Rappels :

Application linéaire :

- Soit E et F deux K- espace vectoriel
- Soit f une application de E vers F.

on dit que : f est une application linéaire si

$\forall x, x' \in E$, $\forall \alpha, \beta \in K$ tq :

$$f(\alpha x + \beta x') = \alpha . f(x) + \beta f(x').$$

- L'ensemble des application linéaire de E vers F noté : $\mathcal{L}(E, F)$

Morphisme de groupe :

- Soit $(E, *)$ et (F, T) deux groupe, $f \in \mathcal{L}(E, F)$

on dit que : f est :

morphisme si $\forall x, x' \in E$: $f(x * x') = f(x) T f(x')$.

isomorphisme si f morphisme et bijective.

endomorphisme si f morphisme et $E = F$.

automorphisme si f morphisme et bijectif et $E = F$

Noyaux et Image :

- soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\mathrm{Ker}\, f = \{x \in E \,/\, f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\}).$$

$$\mathrm{Im}\, f = \{y \in F \,/\, \exists\, x \in E \;: f(x) = y\} = \{f(x),\, x \in E\}$$

- $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont

proposition :

- f injective $\iff$ $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.
- f surjective $\iff$ $\mathrm{Im}\, f = \{0_F\}$.
- Si E et F de dimension finie, alors :

$$\dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f) = \dim(E).$$

Remarque :

$rg(f)$ est appelée range de l'application linéaire f tq : $rg(f) = \dim(\mathrm{Im} f)$.

Application linéaire Matrices :

- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, E et F deux e.v sur $\mathbb{K}$ de dimension finie.
- Soit $B_E = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ base de E.

  $B_F = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ base de F.

* Matrice de f par rapport à B_E, B_F :

$$M(f, B_E, B_F) = M_{B_E, B_F}(f) = (m_{ij}) \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p \end{array}$$

$$M(f, B_E, B_F) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & & f(e_p) \\ \shortparallel & \shortparallel & & \shortparallel \end{array} \\ \begin{pmatrix} m_{11} U_1 & m_{12} U_1 & \dots & m_{1p} U_n \\ m_{21} U_2 & m_{22} U_2 & \dots & m_{2p} U_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} U_n & m_{n2} U_2 & \dots & m_{np} U_n \end{pmatrix} \end{array}$$

① Réduction des endomorphisme d'espaces Vectorieles E de dimension finie.

Matrice semblable :

- Deux matrices A et B sont dit semblable s'$\exists$ une matrice inversible tq $\boxed{A = P^{-1}.B.P}$

Propriété ① :

B, B' deux Base de E.

Soit M la matrice de f par rapport à B

Soit M' " " " f " " " B'

Alors : M et M' sont semblable.

Propriété ② :

pour deux matrice semblable M et M' on a :

1/ $\det(M) = \det(M')$. (determinant)

2/ $\text{Trace}(M) = \text{Trace}(M')$. ($\Sigma$ diagonale).

Vecteur propre d'un endomorphisme f :

- C'est toute vecteur x de E non nul colinéaire avec $f(x)$. (مرتبط خطيا)

▸ x vecteur propre de f si :

$$x \neq 0 \;,\; \exists \alpha \in K \quad tq : \quad f(x) = \alpha . x$$

▸ α est unique.

كيفاش نقدرو نجبدو Vecteur propre ؟؟

② Valeur propre d'un endomorphisme

- C'est toute scalaire α dans $\mathbb{K}$.

▸ α valeur propre de f si :

$$\exists x \neq 0 \; : \; f(x) = \alpha . x$$

▸ x n'est pas unique.

Sous_espace propre :

- pour toute valeur propre α de f.

$E_\alpha = \text{Ker}(f - \alpha . Id_E)$ c'est un sous_espace propre de f correspondant à α.

on a : $Id_E : E \longrightarrow E$

$\qquad\qquad E \longmapsto Id_E(x) = x$

et on a :

$$E_\alpha = \text{Ker}(f - \alpha . Id_E) = \{ x \in E \,/\, (f - \alpha . Id_E)(x) = 0_F \}$$

$$= \{ x \in E \,/\, f(x) - \alpha . \underbrace{Id_E(x)}_{x} = 0_F \}$$

alors :

$$\boxed{E_\alpha = \{ x \in E \,/\, f(x) = \alpha . x \}}.$$

Théorème :

- Soit E un K_ev et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors α est un valeur propre de f ssi $f - \alpha Id_E$ n'est pas injective.

(c.à.d : $\text{Ker}(f - \alpha . I_n) \neq \{0_F\}$)

Démonstration :

α est une valeur propre

$\overset{\text{déf}}{\iff} \exists x \neq 0_E : f(x) = \alpha x$

$\iff \exists x \neq 0_E : f(x) - \alpha x = 0_F$

$\iff \exists x \neq 0_E : (f - \alpha Id_E)(x) = 0_F$

$\iff x \in Ker(f - \alpha Id_E)$

$\iff Ker(f - \alpha Id_E) \neq \{0_F\}$

donc : $f - \alpha Id_E$ n'est pas injective.

polynôme caracteristique :

Soit E un K.e.v de dim finie "n", $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit B une base de E, et M la matrice de f par rapport à B.

- Si : I_n la matrice identité d'ordre "n".

alors : la matrice de l'endomorphisme $f - \alpha Id_E$ par rapport B est : $M - \alpha Id_E$

$$\boxed{P_M(\alpha) = \det(M - \alpha . I_n)}$$

se nommé : polynome caractéristique de la matrice M.

- Est le polynôme caracteristique d'une matrice de f par rapport d'une base quelconque.

propriété :

Soit B une autre base de E, M la matrice de f par rapport à B'.

- $\exists$ une matrice inversible P^{-1} tq $M' = P^{-1}.M.P$

et P la matrice de passage. $B \to B'$

alors: $\boxed{P_{M'} = P_M}$ (polynôme caracteristique de M' et M)

Demonstration :

$P_{M'}(\alpha) = \det(M' - \alpha I_n)$ $\quad I_n = P^{-1}.P$ $\quad M' = P^{-1}.M.P$

$P_{M'}(\alpha) = \det(P^{-1}.M.P - \alpha . P^{-1}.P)$

$= \det(P^{-1}(M.P - \alpha . P))$

$= \det(P^{-1}(M - \alpha I_n).P)$

$\det(A.B) = \det(A).\det(B)$.

$\det(P^{-1}).\det(P) = 1$.

$P_{M'}(\alpha) = \det(P^{-1}).\det(M - \alpha . I_n).\det(P)$.

$= \underbrace{\det(P^{-1}).\det(P)}_{1}.\det(M - \alpha I_n)$.

$= \det(M - \alpha . I_n)$

$$\boxed{P_{M'}(\alpha) = P_M(\alpha)}$$

Propriété des éléments propres :

- **Si** : E un K.e.v de dim fini. Soit M une matrice de $f \in \mathcal{L}(E)$ pour une base quelconque de E. Alors :

① α est une valeur propre de E ssi $P_f(\alpha) = 0$ (P_f est un polynôme caracteristique de f)

② Le sous_espace propre de f :

$$E_\alpha = \{X \in \mathbb{K}^n , M.X = \alpha.X\}.$$

$$E_\alpha = \{x \in E , f(x) = \alpha.x\}.$$

Def :

- on dit q'un sous espace vectoriel F de E est stable par f si : $f(F) \subset F$

Proposition :

$\ker f$ est stable par f.

Demonstration :

on montre que : $f(\ker f) \overset{?}{\subset} \ker f$.

Soit $y \in f(\ker f) \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \exists x \in \ker f : f(x) = y$.

comme $x \in \ker f \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} f(x) = 0_E$

$\Rightarrow y \in 0_E \Rightarrow y \in \ker f$.

donc : $f(\ker f) \subset \ker f$.

alors : $\ker f$ est stable par f.

proposition :

Soit α valeur propre de $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Le sous-espace propre $E_\alpha = \ker(f - \alpha Id_E)$ est stable par f.

C.à.d $\boxed{E_\alpha \text{ est stable} \Longleftrightarrow f(E_\alpha) \subset E_\alpha.}$

Demonstration :

Soit $y \in f(E_\alpha) \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \exists x \in E_\alpha : f(x) = y$.

comme : $x \in E_\alpha \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \exists \alpha \in \mathbb{K} : f(x) = \alpha.x$

$\Rightarrow y = \alpha.x \Rightarrow y \in E_\alpha$

donc $f(E_\alpha) \subset E_\alpha$

alors : E_α est stable par f.

Polynome scindé :

Soit E un K.e.v , $f \in \mathcal{L}(E)$.

- on appelle spect de et on note : $sp(f)$ est l'ensemble des valeurs propres . de f.

Sa dimention E est finie.

Donc : spect de f sont les racines de P_f.

- Rappelons qu'un polynôme $P \in K[x]$ est scindé sur K (c.à.d les α sont diférents)

$$P(x) = (\alpha_1 - x)^{m_1} . (\alpha_2 - x)^{m_2} \cdots\cdots (\alpha_n - x)^r$$

tq : $m_1 + m_2 + \dots + r = n$

$\mathbb{R}_2[x]$.

…ne:

$$P(x) = (\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x)\cdots(\alpha_n - x)$$

alors: P est scindé simple.

- si P_f (polynôme caractéristique de $f \in \mathcal{L}(E)$) est scindé

alors: f est scindé.

Proposition:

- Soit E un K.e.v de dim finie, $f \in \mathcal{L}(E)$.

et M une matrice de par rapport à une base quelconque de P_f degré n.

$$P_f(N) = (-1)^n . N^n + (-1)^{n-1} . \operatorname{trace} M . n^{n-1} + \det(M).$$

pour $n = 2$:

$$P_f(N) = N^2 - \operatorname{trace} M . n + \det(M).$$

- Soit α une valeur propre de f, alors:

$1 \leq \dim(E_\alpha) \leq m$, pour m la multiplicité de α.

- on suppose que: P_f est scindé sur K.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$: sont les racines de P_f est distincts ou multiples ([illegible]).

alors:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{trace}(M).$$

$$\lambda_1 . \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det(M).$$

Polynôme d'un endomorphisme :

- Soit E un K.e.v de dim finie n.

$f \in \mathcal{L}(E)$, $P \in K[x]$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 x^0.$$

- Soit l'endomorphisme $P(f)$ défini comme suit:

$$P_f(f) = a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \cdots + a_1 f^1 + a_0 . Id(f).$$

Eq: $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$

Polynôme Annulateur :

- soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

un polynôme est dit annulateur de f

Si: $P_f(f) = 0_E$

Remarque:

pour montrer que: $P(x)$ est un polynôme annulateur, il suffit de calculer $P(f)$

- si $P(f) = 0_E$ alors P est annulateur.
- si $P(f) \neq 0_E$ alors P n'est pas annulateur.

Polynôme minimal :

un polynôme est dit minimal de f, noté: m_f

est le polynome: unitaire, annulateur de f, petit degré.

Propriété:

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

m_f est unique et divise toute polynome.

L'Unicité :

Soit m_f ; m'_f deux polynômes minimal de f.

$m_f \backslash m'_f$ et $m'_f \backslash m_f$

$\exists\ \alpha \in K^2$, tq: $m_f = \alpha . m'_f$.

$\alpha = 1$, puisque m_f et m'_f sont unitaire.

Théorème de cayly Hamilton :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, P_f sont polynôme caractéristique.

on a : $P_f(f) = 0_E$

P_f est annulateur de f.

Propriété :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

α est une valeur propre de f $\Longleftrightarrow m_f(\lambda) = 0$

Remarque :

avec le Théorème de Hamilton, on peut trouver l'expression de A^{-1}

Endomorphisme Diagonalisable :

Def ① :

- Une matrice $M \in M_{n\times n}(K)$ est dit: diagonalisable s'$\exists$ une matrice P inversible tq:

$P^{-1}.M.P$ soit diagonale.

Def ② :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

- f est diagonalisable, s'il existe une base dans E. tq: la matrice de f par rapport à cette base :

$B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

tq: x_i : sont les valeurs propres.

$f(x_i) = \lambda_i x_i$, $1 \leq i \leq n$

$f : E \longrightarrow E$

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= \lambda_1 x_1 + 0.x_2 + \dots + 0.x_n \\
f(x_2) &= 0.x_1 + \lambda_2 . x_2 + \dots + 0.x_n \\
&\vdots \\
f(x_n) &= 0.x_1 + 0.x_2 + \dots + \lambda_n x_n
\end{aligned}$$

Donc :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

diagonale principale.

Théorème :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, les propriétés suivant sont équivalents :

① f est diagonalisable

② P_f est scindé sur K.

③ $Sp(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$.

$$\dim(E_{\lambda_i}) = \dim\left(\ker(f - \lambda_i Id_E)\right) = K_i$$

or K_i : est la multiplicité de λ_i

Théorème :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ (resp: $A \in M_{n\times n}(K)$).

où E un k.e.v de dim fini.

Alors, on a :

f est diagonalisable (resp: M)

$\Leftrightarrow$ m_f est scindé simple (resp: m_A)

Techniques de Diagonalisation d'une matrice carré $A \in M_{n\times n}(K)$:

① on cherche P_A (le polynome caractéristique).

② Determiner les valeurs propres.

③ S'il a n racines distinctes $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

alors : A est diagonalisable. ④

- on détermine une base de valeurs propres $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$, en résoudre les n equations

$$A.X = \lambda_i X \quad ; \quad 1 \leq i \leq n$$

- Sinon, pour chaque racine multiple λ_i
- on détermine la dim des sous-espace propres "E_{λ_i}" associé à cette racine λ_i.

- Si : $\dim(E_i)$ = la multiplicité de λ_i

alors : A est diagonalisable.

- sinon, elle n'est pas.

④ Si A est diagonalisable et $V_1, V_2, \dots, V_n$ les bases des sous-espaces propres $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

alors $D = P^{-1}.A.P$ où $P = (V_1, V_2, \dots, V_n)$.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix}$$

tq: n_i la multiplisité de λ_i $\quad 1 \leq i \leq p$

Application de la Diagonalisation :

Calcule de la puissance d'une matrice :

Soit $A \in M_{n\times n}(K)$ est diagonalisable.

alors : $\exists\, P \in M_{n\times n}(K)$ inversible.

tq $D = P^{-1}.A.P$ est diagonalisable.

et $A^k = P.D^k.P^{-1}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$

tq : $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda_2^k \end{pmatrix}$

Résolution de système homogènes d'une Suite numérique récurence finie :

Soit le système :

$$\begin{cases} U_{n+1} = a_{11}U_n + a_{12}V_n + \cdots + a_{1p}Z_n \\ V_{n+1} = a_{21}U_n + a_{22}V_n + \cdots + a_{2p}Z_n \\ \vdots \\ Z_{n+1} = a_{p1}U_n + a_{p2}V_n + \cdots + a_{pp}Z_n \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \\ \vdots \\ Z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{système homogène } (S_H) \iff X_{n+1} = A.X_n}$$

$A = a_{ij}$ $\qquad X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$

Proposition :

L'ensemble solution de système homogenne (S_H) est un sous-espace vectoriel.

$\boxed{H = \{ A^n.X_0 \ , X_0 \in \mathbb{R}^n \}}$, $\boxed{X_n = A^n.X_0}$

Demonstration par récurrence :

- pour $n = 0$, $X_1 = A^1.X_0$
- on suppose que : $X_n = A^n.X_0$ est vrai

et on montre que : $X_{n+1} = A^{n+1}.X_0$ est vrai ?

on a : $X_{n+1} = A.X_n$ قانون

$= A.(A^n.X_0)$. قانون

$$\boxed{X_{n+1} = A^{n+1}.X_0 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.}$$

Remarque :

$(S_H) \iff X_{n+1} = A.X_n$ avec : $X_n = A^n.X_0$

ence :

Si : A est diagonalisable.

alors : on peut avoir les expressions U_n, V_n, Z_n en fonction de U_0, V_0, Z_0.

L'endomorphisme Trigonalisable :

Déf ① :

une matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ est Trigonalisable.

S'il existe une matrice inversible P tq :

$T = P^{-1}.A.P$ soit Trigonale. (aidio inf, sup)

Déf ② :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- f est trigonalisable, s'il existe une base dans E pour laquelle matrice par rapport à cette base est trigonalisable.

Théorème :

Soit E un K.e.v et E de dimention finie $f \in \mathcal{L}(E)$ alors :

f est Trigonalisable ssi P_f est scindé.

⑨ ## La Jordanisation :

Soit E un K.e.v de dim finie "n", $f \in \mathcal{L}(E)$.

Vecteur propre généralisé :

Def :

on appelle le vecteur propre généralisé par rapport la valeur propre λ tq : le s.e.v de :

(Noyau) $\longrightarrow N_i = Ker\,(f - \lambda_i I_n)^{\alpha_i}$

α_i : est la multiplicité de λ_i (valeur propre).

$\left[A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \ , \ N_i = Ker\,(A - \lambda_i I_n)^{\alpha_i}\right]$

Méthode :

Soit $sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ distincts

de multiplicité : $\alpha_1, \dots, \alpha_p$.

Alors : $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_p$ (somme direct)

et $\dim(N_i) = \alpha_i \quad , \ 1 \leq i \leq p$.

Matrice de Nilpotente :

Def :

→ un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit : nilpotente

S'il existe un entier $K > 1$ tq : $f \circ f \circ f \circ \dots \circ f = f^K \neq 0$

- le plus petit entier "r" tq : $f^r = 0$ est appelé : indice de nilpotence

→ une matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ est dit : nilpotente

Si $\exists\, K > 1$ tq : $A^r = A$, $A = 0_{M_{n\times n}(\mathbb{K})}$

Propriété ①

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotente

alors: toutes ses valeurs propres sont nulles.

$$f \in \mathcal{L}(E) \text{ nilpotente} \Rightarrow Q_f(\lambda) = (-1)^n \cdot \lambda^n$$

$$m_f(\lambda) = \lambda^\beta \quad , \quad \beta \leqslant n$$

Propriété ②:

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ alors on a:

$$\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 \subset \dots\dots \subset \operatorname{Ker} f^r = \operatorname{Ker} f^K$$

Proposition:

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente, d'indice de nilpotence "K"

alors: $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 \subset \dots \subset \operatorname{Ker} f^K = E$

Décomposition de Dunfort:

Théorème:

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, Q_f est scindé sur K

alors: $\exists\ g, h$ tq:

- g est diagonalisable
- h est nilpotente
- g, h sont commutents.
- $g \circ h = h \circ g$
- $f = g + h$

* Ce théorème est vrai pour les matrices.

⑩

Théorème:

Soit E un K.e.v de dim fini "n",

$g \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotente, d'indice β

alors: $\exists$ une base de E dans laquelle la matrice de g est une réduite de Jordan

[matrice en blocs diagonaux qui sont des matrices nilpotentes de Jordan.]

① Le nombre des blocs $= \dim(\operatorname{Ker} g)$.

② si $n_j =$ l'ordre de j, on calcul:

$$P_K = \dim(\operatorname{Ker} g^K) - \dim(\operatorname{Ker} g^{K-1}), \quad 1 \leqslant K \leqslant \beta$$

n_j est le plus grand entier K tq: $P_K \geqslant j$

$n = 1$, $J_1 = 0$

$n = 2$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$n = 3$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$n = 4$, $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \dim(\ker A^K) - \dim(\ker A^{K-1})$

n_j : l'ordre de j,
est le plus grand entier K tq : $P_K \geq j$.

Rappel:

$A \oplus B = E$ (somme direct) vérifié:

$$\begin{cases} \circ\ x \in E : x = x_1 + x_2 \\ \circ\ \{A\} \cap \{B\} = \{0_E\}. \end{cases}$$

$$\dim(A+B) = \dim(A) + \dim(B) - \cancel{\dim}^{0}(A \cap B)$$

Def:
une matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ est : jordanisable s'il existe une matrice inversible P tq :
$$J = P^{-1}.A.P \quad \text{soit Jordane.}$$

∘ on va construire les sous espaces :

F_K, $1 \leq K \leq \beta$

tq : $\begin{cases} \ker(g^K) = \ker(g^{K-1}) \oplus F_K \\ V \in F_k,\ g(V) \in F_{k-1} \end{cases}$

avec: les bases de F_K, $K \geq 1$.

Théorème:
Soit E un K.e.v de dim fini "n", $f \in \mathcal{L}(E)$.
f est jordanisable ssi : P_f est scindé.

Réduction de Jordan des endomorphisme non nilpotent :

Def:
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E un K.e.v de dim fini "n"
$Sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ de multiplicité $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$
Si: f est scindé alors:
$$P_f(\lambda) = (-1)^n.(\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1}.(\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\alpha_n}$$

proposition:
Soit λ_i valeur propre de f
Si: f_i est la restrision de f sur :
$$N_i = \ker(f - \lambda.Id)^{\alpha_i}$$
alors: le polynôme caracteristique de f_i est:
$$P_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{\beta_i} \text{ et } m_{f_i}(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{\beta_i},\ \beta_i \leq \alpha$$
d'après critère Hamilton :
$$P_f(f) = 0 \iff (f_i - \lambda_i Id_{n_i}) = 0$$
Si on pose: $g_i = f_i - \lambda_i.Id_{n_i}$
$$g_i = (f_i - \lambda_i Id_E) \setminus N_i$$
donc:
g_i : est nilpotente sur N_i
puisque m_{f_i} est annulateur de plus petit degré
alors: β_i est l'indice de nilpotence.

Théorème :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme scindé

$\exists$ une **base** de E sur les quelles les matrices de f est la forme de Jordan suivant :

$$J = \begin{pmatrix} A_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{\lambda_2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & A_{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$A_{\lambda_i} = \lambda_i \cdot Id_{\alpha_i} + J_{\alpha_i}$$

- λ_i : valeurs propres de f de multiplicité α_i
- I_{α_i} : matrice identité d'ordre α_i.
- J_{α_i} : matrice réduite de Jordan de g_i d'ordre α_i

La méthode pour avoir la base :

Def :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. $P_f(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{\alpha_r}$

Soit f_i la restriction de f sur N_i

on pose : $g_i = (f - \lambda_i \cdot Id_E) \setminus N_i$

puisque : g_i est nilpotente sur N_i

on cherche une base B_i sur N_i en utilisant :

$$E = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_r$$

Scanné avec CamScanner

L'expression de f $\Longrightarrow$ Matrice de par rapport $M(f, B_E, B_F)$

Les données: • l'expression de $f : E \to F$

• les base: $B_E = \{e_1, \dots, e_p\}$ $\quad B_F = \{U_1, \dots, U_n\}$

• في التمرين لازم أنا نعرف كل Base وأشك تمثل.
معناه: نعرف Base التي تمثل مجموعة الانطلاق E في B_E
ونعرف Base التي تمثل مجموعة الوصول F في B_F

• نحسب صورة كل شعاع من B_E بالدالة f.

• استخدم القانون لإيجاد الثوابت $m_{11}, m_{12} \dots$

$$f(e_1) = m_{11} U_1 + \dots + m_{1p} U_n$$
$$\vdots$$
$$f(e_p) = m_{p1} U_1 + \dots + m_{pp} U_n$$

تكون مستخرج عبارة تحليلية — ثوابت matrice — في الأشعة B_F معطاة

$\Longrightarrow$ بالنشر والمطابقة أجد الثوابت

$$\boxed{M(f, B_E, B_F) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{p1} & \cdots & m_{pp} \end{pmatrix} \end{array}}$$

Matrice de par rapport $\Longrightarrow$ l'expression de f :

Les données: • $f : E \to F$ $\quad f \in \mathcal{L}(E, F)$

• les base B_E, B_F

• $M(f, B_E, B_F) = \begin{pmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}$

• Soit $X \in E$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

• Soit $Y \in F$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$\boxed{Y = M(f, B_E, B_F) \cdot X}$$

• اعوض في القانون • الجداء الديكارتي

• اذا كانت B_E ليست Canonique. فإن:

$$(x_1, \dots, x_n) = \alpha \cdot e_1 + \dots + \beta e_n$$

①

• اذا كانت B_F ليست Canonique. فإن:

$$f(x_1, \dots, x_n) = y_1 \cdot U_1 + y_2 \cdot U_2 + \dots + y_n \cdot U_n$$

حيث: $f(x_1, \dots, x_n) = Y$

Montrer que : B est une base de $\mathbb{K}^n$.

Il suffit de montrer que: $B = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ Génér و

B est libre linéairement.

c-à-d on montre que:

$$\alpha U_1 + \beta U_2 + \dots + \delta \cdot U_n = 0_{\mathbb{K}^n}$$

c-à-d on trouve que: $\alpha = \beta = \dots = \delta$

نحل المعادلة ولازم نلقى الثوابت نفسها (متساوية)

Trouver la matrice de passage: $P_{B_E \to B_F}$

Les données:

ممكن يمدلي العبارة التحليلية ممكن لا

$B_E = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$

$B_F = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$

• لازم أولا نكتب عناصر B_F بدلالة B_E
يعني: ايجاد العبارة التحليلية (ايجاد علاقة)

$$\begin{cases} U_1 = \alpha e_2 + \dots + \beta e_n = (\dots,) \\ \vdots \\ U_n = e_1 - \dots + \delta e_n = (\dots,) \end{cases}$$ عبارة شعاعية

$$\boxed{P_{B_E \to B_F} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} U_1 & U_2 & \cdots & U_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & & & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_p \end{array} \end{array}}$$

Soit $x=(a,b)$, Determiner ces cordonnes dans la Base B.

و معطى ثابت

<u>les donnés :</u> $x=(a,b,\dots,z)$

$B=\{U_1,\dots,U_n\}$

• نطبق القانون :

$$\boxed{\begin{pmatrix} a\\ b\\ \vdots\\ z\end{pmatrix} = \alpha.U_1 + \beta.U_2 + \dots + \gamma.U_n}$$

معطى   معطى

ايجاد الثوابت α ، β ، ... ، γ . بحل جمل معادلات

Determiner le vecteur et la valeur propres :

<u>les donnes :</u> • $f\in\mathcal{L}(E)$.

• l'expression de f.

نحن نختار الشعاع الذي نعوضه في الدالة حتى نحصل على الشكل : $f(x)=\alpha.x$

<u>Exemple :</u>

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto f(x,y)=(x,2y)$

• $f(0,1)=(0,2)=\overset{\alpha}{2}\,\overset{x}{(0,1)}$

$(0,1)$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre $\alpha=2$.

Propriété :

• $P_{AB}(\alpha)=P_{BA}(\alpha)$.

• $f(x)=\alpha x \implies f^{-1}(x)=\alpha^{-1}.x$.

• $P_{f^{-1}}(\alpha)=\dfrac{(-1)^n.\alpha^n}{P_f(0)}.P_f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

• $f^2=Id_E \implies$ les valeurs propres de f sont 1 et -1.

$$f^n=\underbrace{f\circ f\circ\dots\circ f}_{n\text{ fois}}$$

• $f^2=f \implies$ les valeurs propres de f sont 1 et 0

• $P_M(\alpha)=\det(M-\alpha.I_E)$

• $E_\alpha=\{X\in\mathbb{K}^n,\ M.X=\alpha.X\}$

$E_\alpha=\{x\in E,\ f(x)=\alpha.x\}$.

• $f^k(x)=K^k.x,\ K\in\mathbb{N}^*$

• $\text{Trace}(A.B)=\text{Trace}(BA)$.

• $\text{Trace}(P^{-1}.M.P)=\text{Trace}(M)$.

• α est une valeur propre $\iff P_M(\alpha)=0$

• $I_n=P^{-1}.P=P.P^{-1}$

• $\det(A.B)=\det(A)+\det(B)$.

• $\det(P^{-1})+\det(P)=1$.

M une matrice triangulaire sup ou inf

alors : $\det(M) = \prod \left(\text{les element de la diagonale} \right)$

- Spect : l'ensemble des valeurs propres.

$$SP(A) = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \}$$

- **polynôme Scindé** : مكتوب على شكل جداء عوامل

$$P(x) = (\alpha_1 - x)^{m_1} \cdot (\alpha_2 - x)^{m_2} \cdots (\alpha_n - x)^{r}$$

$\mathbb{K}^n$, $m_1 + m_2 + \cdots + r = n \longleftarrow$ la multiplicité.

- **polynôme Scindé simple** :

les valeurs propres distincts (مختلفة)

كل عامل يكون أس 1

$$P(x) = (\alpha_1 - x) \cdot (\alpha_2 - x) \cdots (\alpha_n - x).$$

- $1 \leq \dim(E_\alpha) \leq m$

m : la multiplicité de α.

- **polynôme d'un endomorphisme** :

$$P(f) = a_n \cdot f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \cdots + a_1 f^1 + a_0 \cdot Id(f)$$

$$f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$$

- **polynôme annulateur** : $\Rightarrow P(f) = 0_E$

(Théorème Hamilton).

③

- **polynôme minimal m_f de f** :
  - polynôme unitaire de f.
  - polynôme annulateur de f.
  - petit degré.

- α est une valeur propre de $f \Leftrightarrow m_f(\lambda) = 0$.

* Diagonalisation : *

- **Matrice Diagonalisable** :

$\exists P$ inversible tq : $P^{-1} \cdot M \cdot P$ soit diagonale

- **Matrice Diagonale** :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda_2 & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$D = P^{-1} \cdot M \cdot P$$
$$M = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

- Matrice Diagonale $\Leftrightarrow$ Matrice Diagonalisable.

- f (M resp) diagonalisable

$\Leftrightarrow m_f$ (m_M resp) scindé simple.

- **Matrice de passage**

$$P = (V_1, V_2, \dots, V_n)$$

vecteur الذي وجدناهم E_α.

-
$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda_2^k & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

puissanse d'une Matrice.

Resoudre système homogène d'une suite numérique récurrence finie :

$$\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \\ \vdots \\ Z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$$

$(S_H) \iff X_{n+1} = A \cdot X_n$

tq: $X_n = A^n \cdot X_0$

Diagonalisable ?

$P_A(\alpha)$

- Scindé simple $\Downarrow$ diagonalisable
- Scindé $\rightarrow$ لازم نحسب E_α $\rightarrow$ $\dim(E_\alpha)$
  - $=$ la multiplicité $\Downarrow$ diagonalisable
  - $\neq$ la multiplicité $\Downarrow$ n'est pas diagonalisable

Matrice Trigonalisable

$\exists P$ inversible tq: $T = P^{-1} \cdot A \cdot P$ soit trigonale.

Matrice Trigonale :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & \cdots & a_n \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

اصفار من الاسفل فقط.

Trigonalisable ?

M trigonalisable $\iff P_f$ scindé.

Jordanisation

Matrice Nilpotente :

$\exists k > 1$ tq: $A^k = 0_{\mathbb{K}}$

l'indice de nilpotence : $r \in \mathbb{N}^*$ tq $A^r = 0$.

A nilpotente $\Longrightarrow Sp = \{0\}$

A nilpotente $\Longrightarrow P_A(\alpha) = (-1)^n \cdot \alpha^n$.

$m_A(\alpha) = \alpha^\beta, \ \beta \leq n$

Si A nilpotente et β l'indice de nilpotence

$\Longrightarrow \operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} A^2 \subset \cdots \subset \operatorname{Ker} A^\beta = E$

Diagonalisation :

1 - polynome caracteristique $P_A(\alpha)$.

2 - valeurs propres $sp(A) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

3 - sous-espaces propres $E_{\alpha_i} = \langle V_1 ; V_2 ; \dots \rangle$

4 - former une base $B = \{V_1, \dots, V_n\}$ libre linéairement.

5 - matrice de passage P : $P = (V_1, V_2, \dots, V_n)$

6 - matrice diagonale D : $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$

7 - Calcule A^K :

$$A^K = P . D^K . P^{-1}$$

- calcule : $D^K = \begin{pmatrix} \alpha_1^K & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n^K \end{pmatrix}$

- matrice inverse $P^{-1} = \dfrac{1}{\det(P)} \, com^T(P)$.

8 - système homogène : $X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$

$$(S_H) : \begin{cases} U_{n+1} = \alpha . U_n + \beta . V_n + \dots + \delta Z_n \\ V_{n+1} = \alpha' . U_n + \beta' . V_n + \dots + \delta' . Z_n \\ \vdots \\ Z_{n+1} = \alpha'' . U_n + \beta'' . V_n + \dots + \delta'' . Z_n \end{cases}$$

$(S_H) \iff X_{n+1} = A . X_n$ tq : $X_n = A . X_0$

Trigonalisation

1 - polynome caracteristique $P_A(\alpha)$ scindé

2 - valeurs propres $sp(A) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

3 - sous-espaces propres $E_{\alpha_i} = \langle V_1 ; V_2 ; \dots \rangle$.

4 - former une base $B = \{V_1, \dots, V_n\}$ libre linéairement.

* Dans le cas où $\dim E_{\alpha_i} \neq$ multiplicité α_i

c.à.d : nbr $V_i \neq \dim E$

- il faut chercher les vecteurs manques tq : ces vecteurs forme une base

(Remarque : de préférence prendre les vecteurs dans la base canonique)

qui vérifie : $\alpha V_1 + \beta V_2 + \dots + \gamma . V_n = 0_E$ libre linéairement.

5 - matrice de passage P : $P = (V_1, V_2, \dots, V_n)$.

6 - matrice trigonale T : $T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$

* Dans le cas où : il y a une seul valeur propre (multiplicité)

alors : $T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta & \beta' \\ 0 & \gamma & \gamma' \\ 0 & \delta & \delta' \end{pmatrix}$ pour trouver les inconnues on resoudre ces equations :

$$\begin{array}{ccc} \| & \| & \| \\ V_1 & e_1 & e_2 \end{array}$$

$$\begin{cases} A . e_1 = \beta . V_1 + \gamma . e_2 + \delta e_2 \\ A . e_2 = \beta' . V_1 + \gamma' e_1 + \delta' . e_2 \end{cases}$$

Jordanisation :

1^er cas : Matrice Nilpotent :

1- polynome caractéristique : $P_A(\lambda) = (-1)^n . \lambda^n$

$\Rightarrow$ Jordanisable $\Rightarrow$ A nilpotent. $\Rightarrow Sp(A) = \{0\}$

2- Cherche l'indice de nilpotence. β : tq $A^\beta = 0_E$.

Donc : $\ker A \subset \ker A^2 \subset \dots \subset \ker A^\beta = E$

3- Calculer : $\ker A$; $\ker A^2$ tq : $A^2 = A \times A$; ....

4- calculer : $\dim(\ker A)$; $\dim(\ker A^2)$

avec : $\dim(\ker A^\beta) = \dim(E)$.

5- $\dim(\ker A) = m \Rightarrow m$ blocs.

6- Matrice de Jordan :
$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & J_m \end{pmatrix}$$

7- $P_k = \dim(\ker A^k) - \dim(\ker A^{k-1})$ tq : $1 \leq k \leq \beta$

8- n_j ? est le plus grand entier k tq : $P_k \geq j$

($j = \dim(\text{blocs})$)

9- Construire F_k : $1 \leq k \leq \beta$
$$\begin{cases} \ker A^k = \ker A^{k-1} \oplus F_k \\ v \in F_k , \ A.v \in F_{k-1} \end{cases}$$

نبداو نحسبو من اكبر indice , يعني :
$F_1, F_2, \dots, F_\beta$

10- $\dim(F_k) = \dim(A^k) - \dim(A^{k-1})$

11- $\begin{cases} \text{pour } F_k \longrightarrow V_k \\ \text{Pour } F_{k-1} \longrightarrow V_{k-1} = A.V_k \end{cases}$ (نحن نختاره V_k)

* forme une base : $B = \{V_1, \dots, V_n\}$ libre linéairement.

* $\dim(F_\beta) = \alpha \Rightarrow F_\beta = \langle V_1, \dots, V_\alpha \rangle$

$\dim(F_1) = \gamma \Rightarrow F_1 = \langle U_1, \dots, U_\gamma \rangle$.

* $\sum \dim F_k = \dim E = n$

12- matrice inverse : $P = (V_1, V_2, \dots, V_n)$.

2^eme cas : Matrice non Nilpotent

1- polynome caractéristique $P_A(\lambda)$ scindé $\Rightarrow$ Jordanisaable

$\Rightarrow Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \Rightarrow$ A non Nilpotente.

2- Sous-espace propre généralisé : $N_i = \ker \underbrace{(A - \lambda I_n)}_{M_i}{}^{\alpha_i}$

α_i : la multiplicité de valeur propre λ_i

- pour λ_1 (simple) on calcule $M_1 = (A - \lambda I_n)^1$ puis : $N_1 = \ker M_1$
- Si : λ_i racine double ou triple ... (multiplicité α_i).

alors : $\ker M_i \subset \ker M_i^2 \subset \dots \subset \ker M_i^{\alpha_i} = N_i$

on calcule : $M_i = A - \lambda_i I_n$ (nbr valeur propre) puis : $M_i^2, M_i^3, \dots, M_i^{\alpha_i}$

3- former les bases :

- pour λ_1 simple : $B_1 = \{U_1, \dots, U_n\}$
- pour λ_i multiplicité : $N_i = \ker(A - \lambda_i I_n)^{\alpha_i}$ multiplicité

Construire F_k pour N_i : $1 \leq k \leq \alpha_i$
$$\begin{cases} \ker M_i^k = \ker M_i^{k-1} \oplus F_k \\ v \in F_k , \ M_i . v \in F_{k-1} \end{cases} \Rightarrow B_2 = \{V_1, \dots, V_n\}$$

* $B = B_1 \cup B_2$ • matrice P • matrice : $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$