) - g(x, y) \\ \Delta v &= h(x + \Delta x, y) - h(x, y)\end{aligned}$$

L'accroissement correspondant de w :

$$\Delta w = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v).$$

Puisque f est différentiable on a :

$$\Delta w = \frac{\partial w}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial w}{\partial v} \Delta v + \epsilon_1 \Delta u + \epsilon_2 \Delta v$$

où $\epsilon_1 = f(\Delta u, \Delta v)$, $\epsilon_2 = g(\Delta u, \Delta v)$ et $(\epsilon_1, \epsilon_2) \rightarrow (0, 0)$ quand $(\Delta u, \Delta v) \rightarrow (0, 0)$. Il est certain qu'en $(\Delta u, \Delta v) = (0, 0)$, ϵ_1 et ϵ_2 sont nulles car s'il n'en n'était pas ainsi, on pourrait le remplacer par des fonctions μ_1 et μ_2 qui elles les seraient et qui seraient égales à ϵ_1 et ϵ_2 ailleurs. De sorte qu'on peut en conclure que ϵ_1 et ϵ_2 sont continues en $(0, 0)$. On a en divisant les deux membres par Δx

$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \epsilon_1 \frac{\Delta u}{\Delta x} + \epsilon_2 \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Pour w fonction de x et de y , par définition

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

Il en découle donc

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ et } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Du fait de la première relation, Δu et Δv tendent vers 0 ert donc aussi ϵ_1 et ϵ_2 . En conséquence le passage à la limite donne :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

Pour retrouver la formule de dérivation des fonctions composées on dessine des branches (segments de droite) de w vers u et v pour traduire que w est fonction de u et de v . De même u et v étant fonctions de x, y , on trace des branches depuis u jusqu'à x et y et depuis v jusqu'à x et y . Le long de chaque branche figure la dérivée partielle relative aux variables concernées.

Exemple 3.6.2 Trouver les formules de $\partial w/\partial p$ et $\partial w/\partial q$ si

$$w = r^3 + s^2 \text{ avec } r = pq^2, \quad s = p^2 \sin q$$

Réponse : au cours

Exercice 3.6.3 Calculer $\partial w/\partial z$ si

$$w = r^2 + sv + t^3 \text{ avec } r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad s = xyz, \quad v = xe^y, \quad t = yz^2$$

Theorem 3.6.4 Quand une équation $F(x, y) = 0$ détermine implicitement une fonction dérivable f d'une variable x telle que $y = f(x)$, alors

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Ce théorème sera rendu plus rigoureux un peu plus loin.

Démonstration : au cours

Theorem 3.6.5 (Une extension en dimension trois du théorème précédent) Quand une $F(x, y, z) = 0$ définit implicitement une fonction f différentiable de deux variables x et y telle que $z = f(x, y)$ pour tout (x, y) dans le domaine de définition de f , alors

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$$

Exemple 3.6.6 Calculer $\partial z/\partial x$ et $\partial z/\partial y$ pour $z = f(x, y)$ définit implicitement par

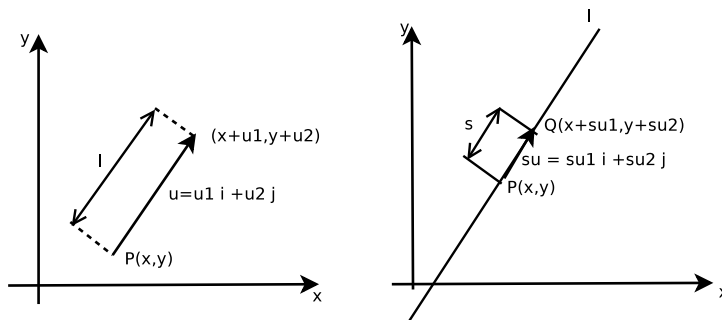
$$x^2 z^2 + xy^2 - z^3 + 4xy - 5 = 0$$

Réponse : au cours

Exercice 3.6.7 Du sable s'échappe d'un conteneur à raison de $100 \text{ cm}^3/\text{min}$. Il forme un cône circulaire dont le rayon de la base augmente à la vitesse de $0.6 \text{ cm}/\text{min}$. Calculer la vitesse à laquelle le tas s'élève au moment où le rayon du cercle de base mesure 12 cm et le volume du tas 600 cm^3 .

3.7 Dérivées directionnelles

Les dérivées partielles d'une fonction de deux ou plusieurs variables indiquent la vitesse instantanée de la fonction dépendante par rapport vis-à-vis de $P(x, y)$ dans la direction des axes des coordonnées. Nous allons étendre cette notion à n'importe quelle direction. Soit $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ un vecteur unité avec comme origine



$P(x, y)$. Les coordonnées de son extrémité sont $(x + u_1, y + u_2)$.

Problème : Définir la vitesse de variation de $f(x, y)$ en fonction de la distance dans la direction du vecteur $\mathbf{u}$.

Soit l la droite passant par P et parallèle à $\mathbf{u}$ et soit Q un point quelconque de l . On peut écrire le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ sous la forme :

$$\overrightarrow{PQ} = s\mathbf{u}$$

Les coordonnées du point Q sont $(x + su_1, y + su_2)$ et on a en plus

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \|s\mathbf{u}\| = |s|\|\mathbf{u}\| = |s|.$$

Ainsi donc s mesure la distance (munie de son signe) depuis P le long de l . Quand $s > 0$, $s\mathbf{u}$ a le même sens que $\mathbf{u}$. Par contre, quand $s < 0$ est de sens contraire.

Lorsqu'un point passe de P à Q , $f(x, y)$ il reçoit un accroissement Δw exprimé par

$$\Delta w = f(x + su_1, y + su_2) - f(x, y).$$

Le taux moyen de variation de $f(x, y)$ est le rapport

$$\frac{\Delta w}{s} = \frac{f(x + su_1, y + su_2) - f(x, y)}{s}.$$

Definition 3.7.1 Soit $w = f(x, y)$ et soit $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ un vecteur unité. La dérivée directionnelle de f au point $P(a, b)$ dans la direction du vecteur $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$, noté $f'_\mathbf{u}$ ou $\partial_\mathbf{u}f$ ou $\partial w/\partial u$, est

$$f'_\mathbf{u}(x, y) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x + su_1, y + su_2) - f(x, y)}{s}$$

Theorem 3.7.2 Pour une fonction différentiable f de deux variables et par rapport à un vecteur $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$,

$$f'_{\mathbf{u}}(x, y) = f'_x u_1 + f'_y u_2$$

Démonstration : au cours

Exercice 3.7.3 Soit $f(x, y) = x^3 y^2$

(a.) Calculer la dérivée directionnelle de f en $P(-1, 2)$ dans la direction du vecteur $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

(b.) Interpréter le résultat (a.) si $f(x, y)$ renseigne la température au point (x, y) .

L'expression de la dérivée directionnelle peut se mettre sous forme vectorielle comme suit :

$$f'_{\mathbf{u}}(x, y) = \left[f'_x(x, y)\mathbf{i} + f'_y(x, y)\mathbf{j} \right] \cdot [u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}].$$

Le gradient

Definition 3.7.4 Soit f une fonction de deux variables. Le **gradient** de f est la fonction vectorielle

$$\mathbf{grad} f(x, y) = f'_x(x, y)\mathbf{i} + f'_y(x, y)\mathbf{j}.$$

ou encore

$$\nabla f(x, y) = f'_x(x, y)\mathbf{i} + f'_y(x, y)\mathbf{j}.$$

Dérivée directionnelle en terme du gradient.

La dérivée directionnelle de f dans la direction du vecteur unité $\mathbf{u}$ s'obtient en prenant le produit scalaire de f avec $\mathbf{u}$. i.e.

$$f'_{\mathbf{u}} = \mathbf{grad} f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

Le symbole ∇ est un opérateur différentiel vectoriel, appelé opérateur “nabla”; il est défini par

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Ses propriétés ressemblent à celles de l'opérateur d/dx . En un point précis $P_0(x_0, y_0)$ du plan des xy , le vecteur gradient est noté $(\mathbf{grad} f)_{P_0}$ ou $\nabla f|_{P_0}$. Donc

$$(\mathbf{grad} f)_{P_0} = \nabla f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f'_y(x_0, y_0)\mathbf{j}$$

Graphiquement le vecteur de $(\mathbf{grad} f)_{P_0}$ a toujours son origine en P_0

Exemple 3.7.5 Soit $f(x, y) = x^2 - 4xy$

- (i) Calculer le gradient de f au point $P(1, 2)$ et dessiner $(\mathbf{grad} f)_P$.
- (ii) À l'aide du gradient, calculer la dérivée directionnelle de f en $P(1, 2)$ dans la direction déterminée par $P(1, 2)$ et $Q(2, 5)$.

Solution :

(i)

$$(\mathbf{grad} f(x, y))_{P(x_0, y_0)} = f'_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f'_y(x_0, y_0)\mathbf{j} = (2x - 4)\mathbf{i} - 4x\mathbf{j}.$$

$$\text{En } P(x_0, y_0) = (1, 2)$$

$$(\mathbf{grad} f(x, y))_{(1, 2)} = -6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}.$$

(ii) Si $\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ}$, alors

$$\mathbf{a} = (2 - 1, 5 - 2) = (1, 3) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}.$$

Le vecteur

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{10}} (\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

est un vecteur unitaire dans la direction $\overrightarrow{PQ}$. Enfin,

$$f'_{\mathbf{u}}(1, 2) = \mathbf{grad} f(1, 2) \cdot \mathbf{u} = (-6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} (\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \approx -5.7$$

Il est parfois important de connaître la direction dans la quelle une fonction f croît le plus rapidement possible et ainsi que le taux maximal de variation.

Theorem 3.7.6 Soit f une fonction de deux variables différentiables en $P(x, y)$.

- (1) La valeur maximale de $f'_u(x, y)$ en $P(x, y)$ est $\|\mathbf{grad} f(x, y)\|$.
- (2) C'est dans la direction de $\mathbf{grad} f(x, y)$ que le taux d'accroissement est maximal.

Preuve : Laisser en exercice.

Corollary 3.7.7 Soit f une fonction de deux variables différentiables en $P(x, y)$.

- (1) La valeur minimale de $f'_u(x, y)$ en $P(x, y)$ est $-\|\mathbf{grad} f(x, y)\|$.
- (2) C'est dans la direction de $-\mathbf{grad} f(x, y)$ que le taux d'accroissement est maximal.

Example 3.7.8 Soit $f(x, y) = 2 + x^2 + \frac{1}{4}y^2$.

- (a) Dans quelle direction autour du point $P(1, 2)$, $f(x, y)$ croît-elle le plus rapidement et quel est ce taux de croissance maximum de f en P ?
- (b) Interpréter (a) à la lumière du graphique de f

Réponse : au cours

On peut étendre la notion de dérivées directionnelles aux fonctions de trois variables. La dérivée directionnelle au point $P(x, y, z)$ dans la direction du vecteur $\mathbf{u}$ de la fonction $f(x, y, z)$ de trois variables est donnée par :

$$f'_u(x, y, z) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(x + su_1, y + su_2, z + su_3) - f(x, y, z)}{s}$$

$f'_u(x, y, z)$ est la vitesse de variation de f par rapport à la distance de $P(x, y, z)$ dans la direction $\mathbf{u}$. Le gradient de f est noté $\nabla f(x, y, z)$ ou $\mathbf{grad} f(x, y, z)$ et il est donné par :

$$\nabla f(x, y, z) = \mathbf{grad} f(x, y, z) = f'_x(x, y, z)\mathbf{i} + f'_y(x, y, z)\mathbf{j} + f'_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

Theorem 3.7.9 Pour une fonction différentiable f de trois variables et par rapport à un vecteur unité $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$

$$\begin{aligned} f'_u(x, y, z) &= \mathbf{grad} f(x, y, z) \cdot \mathbf{u} \\ &= f'_x(x, y, z)\mathbf{i} + f'_y(x, y, z)\mathbf{j} + f'_z(x, y, z)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Exercice 3.7.10 Supposons que dans un espace muni d'un système d'axes en xyz . La température T au point (x, y, z) soit donnée par

$$T = \frac{100}{x^2 + y^2 + z^2}$$

- (a) Quelle est la vitesse de variation de T par rapport à la distance vis-à-vis du point $P(1, 3, -2)$ dans la direction du vecteur $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$?

- (b) Dans quelle direction autour de $P(x, y, z)$ la température croît-elle le plus vite ?
Quelle est cette vitesse maximale de variation de T en P ?

Exercice 3.7.11 1. Calculer le gradient de f en P .

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $P(-4, 3)$

(b) $f(x, y, z) = xy^2e^x$; $P(2, -1, 0)$

2. Calculer la dérivée directionnelle de f au point P dans la direction indiquée

(a) $f(x, y) = x^2 - 5xy + 3y^2$; $P(3, -1)$, $\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$

(b) $f(x, y, z) = z^2 \operatorname{Arctg}(x + y)$; $P(0, 0, 4)$, $\mathbf{a} = (6, 0, 1)$

3. La température T en (x, y, z) est donnée par

$$T = 4x^2 - y^2 + 16z^2$$

(a) Calculer la vitesse de variation de T en $P(4, -2, 1)$ dans la direction $2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

(b) Dans quelle direction autour de P , T croît-elle plus rapidement ?

(c) Que vaut cette vitesse maximale de variation ?

(d) Dans quelle direction autour de P , T décroît-elle le plus rapidement ?

(e) Que vaut cette vitesse minimale de variation ?

3.8 Normales et plan tangents

Soit S une surface, représentation graphique d'une équation $H(x, y, z) = 0$. Supposons que f admet des dérivées partielles continues premières continues. Soit $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de S en lequel les dérivées partielles de f ne sont pas nulles. Une tangente à S en P_0 est, par définition, une tangente T à n'importe quelle courbe incluse dans S et passant par P_0 . Une telle courbe sur S peut être décrite paramétriquement par :

$$x = f(u), \quad y = g(u), \quad z = h(u)$$

avec u dans un certain intervalle I . Le vecteur position $\mathbf{r}$ d'un point $P(x, y, z)$ est :

$$\mathbf{r} = f(u)\mathbf{i} + g(u)\mathbf{j} + h(u)\mathbf{k},$$

sa dérivée est

$$\mathbf{r}' = f'(u)\mathbf{i} + g'(u)\mathbf{j} + h'(u)\mathbf{k}$$

est un vecteur tangent à C en $P(x, y, z)$. Puisque la courbe se trouve sur la surface S , on a

$$H(f(u), g(u), h(u)) = 0.$$

Posons $w = H(x, y, z)$ avec $x = f(u)$, $y = g(u)$, $z = h(u)$, W est donc par composition une fonction de u nulle pour tout u . On a :

$$\frac{dw}{du} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{du} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{du}$$

ou encore

$$H'_x(x, y, z)f'(u) + H'_y(x, y, z)g'(u) + H'_z(x, y, z)h'(u) = 0$$

ou vectoriellement

$$\mathbf{grad} H(x, y, z) \cdot \mathbf{r}' = 0$$

et si $P_0(x_0, y_0, z_0)$ correspond à $t = t_0$ on a :

$$(\mathbf{grad} H(x, y, z))_{P_0} \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0.$$

Comme $\mathbf{r}'(t_0)$ est un vecteur tangent à C en P_0 , le vecteur $(\mathbf{grad} H(x, y, z))_{P_0}$ est orthogonal à n'importe quelle tangente T à S en P_0 . Le plan normal $(\mathbf{grad} H(x, y, z))_{P_0}$ en P_0 est le plan tangent à S en P_0 .

3.9 Equation du plan tangent

Une Équation du plan tangent à la surface représentative de $H(x, y, z) = 0$ en $P_0(x_0, y_0, z_0)$, où il est supposé que les dérivées partielles de $H(x, y, z)$ ne sont pas nulles, est

$$H'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + H'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + H'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0).$$

Exemple 3.9.1 Écrire une équation du plan tangent à l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{3}{4}x^2 + 3y^2 + z^2 = 12$$

au point $P_0(2, 1, \sqrt{6})$ et le représenter graphiquement. Donner également une équation de la droite normale passant par le point $P_0(2, 1, \sqrt{6})$.

Rép : L'équation du plan est $3x + 6y + 2\sqrt{6}z = 24$.

Lorsque la surface S est décrite par une équation de la forme $z = f(x, y)$, alors $H(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$ et l'équation du plan tangent passant par le point $P_0(x_0, y_0, z_0)$ prend la forme

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + (-1)f'_z(x_0, y_0)(z - z_0) = 0$$

Theorem 3.9.2 Une équation du plan tangent au graphique de $z = f(x, y)$ au

point $P_0(x_0, y_0)$ est

$$z - z_0 = f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0).$$

Exercice 3.9.3 1. Trouver l'équation du plan tangent et de la droite normale au surface de niveau

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $P(1, 1, 1)$

(b) $\cos \pi x - x^2 y + e^{xz} + yz = 4$, $P(0, 1, 2)$

(c) $z = \cos(\pi x/2)$, $P(1, 0, 0)$

3.10 Approximation Linéaire

Si nous désignons ce plan tangent par $T(x, y)$, on peut alors écrire

$$z = T(x, y) = f(x_0, y_0) - f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0).$$

Nous avons vu dans les paragraphes précédent que si la fonction f est différentiable en (x_0, y_0) et si Δw est un accroissement de $w = f(x, y)$ on a :

$$\Delta w = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

Nous avons montré par des exemples que si Δx et Δy sont petits, l'accroissement de Δw pouvait être approximée par la différentielle dw de $w = f(x, y)$ donnée par :

$$dw = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y \quad (3.19)$$

et on écrit :

$$f(x, y) = T(x, y) = f(x_0, y_0) + dw = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y \quad (3.20)$$

On voit donc que pour de petites variations de x et de y on peut approcher la valeur de la fonction $w = f(x, y)$ par le plan tangent $T(x, y)$ à $w = f(x, y)$ en $P_0(x_0, y_0)$ et on écrit approximativement en un point $P(x, y)$ proche du point P_0

$$f(x, y) \approx T(x, y) \quad (3.21)$$

L'approximation joue le même rôle pour les fonctions de deux variables que l'approximation linéaire pour une fonction d'une variable réelle. Nous allons estimer ici l'erreur dans l'approximation 3.21. Puisque $f(x, y)$ est différentiable on a :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

ou en fonction du plan tangent en P_0

$$f(x, y) = T(x, y) + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y = T(x, y) + \epsilon_1(x - x_0) + \epsilon_2(y - y_0).$$

Donc,

$$|f(x, y) - T(x, y)| = |\epsilon_1(x - x_0) + \epsilon_2(y - y_0)| \leq |\epsilon_1|(x - x_0)| + |\epsilon_2|(y - y_0)|.$$

Cette inégalité, combinée avec le fait $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ comme, $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ assure effectivement que l'approximation 3.21 sera satisfait dans un certain rectangle

$$R : |x - x_0| \leq \delta_1, \quad |y - y_0| \leq \delta_2,$$

centré en $P_0(x_0, y_0)$. Pour combien proche est cette approximation, nous avons besoin des dérivées partielles du second ordre de f . Si f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} sont continues sur R , alors leurs valeurs absolues sont inférieures ou égales à

$$B = \max_R \{|f_{xx}|, |f_{yy}|, |f_{xy}|\},$$

et il s'ensuit que (ceci sera expliquée plus tard)

$$|f(x, y) - T(x, y)| \leq \frac{1}{2}B(|x - x_0| + |y - y_0|)^2$$

ou

$$|E| = |f(x, y) - T(x, y)| \leq \frac{1}{2}B(|\Delta x| + |\Delta y|)^2$$

Exemple 3.10.1 Trouver la linéarisation $T(x, y)$ de

$$f(x, y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$$

au point $(3, 2)$. Estimer ensuite une borne supérieure de l'erreur dans l'approximation $f(x, y) \approx T(x, y)$ sur le rectangle

$$R : |x - 3| \leq 0.1 \quad |y - 2| \leq 0.1.$$

Réponse : $T(x, y) = 4x - y - 2$, $|E| = 0.04$.

Exercice 3.10.2 1. Comment sensible est le volume

$$V = \pi r^2 h$$

d'un cylindre circulaire droit aux petits changements dans son rayon et hauteur près du point $(r_0, h_0) = (1, 5)$?

2. Calculer la variation relative dans

$$V = \pi r^2 h$$

en fonction de la variation relative de r et h

3. Si r est mesurée avec une précision de $\pm 2\%$ et h avec une précision de $\pm 0.5\%$, à quelle précision peut-on calculer le volume donnée par

$$V = \pi r^2 h?$$

3.11 Dérivées d'ordre supérieures

Cette section est consacrées principalement aux dérivées du second ordre, notées par :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

ou

$$f_{xx}, \quad f_{yy}, \quad f_{yx}, \quad f_{xy}$$

et définie par les équations

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

et ainsi de suite. Les dérivées sont prises dans cet ordre :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$: dérivé premièrement par rapport à y , ensuite par rapport à x . f_{yx} signifie la même chose.

Les dérivées du second ordre apparaissent dans les équations qui expriment de lois physique important pour le mouvement des ondes, le transfert de la chaleur, le potentiel gravitationnel. (Une fonction potentielle gravitationnelle, mesure le travail fournit en déplaçant une unité de masse contre le champ gravitationnel à partir d'un point central de référence, le soleil par exemple à une nouvelle position, la planète Mars par exemple). Les dérivées du second ordre sont aussi utilisées dans le test du maxima et minima pour les fonctions de deux variables, comme nous allons le voir dans le prochain paragraphe.

Exemple 3.11.1 Si

$$f(x, y) = x \cos y + ye^x$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \cos y + ye^x, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= -\sin y + e^x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= ye^x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) &= ye^x = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) &= e^x = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}\end{aligned}$$

tandis que,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= -x \sin y + e^x, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= -\sin y + e^x = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= -x \cos y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) &= e^x = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\end{aligned}$$

Il est à noter à partir de l'exemple ci dessus que les dérivées du second ordre mixtes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

sont égales.

Tant que $f, f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}$ **sont tous continues à un point, les dérivées mixtes** f_{xy} **et** f_{yx} **seront égales à ce point.**

Theorem 3.11.2 (Le théorème des dérivées mixtes ou théorème de Schwartz) Si $f(x, y)$ et toutes ses dérivées partielles f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} sont définie dans une région contenant un point (a, b) et sont toutes continues au point (a, b) alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Preuve : au cours

Exemple 3.11.3 Trouver

$$\frac{\partial z}{\partial x \partial y} \quad (\text{ou } z_{xy})$$

si $z = f(u, v)$ avec $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ et f et toutes ses dérivées partielles sont continues.

Solution : À partir de la règle de chaîne,

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x} f(u, v) = f_u u_x + f_v v_x = f_u 2x + 2y f_v.$$

Ainsi donc,

$$\begin{aligned} z_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x} (f_u 2x + 2y f_v) \\ &= 2x \frac{\partial}{\partial y} (f_u) + f_u \frac{\partial}{\partial y} (2x) + 2y \frac{\partial}{\partial y} (f_v) + f_v \frac{\partial}{\partial y} (2y) \\ &= 2x \frac{\partial}{\partial y} (f_u) + 2y \frac{\partial}{\partial y} (f_v) + 2f_v. \end{aligned}$$

Nous utilisons encore la règle de chaîne pour calculer les deux dérivées restantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (f_u) &= f_{uu} \frac{\partial u}{\partial y} + f_{uv} \frac{\partial v}{\partial y} = -2y f_{uu} + 2x f_{uv} \\ \frac{\partial}{\partial y} (f_v) &= f_{vu} \frac{\partial u}{\partial y} + f_{vv} \frac{\partial v}{\partial y} = -2y f_{vu} + 2x f_{vv} \end{aligned}$$

et pour terminer on a : $z_{xy} = 2x(-2y f_{uu} + 2x f_{uv}) + 2y(-2y f_{vu} + 2x f_{vv}) + 2f_v$
Terminer en exercice.

Si on se réfère à l'exemple 3.11.1 on a pas seulement que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

mais aussi que

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}.$$

(vérifier cela en exercice) Ceci peut se déduire du théorème 3.11.2 de la manière

suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f_x \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f_x \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}\end{aligned}$$

En fait, si toutes les dérivées partielles qui apparaissent sont continues, la notation

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}$$

peut être utilisée pour indiquer le résultat de la différentiation de $f(x, y)$ m fois par rapport à x et n fois par rapport à y . Le résultat final sera le même quelque soit l'ordre de différentiation. Il est donc important de contrôler l'ordre de différentiation dans un problème donné.

Exercice 3.11.4 Calculer

$$\frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} (x \sin y + e^y)$$

Réponse : 0.

Exercice 3.11.5

Terminons par une notion importante qui va raffiner le concept de dérivées partielles et celle de dérivées directionnelles.

3.12 Notion de différentiabilité pour les fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Nous allons motiver ce paragraphe par quelques exemples :

- (a) L'existence des dérivées partielles en un point n'assure pas la continuité de la fonction en ce point ni l'existence des dérivées directionnelles en ce point. Considérons par exemple la fonction :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

On montre sans peine que cette fonction n'est pas continue en l'origine $(0, 0)$

et pourtant elle admet de dérivées partielles nulles en l'origine, i.e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

. On peut croire que la fonction est identiquement nulle si on la regardait selon les axes. D'autre part si on considère les autres directions $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ avec $u_1 \neq 0$ et $u_2 \neq 0$, on peut montrer que les dérivées directionnelles n'existent pas. Car on a

$$\frac{f(s\mathbf{u}) - f(0)}{s} = \frac{1}{s}$$

pour $s \neq 0$ et la limite n'existe pas.

- (b) D'autre part l'existence de toutes les dérivées directionnelles en un point n'implique pas la continuité en ce point. Considérons par exemple la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases} \quad (3.23)$$

qui n'est pas continue à l'origine (le montrer en exercice) et pourtant elle admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions, i.e

$$\frac{f(su_1, su_2) - f(0, 0)}{t} = \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + t^2 u_2^4}$$

et donc on a

$$\partial_u f(0) = \begin{cases} \frac{u_2^2}{u_1} & \text{si } u_1 \neq 0, \\ 0 & \text{si } u_1 = 0, \end{cases} \quad (3.24)$$

- (c) Dans le cas de fonctions d'une seule variable, la notion de dérivées fournit une bonne approximation du premier degré de la fonction (cela a été vu dans la première partie du cours). On devrait donc s'attendre que les dérivées directionnelles

$$\partial_u f(a)$$

déterminent une fonction linéaire de u . L'exemple ci dessus montre qu'il n'en est rien : $\partial_u f(0)$ n'est pas une fonction linéaire de (u_1, u_2) . (on avait déjà vu dans les paragraphes qui précèdent que la différentielle dans les cas de fonctions de deux variables ou trois variables étaient de bonnes approximation du premier ordre de la fonction.

Une fonction peut admettre de dérivées directionnelles linéaires en un point sans pour autant être continue en ce point. C'est le cas de la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y = 0 \text{ ou } y \neq x^2, \\ 1 & \text{si } y = x^2 \neq 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Nous allons donner une définition qui fournit la clef pour la solution des difficultés illustrées dans les exemples ci dessus.

Définition 3.12.1 Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application et soit $a \in U$ avec U un voisinage de a .

On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

telle que, si on pose

$$E(x) = f(x) - (f(a) + L(x - a)),$$

on ait

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{E(x)}{\|x - a\|} = 0; \quad x \in U \setminus \{a\}.$$

Proposition 3.12.2 (définition raffinée de la dérivée directionnelle) Soit $a \in \mathbb{R}^n$, U un voisinage de a , $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable en a et $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire vérifiant la condition de la définition précédente. alors

$$L(\mathbf{u}) = \partial_{\mathbf{u}} f$$

Démonstration : Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Comme U est un voisinage de a , $a + s\mathbf{u} \in U$ pour s assez petit. On peut écrire alors

$$f(a + s\mathbf{u}) - f(a) = L(s\mathbf{u}) + E(a + s\mathbf{u})$$

et donc, pour $s \neq 0$,

$$\frac{f(a + s\mathbf{u}) - f(a)}{s} = L\mathbf{u} + \frac{E(a + s\mathbf{u})}{s}$$

Notons que

$$\left\| \frac{E(a + s\mathbf{u})}{s} \right\| = \frac{\|E(a + s\mathbf{u})\|}{\|s\mathbf{u}\|} \|\mathbf{u}\|$$

et compte tenu de la définition précédente

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{E(a + s\mathbf{u})}{s} = 0, \quad s \neq 0.$$

On a bien donc

$$\partial_{\mathbf{u}} f(a) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(a + s\mathbf{u}) - f(a)}{s} = L(\mathbf{u}), \quad s \neq 0.$$

Corollaire 3.12.3 Si f est différentiable en a , l'application linéaire L de la définition 3.12.1 est unique.

L'unique application L s'appelle alors la différentielle de f en $\mathbf{a}$. On la note

$$df(\mathbf{a})$$

Il faudra faire attention au fait que $df(\mathbf{a})$ n'est pas un nombre ni un vecteur de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{R}^m$. C'est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, i.e.

$$df(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : \mathbf{u} \rightarrow df(\mathbf{a})(\mathbf{u}).$$

En particulier les dérivées partielles existent et sont données par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = df(\mathbf{a})\mathbf{e}_i.$$

Ce sont là des vecteurs de $\mathbb{R}^m$ dont les coordonnées données par $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ pour $j = 1, 2, \dots, m$.

Definition 3.12.4 Matrice jacobienne

La matrice des dérivées partielles de $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ s'appelle la matrice jacobienne ou la Jacobienne de f . On la note $\mathcal{J}(f, \mathbf{a})$, elle a n colonnes et m lignes :

$$\mathcal{J}(f, \mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \right), \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq i \leq n,$$

ou encore

$$\mathcal{J}(f, \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

Autrement dit, si $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ pour une fonction vectorielle $f(a_1, \dots, a_n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, la Jacobienne a pour colonnes les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. En particulier, pour une fonction de n variables à valeurs réelles, la matrice jacobienne est juste une matrice ligne :

$$\mathcal{J}(f, \mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right)$$

et la transposée de ce vecteur est la matrice colonne

$$\mathbf{grad} f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right)^t$$

grad est appelé gradient de f et il est noté $f(x)$.

Proposition 3.12.5 Si f est différentiable en $\mathbf{a}$, la matrice jacobienne de f en $\mathbf{a}$ représente l'application linéaire

$$df(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : \mathbf{u} \rightarrow df(\mathbf{a})(\mathbf{u}).$$

par rapport aux bases canoniques. Autrement dit :

$$df(\mathbf{a})(\mathbf{u}) = \mathcal{J}(f, \mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}$$

(où le produit du second membre est un produit matriciel).

Ce résultat se déduit des remarques ci-dessus et du théorème de représentation des applications linéaires (voir cours d'algèbre.)

Proposition 3.12.6 La fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ est différentiable si ses composantes f_j sont différentiables en $\mathbf{a}$.

Remarque 3.12.7 Si $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, est linéaire, il résulte immédiatement de la définition 3.12.1 que L est différentiable et que

$$dL(\mathbf{a}) = L.$$

En effet, $L\mathbf{x} - L\mathbf{a} = L(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ et dans la définition on pose, $E(\mathbf{x} = \mathbf{0})$.

Remarque 3.12.8 Soit $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ la i ème projection, $\pi_i(\mathbf{x}) = x_i$. Comme π_i est linéaire, on peut écrire :

$$d\pi_i(\mathbf{a}) = \pi_i.$$

On note souvent dx_i cette différentielle et on a donc

$$dx_i(\mathbf{u}) = u_i.$$

Si on retourne à la proposition 3.12.5, on a

$$df(\mathbf{a})(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})u_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})dx_i(\mathbf{u}),$$

ce qui donne l'égalité des applications linéaires

$$df(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})dx_i,$$

qui est la notation classique bien connue pour les différentielles. Nous avons vu plus haut que l'existence des dérivées directionnelles n'assure pas la continuité de la fonction. Par contre la différentiabilité l'implique trivialement.

Theorem 3.12.9 Si f est différentiable en $\mathbf{a}$, f est continue en $\mathbf{a}$. (un théorème déjà énoncé mais sans démonstration.)

Démonstration : on a

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + E(\mathbf{x}).$$

Comme $df(\mathbf{a})$ est linéaire, elle est continue et donc

$$\lim_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}} df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = df(\mathbf{a})(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{a}$$

et $E(\mathbf{x})$ aussi une limite nulle. donc

$$\lim_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}} df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = df(\mathbf{a})(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{a}$$

et f est continue.

Nous savons aussi que la seule existence des dérivées partielles ne suffit pas à assurer la différentiabilité. Par contre, la condition suffisante de différentiabilité donnée par le théorème suivant est très utile en pratique que nous allons admettre sans démonstration.

Theorem 3.12.10 Soit $a \in \mathbb{R}^n$ un voisinage de $\mathbf{a}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ($1 \leq i \leq n$) existent au voisinage de $\mathbf{a}$ et sont continues en $\mathbf{a}$, alors f est différentiable en $\mathbf{a}$.

Theorem 3.12.11 Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et U un voisinage de $\mathbf{a}$. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Posons $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$ et soit V un voisinage de $\mathbf{b}$ et $g : V \rightarrow \mathbb{R}^q$.

Si f est différentiable en a et g est différentiable en b , alors $g \circ f$ est différentiable en $\mathbf{a}$ et

$$d(g \circ f)(\mathbf{a}) = dg(\mathbf{b}) \circ df(\mathbf{a}).$$

En termes de matrice jacobienne on a :

$$\mathcal{J}(g \circ f, \mathbf{a}) = \mathcal{J}(g, f(\mathbf{a}))\mathcal{J}(f, \mathbf{a})$$

ou en explicitant les termes de la matrice $\mathcal{J}(g \circ f, \mathbf{a})$ nous obtenons la formule

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_k}(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(f(\mathbf{a})) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{a})$$

pour tous i compris entre 1 et q et k compris entre 1 et n .

Exercice 3.12.12 1. Calculer les dérivées partielles et étudier la différentiabilité des fonctions réelles suivantes sur leur domaine de définition

(a) $f(x, y) = e^x \sin y$

(b) $g(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-xy}$

(c) $h(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$

2. Calculer également (si possible

(a) $df(\mathbf{x}_0)$, $dg(\mathbf{x}_0)$, $dh(\mathbf{x}_0)$.

(b) $df(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$, $dg(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$ et $dh(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$ pour

- i. $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$
 - ii. $\mathbf{x}_0 = (0, \pi/2)$
 - iii. $\mathbf{x}_0 = (x, y); x \neq y, \mathbf{h} = (2, 1); \mathbf{h} = (3, 0)$
3. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{si } (x, y) = \mathbf{0} \end{cases}$$

Démontrer que la fonction f admet des dérivées partielles au point $\mathbf{0}$ et les calculer. La fonction est-elle différentiable au point $\mathbf{0}$.

4. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $g(x, y) = (x + y, x - y)$. Etudier la différentiabilité de g . Calculer $dg(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$, $dg(\mathbf{x}_0, (1, 2))$
5. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \sin(x^2 - y^2) \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : g(x, y) = (x + y, x - y)$$

- (a) Calculer les dérivées partielles de $f \circ g$ et la différentielle de $f \circ g$ au point (x, y)
 - (b) Calculer la matrice jacobienne de f et de g au point (x, y)
 - (c) Calculer la différentielle de g au point (x, y)
6. Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \rightarrow (x + y^2, xy^2z)$ est différentiable au point en tout point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice jacobienne de f au point (x, y, z) .

3.13 Fonctions inverses (optionnel)

3.13.1 Le théorème de l'inverse local

Soit l'application linéaire¹,

$$u : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

Elle se représente par une matrice

$$U = (u_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$$

où

$$u_{ij} = \pi_i(u(e_j)).$$

Autrement dit

$$u_i(x) = \sum_{j=1}^p u_{ij} x_j.$$

Cette application linéaire est inversible si et seulement si la matrice U est inversible. Ce qui revient à dire que quelque soit le vecteur $\mathbf{b}$, le système à p équation à p inconnues :

$$\sum_{j=1}^p u_{ij}x_j = b_i, \quad (1 \leq i \leq p)$$

ou sous forme matricielle

$$u(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

possède une solution unique. Considérons un système de p équations non linéaire à p inconnues :

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

ou

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_p) = b_i, \quad (1 \leq i \leq p)$$

Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage d'un point $\mathbf{x}_0$ et que $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{b}_0$. L'équation $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ peut alors s'écrire

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{b} - \mathbf{b}_0$$

ou

$$df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + E(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - \mathbf{b}_0.$$

Une approximation linéaire de l'équation proposée est donnée par

$$df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{b} - \mathbf{b}_0.$$

Comme la fonction linéaire

$$df(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$$

est représentée par la matrice jacobienne

$$\mathcal{J}(f, \mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) \right)_{1 \leq i, j \leq p},$$

on peut aussi écrire l'équation linéaire approchée sous la forme

$$\mathcal{J}(f, \mathbf{x}_0) = \mathbf{b} - \mathbf{b}_0.$$

L'équation linéaire approchée possède donc pour chaque p une solution unique en $\mathbf{x}$ si et seulement si la matrice jacobienne $\mathcal{J}(f, \mathbf{x}_0)$ est inversible et donc si et seulement si le déterminant

$$\det \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) \right)_{(1 \leq i \leq p)} \right)$$

n'est pas nul. Ce déterminant s'appelle le jacobien de f en $\mathbf{x}_0$. On le note $J(f, \mathbf{x}_0)$.

Pourrait-on espérer que l'équation elle-même possède une solution unique si c'est le cas de l'équation linéaire approchée ?

Globalement la réponse à cette question est négative. Considérons par exemple la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suggérée par la figure. La matrice jacobienne en x_0 se réduit ici au seul réel $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ qui n'est pas nul et pourtant :

1. l'équation $f(x) = b$ n'a pas nécessairement de solution ; pour aucun réel x , on $f(x) = b_1$;
2. si l'équation a une solution, elle n'est pas nécessairement unique ; on a par exemple $f(x_0) = f(x_1) = b_0$. Pourtant localement la réponse à la question posée plus haut est positive. On peut trouver un voisinage U_{x_0} de x_0 et un voisinage V de b_0 tel que la fonction f applique U_{x_0} dans V , il existe un et un seul x de U_{x_0} tel que $f(x) = b$.

En outre la fonction réciproque

$$f^{-1} : V \rightarrow U_{x_0}$$

est encore dérivable.

Voici un théorème important qui nous admettons pour le moment sans démonstration qui resume ces observations.

Theorem 3.13.1 (Théorème de l'inverse local) Soit A un ouvert $\mathbb{R}^p$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $\mathbf{x}_0 \in A$, $\mathbf{b}_0 = f(\mathbf{x}_0)$. Supposons que $df(\mathbf{x}_0)$ soit inversible, autrement dit que

$$J(f, \mathbf{x}_0) = \det \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) \right) \right) \neq 0.$$

Alors, il existe U voisinage de $\mathbf{x}_0$ et V voisinage de $\mathbf{b}_0$ tels que induise une bijection de U sur V dont la réciproque

$$f^{-1} : V \rightarrow U$$

soit de classe $\mathcal{C}^1$. En outre,

$$df^{-1}(\mathbf{b}) = (df(\mathbf{x}))^{-1}.$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$), alors f^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^k$.

Remarque 3.13.2 Le théorème précédent est simplement local. Même si $df(\mathbf{x})$ est inversible pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, il peut se faire que l'inverse "global" n'existe pas. Considérons par exemple la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \rightarrow (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

On a

$$J(f, (x, y)) = \det \begin{pmatrix} e^x \cos y & e^x \sin y \\ -e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} = e^x$$

qui ne s'annule jamais. Pourtant f n'est pas une bijection globale : elle n'est pas injective, par exemple $f(x, y) = f(x, y + 2\pi)$.

Dans la situation du théorème précédent, on sait que

$$f : U \rightarrow V$$

est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ dont la réciproque $g = f^{-1}$

$$g : V \rightarrow U$$

est également de classe $\mathcal{C}^1$. Mais cela ne permet pas toujours de calculer explicitement $g(y)$ pour y quelconque dans V . Heureusement, souvent on s'intéresse en fait aux dérivées partielles de g et pour trouver celles-ci, il n'est pas indispensable d'avoir une formule explicitant g . En effet, on a

$$g \circ f = \text{id}_U$$

donc la matrice jacobienne de $g \circ f$ est la matrice unité

$$\mathcal{E} = (\delta)_{ij}.$$

On a donc, pour $y = f(x)$

$$\mathcal{J}(g, \mathbf{y}) \cdot \mathcal{J}(f, \mathbf{x}) = \mathcal{E}$$

ou encore

$$\sum_{k=1}^p \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(\mathbf{y}) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = (\delta)_{ij}$$

et il suffit de résoudre ce système pour avoir une information sur les $\frac{\partial g_i}{\partial y_k}$.

Exemple 3.13.3 Si $y = f(x) = x + \sin x$ est si l'inverse au voisinage de 0 est noté $x = \phi(y)$, on a

$$\frac{\phi}{\partial y}(0) \frac{df}{dx}(0) = 1$$

et donc $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{2}$.

Exercice 3.13.4 1. Déterminer les points $\mathbf{x}_0$ au voisinage duquel le système $y_1 = x_1^2 + x_2^2$, $y_2 = x_1 x_2$ peut être résolu pour $\mathbf{x}$. Calculer explicitement cette solution.

2. Déterminer les points $\mathbf{x}_0$ au voisinage duquel le système

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ y_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \\ &\vdots \\ y_n &= x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n \end{aligned}$$

peut être résolu pour $\mathbf{x}$.

3. Montrer que si la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est inversible, le système d'équations

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + \epsilon x_1^2 + bx_2 \\ y_2 = cx_1 + dx_2 + \epsilon x_2^2 \end{cases}$$

peut être résolu pour $\mathbf{x}$ près de l'origine. Obtenir la solution explicite dans le cas où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Spécifier les points $\mathbf{y}$ pour lesquels la obtenue solution est valable. Qu'arrive-t-il lorsque ϵ tend vers 0 ?

4. Montrer que le système

$$y_1 = x_3 \cos x_1 x_2 \quad y_2 = x_3 \sin x_1 x_2 \quad y_3 = x_1 + x_3$$

peut être résolu pour $\mathbf{x}$ au voisinage de tout point $\mathbf{x}_0$ tel que $x_{0,1}x_{0,3} \neq 0$. Calculer les dérivées partielles au point $\mathbf{y}_0$ des fonctions obtenues lorsque $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 1)$.

3.14 Théorème de fonctions implicites

Soit la fonction

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \rightarrow F(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Si on s'intéresse à l'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $F(x, y) = 0$, on dira qu'une fonction $y = f(x)$ est une 'explicitation' de l'équation $F(x, y) = 0$ si $F(x, y(x)) = 0$ pour tout x du domaine de définition de f . On n'est a priori assuré ni de l'existence ni de l'unicité d'une telle explicitation. Dans l'exemple cité il n'existe pas de solution définie au voisinage de $x_0 = 1$ ou de $x_0 = -1$; par contre, au voisinage de $x = 0$, il ya deux solutions $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ et $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

En général, considérons une fonction

$$F : \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow F(x, y)$$

et la relation

$$F(x, y) = 0$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^p$. Le problème qui se pose est de trouver les $y_1, y_2, \dots, y_p$ en fonction des $x_1, x_2, \dots, x_n$ de sorte que $F(x, y) = 0$. On admet le théorème suivant sans démonstration.

Theorem 3.14.1 (Théorème des fonctions implicites) Soit A un ouvert et $F : A \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ un point de A . si

1. $F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$,
2. la matrice des dérivées partielles des F_i par rapport aux y_i :

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right)$$

est inversible, alors il existe un voisinage U de $\mathbf{a}$ dans $\mathbb{R}^n$ et un voisinage V de $\mathbf{b}$ dans $\mathbb{R}^p$ tels qu'il existe une et une seule fonction

$$f : U \rightarrow V$$

avec

1. $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$
2. $F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0$ pour tout $\mathbf{x}$ de U .

Cette fonction est classe $\mathcal{C}^1$. Si, en outre, F , est de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$), la fonction f est aussi de classe $\mathcal{C}^k$.

Example 3.14.2 Indiquons pour application un simple calcul de dérivées partielles de f . Prenons dans le théorème précédent $p = 1$ et considérons la relation

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = 0,$$

où

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ avec $F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$. Il existe une fonction f définie et de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $\mathbf{a}$ dans $\mathbb{R}^n$ avec

$$F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0.$$

On a

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i} F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) + \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = 0$$

et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}.$$

Exercice 3.14.3 Justifier les réponses

1. On considère l'équation

$$x_1 x_2 - x_3 \log x_2 + e^{x_1 x_2} - 1 = 0$$

au voisinage du point $(0, 1, 2)$. Peut-on l'y résoudre pour x_1 ? pour x_2 ? pour x_3 ?

2. On considère le système d'équations

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

au voisinage du point $(1, 0, 0)$ Quelles variables peut-on y éliminer?

3. On considère le système d'équations

$$x_1^2 - 2x_2 x_4 + x_3^2 = 0, \quad x_1^3 - x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0$$

au voisinage du point $(-1, 1, 1, 1)$. Vérifier que l'on peut l'y résoudre pour x_1 et x_3 et calculer les dérivées partielles

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2}, \frac{\partial x_1}{\partial x_4}, \frac{\partial x_3}{\partial x_2}, \frac{\partial x_3}{\partial x_4}$$

4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(\mathbf{x}_0) = 0$ et que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) \frac{\partial f}{\partial x_3}(\mathbf{x}_0) \neq 0$$

alors l'équation $f(\mathbf{x}) = 0$ détermine chaque variable x_j comme fonction de deux autres au voisinage du point $\mathbf{x}_0$. Montrer que

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_1} = -1$$

3.15 Extremas des fonctions de plusieurs variables

Test pour les valeurs extrêmes

(1) Recherche de points critiques et des point frontaliers.

Une fonction continue $z = f(x, y)$ atteint un maximum absolu and un minimum absolu sur toute région fermée, bornée R sur lequel elle est définie. En

plus, comme nous allons le montrer plus tard, ces valeurs et comme d'autres minima et maxima relatifs ne peuvent être atteints que sur

(i) un point frontalier de R ,

(ii) points intérieurs de R en lequel $f_x = f_y$, ou les points en lesquels f_x ou f_y n'existent pas. (ce point sont appelés points critiques de f .) Le plus souvent il n'existe qu'un nombre limité de tels points, ainsi nous pouvons évaluer f en tous ces points choisir les plus grandes et plus petites valeurs. Aucun test n'est requis si nous souhaitons trouver le minimum et le maximum absolu.

(2) S'il n'y a pas de points frontaliers alors on cherche les points critiques.

Une fonction $z = f(x, y)$ définie dans une région R sans points frontaliers (par exemple l'intérieur d'un disque, d'un triangle, ou d'un rectangle, un quadrant moins les axes, ou le plan tout entier) ne peut avoir aucun maximum ou minimum relatif sur R . Cependant s'il en a, ils doivent apparaître aux points de R où

$$f_x = f_y = 0$$

ou en un des points où l'une ou les deux dérivées n'existent pas (comme avec $z = \sqrt{x^2 + y^2}$) au point $(0, 0)$.

(3) un test de dérivée seconde peut être appliqué aux points intérieurs où $f_x = f_y = 0$ et les dérivées partielles de f d'ordre un et deux sont continues.

Le fait que $f_x = f_y = 0$ en un point intérieur (a, b) ne garantit pas que f aura une valeur extrême en ce point. Il y a cependant un test de la dérivée seconde qui peut aider à identifier le comportement de f au point (a, b) . Cela se fait de la façon suivante : Si $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$, alors

(a) f a un maximum relatif au point (a, b) si $f_{xx} < 0$ et $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ au point (a, b) ,

(b) f a un minimum relatif au point (a, b) si $f_{xx} > 0$ et $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ au point (a, b) ,

(c) f a un point selle à (a, b) si $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ au point (a, b) ,

(d) le test est sans conclusion au point (a, b) si $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ à (a, b) . Nous devons trouver un autre moyen de déterminer le comportement de f à (a, b) .

L'expression

$$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \quad (3.26)$$

s'appelle le discriminant de f qui peut aussi s'écrire sous forme d'un déterminant.

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

3.16 Une technique plus général de l'étude de valeurs extrêmes d'une fonction de plusieurs variables

Une autre manière de voir la même chose que ci-dessus est de se servir du développement de Taylor. Nous allons d'abord voir cela pour le cas d'une fonction d'une variable et étendre cela au cas d'une fonction de deux variables ou plusieurs variables.

3.17 Points stationnaires à l'aide du développement de Taylor : cas d'une fonction d'une variable.

Soit f une fonction numérique continue est différentiable autant de fois que l'on veut. Le développement de Taylor (voir chapitre précédent) dans le voisinage du point $x = a$ est

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{1}{2!}(x - a)^2 f''(a) + \cdots . \quad (3.27)$$

Le point $x = a$ est un point stationnaire ou point critique de $f(x)$ si :

$$f'(a) = 0.$$

Le point stationnaire $x = a$ est un maximum local ou un minimum local selon que

$$f''(a) < 0 \quad \text{or} \quad f''(a) > 0.$$

Si $f''(a) = 0$, il est nécessaire de regarder les termes d'ordre supérieur dans 3.27 pour déterminer la nature du point stationnaire $x = a$. Pour comprendre le besoin du mot local en relation avec le point maximum ou minimum dessiner le graphique de la fonction

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Nous voyons que $f(x)$ a un point maximum local dans l'intervalle $[1, 2]$, qui n'est pas certainement un maximum absolu ou global de $f(x)$, puisque $f(x) \rightarrow \infty$ quand $x \rightarrow \infty$. Similairement pour le minimum local dans $[2, 3]$. (le vérifier).

3.18 Extension du développement de Taylor au cas de plusieurs variables

Nous allons illustrer en développant $f(a+h, b+k)$ comme une série de puissances de h et k jusqu'aux termes quadratic en h et k . Le développement de Taylor en une variable donne les résultats suivants :

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a, b+k) + h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b+k) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b+k) \\ f(a, b+k) &= f(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(a, b+k) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b+k) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \end{aligned}$$

toutes à la précision requise. ces résultats donnent facilement le développement :

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a, b) + h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Il devient donc claire comment á partir de ce point

1. nous allons développer $f(a+h, b+k)$ au delà d'ordre deux et
2. comment traiter le cas avec n variables, $n > 2$.

3.18.1 Fonction de n variables indépendantes

Considérons le point $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ sur $z = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Nous allons chercher les conditions sous lesquelles le point $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ est un stationnaire de la fonction $z = f(\mathbf{x})$.

Nous commençons avec le cas $n = 2$. L'équation $z = f(x, y)$ en coordonnées cartésiennnes (x, y, z) donne la cote (hauteur) z de la surface qu'elle décrit au dessus du point (x, y) dans le plan $z = 0$. Nous devons déterminer les conditions sous lesquelles $(x, y) = (a, b)$ est un point stationnaire de la surface pour lequel $z = c = f(a, b)$ est une valeur stationnaire. Ces conditions doivent assurés que :

$$\begin{aligned} z = c &= f(a + \delta a, b + \delta b) \\ &= f(a, b) + \left(\delta a \frac{\partial f}{\partial x} + \delta b \frac{\partial f}{\partial y} \right) (a, b) \end{aligned} \quad (3.29)$$

est satisfaite pour tous les points $(a + \delta a, b + \delta b)$ dans un voisinage de (a, b) , comme

ceci doit être satisfait pour les valeurs arbitrairement petites de δa et δb on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \text{au point } (x, y) = (a, b)$$

et on retrouve les conditions qu'il faut pour que $z = f(x, y)$ ait une valeur stationnaire $f(a, b)$ au point $(x, y) = (a, b)$. Il est évident que les conditions sous lesquelles $\mathbf{x} = \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ est un point stationnaire de $z = f(\mathbf{x})$ peuvent être donnée sous la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0, \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{at } \mathbf{x} = \mathbf{a}. (*)$$

Aussi $f(\mathbf{a})$ est la valeur stationnaire de f au point stationnaire $\mathbf{x} = \mathbf{a}$. On peut aussi écrire la condition (*) sous la forme :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f = 0, \quad \text{ou} \quad \nabla f = 0.$$

3.18.2 De la nature des points stationnaires

Ici nous allons utiliser une généralisation du développement de Taylor 3.29

$$z = f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \xi_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) + \dots, \quad \xi = \mathbf{x} - \mathbf{a}.$$

Définissons la matrice Hessienne $H(\mathbf{a})$ de f au point $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ comme étant

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}).$$

Cette matrice est symétrique, et ainsi, dans le voisinage du point $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i H_{ij} \xi_j = f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2!} \xi^T H \xi \\ &= f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2!} \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \eta_{\alpha}^2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Les λ_{α} sont les valeurs propres de $H(\mathbf{a})$ et les η_{α} sont les coordonnées par rapport à l'origine $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, avec les vecteurs propres de $H(\mathbf{a})$ pris comme axes des coordonnées. Nous avons utilisé ici le résultat de la diagonalisation de la forme quadratique $\xi^T H \xi$.

Si $\lambda_{\alpha} \neq 0$ pour tout α , nous pouvons énoncer le résultat général suivant :

Le point $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ est un point stationnaire non dégénéré. Dans ce cas

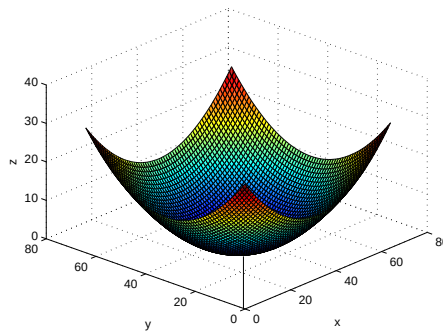
- (a) si tous les $\lambda_\alpha > 0$, $\mathbf{a}$ est un point minimum (local) de f
- (b) si tous les $\lambda_\alpha < 0$, $\mathbf{a}$ est un point maximum (local) de f
- (c) autrement, $\mathbf{a}$ est un point selle de f .

Les tests en action

Nous allons examiner quelques exemples pour montrer comment ces tests fonctionnent. Après nous allons montrer pourquoi la condition $f_x = f_y = 0$ est une condition nécessaire pour avoir une valeur extrême en un point intérieur du domaine d'une fonction différentiable.

Exemple 3.18.1 Trouver les valeurs extrêmes de

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$



Solution : Le domaine de f n'a pas de point frontaliers car il consiste au plan tout entier. Les dérivées $f_x = 2x$ et $f_y = 2y$ existent partout. Donc, le maxima et minima relatif de f peuvent apparaître aux endroits où

$$f_x = 2x = 0 \quad \text{et} \quad f_y = 2y = 0.$$

La seule possibilité c'est l'origine, i.e.

$$x = 0 \quad y = 0$$

ou la valeur de f est zéro.

$$f(0, 0) = 0$$

Puisque f n'est jamais négatif nous voyons que zero est un minimum absolu. Nous n'avons pas eu besoin du test de la dérivée seconde. Si nous l'avions utilisé nous

aurions eu

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = 0$$

et

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 4 > 0$$

identifiant $(0, 0)$ comme un minimum relative.

Utiliser la matrice hessienne pour arriver à la même conclusion.

Exemple 3.18.2 Trouver les valeurs extrêmes de la fonction

$$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4.$$

Solution : La fonction est définie et différentiable pour tout x et y et alors possède des valeurs extrêmes seulement aux points où f_x et f_y sont simultanément zero. Ceci conduit à

$$f_x = y - 2x - 2 = 0, \quad f_y = x - 2y - 2 = 0,$$

or

$$x = y = -2.$$

Ainsi donc, le point $(-2, -2)$ est le seul point où f peut avoir une valeur extrême. Pour voir si c'est le cas, nous calculons

$$f_{xx} = -2, \quad f_{yy} = -2, \quad f_{xy} = 1.$$

Le discriminant de f au point $(-2, -2)$ est

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 3.$$

La combinaison

$$f_{xx} < 0 \quad \text{et} \quad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

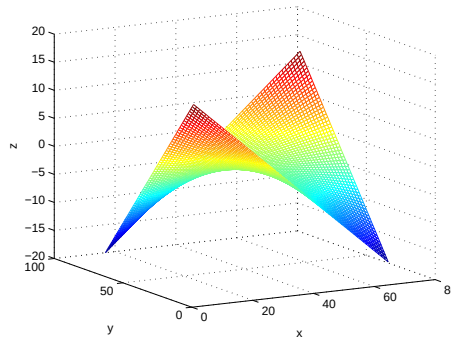
nous dit que f a un maximum relatif au point $(-2, -2)$. La valeur de f au point $(-2, -2)$ est $f(-2, -2) = 8$.

Utiliser la matrice hessienne pour arriver à la même conclusion.

Exemple 3.18.3 Trouver les valeurs extrêmes de la fonction

$$f(x, y) = xy.$$

Solution : Puisque la fonction est différentiable partout et que son domaine n'a pas de points frontaliers, la fonction ne peut avoir des valeurs extrêmes qu'aux



points qui sont tels que :

$$f_x = y = 0 \quad \text{et} \quad f_y = x = 0.$$

Donc l'origine est le seul point où f peut avoir une valeur extrême. Pour voir ce qui se passe en ce point, nous calculons

$$f_{xx} = 0, \quad f_{yy} = 0, \quad f_{xy} = 1.$$

Le discriminant

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -1.$$

est négative. Par conséquent la fonction a un point selle à $(0, 0)$. Nous concluons que $f(x, y) = xy$ n'a pas de valeurs extrêmes.

Si nous restreignons le domaine de f au disque $x^2 + y^2 < 1$, alors le maximum de f est $+\frac{1}{2}$ et le minimum est $-\frac{1}{2}$ (le montrer en exercice, passez en coordonnées polaires).

Utiliser la matrice hessienne pour arriver à la même conclusion.

Exemple 3.18.4 Trouver le maximum absolu et les valeurs minimales de la fonction

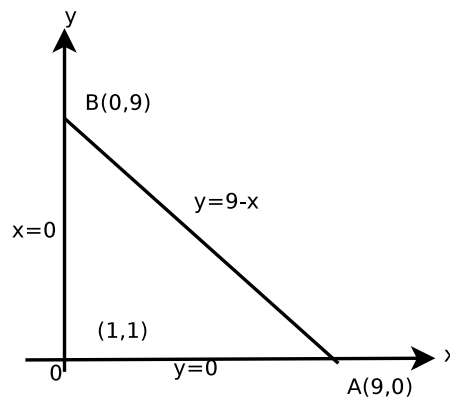
$$f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$

sur le triangle plat du premier quadrant borné par les droites $x = 0$, $y = 0$, $y = 9 - x$.

Solution : Les seuls endroits que f peut avoir ces valeurs sont les points sur la frontière du triangle et les points intérieurs en lesquels $f_x = f_y = 0$.

Points intérieurs. Pour ces points nous avons

$$\begin{aligned} f_x &= 2 - 2x = 0, \\ f_y &= 2 - 2y = 0, \end{aligned}$$



ou

$$(x, y) = (1, 1),$$

où

$$f(1, 1) = 4.$$

Points frontaliers.

1. Sur le segment OA , $y = 0$. La fonction

$$f(x, y) = f(x, 0) = 2 + 2x - x^2$$

peut être maintenant considérée comme une fonction d'une variable réelle x définie sur l'intervalle fermé $0 \leq x \leq 9$. Ces valeurs extrêmes peuvent avoir lieu aux extrémités

$$x = 0 \quad \text{où} \quad f(0, 0) = 2$$

$$x = 9 \quad \text{où} \quad f(9, 0) = -61$$

et aux points intérieurs où

$$f'(x, 0) = 2 - 2x = 0.$$

Le seul point intérieur où $f'(x, 0) = 0$ est $x = 1$, où

$$f(x, 0) = f(1, 0) = 3.$$

2. Sur le segment OB , $x = 0$ et

$$f(x, y) = f(0, y) = 2 + 2y - y^2$$

A partir de la symétrie de f par rapport à x et y et à partir de l'analyse précédente, que les candidats sur ce segment sont

$$f(0, 0) = 2, \quad f(0, 9) = -61, \quad f(0, 1) = 3.$$

3. Nous avons déjà considéré les valeurs de f aux extrémités du segment AB . Nous allons donc examiner les points intérieurs de AB . Avec

$$y = 9 - x$$

nous avons

$$(f(x, y) = 2 + 2x + 2(9 - x) - x^2 - (9 - x)^2 = -61 + 18x - 2x^2.$$

Posant

$$f' = 18 - 4x = 0$$

donne

$$x = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

à cette valeur de x

$$y = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2},$$

et

$$f(x, y) = -\frac{41}{2}.$$

Résumé : Nous examinons tous les candidats

$$4, \quad 2, \quad -61, \quad 3, \quad -\frac{41}{2}.$$

Le maximum est 4, qui est atteint pour f en $(1, 1)$. Le minimum est -61 qui es atteint pour f aux points $(0, 9)$ et $(9, 0)$.

Utiliser la matrice hessienne pour arriver à la même conclusion.

Example 3.18.5 Déterminer les extremums locaux et points-selle de f définie par

$$f(x, y) = (1/3)x^3 + (4/3)y^3 - x^2 - 3x - 4y - 3.$$

Solution : Les dérivées partielles de f sont :

$$f'_x(x, y) = x^2 - 2x - 3 \quad \text{et} \quad f'_y(x, y) = 4y^2 - 4.$$

Puisque f'_x et f'_y sont définies quelque soit (x, y) , les seuls points critiques possibles sont les solutions du système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ 4y^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

La solution de ce système apporte les quatres points critiques $(3, 1)$, $(3, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$. Les dérivées partielles secondes de f sont :

$$f''_{xx}(x, y) = 2x - 2, \quad f''_{xy}(x, y) = 0, \quad f''_{yy}(x, y) = 8y$$

conduisent au discriminant

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (2x - 2)(8y) - (0)^2 = 16y(x - 1).$$

Discussion :

(1) Point critique $(3, 1)$

$D(3, 1) = 32 > 0$ et $f''_{xx}(3, 1) = 4 > 0$, donc $f(3, 1) = -(44/3)$ est un minimum local.

(2) Point critique $(3, -1)$

$D(3, -1) = -32 < 0$ et $(3, -1, f(3, -1))$ est un point selle.

(3) Point critique $(-1, 1)$

$D(-1, 1) = -32 < 0$ et $(-1, 1, f(-1, 1))$ est un point selle.

(4) Point critique $(-1, -1)$

$D(-1, -1) = 32 > 0$, et $f''_{xx}(-1, -1) = -4 < 0$, donc $f(-1, -1) = (4/3)$ est un maximum local.

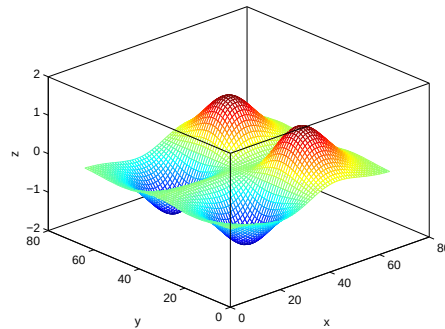
Exercice 3.18.6 (1) Soit R la région triangulaire de sommets $(-1, -1)$, $(7, -1)$ et $(7, 7)$. Rechercher sur cette région les valeurs extrêmes de f définie par $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$.

(2) La figure présente le graphique de

$$f(x, y) = xy^2 e^{-(x^2+y^2)/4}.$$

(a) Montrer qu'il ya une infinité des points critiques

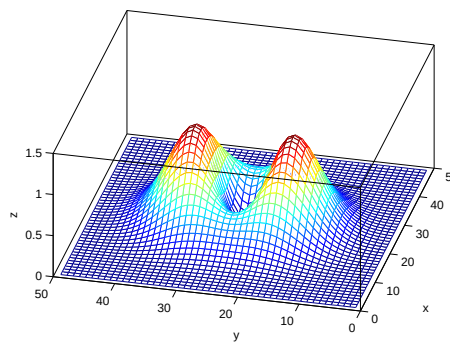
(b) Chercher les coordonnees des quatres points critiques mis en évidence dans la figure.



Exercice 3.18.7 Le graphique présente le graphique de

$$f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$$

Chercher les cinq points critiques et déterminé les extremums de f .



3.19 Les multiplicateurs de Lagrange

Position du problème :

Calculer le volume du plus grand parallépipède rectangle inscriptible à l'ellipsoïde

$$16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$$

et dont les faces soient parallèles aux plans de coordonnées.

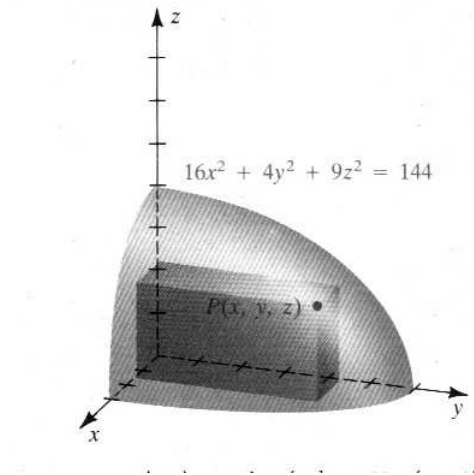
Solution :

Par symétrie, il suffit de limiter le problème au premier octant. Le volume du parallépipède dont un sommet en $P(x, y, z)$ est égal à $8xyz$. Il s'agit de trouver la valeur maximal de V soumise à la contrainte

$$16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0.$$

Après avoir résolu à z , nous l'introduisons dans l'expression

$$V = (8xyz)(1/3)\sqrt{144 - 16x^2 - 4y^2}.$$



Nous maintenant trouver les valeurs extrêmes de V selon les méthodes de la section 3.15. Cependant cette méthode peut être compliquées à causes de difficultés qu'il y'a dans les calculs des dérivées partielles et des points critiques. Une difficulté dans la méthode ci dessus est d'exiger de résoudre par à z . Souvent il n'est pas toujours possible de résoudre par à z . C'est pour cela que nous allons utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange, technique inventée par le mathématicien français Joseph Louis Lagrange (1736-1813).

Theorem 3.19.1 (Théorème de Lagrange) On suppose que f et g sont des fonctions de deux variables dont les dérivées partielles premières sont continues et que $\text{grad} g \neq 0$ sur une région du plan des xy . Si $f(x_0, y_0)$ est une valeur extrême de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$, il existe un nombre réel λ tel que

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \lambda \text{grad } g(x_0, y_0).$$

Démonstration : La courbe C est le graphique de $g(x, y) = 0$ dans le plan des xy . Sous ces conditions C admet une représentation paramétrique lisse

$$x = h(t) \quad y = k(t)$$

pour t dans un certain intervalle I . Le vecteur position d'un point $P(x, y)$ sur C s'écrit alors

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = h(t)\mathbf{i} + k(t)\mathbf{j},$$

et celui du point $P_0(x_0, y_0)$ en lequel a lieu l'extremum demandé de f

$$\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} = h(t_0)\mathbf{i} + k(t_0)\mathbf{j}.$$

Soit F la fonction d'une variable t définie par

$$F(t) = f(h(t), k(t)).$$

Quand t varie dans I , $F(t)$ prend les valeurs de $f(x, y)$ pour (x, y) sur C ; autrement dit, $f(x, y)$ est soumis à la contrainte

$$g(x, y) = 0$$

Puisque $f(x_0, y_0)$ est une valeur extrême de f sous ces conditions, $F(t_0) = f(h(t_0), k(t_0))$ en est une de $F(t)$. Il est donc certain que $F'(t) = 0$. Par la règle de dérivation en chaîne donne

$$F'(t) = f'_x(x, y) \frac{dx}{dt} + f'_y(x, y) \frac{dy}{dt} = f'_x(x, y)h'(t) + f'_y(x, y)k'(t).$$

Donc, quand $t = t_0$,

$$0 = F'(t_0) = f'_x(x, y)h'(t_0) + f'_y(x, y)k'(t_0) = \mathbf{grad} f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}(t_0).$$

Ce qui implique que le vecteur $\mathbf{grad} f(x_0, y_0)$ est orthogonal à au vecteur $\mathbf{r}$ qui est tangent à la courbe C . Par ailleurs $\mathbf{grad} g(x_0, y_0)$ et aussi orthogonal $\mathbf{r}$ puisque C est une courbe de niveau de g . Dès lors $\mathbf{grad} f(x_0, y_0)$ et $\mathbf{grad} g(x_0, y_0)$ sont tous deux orthogonaux au même vecteur et sont donc parallèles ; cela s'écrit

$$\mathbf{grad} f(x_0, y_0) = \lambda \mathbf{grad} g(x_0, y_0), \quad (3.32)$$

pour un certain λ qui est appelé multiplicateur de Lagrange. En composante l'équation 3.32 s'écrit :

$$f'_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f'_y(x_0, y_0)\mathbf{j} = \lambda g'_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + g'_y(x_0, y_0)\mathbf{j}.$$

Corollary 3.19.2 (énoncé non vectoriel du théorème de Lagrange)

Les points en lesquels une fonction f de deux variables admet une valeur extrême sous la contrainte $g(x, y) = 0$ figurent parmi les points (x, y) déterminés par les deux premières coordonnées des solutions (x, y, λ) du système des équations

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = \lambda g'_x(x, y) \\ f'_y(x, y) = \lambda g'_y(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

Le corollaire 3.19.2 apporte d'abord toutes les solutions

$$(x_1, y_1, \lambda_1), (x_2, y_2, \lambda_2), (x_3, y_3, \lambda_3), \dots$$

Les points de maximum ou de minimum de f se trouvent parmi

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$$

Les multicateurs de Lagrange $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ sont écartés des solutions (x_k, y_k, λ_k) . Ensuite chaque point est examiné séparément afin de déterminer si $f(x_k, y_k)$ est un maximum local, un minimum local ou aucun d'eux.

Exemple 3.19.3 Déterminer les extremums de $f(x, y) = xy$ si (x, y) doit appartenir à l'ellipse $4x^2 + y^2 = 4$.

Solution : La contrainte ici est $g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$. L'équation $\mathbf{grad} f(x, y) = \lambda \mathbf{grad} g(x, y)$ s'écrit :

$$y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = \lambda(8x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}).$$

Le système d'équations du corollaire 3.19.2 qui en découle est

$$\begin{cases} y &= 8x\lambda \\ x &= 2y\lambda \\ 4x^2 + y^2 - 4 &= 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

On peut résoudre ce système de plusieurs manières. Portons la première équation dans la deuxième équation on a :

$$x = 2(8x\lambda)\lambda = 16x\lambda^2.$$

ou encore

$$x(1 - 16\lambda^2) = 0.$$

Cette équation est satisfaite si $x = 0$ ou $\lambda = \pm(1/4)$.

Si $\lambda = \pm(1/4)$,

$$y = 8x\lambda = 8x(\pm(1/4)) \text{ ou } y = \pm 2x.$$

Portant cette équation dans $4x^2 + y^2 - 4 = 0$, qui donne

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } y = \pm \sqrt{2}.$$

$f(x, y)$ passe par les valeurs maximale 1 en $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$ et par la valeur minimale -1 en $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2})$.

Exercice 3.19.4 (1) Étendre le théorème de Lagrange au cas de fonctions de trois variables.

(2) Appliquer le résultat en (1) pour trouver le volume du plus grand parallélépipède inscrit à l'ellipsoïde $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$ et dont les faces soient parallèles aux plans de coordonnées.

Solution pour (1) : En appliquant le résultat on aboutit au système :

$$\begin{cases} 8yz = 32x\lambda \\ 8xz = 8y\lambda \\ 8xy = 18z\lambda \\ 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

En addition les trois équations et tenant compte de la contrainte on a :

$$xyz = 12\lambda.$$

Terminer.

- (3) Quel est le point du plan $2x + 3y + 4z = 12$ qui fait passer $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 5z^2$ par sa plus petite valeur ?

Reponse : $(5/11, 30/11, 8/11)$

- (4) Étendre le théorème de Lagrange faisant intervenir plus d'une constante. Soit à chercher les extremums de $f(x, y, z)$ sous les deux contraintes

$$g(x, y, z) = 0 \text{ et } h(x, y, z) = 0.$$

En un point d'extremum sous ces deux contraintes doit être satisfaite l'équation

$$\mathbf{grad} f(x, y, z) = \lambda \mathbf{grad} g(x, y, z) + \mu \mathbf{grad} h(x, y, z)$$

pour certain λ et μ .

- (5) Le paraboloïde $2z = 16 - x^2 - y^2$ et le plan $x + y = 4$ se coupant dans le premier octant suivant une courbe C . Quel est le point de C le plus proche de l'origine, le plus éloigné de l'origine.

Solution : La distance qui sépare un point quelconque de l'origine est

$$d(0, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Le problème revient à chercher les valeurs extrêmes de

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sous les deux contraintes

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z - 16 = 0$$

$$h(x, y, z) = x + y - 4 = 0$$

Il faut considérer

$$\mathbf{grad}(x^2 + y^2 + z^2) = \lambda \mathbf{grad}(x^2 + y^2 + 2x - 16) + \mu \mathbf{grad}(x + y - 4).$$

Ce qui conduit au système d'équations :

$$\begin{cases} 2x = 2x\lambda + \mu \\ 2y = 2y\lambda + \mu \\ 2z = 2\lambda \\ x^2 + y^2 + 2z - 16 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

Si on retranche la deuxième équation de la première équation on aboutit à $\lambda = 1$ ou $x = y$ et qui nous conduit à $z = 1$.

Si $z = 1$ et ensemble avec la troisième et la dernière équation on obtient que

$$x = 2 + \sqrt{3}, \quad y = 2 - \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x = 2 - \sqrt{3}, \quad y = 2 + \sqrt{3}$$

les deux points correspondants de C sont

$$P_1(2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}, 1) \quad \text{et} \quad P_2(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}, 1)$$

et dont leur distance à l'origine vaut $d(O, P_1) = d(O, P_2) = \sqrt{15}$.

si $x = y$ et avec la dernière équation on a que $x = 2$ et conduit au point correspondant suivant $P_3(2, 2, 4)$ qui est à une distance $d(O, P_3) = 2\sqrt{6}$, (faites ces calculs).

Exercice 3.19.5 1. Pour les surfaces si dessous trouver le maximum, minimum et les points selle. Calculer la valeur de la fonction en ces points critiques.

(a) $z = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$

(b) $z = x \sin y$

(c) $z = 4xy - x^4 - y^4$

(d) $z = 3x^2 - xy + 2y^2 - 8x + 9y + 10$

2. Trouver le maximum et le minimum absolu de la fonction $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ sur un triangle fermé du plan limité par les droite $x = 0$, $y = 2$, $y = 2x$ dans le premier quadrant.

3. Trouver le point critique de

$$f(x, y) = xy + 2x - \ln x^2 y$$

dans le premier quadrant ouvert ($x > 0, y > 0$) et montrer que f prend une valeur minimale en ce point.

4. Soit a et b deux constantes positives. Trouver les valeurs maximale et le minimal de la fonction

$$ax + by$$

sous contrainte

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Rép : $\sqrt{a^2 + b^2}, -\sqrt{a^2 + b^2}$

5. *La température T en chaque point (x, y, z) dans l'espace est $T = 400xyz^2$.
Trouver la température la plus élevée sur la sphère unité*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Chapitre 4

Intégrales Multiples

4.1 Intégrales Doubles

Definition 4.1.1 Soit f une fonction de deux variables définie sur une région R et soit $d = \{R_k\}$ un découpage intérieur de R . Une somme de Riemann de f relative à d est n'importe quelle somme de la forme

$$\sum_k f(u_k, v_k) \Delta A_k$$

où (u_k, v_k) est un point de R_k et ΔA_k l'aire de R_k . Le symbole de sommation porte sur toutes les sous-région $R_1, R_2, \dots, R_n$ de R .

Nous prenons la limite des sommes de Riemann quand $\|d\| \rightarrow 0$. Il est établi que si f est continue sur R , les sommes de Riemann de ci dessus s'approchent d'un nombre réel L quand $\|d\| \rightarrow 0$ et ce indépendamment du choix des points (u_k, v_k) dans R_k . Le nombre est l'intégrale double $\iint f(x, y) dA$.

Definition 4.1.2 Soit f une fonction de deux variables définie sur une région R et soit L un nombre réel. L'expression

$$\lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k f(u_k, v_k) \Delta A_k = L$$

signifie que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que si $d = \{R_k\}$ est un découpage intérieur de R de pas $\|d\| < \delta$,

$$\left| \sum_k f(u_k, v_k) \Delta A_k - L \right| < \epsilon$$

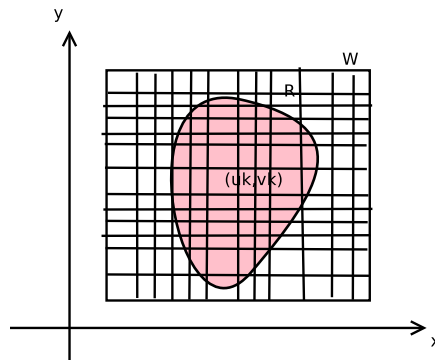
quelque soit (u_k, v_k) dans R_k .

Definition 4.1.3 Soit f une fonction de deux variables définie sur une région

R . L'intégrale double de f sur R , notée $\int \int_R f(x, y) dA$, est

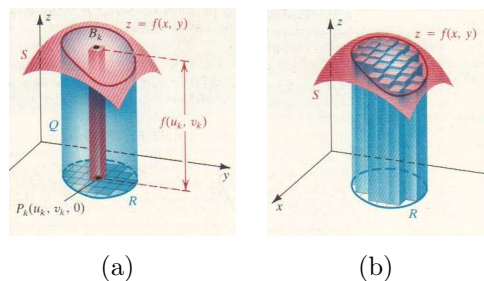
$$\int \int_R f(x, y) dA = \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k f(u_k, v_k) \Delta A_k$$

à condition que cette limite existe. Quand l'intégrale double de f existe sur R , on dit que f est intégrable sur R .



Interprétation : Les sommes de Riemann et l'intégrale jouissent d'une double interprétation géométrique intéressante dans le cas où f est continue et positive sur R . Désignons par S la surface représentative de f et par Q le solide limité par S , par le plan des xy et la surface cylindrique engendrée par les parallèles à l'axe des z qui s'appuient sur la frontière de R . Si $P_k(u_k, v_k, 0)$ est un point d'un élément d'aire R_k inclus dans R , $f(u_k, v_k)$ est la distance du plan des xy au point B_k sur S à la verticale de P_k . Le produit $f(u_k, v_k) \Delta A_k$ est alors égal au volume du prisme de base ΔA_k . La somme de tous ces prismes constitue une approximation du volume V de Q . Le volume V est défini comme la limite des sommes des nombres $f(u_k, v_k) \Delta A_k$ quand $\|d\|$ tend vers 0. Quand l'intégrale double de f existe sur R , on dit que f est intégrable sur R .

Definition 4.1.4 (Intégrale double comme un volume) Soit f une fonction de deux variables continues et positive pour tout (x, y) d'une région R . Le volume V du solide qui se trouve sous le graphique de $z = f(x, y)$ et au dessus de R est



$$V = \int \int_R f(x, y) dA$$

Theorem 4.1.5 *Propriétés de intégrales doubles.*

(1)

$$\int \int cf(x, y) dA = c \int \int f(x, y) dA \quad \text{quel que soit } c \text{ réel.}$$

(2)

$$\int \int [f(x, y) + g(x, y)] dA = \int \int_R f(x, y) dA + \int \int_R g(x, y) dA$$

(3) Si R est la réunion de deux régions R_1 et R_2 qui ne se chevauchent pas,

$$\int \int_R f(x, y) dA = \int \int_{R_1} f(x, y) dA + \int \int_{R_2} f(x, y) dA$$

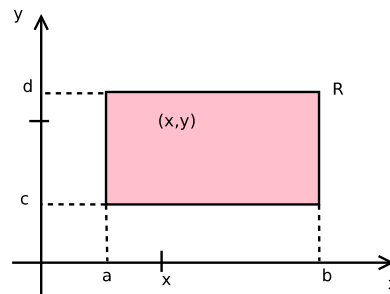
(4) Quand $f(x, y) \geq 0$ sur tout R ,

$$\int \int_R f(x, y) dA \geq 0.$$

Le calcul de l'intégrale double $\int \int_R f(x, y) dA$ se ramène à celui de deux intégrales simples successives quand R est une région de R_x et R_y . Dans le cas où R est une région rectangulaire, il est démontré que dans ce cas l'intégrale double $\int \int_R f(x, y) dA$ peut être calculée par intégrale itérée de la forme

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

On effectue en premier lieu l'intégrale entre crochets par rapport à y considérant



x comme constante. Après la substitution des bornes c et d à y , se présente une expression en x qui à tour est intégrée de a à b .

L'intégrale itérée

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dx \right] dy$$

est équivalente à la précédente.

Definition 4.1.6 1.

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

2.

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

Il est important de noter que la différentielle immédiatement à droite de $f(x, y)$ indique la variable de la première intégration partielle dont les bornes sont attachées au signe d'intégration immédiatement à gauche de $f(x, y)$. Lors du calcul d'une intégrale itérée, il faut donc s'occuper d'abord de l'intégrale intérieure.

Exemple 4.1.7 Calculer $\int_1^4 \int_{-1}^2 (2x + 6x^2y) dy dx$

Solution : La définition ci-dessus conduit aux calculs suivants :

$$\begin{aligned} \int_1^4 \left[\int_{-1}^2 (2x + 6x^2y) dy \right] dx &= \int_1^4 \left[2xy + 6x^2 \left(\frac{y^2}{2} \right) \right]_{-1}^2 dx \\ &= \int_1^4 [(4x + 12x^2) - (-2x + 3x^2)] dx \\ &= \int_1^4 (6x + 9x^2) dx \\ &= [3x^2 + 3x^3]_1^4 = 234 \end{aligned}$$

Exemple 4.1.8 Calculer $\int_{-1}^2 \int_1^4 (2x + 6x^2y) dx dy$

Solution :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \left[\int_1^4 (2x + 6x^2y) dx \right] dy &= \int_{-1}^2 \left[2 \left(\frac{x^2}{2} \right) + 6 \left(\frac{x^3}{3} \right) y \right]_1^4 dy \\ &= \int_{-1}^2 [(16 + 128y) - (1 + 2y)] dy \\ &= \int_{-1}^2 (126y + 15) dy \\ &= [63y^2 + 15y]_{-1}^2 = 234. \end{aligned}$$

Quand la fonction est continue il est donc légitime de changer l'ordre d'intégration.

Definition 4.1.9 Intégrales itérées.

1.

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

2.

$$\int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

Exemple 4.1.10 Calculer $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y) dy dx$

Solution : Utilisant la définition précédente on a :

$$\int_0^2 \left[\int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y) dy \right] dx = \int_0^2 \left[x^3 y + 4 \left(\frac{y^2}{2} \right) \right]_{x^2}^{2x} dx \quad (4.1)$$

$$= \int_0^2 [(2x^4 + 8x^2) - (x^5 + 2x^4)] dx \quad (4.2)$$

$$= \left[\frac{8}{3} x^3 - \frac{1}{6} x^6 \right]_0^2 = \frac{32}{3}. \quad (4.3)$$

Exemple 4.1.11 Calculer $\int_1^3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{y^2} 2y \cos x dx dy$

Solution : exercice.

Theorem 4.1.12 Théorème sur les intégrales doubles.

(1) Soit R une région du type R_x (voir figure (a)). Si f est continue sur R , alors

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

(2) Soit R une région du type R_y (voir figure (b)). Si f est continue sur R , alors

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

Une région R qui serait de forme compliquée devrait d'abord être subdivisée en sous-régions de type R_x et R_y sur chacune desquelles l'intégrale pourrait être calculée par une intégrale itérée.

On peut expliquer ce résultat de la façon suivante : considérons le cas $f(x, y) \geq 0$ sur une région de type R_x . Soit S le graphique de f , Q la région sous le graphique et au dessus de R telle que décrite précédemment et V le volume de Q . Par un point $(x, 0, 0)$ de l'intervalle $[a, b]$ sur l'axe des x , faisons passer un plan parallèle au plan des yz . Ce plan coupe S selon une courbe C et les frontières non rectilignes de R , $y = g_1(x)$ et $y = g_2(x)$, en $P_1(x, g_1(x), 0)$ et $P_2(x, g_2(x), 0)$. L'aire $A(x)$ de cette section est donnée par (voir première partie du cours) :

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy.$$

Puisque $A(x)$ est l'aire d'une section transversale de Q en fonction de x , le volume, de Q est donnée

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dydx.$$

Remarque : Avant de calculer une intégrale double par le théorème 4.1.12, il est **important** de dessiner la région R pour en déterminer les frontières. Cela va être illustrer par les exercices ci dessous à traiter en classe.

Exercice 4.1.13 (1) Soit R la région du plan de xy délimité par les graphiques de $y = x^2$ et $y = 2x$. Calculer $\int \int_R (x^3 + 4y)dA$.

(a) par le théorème 4.1.12(1) (b) par le théorème 4.1.12(2).

(2) Soit R la région délimitée par les graphiques des équations $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{3x - 18}$ et $y = 0$. En supposant que f soit une certaine fonction continue sur R , exprimer $\int \int_R f(x, y)dA$ sous forme d'intégrale itérée selon (a) le théorème 4.1.12(1) (b) le théorème 4.1.12(2).

(3) Calculer $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^6 y \cos x^5 dx dy$ après avoir changé l'ordre d'intégration.

(4) Calculer $\int_1^e \int_0^{\ln x} y dx dy$ après avoir changé l'ordre d'intégration.

4.2 Aire et Volume

On établit à la section précédente la formule

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dydx$$

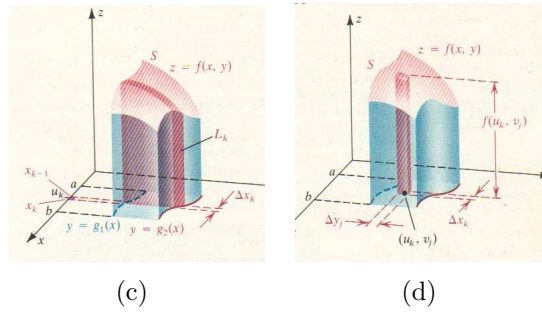
avec $A(x)$ l'aire d'une section transversale représentative du solide. Nous allons interpréter ce volume comme une limite de sommes doubles.

$$V = \int_a^b A(x)dx = \lim_{\|d'\| \rightarrow 0} \sum_k A(u_k) \Delta x_k$$

avec d' un découpage de l'intervalle $[a, b]$, u_k un point quelconque du k ème intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ de d' et $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Le volume d'une tranche L_k d'épaisseur Δx_k et comprise entre deux plans parallèles au plan de yz est approximativement égale à $A(u_k) \Delta x_k$

L'intégrale itérée $V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dydx$ peut s'exprimer comme une limite des sommes. Pour chaque x de $[a, b]$, on a :

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy = \lim_{\|d''\| \rightarrow 0} \sum_j f(x, v_j) \Delta y_j,$$



où d'' est un découpage de l'intervalle $[g_1(x), g_2(x)]$ de l'axe des des y , v_j un point quelconque du jème sous-intervalle $[y_{j-1}, y_j]$ de d'' et $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$. Dès lors, en chaque u_k de $[a, b]$,

$$A(u_k) = \lim_{\|d'\| \rightarrow 0} \sum_k f(u_k, v_j) \Delta y_j.$$

Donc

$$\begin{aligned} V = \int_a^b A(x) dx &= \lim_{\|d'\| \rightarrow 0} \sum_k A(u_k) \Delta x_k \\ &= \lim_{\|d'\| \rightarrow 0} \sum_k \left[\lim_{\|d'\| \rightarrow 0} \sum_k f(u_k, v_j) \Delta y_j \right] \Delta x_k \end{aligned}$$

Theorem 4.2.1

$$V = \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k \sum_j f(u_k, v_j) \Delta y_j \Delta x_k = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

avec la plus longue des diagonales des éléments d'aires qui servent de base aux prismes.

En posant $f(x, y) = 1$ l'expression du volume se réduit à l'aire de la surface délimitée par $f(x, y)$ et on a :

Theorem 4.2.2

$$A = \iint_R dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy dx = \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k \sum_j \Delta y_j \Delta x_k$$

Si R est une région de type R_x on a :

$$\begin{aligned}\iint_R dA &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy = \int_a^b [y]_{g_1(x)}^{g_2(x)} \\ &= \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] dx.\end{aligned}$$

Voici les étapes à suivre pour calculer l'aire d'une région R_x par une intégrale double

- (1) Dessiner la région et y mettre en évidence un élément d'aire représentatif de dimension dx et dy .
- (2) Ténant x fixé, considérer $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy$ comme un opérateur qui somme les éléments d'aires $dydx$ dans la direction de l'axe de y depuis la frontière inférieure jusqu'à la frontière supérieure. L'expression

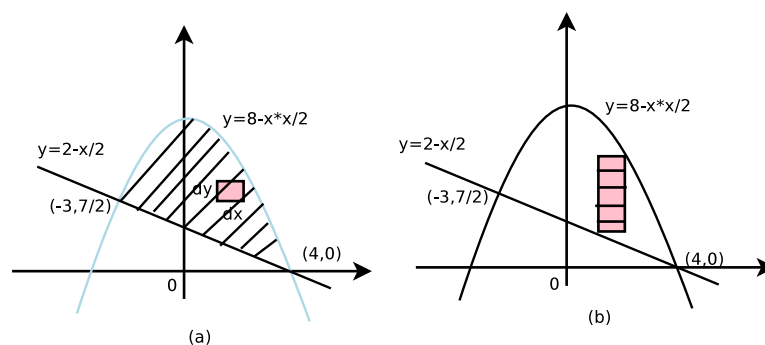
$$\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \right] dx$$

représente l'aire du rectangle verticale.

- (3) Appliquer l'opérateur $\int_a^b$ à $\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \right] dx$ prenant l'aire ainsi la limite des sommes des aires des rectangles verticaux de l'étape (2) depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$.

Exemple 4.2.3 Calculer l'aire de la région du plan des xy délimitée par les graphiques de $2y = 16 - x^2$ et $x + 2y = 4$

Solution : Faites un dessin pour le représenter la région et suivre les étapes pour aboutir à :



$$\begin{aligned}
A &= \int_{-3}^4 \int_{2-\frac{x}{2}}^{8-\frac{x^2}{2}} dy dx = \int_{-3}^4 [y]_{2-\frac{x}{2}}^{8-\frac{x^2}{2}} \\
&= \int_{-3}^4 \left[\left(8 - \frac{x^2}{2} \right) - \left(2 - \frac{x}{2} \right) \right] dx \\
&= \left[6x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} \right]_{-3}^4 = \frac{343}{12} \approx 28.6
\end{aligned}$$

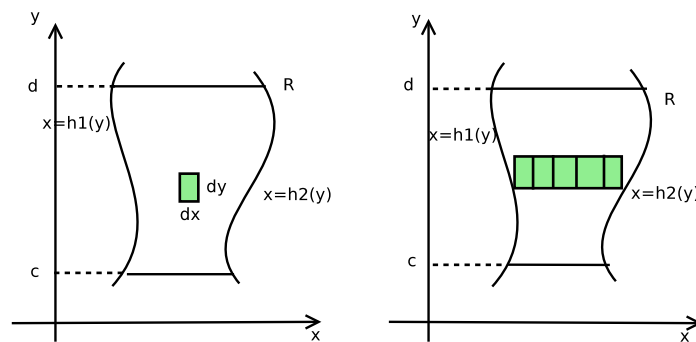
oici les étapes à suivre pour calculer l'aire d'une région R_y par une intégrale double

- (1) Dessiner la région et y mettre en évidence un élément d'aire représentatif de dimension dx et dy .
- (2) Ténant y fixé, considérer $\int_{h_1(y)}^{h_2(y)}$ comme un opérateur qui somme les éléments d'aires $dydx$ dans la direction de l'axe de x depuis la frontière inférieure jusqu'à la frontière supérieure. L'expression

$$\left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx \right] dy$$

représente l'aire du rectangle verticale.

- (3) Appliquer l'opérateur $\int_c^d$ à $\left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx \right] dy$ prenant l'aire ainsi la limite des sommes des aires des rectangles horizontaux de l'étape (2) depuis $y = c$ jusqu'à $y = d$.



Exemple 4.2.4 Calculer l'aire de la région du plan des xy délimitée par les graphiques de $x = y^3, x + y = 2$ et $y = 0$.

Solution : Dessiner d'abord la région R_y puis déterminer les frontières.

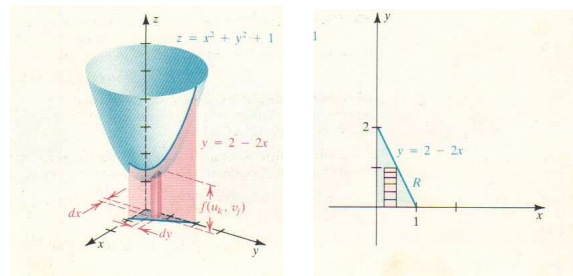
$$\begin{aligned}
A &= \int \int_R dA = \int_0^1 \int_{y^3}^{2-y} dx dy = \int_0^1 [x]_{y^3}^{2-y} dy \\
&= \int_0^1 (2 - y - y^3) dy = \left[2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Cette peut aussi être calculée en subdivisant la région R en deux sous-région par une droite verticale passant par le point $(1, 1)$ et faire la somme de deux intégrales :

$$A = \int_0^1 \int_0^{\sqrt[3]{x}} dy dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} dy dx$$

terminer les calculs.

Exemple 4.2.5 Calculer le volume V de la région qui, dans l'octant des coordonnées positives, est délimitée par le paraboloïde $z = x^2 + y^2 + 1$ et le plan $2x + y = 2$.



Solution : Faites d'abord un dessin (figure ci dessus) pour voir la région, déterminez les frontières. On va utiliser la formule :

$$V = \iint_R f(x, y) dA$$

avec $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$, on a donc :

$$V = \iint_R (x^2 + y^2 + 1) dA = \int_0^1 \left[\int_0^{2-2x} (x^2 + y^2 + 1) dy \right] dx \quad (4.4)$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 + y \right]_0^{2-2x} dx \quad (4.5)$$

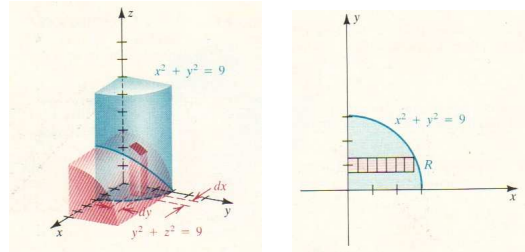
$$= \int_0^1 \left(-\frac{11}{3} x^3 + 10x^2 - 10x + \frac{14}{3} \right) dx \quad (4.6)$$

$$= \left[-\frac{7}{6} x^4 + \frac{10}{3} x^3 - 5x^2 + \frac{14}{3} x \right]_0^1 = \frac{11}{6} \quad (4.7)$$

Calculer ce volume en intervertissant l'ordre d'intégration, c'est-à-dire commencer d'abord par intégrer par rapport à x ensuite par rapport à y . Vous devez arriver à l'expression

$$V = \int_0^2 \int_0^{(2-y)/2} (x^2 + y^2 + 1) dy dx.$$

Exemple 4.2.6 Calculer le volume V de la région, qui dans l'octant des coordonnées positives, est délimitée par les cylindres $x^2 + y^2 = 9$ et $y^2 + z^2 = 9$.



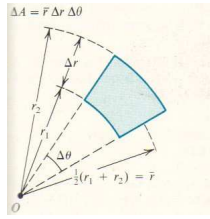
Solution : L'axe du cylindre $y^2 + z^2 = 9$ coïncide avec l'axe des x et son rayon est 3. L'axe du cylindre $x^2 + y^2 = 9$ coïncide avec l'axe des z et son rayon est aussi 3 (faites un dessin pour voir cela). Le plan des xy coupe le second cylindre dans le premier octant suivant un quart de cercle. Donc le solide en question se trouve sous le graphique de $z = \sqrt{9 - y^2}$ et au dessus du quart de cercle dans le plan des xy . Ce volume est donné par :

$$\begin{aligned}
 V &= \int \int_R \sqrt{9 - y^2} dA = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9 - y^2}} \sqrt{9 - y^2} dx dy \\
 &= \int_0^3 \sqrt{9 - y^2} [x]_0^{\sqrt{9 - y^2}} dy \\
 &= \int_0^3 (9 - y^2) dy \\
 &= \left[9y - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^3 = 18.
 \end{aligned}$$

4.3 Intégrales doubles en coordonnées polaires

Considérons une région délimitée par deux rayons qui font des angles positifs α et β avec l'axe polaire et par les graphiques des deux équations polaires $r = g_1(\theta)$ et $r = g_2(\theta)$ où il est supposé que $r = g_1(\theta) \leq r = g_2(\theta)$ pour $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Découpons cette région par de rayons et des arcs circulaires (figure). L'ensemble de tous les éléments d'aires inclus dans R constitue un découpage polaire intérieur d de R . Le pas d'un tel découpage est la longueur de la plus grande des diagonales des R_k . Choisissons un point (r_k, θ_k) dans R_k tel que r_k soit le rayon moyen ; on a :

$$\Delta A_k = r_k \Delta r_k \Delta \theta_k.$$



Theorem 4.3.1 Calcul d'une intégrale double en coordonnées polaires. Soit f une fonction continue des variables polaires r et θ .

$$\lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k f(r_k, \theta_k) r_k \Delta r_k \Delta \theta_k = \int \int_R f(r, \theta) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta$$

On peut transformer une intégrale double en coordonnées rectangulaires en une intégrale double en coordonnées polaires. Pour cela on utilise la transformation :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

L'élément d'aire dA est remplacée par $r dr d\theta$.

Theorem 4.3.2 Formule de changement de variables.

$$\int \int_R f(x, y) dx dy = \int \int_R f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

Nota : Utiliser les coordonnées polaires quand la fonction sous le signe d'intégration contient l'expression $x^2 + y^2$ et quand la région R implique des arcs de cercles centrés à l'origine.

Example 4.3.3 Calculer l'aire de la région R située à l'extérieur du cercle $r = a$ et à l'intérieur du cercle $r = 2a \sin \theta$ (faites un dessin d'abord pour visualiser la région R).

Solution : Si on pose $f(r, \theta) = 1$ l'aire de la région sera donnée par :

$$A = \int \int_R dA = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_a^{2a \sin \theta} r dr d\theta = a^2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

On montrera au cours comment trouver les limites d'intégrations. (Essayer aussi par vous même!).

Exercice 4.3.4 Calculer l'aire d'une boucle de la lemniscate $r^2 = a^2 \sin 2\theta$ avec $a > 0$.

Exemple 4.3.5 Calculer l'intégrale en passant aux coordonnées polaires.

$$\int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dy dx$$

Solution : La région d'intégration est limitée par la droite $y = 0$ (l'axe des x) et le demi-cercle $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. On remplace $x^2 + y^2$ par r^2 et $dy dx$ par $r dr d\theta$ et enfin on adopte les bornes d'intégration en coordonnées polaires pour avoir :

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dy dx &= \int_0^\pi \int_0^a r^3 r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^a d\theta = \frac{1}{5} a^5 \int_0^\pi d\theta \\ &= \frac{1}{5} a^5 [\theta]_0^\pi = \frac{1}{5} \pi a^5. \end{aligned}$$

Exemple 4.3.6 Calculer en coordonnées polaires le volume du solide situé sous le paraboloid $z = 4 - x^2 - y^2$ et le plan de xy .

Solution : au cours (réponse : 8π).

Exercice 4.3.7 Calculer l'intégrale par passage aux coordonnées polaires :

- (1) $\int \int_R (x^2 + y^2) dA$: R est limitée par le cercle $x^2 + y^2 = 4$.
- (2) $\int \int_R \frac{x^2}{x^2 + y^2} dA$: R est bornée par $x^2 + y^2 = a^2$ et $x^2 + y^2 = b^2$. avec $0 < a < b$
- (3) $\int \int_R \sqrt{x^2 + y^2} dA$: R est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 3)$.
- (4) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \cos(x^2 + y^2) dx dy$

Exercice 4.3.8 Transformer l'intégrale double en une intégrale simple à l'aide des coordonnées polaires puis calculer une valeur approchée de cette intégrale par la méthode de Simpson avec $n = 4$.

1. $\int \int_R \sqrt{1 + (x^2 + y^2)^2} dA$; R est la région commune au premier quadrant et au cercle $x^2 + y^2 = 4$.
2. $\int \int_R \sin \sqrt[3]{x^2 + y^2} dA$; R est la région délimitée par le demi-cercle $x = \sqrt{1 - y^2}$ et l'axe des x .

4.4 Aire de Surfaces

On se propose ici à calculer l'aire d'une portion de la surface S représentative d'une fonction f de deux variables, supposée positive et qui admet les dérivées partielles premières continues. R la région du plan des xy qui est la projection vertical de la surface S . On suppose en plus qu'aucune normale à S n'est parallèle au plan des xy .

Soit $d = \{R_k\}$ un découpage intérieur de R et où Δx_k et Δy_k désignent les dimensions de l'élément R_k . Soit $P_k(x_k, y_k, 0)$ un point de R_k auquel correspond sur S le point $B_k(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$. Notons par ΔS_k l'aire de la portion de S dont la projection est R_k et soit ΔT_k l'aire de la portion du plan tangent à S en B_k . Quand le pas $\|d\|$ du découpage est petit ΔT_k est une bonne approximation de ΔS_k et la aire A de S est à peu près égal à $\sum_k \Delta T_k$. (voir (a) et (b) dans la figure ci dessous)

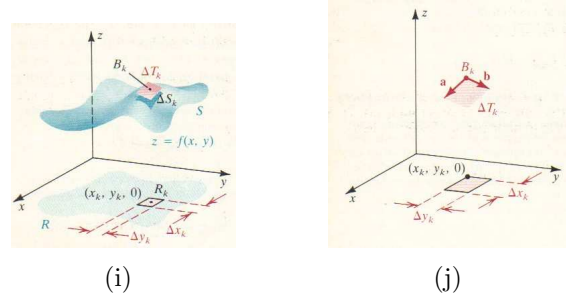


FIGURE 4.1 –

Definition 4.4.1 L'aire A de S est donnée par

$$A = \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k \Delta T_k$$

Expression de l'aire A de S .

Soit $(x_k, y_k, 0)$ le coin de R_k le plus proche de l'origine et soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs issus de $B_k(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$ et tangents respectivement aux traces dans S des plans verticaux $y = y_k$ et $x = x_k$. Les pentes des droites qui supportent ces deux vecteurs sont respectivement $f'_x(x_k, y_k)$ et $f'_y(x_k, y_k)$. On peut écrire ces deux vecteurs sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \Delta x_k \vec{i} + f'_x(x_k, y_k) \Delta x_k \vec{j} \\ \vec{b} &= \Delta y_k \vec{i} + f'_y(x_k, y_k) \Delta y_k \vec{j} \end{aligned}$$

L'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et donné par le module du produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$ soit

$$\Delta T_k = \|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \sqrt{(f'_x(x_k, y_k))^2 + (f'_y(x_k, y_k))^2 + 1} \Delta x_k \Delta y_k$$

et en passant à la limite et par la définition d'une intégrale double on a :

Definition 4.4.2 Formule de l'aire d'une surface.

$$A = \int \int_R \sqrt{(f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2 + 1} \, dx dy$$

Example 4.4.3 Calculer la surface de la partie positive du paraboloïde

$$z = 4 - x^2 - y^2.$$

(Faites un dessin d'abord)

Solution : Si on applique le résultat de la définition 4.4.2 on aboutit à

$$A = 4 \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \, dy dx$$

Puis passez aux coordonnées polaire et terminer.

Exercice 4.4.4 1. Calculer

(a) $\int_0^3 \int_0^2 (4 - y^2) dy dx$

(b) $\int_0^\pi \int_0^\pi x \sin y dy dx$

(c) $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y} dx dy$

2. Dessiner le domaine d'intégration et obtenir une intégrale équivalente en interversant l'ordre d'intégration puis évaluer

(a) $\int_0^2 \int_1^{e^x} dy dx$

(b) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 dx dy$

(c) $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y dx dy$

3. Trouver le volume du solide dont la base est la région du plan des xy limitée par la parabole $y = 4 - x^2$ et la droite $y = 3x$ quand la partie supérieure du solide est limitée par le plan $z = x + 4$

4. Évaluer $\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2} dx dy$

5. Évaluer $\int_0^2 (\tan^{-1} \pi x - \tan^{-1} x) dx$

6. Une fine plaque est limitée par $x^2 + 4y^2 = 12$ et $x = 4y^2$ a une densité variable donnée par $\delta(x, y) = kx$ (k constante). Trouver la masse de la plaque.

4.5 Integrales triples

Les intégrales triples d'une fonction de trois variables x, y, z peut se définir de la même manière comme pour une fonction de deux variables. Sans perte

de généralité nous allons considérer le cas simpliste où celui f est une fonction continue sur un parallélépipède spatial Q de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$$

Soit $d = \{Q_k\}$ un découpage de Q . Le pas $\|d\|$ de ce découpage est la longueur de la plus longue diagonale de Q_k . Le volume d'une sous région Q_k de dimension $\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$ est donnée par

$$\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k.$$

Une **somme de Riemann** de f pour le découpage d est donné par :

$$\sum_k f(u_k, v_k, w_k) \Delta V_k$$

avec (u_k, v_k, w_k) un point quelconque choisi dans Q_k . La limite de cette somme de Riemann quand elle existe est appelée **intégrale triple de f sur Q** et est notée

$$\int \int \int_Q f(x, y, z) dV$$

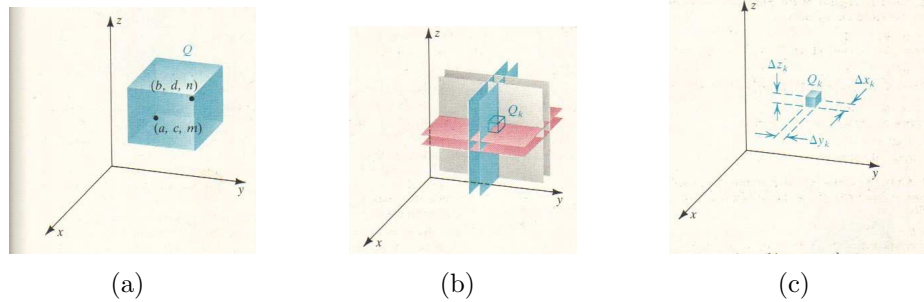


FIGURE 4.2 –

Definition 4.5.1

$$\int \int \int_Q f(x, y, z) dV = \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k f(u_k, v_k, w_k) \Delta V_k$$

Compte tenu de la forme de la région Q on peut écrire :

$$\int \int \int_Q f(x, y, z) = \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz.$$

L'évaluation commence par calculer l'intégrale la plus intérieure par rapport à la variable x puis ensuite celle par rapport à y et pour terminer par celle par rapport

à z . Cinqs autres intégrales itérées qui ne diffèrent que par l'ordre sont équivalentes à celle définit ci dessus.

Example 4.5.2 Calculer $\int \int \int_Q (xy^2 + yz^3) dV$ où

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1, 3 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}$$

Solution : Il y' a six intégrales possibles qui sont équivalentes. Nous calculons celle ci.

$$\begin{aligned} \int_4^3 \int_{-1}^1 \int_2^0 (xy^2 + yz^3) dz dx dy &= \int_4^3 \int_{-1}^1 \left[\int_2^0 (xy^2 + yz^3) dz \right] dx dy \\ &= \int_4^3 \int_{-1}^1 \left[xy^2 z + y \left(\frac{z^4}{4} \right) \right]_0^2 dx dy \\ &= \int_4^3 \int_{-1}^1 (2xy^2 + 4y) dx dy \\ &= \int_4^3 \left[2 \left(\frac{x^2}{2} \right) y^2 + 4yx \right]_{-1}^1 dy \\ &= \int_4^3 [(y^2 + 4y) - (y^2 - 4y)] dy \\ &= \int_4^3 8y dy = 8 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-3}^4 = 28. \end{aligned}$$

Le domaine Q peut être d'une forme quelconque. Supposons qu'il est définit par :

$$Q = \{(x, y, z) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } m_1(x, y) \leq z \leq m_2(x, y)\}$$

La région Q se trouve entre les graphiques de $z = m_1(x, y)$ et $z = m_2(x, y)$ et au dessus ou au dessous de la région R se trouvant dans le plan des xy . Les fonctions m_1 et m_2 ont des dérivées partielles continues sur toute la région R .

Definition 4.5.3 Soit $d = \{Q_k\}$ un découpage de Q . Une somme de Riemann de f pour ce découpage est de la forme

$$\sum_k f(u_k, v_k, w_k) \Delta V_k$$

où (u_k, v_k, w_k) est un point quelconque choisi dans Q_k est ΔV_k est le volume de Q_k . Si f est continue sur tout Q , on peut démontrer l'égalité suivante :

Theorem 4.5.4 Théorème de calcul d'une intégrale triple.

$$\int \int \int_Q f(x, y, z) dV = \int \int_R \left[\int_{m_1(x, y)}^{m_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$

Pour une région R_x on a :

$$\int \int \int_Q f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{m_1(x,y)}^{m_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

et pour une région R_y

$$\int \int \int_Q f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{m_1(x,y)}^{m_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

Ces deux dernières intégrales peuvent être regardée comme limite d'une somme triple :

$$\sum_i \sum_j \sum_k f(u_k, v_k, w_k) \Delta z_k \Delta y_j \Delta x_i$$

où la première somme par rapport à k rassemble en une colonne parallèlement à l'axe des z , les éléments de volumes depuis la face inférieure de Q (d'équation $z = m_1(x, y)$) jusqu'à la frontière supérieure (d'équation $z = m_2(x, y)$). (voir figure). Les deux autres sommes portent sur la région R du plan des xy suivant la même interprétation que dans la section précédente à propos de intégrale double.

Exemple 4.5.5 Calculer le volume du solide délimité par les surfaces

$$z = x^2 + 3y^2 \quad \text{et} \quad z = 8 - x^2 - y^2$$

Solution : Les deux surfaces se coupent suivant le cylindre elliptique

$$x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2$$

ou

$$x^2 + 2y^2 = 4.$$

Le volume se projette dans la région R du plan des xy délimitée par l'ellipse ayant la même équation. Dans la double intégrale par rapport à y et x sur la région R , si nous intégrons premièrement par rapport à y , avec x fixé, y varie de $-\sqrt{(4-x^2)/2}$

à $+\sqrt{(4-x^2)/2}$. Alors x varie de -2 à $+2$. Donc nous avons

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz dy dx \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (8-2x^2-4y^2) dy dx \\
 &= \int_{-2}^2 \left[2(8-2x^2) \sqrt{\frac{4-x^2}{2}} - \frac{8}{3} \left(\frac{4-x^2}{2} \right)^{3/2} \right] dx \\
 &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_{-2}^2 (4-x^2)^{3/2} dx = 8\pi\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

Exercice 4.5.6 Calculer le volume de la région Q délimitée par les graphiques de $z = 3x^2$, $z = 4 - x^2$ et $z + y = 6$

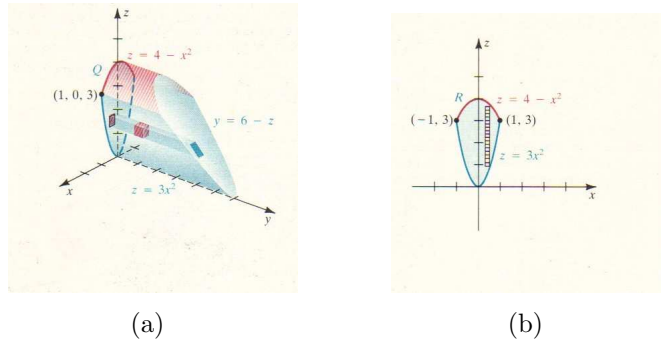


FIGURE 4.3 –

Solution : (faites un dessin) La région Q est bornée inférieurement par le cylindre $z = 4 - x^2$ et supérieurement par le cylindre $z = 3x^2$, et terminée à gauche par le plan de xz et à droite par le plan $z + y = 6$, $k_1(x, z) = 0$, $k_2(x, z) = 6 - z$. On a

$$\begin{aligned}
 V &= \int \int \int_Q dV = \int_{-1}^1 \int_{3x^2}^{4-x^2} \int_0^{6-z} dy dz dx = \int_{-1}^1 \int_{3x^2}^{4-x^2} [y]_0^{6-z} dz dx \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{3x^2}^{4-x^2} (6 - z) dz dx = \int_{-1}^1 \left[6z - \frac{1}{2}z^2 \right]_{3x^2}^{4-x^2} dx \\
 &= \int_{-1}^1 (16 - 20x^2 + 4x^4) dx = \frac{304}{15}
 \end{aligned}$$

4.6 Moment d'inertie et centre de masse

Si $F(x, y, z) = \delta(x, y, z)$ est la densité d'un objet occupant une région Q dans l'espace, et imaginons $d = \{Q_k\}$ un découpage de Q , alors l'intégrale de la densité

$$\begin{aligned}
 m &= \lim \sum_k z \delta(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k \\
 &= \int \int \int_Q \delta(x, y, z) dV.
 \end{aligned}$$

donne la masse de l'objet.

Si $r(x, y, z)$ est la distance du point (x, y, z) de Q à la ligne L , alors le moment d'inertie par rapport à L de l'élément de masse est

$$\Delta m_k = \delta(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$$

est approximativement

$$\Delta I_k = r^2(x_k, y_k, z_k) \Delta m_k$$

et le moment d'inertie I_L de l'objet autour de L est

$$\begin{aligned} I_L &= \lim \sum_k \Delta I_k \\ &= \lim \sum_k r^2(x_k, y_k, z_k) \delta(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k = \iiint_Q r^2 \delta dV \end{aligned}$$

If L est l'axe des x , alors $r^2 = y^2 + z^2$ et

$$I_x = \iiint_Q (y^2 + z^2) \delta dV$$

similairement,

$$I_y = \iiint_Q (x^2 + z^2) \delta dV \quad \text{et} \quad I_z = \iiint_Q (x^2 + y^2) \delta dV$$

Alors en résumé nous avons :

Mass : $m = \iiint_Q \delta dV$ ($\delta = \text{density}$).

Moment d'ordre un par rapport aux plans des coordonnées :

$$M_{yz} = \iiint_Q x \delta dV \quad M_{xz} = \iiint_Q y \delta dV \quad M_{xy} = \iiint_Q z \delta dV$$

Centre de masse :

$$\bar{x} = \frac{\iiint_Q x \delta dV}{m} \quad \bar{y} = \frac{\iiint_Q y \delta dV}{m} \quad \bar{z} = \frac{\iiint_Q z \delta dV}{m}$$

Exemple 4.6.1 Trouver le centre de gravité du solide de densité uniforme délimité inférieurement par le disque $R : x^2 + y^2 < 4$ dans le plan $z = 0$ et supérieurement par le paraboloïde $z = 4 - x^2 - y^2$.

Solution : Par symétrie, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Pour trouver $\bar{z}$ nous calculons premièrement

$$\begin{aligned}
 M_{xy} &= \int \int_R \int_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} z \delta dz dy dx \\
 &= \int \int_R \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} \delta dy dx \\
 &= \frac{\delta}{2} \int \int_R (4-x^2-y^2)^2 dy dx \\
 &\quad \text{passant en polaires} \\
 &= \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4-r^2)^2 r dr d\theta \\
 &= \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{6}(4-r^2)^3 \right]_{r=0}^{r=2} d\theta \\
 &= \frac{16\delta}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= \frac{32\pi\delta}{3}.
 \end{aligned}$$

Un calcul similaire donne

$$m = \int \int_R \int_0^{4-x^2-y^2} \delta dz dy dx = 8\pi\delta$$

Par conséquent,

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{4}{3}$$

et le centre de gravité est $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, \frac{4}{3})$.

4.7 Coordonnées cylindriques

Theorem 4.7.1 *Les coordonnées rectangulaires (x, y, z) et les coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'un point P sont liées par :*

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad z = z$$

Le graphique de l'équation $r = r_0$ ($r_0 > 0$), ou, $x^2 + y^2 = r_0^2$ est un cylindre circulaire droit de rayon r_0 et d'axe confondu avec l'axe des z . Le graphique de l'équation $\theta = \theta_0$ est un plan qui contient l'axe des z et celui de $z = z_0$, est un plan perpendiculaire à l'axe des z

Exercice 4.7.2 (1) Écrire l'équation $z^2 = x^2 + y^2$ en coordonnées cylindriques et dessiner son graphique.

(2) Écrire l'équation en coordonnées rectangulaires et dessiner le graphique dans ce système. (a) $z = 4r^2$, (b) $r = 4 \sin \theta$.

Soit maintenant une fonction $f(r, \theta, z)$ continue sur une région de la forme

$$Q = \{(r, \theta, z) : a \leq r \leq b, c \leq \theta \leq d, e \leq z \leq f\}.$$

Soit $d = \{Q_k\}$ un découpage de Q dont les sous-régions Q_k ont la même forme que Q . Ces sous régions sont obtenues en découpant Q par des cylindres circulaires d'équations $r = a_k$, des plans contenant l'axe des z d'équation $\theta = c_k$ et de plans parallèles au plan des xyz d'équation $z = m_k$ avec $(a_k, c_k, m_k) \in [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$.

Le volume ΔV_k d'un élément Q_k est le produit de la base $\bar{r}_k \Delta r_k \Delta \theta_k$ avec $\bar{r}_k$ le rayon moyen de la base Q_k par la hauteur Δz_k

$$\Delta V_k = \bar{r}_k \Delta r_k \Delta \theta_k \Delta z_k.$$

Si (r_k, θ_k, z_k) est un point quelconque de Q_k et $\|d\|$ la longueur de la plus longue des diagonales des Q_k , l'intégrale triple de f sur Q est définie par :

$$\int \int \int_Q f(r, \theta, z) dV = \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k f(r_k, \theta_k, z_k) \Delta V_k.$$

On peut établir que

$$\int \int \int_Q f(r, \theta, z) dV = \int_m^n \int_c^d \int_b^a f(r, \theta, z) r dr d\theta dz.$$

Il y'a cinq autres triples intégrales équivalentes à celle ci dessus. (Les établir). Si la région R est de la forme

$$Q = \{(r, \theta, z) : (r, \theta) \text{ dans } m_1(r, \theta) \leq z \leq m_2(r, \theta)\}$$

avec m_1 et m_2 , deux fonctions qui ont des dérivées premières continues sur tout R . On montre que

$$\int \int \int_Q f(r, \theta, z) dV = \int \int_R \left[\int_{m_1(r, \theta)}^{m_2(r, \theta)} f(r, \theta, z) dz \right] dA.$$

Dans le cas où R est une région polaire comme celle décrite au cas des intégrales

doubles, l'intégrale triple de f sur Q se calcule comme suit :

$$\int \int \int_Q f(r, \theta, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{m_2(r, \theta)}^{m_1(r, \theta)} r dz dr d\theta.$$

4.8 Coordonnées sphériques

Soit $P(x, y, z)$ un point en coordonnées rectangulaires. Ses coordonnées sphériques seront notées par

$$(\rho, \theta, \phi)$$

Les coordonnées sphériques (ρ, θ, ϕ) et les coordonnées rectangulaires (x, y, z) d'un point P sont liés par

Theorem 4.8.1 (1) $x = \rho \sin \phi \cos \theta$, $y = \rho \cos \phi \sin \theta$, $z = \rho \cos \phi$

$$(2) \quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Le graphique de $\rho = \rho_0$ ($\rho_0 > 0$) est une sphère de rayon ρ_0 centrée en l'origine. Le graphique de $\rho = 0$ se réduit en l'origine de coordonnées. Le graphique de $\phi = \phi_0$ pour $0 < \phi < \pi$ est un demi-cône de sommet l'origine O . Le graphique de $\phi = 0$ est la partie positive de l'axe des z tandis que le graphique de l'équation est la partie négative de l'axe des z . Le graphique de $\theta = \theta_0$ est un demi-plan qui contient l'axe des z .

Example 4.8.2 Chercher les coordonnées rectangulaires et cylindriques d'un point P de coordonnées sphériques $(4, \pi/6, \pi/3)$.

Solution : représenter d'abord ce point dans un système des coordonnées sphériques et utiliser les formules du théorème 4.8.1 avec $\rho = 4$, $\phi = \pi/6$, $\theta = \pi/3$ pour obtenir les coordonnées rectangulaires

$$\begin{aligned} x &= 4 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} = 1 \\ y &= 4 \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \\ z &= 4 \cos \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Pour les coordonnées cylindriques nous calculons

$$r^2 = x^2 + y^2 = (1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2.$$

Les coordonnées cylindriques (r, θ, z) de P sont $(2, \pi/3, 2\sqrt{3})$.

Example 4.8.3 Écrire en coordonnées sphériques une équation du paraboloïde $z = x^2 + y^2$.

Solution : par les formules du théorème 4.8.1 on a :

$$\begin{aligned}\rho \cos \theta &= \rho^2 \sin^2 \phi \cos \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin \theta \\ &= \rho^2 \sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= \rho^2 \sin^2 \phi\end{aligned}$$

ou encore

$$\rho \cos \theta = \rho^2 \sin^2 \phi = 0.$$

Par conséquent on a : $\rho = 0$ ou bien $\rho \sin^2 \phi = \cos \phi$. Le graphique de $\rho = 0$ est l'origine qui est aussi un point de $\rho \sin^2 \phi = \cos \phi$ qui est donc équivalente à $z = x^2 + y^2$. On exclu les valeurs $\phi = 0$ ou $\phi = \pi$ et on peut écrire :

$$\rho = \cotg \phi \operatorname{cosec} \phi.$$

Theorem 4.8.4 Calcul d'un intégrale triple en coordonnées sphériques.

$$\int \int \int_Q f(\rho, \phi, \theta) dV = \int_m^n \int_c^d \int_a^b f(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta.$$

Avec Q un domaine de la forme

$$Q = \{(\rho, \phi, \theta) : a \leq \rho \leq b, c \leq \phi \leq d, e \leq \theta \leq f\}.$$

Les coordonnées sphériques s'étendent aussi à des régions plus compliquées que celle donnée par la région Q ci dessus et donc les bornes d'intégrations doivent être modifiées.

Exemple 4.8.5 Calculer le volume et le centre du solide hémisphérique de la région Q bornée inférieurement par le cône $\phi = c$ où $0 < c < \pi/2$ et supérieurement par la sphère $\rho = a$.

Réponses : $V = \frac{2}{3}\pi a^3(1 - \cos c)$, $\bar{z} = \frac{8}{3}a(1 + \cos c)$. On essayera de résoudre ça au cours selon le temps qui nous restera.

Exercice 4.8.6 Calculer l'intégrale en passant aux coordonnées sphériques.

$$(1) \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx$$

$$(2) \int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dx dy$$

(3) Trouver le moment d'inertie par rapport à Ox de la région limitée par l'axe des x , la courbe e^x et les droites $x = 0$, $x = 1$ (prendre $\delta = 1$ pour une région).

(4) Calculer le volume de la région commune aux cylindres $x^2 + y^2 = a^2$ et $x^2 + z^2 = a^2$.

(5) Calculer le volume du solide entre les paraboloides elliptiques $z = x^2 + 9y^2$ et $z = 18 - x^2 - 9y^2$

- (6) trouver le volume du solide limité au dessus par le paraboloid $z = 5 - x^2 - y^2$ et limité en dessous par le paraboloid $z = 4x^2 + 4y^2$. Passez aux coordonnées cylindriques.
- (7) Calculer après avoir passé aux coordonnées cylindriques

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^x (x^2 + y^2) dz dx dy$$

- (8) Calculer en coordonnées sphériques le volume à l'intérieur de la sphère $\rho = a$ qui se trouve à l'intérieur des cônes $\phi = \pi/3$ et $\phi = 2\pi/3$.
- (9) Trouver le volume enfermé par la surface $\rho = a(1 - \cos \phi)$. Utiliser les coordonnées sphériques.
- (10) Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe des z de la sphère de rayon a centrée à l'origine; $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
- (11) Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe des z du solide homogène enfermé dans l'ellipsoïde $\delta(x, y, z) = (x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$.

4.9 Changement de variables et Jacobiens

Nous allons présenter une méthode générale de transformations de coordonnées, généralisant les cas particuliers de la transformation des coordonnées rectangulaires au coordonnées cylindriques et sphériques.

Soit une fonction T dont le domaine de définition est une région D du plan des xy et dont l'ensemble image E est une région du plan de uv . Á chaque point (x, y) de D correspond exactement un point (u, v) tel que

$$T(x, y) = (u, v).$$

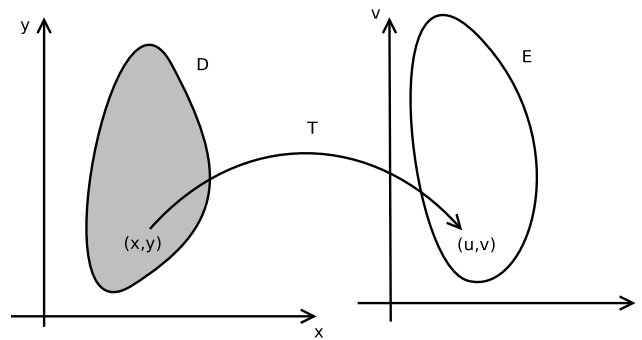
La fonction T est appelée une transformation de coordonnées du plan des xy en plan des uv . Comme chaque couple (u, v) est déterminé de manière unique, u et v sont chacune fonction de x et de y et nous avons les formules de transformation suivantes :

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y); \quad (x, y) \in D, \quad (u, v) \in E.$$

Découpons la région du plan des uv par des droites verticales $u = c_1, u = c_2, u = c_3, \dots$ et de droites horizontales $v = d_1, v = d_2, v = d_3, \dots$, à ces valeurs correspondent des courbes de niveau suivantes :

$$u = f(x, y) = c_j \quad \text{et} \quad v = g(x, y) = d_k$$

pour $j = 1, 2, 3, \dots$ et $k = 1, 2, 3, \dots$. L'ensemble de ces courbes constitue un découpage curviligne de la région du plan des xy . L'allure des courbes $u = f(x, y) =$



c_j et $v = g(x, y) = d_k$ dépend de la nature des fonctions f et g .

Exemple 4.9.1 Soit T la transformation de coordonnées du plan des xy en plan des uv déterminé par

$$u = x + 2y, \quad v = x - 2y.$$

Tracer dans le plan des uv les verticales $u = 2, u = 4, u = 6, u = 8$ et les horizontales $v = -1, v = 1, v = 3, v = 5$. Tracer les courbes correspondantes dans le plan des xy .

Solution : au cours

La tranformation de l'exemple 4.9.1 est injective ; cela veut dire que si $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ dans le plan des xy , alors $T(x_1, y_1) \neq T(x_2, y_2)$ dans le plan des uv . En général si T est une transformation de coordonnées injective, en renversant la correspondance, on obtient une transformation T^{-1} du plan des uv en plan de xy appelée l'inverse de T . On peut décrire T^{-1} par les équations de la forme :

$$x = F(u, v), \quad y = G(x, y)$$

pour certaines fonctions F et G . Il est clair que $T^{-1}(T(x, y)) = (x, y)$ et $T(T^{-1}(u, v)) = (u, v)$.

Exercice 4.9.2 (i) Déterminer la transformation inverse de T de l'exemple 4.9.1.

(ii) Quelle est la courbe du plan des uv que T^{-1} transforme en l'ellipse $x^2 + 4y^2 = 1$?

Solution :

(i) La tranformation inverse T^{-1} de T est définie par

$$x = \frac{1}{2}(u + v), \quad y = \frac{1}{4}(u - v).$$

(ii) En portant x et y dans l'équation $x^2 + 4y^2 = 1$ on a :

$$\left[\frac{1}{2}(u+v)\right]^2 + 4\left[\frac{1}{4}(u-v)\right]^2 = 1$$

ou

$$u^2 + v^2 = 2.$$

Ainsi c'est le cercle centré à l'origine de rayon $\sqrt{2}$ dans le plan des uv qui est transformé par T^{-1} en l'ellipse $x^2 + 4y^2 = 1$. (voir figure 4.4)

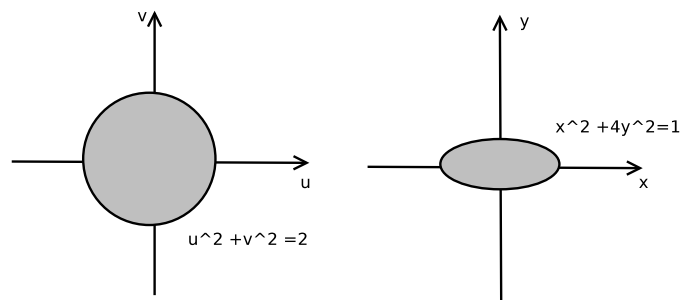


FIGURE 4.4 –

Changement des variables dans une intégrale double

Dans le cas de l'intégrale simple $\int_a^b f(x)dx$, sous certaines conditions, la substitution $x = g(u)$ transforme cette intégrale en la suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)du,$$

où $a = g(c)$ et $b = g(d)$ (voir chapitre 1 de la première partie.) Nous voir comment ce changement de variable va s'effectuer pour une intégrale double.

Soit

$$\int \int_R F(x, y) dA$$

où R est une région de plan des xy , et soit la substitution

$$x = f(u, v) \quad y = g(u, v)$$

avec f et g des fonctions qui admettent des dérivées partielles continues. Ces équations définissent une transformation W du plan des uv en plan de xy . Le problème va consister à trouver une région S du plan de uv que W transforme en

R et telle que

$$\int \int_R F(x, y) dA = \int \int_R F(f(u, v), g(u, v)) dA.$$

Theorem 4.9.3 Si $x = f(u, v)$ et $y = g(u, v)$, le jacobien de x et y par rapport u et v noté $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ est (voir chapitre)

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}$$

Theorem 4.9.4 Si $x = f(u, v)$ et $y = g(u, v)$ est une transformation des coordonnées, alors

$$\int \int_R F(x, y) dx dy = \int \int_R F(f(u, v), g(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv.$$

Quand (u, v) fait une fois le tour de K dans le sens positif le point correspondant (x, y) fait une fois le tour de C , frontière de R , soit dans le sens positif, au quel cas c'est le signe plus qui est à retenir, soit dans le sens négatif et c'est le signe moins qui est à choisir.

Dans le cas où le jacobien ne change pas de signe sur S on a

$$\int \int_R F(x, y) dx dy = \int \int_R F(f(u, v), g(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

On peut ce résultat aux cas trois variables de la manière suivante

Theorem 4.9.5 Si $x = f(u, v, w)$, $y = h(u, v, w)$, $z = g(u, v, w)$ est une transformation de coordonnées d'une région S du plan des uvw en une région R du plan des xyz et si le jacobien $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ ne change pas de signe sur S , alors

$$\int \int \int_R F(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_S F(f(u, v, w), h(u, v, w), g(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

où le jacobien de x, y, z par rapport u, v, w est donné par :

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Exercice 4.9.6 (1) Calculer

$$\int \int_R e^{(x-y)/(y+x)} dx dy,$$

où R est la région trapézoïdale du plan des xy de sommet $(0, 1), (0, 2), (2, 0)$ et $(1, 0)$. Changement de variables $u = y - x$ $v = y + x$.

- (2) Calculer $\int \int_R e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ où R est le quart d'anneau de petit rayon 1 et de grand rayon 2. Changement de variables $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$.
- (3) Les sinusoides elliptique sont de bonnes approximation de la forme des fonds des lacs. Le bord d'un lac à la forme d'une ellipse d'équation $(x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1)$. où a et b sont strictement positifs, et sa profondeur maximum est h_M . Une sinusoides elliptique est donnée par

$$f(x, y) = h_M \cos \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \right).$$

(Changement de variables $x = au, y = bu$.)

- (4) Calculer l'intégrale par le changement de variables indiquées
- (a) $\int \int_R (x - y)^2 \cos^2(x + y) dx dy$, frontière de R : le carré de sommet $(0, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 0)$ changement de variables : $u = x - y, v = x + y$
- (b) $\int \int_R \sin \frac{y-x}{y+x} dx dy$, frontière de R : le trapèze de sommets $(1, 1), (2, 2), (4, 0), (2, 0)$ changement de variable : $u = y - x, v = y + x$.
- (5) Comment doit on choisir a, b, c de telle sorte que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} dx dy = 1?$$

(Suggestions : introduire la transformation

$$s = \alpha x + \beta y \quad t = \gamma x + \delta y$$

où $(\alpha\beta - \beta\gamma)^2 = ac - b^2$; alors

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = s^2 + t^2)$$

- (6) Trouver par intégration le volume de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

- (7) Evaluer l'intégral

$$\int \int \int |xyz| dx dy dz$$

pris à travers l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

(suggestions : Introduire les nouvelles coordonnées :

$$x = au, \quad y = bv, \quad z = cw$$

Chapitre 5

Calcul vectoriel

Note : Pour question de simplification de notation, tous les vecteurs de ce chapitre seront notés en caractère gras.

5.1 Champs de vectoriels

Considérons un système de coordonnées à trois dimensions xyz et associons à chaque point $K(x, y, z)$ un vecteur $\mathbf{F}(x, y, z)$ ayant comme origine ce point. En systèmes de coordonnées on peut écrire

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$

avec M, N, P des fonctions scalaires qui sont les composantes du vecteur $\mathbf{F}$ en chaque point. On introduit la définition suivante :

Definition 5.1.1 *Un champ vectoriel de dimension trois est une fonction*

$$\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow E_3 \subset \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \rightarrow M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$

Un champ vectoriel de dimensions deux se définit de la même manière.

Example 5.1.2 *Décrire le champ vectoriel $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. Montrer que le champ $\mathbf{F}(x, y)$ est orthogonal au vecteur $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ en chaque point $P(x, y)$ du plan.*

Solution : *discuter au cours*

Definition 5.1.3 *Soit $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ le vecteur position de (x, y, z) et soit $\mathbf{u} = (1/\|\mathbf{r}\|)$ le vecteur unitaire de même direction que $\mathbf{r}$. Un champ vectoriel est en inverse carré quand*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|}\mathbf{u} = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r},$$

avec c un scalaire.

Le ci haut définit est l'un de plus importants en physique. Soit $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ un vecteur position d'un point quelconque de l'espace. Le module de ce vecteur est donné par

$$\|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Le champ en inverse carré de la définition 5.1.3 peut s'écrire

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} = \frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

Quand $c < 0$ les vecteurs de du champ vectoriel $\mathbf{F}(x, y, z)$ sont multiples scalaires négatifs de $\mathbf{r}$ et sont donc dirigés vers l'origine. En plus

$$\|\mathbf{F}(x, y, z)\| = \frac{|c|}{\|\mathbf{r}\|^3} \|\mathbf{r}\| = \frac{|c|}{\|\mathbf{r}\|^2},$$

ce qui montre que la norme de $\mathbf{F}(x, y, z)$ est inversement proportionnelle au carré de la distance de O au point (x, y, z) . Quand $c > 0$ la direction des vecteurs est opposé à l'origine.

Exemple 5.1.4 Exemples de champs vectoriels en inverse carré.

La force gravitationnelle.

D'après la loi d'Isaac Newton sur la gravitation universelle, la force qu'exerce sur une particule de masse m_0 localisée à l'origine, une masse m localisée en $K(x, y, z)$ est donnée par :

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_0 m}{\|\mathbf{r}\|^2} \mathbf{u},$$

où G est la constante universelle de gravitation, $\mathbf{r}$ le vecteur position du point K et $\mathbf{u} = (1/\|\mathbf{r}\|)\mathbf{r}$ est un vecteur unitaire.

La loi de Coulomb.

La loi de Coulomb certifie qu'une charge de Q coulombs placée à l'origine exerce sur une charge de q coulombs situé en $K(x, y, z)$ une force $\mathbf{F}(x, y, z)$ définie par

$$\mathbf{F} = c \frac{Qq}{\|\mathbf{r}\|^2} \mathbf{u},$$

où c est une constante et $\mathbf{r}$ et $\mathbf{u}$ sont définis comme à la définition 5.1.3. Noter que la loi de Coulomb est de la même forme que la loi de Newton sur la gravitation universelle.

Définition 5.1.5 Un champ de vectoriel $\mathbf{F}$ est conservatif si

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \text{grad } f(x, y, z)$$

pour une certaine fonction scalaire de f .

La fonction f est **appelée fonction potentiel** du champ $\mathbf{F}$ et f est le **potentiel scalaire** au point (x, y, z) . Tout vecteur $\mathbf{F}(x_0, y_0, z_0)$ d'un champ vectoriel conservatif est normal à la surface de niveau d'une fonction potentiel f de $\mathbf{F}$ qui passe par $P_0(x_0, y_0, z_0)$. On sait aussi que $\|\mathbf{F}(x_0, y_0, z_0)\|$ est la plus grande vitesse de variation du potentiel autour de P_0 . Dans le cas où $f(x, y, z)$ indique la température en (x, y, z) , la direction de ce maximum de variation de f est normale à la surface isotherme (ou équipotentielle) qui passe par P_0 .

Theorem 5.1.6 Tout champ vectoriel en inverse carré est conservatif.

Démonstration : Un champ en inverse carré peut s'écrire :

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{cx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{cy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{cz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{k}$$

Si $\mathbf{F}$ est conservatif, alors $\mathbf{F} = \text{grad } f(x, y, z)$ pour une certaine fonction scalaire f et les composantes de $\mathbf{F}$ sont respectivement $f'_x(x, y, z)$, $f'_y(x, y, z)$, $f'_z(x, y, z)$. On peut montrer par une intégration partielle de chacune des composantes de $\mathbf{F}(x, y, z)$ par rapport à x, y, z que l'expression pour f est de la forme :

$$f(x, y, z) = \frac{-c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}},$$

Il s'en suit

$$\mathbf{F} = \text{grad} \left(\frac{-c}{\|\mathbf{r}\|} \right)$$

Les équations des surfaces de niveau de la fonction potentiel f du champ en inverse carré $\mathbf{F}$ sont données par

$$\frac{-c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = k,$$

où $k < 0$. On a

$$(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{c^2}{k^2}$$

qui sont des sphères centrées à l'origine. Les vecteurs $\mathbf{F}(x, y, z)$ sont orthogonaux à ces sphères et sont dirigés soit vers le centre de la sphère, soit à l'opposé.

Definition 5.1.7 Rotationnel

Soit $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ où M, N, P possèdent des dérivées partielles sur une certaine région. Le **rotationnel** de $\mathbf{F}$ est

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \wedge \mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Le rotationnel est facile à retenir lorsqu'il est écrit sous forme d'un déterminant

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \wedge \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

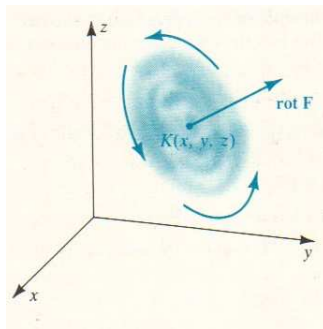
Nota : ce pas un vrai déterminant !

Exemple 5.1.8 Calculer $\nabla \wedge \mathbf{F}$, si $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2z^4\mathbf{i} + (2x^2y + z)\mathbf{j} + y^3z^2\mathbf{k}$.

Solution : Nous obtenons

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^4 & (2x^2y + z) & y^3z^2 \end{vmatrix} = (3y^2z^2 - 1)\mathbf{i} + 4xy^2z^3\mathbf{j} + (4xy - 2xyz^4)\mathbf{k}.$$

En un point $K(x, y, z)$ d'un fluide ou d'un gaz en train de tourner ou de tourbillonner, le rotationnel de $\mathbf{F}$ appartient à l'axe de rotation et permet de décrire les propriétés giratoires du champs.



Definition 5.1.9 Divergence

Soit $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ où M, N, P possèdent des dérivées partielles sur une certaine région. Le **divergence** de $\mathbf{F}$ notée $\text{div}_z; \mathbf{F}$ ou $\nabla \cdot \mathbf{F}$ est

$$\text{div}_z; \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Dans le cas où $\mathbf{F}$ est un champ de vitesse d'un fluide ou d'un gaz, $\text{div}_z; \mathbf{F}$ renseigne sur la variation de la masse du fluide ou gaz. En un point H où $[\text{div}_z; \mathbf{F}]_H < 0$, la masse transférée vers le point excède celle qui s'en éloigne et on dit qu'il ya un **puits** en H .

Exercice 5.1.10 1. Si f est une fonction scalaire et $\mathbf{F}$ une fonction vectorielle et si les dérivées partielles existent, démontrer que

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\nabla f) \cdot \mathbf{F}$$

2. Déterminer un champ vectoriel conservatif dont f est la fonction potentiel
 - (a) $f(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$
 - (b) $f(x, y) = \text{Arctg}(xy)$
3. Calculer $\nabla \wedge \mathbf{F}$ et $\nabla \cdot \mathbf{F}$
 - (a) $F(x, y, z) = x^2 z \mathbf{i} + y^2 x \mathbf{j} + (y + 2z) \mathbf{k}$
 - (b) $F(x, y, z) = x^3 \ln z \mathbf{i} + x e^{-y} \mathbf{j} - (y^2 + 2z) \mathbf{k}$
4. Démontrer que pour $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$
 - (a) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$
 - (b) $\nabla \wedge \mathbf{r} = 0$
5. Vérifier l'identité, sachant que f et $\mathbf{F}$ ont des dérivées secondes partielles continues et que $\mathbf{a}$ est un vecteur constant.
 - (a) $\text{rot grad } f = 0$
 - (b) $\text{div rot } \mathbf{F} = 0$
 - (c) $\text{rot}(\text{grad } f + \text{rot } \mathbf{F}) = \text{rot rot } \mathbf{F}$
 - (d) $\text{rot } \mathbf{a} = 0$
6. L'opérateur $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ est défini par

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Appliquée à $f(x, y, z)$, il produit une fonction scalaire, appelée laplacien, et donnée par

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Démontrer que

- (a) $\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$
- (b) $\nabla^2(fg) = f \nabla^2 g + g \nabla^2 f + 2 \nabla f \cdot \nabla g$

si f et g sont des fonctions scalaires qui ont des dérivées partielles secondes.

5.2 Intégrale curvilignes

Pour définir les intégrales curvilignes nous allons suivre la même démarche utilisée pour définir l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$. Rappelons vous que nous avons commençé par un découpage de l'intervalle $[a, b]$ en sous région de longueurs $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Ensuite nous avons formé la somme de Riemann $\sum_k f(u_k) \Delta_k$ où était un point arbitraire dans l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ et finalement prendre la limite de cette somme lorsque le pas du découpage $\|d\|$ tend vers zéro. La même démarche sera suivie pour définir les intégrales curvilignes des fonctions de plusieurs variables.

Soit f une fonction de deux variables x et y continues sur une région D qui contient une courbe lisse C paramétrée par $x = g(t)$, $y = h(t)$; $a \leq t \leq b$.

But : Nous allons définir trois intégrales différentes de la fonction f sur C .

Considérons un découpage d de l'intervalle $[a, b]$ du paramètre par les points

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b.$$

À chaque t_k correspond sur C un point $P_k(x_k, y_k)$. L'ensemble de points $d = \{P_k : k = 0, 1, \dots, n\}$ constituent un découpage de la courbe C . Posons

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \quad \Delta s_k = \widehat{P_{k-1}P_k}.$$

Choisissons un nombre dans chaque $[t_{k-1}, t_k]$ un point au quel correspond un point $Q_k(u_k, v_k)$ sur l'arc $\widehat{P_{k-1}P_k}$. Formons les sommes de Riemann

$$\sum_k f(u_k, v_k) \Delta s_k, \quad \sum_k f(u_k, v_k) \Delta x_k, \quad \sum_k f(u_k, v_k) \Delta y_k.$$

Quand les limites de ces sommes existent, elles sont des **intégrales curvilignes** de f le long de C par rapport à s , x et y respectivement et sont notées comme suit :

Definition 5.2.1 *Intégrales curvilignes en dimension deux.*

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y) ds &= \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k f(u_k, v_k) \Delta s_k \\ \int_C f(x, y) dx &= \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k f(u_k, v_k) \Delta x_k \\ \int_C f(x, y) dy &= \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k f(u_k, v_k) \Delta y_k \end{aligned}$$

Quand f est continue sur D , les limites ci dessus existent ne dépendent pas du paramétrage de C . Pour calculer ces intégrales, on introduit les équations $x = g(t)$, $y = h(t)$ du paramétrage de C et substitues les différentielles

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt \\ dx &= g'(t) dt, \quad dy = h'(t) dt \end{aligned}$$

Voici les formules à utiliser pour le calcul des intégrales curvilignes

Theorem 5.2.2 *Calcul des intégrales curvilignes.* Soit C une courbe lisse d'équations paramétriques $x = g(t)$, $y = h(t)$; $a \leq t \leq b$ et soit $f(x, y)$ une fonction continue sur une région D contenant C . Alors

$$(1) \int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(g(t), h(t)) \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt$$

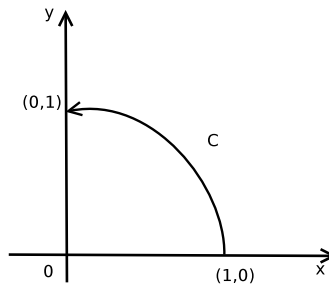
$$(2) \int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(g(t), h(t)) g'(t) dt$$

$$(3) \int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(g(t), h(t)) g'(t) dt$$

Remarque 5.2.3 Le développement précédent s'applique à des courbes lisse par morceaux.

Exemple 5.2.4 Calculer $\int_C xy^2 ds$ où C est décrite par

$$x = \cos t, \quad y = \sin t : \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$



Solution : On a en appliquant le théorème 5.2.2

$$\begin{aligned} \int_C xy^2 ds &= \int_0^{\pi/2} \cos t \sin^2 t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos t \sin^2 t = \left[\frac{1}{3} \sin^3 t \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Exemple 5.2.5 Calculer $\int_C xy dx + x^2 dy$ si

1. C se compose des segments de droite qui relient $(2, 1)$ à $(4, 1)$ et $(4, 1)$ à $(4, 5)$.
2. C est le segment de droite qui relie $(2, 1)$ à $(4, 5)$.
3. C est décrite paramétriquement par $x = 3t - 1$, $y = 3t^2 - 2t$; $1 \leq t \leq \frac{5}{3}$

Solution : Essayer en exercice !

On peut étendre les intégrales aux fonctions de trois variables sur une courbe de l'espace de la forme :

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad z = k(t),$$

se traite de la même manière i.e.

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k f(u_k, v_k, w_k) \Delta s_k.$$

cette intégrale se calcule par la formule

$$\int_a^b f(g(t), h(t), k(t)) \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2 + [k'(t)]^2} dt.$$

Exemple 5.2.6 Calculer $\int_C yz dx + xz dy + xy dz$ le long de C donné par

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3; \quad 0 \leq t \leq 2.$$

Solution :

Exercice 5.2.7 Travail d'un champ des forces. Supposons qu'en un point (x, y, z) agisse une force

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$

avec M, N, P des fonctions continues. Construire une définition du travail effectué quand le point d'application de $\mathbf{F}(x, y, z)$ se déplace le long d'une courbe lisse C paramétrée par

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad z = k(t), \quad a \leq t \leq b$$

et Montrer que le travail W de la force $\mathbf{F}$ le long de la courbe C est donné par

$$\mathbf{W} = \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \Delta W_k = \int_C M(x, y, z) dx + N(x, y, z) dy + P(x, y, z) dz$$

où ΔW_k est le travail effectué par la force $\mathbf{F}(x, y, z)$ entre P_k et P_{k+1} .

Soit $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ le vecteur position d'un point $Q(x, y, z)$ de la courbe C . Soit s l'abscisse curviligne sur C et soit $T(s)$ un vecteur tangent à C au point Q définit par

$$T(s) = \frac{d}{ds} \mathbf{r}(t) = \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j} + \frac{dz}{ds} \mathbf{k}.$$

Montrer que le vecteur $T(s)$ est unitaire.

La composante tangentielle de $\mathbf{F}$ en Q est donnée par

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}(s) = M(x, y, z) \frac{dx}{ds} + N(x, y, z) \frac{dy}{ds} + P(x, y, z) \frac{dz}{ds}$$

et conclure que

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}(s) ds. \quad (5.1)$$

Par conséquent le travail effectué quand le point d'application de $\mathbf{F}(x, y, z)$ parcourt C est égale à l'intégrale curviligne par rapport l'abscisse curviligne s de la composante tangentielle de $\mathbf{F}$ le long de C . Puisque

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} = \mathbf{T}ds$$

on pose

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}(s) ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Exemple 5.2.8 Calculer le travail de la force $\mathbf{F}$ quand son point d'application se déplace le long de l'axe des x de $A(1, 0, 0)$ à $B(2, 0, 0)$, étant donné que $\mathbf{F}$ est un champ en inverse carré défini par

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r},$$

où k est une constante.

Solution : L'équation paramétrique du segment AB est $x = t, y = 0, z = 0$, $0 \leq t \leq 2$. Le travail est donné par

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{k}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x dx + y dy + z dz)$$

ou encore

$$W = \int_1^2 \frac{k}{(t^2)^{3/2}} t dt = \frac{k}{2}.$$

Exercice 5.2.9 Calculer les intégrales curvilignes $\int_C f(x, y) ds$, $\int_C f(x, y) dx$, $\int_C f(x, y) dy$, le long de C définie paramétriquement

$$f(x, y) = x^3 + y, \quad x = 3t, \quad t = t^3; \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(b) \quad f(x, y) = xy^{2/5}, \quad x = (1/2)t, \quad y = t^{5/2}; \quad 0 \leq t \leq 1$$

Calculer l'intégrale curviligne le long de C .

$$(d) \quad \int_C 6x^2 y dx + xy dy; \quad C \text{ est le graphique de } y = x^3 + 1 \text{ de } (-1, 0) \text{ à } (1, 2)$$

$$(b) \quad \int_C y dx + (x + y) dy; \quad C \text{ est le graphique de } y = x^2 + 2x \text{ de } (0, 0) \text{ à } (2, 8)$$

$$(c) \quad \int_C xz dx + (y + z) dy + x dz \text{ lorsque } C \text{ est l'arc décrit par } x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = e^{2t}; \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$2. \quad \int_C (x + y + z) dx + (x - 2y + 3z) dy + (2x + y - z) dz \text{ sur le chemin qui joint } (0, 0, 0) \text{ à } (2, 3, 4)$$

(a) si C se compose de trois segments de droites parallèles dans l'ordre à l'axe des x , des y et des z .

(b) si C est un seul segment de droite.

3. Calculer $\int_C ydx + zdy + xdz$ lorsque C est l'arc décrit par $x = \sin t$, $y = 2 \sin t$, $z = \sin^2 t$; $0 \leq t \leq \pi/2$.
4. La force en action au point (x, y) d'un plan de coordonnées est $\mathbf{F}(x, y) = (4/\|r\|^3)\mathbf{r}$ où $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Calculer le travail fourni par $\mathbf{F}(x, y)$ le long du graphique de $y = x^3$ de $(0, 0)$ à $(2, 8)$.
5. Démontrer que le travail accompli sur un objet en mouvement par une force $\mathbf{F}$ qui, en tout point (x, y, z) , est orthogonale au vecteur vitesse de cet objet, est nul.
6. Soit C le graphique de $y = x^4$ de $(0, 0)$ à $(1, 1)$. Calculer une valeur approchée de $\int_C \sin xy dx$ par

$$\sum_{k=1}^{10} \sin(u_k v_k) \Delta x_k$$

avec $\Delta x_k = 1/10$ et $u_k = (1/10)k - 1/20$.

7. Soit C le graphique de $y = 3x + 4$ de $(1, 7)$ à $(2, 10)$. Calculer une valeur approchée de $\int_C \log \sqrt{xy} dy$ par

$$\sum_{k=1}^{10} \log \sqrt{u_k v_k} \Delta y_k$$

avec $\Delta y_k = 3/10$ et $u_k = (19/20) + (1/10)k$

5.3 Indépendance du chemin

Dans cette section nous allons examiner sous quelles conditions l'intégrale curviligne d'une fonction de deux variables ou trois ne dépend pas du chemin d'intégration. Une telle intégrale sera dite indépendante du chemin. Si une intégrale $\int_C f(x, y) ds$ ne dépend pas du chemin qui joint A à B nous allons la noter $\int_A^B f(x, y) ds$ puisqu'elle ne dépend que des extrémités de C .

Theorem 5.3.1 Si la fonction $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ est continue sur un domaine D ouverte et connexe, une condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale curviligne $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ soit indépendante du chemin est que $\mathbf{F}$ soit conservatif; autrement dit $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ pour une certaine fonction scalaire f .

Démonstration : Supposons que l'intégrale soit indépendante du chemin d'intégration dans le domaine D et soit $A = (x_0, y_0)$ un point fixé de D et $B = (x, y)$, définissons la fonction

$$f(x, y) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

et montrons que

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y).$$

Puisque l'intégrale est indépendante du chemin, f n'est fonction que de x et y et non du chemin C joignant A à B . Soit un cercle dans D centré en (x, y) et soit (x_1, y) un point intérieur de cercle tel que $x_1 \neq x$. Soit C_1 le chemin de $A = (x_0, y_0)$ à $E = (x_1, y)$ et C_2 le segment horizontal qui joint $E = (x_1, y)$ à $B = (x, y)$, on a

$$f(x, y) = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^E \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_E^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

On a en dérivant par rapport à x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{E=(x_1, y)}^{B=(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{E=(x_1, y)}^{B=(x, y)} M(x, y) \cdot dx \\ &= M(x, y). \end{aligned}$$

Si le chemin C_2 joint les points $F = (x, y_1)$ et $B = (x, y)$ on obtient en suivant le même raisonnement

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = N(x, y).$$

Dès lors $\nabla f(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} = \mathbf{F}(x, y)$.

Inversément, s'il existe une fonction f qui est telle que $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$, on

$$M(x, y) = f'_x(x, y), \quad N(x, y) = f'_y(x, y).$$

Soit C une courbe lisse par morceau qui joint $A(x_1, y_1)$ à $B(x_2, y_2)$, nous avons

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy = \int_C f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

En se servant d'une description paramétrique de C ($x = g(t), y = h(t)$; $t_1 \leq t \leq t_2$) on a :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \left[f'_x(g(t), h(t))g'(t) + f'_y(g(t), h(t))h'(t) \right] dt.$$

ou encore tenant compte de la dérivation de fonctions composées

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} [f(g(t), h(t))] dt \\ &= f(g(t_2), h(t_2)) - f(g(t_1), h(t_1)) \\ &= [f(x, y)]_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \end{aligned}$$

et donc que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ est indépendant du chemin joignant A à B .

Theorem 5.3.2 Soit $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ continue sur une région ou-

verte D et connexe et soit C une courbe lisse de D par morceau d'extrémités $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$. Si $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ alors

$$\int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy = \int_{(x_2, y_2)}^{(x_1, y_1)} \mathbf{F}d\mathbf{r} = [f(x, y)]_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)}$$

Exercice 5.3.3 Soit $\mathbf{F}(x, y) = (2x + y^3)\mathbf{i} + (3xy^2 + 4)\mathbf{j}$.

1. Montrer que $\int_C \mathbf{F}d\mathbf{r}$ est indépendant du chemin du chemin d'intégration,
2. Calculer $\int_{(0,1)}^{(2,3)} \mathbf{F}d\mathbf{r}$.

Solution :

1. Pour que $\int_C \mathbf{F}d\mathbf{r}$ soit indépendante du chemin, il suffit qu'il existe une fonction différentiable $f(x, y)$ telle que $\nabla f(x, y) = \mathbf{F}(x, y)$ ou bien

$$f'_x(x, y)\mathbf{i} + f'_y(x, y)\mathbf{j} = (2x + y^3)\mathbf{i} + (3xy^2 + 4)\mathbf{j}.$$

Cette équation est équivalente à

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 2x + y^3 \\ f'_y(x, y) &= 3xy^2 + 4 \end{aligned} \quad (5.2)$$

En intégrant (partiellement) la première équation par rapport à x on obtient :

$$f(x, y) = x^2 + xy^3 + g(y),$$

où g est une fonction de y seule. (Nous devons $g(y)$ au lieu d'une constante de manière à pouvoir obtenir une expression plus générale de $f(x, y)$ dont la dérivée partielle par rapport à x soit $2x + y^3$).

Nous dérivons ensuite $f(x, y) = x^2 + xy^3 + g(y)$ par rapport à y et comparons le résultat avec l'expression (5.2) i.e. $f'_y(x, y) = 3xy^2 + 4$. On

$$f'_y(x, y) = 0 + 3xy^2 + g'(y) = 3xy^2 + 4$$

ce qui donne

$$g'(y) = 4.$$

Une intégration par rapport à y donne

$$g(y) = 4y + c,$$

avec c une constante d'intégration. D'où

$$f(x, y) = x^2 + xy^3 + 4y + c$$

2. Comme n'importe quelle potentielle peut servir à calculer l'intégrale nous employons $f(x, y) = x^2 + xy^3 + 4y$ et nous appliquons le théorème 5.3.2

$$\begin{aligned}\int_{(0,1)}^{(2,3)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= [f(x, y)]_{(0,1)}^{(2,3)} \\ &= [x^2 + xy^3 + 4y]_{(0,1)}^{(2,3)} \\ &= (4 + 54 + 12) - 4 = 60\end{aligned}$$

Theorem 5.3.4 Si $\mathbf{F}$ est un champ de force conservatif en dimension deux, le travail fourni par $\mathbf{F}$ le long d'un chemin quelconque C joignant $A(x_1, y_1)$ à $B(x_2, y_2)$ est égale à la différence des potentiels entre A et B .

Démonstration : exercice

Nous savons que si $\int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy$ est indépendant du chemin d'intégration, il existe une fonction potentiel f qui es telle que

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } N = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

On a donc par conséquent

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ et } \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

On en déduit donc :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Theorem 5.3.5 Si $M(x, y)$ et $N(x, y)$ on des dérivées partielles premières continues sur une région simplement connexe D , l'intégrale curviligne,

$$\int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

est indépendante du chemin d'intégration dans D si et seulement si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Exercice 5.3.6 (1) Montrer que l'intégrale curviligne

$$\int_C (e^{3y} - y^2 \sin x)dx + (3xe^{3y} + 2y \cos x)dy$$

est indépendante du chemin d'intégration dans une région simplement connexe.

(2) Soit $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 \cos x \mathbf{i} + (2y \sin x + e^{2z}) \mathbf{j} + 2ye^{2z} \mathbf{k}$

(a) Montrer que $\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r}$ est indépendant du chemin d'intégration et calculer une fonction potentiel f de $\mathbf{F}$.

(b) Si $\mathbf{F}$ est un champ de force, calculer le travail fourni par $\mathbf{F}$ le long de n'importe quelle courbe C joignant $(0, 1, 1/2)$ à $(\pi/2, 3, 2)$.

Solution : exercice (utiliser le théorème 5.3.5 pour (1)) et pour (2) trouver une fonction potentielle f qui est telle que $\nabla f(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)$.

Definition 5.3.7 Si $\mathbf{F}(x, y, z)$ est un champ de vecteurs conservatifs dérivant d'un potentiel, l'énergie potentielle $E_p(x, y, z)$ d'un point matériel en (x, y, z) est

$$E_p(x, y, z) = -f(x, y, z)$$

Puisque l'énergie potentielle est l'opposé du potentiel $f(x, y, z)$ on a

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla E_p(x, y, z).$$

Le travail total pour déplacer une particule le long d'une courbe lisse C d'un point A à un point B est donnée par (voir théorème 5.3.4)

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = [-E_p(x, y, z)]_B^A = E_p(A) - E_p(B)$$

où $E_p(A)$ et $E_p(B)$ sont respectivement les énergies potentielles aux points A et au point B .

Theorem 5.3.8 Principe de la conservation d'énergie totale. Quand une particule se déplace d'un point à un autre dans un champ de forces conservatif, la somme de l'énergie potentielle et cinétique rest constante autrement dit, l'énergie totale est invariante.

Démonstration : Soit $\mathbf{F}$ un champ de forces conservatif dans lequel se déplace une particule de A à B , le long d'une courbe lisse par morceaux C . Au temps t , elle occupe la position déterminée par

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad z = k(t); \quad a \leq t \leq b.$$

Le vecteur position de la particule est $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ et les vecteurs vitesse et accélération sont respectivement :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \text{et} \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

La vitesse de la particule est :

$$v = \|\mathbf{v}\|.$$

Le travail fourni par $\mathbf{F}(x, y, z)$ le long de la courbe C est donné par :

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \left(\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) dt = \int_A^B (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dt.$$

Par la loi fondamentale de la dynamique de Newton on a

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

et

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \left(m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \right) dt \\ &= m \int_a^b \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \right) dt = m \int_a^b \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dt \\ &= \frac{1}{2} m \int_a^b \frac{d}{dt} (v^2) dt = \frac{1}{2} m [v^2]_a^b \\ &= \frac{1}{2} m (v(b)^2 - v(a)^2) \\ &= E_c(B) - E_c(A) \end{aligned}$$

D'autre par si $\mathbf{F}(x, y, z)$ on a que

$$\int_A^B \mathbf{F} d\mathbf{r} = E_p(A) - E_p(B).$$

On donc que

$$E_p(A) + E_c(A) = E_p(B) + E_c(B).$$

Exercice 5.3.9 1. Soit $\mathbf{F}$ une force dirigée vers l'origine et d'amplitude inversement proportionnel à sa distance de l'origine. Démontrer que $\mathbf{F}$ est conservatif en cherchant le potentiel dont $\mathbf{F}$ dérive.

2. Montrer que si $\mathbf{F} = g(x)\mathbf{i} + h(y)\mathbf{j} + k(z)\mathbf{k}$, où g , h , et k sont des fonctions continues, $\mathbf{F}$ est conservatif.

5.4 Théorème de Green-Riemann

Le théorème de Green-Riemann établit une relation entre l'intégrale curviligne autour d'une courbe simple fermée lisse par morceaux C et une intégrale double sur la région R délimitée par la courbe C .

Theorem 5.4.1 Soit C une courbe simple fermée lisse par morceaux et R la région délimitée par C bord y compris. Si $M = M(x, y)$ et $N = N(x, y)$ sont deux

fonctions continues dont les dérivées partielles premières existent et sont continues sur une région ouvert D contenant R , alors

$$\oint_C Mdx + Ndy = \int \int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA.$$

Démonstration : Considérons le cas où la région R est à la fois de type R_x et de type R_y décrit par :

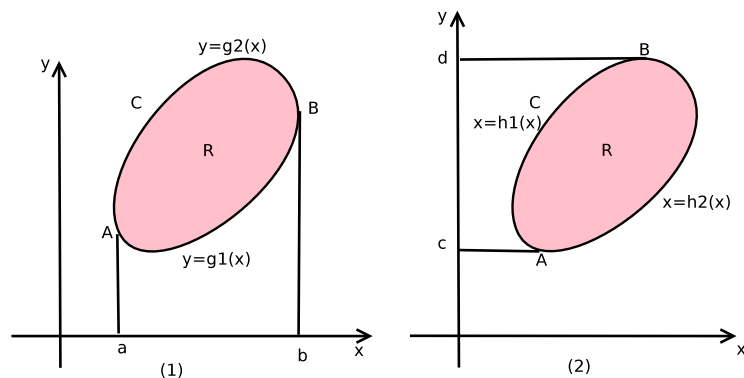
$$\begin{aligned} R &= \{(x, y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \\ R &= \{(x, y) : c \leq x \leq d, h_1(x) \leq x \leq h_2(x)\} \end{aligned}$$

où g_1, g_2, h_1, h_2 sont des fonctions lisses. on a :

$$(1) \oint_C Mdx = - \int \int \frac{\partial M}{\partial y} dA$$

$$(2) \oint_C Mdx = - \int \int \frac{\partial M}{\partial y} dA$$

La figure (1) montre que C se compose de deux courbes C_1 et C_2 d'équations



respectively $y = g_1(x)$ et $y = g_2(x)$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \oint_C Mdx &= \int_{C_1} M(x, y)dx + \int_{C_2} M(x, y)dx \\ &= \int_a^b M(x, g_1(x))dx + \int_b^a M(x, g_2(x))dx \\ &= \int_a^b M(x, g_1(x))dx - \int_a^b M(x, g_2(x))dx \end{aligned}$$

D'un part on a :

$$\begin{aligned}\int \int_R \frac{\partial M}{\partial y} dA &= \int_a^b \int_{g_2(x)}^{g_1(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy dx \\ &= \int_a^b [M(x, y)]_{g_2(x)}^{g_1(x)} dx \\ &= \int_a^b [M(x, g_1(x)) - M(x, g_2(x))] dx\end{aligned}$$

Ce qui prouve la formule (1). La formule (2) se démontre de la même manière.

Exercice 5.4.2 (1) Calculer par le théorème de Green-Riemann $\oint_C 5xydx + x^3dy$ où C est la courbe fermée composée des graphiques de $y = x^2$ et $y = 2x$ entre les points $(0, 0)$ et $(2, 4)$. Rép : $-28/15$

(2) Calculer par le théorème de Green-Riemann $\oint_C 2xydx + (x^2 + y^2)dy$ où C est l'ellipse $4x^2 + 9y^2 = 36$. Rép : 0 .

5.4.1 Application du théorème de Green-Riemann au calcul de l'aire A d'une région R

Si $M = 0$ et $N = x$ on a :

$$A = \int \int_R dA = \oint_C xdy$$

de même en posant $M = -y$ et $N = 0$

$$A = \int \int_R dA = - \oint_C ydx.$$

Theorem 5.4.3 L'aire d'une région plane R bornée par une courbe fermée simple et lisse par morceaux est égale à

$$A = \oint_C xdy = - \oint_C ydx = \frac{1}{2} \oint_C xdy - \int_C ydx$$

On utilise la troisième formule dans la pratique.

5.4.2 Forme vectorielle de la formule de Green-Riemann

En dimension deux un champ vectoriel peut s'écrire :

$$\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + 0\mathbf{k}.$$

Ainsi

$$\text{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Soit s l'abscisse curviligne de C , nous savons le vecteur

$$\mathbf{T} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k},$$

et on peut donc écrire le théorème de Green-Riemann sous la forme :

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int \int_R (\text{rot}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA.$$

Cette forme se lit :

L'intégrale curviligne de la composante tangentielle de $\mathbf{F}$ sur le contour C dans l'orientation positive est égale à l'intégrale double sur R de la composante normale du rotationnel de $\mathbf{F}$.

Exercice 5.4.4 1. Utiliser la formule de Green-Riemann pour calculer l'intégrale curviligne

- (a) $\oint_C (x^2 + y^2)dx + (xy)^2 dy$; C est la courbe fermée composée de $y^2 = x$ et $y = -x$ pour $0 \leq x \leq 1$.
- (b) $\oint_C y^2 dx + x^2 dy$; C est la frontière de la région limitée par le demi-cercle $y = \sqrt{4 - x^2}$ et l'axe des x .
- (c) $\oint_C (1 - x^2 y)dx + \sin y dy$; C est le contour de la région située à l'intérieur du carré de sommets $(\pm 2, \pm 2)$ et à l'extérieur du carré de sommets $(\pm 1, \pm 1)$.
- (d) Utiliser le théorème 5.4.3 pour calculer l'aire de la région limitée par la courbe C .
 - i. C est l'hypocyloïde $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$; $0 \leq t \leq 2\pi$.
 - ii. C est la courbe lisse par morceaux composée du folium de Descartes

$$x = \frac{3t}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3 + 1}; \quad 0 \leq t \leq 1$$

et du segment de droite reliant $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ à $(0, 0)$.

2. Soit $M = y/(x^2 + y^2)$ et $N = -x/(x^2 + y^2)$. Montrer que

$$\oint M dx + N dy \neq \int \int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

où R est la région limitée par le cercle unité C centré à l'origine. Expliquer pourquoi la formule de Green-Riemann n'est pas vérifiée dans ce cas.

5.5 Intégrales de surface

Une surface S a une projection régulière sur un plan de coordonnées si cette projection est une région du plan semblable à celle que nous avons déjà envisagée dans les chapitres qui précèdent. Cette région est parfois qualifiée de R_{xy} , R_{xz} , R_{yz} . L'équation de la surface S peut être l'une des formes $y = f(x, y)$, $y = h(x, z)$, $x = k(y, z)$. Il est en plus supposé que les fonctions f , g , k ont des dérivées partielles premières continues sur leurs régions respectives.

Considérons la surface S d'équation $z = f(x, y)$. L'aire A de la surface S avait déjà été calculée dans les chapitres antérieurs. En suivant la même technique nous allons pouvoir définir une intégrale de $g(x, y, z)$ sur la surface S sous-entendant que la fonction g est continue sur une région contenant S . Soit respectivement ΔS_k et ΔT_k l'aire de la portion de S et de la portion du plan tangent à S en un point $B_k(x_k, y_k, z_k)$ qui se projettent sur le rectangle R_k , élément du découpage intérieur de R_{xy} . Nous calculons g en B_k pour chaque k et formons la somme de Riemann $\sum_k g(x_k, y_k, z_k) \Delta T_k$. L'intégrale de surface $\int \int_S g(x, y, z) dS$ de g se définit comme la limite de telles sommes lorsque le pas du découpage tend vers 0.

Definition 5.5.1 Intégrale de surface.

$$\int \int_S g(x, y, z) dS = \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k g(x_k, y_k, z_k) \Delta T_k$$

Theorem 5.5.2 Calcul de intégrales de surface. Par un raisonnement analogue que celui pour le calcul des aires des surfaces nous avons :

$$\begin{aligned} (1) \quad \int \int_S g(x, y, z) dS &= \int \int_{R_{xy}} g(x, y, z) \sqrt{[f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2 + 1} dA \\ (2) \quad \int \int_S g(x, y, z) dS &= \int \int_{R_{xz}} g(x, y, z) \sqrt{[h'_x(x, y)]^2 + [h'_y(x, y)]^2 + 1} dA \\ (3) \quad \int \int_S g(x, y, z) dS &= \int \int_{R_{yz}} g(x, y, z) \sqrt{[k'_x(x, y)]^2 + [k'_y(x, y)]^2 + 1} dA \end{aligned}$$

Exercice 5.5.3 Calculer $\int \int_S x^2 z dS$ étant donné que S est la surface du cône $z^2 = x^2 + y^2$ coupé par les plans $z = 1$ et $z = 4$.

Solution : La projection R_{xy} est un anneau compris entre les cercles de rayon 1 et 4 centrés à l'origine. L'équation de la surface S est donnée par

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ses dérivées partielles sont données par :

$$f'_x = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \quad \text{et} \quad \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}.$$

On a donc en utilisant la première formule du théorème précédent

$$\iint_S x^2 z dS = \iint_{R_{xy}} x^2 (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} dA$$

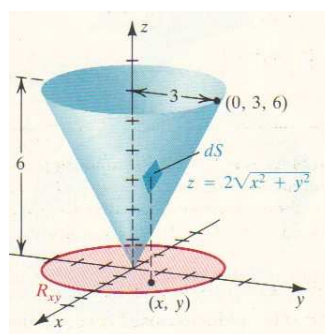
ou encore en passant en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \iint_{R_{xy}} x^2 (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} dA &= \int_0^{2\pi} \int_1^4 4(r^2 \cos^2 \theta) r \sqrt{2} dr d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \left[\frac{r^5}{5} \right]_1^4 d\theta \\ &= \frac{1023\sqrt{2}}{5} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1023\sqrt{2}}{5} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1023\sqrt{2}\pi}{5} \approx 909. \end{aligned}$$

Exercice 5.5.4 (1) Calculer $\iint_S (xz/y) dS$, où S est la portion du cylindre $x = y^2$ comprise, dans le premier octant, entre les plans $z = 0$, $z = 5$, $y = 1$ et $y = 4$. Rép : $\frac{25}{24}(65^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}})$

(2) Calculer $\iint_S (z+y) dS$, où S est, dans le premier octant, la portion du graphique $z = \sqrt{1-x^2}$ limitée par le plan des xz et le plan $y = 3$. Rép : $3 + \frac{9}{\pi}$

(3) Un gobelet en carton a la forme d'un cône circulaire droit de 7 cm de rayon et de 14 cm de haut. Si le gobelet est rempli d'eau (densité 9800 N/m^3), calculer la pression totale exercée par l'eau sur la surface intérieure du gobelet. Rép : $\frac{19600}{10^6} \frac{7^3}{3} \sqrt{5} \pi \text{ N}$

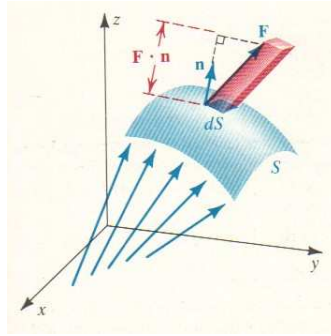


5.5.1 Flux du champ vectoriel $\mathbf{F}$ à travers S

Definition 5.5.5 Le flux d'un champ de vecteurs $\mathbf{F}$ à travers une surface S est

$$\int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

où $\mathbf{n}$ est un vecteur unitaire.



Le calcul du flux exige de préciser le vecteur unitaire $\mathbf{n}$. Si S est la représentation graphique de $z = f(x, y)$, elle est aussi l'ensemble des points qui satisfont l'équation $g(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$ et le vecteur $\mathbf{grad}(x, y, z)$ lui est normal au point (x, y, z) . D'où un vecteur unitaire normal $\mathbf{n}$ est donné par :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g(x, y, z)}{\|\nabla g(x, y, z)\|} = \frac{-f'_x(x, y)\mathbf{i} + f'_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{[f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2 + 1}}$$

Des formules analogues pourraient être établies dans le cas où S serait le graphique d'un équation $y = h(x, z)$ ou $x = k(y, z)$. Comme la composante du vecteur $\mathbf{n}$ est positive, la normale est dite normale supérieure sinon elle sera dite normale inférieure.

Dans toute la suite, nous supposons que toute surface S est orientée dans le sens où, en tout point non frontière, elle admet un vecteur normal $\mathbf{n}$ dont les composantes sont des fonctions continues de x, y et z . La variation de $\mathbf{n}$ est en quelque sorte continue sur S . À chaque surface S sont aussi reconnues deux faces, la face supérieure et la face inférieure. Dans le cas d'une sphère on parle de surface intérieure ou extérieure et vecteur normal unitaire intérieur et extérieur. Sous ces conditions la bande de Möbius n'est pas une surface orientable, elle n'a qu'une face !

Supposons la surface S comme une fine membrane à travers laquelle passe un liquide ou un gaz. Imaginons que S soit immergée dans ce fluide en mouvement qui détermine un champ de vitesses $\mathbf{F}(x, y, z)$. Soit dS un élément d'aire de S . Si le champ $\mathbf{F}$ est continu, il est acceptable de supposer que sur dS , $\mathbf{F}$ est presque constant et dans ces conditions, la quantité du fluide qui traverse dS par unité de

temps est approximativement égale au volume d'un prisme de base dS et de hauteur $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$. Soit $dV = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$. Comme représente la quantité de fluide qui par unité de temps traverse dS et que l'intégrale de surface sur S est une limite des sommes de tels éléments de volume,

$$\int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

et le volume du fluide qui par unité de temps traverse S . C'est cette quantité de fluide que nous appelons flux.

Si on ajoute la densité du fluide $\delta(x, y, z)$, alors l'intégrale de surface

$$\int \int_S \delta(x, y, z) \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

est égale à la masse du fluide qui traverse S .

Exercice 5.5.6 1. Soit S la partie positive du graphique de $z = 9 - x^2 - y^2$. Calculer le flux du champ $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ à travers S . Rép : $\frac{567\pi}{2}$.

2. Calculer $\int \int_R g(x, y, z) dS$

(a) $g(x, y, z) = x^2$; S est la moitié supérieure de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

(b) $g(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$; S est la portion du paraboloïde $2z = x^2 + y^2$ intérieur au cylindre $x^2 + y^2 = 2y$.

3. Calculer $\int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ où $\mathbf{n}$ est un vecteur unitaire normal supérieur à S

(a) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, S est la moitié supérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

(b) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, S est la portion du plan $3x + 2y + z = 12$ taillée par les plans $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, et $y = 2$.

4. Calculer le flux de $\mathbf{F}$ à travers S . $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + z)\mathbf{i} + y^2 z\mathbf{j} + (x^2 + y^2 + z)\mathbf{k}$, S est la portion du paraboloïde situé dans le premier octant limitée par le plan $z = 4$.

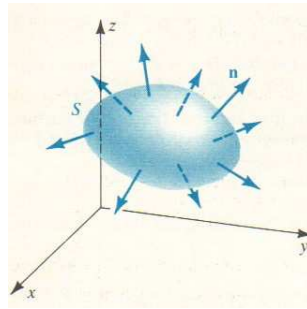
5. Démontré que

$$\int \int_R \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int \int_{R_{yz}} [M - Nk'_y(y, z) - Pk'_z(y, z)] dy dz$$

si S est le graphique de $x = k(y, z)$ et $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$

5.6 Théorème de flux-divergence ou de Gauss-Ostrogradsky

Ce théorème se rapporte au flux d'un champ sur une surface fermée S qui enveloppe une région Q de dimension trois, comme une sphère, un ellipsoïde, un cube, etc. Voici l'énoncé de ce théorème :



Theorem 5.6.1 Soit S une surface fermée qui enveloppe une région Q de dimension trois et soit $\mathbf{n}$ le vecteur unitaire normal à S en (x, y, z) . Si $\mathbf{F}$ est une fonction vectorielle dont les dérivées partielles premières sont continues sur Q , alors

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} dV;$$

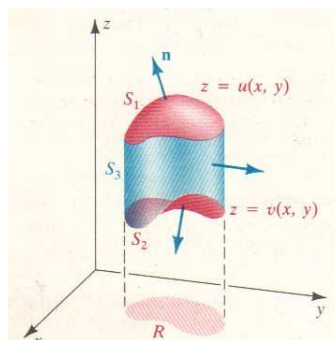
autrement dit, le flux de $\mathbf{F}$ à travers S est égal à l'intégrale triple sur Q de la divergence de $\mathbf{F}$.

Démonstration : Si $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ alors

$$\iint_S (M\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} + N\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} + P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) dS = \iiint_Q \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) dV$$

ou encore

$$\begin{aligned} \iint_S M\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS &= \iiint_Q \frac{\partial M}{\partial x} dV \\ \iint_S N\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS &= \iiint_Q \frac{\partial N}{\partial y} dV \\ \iint_S P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS &= \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z} dV \end{aligned}$$



Démontrons la troisième formule dans le cas particulier où S est la surface d'une

région Q qui se trouve située entre le graphique de $z = v(x, y)$ et $z = u(x, y)$ au dessus d'une région convenable R du plan des xy . Soit S_1 la surface supérieure et S_2 la surface inférieure et S_3 la surface latérale. Sur S_3 , la composante de $\mathbf{n}$ selon $\mathbf{k}$ est nulle et donc aussi le produit $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}$. Ce qui entraîne que le flux à travers S_3 est nul. Seules les surfaces S_1 et S_2 contribuent effectivement au flux. On écrit :

$$\int \int_S P \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \int \int_{S_1} P \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} + \int \int_{S_2} P \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}.$$

Soit $g_1(x, y, z) = z - u(x, y)$ l'équation de la surface S_1 , un vecteur normal unitaire est donnée par :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g_1(x, y, z)}{\|\nabla g_1(x, y, z)\|} = \frac{-u'_x(x, y)\mathbf{i} + u'_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{[u'_x(x, y)]^2 + [u'_y(x, y)]^2 + 1}}.$$

Et donc on

$$\int \int_{S_1} P \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \int \int_R P(x, y, u(x, y)) dA$$

avec $R = R_{xy}$ et $u(x, y) = f(x, y) = z$

Soit aussi $g_2(x, y, z) = z - v(x, y)$ l'équation de la surface S_2 , un vecteur normal unitaire est donnée par :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g_2(x, y, z)}{\|\nabla g_2(x, y, z)\|} = \frac{-v'_x(x, y)\mathbf{i} + v'_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{[v'_x(x, y)]^2 + [v'_y(x, y)]^2 + 1}}.$$

Et le flux à travers S_2 est donné par :

$$\int \int_{S_2} P \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = - \int \int_R P(x, y, v(x, y)) dA$$

avec $R = R_{xy}$ et $v(x, y) = f(x, y) = z$. La somme des flux à travers S_1 et S_2 vaut :

$$\begin{aligned} \int \int_S P \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS &= \int \int_R [P(x, y, u(x, y)) - P(x, y, v(x, y))] dA \\ &= \int \int_R \left[\int_{v(x, y)}^{u(x, y)} \frac{\partial P}{\partial z} dz \right] dA = \int \int \int_Q \frac{\partial P}{\partial z} dV \end{aligned}$$

Exercice 5.6.2 Soit Q la région limitée par le cylindre circulaire $x^2 + y^2 = 4$ et les plans $z = 0$ et $z = 3$. La surface de Q est désignée par S . Calculer $\int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ par le théorème de flux-divergence.

Solution : $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$, on a donc

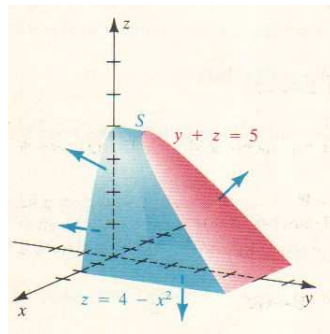
$$\int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = 3 \int \int \int_Q (x^2 + y^2 + z^2) dV.$$

Nous obtenons en passant aux coordonnées cylindriques :

$$\int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^3 (r^2 + z^2) r dr dz d\theta = 180\pi.$$

Exercice 5.6.3 1. Soit Q la région bornée par le cylindre $z = 4 - x^2$, le plan $y + z = 5$, le plan des xy et le plan des xz dont la surface est désignée par S . Calculer $\int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ par le théorème de flux-divergence, pour

$$\mathbf{F} = (x^3 + \sin z)\mathbf{i} + (x^2y + \cos z)\mathbf{j} + e^{x^2+y^2}\mathbf{k}$$



Rép : $\frac{4608}{35}$.

2. Calculer $\int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ par le théorème du flux-divergence :

(a) $\mathbf{F} = y \sin z \mathbf{i} + y^2 z \mathbf{j} + (x + 3z) \mathbf{k}$, S est la région limitée par les plans $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$, Rép : 24

(b) $\mathbf{F} = (x^2 + \sin yz) \mathbf{i} + (y - xe^{-z}) \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$, S est la surface de la région bornée par le cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et les plans $x + z = 2$ et $z = 0$, Rép : 20π

3. Indentités impliquant div , grad , et rot :

(a) Prouver que si ϕ est une fonction scalaire de x, y, z , alors

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \phi) = \mathbf{0}$$

(b) Enoncer en termes du champ de vecteurs $\nabla \wedge \mathbf{F}$ comment on peut exprimer la condition que $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ est une différentielle exacte.

(c) Prouver les résultats suivants si $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

$$i. \operatorname{div}(\phi \mathbf{F}) \equiv \nabla \cdot (\phi \mathbf{F}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla \phi;$$

$$ii. \nabla \wedge (\phi \mathbf{F}) = \phi \nabla \wedge \mathbf{F} + (\nabla \phi) \wedge \mathbf{F};$$

$$iii. \nabla \cdot (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2 \cdot \nabla \wedge \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 \cdot \nabla \wedge \mathbf{F}_2$$

$$iv. \nabla \cdot \mathbf{r} = 3 \text{ et } \nabla \wedge \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

4. Employer le théorème de flux-divergence pour démontrer que

$$\int \int \int_Q \nabla^2 f dV = \int \int_S f'_n dS$$

où f est une fonction scalaire dont les dérivées secondes partielles sont continues et où f'_n est la dérivée directionnelle de f dans la direction d'un vecteur unitaire $\mathbf{n}$ normal à S orienté vers l'extérieur.

5. Démontrer

$$\int \int \int_Q (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV = \int \int_S (f \nabla g) \cdot \mathbf{n} dS$$

et

$$\int \int \int_Q (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV = \int \int_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} dS$$

où f et g sont des fonctions scalaires dont les dérivées secondes partielles sont continues et S et Q satisfont aux conditions du théorème de flux-divergence.

5.7 Théorème de Stokes

Nous voulons généraliser le théorème de Green-Riemann

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int \int_R (\mathbf{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA$$

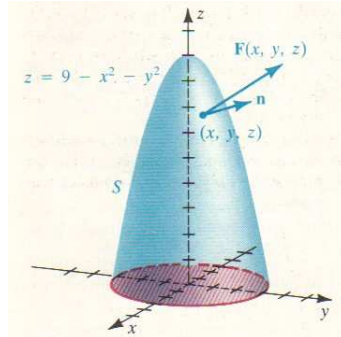
à une courbe simple fermée en dimension trois qui constitue la frontière d'une surface S .

Theorem 5.7.1 Soit $\mathbf{F}$ un champ vectoriel dont les composantes admettent des dérivées partielles continues sur une région contenant S . L'intégrale curviligne de la composante tangentielle de $\mathbf{F}$ le long d'une courbe de l'espace C bord de S et parcourue une fois dans le sens positif est égale à l'intégrale de surface de la composante normale du rotationnel de $\mathbf{F}$ à travers S . Cela s'écrit :

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int \int_S (\mathbf{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA. \quad (5.3)$$

Si $\mathbf{F}$ est un champ de forces, le théorème affirme que le travail fourni par $\mathbf{F}$ le long du bord C de S est égal au flux du champ de vecteur $\mathbf{rot} \mathbf{F}$ à travers S .

Exemple 5.7.2 Soit S la partie positive du paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ et C la trace de S dans le plan des xy . Vérifier le théorème de Stokes sur le champ vectoriel $\mathbf{F} = 3z\mathbf{i} + 4x\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$



Solution : Nous allons montrer l'égalité dans la relation 5.3. Un vecteur normal unitaire est donné par

$$\mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

et

$$\mathbf{rot} \mathbf{F} = \nabla \wedge \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3z & 4x & 2y \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

Donc

$$\int \int_A \mathbf{rot} \mathbf{F} \mathbf{n} dS = \int \int_S \frac{4x + 6y + 4}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} dS.$$

Pour calculer cette intégrale de surface on utilise :

$$\int \int_S g(x, y, z) dS = \int \int_{R_{xy}} g(x, y, z) \sqrt{[f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2 + 1} dA$$

on obtient

$$\int \int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \mathbf{n} dS = \int \int_R (4x + 6y + 4) dA.$$

En passant aux coordonnées polaires on a :

$$\int \int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \mathbf{n} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (4r \cos \theta + 6r \sin \theta + 4) r dr d\theta = 36\pi.$$

D'autre part, l'intégrale curviligne $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ s'écrit :

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C 3z dz + 4x dy + 2y dz,$$

où C est la circonférence $x^2 + y^2 = 9$ du plan des xy . Comme $z = 0$ sur C , cette intégrale curviligne se réduit à

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C 4x dy = 4 \oint_C x dy = 36\pi.$$

La même valeur que celle de l'intégrale de surface. On cloture ce chapitre par ce théorème :

Theorem 5.7.3 Si $\mathbf{F}(x, y, z)$ a des dérivées partielles premières continues sur une région simplement connexe D , les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\mathbf{F}$ est conservatif, autrement dit, $\mathbf{F} = \nabla f$ pour une certaine fonction scalaire f .
- (2) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ est indépendant du chemin d'intégration dans D .
- (3) $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ le long de tout courbe simple fermée C dans D .
- (4) $\mathbf{F}$ est irrotationnel; autrement dit, $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Démonstration : **exercice**

Exercice 5.7.4 1. Soit $\mathbf{n}$ le vecteur extérieur normal à la surface elliptique

$$S : 4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36, \quad z \geq 0,$$

et soit

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + (x^2 + y^4)^{3/2} \sin e^{\sqrt{xyz}}\mathbf{k}.$$

Utiliser le théorème de Stokes pour trouver la valeur de

$$\int \int_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$$

2. Soit $\phi = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ et $\mathbf{F} = \text{grad } \phi$, et soit C le cercle $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ dans le plan des xy . Montrer par un calcul direct que

(a) $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ et

(b) en appliquant le théorème de Stokes avec S l'hémisphère

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq a^2$$

Chapitre 6

Une notion des équations différentielles

Une équation différentielle d'ordre n est une relation de la forme

$$F = F(x, y, y', y'', y^n)$$

Exemple 6.0.5 1. $y' = 2x$, est une équation différentielle d'ordre 1.

2. $\frac{d^2y}{dx^2} + x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 15y = 0$ équadiff d'ordre 2

3. $(y''')^4 - x^2(y'')^5 + 4xy = xe^x$ équadiff d'ordre ?

La solution d'une équation différentielle est une fonction f qui, substituer à y vérifie indistinctement l'équation pour x dans un certain intervalle.

Exemple 6.0.6 La fonction $f(x) = 2x^3 - 5x + C$ où C est une constante, est solution de l'équation différentielle

$$y' = 6x^2 - 5.$$

La solution $f(x) = 2x^3 - 5x + C$ est appelée solution générale de $y' = 6x^2 - 5$ parceque toute solution est de cette forme. Une solution particulière s'obtient en spécifiant une valeur de C . Si par exemple $C = 0$, $y = 2x^3 - 5x$ est une solution particulière. Parfois ce sont les conditions initiales qui isolent une solution particulière de l'ensemble de toutes les solutions possibles.

Exercice 6.0.7 Etant donné l'équation différentielle $y' = 2x$,

1. déterminer la solution générale et en donner une représentation graphique
2. déterminer la solution particulière qui satisfait la condition $y = 3$ quand $x = 3$.

Exercice 6.0.8 1. Montrer que

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-5x}$$

où C_1 et C_2 sont des nombres réels quelconques est une solution de l'équation différentielle

$$y'' - 25y = 0$$

2. Résoudre l'équation différentielle

$$2y + (xy + 3x)y' = 0, \text{ où } x \neq 0$$

3. Résoudre

$$(1 + y^2) + (1 + x^2)y' = 0.$$

Trajectoire orthogonale

Une trajectoire orthogonale d'une famille de courbes est une courbe qui en chacun de ses points est orthogonale à une courbe de la famille. Par exemple, chaque droite $y = -(1/5)x + c$ de pente $-1/5$ est orthogonale à une courbe de la famille $y = 5x + b$ de pente 5. (Faites un graphique montrant les courbes de chaque famille). Deux telles familles sont dites mutuellement orthogonales. C'est le cas de la famille de droites $y = mx$ passant par l'origine et la famille des cercles concentriques, centrés à l'origine. On rencontre les familles orthogonales dans les applications. En électricité, et en magnétisme, par exemple, les lignes de forces associées à un champ donné sont des trajectoires orthogonales des courbes équipotentielles correspondantes. Les lignes de courant étudiées en aérodynamiques et en hydrodynamiques sont des trajectoires orthogonales des courbes niveau équipotentielles. Enfin un dernier exemple tiré de la thermodynamique, l'écoulement de chaleur à travers une surface plane, est orthogonale aux courbes isothermales. Les trajectoires orthogonales seront approfondies dans un court consacré uniquement aux équations différentielles.

Nous allons néanmoins montrer par un exemple comment trouver les trajectoires orthogonales d'une famille de courbes données.

Exemple 6.0.9 Chercher les trajectoires orthogonales de la famille des ellipses $x^2 + 3y^2 = c$ et dessiner quelques représentants de chaque famille.

Solution : Par dérivation implicite de l'équation donnée, on obtient :

$$2x + 6yy' = 0 \text{ ou } y' = -\frac{x}{3y}.$$

Ainsi, en chaque point (x, y) de chaque ellipse, la pente de la tangente est $y' = -x/(3y)$. Si dy/dx désigne la pente de la tangente à la trajectoire orthogonale correspondante, elle doit être l'opposé de l'inverse de y' . La famille des trajectoires orthogonales est donc régie par l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x}.$$

En séparant les variables puis intégrant on obtient

$$\ln |y| = 3 \ln |x| + \ln |k| = \ln |kx^3|.$$

Soit

$$y = kx^3$$

est une trajectoire de la famille des trajectoires orthogonales.

Exercice 6.0.10 1. Déterminer les trajectoires orthogonales de la famille de courbes et décrire les courbes présence.

(a) $x^2 - y^2 = c$

(b) $y = ce^{-x}$

(c) $y^2 = cx^3$

2. Montrer que la famille des trajectoires orthogonales a la famille de courbes

$$x^2 + y^2 = kx,$$

k un paramètre satisfait

$$(2yx^{-1})dy + (y^2x^{-2} - 1)dx = 0.$$

Trouver les trajectoires orthogonales en résolvant cette équation. Dessiner la famille des courbes ensemble avec leurs trajectoires orthogonales. (suggestions multiplier l'équation par $x^m y^n$ et déterminer les valeurs de n et m qui rend l'équation exacte.

Forme différentielle exacte

La forme différentielle

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

est dite exacte sur une région R si à travers R c'est une différentielle df d'une certaine fonction f . C'est-à-dire il existe une fonction $f(x, y)$ telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

pour tout (x, y) dans R .

6.1 Equation à variables séparables

L'équation

$$M(x) + N(y)y' = 0 \quad \text{ou} \quad M(x) + N(y)\frac{dy}{dx}$$

où M et N sont des fonctions continues, figure parmi les équations différentielles les plus simples. Si $y = f(x)$ est solution,

$$M(x) + N(f(x))f'(x) = 0.$$

Une intégration directe qui suppose la continuité de $f'(x)$ donne

$$\int M(x)dx + \int N(f(x))f'(x)dx = C,$$

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

Cette dernière équation est une solution implicite de l'équation différentielle. L'équation

$$M(x) + N(y)y' = 0$$

est variable séparables puisque les variables x et y ont put être séparées.

Exercice 6.1.1 Résoudre l'équation différentielle

1. $y^4 e^{2x} + \frac{dy}{dx} = 0$,
2. $2y + (xy + 3x)\frac{dy}{dx} = 0$
3. $(1 + y^2) + (1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 0$.

6.2 Equations différentielles linéaire du premier ordre

Definition 6.2.1 Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation de la forme

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{6.1}$$

où P et Q sont des fonctions continues.

Dans le cas particulier où $Q(x) = 0$ quel que soit x , on peut résoudre cette équation par la méthode de séparation de variables. On peut montrer que la solution est de la forme

$$ye^{\int P(x)dx} = C \tag{6.2}$$

En dérivant la solution 6.2 par rapport à x on a :

$$(y' + P(x)) \int P(x) dx.$$

Donc l'équation différentielle $y' + P(x)y = Q(x)$ multipliée par $ye^{\int P(x) dx}$ peut être écrite

$$\left(ye^{\int P(x) dx} \right)' = Q(x)e^{\int P(x) dx}.$$

En intégrant les deux membres on obtient une solution implicite

$$ye^{\int P(x) dx} = \int Q(x)e^{\int P(x) dx} dx + K$$

où K est une constante. Une solution explicite s'obtient en résolvant cette équation par rapport à y . L'expression

$$e^{\int P(x) dx}$$

est appelée facteur intégrant de l'équation différentielle.

Theorem 6.2.2 L'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + P(x)y = Q(x)$ peut être transformée en une équation différentielle séparable en multipliant les deux membres par le facteur intégrant

$$e^{\int P(x) dx}.$$

Example 6.2.3 Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} - 3x^2y = x^2.$$

Solution : $P(x) = -3x^2$, $Q(x) = x^2$. Le facteur intégrant est donné par

$$e^{\int P(x) dx} = e^{-3x^2} dx = e^{-x^3}$$

il vient donc en multipliant l'équation différentielle par ce facteur intégrant

$$(e^{-x^3}y)' = x^2e^{-x^3}$$

et en intégrant les deux membres par rapport à x on trouve

$$y = -\frac{1}{3} + Ce^{x^3}.$$

Exercice 6.2.4 Résoudre l'équation différentielle

1. $x^2y' + 5xy + 3x^5 = 0$, où $x \neq 0$.
2. $y' + y \tan x = \sec x + 2x \cos x$

Exercice 6.2.5 Un objet de masse m est lâché d'une montgolfière. Déterminer la hauteur de chute sur une durée de t secondes si la force de résistance de l'air est directement proportionnelle à la vitesse de l'objet.

$$\text{Rép : } y(t) = \frac{gm^2}{k^2} \left(\frac{k}{m}t + e^{-\frac{k}{m}t} - 1 \right)$$

6.3 Equations différentielles linéaire du second ordre

Définition 6.3.1 Une équation différentielle linéaire d'ordre n est une équation de la forme

$$y^n + f_1(x)y^{n-1} + \cdots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x) = k(x). \quad (6.3)$$

où $f_1, \dots, f_n$ et k sont des fonctions d'une variable qui partage le même domaine de définition. Quand $k(x) = 0$ pour tout x , l'équation est homogène. Quand $k(x) \neq 0$ pour un certain x , l'équation est non homogène.

Le traitement complet de l'équation sera consacré dans un cours à part d'équations différentielles. Nous allons nous limiter ici aux équations d'ordre 2 à coefficients constants. Dans cette section nous allons traiter le cas homogène et le cas non homogène sera traité dans la section suivante.

Le cas générale de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre est

$$y'' + by' + cy = 0$$

où b et c sont des constantes.

Theorem 6.3.2 Si $y = f(x)$ et $y = g(x)$ sont deux solutions de $y'' + by' + cy = 0$, alors

$$y = C_1 f(x) + C_2 g(x)$$

où C_1 et C_2 sont des nombres réels quelconques, est aussi une solution.

Démonstration : Laisser en exercice.

Il en résulte du théorème précédent que pour déterminer la solution générale, il suffit de produire deux telles fonction qui satisfont au théorème. La fonction

$$e^{rx}$$

va nous servir de solution d'essai. Puisque

$$y' = re^{rx} \quad \text{et} \quad y'' = r^2 e^{rx},$$

la fonction $y = e^{rx}$ est une solution si et seulement si

$$r^2 e^{rx} + br e^{rx} + ce^{rx} = 0$$

ou encore

$$r^2 + br + c = 0.$$

Cette équation joue un rôle important dans la recherche des solutions de l'équation $y'' + by' + cy = 0$ et est appelée **équation caractéristique** de l'équation différentielle $y'' + by' + cy = 0$.

Theorem 6.3.3 1. Si r_1 et r_2 sont les deux racines réelles distinctes de l'équation caractéristique alors

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{-r_2 x}.$$

2. Si l'équation caractéristique admet une racine double r , alors

$$y = C_1 x + C_2 x e^{rx}$$

3. Si les racines de l'équation caractéristique sont deux nombres complexes conjugués de la forme

$$z_1 = s + ti \quad \text{et} \quad z_2 = s - ti$$

nous écrivons

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{(s+ti)x} + C_2 e^{(s-ti)x}$$

qui est la solution générale de l'équation différentielle.

Nous devons utiliser les d'Euler pour écrire en termes simples la solution générale.

Séries entières pour les fonctions de $z = a + bi$

$$1. e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$$2. \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$3. \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

En remplaçant z par iz on a

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + (iz) + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} \dots \\ &= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i \frac{z^5}{5!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \right) + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right). \end{aligned}$$

Formule d'Euler

Si z est un nombre complexe alors

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

La solution générale peut encore s'écrire

$$y = e^{rx}(C_1 e^{txi} + C_2 e^{-txi}),$$

compte tenu des formules d'Euler nous avons

$$e^{itx} = \cos tx + i \sin tx \quad \text{et} \quad e^{-itx} = \cos tx - i \sin tx$$

soit

$$\cos tx = \frac{e^{itx} + e^{-itx}}{2} \quad \text{et} \quad \sin tx = \frac{e^{itx} - e^{-itx}}{2i}.$$

En posant $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$, nous obtenons la solution particulière de $y'' + by' + cy = 0$

$$y = \frac{1}{2}(2 \cos tx)(e^{itx} + e^{-itx}) = \frac{1}{2}(2 \cos tx) = e^x \cos tx.$$

De même en posant $C_1 = C_2 = -\frac{1}{2}$ on obtient la solution particulière

$$y = e^{sx} \sin tx$$

Theorem 6.3.4 Si l'équation caractéristique $r^2 + br + c = 0$ admet deux racines complexes distinctes $s + ti$, alors

$$\boxed{y = e^{sx}(C_1 \cos tx + C_2 \sin tx)}$$

Exercice 6.3.5 Résoudre l'équation différentielle $y'' - 10y' + 41y = 0$.

Rép : $y = e^{5x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$

Exercice 6.3.6 1. Trouver la solution générale

(a) $y'' + 5y' + 6y = 0$

(b) $y'' + 8y' + 16y = 0$

(c) $6y'' + y' - 2y = 0$

2. Résoudre le problème à valeur initiale

(a) $y'' - 4y' + 4y = 0$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$

(b) $y'' - 4y' + 3y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1/3$

(c) $y'' + 2y' + 2y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

6.4 Equations différentielles linéaires non homogènes

Nous allons considérer le cas d'ordre deux. Une équation différentielles linéaires non homogène d'ordre deux est de la forme

$$y'' + by' + cy = m(x)$$

Utilisons l'opérateur différentiel défini par $Dy = y' = f'(x)$, de sorte que $D^2y = y'' = f''(x)$.

Definition 6.4.1 Si $y = f(x)$ et si $f''(x)$, l'opérateur différentiel linéaire $L = D^2 + Db + c$ est définie par

$$L(y) = (D^2 + bD + c)y = D^2y + bDy + cy = y'' + bDy + cy = y'' + by' + cy.$$

Cet opérateur différentiel s'écrit aussi

$$L(y) = m(x).$$

On peut montrer que cet opérateur vérifie les propriétés

1. $L(Cy) = CL(y)$
2. $L(y_1 \pm y_2) = Ly_1 \pm Ly_2$

A l'équation différentielle $y'' + by' + cy = m(x)$ ou $L(y) = mx$ correspond l'équation homogène $L(y) = 0$, appelée équation homogène associée.

Theorem 6.4.2 Soit $y'' + by' + cy = kx$ une équation différentielle linéaire non homogène du second ordre. Si y_p est une solution particulière de $L(y) = k(x)$ et si y_h est la solution générale de l'équation homogène associée $L(y) = 0$, $y = y_p + y_h$ est la solution générale de l'équation $L(y) = k(x)$.

Démonstration : exercice

Example 6.4.3 Résoudre l'équation différentielle $y'' - 4y = 6y - 4x^3$ sachant que $y_p = x^3$ est une solution particulière.

Solution : L'équation homogène associée est $y'' - 4y = 0$ dont la solution générale est donnée par

$$y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$$

Conformément au théorème ci dessus, la solution générale est donnée par

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + x^3$$

Si une solution particulière de $y'' + by' + cy = m(x)$ n'apparaît pas d'emb ;èe, il y'a moyen d'en trouver une solution en suivant une méthode appelée **de la variation de la constantes** dont voici l'énoncé.

Méthode de la variation de la constante.

Si $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ est la solution générale de l'équation homogène associée $L(y) = 0$ et de $y'' + by' + cy = m(x)$, alors

$$y_p = u y_1 + v y_2$$

est une solution particulière de $L(y) = k(x)$, dans la quelle $u = g(x)$ et $v = h(x)$ satisfont le système d'équations :

$$\begin{cases} u' y_1 + v' y_2 = 0 \\ u' y_1' + v' y_2' = m(x) \end{cases} \quad (6.4)$$

Exercice 6.4.4 Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \cot x$ en utilisant la méthode de la variation de la constante.

Rép : $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \ln |\csc x - \cot x|$

Une équation différentielle de la forme

$$L(y) = y'' + by' + cy = e^{nx}$$

où n n'est pas une solution de $L(y) = 0$ a très probablement une solution particulière de la forme

$$y_p = Ae^{nx}$$

, puisque e^{nx} est le résultat de $L(Ae^{nx})$. Essayer une telle solution, c'est-à-dire chercher s'il existe une valeur de A telle que Ae^{nx} soit solution de l'équation donnée, s'appelle la méthode des coefficient indéterminés.

Exercice 6.4.5 Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' - 8y = e^{3x}$ en utilisant la méthode des coefficients indéterminés.

Rép : $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x} + \frac{1}{7} e^{3x}$

Théorème sur les solutions particulières

1. L'équation $y'' + by' + cy = e^{nx}$ où n n'est pas une racine de l'équation caractéristique $r^2 + br + c = 0$ admet une solution particulière de la forme $y_p = Ae^{nx}$.
2. L'équation $y'' + by' + cy = xe^{nx}$ où n n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + br + c = 0$ admet une solution particulière de la forme $y_p = (A + Bx)e^{nx}$.
3. Les équation $y'' + by' + cy = e^{sx} \sin tx$ et $y'' + by' + cy = e^{sx} \cos tx$ où $s + ti$ n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + br + c = 0$ admettent une solution de la forme particulière de la forme $y_p = Ae^{sx} \cos tx + Be^{sx} \sin tx$.

Exercice 6.4.6 Résoudre

1. $y'' - 3y' - 18y = xe^{4x}$ Rép : $y = C_1e^{6x} + C_2e^{-3x} - \frac{1}{196}(5 + 14x)e^{4x}$
2. $y'' - 2y' + 2y = e^{-x} \sin 2x$
3. $y'' + 3y' + 2y = 10e^{3x}$
4. $y'' + 2y' - 3y = x^2 \cos \pi t$
5. $y'' - y' + y = 4 \sin x + 18e^{2t}$

6.5 Résolution par les séries entières

Nous avons vu dans les chapitres antérieures qu'une série entière $\sum a_n x^n$ détermine une fonction f telle que

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

pour tout x dans l'intervalle de convergence et que les séries obtenues par dérivation terme à terme représentent les dérivées de cette fonction :

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (6.5)$$

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad (6.6)$$

Certaines équations différentielles peuvent être résolues à l'aide des séries entières, auquel cas la solution se présente sous forme de série, appelée série solution.

Exemple 6.5.1 Déterminer une série solution de l'équation différentielle $y' = 2xy$.

Solution : Si $y = \sum a_n x^n$ est la solution, sa dérivée est $y' = \sum n a_n x^{n-1}$ et par substitution dans l'équation différentielle, les a_n doivent satisfaire

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n x^{n+1}.$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\sum_{n=-1}^{\infty} (n+2) a_{n+2} x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1}$$

ou

$$a_1 + 2a_2x + \dots + (n+2)a_{n+2}x^{n+1} + \dots = 2a_0x + \dots + 2a_nx^{n+1} + \dots$$

ce qui conduit à

$$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_{n+2} = \frac{2}{n+2}a_n$$

et en particulier

$$a_1 = 0, \quad a_2 = a_0, \quad a_3 = \frac{2}{3}a_1 = 0, \quad a_4 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2}a_0, \quad a_5 = \frac{2}{3}a_3 = 0.$$

ect. Les coefficients d'indice impair sont nuls tandis que ceux d'indice pair sont de la forme $a_n = (1/n!)a_0$ pour tout entier positif n . La solution série est donc

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \left(1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \dots + \frac{1}{n!}x^{2n} + \dots \right).$$

Cette solution série est celle de la fonction

$$y = a_0 e^{x^2}$$

qui pourrait être trouvée directement par séparation des variables dans l'équation $y' = 2xy$. Le but ici était d'illustrer les séries solutions et non pas de résoudre l'équation différentielle de la manière la plus brève. La plupart de temp, il n'est pas possible de déterminer la somme de la série et la solution doit être laissé sous de série.

Exercice 6.5.2 Résoudre l'équation différentielle $y'' - xy' - 2y = 0$.

Solution : Substituer $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ et établir que $a_{n+2} = \frac{1}{n+1}a_n$ et montrer que de manière générale on a

$$a_{2n} = \frac{1}{1.3 \dots (2n-1)} a_0, \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = \frac{1}{2.4 \dots (2n)} a_1 = \frac{1}{2^n n!} a_1$$

et en déduire la solution général sous forme de série.

Exercice 6.5.3 1. Chercher une série solution de l'équation différentielle

(a) $y'' + y = 0$

(b) $y'' - 2xy = 0$

(c) $y'' - xy' + 2y = 0$

(d) $(x^2 - 1)y'' + 6xy' + 4y = -4$

Bibliographie

- [1] Nagle K. R., Saff E. B. and Snider A. D. (2004) *Differential Equations and Boundary Value Problems*. 4th édition Greg Tobin USA, pp 834.
- [2] Lelong-Ferrand J., and Arnaudiès J.M. (1977) *Cours de mathématiques Tome 2 Analyse, Classes préparatoires, premier cycle universitaire*. 4th édition BOR-DAS, Paris, pp 638
- [3] George B. Thomas JR., and Ross L. Finney (1993) *Calculus and Analytics Geometry*. 2nd édition, MIT, USA, pp 1041.
- [4] Swokowski (1994) *Analyse*. 5th édition, DeBoeck University, USA, pp 1053
- [5] Shaum's séries *Calcul Vectoriel*. 4th édition, MIT, USA, pp 218
- [6] Lavendhomme, R. and Roisin, J-R. (1994) *Analyse Infinitesimale, bases du calcul différentiel et équations différentielles*. 1st édition De Boeck University, Belgium, pp 381.