



Visiter notre Forum : <http://prepa-book.forummaroc.net/>

Visiter notre page :

<https://www.facebook.com/bibliotheque.electronique.des.classes.prepa>

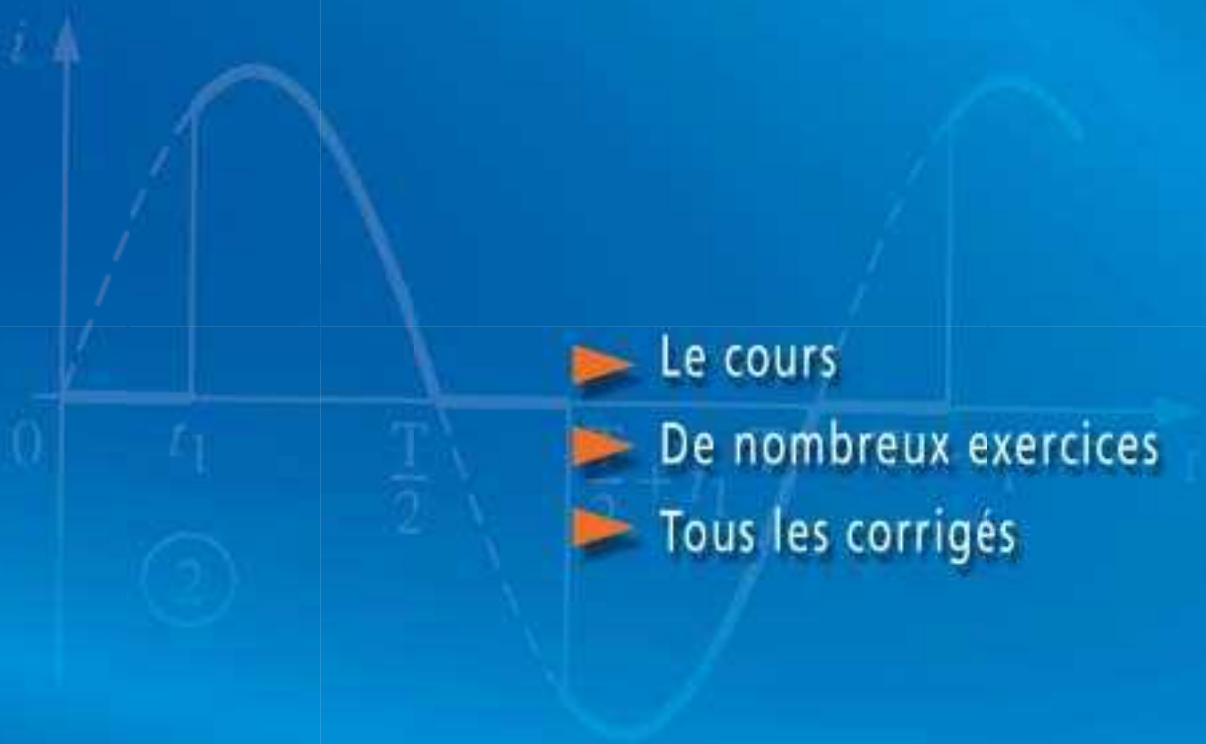
<https://www.facebook.com/groups/bibliotheque.electronique.des.classes.prepa/>

HI Répa

Collection dirigée par Jean-Marie Brébec

Mécanique

1^{re} année
MPSI-PCSI-PTSI



- ▶ Le cours
- ▶ De nombreux exercices
- ▶ Tous les corrigés



Mécanique

1^{re} année MPSI-PCSI-PTSI

Jean-Marie BRÉBEC

Professeur en classes préparatoires au lycée Saint-Louis à Paris

Thierry DESMARAIS

Professeur en classes préparatoires au lycée Vaugelas à Chambéry

Marc MÉNÉTRIER

Professeur en classes préparatoires au lycée Thiers à Marseille

Bruno NOËL

Professeur en classes préparatoires au lycée Champollion à Grenoble

Régine NOËL

Professeur en classes préparatoires au lycée Champollion à Grenoble

Claude ORSINI

Professeur honoraire en classes préparatoires au lycée Dumont-d'Urville à Toulon



HACHETTE
Supérieur

6. *doc.* 1 : B.N., Paris, Photo Nahmias, photothèque Hachette.
7. *doc.* 3 : © Alain Bèguerie.
8. *doc.* 4 : B.N., Paris, Photo Nahmias, photothèque Hachette.

Composition, mise en page et schémas : *Alpha-Edit*
Maquette intérieure : *SG Création et Pascal Plottier*
Maquette de couverture : *Alain Vambacas*

© HACHETTE Livre 2003, 43 quai de Grenelle / F 75905 Paris Cedex 15.

I.S.B.N. 978-2-0118-1754-9

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L.122-4 et L.122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et, d'autre part, que « les analyses et courtes citations » dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droits ou ayants cause, est illicite ».

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans l'autorisation de l'éditeur ou du Centre français de l'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Préface

Cette collection concerne les nouveaux programmes des classes préparatoires aux Grandes Écoles mis en application à la rentrée de septembre 2003 pour les classes de première année MPSI, PCSI et PTSI.

Les auteurs ont fait en sorte de placer les mathématiques à leur juste place, en privilégiant la réflexion et le raisonnement physique et en mettant l'accent sur les paramètres significatifs et les relations qui les unissent.

- La physique est une science expérimentale et doit être enseignée en tant que telle. Les auteurs ont particulièrement soigné la description des dispositifs expérimentaux sans négliger la dimension pratique. Souhaitons que leurs efforts incitent professeurs et élèves à améliorer ou à susciter les activités expérimentales toujours très formatrices.
- La physique n'est pas une science désincarnée, uniquement préoccupée de spéculations fermées aux réalités technologiques. Chaque fois que le sujet s'y prête, les auteurs ont donné une large place aux applications scientifiques ou industrielles propres à motiver nos futurs chercheurs et ingénieurs.
- La physique n'est pas une science aseptisée et intemporelle, elle est le produit d'une époque et ne s'exclut pas du champ des activités humaines. Les auteurs n'ont pas dédaigné les références à l'histoire des sciences, aussi bien pour décrire l'évolution des modèles théoriques que pour replacer les expériences dans leur contexte.

L'équipe d'auteurs, coordonnée par Jean-Marie BRÉBEC, est composée de professeurs de classes préparatoires très expérimentés qui possèdent une longue pratique des concours des Grandes Écoles, et dont la compétence scientifique est unanimement reconnue. Cette équipe a travaillé en relation étroite avec les auteurs des collections DURANDEAU et DURUPHY du second cycle des classes de lycée; les ouvrages de classes préparatoires s'inscrivent donc dans une parfaite continuité avec ceux du secondaire, tant dans la forme que dans l'esprit.

Gageons que ces ouvrages constitueront de précieux outils pour les étudiants, tant pour une préparation efficace des concours que pour l'acquisition d'une solide culture scientifique.

J.-P. DURANDEAU et M.-B. MAUHOURET

Sommaire

<u>1</u>	CINÉMATIQUE	5
<u>2</u>	DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL	31
<u>3</u>	PUISSANCE ET ÉNERGIE EN RÉFÉRENTIEL GALILÉEN	52
<u>4</u>	MOUVEMENT LIBRE D'UN OSCILLATEUR HARMONIQUE	73
<u>5</u>	RÉPONSE D'UN OSCILLATEUR À UNE EXCITATION	95
<u>6</u>	THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE	122
<u>7</u>	FORCE CENTRALE CONSERVATIVE. MOUVEMENT NEWTONIEN	141
<u>8</u>	CHANGEMENTS DE RÉFÉRENTIELS. MÉCANIQUE NON GALILÉENNE	172
<u>9</u>	CARACTÈRE GALILÉEN APPROCHÉ DES RÉFÉRENTIELS UTILISÉS EN MÉCANIQUE TERRESTRE	204
<u>10</u>	SYSTÈME DE DEUX POINTS MATÉRIELS	225
	ANNEXE : LA MÉTHODE D'EULER	259
	PROBLÈME : MOUVEMENT À TROIS CORPS	263
	INDEX	269

Cinématique

1

Introduction

La cinématique est la branche de la mécanique consacrée à l'étude purement descriptive du mouvement.

Les notions d'espace, de temps et de mouvement sont universelles, mais leur description précise et quantitative n'est pas immédiate ; pour aboutir à la forme actuelle de la cinématique, il a fallu se poser et résoudre un certain nombre de problèmes, tant conceptuels que techniques.

Comment repérer précisément un événement dans l'espace et dans le temps ?

Comment mesurer une durée ?

Qu'est ce que le mouvement ?

Cette compréhension de plus en plus fine des phénomènes physiques est allée de pair avec la mise au point de méthodes mathématiques adaptées.

O B J E C T I F S

- Repérage d'un événement dans l'espace et dans le temps.
- Systèmes usuels de coordonnées.
- Dérivée d'une grandeur vectorielle.
- Notion de référentiel.
- Expression des vecteurs vitesse et accélération d'un mobile ponctuel.
- Représentations du mouvement.

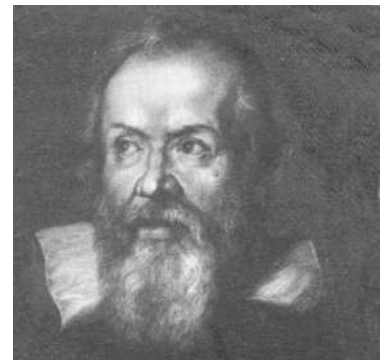
P R É R E Q U I S

- Calcul vectoriel.

La mécanique classique

1.1. Évolution de la mécanique à travers quelques faits historiques

époque	faits importants
IV ^e siècle	<p>Aristote</p> <p>Recherche de principes régissant les mouvements (pris ici dans un sens très général : les transformations de tous genres en font partie). Premiers efforts de conceptualisation, mais aussi premiers désaccords avec la physique moderne : les lois de la physique sidérale seraient exactes, celles de la physique sublunaire ne traduiraient que ce qui se produit « le plus souvent ».</p>
Moyen Âge	<p>Le mouvement produit par un lancer (la science du jet a un intérêt militaire évident) serait un mélange de mouvement « naturel » et de mouvement « violent », la trajectoire d'un projectile est constituée de trois parties, la partie centrale seule étant courbe. Niccolo Tartaglia (1499-1537) innove dans son <i>Nova Scientia</i>, en dessinant une trajectoire d'obus totalement courbe.</p> <p>L'apparition du système bielle-manivelle au XV^e siècle, les discussions ouvertes par Copernic sur le mouvement des astres conduisent à s'interroger sur la relativité des mouvements.</p>
XVII ^e siècle	<p>De principe parfois très ancien, des machines destinées à équilibrer ou déplacer des masses importantes sont encore issues de la seule expérience.</p> <p>Des efforts de réflexion sur les équilibres et mouvements sont conduits par Galilée. Il publie, en 1638, <i>Discours et Démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles</i>. Cet ouvrage traite, d'une part, de la résistance des matériaux, d'autre part, du mouvement des corps pesants. Les observations sont traduites en termes précis. Les vitesse et mouvement uniformément accéléré y sont définis.</p> <p>En 1657, Huygens construit la première horloge à balancier, et deux ans plus tard la première montre à balancier et ressort spiral.</p> <p>En 1687, les <i>Principes mathématiques de la philosophie naturelle</i> de Newton présentent les fondements de la mécanique classique : les notions de force et accélération sont définies, les mouvements des planètes sont expliqués par la force de gravitation.</p>
XVIII ^e et XIX ^e siècles	<p>Des mécaniciens comme d'Alembert, Lagrange et Coriolis achèvent de formaliser la théorie à l'aide de formulations mathématiques très proches de celles qui sont actuellement utilisées.</p>
Fin du XIX ^e , début du XX ^e siècle	<p>Alors que la théorie semble atteindre la perfection, elle est remise en cause par l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques par Maxwell : la lumière se propage à la même vitesse dans tous les référentiels galiléens d'observation.</p> <p>Ses fondements sont remis en cause : en 1905, Einstein publie son premier article sur la théorie de la relativité. Entre 1900 et 1930, les bases de la mécanique quantique sont élaborées.</p>



Doc. 1. Galilée. Il étudia le mouvement d'une boule lancée à une vitesse donnée depuis une table de hauteur variable.

1.2. Description d'un mouvement classique

La description d'un événement passe par son positionnement dans l'espace et dans le temps.

1.2.1. Mesure des distances et durées

En général, la mesure d'une grandeur quelconque consiste à compter combien de fois elle contient l'étalon correspondant.

Les progrès ont consisté à définir des étalons de plus en plus précis, universels et reproductibles.

L'étalon de temps est défini comme la période d'un phénomène dont on postule la périodicité.

Actuellement, la seconde est définie comme « 9 192 634 770 périodes de la radiation électromagnétique correspondant à la transition entre deux niveaux hyperfins de l'état fondamental du césium 133 ».

La vitesse de la lumière dans le vide, notée c , s'est imposée comme une constante physique universelle. Sa valeur fixée à $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ définit le mètre comme étant la distance parcourue par la lumière dans le vide en $\frac{1}{299\,792\,458}$ seconde.

1.2.2. Relativité du mouvement, hypothèse du temps absolu

Le mouvement d'un objet mobile est perçu de façon différente par deux observateurs en mouvement relatif. Les grandeurs cinématiques ne sont pas absolues, mais relatives à une classe d'observateurs.

Deux observateurs différents perçoivent, pour un même mobile, deux mouvements différents :

- pour le passager d'un train, la vitre est immobile et le paysage défile ;
- il n'en est pas de même pour un promeneur qui s'est arrêté pour regarder passer le train.

Le mouvement observé dépend de l'observateur, mais selon la théorie classique, ni la longueur d'une règle, ni la durée qui sépare deux événements n'en dépendent.

En mécanique classique, le mouvement observé dépend de l'observateur. Par postulat, la durée des événements n'en dépend pas.

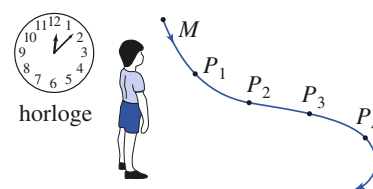
1.2.3. Référentiel d'observation

L'ensemble rigide des points fixes pour un observateur, associé à une horloge, est par définition le référentiel de cet observateur (*doc. 2*). Nous en postulons l'existence pour tout observateur qui peut alors décrire un mouvement (« le mobile M est passé par le point fixe P_i à la date t_i »).

1.2.4. Trajectoire dans un référentiel

\mathcal{R} étant un référentiel et M un point mobile, il existe à chaque instant un point fixe de \mathcal{R} dont la position coïncide avec celle de M . L'ensemble de ces points coïncidents forme dans \mathcal{R} une ligne continue appelée la trajectoire de M .

La trajectoire n'est définie que pour un référentiel déterminé.



Doc. 2. Référentiel d'un observateur.



Doc. 3. La lueur émise par le gaz raréfié matérialise la trajectoire des électrons.

1.3. Limites de la théorie classique

1.3.1. Théorie de la relativité

En 1905, Albert Einstein propose une théorie qui révolutionne les notions d'espace et de temps.

D'après l'expérience, la vitesse de la lumière dans le vide est indépendante du mouvement de l'observateur qui la mesure. Pour expliquer ce résultat paradoxal, il faut renoncer à la notion de temps universel.

Selon la théorie relativiste, il n'y a pas un espace tridimensionnel et un temps indépendants, mais un espace temps quadridimensionnel où le temps intervient comme une coordonnée supplémentaire.

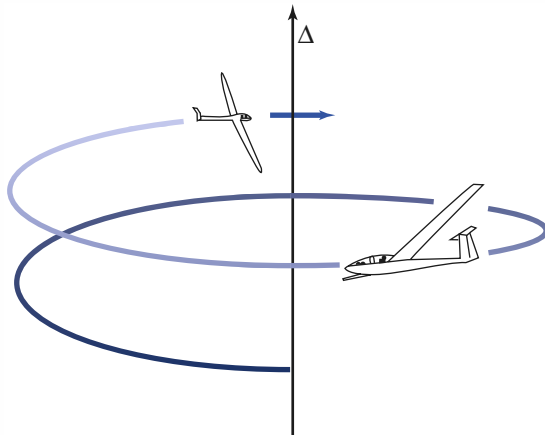
Einstein approfondit ses travaux et publie en 1916 la théorie de la relativité générale où les propriétés géométriques de l'espace-temps dépendent de la quantité de matière présente.



Doc. 4. A. Einstein (1879-1955).

Application 1

S'envoyer en l'air sans s'éccœurer



Doc. 5.

Deux planeurs identiques ont engagé une spirale à droite dans la même ascendance centrée sur l'axe Δ . Celui qui s'est engagé le dernier s'est, pour des raisons évidentes de sécurité, placé à 180° de celui qui le précède. Leurs allures sont identiques, et nous supposons l'ascendance uniforme et régulière (c'est un modèle).

- 1) Quelle est la trajectoire de ces planeurs pour un observateur resté sur le plancher des vaches ?
- 2) Quel est le mouvement d'un planeur dans le référentiel de l'autre ?
- 3) Quel est le mouvement des montagnes environnantes pour un apprenti vélivole, assis en place avant dans son planeur biplace, qui observe

fixement devant lui, dans l'axe de son appareil ?
Que peut-on prévoir, et lui conseiller ?

1) Le mouvement est hélicoïdal : il est constitué d'une rotation autour de l'axe Δ et d'une translation parallèle à cet axe, dans le sens vertical ascendant si tout va bien (couramment plusieurs mètres par seconde)...

2) Les planeurs réglés à la même allure, restent à 180° l'un de l'autre. L'ascendance étant uniforme, leurs altitudes varient de la même façon. Dans le référentiel d'un planeur, l'autre ne bouge pas : leurs référentiels sont identiques. On conçoit aisément, en revanche, que s'ils devaient choisir un repère pour positionner leurs appareils, les pilotes prendraient des origines dans leurs cabines respectives : même référentiel donc, mais choix de repères naturels distincts.

3) Pour le novice qui fixe exclusivement son attention droit devant lui, le paysage défile vers la gauche (assez rapidement en pratique !), ainsi que vers le bas. On ne saurait trop lui conseiller de prendre en compte le caractère tout relatif du mouvement qu'il observe, qui pourrait lui donner rapidement la nausée. Tourner son regard du côté de l'axe Δ (en bout d'aile droite) autour duquel le planeur est en train de spiraler, et qui est fixe par rapport au paysage environnant, lui permettrait sans doute de conserver le sens de l'orientation... et de retarder le remplissage du sac plastique dont on l'a prudemment muni au décollage !

Par exemple, les problèmes liés aux particules élémentaires de haute énergie ne peuvent pratiquement se traiter que dans le cadre relativiste. Signalons également que la lente dérive de l'orbite de Mercure ne peut s'expliquer que par la relativité générale.

La mécanique classique (par opposition à relativiste) reste une excellente approximation aux vitesses et aux densités de masses usuelles.

1.3.2. Mécanique quantique

L'autre grande révolution conceptuelle du XX^e siècle a tout d'abord été proposée pour expliquer l'émission et l'absorption de la lumière par les atomes et les particules élémentaires.

Le résultat de la mesure de certaines grandeurs (une énergie, par exemple) ne peut prendre que certaines valeurs, repérées par les nombres entiers : les grandeurs sont quantifiées, d'où le nom de mécanique quantique.

La notion même de position et de vitesse parfaitement repérables doit être abandonnée. Il n'est possible de prévoir qu'une probabilité de présence qui est définie par une onde associée à chaque objet. Ainsi, la lumière peut se manifester comme une onde (rayonnement électromagnétique) ou comme un flux de particules (photons), et cette dualité est généralisable à tous les objets.

La longueur d'onde λ associée est déterminée par la relation de de Broglie (1923) : $\lambda = \frac{h}{p}$ où p est la quantité de mouvement et $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$ (constante de Planck).

Il n'est pas possible de mesurer simultanément, et de façon aussi précise que l'on veut certains couples de grandeurs.

Ainsi, pour une particule qui se déplace le long de l'axe $(x'x)$, l'incertitude Δx sur sa position et l'incertitude Δp_x sur sa quantité de mouvement $p_x = m v_x$ sont liées par la relation d'incertitude de Heisenberg

$$\Delta x \Delta p_x \approx h.$$

Cette incertitude ne se manifeste pas à notre échelle en raison de la valeur de la constante de Planck (*symbole* : h), mais elle devient essentielle pour étudier un électron de masse $m_e = 9 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$ de vitesse de l'ordre de $c/100$ (dans un modèle classique), dans un atome dont les dimensions sont de l'ordre de 10^{-10} m .

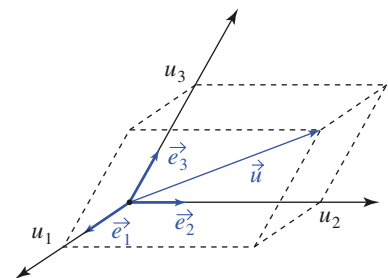
La mécanique classique (c'est-à-dire non relativiste et non quantique) est la théorie qu'il convient d'appliquer aux objets macroscopiques usuels. C'est cette théorie qui est développée dans la suite de l'ouvrage.

2 Repérage d'un point

2.1. Repère et position

2.1.1. Base vectorielle

Dans l'espace à trois dimensions, une base vectorielle normée est un ensemble de trois vecteurs unitaires non coplanaires : $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (*doc. 6*).



Doc. 6. u_1, u_2 et u_3 sont les composantes de \vec{u} dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. Cinématique

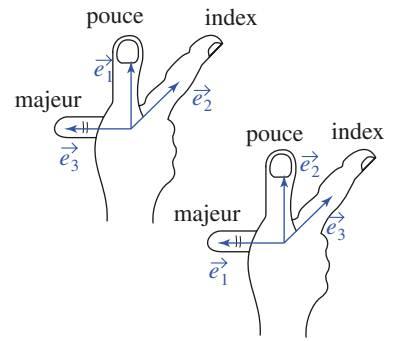
La base $\mathcal{B}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ étant donnée, un vecteur se décompose de façon unique :

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3.$$

La base \mathcal{B} est orthonormée si \vec{e}_1 , \vec{e}_2 et \vec{e}_3 sont des vecteurs unitaires orthogonaux et elle est directe si :

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2.$$

Pratiquement, retenons qu'une base orthonormée est directe s'il est possible de superposer les vecteurs \vec{e}_1 , \vec{e}_2 et \vec{e}_3 respectivement au pouce, à l'index et au majeur de la main droite (doc. 7).



Doc. 7. Bases orthonormées directes.

2.1.2. Repère

Un repère d'espace $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est constitué d'un point origine et d'une base vectorielle normée. Ayant défini un repère, il suffit de trois coordonnées pour repérer un point.

2.1.3. Vecteur position

En mécanique classique, les objets évoluent dans l'espace à trois dimensions de la géométrie euclidienne.

Un point origine O étant défini, un point M est repéré par son vecteur position :

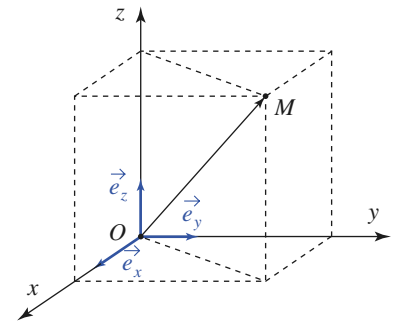
$$\vec{r} = \overrightarrow{OM}.$$

2.2. Coordonnées cartésiennes

Un repère cartésien est un repère orthonormé direct, défini par un point-origine et une base orthonormée directe $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ (doc. 8).

Les coordonnées cartésiennes (x, y, z) de M sont les composantes de son vecteur position :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z.$$



Doc. 8. Coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z.$$

2.3. Coordonnées cylindriques

2.3.1. Angle dans un plan

La mesure d'un angle dépend du sens positif de rotation choisi.

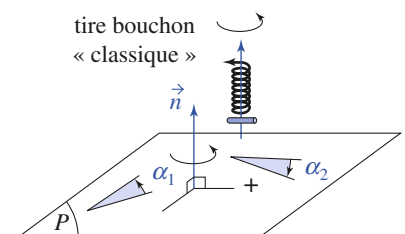
En géométrie plane, il est possible de définir un sens positif conventionnel (« sens trigonométrique », inverse du « sens horaire »).

En revanche, dans l'espace, un angle du plan P est orienté dans le sens trigonométrique ou dans le sens horaire selon que l'observateur se trouve « au-dessus » ou « au-dessous » du plan.

Par convention, la direction normale au plan étant orientée par un vecteur unitaire \vec{n} , un tire-bouchon usuel qui progresse dans le sens de \vec{n} tourne dans le sens positif (doc. 9).

2.3.2. Repérage d'un point

Soit un repère cartésien $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. H étant la projection orthogonale de M sur le plan (Oxy) , les coordonnées cylindriques (r, θ, z) du point M sont définies par :



Doc. 9. Orientation des angles de P :

$$\alpha_1 > 0 \text{ et } \alpha_2 < 0.$$

- r : distance OH ($r > 0$) ;
- θ : angle (\vec{e}_x, \vec{OH}) , le sens positif de θ étant défini par \vec{e}_z ;
- z : troisième coordonnée cartésienne (doc. 10).

2.3.3. Base locale

La base locale orthonormée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ liée au point M est définie par :

- \vec{e}_r tel que $\vec{OH} = r\vec{e}_r$, parallèle à (xOy) .
- $\vec{e}_\theta = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r$, parallèle à (xOy) et pointant dans le sens θ croissant.

Cette base est locale, car elle varie avec la position de M , qui s'écrit :

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z.$$

L'utilisation des coordonnées cylindriques peut, dans certains, cas amener une simplification notable des expressions par rapport aux coordonnées cartésiennes.

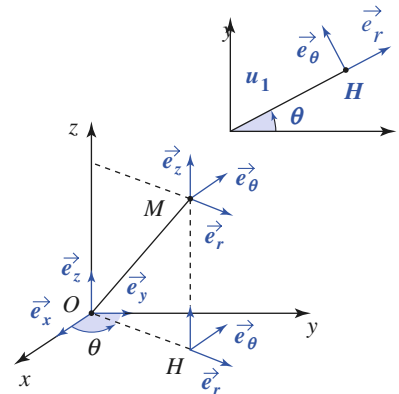
2.3.4. Coordonnées polaires

Lorsque le point M se déplace dans un plan (Oxy) , il est possible d'utiliser les coordonnées cartésiennes (x, y) ou les coordonnées polaires (r, θ) pour repérer les positions.

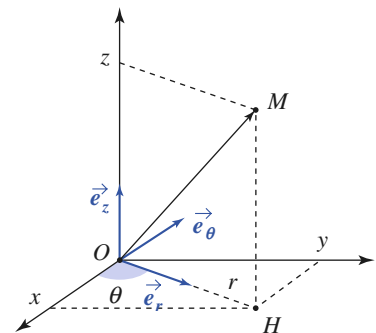
2.3.5. Relations entre les coordonnées cylindriques et cartésiennes

Les relations suivantes découlent directement des définitions (doc. 11) :

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y; & \vec{e}_\theta &= -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y; \\ x &= r \cos \theta; & y &= r \sin \theta; & r &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$



Doc. 10. Coordonnées cylindriques : $\vec{OH} = r\vec{e}_r$; $\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$.



Doc. 11. Relation entre les coordonnées cylindriques et cartésiennes : $x = r \cos \theta$; $y = r \sin \theta$.

Application 2

Cylindre de révolution

Soit un cylindre de révolution de rayon R et d'axe (Oz) .

Déterminer son équation en coordonnées cylindriques et en coordonnées cartésiennes.

L'ensemble des points du cylindre est déterminé par :

$$r = R.$$

En coordonnées cartésiennes, l'équation devient :

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

2.4. Coordonnées sphériques

2.4.1. Base locale

La base locale orthonormée directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ est définie par (doc. 12) :

- $\vec{OM} = r\vec{e}_r$, avec $r \geq 0$;

- $\vec{e}_\varphi = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{OH}}{OH}$, parallèle à (xOy) ;
- $\vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r$, parallèle au plan contenant Oz et OM .

2.4.2. Coordonnées d'un point

Les coordonnées sphériques (r, θ, φ) de M sont, par définition :

- $r = OM$ ($r > 0$);
- θ : angle (\vec{e}_z, \vec{e}_r) orienté par \vec{e}_φ , variant de 0 à π ;
- φ : angle (\vec{e}_x, \vec{OH}) orienté par \vec{e}_z , variant de 0 à 2π .

Remarques

- \vec{e}_θ pointe vers les θ croissants et \vec{e}_φ vers les φ croissants ;
- r n'a pas la même signification en coordonnées sphériques ou cylindriques ;
- dans tout plan $\varphi = \text{cte}$, r et θ sont les coordonnées polaires du point M (doc. 13).

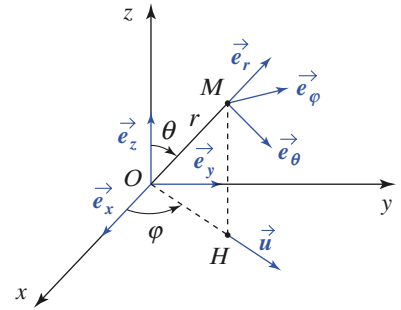
2.5. Choix d'un système de coordonnées

Le repérage d'une position en mécanique fait appel à un système de coordonnées. Les trois exemples que nous venons de décrire sont les choix les plus courants, mais ne constituent pas une liste exhaustive.

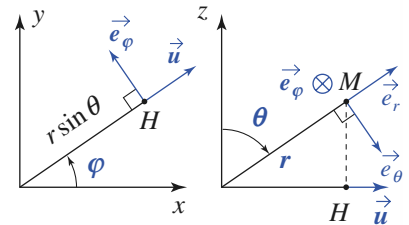
Considérons un point se déplaçant à la surface d'un cylindre à base circulaire (doc. 14).

- Pour repérer sa position, nous pouvons utiliser des coordonnées cartésiennes. Le bon sens nous indique qu'il est préférable de choisir l'axe du cylindre comme axe (Oz) des coordonnées cartésiennes, le mouvement, en projection dans le plan (xOy) , se réduisant alors à un simple cercle. Lorsque le point se déplace, si nous souhaitons exprimer sa vitesse ou son accélération, nous devons tenir compte des variations des trois coordonnées x, y et z au cours du temps : cela sera peut-être un peu long, mais néanmoins très faisable...
- Utilisons maintenant un repérage en coordonnées cylindriques (r, θ, z) de ce mouvement. La coordonnée r est alors très simple : r est une constante, égale au rayon du cylindre. Seules les variables θ et z sont encore susceptibles de varier : le calcul de la vitesse et de l'accélération sera écourté.
- Nous pouvons aussi employer les coordonnées sphériques pour repérer ce point en mouvement, mais il est bien évident que cela n'apporte ici aucune simplification : bien au contraire !

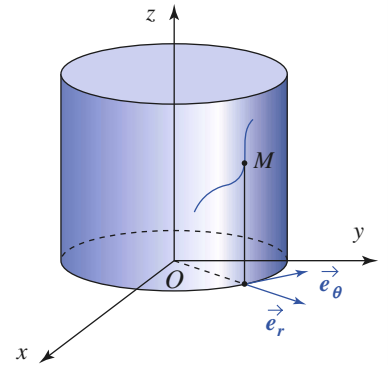
Un problème bien posé étant un problème à moitié résolu, il est clair qu'un choix judicieux du système de coordonnées peut simplifier fortement les calculs à effectuer. Par la suite, nous établirons les expressions des vitesses et des accélérations d'un point en nous restreignant à l'utilisation des coordonnées cartésiennes et cylindriques, pour lesquelles les expressions de ces grandeurs seront assez simples.



Doc. 12. Coordonnées sphériques.



Doc. 13. Plans : $z = 0$ et $\varphi = \text{cte}$.



Doc. 14. M se déplace sur le cylindre.

3 Dérivation d'une fonction vectorielle

Pour décrire la position d'un point en coordonnées cylindriques, nous venons d'utiliser une base locale (base de projection). Les vecteurs de cette base sont dépendants de la position du point observé : $\vec{e}_r = \vec{e}_r(\theta)$, $\vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta(\theta)$.

Pour exprimer la vitesse ou bien l'accélération du point en mouvement, nous devons tenir compte du caractère éventuellement variable des vecteurs de la base utilisée pour décomposer le vecteur position.

3.1. Définition

Soit $\vec{U}(\xi)$ une grandeur vectorielle dépendant de la variable ξ . La dérivée de \vec{U} par rapport à ξ est (doc. 15) :

$$\frac{d\vec{U}}{d\xi} = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{\vec{U}(\xi + \Delta\xi) - \vec{U}(\xi)}{\Delta\xi}.$$

La dérivée d'une grandeur vectorielle dépend du référentiel.

Lorsqu'il sera nécessaire de préciser le référentiel dans lequel s'effectue cette dérivation, nous noterons $\left(\frac{d\vec{U}}{d\xi}\right)_{/\mathcal{R}}$ la dérivée de \vec{U} par rapport à ξ dans \mathcal{R} .

Dans toute la suite de ce chapitre, \mathcal{R} représente le référentiel de l'observateur (ou référentiel d'étude) et le repère cartésien $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est fixe par rapport à \mathcal{R} .

3.2. Propriétés

Nous admettons les propriétés suivantes, qui sont les transpositions aux fonctions vectorielles des propriétés classiques des dérivées :

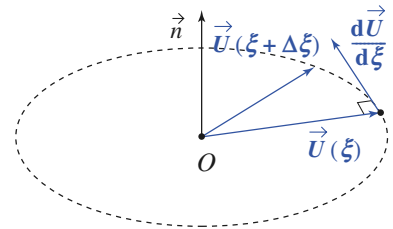
- si $\vec{W}(\xi) = \lambda(\xi)\vec{U}(\xi)$, alors $\frac{d\vec{W}}{d\xi} = \frac{d\lambda}{d\xi}\vec{U} + \lambda\frac{d\vec{U}}{d\xi}$;
- si $\vec{W}(\xi) = \vec{U}(\xi) + \vec{V}(\xi)$, alors $\frac{d\vec{W}}{d\xi} = \frac{d\vec{U}}{d\xi} + \frac{d\vec{V}}{d\xi}$;
- si $A(\xi) = \vec{U}(\xi) \cdot \vec{V}(\xi)$, alors $\frac{dA}{d\xi} = \frac{d\vec{U}}{d\xi} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \frac{d\vec{V}}{d\xi}$;
- si $\vec{W}(\xi) = \vec{U}(\xi) \wedge \vec{V}(\xi)$, alors $\frac{d\vec{W}}{d\xi} = \frac{d\vec{U}}{d\xi} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \frac{d\vec{V}}{d\xi}$.

3.3. Dérivée d'un vecteur de norme constante

Soit $\vec{U}(\xi)$ un vecteur de norme U constante. Ce vecteur n'est pas pour autant constant, car son orientation peut varier.

$$\frac{dU^2}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}(\vec{U} \cdot \vec{U}) = 0, \text{ donc } 2\vec{U} \cdot \frac{d\vec{U}}{d\xi} = 0$$

La dérivée d'un vecteur de norme constante est orthogonale à ce vecteur ou nulle. C'est le cas des vecteurs unitaires.



Doc. 15. Variation d'un vecteur de norme constante, orthogonal à \vec{n} .

3.4. Expression de la dérivée en coordonnées cartésiennes

La fonction vectorielle $\vec{U}(\xi)$ s'exprime par :

$$\vec{U} = U_x \vec{e}_x + U_y \vec{e}_y + U_z \vec{e}_z.$$

Comme \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z sont constants dans \mathcal{R} , la dérivée de \vec{U} dans \mathcal{R} est donc :

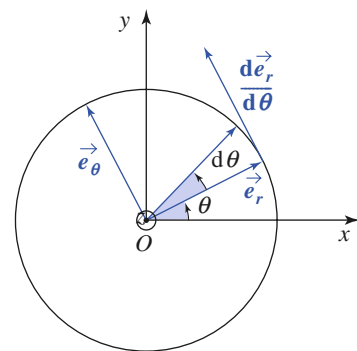
$$\left(\frac{d\vec{U}}{d\xi}\right)_{/\mathcal{R}} = \frac{dU_x}{d\xi} \vec{e}_x + \frac{dU_y}{d\xi} \vec{e}_y + \frac{dU_z}{d\xi} \vec{e}_z.$$

3.5. Dérivée des vecteurs de la base locale des coordonnées cylindriques

Considérons un point M mobile par rapport à \mathcal{R} et la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ liée à M.

Pour un observateur lié à \mathcal{R} , les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ dépendent de θ et leur dérivée est non nulle (doc. 16) :

- $\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$ donne $\left(\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$;
- $\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$ donne $\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} = -\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_y$.



Doc. 16. $\vec{e}_\theta = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta}$.

En coordonnées cylindriques, les vecteurs de la base locale dépendent de θ :

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} = -\vec{e}_r.$$

Notons que nous avons exprimé le vecteur dérivé relativement au référentiel \mathcal{R} dans une base mobile par rapport à \mathcal{R} .

Ces résultats peuvent être retrouvés de façon moins rigoureuse, mais plus concrète : au cours d'une rotation élémentaire $d\theta$, l'extrémité du vecteur unitaire \vec{e}_r décrit un segment de mesure $d\theta$, orthogonal à \vec{e}_r , donc :

$$d\vec{e}_r = d\theta \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta; \quad d\vec{e}_\theta = -d\theta \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r.$$

4 Vitesse d'un point

4.1. Définition

Soit O un point fixe du référentiel \mathcal{R} . Le vecteur vitesse du point mobile M par rapport à ce référentiel est :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}.$$

Notation : Conformément à l'usage, la dérivation par rapport à la variable temps est notée par un point :

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} \text{ et } \ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

4.2. Expression en coordonnées cartésiennes

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z.$$

En coordonnées cartésiennes, le vecteur vitesse \vec{v} a pour expression :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z.$$

4.3. Expression en coordonnées cylindriques

Pour définir la position du point M , nous avons l'expression suivante (doc. 17) :

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z.$$

Pour un observateur lié à \mathcal{R} , \vec{e}_r est fonction de θ , et θ est fonction du temps (cf. § 5.5.), donc :

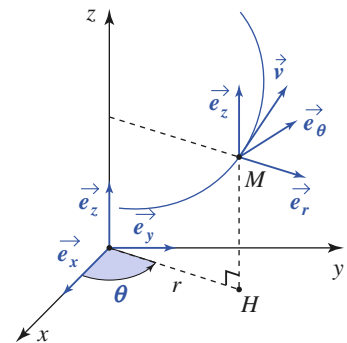
$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} + \dot{z}\vec{e}_z.$$

Or :

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\right)_{/\mathcal{R}} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta, \text{ d'où :}$$

En coordonnées cylindriques, le vecteur vitesse a pour expression :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z.$$



Doc. 17. Coordonnées cylindriques.

Application 3

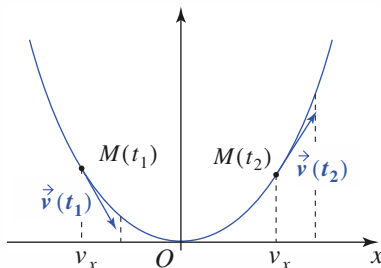
Mouvement parabolique

Un point mobile M décrit une parabole d'équation :

$$y = \alpha x^2 \quad (\alpha > 0).$$

La composante v_x de sa vitesse est constante.

Déterminer v_y et la vitesse v en fonction de x .



◀ Doc. 18. Trajectoire parabolique.

Bien que ne précisant pas le référentiel, l'énoncé suppose implicitement que les axes (Ox) et (Oy) sont fixes par rapport à \mathcal{R} . La notation simplifiée est justifiée.

y est fonction de x et x est fonction de t , d'où :

$$v_y = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \text{ soit } v_y = 2\alpha x v_x;$$

v_y croît linéairement en fonction de x .

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

$$v^2 = v_x^2(1 + 4\alpha^2 x^2).$$

Le vecteur $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ est défini dans \mathcal{R} et nous l'avons exprimé avec la base locale (base de projection) qui est mobile dans \mathcal{R} .

Remarque : composition des vitesses

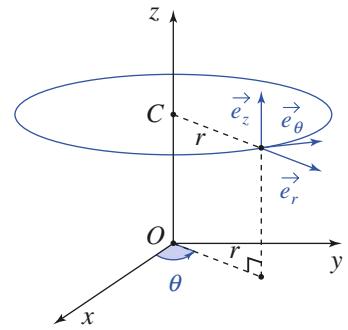
Considérons la vitesse du point M obtenue lorsque seule l'une de ses trois coordonnées est libre de varier.

- Si r varie seul, le mobile décrit une droite, soit : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}_r = \dot{r} \vec{e}_r$.
- Si θ varie seul, le mobile décrit un cercle avec la vitesse $r\dot{\theta}$ orientée selon \vec{e}_θ (doc. 19), soit : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}_\theta = r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$.
- Si z varie seul, le mobile décrit une droite, soit : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}_z = \dot{z} \vec{e}_z$.

L'expression générale du vecteur vitesse permet de vérifier que :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta + \vec{v}_z.$$

Nous admettons le caractère général de ce résultat : le vecteur vitesse de M est égal à la somme des vecteurs vitesse que l'on obtient en ne faisant varier successivement qu'une seule de ses coordonnées. Cette propriété ne sera pas applicable à l'accélération.



Doc. 19. Trajectoire de M si r et z sont constants.

Application 4

Vecteur vitesse en coordonnées sphériques

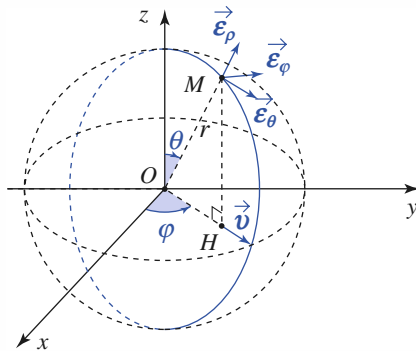
Le repère cartésien $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ étant lié à \mathcal{R} , exprimer $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ en coordonnées sphériques.

Si r varie seul, le mobile décrit une droite, donc :

$$\vec{v}_r = \dot{r} \vec{e}_r.$$

Si θ varie seul, le mobile décrit un cercle de rayon r avec une vitesse $r\dot{\theta}$, donc :

$$\vec{v}_\theta = r\dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$



Doc. 20. Cercle décrit par M si r et φ sont constants ; le plan du cercle est le plan $(O; \vec{u}, \vec{e}_z)$.

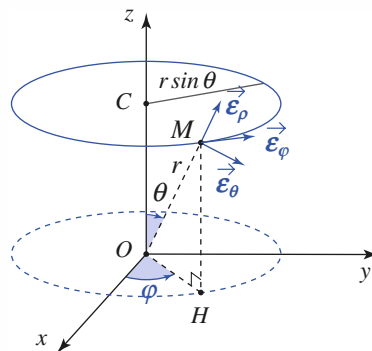
Si φ varie seul, le mobile décrit un cercle de rayon $r \sin \theta$, parallèle au plan (Oxy) , à la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$, donc :

$$\vec{v}_\varphi = r \sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi,$$

Utilisons la superposition des vitesses qui nous donne $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta + \vec{v}_\varphi$, soit :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

où \vec{v} est le vecteur vitesse en coordonnées sphériques.



Doc. 21. Cercle décrit par M si r et φ sont constants.

5 Accélération

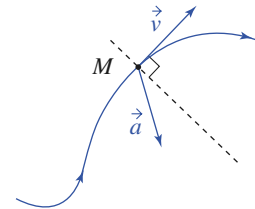
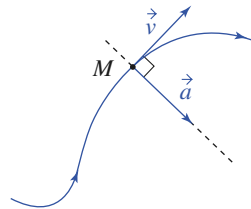
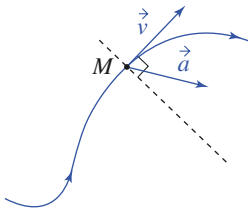
5.1. Définition

Le vecteur accélération de M par rapport au référentiel \mathcal{R} est :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}}.$$

Seul un mouvement à la fois rectiligne et uniforme est non accéléré. Un mouvement uniforme (vitesse constante), mais non rectiligne est accéléré, car la direction du vecteur vitesse est variable (*doc. 22*).

Bien remarquer sur les trois graphiques du *document 22* l'orientation de \vec{a} qui pointe en permanence dans la concavité de la trajectoire.



Doc. 22a. La vitesse v est croissante. **Doc. 22b.** La vitesse v est uniforme. **Doc. 22c.** La vitesse v est décroissante.

5.2. Expression en coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

Application J

Mouvement parabolique uniforme

Un point mobile M décrit la parabole d'équation :
 $y = \alpha x^2$, à la vitesse constante v .

Déterminer son vecteur accélération lorsqu'il passe au point O .

En l'absence d'ambiguïté, adoptons des notations simplifiées :

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad \text{et} \quad \dot{y} = 2\alpha x\dot{x},$$

$$\text{d'où :} \quad \dot{x}^2 = \frac{v^2}{1 + 4\alpha^2 x^2}.$$

Dérivons par rapport au temps les expressions de \dot{x} et \dot{y} :

$$2\dot{x}\ddot{x} = -\frac{8v^2\alpha^2 x\dot{x}}{(1 + 4\alpha^2 x^2)^2} \quad \text{et} \quad \ddot{y} = 2\alpha\dot{x}^2 + 2\alpha x\ddot{x}.$$

Or au point O : $x = 0$ et $\dot{x} = v$. Donc à l'instant où le mobile M est en O , nous avons :

$$\vec{a} = 2\alpha v^2 \vec{e}_y.$$

5.3. Expression en coordonnées cylindriques

Pour un observateur de \mathcal{R} , le repère cartésien $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est fixe. Les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ sont fonction de θ , et θ est fonction du temps. Soit :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r.$$

Or $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$, d'où :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

En coordonnées cylindriques :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

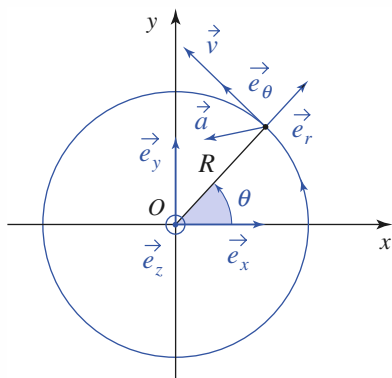
D'après ce résultat, nous voyons immédiatement que :

Il n'y a pas pour les accélérations de loi de superposition identique à celle des vitesses :

$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}$ n'est pas égale à la somme des accélérations que l'on obtiendrait en faisant varier successivement une seule coordonnée (le terme en $\dot{r}\dot{\theta}$ ne pouvant pas apparaître de cette façon).

Application 6

Mouvement circulaire uniforme dans une centrifugeuse



Doc. 23. Mouvement circulaire.

Au cours de leur entraînement, pour habituer leur organisme à supporter les forces accélérations du décollage et de l'entrée dans l'atmosphère, les cosmonautes sont placés sur un siège fixé à l'extrémité d'un bras de longueur R , en rotation à vitesse angulaire Ω constante.

1) Exprimer la vitesse et l'accélération à l'extrémité du bras de la centrifugeuse, dans la base locale des coordonnées cylindriques.

2) Calculer Ω en tours par minute si $R = 5,0$ m si l'accélération obtenue vaut $6g$, où g est l'accélération de la pesanteur terrestre : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1) Le mouvement est circulaire : $r = R = \text{cte}$, et uniforme : $\dot{\theta} = \Omega = \text{cte}$. Nous obtenons donc :

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R\frac{d\vec{e}_r}{dt} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta,$$

$$\text{soit : } \vec{v} = R\Omega\vec{e}_\theta$$

$$\vec{v} = R\Omega\vec{e}_\theta \rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\Omega\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -R\Omega^2\vec{e}_r.$$

Nous remarquons que l'accélération est centripète dans la concavité de la trajectoire, et dirigée vers le centre du cercle.

2) Nous avons ici : $r\Omega^2 = 6g$, soit $\Omega = \sqrt{\frac{6g}{R}}$, en radians par seconde, donc :

$$\Omega = \frac{1/2\pi}{1/60} \sqrt{\frac{6g}{R}} \approx 33 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}.$$

Nous retiendrons que :

pour un mouvement circulaire de centre O et rayon R , nous avons, en coordonnées polaires :

$$\vec{v}(M)_{J\mathcal{R}} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \text{ et } \vec{a}(M)_{J\mathcal{R}} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

Dans les cas du mouvement circulaire uniforme :

$$v = R\dot{\theta} = \text{cte et } \vec{a}(M)_{J\mathcal{R}} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r.$$

6 Représentations du mouvement

6.1. Espace des positions, trajectoire

La **trajectoire** est constituée par l'ensemble des positions successives $\vec{OM}(t)$ du point mobile M étudié. Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire en chacun de ses points (doc. 24a.).

6.2. Espace des vitesses, hodographe

Il est envisageable de représenter l'évolution de la position du point N défini par : $\vec{ON} = \vec{v}(M)_{J\mathcal{R}}$.

Le point M évolue dans l'espace des positions. Le point N dans l'espace des vitesses, où l'origine est encore notée O par souci de simplicité. L'ensemble des positions de N forme l'**hodographe** du mouvement (doc. 24b.).

L'accélération, qui peut être qualifiée de « vitesse de la vitesse », est tangente à l'hodographe en chacun de ses points.

6.3. Espace des phases, trajectoire de phase

6.3.1. Définitions

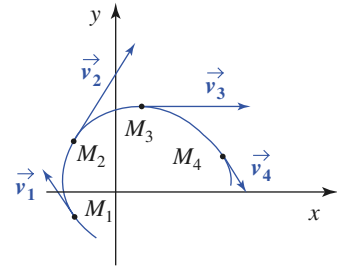
Nous pouvons définir un **espace des phases**, à 6 dimensions, dans lequel la position du point P représentatif du mouvement donnerait simultanément accès à la position $\vec{r} = \vec{OM}$ et à la vitesse $\vec{v} = \vec{ON}$.

Dans cet espace, l'ensemble des positions successives $\vec{OP} = (\vec{r}, \vec{v})$ constitue la **trajectoire de phase** du mouvement. Le point P est appelé **point de phase** du système. Par la suite, nous restreindrons les représentations des trajectoires de phase pour des systèmes à un degré de liberté, noté x . La trajectoire de phase est alors une courbe que nous tracerons dans le **plan de phase** ($O ; x, v_x$).

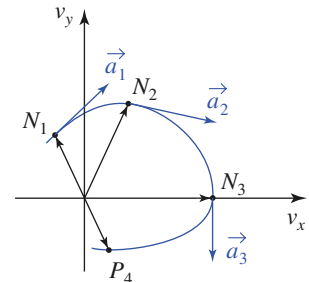
L'état d'un système à un degré de liberté est représenté, à tout instant, par son point de phase $P(t)$ de coordonnées (x, v_x) dans le plan de phase. La trajectoire du point P constitue la trajectoire de phase du système.

6.3.2. Sens de parcours

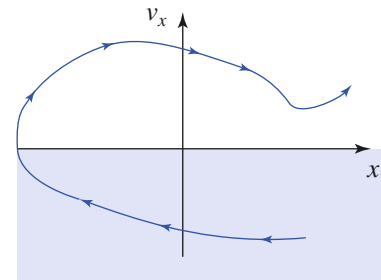
Dans le demi-plan de phase $v_x > 0$, l'abscisse x augmente lorsque le temps t croît, et dans le demi-plan $v_x < 0$, celle-ci diminue. Ceci nous permet de prévoir une orientation qualitative simple des trajectoires de phase dans ces deux demi-plans (doc. 25).



Doc. 24a. Trajectoire dans l'espace des positions.



Doc. 24b. Hodographe dans l'espace des vitesses $\vec{ON}_i = \vec{v}_i$.



Doc. 25. Orientation des trajectoires dans le plan de phase.

6.4. Observation de mouvements élémentaires

6.4.1. Mouvement uniformément accéléré

Considérons un mobile animé d'un mouvement uniformément accéléré, et orientons l'axe (Ox) des coordonnées cartésiennes suivant le vecteur accélération, constant :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = a\vec{e}_x.$$

Par intégration par rapport au temps, nous obtenons le vecteur vitesse du point :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t.$$

Pour simplifier, restreignons-nous à un mouvement rectiligne, pour lequel la vitesse est elle aussi dirigée parallèlement à l'axe (Ox) :

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{e}_x = (v_0 + at)\vec{e}_x.$$

L'hodographe de ce mouvement est une droite de pente a (doc. 26a.).

La position du point sur l'axe (Ox) est donnée par une nouvelle intégration :

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2.$$

L'équation horaire de la trajectoire est une fonction parabolique du temps (doc. 26b.).

Éliminons le temps t entre les expressions de $v(t)$ et $x(t)$:

$$x = x_0 + \frac{1}{2a}(v^2 - v_0^2)$$

nous obtenons alors l'équation de la trajectoire de phase du mobile, qui est une portion de parabole.

Examinons le document 27, qui fait apparaître cette trajectoire, pour diverses conditions initiales (x_0, v_0) :

- Ces trajectoires de phase sont obtenues pour $x_0 = 0$ et $v_0 = 0$ dans le cas ①, $v_0 = 0$ mais $x_0 > 0$ pour le cas ②, $x_0 > 0$ et $v_0 > 0$ pour le cas ③, et enfin $x_0 < 0$ et $v_0 < 0$ dans le cas ④.

- Dans tous les cas, la trajectoire de phase part du point (x_0, v_0) , et décrit une branche de parabole.

Changer v en $-v$ ne modifie pas l'équation de la trajectoire, qui est symétrique par rapport à l'axe (Ox) : l'axe de la parabole est (Ox).

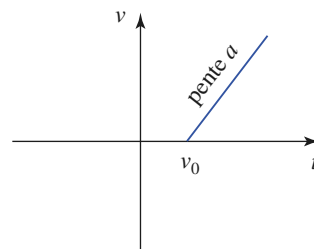
- Sur ces simulations, nous vérifions le sens de parcours attendu sur les trajectoires de phase.

- Une telle évolution peut, par exemple, être observée pour un mouvement vertical de chute libre dans le champ de pesanteur terrestre, lorsque celui-ci est uniforme à l'échelle de la trajectoire, et si les frottements de l'air peuvent être négligés. L'axe x est alors dirigé suivant la verticale descendante du lieu. Le cas ④, par exemple, représenterait la trajectoire de phase d'un caillou lancé initialement vers le haut puisque $v_0 < 0$.

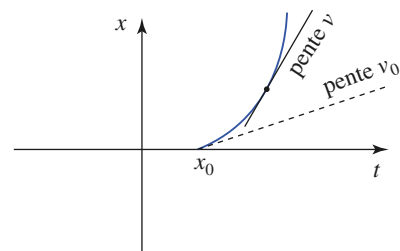
6.4.2. Mouvement oscillant

L'oscillateur harmonique est un cas simple de mouvement oscillant, dont l'équation d'évolution est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2(x - x_e) = 0 \quad \text{ou encore} \quad \frac{dv_x}{dt} = -\omega_0^2(x - x_e).$$

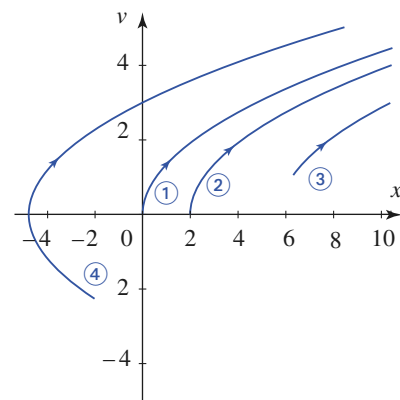


a. Hodographe $v(t)$



b. Trajectoire $x(t)$

Doc. 26. Mouvement rectiligne uniformément accéléré.



Doc. 27. Trajectoires de phase pour des mouvements uniformément accélérés.

La solution de cette équation est une oscillation sinusoïdale de pulsation ω_0 autour de la position d'équilibre x_e du mobile :

$$x = x_e + A \cos(\omega_0 t + \varphi); \quad v = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

A désigne l'amplitude des oscillations, et la phase φ dépend des conditions initiales choisies (qui ne sont pas ici très importantes puisque le mouvement obtenu est de toute façon périodique).

Les fonctions $x(t)$ et $v(t)$ sont des fonctions sinusoïdales du temps, qui évoluent en quadrature. Un oscillateur harmonique à un degré de liberté, de pulsation ω_0 , oscille autour de sa position d'équilibre repérée par le point $P_e(x_e, 0)$ dans le plan de phase.

Pour éliminer la variable temps entre les expressions de $x(t)$ et $v(t)$, il suffit d'utiliser l'identité :

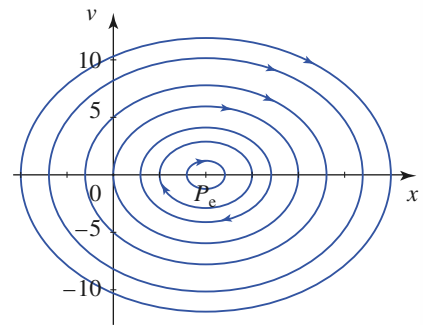
$$\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = 1.$$

Nous en déduisons que la trajectoire de phase est une ellipse (doc. 28) de centre P_e , d'équation :

$$(x - x_e)^2 + \left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2 = A^2.$$

Le portrait de phase de l'oscillateur harmonique est donc constitué d'un ensemble d'ellipses centrées en son point d'équilibre P_e , dont la taille croît avec l'amplitude A des oscillations envisagées. Nous pouvons aussi vérifier que ces ellipses sont décrites en tournant dans le sens horaire autour du point P_e .

Constatons que la trajectoire de phase est, dans tous les cas, fermée : le point de phase revient au bout d'un certain temps à sa position de départ. À partir de là, son évolution se reproduit à l'identique : l'évolution est périodique. La période de ce mouvement est $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Retenons ce fait général :



Doc. 28. Portrait de phase d'un oscillateur harmonique.

Une trajectoire de phase fermée est la signature d'un mouvement périodique.

CQFR

● OBSERVATION D'UN MOUVEMENT

En mécanique classique, le mouvement dépend du référentiel d'observation.

La trajectoire n'est définie que pour un référentiel déterminé.

Par postulat, la durée des événements ne dépend pas du choix de référentiel.

● REPÉRAGE D'UN ÉVÉNEMENT

Un événement est repéré par une position (ensemble de coordonnées spatiales) et un instant d'observation (coordonnée temporelle).

Les systèmes usuels de coordonnées spatiales (bases de projection) sont les coordonnées cartésiennes (x, y, z) , les coordonnées cylindriques (r, θ, z) et les coordonnées sphériques (r, θ, φ) .

● DÉRIVATION VECTORIELLE

Un mouvement ou la dérivée d'une grandeur vectorielle ne sont définis que par rapport à un référentiel (ou un observateur) déterminé.

La dérivée d'un vecteur de norme constante est orthogonale à ce vecteur ou nulle. C'est le cas des vecteurs unitaires.

En coordonnées cylindriques ou polaires, les vecteurs de la base locale dépendent de θ :

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r.$$

● VECTEUR VITESSE ET VECTEUR ACCÉLÉRATION

Soit O un point fixe du référentiel \mathcal{R} ; les vecteurs vitesse et accélération du point M dans le référentiel \mathcal{R} sont :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}}.$$

Si l'accélération \vec{a} est nulle, la vitesse \vec{v} est constante et la trajectoire rectiligne.

• Coordonnées cartésiennes

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

• Coordonnées cylindriques

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

• Mouvement circulaire

Si M décrit un mouvement circulaire de centre O et de rayon R , nous avons :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r + \dot{v}\vec{e}_\theta.$$

Si la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est constante alors le mouvement est circulaire uniforme :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r.$$

● REPRÉSENTATIONS DU MOUVEMENT

• La trajectoire est constituée de l'ensemble des positions successives $\vec{OM}(t) = \vec{r}(t)$ du point mobile M étudié.

• Dans l'espace des vitesses, l'ensemble des positions successives $\vec{ON}(t) = \vec{v}(t)$ constitue l'hodographe du mouvement.

• Dans l'espace des phases, le point P repéré par $\vec{OP} = (\vec{OM}, \vec{ON})$ décrit la trajectoire de phase du mobile. Pour un mouvement à un degré de liberté, le point de phase P se déplace dans le plan de phase :

$$\vec{OP} = (x(t), v(t)).$$

Une trajectoire de phase fermée est la trajectoire d'un mouvement périodique (elle est décrite en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre).

Contrôle rapide

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Quel est l'étalon de temps ?
- ✓ Pourquoi n'y a-t-il pas d'étalon de longueur ?
- ✓ Quel est le caractère particulier de la coordonnée « temps » en mécanique classique ?
- ✓ Qu'entend-on par relativité du mouvement ?
- ✓ Quelles sont les limites de la mécanique classique ?
- ✓ Qu'est-ce que la loi de superposition des vitesses ? Y a-t-il un équivalent pour les accélérations ?
- ✓ Quels sont les domaines de variation des coordonnées cylindriques r , θ et z ? ceux des coordonnées sphériques r , θ et φ ? Les variables « r » et « θ » de ces deux systèmes ont-elles la même signification ?
- ✓ Définir les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ de la base locale des coordonnées cylindriques. Quelles sont les valeurs de leur dérivées par rapport à la variable θ ? par rapport à la variable t ?
- ✓ Que valent la vitesse et l'accélération d'un mobile en mouvement circulaire uniforme ?
- ✓ Qu'est-ce qu'une trajectoire ? un hodographe ? un point de phase ? une trajectoire de phase ? un portrait de phase ?

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. Les composantes de la vitesse d'un point M en coordonnées cylindriques sont :

- a. $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$
- b. $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$
- c. $\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) + \dot{z}\vec{e}_z$
- d. $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d}{dt}(\vec{e}_r) + \dot{z}\vec{e}_z$.

2. Les composantes de la vitesse d'un point M en coordonnées sphériques sont :

- a. $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$
- b. $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$
- c. $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$
- d. $\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r)$.

3. Les composantes de l'accélération d'un point M en coordonnées cylindriques sont :

- a. $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$
- b. $\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$
- c. $\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2}(r\vec{e}_r) + \ddot{z}\vec{e}_z$
- d. $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$.

4. Les composantes de l'accélération d'un point M en coordonnées sphériques sont :

- a. $\vec{a} = \frac{d(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi)}{dt}$
- b. $\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi$
- c. $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\vec{e}_\theta + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi$
- d. $\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2}(r\vec{e}_r)$.

► Solution, page 27.

Exercice commenté

Mouvement hélicoïdal

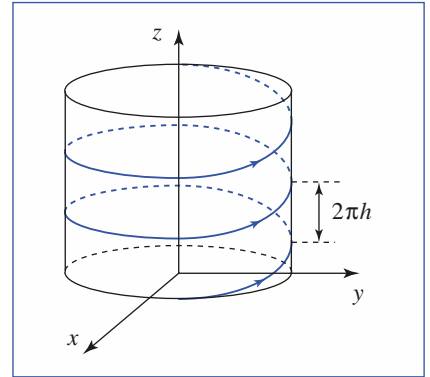
ÉNONCÉ

Soit l'hélice droite définie en coordonnées cylindriques par les équations :

$$r = R \text{ et } z = h\theta \text{ (} h \text{ constante)}$$

et orientée dans le sens θ croissant. L'origine est le point repéré par $z = 0$.

- 1) Déterminer ses équations en coordonnées cartésiennes. Quel est le pas a de cette hélice ?
- 2) Cette hélice est parcourue à la vitesse constante v par un point M .
 - a) Déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération.
 - b) Tracer l'hodographe.



CONSEILS

1) Pour passer aux coordonnées cartésiennes, il suffit d'utiliser $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, la coordonnée z étant commune aux coordonnées cartésiennes et cylindriques.

2)a) Les calculs de \vec{v} ou \vec{a} font intervenir une dérivation temporelle. N'oublions pas que pour une fonction $f(\theta)$ (scalaire, mais aussi vectorielle $\vec{f}(\theta)$) il faut écrire :

$$\frac{df(\theta)}{dt} = \frac{df(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} f'(\theta).$$

SOLUTION

$$1) \begin{cases} x = r \cos \theta & \text{donc} & \begin{cases} x = R \cos\left(\frac{z}{h}\right) \\ y = r \sin \theta \\ z = h\theta \end{cases} \end{cases}$$

Au bout d'un tour, l'angle θ a augmenté de 2π , et l'altitude z a augmenté du pas a de l'hélice : $a = 2\pi h$.

$$2) \text{ a) } \bullet v = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta + h \dot{\theta} \vec{e}_z, \text{ d'où } \dot{\theta} = \frac{v}{\sqrt{R^2 + h^2}}.$$

$$\text{Alors } \vec{v} = \frac{v}{\sqrt{R^2 + h^2}} (R \vec{e}_\theta + h \vec{e}_z),$$

$$\bullet \dot{r}, \ddot{\theta} \text{ et } \ddot{z} \text{ étant nuls, } \vec{a} = -r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r, \text{ d'où } \vec{a} = -R \frac{v^2}{R^2 + h^2} \vec{e}_r.$$

b) L'hodographe est un cercle parallèle au plan (Oxy) , de cote h et de rayon

$$\rho = \frac{Rv}{\sqrt{R^2 + h^2}}.$$

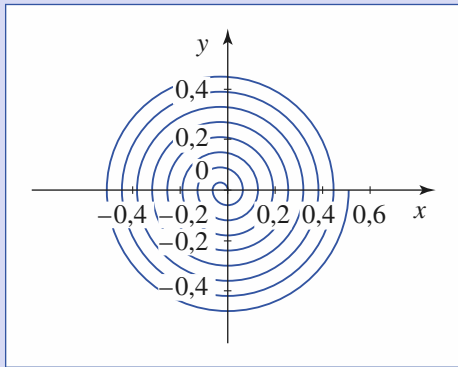
Exercices

1 Mouvement uniforme sur une spirale

Un mobile M parcourt avec une vitesse constante v la spirale d'équation polaire :

$$r = a\theta.$$

Exprimer en fonction de θ le vecteur vitesse de M .



2 Cercles sur une sphère

Soit un repère cartésien $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et la sphère de rayon R .

Sur cette sphère, traçons la courbe Γ définie en coordonnées sphériques par $\theta = \theta_0$.

- 1) Quelle est cette courbe ?
- 2) Cette courbe est décrite à vitesse constante v (en norme), en partant de $\varphi = 0$.

Déterminer les expressions des coordonnées cartésiennes, vitesse, et accélération du mobile en fonction du temps.

3 Parallaxe

Soit deux repères cartésiens de même base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et d'origines O_1 et O_2 telles que $\overrightarrow{O_1O_2} = a\vec{e}_z$.

Les coordonnées sphériques de M sont, respectivement dans les deux repères, (θ_1, φ_1) et (θ_2, φ_2) , avec :

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi.$$

- 1) Exprimer r_1 et r_2 en fonction de a , θ_1 , θ_2 .
- 2) $\theta_2 = \theta_1 + \varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$ rad). Donner une expression approchée de la forme $r_1 = k(\theta_1)\frac{a}{\varepsilon}$.

3) Proposer une application en astronomie.

Rappel : Les côtés et les angles d'un triangle ABC

vérifient la relation $\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin B}{CA} = \frac{\sin C}{AB}$.

4 Trajectoire, hodographe, trajectoire de phase d'un mouvement uniformément accéléré

Soit un point M mobile dans le plan (Oxy) . Son mouvement par rapport à \mathcal{R} est déterminé par :

- un vecteur accélération constant : $\vec{a} = a\vec{e}_y$ ($a > 0$) ;
- un vecteur vitesse initiale à $t = 0$:

$$\|\vec{v}(0)\| = v_0 \quad \text{et} \quad (\vec{e}_x, \vec{v}(0)) = \alpha \quad (\text{avec } \alpha < 0) ;$$

- une position initiale : origine O du repère.

- 1) Déterminer la trajectoire du mobile.
- 2) Examiner de même l'hodographe de ce mouvement.
- 3) La vitesse selon (Ox) étant ici constante, on s'intéresse à la trajectoire de phase du mobile dans le plan $(v_O v_y)$. Quelle est la forme de cette trajectoire de phase ?

5 Le bon référentiel

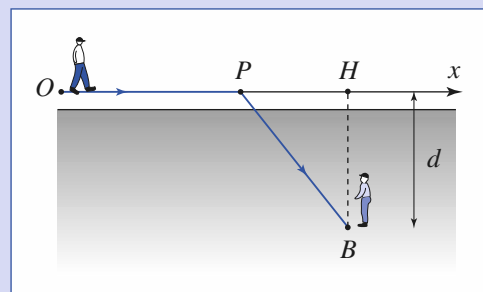
Une rivière a une vitesse d'écoulement supposée uniforme, c'est-à-dire identique en tout point, et constante (elle ne dépend pas du temps). Un bateau, qui circule dans le sens du courant, dépasse le radeau en un point A . Une demi-heure après, le bateau fait demi-tour. Il remonte le courant et croise le radeau en un point B situé à 3 km en aval de A .

Déterminer la vitesse du courant en supposant que la vitesse du bateau par rapport au courant est constante.

6 Un rapide détourné

Un marcheur, qui se promène sur une route rectiligne, aperçoit un épouvantail au milieu d'un champ, à une distance d de la route. Il décide d'aller le voir de plus près et entre dans le champ en P . Sa vitesse est v_1 sur la route et v_2 dans le champ. (v_1 et v_2 constantes.)

Déterminer la position de P pour que la durée du trajet soit minimale.



Exercices

7 Effet Doppler

1) Première approche (traitement classique)

Un émetteur E , animé de la vitesse \vec{v} uniforme par rapport à un observateur O , envoie des signaux se propageant à la vitesse u dans le référentiel lié à O . On appellera v_r la composante de \vec{v} dans la direction d'émission des signaux.

L'émetteur E envoie un signal à l'instant t_1 où la distance entre O et E est r_1 . Il envoie le signal suivant à l'instant t_2 .

a) Déterminer les instants t'_1 et t'_2 de réception des deux signaux consécutifs par l'observateur O .

b) L'émetteur envoie des signaux avec une fréquence f . Quelle est la fréquence f' perçue par l'observateur ? Comparer f et f' dans le cas où l'émetteur s'éloigne de l'observateur et dans le cas où il s'en rapproche.

c) Le mouvement d'un vaisseau spatial qui s'approche de la Lune est purement radial (sa vitesse est orthogonale à la surface lunaire). Ce vaisseau envoie vers la Lune un signal radio de fréquence 3,0 GHz ; il reçoit de la Lune un écho décalé de 20 kHz. Quelle est la vitesse du vaisseau spatial par rapport à la Lune ?

On prendra $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2) Onde sonore

Une source sonore S est immobile dans le milieu de propagation (l'air) de l'onde sonore. L'onde sonore est définie par la surpression $p(x, t)$:

$$p(x, t) = p_0 \cos\left(2\pi f\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)$$

de fréquence f et de vitesse de propagation v dans la direction Sx . Un récepteur est mobile avec la vitesse $\vec{V} = V\vec{e}_x$ uniforme.

Soit \mathcal{R}' le référentiel lié au récepteur.

a) Quelle est la relation entre x et x' si le récepteur est en $x = 0$ à $t = 0$?

b) Mettre la surpression sous la forme :

$$p(x', t) = p_0 \cos\left(2\pi f'\left(t - \frac{x'}{v'}\right)\right).$$

Quelle est la fréquence perçue par le récepteur ? Quelle est la vitesse de propagation du son dans le référentiel lié au récepteur ?

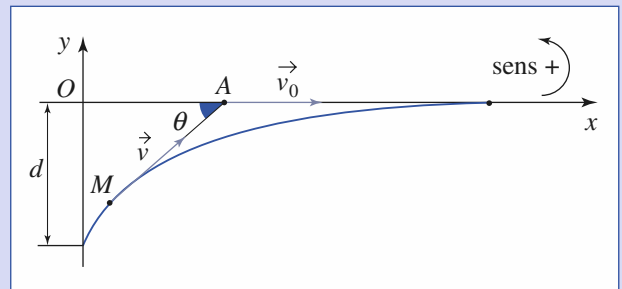
c) Une sirène émet un signal de fréquence 440 Hz (la). En roulant à $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ vers l'émetteur, perçoit-on un son plus grave ou plus aigu ? Quelle fréquence entend-on ? On

prendra $v = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (vitesse du son dans l'air dans les conditions de l'expérience ($P_0 = 10^5 \text{ Pa}$; $T_0 = 300 \text{ K}$)).

8 Promenade : le chien de Leonhard Euler

Un promeneur A suit un chemin rectiligne avec une vitesse constante v_0 . À l'instant initial, son chien M se trouve à une distance d sur la même perpendiculaire au chemin. Puis il court vers son maître à la vitesse v . On cherche à déterminer la durée de la poursuite.

Soit x et y les coordonnées de M , $r = AM$ et θ défini sur le schéma suivant :



1) Exprimer \dot{x} et \dot{y} en fonction de v et θ , puis x et y en fonction de v_0 , r , θ et t . En déduire deux équations différentielles en $r(t)$ et $\theta(t)$.

2) En déduire une équation différentielle en $r(\theta)$.

Vérifier que $r = \frac{d}{\sin \theta} \left(\tan \frac{\theta}{2}\right)^{\frac{v}{v_0}}$ est la solution qui tient compte des conditions initiales.

3) Quelle condition v et v_0 doivent-elles vérifier pour que le problème ait une solution ?

Dans ce cas, quelle est la valeur finale de θ ?

4) Écrire une équation différentielle de $\theta(t)$.

5) Sachant que :

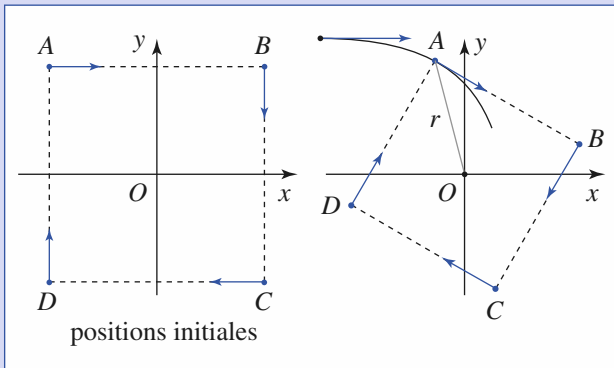
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\tan \frac{\theta}{2}\right)^\lambda d\theta = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1},$$

déterminer la durée τ de la poursuite.

9 Quatre souris A , B , C et D se trouvent aux quatre coins d'un carré $ABCD$ de côté a , et chacune court après l'autre avec la même vitesse constante v . A court après B , B après C , C après D et D après A .

1) Au bout de combien de temps se rencontreront-elles ?

2) Quelle distance L auront-elles parcouru ?



3) Déterminer la trajectoire de la souris A avec comme positions initiales en coordonnées polaires :

$$A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{4}\right), B\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}\right), C\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{\pi}{4}\right), D\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{3\pi}{4}\right).$$

10 Trajectoire cycloïdale

Une roue de rayon r et de centre C roule sans glisser sur l'axe (Ox) en restant dans le plan (Ozx) .

Soit M un point lié à la roue, situé sur la circonférence. À l'instant $t=0$, M est confondu avec l'origine O . La vitesse de C est constante et égale à v .

1) Comment exprimer la condition : « la roue ne glisse pas » ?

2) Déterminer à l'instant t :

a) la position de M ;

b) le vecteur vitesse \vec{v}_M de M ;

c) le vecteur accélération \vec{a}_M de M .

3) Déterminer \vec{v}_M et \vec{a}_M lorsque M est en contact avec l'axe (Ox) .

Corrigés

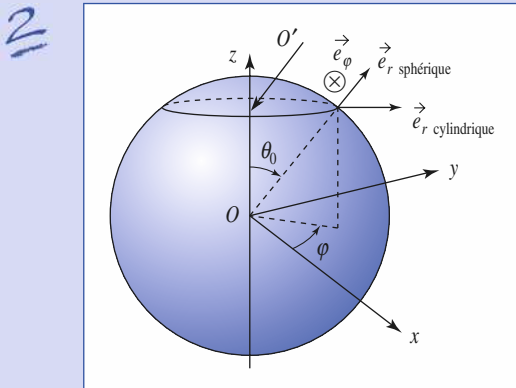
Solution du tac au tac, page 23.

1. Vrai : b, c, d Faux : a 3. Vrai : a, c, d Faux : b
 2. Vrai : b, d Faux : a, c 4. Vrai : a, d Faux : b, c

1 $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ et $\dot{r} = a\dot{\theta}$, d'où $\dot{r} = \frac{v}{\sqrt{1+\theta^2}}$.

$\vec{v}(M)_{j,h} = \frac{v}{\sqrt{1+\theta^2}}(\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta)$, car :

$$r\dot{\theta} = r\frac{\dot{r}}{a} = \dot{r}\theta$$



1) La trajectoire suivie par le mobile est le cercle de rayon $R_c = R \cdot \sin \theta_0$ et de centre O' situé sur l'axe z à l'abscisse $z' = R \cos \theta_0$.

2) À l'instant t , la position du mobile sur le cercle trajectoire est repérée par :

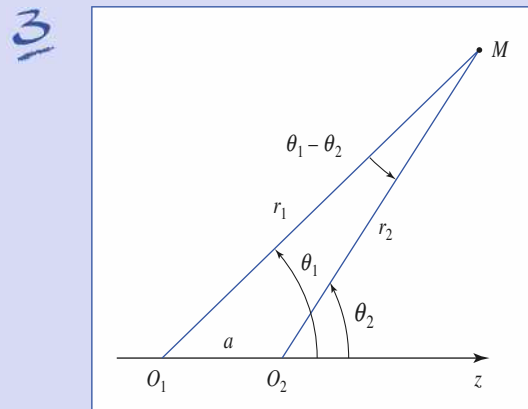
$$\varphi = 2\pi \left(\frac{vt}{2\pi R_c} \right) = \frac{v}{R \sin \theta_0} t.$$

Les coordonnées cartésiennes du mobile sont donc :

$$\begin{cases} x = R \sin \theta_0 \cos \varphi = R \sin \theta_0 \cos \left(\frac{vt}{R \sin \theta_0} \right) \\ y = R \sin \theta_0 \sin \varphi = R \sin \theta_0 \sin \left(\frac{vt}{R \sin \theta_0} \right) \\ z = R \cos \theta_0 \end{cases}$$

Le mouvement circulaire s'effectue à vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_\varphi$.

Son accélération est : $\vec{a} = -\frac{v^2}{R \sin \theta_0} \vec{e}_r$ cylindrique.



Corrigés

1) Après avoir effectué le schéma correspondant, nous pouvons lire :

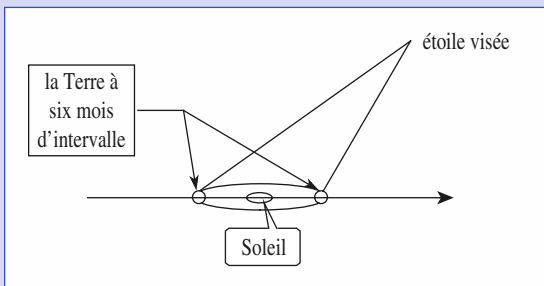
$$r_1 = a \frac{\sin \theta_2}{\sin |\theta_2 - \theta_1|} \quad \text{et} \quad r_2 = a \frac{\sin \theta_1}{\sin |\theta_2 - \theta_1|}$$

2) Pour $\theta_2 - \theta_1 = \varepsilon$ petit, nous utilisons $\sin(\theta_2 - \theta_1) \approx \varepsilon$,

soit :

$$r_1 \approx \frac{a \sin \theta_1}{\varepsilon}$$

3) À six mois d'intervalle, dans un référentiel lié au Soleil, un observateur terrestre se trouve en deux points distants de $a = 3 \cdot 10^{11}$ m. Il peut ainsi déterminer la position des étoiles proches.



4 1) La vitesse du mobile a pour coordonnées cartésiennes :

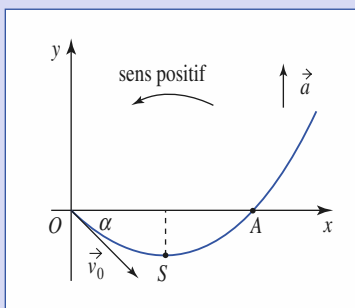
$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha + at$$

Sa position suit la loi horaire :

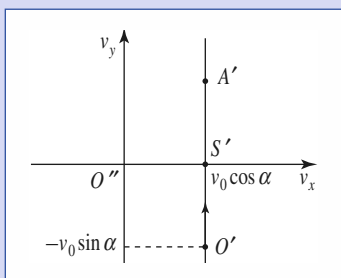
$$x = v_0 \cos \alpha t, \quad y = v_0 \sin \alpha t + \frac{1}{2} a t^2$$

La trajectoire est donc située sur la parabole d'équation :

$$y = \frac{a}{2v_0 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x, \text{ parcourue à partir du point } O.$$

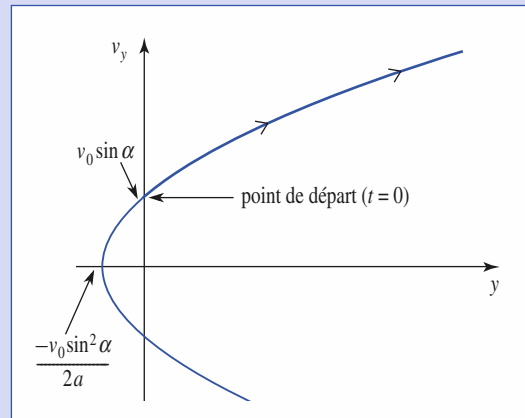


2) L'hodographe est simplement situé sur la droite $v_x = v_0 \cos \alpha$.



3) Dans le plan (yOv_y) , la trajectoire de phase est située sur la parabole d'axe (Oy) , d'équation :

$$y = \frac{v_y^2 - v_0^2 \sin^2 \alpha}{2a}$$



5 Adopter le point de vue d'un passager du radeau. Comment voit-il le mouvement du bateau ? Dans le référentiel lié au courant, le radeau est immobile et, pour son passager, le bateau effectue un aller et un retour de même longueur, donc de même durée. La durée qui sépare les deux rencontres est donc égale à 1 heure.

Dans le référentiel lié à la berge, le radeau a parcouru la distance AB en 1 heure. La vitesse du courant est donc de $3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

6 Soit O la position initiale. La trajectoire se compose de deux tronçons : OP et PB de longueurs ℓ_1 et ℓ_2 . La durée du trajet est $\tau = \tau_1 + \tau_2$ avec :

$$\tau_1 = \frac{\ell_1}{v_1} \quad \text{et} \quad \tau_2 = \frac{\ell_2}{v_2}$$

Pour un point P donné, τ_1 et τ_2 sont minimales si ℓ_1 et ℓ_2 sont minimales, c'est-à-dire si les deux tronçons sont rectilignes.

Soit H la projection de B sur la route, ℓ_0 la longueur OH et x la longueur PH . τ est fonction de x :

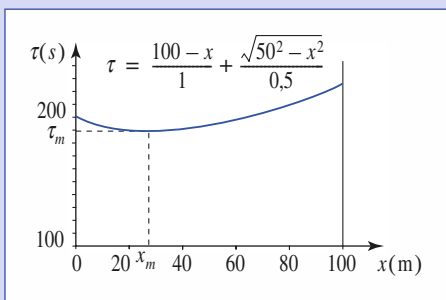
$$\tau(x) = \frac{\ell_0 - x}{v_1} + \frac{\sqrt{x^2 + d^2}}{v_2}$$

La solution correspond au minimum de $\tau(x)$ défini par $\frac{d\tau}{dx} = 0$, d'où :

$$x = PH = \frac{d}{\sqrt{-1 + \frac{v_1^2}{v_2^2}}}$$

Discussion et vérification

- Si $v_2 > v_1$, $\tau(x)$ est une fonction monotone décroissante de x . Le marcheur aurait donc intérêt à pénétrer tout de suite dans le champ.
- Si v_2 tend vers 0, alors il doit minimiser son trajet dans le champ et P tend vers H .



$\tau(x)$ avec $\ell_0 = 100$ m, $d = 50$ m

$v_1 = 1,0$ m · s⁻¹, $v_2 = 0,50$ m · s⁻¹

$x_m = 29$ m pour $\tau_m = 187$ s

7

1) a) Soit $r_2 = r_1 + v_r(t_1 - t_1)$, la distance entre l'observateur et l'émetteur à l'instant t_2 :

$$t'_1 = t_1 + \frac{r_1}{u} \quad \text{et} \quad t'_2 = t_2 + \frac{r_2}{u}$$

$$\mathbf{b)} \quad T' = t'_2 - t'_1 = \left(1 + \frac{v_r}{u}\right)T \quad \text{donc} \quad f' = \frac{f}{1 + \frac{v_r}{u}}$$

Si v_r est positif (l'émetteur s'éloigne de l'observateur), $f' < f$. Au contraire, si l'émetteur se rapproche de la source $f' > f$.

c) La Lune reçoit un signal de fréquence $f' = \frac{f}{1 - \frac{v}{c}}$ (v est la vitesse du

vaisseau). Elle « renvoie » un signal de fréquence f' qui est perçu par le vaisseau à la fréquence :

$$f'' = \frac{f'}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{f}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)^2} \quad \text{avec} \quad f = 3,0 \text{ GHz}$$

et $f'' = f + \delta f$, où $\delta f = 20$ kHz $\ll f$.

On a donc $v \ll c$, ce qui est nécessaire pour rester dans le cadre de la mécanique classique.

$$f'' = f \left(1 + \frac{2v}{c}\right) \quad \text{au premier ordre en} \quad \frac{v}{c}$$

On en déduit : $v = \frac{c \delta f}{2f} = 1$ km · s⁻¹ = 3 600 km · h⁻¹.

Remarque

On a donné ici une interprétation non relativiste de l'effet Doppler, appelé « effet Doppler du premier ordre ». Il existe une interprétation plus précise dans le cadre de la relativité restreinte.

2) a) $x = x' + Vt$.

$$\begin{aligned} \mathbf{b)} \quad p(x', t) &= p_0 \cos\left(2\pi f \left(t - \left(\frac{x' + Vt}{v}\right)\right)\right) \\ &= p_0 \cos\left(2\pi f \left(1 - \frac{V}{v}\right) \left(t - \frac{x'}{v - V}\right)\right). \end{aligned}$$

Donc $f' = f \left(1 - \frac{V}{v}\right)$ est la fréquence perçue par le récepteur. La vitesse de propagation de l'onde sonore dans le référentiel lié au récepteur est $v' = v - V$, ce qui est en accord avec la formule de composition des vitesses.

Remarque

Ces résultats sont bien en accord avec ceux de la première question : f est la fréquence dans le référentiel lié à l'émetteur et f' dans le référentiel lié au récepteur.

c) Si l'on se rapproche de la sirène, $V < 0$ donc la fréquence entendue est plus grande. $f' = 1,065f = 469$ Hz (ce qui correspond à un peu plus d'un demi-ton).

8

1) La vitesse de M est colinéaire à AM , soit :

$$\dot{x} = v \cos \theta \quad \text{et} \quad \dot{y} = v \sin \theta$$

L'abscisse du point A est : $x_A = v_0 \cdot t$.

En traduisant que $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$, il vient :

$$x = v_0 t - r \cos \theta \quad \text{et} \quad y = -r \sin \theta$$

que nous pouvons dériver pour obtenir une nouvelle forme de \dot{x} et \dot{y} :

$$\dot{x} = v_0 - \dot{r} \cos \theta + r \dot{\theta} \sin \theta \quad \text{et} \quad \dot{y} = -\dot{r} \sin \theta - r \dot{\theta} \cos \theta$$

Par identification, nous avons :

$$\begin{cases} v \cos \theta = v_0 - \dot{r} \cos \theta + r \dot{\theta} \sin \theta & (1) \\ v \sin \theta = -\dot{r} \sin \theta - r \dot{\theta} \cos \theta & (2) \end{cases}$$

les combinaisons linéaires (1) · cos θ + (2) · sin θ puis (1) · sin θ - (2) · cos θ nous donnent alors :

$$\begin{cases} \dot{r} = v_0 \cos \theta - v \\ r \dot{\theta} = -v_0 \sin \theta \end{cases}$$

2) Faisons le rapport membre à membre de ces deux équations couplées :

$$\frac{dr}{r d\theta} = \frac{v}{v_0 \sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

soit encore :

$$d \ln \left(\frac{r}{d}\right) = \frac{v}{v_0} d \ln \left(\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\pi}{4}}\right) - d \ln \left(\frac{\sin \theta}{\sin \frac{\pi}{2}}\right)$$

où nous avons fait apparaître les valeurs respectives d et $\frac{\pi}{2}$ de r et θ à l'instant initial.

Nous obtenons bien ainsi :

$$r = \frac{d}{\sin \theta} \left(\tan \frac{\theta}{2}\right)^{\frac{v}{v_0}}$$

3) Le chien rejoint effectivement son maître si la condition $\lim_{\theta \rightarrow 0} r(\theta) = 0$, soit $v > v_0$. Cette conclusion n'est pas surprenante : le chien rejoint bien son maître s'il court plus vite que lui.

4) Reprenons l'expression donnant à $\dot{\theta}$:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{v_0 \sin \theta}{r} = -\frac{v_0}{d} \frac{\sin^2 \theta}{\left(\tan \frac{\theta}{2}\right)^{\frac{v}{v_0}}}$$

Corrigés

ou bien encore :

$$dt = -\frac{d}{v_0} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^{\frac{v}{v_0}} d\theta.$$

5) Nous pouvons intégrer cette expression, θ variant de $\frac{\pi}{2}$ à 0 et t de 0 à τ , instant où le chien rejoint son maître, en utilisant l'intégrale fournie dans l'énoncé :

$$\tau = \frac{d}{v_0} \frac{\frac{v}{v_0}}{\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 - 1}$$

qui n'est bien entendu défini, c'est-à-dire positif, que si $v > v_0$.

Notons que si $v = 0$, ce temps se réduit à $\tau = \frac{d}{v_0}$ puisque le maître ne

bouge pas alors que τ diverge lorsque v tend vers v_0 , le chien ne pouvant alors plus rattraper son maître. La considération de ces comportements limites nous permet de tester de façon simple la vraisemblance de la solution établie.

Nous étudierons en annexe de ce chapitre une application numérique de cette équation différentielle à l'aide de l'algorithme d'Euler.

9

Le problème est identique pour les quatre souris. Les trajectoires sont identiques à une rotation près et elles forment à chaque instant un carré de côté $\ell(t)$ variable.

1) $\ell^2 = \vec{AB}^2$, d'où $\ell \frac{d\ell}{dt} = \frac{d\vec{AB}}{dt} \cdot \vec{AB} = (\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot \vec{AB}$.

\vec{v}_A est colinéaire à \vec{AB} et \vec{v}_B est normal à \vec{AB} :

$\vec{v}_A \cdot \vec{AB} = v\ell$ et $\vec{v}_B \cdot \vec{AB} = 0$, donc $\frac{d\ell}{dt} = -v$, d'où $\ell(t) = a - vt$.

$\ell = 0$ pour $t = \tau$, soit $\tau = \frac{a}{v}$.

2) $L = v\tau$, d'où $L = a$.

3) L'angle (\vec{AO}, \vec{AB}) est toujours égal à $\frac{\pi}{4}$.

Exprimons le vecteur vitesse de A dans la base locale liée à A :

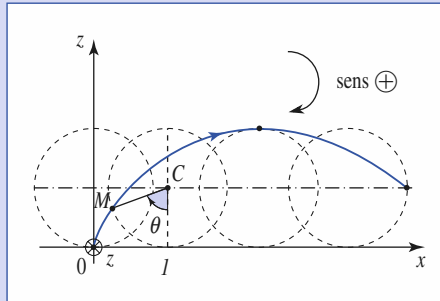
$\dot{r} = v_r = -\frac{v}{\sqrt{2}}$, d'où $r = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{v}{\sqrt{2}}t$;

$r\dot{\theta} = v_\theta = -\frac{v}{\sqrt{2}}$, d'où $r \frac{d\theta}{dr} \frac{dr}{dt} = -\frac{v}{\sqrt{2}}$, soit $\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{r}$.

$r = \frac{a}{\sqrt{2}} \exp\left[-\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)\right]$.

Il s'agit d'une spirale qui comporte une infinité de tours. Le rayon convergeant exponentiellement vers 0, la distance parcourue est finie.

10



Soit x et z les coordonnées de M : $\theta = (-\vec{e}_z, \vec{CM})$ et $\theta > 0$ si $vt > 0$.

1) ℓ étant le point de contact à l'instant t entre la roue et l'axe (Ox) , la longueur de l'arc de cercle \widehat{IM} est égal à $O\ell$: $x_1 = vt = r\theta$.

2) a) $\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CM}$; $x = x_1 - r\sin\theta$ et $z = r - r\cos\theta$ d'où :

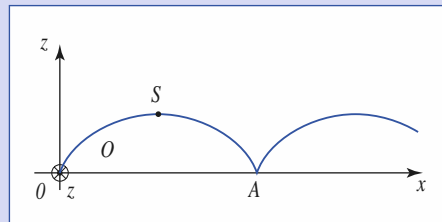
$$x = r \left[\frac{vt}{r} - \sin\left(\frac{vt}{r}\right) \right] \text{ et } z = r \left[1 - \cos\left(\frac{vt}{r}\right) \right].$$

La trajectoire est une cycloïde.

b) Les composantes de \vec{v}_M sont :

$$\dot{x} = v \left[1 - \cos\left(\frac{vt}{r}\right) \right] \text{ et } \dot{z} = v \sin\left(\frac{vt}{r}\right).$$

Remarque : L'hodographe est un cercle centré en $(v, 0)$ et de rayon v .



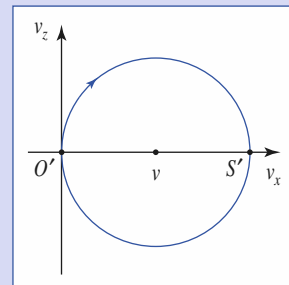
c) $\ddot{x} = \frac{v^2}{r} \sin\left(\frac{vt}{r}\right)$

et $\ddot{z} = \frac{v^2}{r} \cos\left(\frac{vt}{r}\right)$.

Le vecteur accélération est colinéaire à CM , orienté vers C et de norme constante $a = \frac{v^2}{r}$.

3) Si $z = 0$, $\vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{a} = \frac{v^2}{r} \vec{e}_z$.

Alors que la vitesse instantanée du point est nulle, son accélération est non nulle.



Dynamique du point matériel

2

Introduction

La théorie de la dynamique classique (ou newtonienne) s'est peu à peu construite aux XVII^e, XVIII^e et XIX^e siècles. La réfutation des conceptions qui faisaient jusque-là autorité s'est accompagnée de l'émergence d'idées nouvelles et particulièrement fécondes.

Ainsi, le principe d'inertie contredit l'ancienne théorie qui associait mouvement et force motrice.

La notion d'interaction, décrite par des lois quantitatives, est une idée essentielle de la mécanique moderne. Une pomme ne tombe pas parce que, étant pesante, sa tendance naturelle est d'aller vers le bas, mais en raison de l'attraction réciproque qui existe entre elle et la Terre.

O B J E C T I F S

- Connaître les notions d'inertie, de référentiel galiléen et de force.
- Relier le mouvement d'un mobile ponctuel aux actions mécaniques auxquelles il est soumis.

P R É R E Q U I S

- Référentiel lié à un observateur.
- Vitesse et accélération d'un point.
- Équations différentielles : $y' = k y$.

Le point matériel

1.1. Le modèle du point matériel

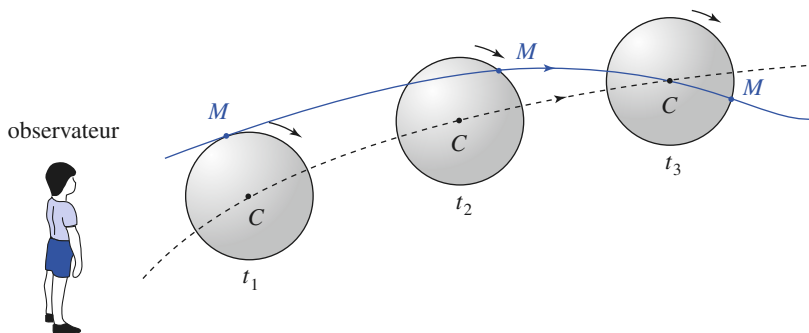
Un point matériel est un objet ponctuel dont le repérage ne nécessite que la connaissance des trois coordonnées de sa position.

Cette définition correspond à une vision simplifiée d'un objet matériel.

1.1.1. Exemple

Considérons un ballon en vol (*doc. 1*). Si l'influence de l'air est négligée, le mouvement de son centre C est indépendant de son orientation.

Nous pouvons considérer le ballon comme un point matériel si nous le réduisons à son centre.



Doc. 1. Le mouvement de C est indépendant de la rotation du ballon.

Cette modélisation, qui permet d'étudier la trajectoire du centre du ballon, est incomplète, car elle ne permet pas de connaître le mouvement de chacun de ses points.

Généralement, le ballon est également en rotation, et la vitesse d'un point M de l'enveloppe du ballon est différente de celle du point C .

1.1.2. Contre-exemple 1

Le même ballon roule sur un plan incliné (*doc. 2*). La nature de contact en I entre le plan incliné et le ballon a une influence essentielle.

La vitesse du centre d'un ballon qui roule n'est pas identique à celle d'un objet en translation qui glisserait sur le plan incliné.

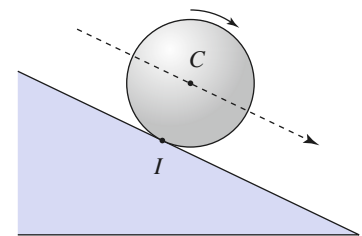
Il est donc impossible, même pour une première approche, de ne pas tenir compte de sa rotation.

1.1.3. Contre-exemple 2

L'action mécanique qui s'exerce sur un aimant placé dans un champ magnétique et donc le mouvement de l'aimant dépendent de son orientation. Si cette orientation évolue dans le temps, l'aimant ne peut être considéré comme un point matériel.

Sans qu'il soit possible de formuler une loi générale, la notion de point matériel permet donc, dans certain cas, une première approche du mouvement d'un solide.

La validité de cette **modélisation** ne dépend pas de la taille du solide, mais de sa nature, de son environnement et des hypothèses simplificatrices.



Doc. 2. Le mouvement de C dépend ici de la rotation du ballon.

1.2. Masse inertielle

1.2.1. Inertie mécanique

Imaginons une poussette de bébé et une automobile au repos sur une route horizontale : il est possible de les mettre en mouvement en les poussant.

Pour atteindre une même vitesse, il faut pousser plus fort et/ou plus longtemps l'automobile. Il est aussi plus difficile de l'arrêter une fois lancée. Cette résistance à toute *variation* de vitesse est appelée **inertie**.

1.2.2. Masse d'un point matériel

Pour un point matériel, la propriété d'inertie est représentée par un scalaire positif appelé **masse**.

Plus la masse d'un point matériel est grande, plus il est difficile de modifier sa vitesse.

La masse est invariante dans le temps et ne dépend pas du référentiel. C'est une caractéristique intrinsèque du point matériel.

1.2.3. Additivité de la masse

Soit deux points matériels de masses m_1 et m_2 . S'ils sont réunis de façon à former un seul point matériel de masse m , alors $m = m_1 + m_2$.

1.3. Quantité de mouvement (ou impulsion)

La quantité de mouvement par rapport au référentiel \mathcal{R} d'un point matériel M , de masse m , est :

$$\vec{p}(M)_{/\mathcal{R}} = m\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}.$$

2 Postulats de la dynamique du point matériel

Le but de la dynamique est d'étudier le mouvement (cinématique) d'un point matériel de masse m (cinétique) lorsqu'il est soumis à des actions.

Comme toute théorie, la mécanique classique est basée sur des postulats permettant au physicien de prévoir le comportement du système étudié. L'expérience viendra confirmer ces hypothèses, ou bien le cas échéant préciser les limites de la théorie.

2.1. Principe d'inertie (première loi de Newton)

2.1.1. Existence de référentiels galiléens

Un point matériel qui n'est soumis à aucune action mécanique est dit *isolé*. Nous postulons que :

Il existe une classe de référentiels, appelés référentiels galiléens, par rapport auxquels un point matériel isolé est en mouvement rectiligne uniforme.

2.1.2. Cas du référentiel terrestre

Dans la plupart des expériences courantes, le référentiel terrestre, lié à la surface de la Terre, peut être considéré comme galiléen. Ce point sera discuté ultérieurement.

Dans toutes les applications du présent chapitre, nous supposons que le référentiel terrestre est galiléen.

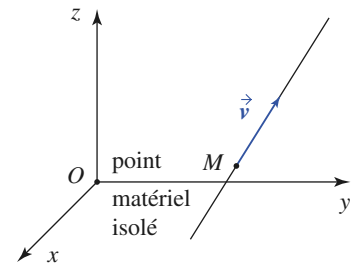
2.1.3. Point matériel pseudo-isolé

Un point matériel isolé est une abstraction irréalisable, mais il se peut que les actions mécaniques se compensent exactement. Le point matériel est alors dit *pseudo-isolé* et il est possible de lui appliquer le principe d'inertie (doc. 3).

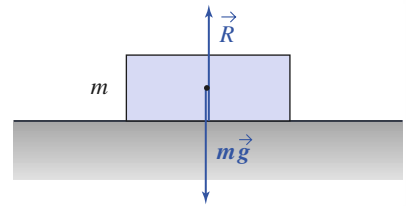
Exemple

Sur une table à coussin d'air horizontale, la vitesse d'un mobile de masse m est constante à la précision des mesures près. Pour l'expliquer, nous pouvons avancer les hypothèses suivantes :

- le mobile est pseudo-isolé, car la réaction de la table compense exactement le poids (doc. 4) : $m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}$.
- Le référentiel lié à la table, donc à la terre, est approximativement galiléen.



Doc. 3. La vitesse \vec{v} du point matériel est constante.



Doc. 4. $m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}$.

2.2. Forces

2.2.1. Représentation des actions mécaniques

Nous postulons que :

L'action mécanique d'un objet S sur un point matériel M est caractérisée par un vecteur appelé force, indépendant du référentiel, et que nous notons $\vec{F}_{S \rightarrow M}$.

2.2.2. Additivité des forces

La force résultant de plusieurs actions mécaniques est égale à la somme vectorielle des forces dues à chacune de ces actions. Si S est constitué par la réunion des S_i (doc. 5), cette additivité se traduit par :

$$\vec{F}_{S \rightarrow M} = \sum_i \vec{F}_{S_i \rightarrow M}.$$

Ainsi, un satellite évoluant autour de la Terre évolue dans le champ de gravitation créé par l'ensemble des points matériels qui constituent la planète et les autres astres.

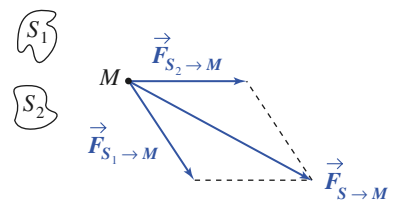
2.2.3. Force de pesanteur

Au voisinage de la surface terrestre, un objet de masse m est soumis à son poids :

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

En première approximation, le poids est égal à la force de gravitation exercée par la Terre (nous en verrons une définition plus précise lors de l'étude de la mécanique terrestre), cette force est, en norme, pratiquement uniforme à la surface du globe :

$$g \approx 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$



Doc. 5. Additivité des forces.

$$S = S_1 + S_2$$

donc $\vec{F}_{S \rightarrow M} = \vec{F}_{S_1 \rightarrow M} + \vec{F}_{S_2 \rightarrow M}.$

Ceci reste valable tant que l'altitude reste faible devant le rayon terrestre (si on assimile la Terre à une sphère homogène, la force de gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance à son centre).

2.2.4. Forces de liaison

2.2.4.1. Existence des liaisons

La position d'un point matériel totalement libre est fonction de ses trois coordonnées, indépendantes entre elles. Nous dirons qu'un tel point matériel possède trois *degrés de liberté*.

Ce nombre est réduit s'il est imposé au point matériel de se déplacer sur une surface (deux degrés de liberté) ou sur une courbe (un seul degré de liberté).

2.2.4.2. Réaction d'un support

Considérons un point matériel M contraint de se déplacer sur un support S : mobile guidé par des rails, anneau coulissant sur une tige, skieur glissant (sans décoller) sur une piste (doc. 6), etc.

Le support impose une trajectoire au point M ; pour cela, il exerce sur M une force appelée « réaction du support ».

$$\vec{F}_{S \rightarrow M} = \vec{R}.$$

2.2.4.3. Liaison unilatérale

La liaison est dite *unilatérale* si l'objet modélisé par le point matériel M est simplement posé sur la surface S . Le support repousse M , mais ne peut l'attirer.

\vec{n} étant le vecteur unitaire normal au support en M , cela se traduit par :

$$\vec{R} \cdot \vec{n} \geq 0.$$

Cette inégalité est une condition nécessaire du contact.

2.2.4.4. Liaison sans frottements

\vec{R} est la somme d'une composante normale à S : \vec{R}_\perp , et d'une composante tangentielle à S : \vec{R}_\parallel (doc. 7).

La liaison est sans frottements si $\vec{R}_\parallel = \vec{0}$.

Dans ce cas, l'action du support se limite à \vec{R}_\perp , qui a pour effet de contraindre le mobile à rester lié au support, sans le freiner.

2.2.5. Tension d'un fil

2.2.5.1. Définition

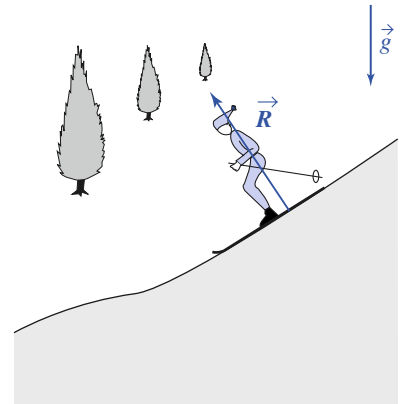
Un fil *souple* tendu se sépare en deux parties S_1 et S_2 s'il est coupé en un point P . Il existe donc une force qui assure en chaque point la cohésion du fil.

Notons \vec{t}_{12} le vecteur unitaire tangent au fil en P , orienté de S_1 vers S_2 . **La tension T** du fil au point P est le scalaire défini par (doc. 8) :

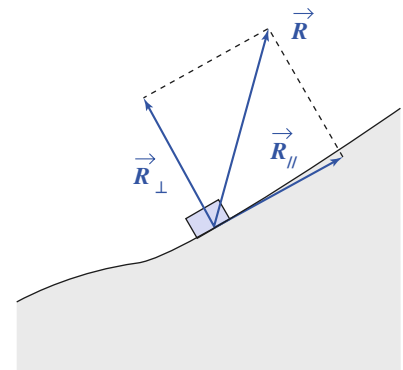
$$\vec{F}_{S_1 \rightarrow S_2} = -T \vec{t}_{12} \quad \text{ou} \quad \vec{F}_{S_2 \rightarrow S_1} = T \vec{t}_{12}.$$

Si le fil est tendu, la tension T est positive.

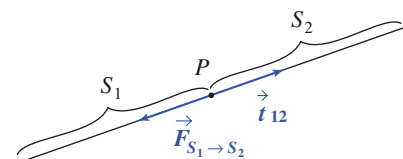
La tension T est relative à un point et, dans le cas général, varie le long du fil.



Doc. 6. La piste exerce une force \vec{R} sur le skieur.



Doc. 7. Composante normale et composante tangentielle de la réaction d'un support.



Doc. 8. Force de tension.

Application 1

Tension d'une corde suspendue

Une corde dont la masse m est régulièrement répartie sur sa longueur ℓ est immobile et suspendue par une de ses extrémités.

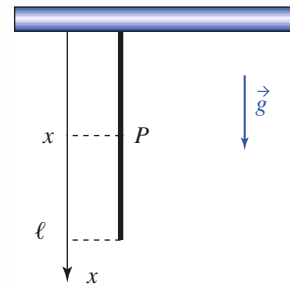
Exprimer la tension en un point distant de x du point de suspension.

En P , la partie supérieure exerce sur la partie inférieure une force qui compense son poids (doc. 9).

Donc :

$$T = m \frac{\ell - x}{\ell} g.$$

La tension positive décroît régulièrement depuis le point d'attache ($T = mg$) jusqu'à l'extrémité libre ($T = 0$).



Doc. 9. La tension de la corde n'est pas uniforme.

2.2.5.2. Cas du fil idéal

Un fil est idéal si sa masse est nulle (en fait négligeable) et s'il est parfaitement souple (sans raideur).

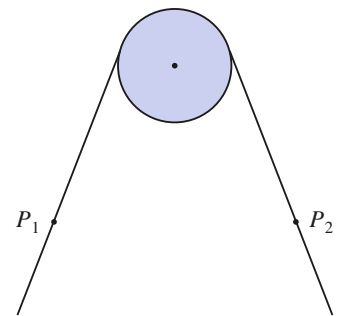
S'il est tendu, seul dans l'espace, nous admettrons qu'il est rectiligne et que sa tension est uniforme (c'est-à-dire identique en tout point).

Deux fils idéaux mis bout à bout et tendus sont équivalents à un fil unique et ont même tension.

2.2.5.3. Poulie idéale

Une poulie est idéale s'il est possible de négliger son inertie et les frottements consécutifs à sa rotation.

Nous admettrons qu'un fil idéal enroulé sur une poulie idéale conserve une tension uniforme (doc. 10).



Doc. 10. Si la poulie et le fil sont idéaux, la tension est identique en P_1 et en P_2 .

2.2.6. Force de rappel élastique

L'élasticité est la propriété de certains matériaux de reprendre leur forme initiale après une déformation.

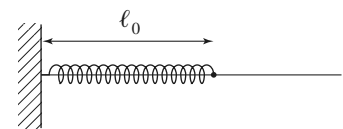
Dans le cas des petites déformations, il est souvent possible de faire l'hypothèse de linéarité : la déformation est supposée proportionnelle à sa cause.

Un ressort (ou un fil élastique) est linéaire si sa longueur ℓ , sa longueur au repos (c'est-à-dire à tension nulle) ℓ_0 (doc. 11) et sa tension T , supposée uniforme, vérifient la relation :

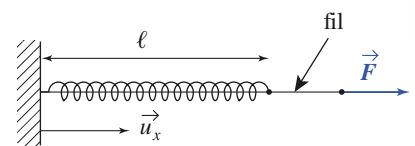
$$T = k(\ell - \ell_0)$$

k étant une constante, appelée **raideur du ressort**.

Un ressort est idéal s'il est linéaire de masse négligeable. Cette dernière condition implique que la tension est uniforme.



Doc. 11a. Ressort non tendu.



Doc. 11b. Ressort tendu par une force : $\vec{F} = T\vec{u}_x$, avec $T = k(\ell - \ell_0)$ avec $\ell > \ell_0$.

2.3. Relation fondamentale de la dynamique (deuxième loi de Newton)

\mathcal{R}_g étant un référentiel galiléen, M un point matériel de masse m et \mathcal{E} l'ensemble de l'univers à l'exception de M , les forces appliquées à M et son mouvement sont liées par la loi (doc. 12) :

Relation fondamentale de la dynamique :

$$\vec{F}_{\mathcal{E} \rightarrow M} = m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g}.$$

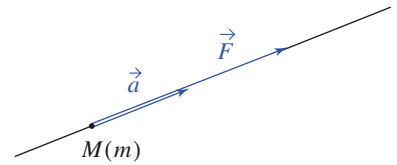
Cette relation, qui constitue la deuxième loi de Newton, s'écrit encore :

Théorème de la quantité de mouvement :

$$\vec{F}_{\mathcal{E} \rightarrow M} = \left(\frac{d\vec{p}(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g}.$$

Remarque

Dans le système international d'unités, la force s'exprime en newton (N) ; il se déduit des unités fondamentales de masse (kg), de longueur (m) et de temps (s) à partir de la relation $\vec{f} = m \vec{a} : 1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.



Doc. 12. $\vec{F} = m \vec{a}$.

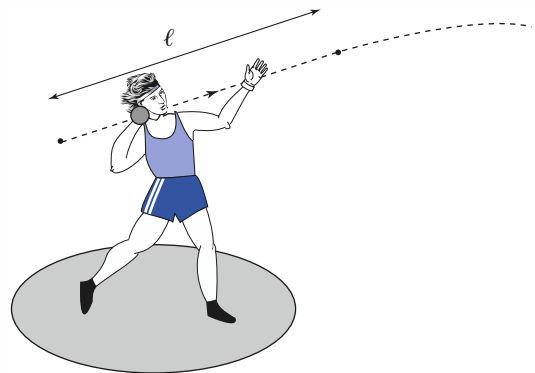
Application 2

Lancer du poids

Un athlète lance un « poids » de masse $m = 7,3 \text{ kg}$ avec une vitesse $v_0 = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer un ordre de grandeur de la force F qu'il exerce sur cet objet. Pour simplifier, nous supposons que cette force constante est appliquée sur un parcours rectiligne de longueur $\ell = 1,5 \text{ m}$ et que les autres forces (pesanteur...) sont négligeables devant F (doc. 13).

Désignons par τ la durée du lancement. Il s'agit d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré,

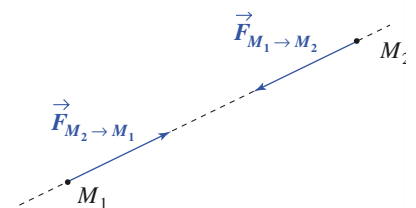
donc $\ell = \frac{F}{2m} \tau^2 = \frac{mv_0^2}{2F}$; $F \approx 500 \text{ N}$.



Doc. 13. Lancement du poids.

2.4. Principe des actions réciproques (troisième loi de Newton)

Soit deux points matériels M_1 et M_2 en interaction, en mouvement ou immobiles. Les forces d'interaction $\vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2}$ et $\vec{F}_{M_2 \rightarrow M_1}$ sont opposées et colinéaires à l'axe (M_1M_2) .



Doc. 14. Actions réciproques.

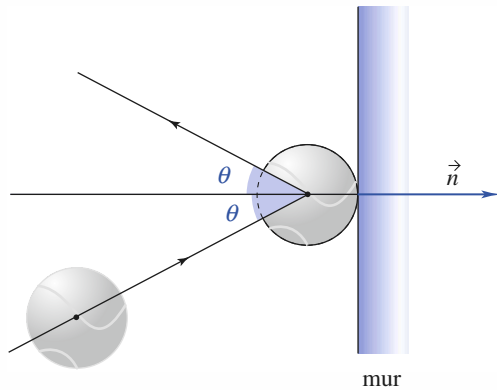
Ce principe des actions réciproques, nommé parfois *principe de l'action et de la réaction*, se traduit par (doc. 14) :

$$\vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2} = -\vec{F}_{M_2 \rightarrow M_1} ; \vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2} \wedge \overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{0}.$$

Application 3

Rebond d'une table sur un mur

Une balle, assimilée à un point matériel de masse m , rebondit sur un mur (doc. 15). Sa vitesse est conservée et l'angle de rebond est égal à l'angle d'incidence θ . Déterminer la force exercée par la balle sur le mur, en la supposant constante pendant toute la durée τ du contact et en négligeant toutes les autres forces.



Doc. 15. Rebond.

Quelle différence y a-t-il entre une balle de tennis et une bille d'acier ?

Commenter les hypothèses et les résultats.

Données

$m = 60 \text{ g}$; $v = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $\tau = 10 \text{ ms}$; $\theta = 0^\circ$.

Nous supposons galiléen le référentiel lié au mur.

Si \vec{F} est constante entre $t = 0$ et $t = \tau$:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \text{ d'où } \vec{p}(\tau) - \vec{p}(0) = \vec{F} \tau.$$

$$\text{Soit } \vec{F}_{\text{balle} \rightarrow \text{mur}} = -\vec{F}_{\text{mur} \rightarrow \text{balle}} = \frac{2mv \cos \theta}{\tau} \vec{n}.$$

A.N. : $F = 120 \text{ N}$.

La bille d'acier étant plus dure, l'interaction est plus brève et, à masse et vitesse égales, la force plus intense. Une bille dure lancée sur une paroi rigide exerce au point d'impact pendant une durée plus brève une force plus intense, susceptible de provoquer une cassure.

Le poids de la balle est bien négligeable devant F .

En fait, la force n'est pas constante. La valeur calculée correspond à la force moyenne.

3 Évolution d'un système mécanique

3.1. Équation d'évolution

La quantité de mouvement d'un point matériel étant $\vec{p} = m\vec{v}$, l'application du principe fondamental de la dynamique, dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , nous donne :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{f}}{m}$$

qui est l'équation d'évolution du point matériel dans le champ de force \vec{f} .

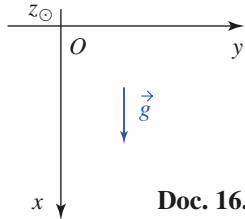
Réciproquement, si nous observons le mouvement d'un point matériel, l'écriture

$\vec{f} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ nous montre qu'il est possible d'analyser le champ de forces auquel est soumis le mobile en observant son mouvement.

Application 4

Chute libre et frottement fluide

Un point matériel de masse m tombe sans vitesse initiale, depuis l'origine O , dans le champ de pesanteur uniforme d'intensité g .



Doc. 16.

1) Chute sans frottement

Étudier $x(t)$ et $v(t)$, puis la trajectoire de phase correspondante. Quelle serait l'influence d'une modification des conditions initiales sur cette trajectoire ?

2) Chute dans un fluide très visqueux

Pour une bille de rayon R tombant dans un fluide visqueux, le frottement est convenablement représenté par la formule de Stokes : $\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}$ pour des vitesses atteintes modérées.

Il faudrait modifier les masses éventuelle et pesante pour tenir compte de la mise en mouvement du fluide par le passage de la bille et de la poussée d'Archimède.

Nous garderons la notation « m » pour simplifier.

Quel est le temps caractéristique τ associé à ce mouvement ?

Reprendre l'étude du mouvement et de la trajectoire de phase. comparer cette évolution avec la précédente, pour $t \ll \tau$ ou $t \gg \tau$.

On souhaite mesurer la viscosité du fluide en observant le mouvement limite obtenu. Quelle hauteur de récipient faut-il prévoir ?

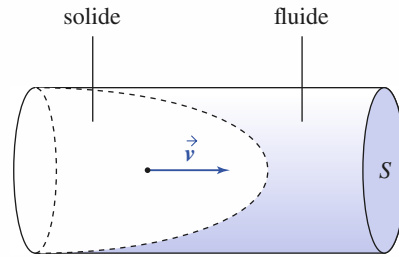
3) Dans l'air, les vitesses de chute libre sont généralement trop importantes pour que le modèle précédent soit applicable. La force de frottement prend alors la forme approchée :

$$\vec{F} = -K S v^2 \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}, \text{ où } S \text{ est le maître-couple de}$$

l'objet (section du cylindre engendré par le solide en translation dans le fluide (doc. 17) et K une constante dépendant de la forme de l'objet et du fluide.

Quel temps caractéristique pouvons-nous prévoir ?

Indiquer, sans calcul, les caractéristiques de la nouvelle trajectoire de phase.



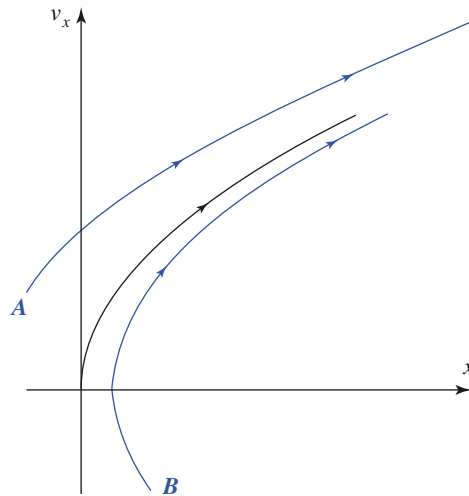
Doc. 17. Maître-couple.

1) Pour une chute libre sans frottement, ici simplement verticale, l'équation du mouvement s'écrit : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}$, soit, compte tenu des conditions initiales :

$$v(t) = g t \text{ et } x(t) = \frac{1}{2} g t^2.$$

La trajectoire de phase est donc située sur la parabole d'équation :

$$x = \frac{v^2}{2g} \text{ (doc. 18).}$$



Doc. 18. Trajectoire de phase d'un point matériel en chute libre.

Modifier les conditions initiales revient à faire partir le mouvement d'un point du plan de phase autre que l'origine, à partir duquel le mobile décrit une parabole semblable à la précédente (et qui ne la coupe pas !) : la trajectoire issue du point A correspond à un point lâché au-dessus de l'origine en étant lancé vers le bas, celle qui est issue du point B est associée

à un point lancé vers le haut depuis un point situé au-dessous du point O .

2) L'équation du mouvement est maintenant :

$$m \frac{dv}{dt} = -6\pi\eta Rv + mg$$

soit encore :
$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g$$

où $\tau = \frac{m}{6\pi\eta R}$ est le temps caractéristique associé à cette évolution.

Nous obtenons alors :

$$v(t) = g\tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

et :
$$x(t) = g\tau \left(t + \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right).$$

Du fait du frottement, la vitesse tend vers la limite $v_\infty = g\tau = \frac{mg}{6\pi\eta R}$ pour laquelle le poids et les frottements se compensent. Cette limite est atteinte pour un temps t de l'ordre de quelques τ .

À l'opposé, pour $t \ll \tau$, nous pouvons écrire :

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{2\tau^2} + \dots \text{ pour retrouver :}$$

$$v(t \ll \tau) \approx gt \text{ et } x(t \ll \tau) \approx \frac{1}{2}gt^2.$$

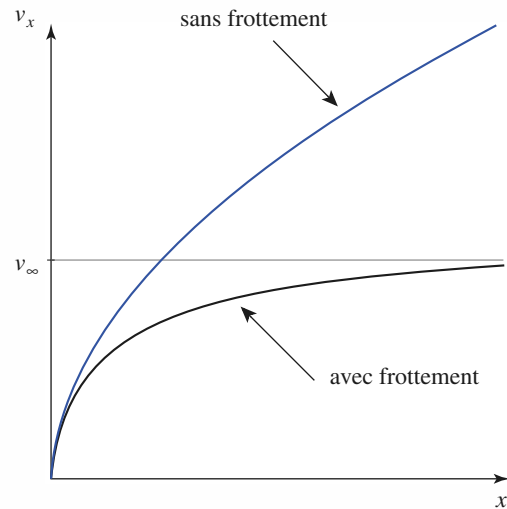
Aux très basses vitesses, le frottement est encore négligeable et nous retrouvons le mouvement de la question précédente.

En éliminant le temps entre les expressions de $x(t)$ et $v(t)$, nous obtenons l'équation de la trajectoire de phase :

$$x = \tau v_\infty \left(\frac{v}{v_\infty} - \ln \left(1 - \frac{v}{v_\infty} \right) \right)$$

qui est très proche de la parabole du mouvement sans frottement au départ, mais admet une asymptote horizontale $v = v_\infty$ lorsque $t \gg \tau$ (doc. 19).

Ce mouvement asymptotique donne accès simplement à la détermination expérimentale de la viscosité, à condition d'être atteint. Il faut donc prévoir



Doc. 19. Trajectoire de phase d'un point matériel dans un fluide visqueux (vitesse faible).

une hauteur de récipient de l'ordre de quelques fois la distance caractéristique $L = v_\infty \tau$.

3) L'équation du mouvement est ici :

$$m \frac{dv}{dt} = -KSv^2 + mg, \text{ qui permet de prévoir la}$$

$$\text{vitesse limite } v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{KS}}.$$

l'équation du mouvement est ainsi :

$$\frac{d\left(\frac{v}{v_\infty}\right)}{1 - \left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2} = \frac{g}{v_\infty} dt, \text{ où le premier membre est sans}$$

dimension, ce qui permet d'identifier :

$$\tau = \frac{v_\infty}{g} = \sqrt{\frac{m}{gKS}} \text{ (la résolution de l'équation donne :}$$

$$v = v_\infty \tanh\left(\frac{t}{\tau}\right).$$

Au début du mouvement, la vitesse est assez faible pour que le frottement soit négligeable, et la trajectoire de phase s'apparente à la parabole de chute libre sans frottement. Ici, encore, elle admettra une asymptote horizontale du fait de l'existence d'une vitesse de chute limite.

3.2. Déterminisme mécanique

Considérons un système physique à un degré de liberté, correspondant à un point de masse m soumis à un champ de force que nous écrivons :

$$\vec{f} = f(x, v_x, t) \vec{e}_x.$$

La relation fondamentale de la dynamique devant s'écrire sous la forme :

$$m \frac{dv_x}{dt} = f(x, v_x, t).$$

Nous constatons que l'évolution du point de masse m est régie par un système de deux équations différentielles d'ordre un :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{dv_x}{dt} = \frac{f(x, v_x, t)}{m} \end{cases}.$$

Ce système admet une solution unique si les conditions initiales $x(t=0)$ et $v_x(t=0)$ sont données, sous réserve de vérification de conditions portant sur la continuité et la dérivabilité des fonctions qui figurent dans le système d'équation. Ces conditions mathématiques sont physiquement peu contraignantes et sont satisfaites pour les systèmes mécaniques soumis à des champs de forces réels.

Les systèmes mécaniques ont une évolution unique pour des conditions initiales données (déterminisme mécanique).

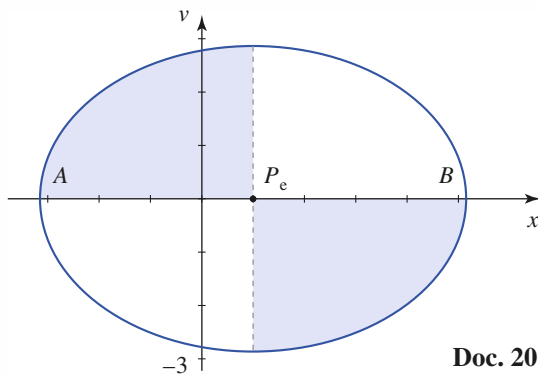
Application J

Points attracteurs et points de rebroussement d'un portrait de phase

Reprenons l'exemple de l'oscillateur harmonique d'équation d'évolution :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2(x - x_e)$$

dont nous avons vu (§ 6.4.2 chapitre 1) que les trajectoires de phase sont des ellipses centrées en P_e (doc. 20).



Doc. 20.

1) En étudiant la force subie par le mobile, expliquez pourquoi le point $P_e(x_e, 0)$ est appelé **point attracteur** pour ce système.

2) Pouvez-vous justifier, du fait du caractère attractif des efforts subis par l'oscillateur, le sens de parcours d'une trajectoire de phase autour de P_e ?

3) Les intersections A et B de la trajectoire de phase avec l'axe (Ox) sont appelés **points de rebroussement**. Justifiez ce terme.

4) L'ellipse trajectoire de phase coupe l'axe (Ox) perpendiculairement en ces points de rebroussement. Justifiez cette caractéristique. Cette propriété vous paraît-elle généralisable à tout autre système mécanique à un degré de liberté ?

1) D'après le principe fondamental de la dynamique, la force dirigée selon (Ox) subie par l'oscillateur correspond à :

$$f_x = -m\omega_0^2(x - x_e).$$

Nous voyons que f_x est négative si $x > x_e$, et positive lorsque $x < x_e$: l'oscillateur est toujours rappelé vers la position $x = x_e$, le système est « attiré » par le point P_e .

Nous pouvons d'ailleurs prévoir qualitativement que si l'oscillateur subissait un faible frottement proportionnel à sa vitesse (frottement fluide), ses oscillations seraient peu à peu amorties : sa trajectoire de phase viendrait « mourir » au point P_e .

2) Pour prévoir le sens de parcours de l'ellipse, constatons que :

- lorsque $x > x_e$, f_x est négative et la vitesse décroît :

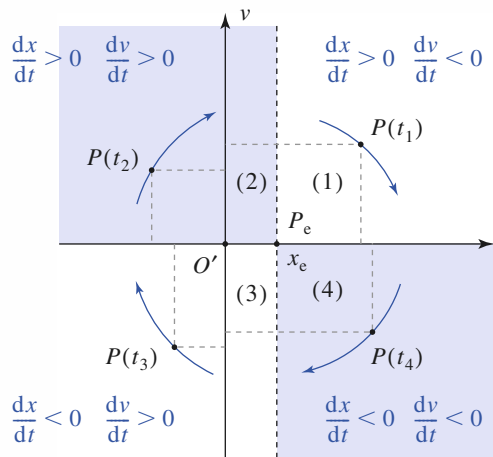
$$\frac{dv_x}{dt} < 0$$

- lorsque $x < x_e$, f_x est positive et la vitesse croît :

$$\frac{dv_x}{dt} > 0.$$

Nous pouvons donc déterminer le sens de parcours sur la trajectoire de phase (doc. 21).

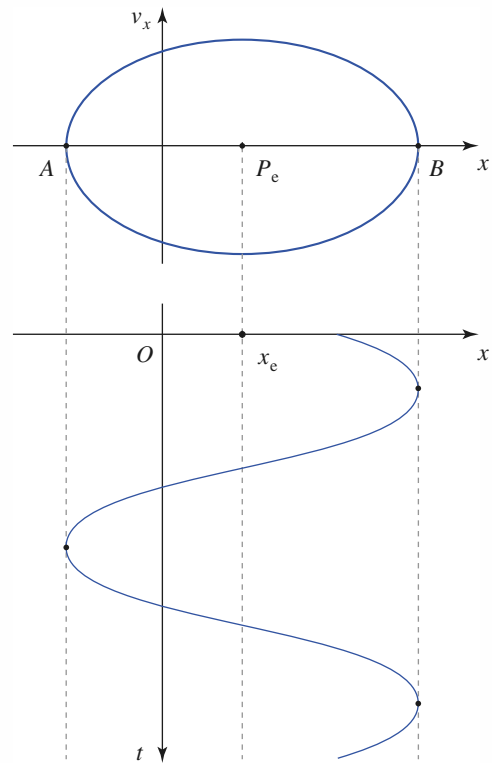
La forme elliptique de la trajectoire est liée au caractère harmonique de l'oscillateur. Par contre, le sens de parcours n'est lié qu'au caractère attracteur du point P_e : la trajectoire est décrite dans le sens horaire autour du point attracteur P_e .



Doc. 21. Le point de phase $P(t)$ d'un point matériel attiré vers $P_e(x = x_e, v = 0)$ tourne dans le sens horaire autour de cet attracteur.

3) Aux points A et B, la trajectoire de phase coupe l'axe (Ox). En ces points, la vitesse de l'oscillateur

s'annule. Ce n'est pas le cas pour la force qu'il subit et donc pour son accélération : la vitesse s'annule et change de signe. Nous voyons qu'en A ou B, l'oscillateur rebrousse chemin (doc. 22).



Doc. 22. Mise en évidence de la signification des points de rebroussement A et B de la trajectoire de phase.

4) Éliminons le temps dans les équations d'évolution du système, il vient :

$$\frac{dv_x}{dx} = \frac{f(x, v_x, t)}{mv_x}.$$

En un point où la force subie par le système n'est pas nulle, l'annulation de la vitesse implique que $\frac{dv_x}{dx}$ devient infini en ce point : la trajectoire de

phase coupe l'axe (Ox) perpendiculairement.

Pour certains systèmes, la force, et donc l'accélération, pourrait s'annuler en ce point. Autrement dit : le système vient s'arrêter en ce point, qui n'est plus un point de rebroussement mais un point d'arrêt.

Remarque

Les équations de la mécanique sont donc théoriquement déterministes. En fait, les conditions initiales ne sont connues qu'avec une certaine imprécision et, pour des systèmes complexes, la moindre variation des conditions initiales peut se traduire, au bout d'un certain temps, par des solutions très différentes.

La précision à long terme présente donc un certain caractère aléatoire. Même si les positions initiales des boules numérotées placées dans le panier du Loto apparaissent connues, il est impossible de prévoir le numéro gagnant.

3.3. Systèmes libres et systèmes forcés

Le système étudié est libre, ou encore **autonome** lorsque les actions qu'il subit ne dépendent pas explicitement du temps : $f = f(x, v_x)$.

Pour un système autonome, la nature des trajectoires de phase est donc une caractéristique du champ de forces dans lequel le point matériel évolue.

D'autre part, considérant la propriété d'unicité précédente, nous voyons que :

Pour un système autonome (ou libre), deux trajectoires de phase ne se coupent jamais.

Voir également l'Application 5.

CQFR

● QUANTITÉ DE MOUVEMENT (OU IMPULSION)

La quantité de mouvement par rapport au référentiel R d'un point matériel M , de masse m , est :

$$\vec{p}(M)_{/R} = m\vec{v}(M)_{/R}.$$

● LOIS DE NEWTON

Les trois lois de Newton sont les lois fondamentales de la mécanique du point matériel.

• Première loi : principe d'inertie

Il existe une classe de référentiels, appelés référentiels galiléens par rapport auxquels un point matériel isolé est en mouvement rectiligne uniforme.

• Deuxième loi : relation fondamentale de la dynamique

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces appliquées à un point M de masse m et son accélération sont liées par :

$$\vec{F}_{\mathcal{G} \rightarrow M} = \frac{d\vec{p}(M)}{dt} = m\vec{a}(M).$$

• Troisième loi : principe des actions réciproques

Les forces d'interaction exercées par deux points matériels M_1 et M_2 l'un sur l'autre sont opposées et colinéaires à l'axe (M_1M_2) .

● ÉVOLUTION D'UN SYSTÈME MÉCANIQUE

Les systèmes mécaniques ont une évolution unique pour des conditions initiales données (déterminisme mécanique).

Pour un système autonome (ou libre), deux trajectoires de phase ne peuvent se couper.

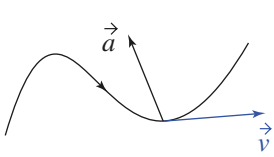
Contrôle rapide

Avez-vous retenu l'essentiel ?

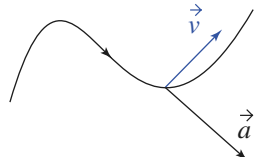
- ✓ Pouvez-vous assimiler votre vélo à un point matériel ? Pourquoi ? (La réponse n'est pas : « non, parce que je n'ai pas de vélo ».)
- ✓ Définir l'impulsion d'un point matériel.
- ✓ Quelles sont les trois lois de Newton ?
- ✓ Donner des exemples de forces. Qu'appelle-t-on force de liaison ? Que se passe-t-il lorsqu'une liaison unilatérale est sans frottement ?
- ✓ La tension d'un fil est-elle en général constante le long de celui-ci ?
- ✓ Qu'est ce que le déterminisme mécanique ? Quelle est sa conséquence sur les trajectoires de phase d'un système libre autonome ?

Du tac au tac (Vrai ou faux)

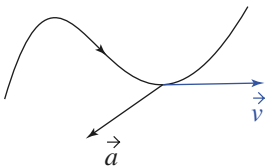
1. On considère les trajectoires suivantes, où en un point M nous avons indiqué le vecteur vitesse \vec{v} et le vecteur accélération \vec{a} . Indiquer les cas possibles :



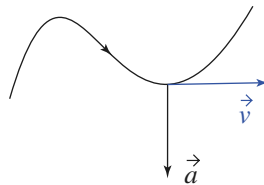
a. Vrai Faux



b. Vrai Faux

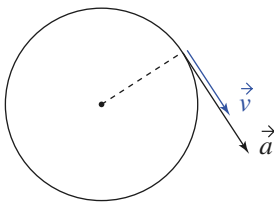


c. Vrai Faux

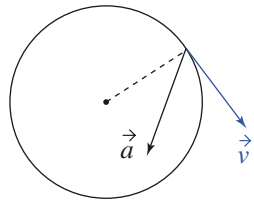


d. Vrai Faux

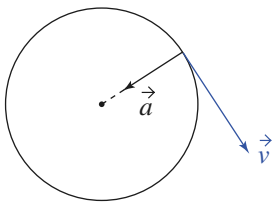
2. On considère les trajectoires circulaires suivantes, où en un point M nous avons indiqué le vecteur vitesse \vec{v} et le vecteur accélération \vec{a} . Indiquer les cas possibles :



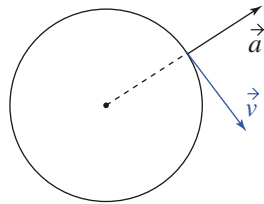
a. Vrai Faux



b. Vrai Faux

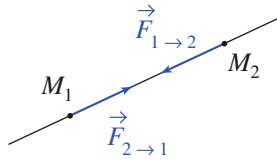


c. Vrai Faux

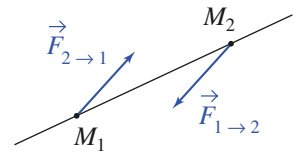


d. Vrai Faux

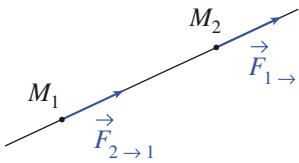
3. Deux points matériels sont en interaction ; quels sont les cas possibles ?



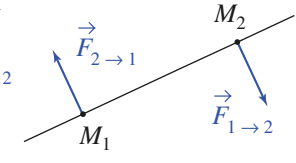
a. Vrai Faux



b. Vrai Faux

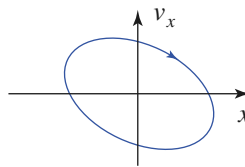


c. Vrai Faux

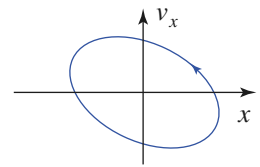


d. Vrai Faux

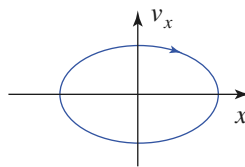
4. Soit les trajectoires de phase suivantes ; quelles sont celles qui sont correctes ?



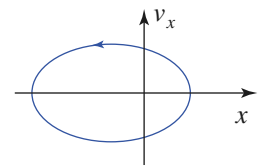
a. Vrai Faux



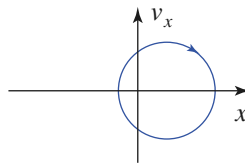
b. Vrai Faux



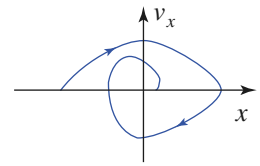
c. Vrai Faux



d. Vrai Faux



e. Vrai Faux



f. Vrai Faux

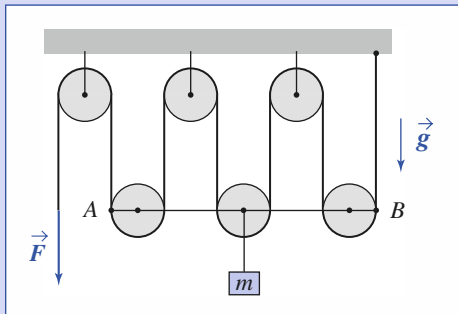
► Solution, page 48.

Exercices

1 Le palan

Un palan est constitué de $2n$ poulies et d'un fil disposés selon le schéma ci-dessous. Les axes des poulies supérieures sont fixes et ceux des poulies inférieures sont liés à une tige AB qui ne peut se déplacer que selon une translation verticale. Les poulies et le fil sont supposés idéaux. Un opérateur exerce une force \vec{F} sur l'extrémité libre du fil.

Déterminer l'accélération de l'objet soulevé, de masse m .



2 Le voyage en ballon

Un ballon gonflé à l'hélium a perdu du gaz. Il est accéléré vers le sol avec une accélération a .

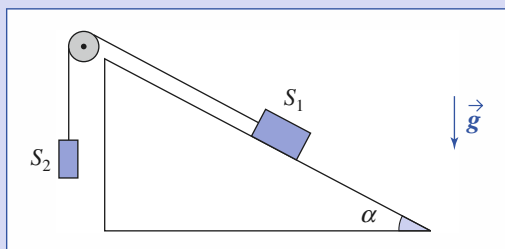
La masse totale étant m , déterminer la masse de lest qui doit être jetée par les astronautes pour que le ballon acquière une accélération de même valeur absolue, mais vers le haut.

On négligera les frottements et on ne s'intéressera pas au régime transitoire.

3 Le plan incliné et la poulie

S_1 glisse (cf. schéma) sans frottements sur le plan incliné et S_2 se déplace verticalement. Ces solides en translation sont considérés comme des points matériels.

Déterminer leur accélération, la poulie et le fil étant idéaux.

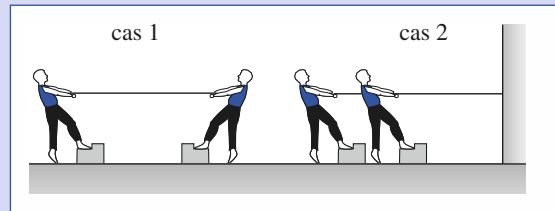


4 Force et tension

Deux personnes tirent sur une corde AB en exerçant chacune une force de norme F .

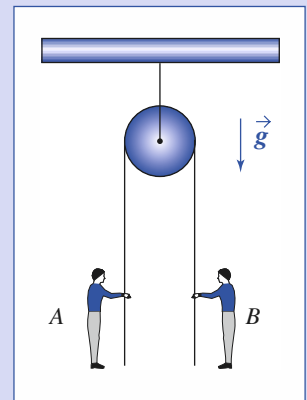
Déterminer la tension de la corde si :

- cas 1 : elles tirent à chaque extrémité ;
- cas 2 : la corde est attachée à un mur, et elles tirent du même côté.



5 Une compétition équitale ?

Deux amis, A piètre sportif, et B champion de gymnastique, proposent une compétition amicale de grimper de corde. Ils enroulent une corde autour d'une poulie suspendue au plafond et se placent au pied de la corde, chacun tenant une extrémité. Pour rendre la compétition plus égale, le plus léger des deux s'est lesté, de sorte qu'ils ont tous deux la même masse.



La corde et la poulie étant idéales, lequel, en grimpant, arrive le premier en haut ?

6 Mouvement vertical dans l'air

Un objet de masse m , modélisé par un point matériel, est lancé verticalement vers le haut depuis le point O avec une vitesse v_0 .

L'action de l'air se réduit à une force de frottement opposée à la vitesse de module $F_f = kv^2$.

Exprimer la vitesse v de l'objet en fonction de son altitude z . Calculer l'altitude maximale, ainsi que sa vitesse lorsqu'il retombe en O .

Faire apparaître dans les expressions les termes :

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \quad \text{et} \quad \ell = \frac{m}{2k}.$$

Préciser leur signification.

Calculer z_{max} pour $\ell = 5 \text{ m}$; $v_0 = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

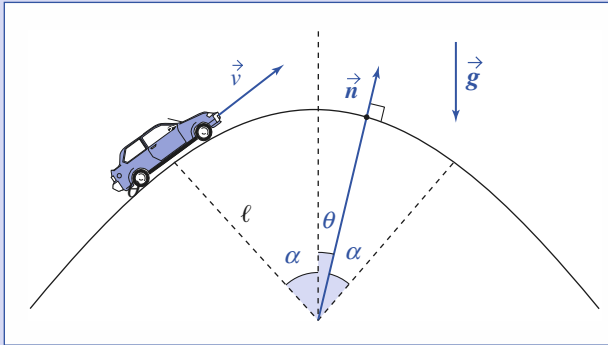
7 Éviter la cascade

Une automobile, assimilée à un point matériel, circule à la vitesse v uniforme, sur une piste au profil accidenté. Elle

franchit une bosse, modélisée par deux portions rectilignes raccordées par un arc de cercle de rayon ℓ et d'ouverture angulaire 2α .

À quelle condition garde-t-elle le contact avec le sol ?

Données : $\alpha = 10^\circ$ et $\ell = 5 \text{ m}$.



8 Mouvement d'un projectile au voisinage de la surface terrestre

On suppose que le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ est uniforme et que les autres forces, en particulier celle due au frottement de l'air, sont négligées.

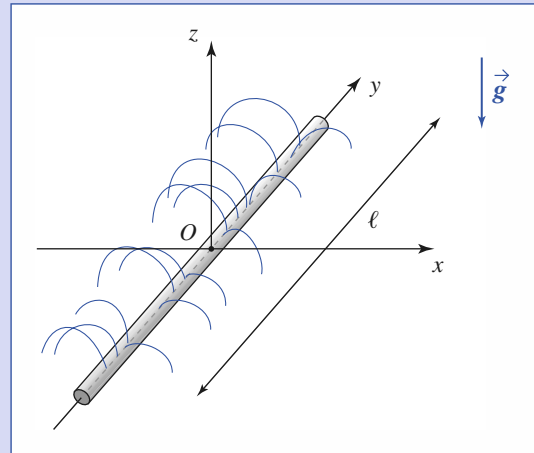
Le projectile est lancé à la date $t = 0$ depuis le point O . Le vecteur vitesse initial, parallèle au plan (Oxz) , est défini par sa valeur v_0 et l'angle $\alpha = (Ox, \vec{v}_0)$.

- Déterminer la trajectoire du projectile.
- La vitesse \vec{v}_0 étant donnée, quelle(s) valeur(s) faut-il donner à l'angle α pour atteindre une cible C de coordonnées $(x_C, 0, z_C)$?

En déduire l'ensemble des points accessibles par le projectile pour une vitesse initiale \vec{v}_0 donnée.

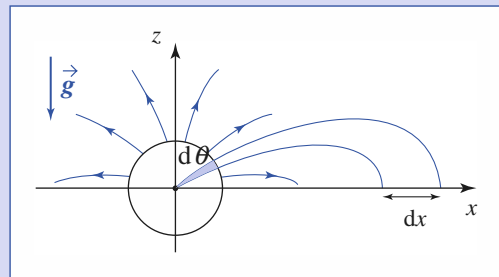
9 Un tuyau cylindrique est posé sur le sol. Sur une longueur ℓ , le demi-cylindre supérieur est percé d'un

grand nombre de petits trous régulièrement répartis. Il en sort des jets d'eau, tous perpendiculaires au tuyau, de même débit et de même vitesse v_0 . Le débit total (masse d'eau dispersée par unité de temps) est D_T .



En fonction de x , distance d'un point du sol au tuyau, déterminer la densité d'arrosage d , définie comme la masse d'eau reçue par unité de temps et par unité d'aire.

Les jets d'eau se comportent comme des ensembles de points matériels indépendants lancés depuis le tuyau et, pour simplifier, le frottement de l'air est négligé. On pourra, pour un arc $d\theta$ sur le cylindre, déterminer le débit élémentaire dD et l'aire dS de la surface arrosée (cf. schéma).



Corrigés

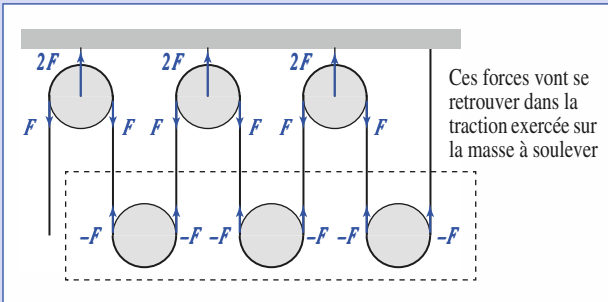
Solution du tac au tac, page 45.

1. Vrai : a Faux : b, c, d
2. Vrai : b, c Faux : a, d
3. Vrai : a Faux : b, c, d
4. Vrai : c, e, f Faux : a, b, d

1 Utilisons le caractère idéal des fils (souples et inextensibles, inertie négligeable) et des poulies (inertie négligée), nous pouvons faire apparaître sur le schéma les forces agissant sur les fils aux points où ceux-ci viennent en contact avec les poulies (schéma ci-après).

Nous voyons alors que la force de traction agissant sur la masse m n'est pas \vec{F} , mais $6\vec{F}$.

Plus généralement, pour un palan à n paires de poulies, elle vaudra $2n\vec{F}$. Cette multiplication de l'effort exercé par l'opérateur justifie l'utilisation d'un palan pour soulever des charges lourdes.

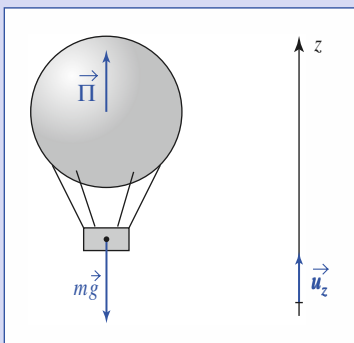


L'équation du mouvement de la masse à soulever est ainsi, en projection sur la verticale ascendante :

$$m\ddot{z} = -mg + 2nF.$$

Soit :
$$\ddot{z} = \frac{2nF}{m} - g.$$

2 Le ballon est soumis à son poids mg et la poussée d'Archimède Π . Nous négligerons ici le frottement de l'air, le mouvement étant en principe assez lent. Notons que le poids s'exerce au centre d'inertie du ballon tandis que la poussée d'Archimède s'exerce au centre d'inertie du fluide déplacé.



Son accélération est donnée par $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{\Pi}$, soit en projection sur \vec{u}_z en posant $\vec{a} = -a\vec{u}_z$:

$$-ma = -mg + \Pi.$$

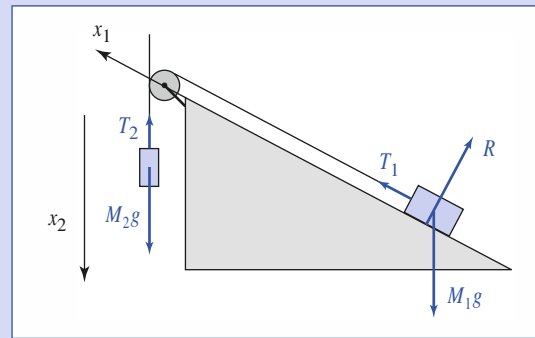
Si nous voulons avoir une accélération opposée en régime permanent, il faut réaliser :

$$+(m - \Delta m)a = -(m - \Delta m)g + \Pi.$$

La poussée d'Archimède, essentiellement liée au volume de l'enveloppe, ne variant pratiquement pas. La masse Δm de lest jeté est ainsi :

$$\Delta m = 2m \frac{a}{a + g}.$$

3 Représentons les forces agissant sur les deux mobiles :



Les forces de traction \vec{T}_1 et \vec{T}_2 ont même norme, égale à la tension T du fil (fil et poulie sont idéaux).

La réaction \vec{R} du plan incliné sur le mobile de masse M_2 est perpendiculaire à celui-ci si la liaison unilatérale est sans frottement.

En projection sur les deux axes x_1 et x_2 , les équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} M_1\ddot{x}_1 = T - M_1g \sin \alpha \\ M_2\ddot{x}_2 = -T + M_2g \end{cases}$$

avec $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = a$, puisque la longueur du fil est constante.

Nous en déduisons :
$$a = g \frac{M_2 - M_1 \sin \alpha}{M_2 + M_1}.$$

4 Étudions, dans les deux cas, l'équilibre de la moitié gauche de la corde :

- cas 1 : $0 = -T + F$, donc $T = F$;
- cas 2 : $0 = -T + 2F$, donc $T = 2F$.

Ce résultat montre qu'il ne faut pas confondre la force définie rigoureusement en mécanique et l'effort musculaire. Dans le cas 2, le mur exerce une force $2F$ sur la corde.

5 La tension T de la corde est uniforme.

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique à chaque concurrent :

- pour A : $ma_A = T - mg$;
- pour B : $ma_B = T - mg$.

Les accélérations a_A et a_B sont égales et, les conditions initiales étant identiques, ils arrivent ensemble.

Un problème de mécanique doit être analysé avec rigueur. En particulier, la force ne se confond pas avec la sensation d'effort musculaire.

Si la poulie et la corde ne sont pas idéales, alors, la hiérarchie sportive est respectée.



La relation fondamentale de la dynamique se traduit par l'équation différentielle non linéaire suivante (doc. 1).

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - \varepsilon kv^2, \text{ où } \begin{cases} \varepsilon = +1 & \text{si } v > 0, \\ \varepsilon = -1 & \text{si } v < 0. \end{cases}$$

Nous recherchons $v(z)$ et non $v(t)$.

Or $\frac{dv}{dt} = \frac{dv dz}{dz dt}$, d'où $m v \frac{dv}{dz} = -mg - \varepsilon kv^2$.

Posons $U = v^2$, nous obtenons :

$$\frac{dU}{dz} = -2g - 2\varepsilon \frac{k}{m} U.$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre que nous pouvons écrire :

$$\frac{dU}{dz} = \frac{-v_{lim}^2 + \varepsilon U}{\ell}.$$

Recherchons ses solutions $U(z)$ compatibles avec la valeur initiale de v .

• *Ascension* ($\varepsilon = +1$)

$$v^2 = -v_{lim}^2 + (v_0^2 + v_{lim}^2) \exp\left(-\frac{z}{\ell}\right).$$

L'altitude maximale est atteinte lorsque $v = 0$, soit :

$$z_{max} = \ell \ln\left(1 + \frac{v_0^2}{v_{lim}^2}\right).$$

• *Descente* : Avec les conditions initiales $z = z_{max}$ et $v = 0$, la solution est :

$$v^2 = -v_{lim}^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{z_{max} - z}{\ell}\right)\right].$$

Lorsque $z = 0$, le mobile repasse en O avec une vitesse v_1 telle que :

$$v_1^2 = v_0^2 \left(1 + \frac{v_0^2}{v_{lim}^2}\right)^{-1}.$$

v_{lim} est le module de la vitesse limite lors d'une chute de durée infinie et ℓ une distance caractéristique.

La chute libre sans frottements correspondant à $k = 0$, c'est-à-dire à $v_{lim} \rightarrow \infty$; nous retrouvons bien ce cas $v_1 = v_0$.

Avec les valeurs numériques proposées : $\frac{k}{m} = 0,1$ SI et donc :

$$v_{lim} = \sqrt{10 \times 10} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Le tracé graphique obtenu avec l'algorithme d'Euler (cf. Annexe) et un pas de calcul $dt = 0,001$ s donne :

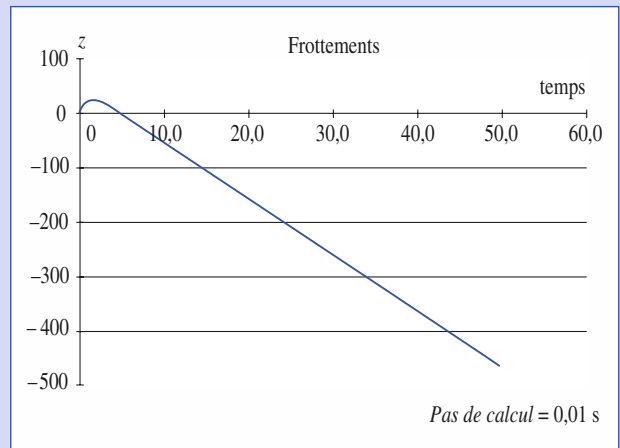
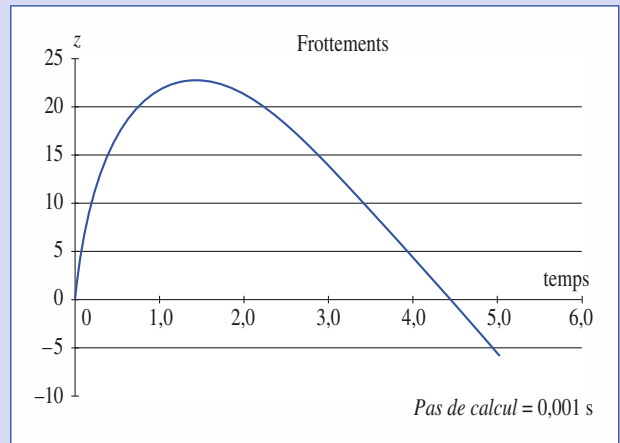
$$z_{max} \approx 23,0 \text{ m}.$$

Le calcul rigoureux donne :

$$z = \ell \ln\left(1 + \frac{v_0^2}{v_{lim}^2}\right) \approx \ell \cdot \ln \frac{v_0^2}{v_{lim}^2} \approx \ell \cdot \ln 100 = 23,1 \text{ m}.$$

(Avec un pas de 0,1, la méthode d'Euler donne 22,7 m.)

Les évolutions graphiques sont les suivantes.



On remarque sur le document ci-dessus l'évolution affine de x avec t liée à la vitesse limite atteinte par le point matériel.



La méthode pour résoudre ce type de problème suit le schéma suivant :

- formulation de l'hypothèse : le mobile reste lié à son support ;
- calcul de la réaction du support ;
- étude du signe de $\vec{R} \cdot \vec{n}$:
 - si $\vec{R} \cdot \vec{n} < 0$, alors le résultat est contradictoire avec l'hypothèse de départ : celle-ci est fautive et le mobile a quitté son support ;
 - si $\vec{R} \cdot \vec{n} \geq 0$, il existe une solution cohérente avec l'hypothèse : en raison de l'unicité, il s'agit de la solution du problème.

Corrigés

Utilisons des coordonnées polaires de centre O .

Avec $\vec{a} = -\frac{v^2}{\ell}\vec{e}_r$ et $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}$, nous obtenons :

$$\vec{R} \cdot \vec{e}_r = -m\frac{v^2}{\ell} + mg \cos \theta.$$

Le bolide reste lié à la piste si $\vec{R} \cdot \vec{e}_r \geq 0$, donc si $g\ell \cdot \cos \theta \geq v^2$ pour toutes les valeurs de θ , soit ici :

$$v \leq \sqrt{g\ell \cos \alpha'} \approx 7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 25 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

8

1) $\vec{a}(M)_{/R} = \vec{g}$, soit $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 0$, $\ddot{z} = -g$.

En tenant compte des conditions initiales à $t=0$, nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned} \ddot{x} = 0 & \quad \dot{x} = v_0 \cos \alpha & \quad x = v_0 \cos \alpha t \\ \ddot{y} = 0 & \quad \dot{y} = 0 & \quad y = 0 \\ \ddot{z} = -g & \quad \dot{z} = -gt + v_0 \sin \alpha & \quad z = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin \alpha t. \end{aligned}$$

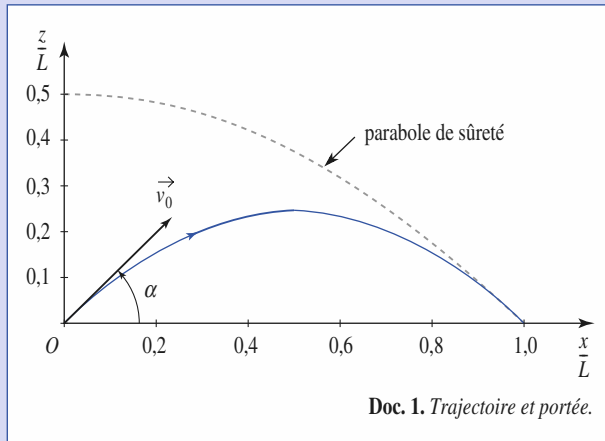
La trajectoire est dans le plan vertical contenant la vitesse initiale. C'est une parabole (doc. 1) dont l'équation est obtenue en éliminant t :

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x.$$

La portée x_p est la valeur de x pour laquelle le projectile retombe à l'altitude

$$z = 0 : x_p = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

La portée est maximale si $\alpha = \frac{\pi}{4}$; elle est égale à $L = \frac{v_0^2}{g}$.



Doc. 1. Trajectoire et portée.

2) x_C et z_C vérifient l'équation de la trajectoire :

$$z_C = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_C^2 + \tan \alpha x_C$$

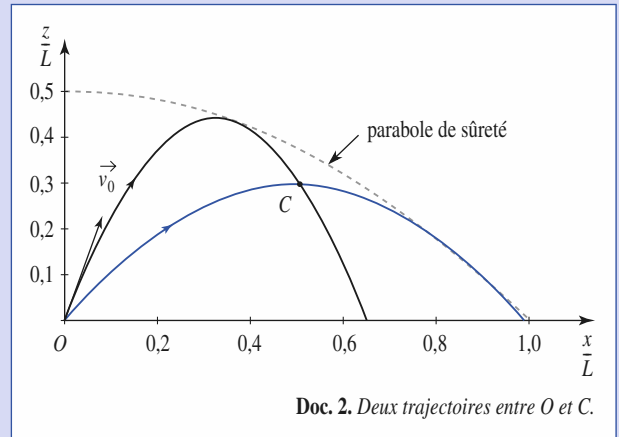
α est donc solution de l'équation :

$$-\frac{gx_C^2}{2v_0^2} \tan^2 \alpha + x_C \tan \alpha - \frac{gx_C^2}{2v_0^2} - z_C = 0$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = x_C^2 - 4 \frac{gx_C^2}{2v_0^2} \left(\frac{gx_C^2}{2v_0^2} + z_C \right).$$

- $\Delta < 0$: le problème n'a pas de solution ; C est inaccessible.
- $\Delta = 0$: le problème a une solution.
- $\Delta > 0$: le problème a deux solutions : tir *tendu* et tir *en cloche* (doc. 2).



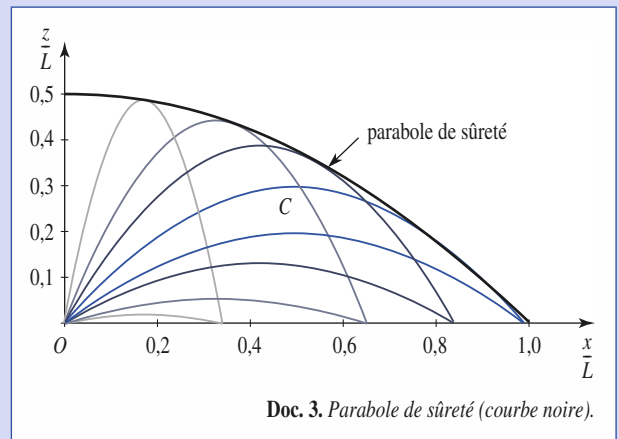
Doc. 2. Deux trajectoires entre O et C .

Le point C est accessible si $\Delta \geq 0$, soit si :

$$z_C \leq -\frac{g}{2v_0^2} x_C^2 + \frac{v_0^2}{2g}.$$

Les points accessibles du plan (Oxz) sont situés sous la *parabole de sûreté* (doc. 3) d'équation :

$$z = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + \frac{v_0^2}{2g}.$$



Doc. 3. Parabole de sûreté (courbe noire).

9

Le débit associé à l'angle élémentaire $d\theta$ vaut :

$$dD = D_T \frac{d\theta}{\pi}.$$

Considérons une goutte quittant le tuyau avec la vitesse v_0 , avec une inclinaison initiale θ (que nous prenons entre 0 et $+\frac{\pi}{2}$, la partie à gauche du tuyau étant arrosée de façon identique) par rapport à la verticale. L'équation de son mouvement correspond à :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

soit, après intégration, en négligeant le rayon du tuyau :

$$\begin{cases} x = v_0 t \sin \theta \\ y = y_0 \\ z = v_0 t \cos \theta - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Lorsque la goutte retombe : $z = 0$, et donc

$$x_{\text{chute}} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta.$$

Le tuyau arrose donc de part et d'autre jusqu'à la distance $x_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{g}$.

La surface arrosée par les gouttes émises par un arc élémentaire $d\theta$ du tuyau de longueur ℓ est :

$$dS = \ell dx_{\text{chute}} = 2\ell \frac{v_0^2}{g} \cos 2\theta d\theta.$$

La densité d'arrosage due aux gouttes émises avec un angle θ est :

$$d = \left(\frac{dD}{dS} \right)_{[\theta, \theta+d\theta]} = D_T \frac{g}{2\pi \ell v_0^2 \cos 2\theta} = D_T \frac{g}{2\pi \ell v_0^2 \sqrt{\ell - \frac{gx}{v_0^2}}}.$$

Constatons que les gouttes émises avec l'angle $\frac{\pi}{2} - \theta$ arrivent au même endroit, ce qui double la densité d'arrosage dont la valeur effective vaut :

$$d = D_T \frac{g}{\pi \ell v_0^2} \frac{\ell}{\sqrt{1 - \frac{gx}{v_0^2}}}.$$

On peut vérifier que le débit massique cumulé dans la zone arrosée à droite du tuyau est :

$$\int_{x_{\text{chute}}}^{x_{\text{max}}} d(\ell dx_{\text{chute}}) = D_T \frac{g}{\pi v_0^2} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ell}{\cos 2\theta} \frac{v_0^2}{g} 2 \cos \theta d\theta = D_T \frac{1}{2}.$$

Ce résultat est logiquement égal à la moitié du débit total du tuyau d'arrosage.

Constatons que cette intégrale converge tout naturellement, puisque le tuyau a un débit fini, bien que la densité d'arrosage tende vers l'infini à la limite d'arrosage $\left(\theta = \frac{\pi}{2} \right)$.

3

Puissance et énergie en référentiel galiléen

Introduction

Le concept d'énergie est récent. Ses aspects mécaniques et thermiques n'ont été clairement perçus qu'au XIX^e siècle. Jusque-là, les mécaniciens distinguaient mal ce que nous appelons maintenant puissance et force. Cet extrait du Dictionnaire raisonné de Physique publié en 1781 par M. Brisson de l'Académie Royale des Sciences, en témoigne :

« Force vive :

C'est celle d'un corps actuellement en mouvement, qui agit contre un obstacle qui cède, et qui produit un effet sur lui. Telle est, par exemple, la Force d'un corps, qui, par la pesanteur, est tombé d'une certaine hauteur, et choque un obstacle qu'il rencontre.

Telle est encore la Force d'un ressort qui se débande contre un obstacle qu'il déplace.

On a toujours pensé, jusqu'à Leibnitz que la Force vive devait être évaluée, ainsi que la Force morte, par le produit de la masse multipliée par la simple vitesse ; mais Leibnitz a pensé autrement, et a cru qu'il fallait l'estimer par le produit de la masse multipliée par le carré de la vitesse. (Voyez son Ouvrage, qui a pour titre : Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum, Act. Erud. Lipf., 1686, p. 161.)

Quelque opposée que fût cette opinion aux principes connus et adoptés de tout temps, elle a cependant trouvé des défenseurs, qui l'ont appuyée sur des expériences et des raisonnements très spécieux.

OBJECTIFS

- Notions de puissance et de travail.
- Théorème de l'énergie cinétique.
- Conservation de l'énergie mécanique pour les systèmes conservatifs.

PRÉREQUIS

- Dynamique du point matériel en référentiel galiléen (chapitre 2).

Puissance et travail dans un référentiel

1.1. Puissance d'une force dans un référentiel

1.1.1. Définition

Soit un point matériel de masse m , se trouvant au point M du référentiel \mathcal{R} avec le vecteur vitesse $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$.

Ce point matériel subissant à cette date une force \vec{F} , la puissance $\mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}}$ de cette force est par définition :

$$\mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}.$$

La puissance d'une force dépend du référentiel d'étude, que celui-ci soit galiléen ou non ; en effet, bien que la force soit invariante, la vitesse dépend du référentiel considéré. L'unité de puissance, dans le Système international d'unités, est le watt (symbole : W ; $1 \text{ W} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$).

1.1.2. Puissance d'une force de contact sans frottement

Un point matériel se déplace à la vitesse \vec{v} sur un support fixe dans le référentiel d'étude \mathcal{R} . En l'absence de frottements, la force de contact \vec{R} est normale au support et donc orthogonale au vecteur vitesse \vec{v} . La puissance de cette force est nulle dans \mathcal{R} :

$$\mathcal{P}(\vec{R})_{/\mathcal{R}} = \vec{R} \cdot \vec{v} = 0.$$

1.1.3. Additivité

Soit deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 appliquées à un point matériel à la date t . La puissance résultante dans \mathcal{R} est, d'après la propriété d'additivité des forces, la somme des puissances :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot \vec{v} = \vec{F}_1 \cdot \vec{v} + \vec{F}_2 \cdot \vec{v} = \mathcal{P}(\vec{F}_1) + \mathcal{P}(\vec{F}_2) = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2.$$

Cette propriété se généralise immédiatement au cas de N forces distinctes.

1.2. Travail d'une force dans un référentiel

1.2.1. Définition

Le travail élémentaire $\delta\mathcal{T}(\vec{F})$ de la force \vec{F} appliquée à un point matériel M est, pour la durée infinitésimale dt :

$$\delta\mathcal{T}(\vec{F})_{/\mathcal{R}} = \mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}} dt.$$

Ce travail élémentaire dépend du référentiel. Il se reformule (en simplifiant les notations) dans le référentiel d'étude \mathcal{R} selon :

$$\delta\mathcal{T} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot d\vec{M}.$$

O étant un point fixe dans \mathcal{R} , $d\vec{M} = d\vec{OM}$, est le vecteur déplacement élémentaire du point M ; $\delta\mathcal{T}$ est la *circulation élémentaire* de la force \vec{F} .

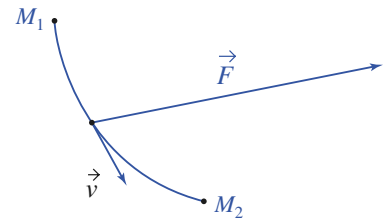
L'additivité des puissances entraîne celle des travaux. L'unité de travail, dans le Système international d'unités, est le joule (symbole : J ; $1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$).

1.3. Cas d'un déplacement fini

La particule (*doc.* 1) étant en M_1 à la date t_1 et en M_2 à la date t_2 , le travail effectué dans \mathcal{R} par la force \vec{F} entre ces deux dates est :

$$\mathcal{T} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t) dt = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{M}.$$

Cette circulation dépend *a priori* de la forme de la trajectoire entre M_1 et M_2 .



Doc. 1. Cas d'un déplacement fini.

1.3.1. Cas d'une force constante

Dans le cas particulier d'une force constante au cours d'un déplacement fini, l'expression précédente se simplifie en :

$$\mathcal{T} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}.$$

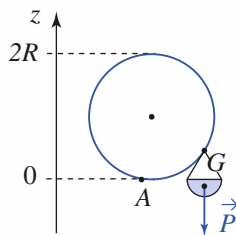
Application 1

Travail des forces de pesanteur

On considère une nacelle, de masse m , d'une grande roue de rayon R .

Quel est le travail de son poids quand, partant du point le plus bas A , elle décrit un demi-tour ? un tour ?

On admettra que les actions de pesanteur sont équivalentes à une force égale au poids total, appliquée au centre d'inertie G .



Doc. 2. La nacelle doit « pendre » sous la roue.

Le centre d'inertie de la nacelle décrit également un cercle de rayon R .

Soit z sa cote à un instant donné, sur un axe vertical ascendant du référentiel lié au sol.

Le travail du poids au cours d'un déplacement élémentaire est :

$$\delta \mathcal{T}(m\vec{g}) = -mg\vec{e}_z \cdot d(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) = -mg dz.$$

Pour un déplacement fini, $\mathcal{T} = mg(z_1 - z_2)$, z_1 étant la cote du point de départ et z_2 celle du point d'arrivée.

Pour un demi-tour : $\mathcal{T}_{1/2} = -2Rmg$; pour un tour complet : $\mathcal{T}_1 = 0$.

2 Théorèmes de la puissance cinétique et de l'énergie cinétique

2.1. Théorème de la puissance cinétique

Soit \vec{F} la force totale appliquée à un point matériel M , de masse m et animé d'une vitesse \vec{v} dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_g d'étude.

En multipliant les deux membres de la relation fondamentale de la dynamique

$\vec{F} = m\vec{a} = m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$ par \vec{v} , nous obtenons :

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \mathcal{P}_{/\mathcal{R}_g} = m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(\frac{m\vec{v}^2}{2}\right)}{dt} = \frac{d\mathcal{E}_K}{dt}.$$

La quantité $\frac{m\vec{v}^2}{2}$ est par, définition, l'énergie cinétique $\mathcal{E}_K(M)_{/\mathcal{R}_g}$ de la particule dans le référentiel \mathcal{R}_g .

Dans un référentiel galiléen, la puissance de la force totale, appliquée à un point matériel, est égale à la dérivée par rapport au temps de son énergie cinétique.

$$\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{E}_K}{dt}.$$

2.2. Théorème de l'énergie cinétique

Le travail élémentaire de la force totale pendant la durée élémentaire dt est :

$$\mathcal{P} dt = \delta\mathcal{T} = d\mathcal{E}_K.$$

Considérons le déplacement du point matériel M d'une position M_1 , occupée à la date t_1 , à une position M_2 , occupée à la date t_2 , le long d'une courbe Γ ; alors :

$$\mathcal{T} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P} dt = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{M} = \mathcal{E}_K(t_2) - \mathcal{E}_K(t_1).$$

Ce résultat constitue le théorème de l'énergie cinétique. Le travail \mathcal{T} dépend en général du chemin Γ suivi.

La variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail de la force totale qui lui est appliquée.

2.3. Théorème de l'énergie cinétique et équation du mouvement

Montrons, sur un exemple, que le théorème de l'énergie cinétique permet de trouver l'équation différentielle d'un mouvement à un degré de liberté.

Un petit anneau de masse m , lié à un ressort élastique de raideur k , se déplace sans frottements sur un axe horizontal (Ox) supposé galiléen (doc. 3).

L'origine O de l'axe (Ox) étant confondue avec la position d'équilibre du système, la force totale subie par l'anneau lorsqu'il occupe la position d'abscisse x est $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$. L'anneau est abandonné sans vitesse initiale d'une position d'abscisse a . Déterminons son mouvement ultérieur.

D'après la relation fondamentale de la dynamique : $m\ddot{x} = -kx$. Compte tenu des conditions initiales, la solution est $x = a \cos(\omega_0 t)$, avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant initial et un instant ultérieur quelconque :

$$\mathcal{E}_K(t) - \mathcal{E}_K(0) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \int_a^x -kx' dx' = \frac{1}{2}ka^2 - \frac{1}{2}kx^2.$$

Soit : $\dot{x}^2 = -\omega_0^2(x^2 - a^2)$.

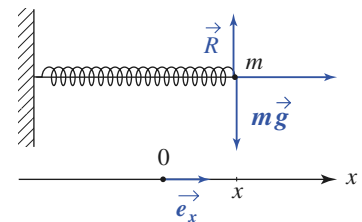
Dérivons maintenant cette équation par rapport au temps. Nous obtenons :

$$\dot{x}(\ddot{x} + \omega_0^2 x) = 0.$$

Il existe deux solutions mathématiques : d'une part $\dot{x} = 0$ et d'autre part l'équation du mouvement déjà obtenue, par la relation fondamentale.

La première solution $\dot{x} = 0$ conduit à $x = \text{cte}$, qui ne convient pas en général.

La présence de cette solution fautive est aisée à déceler : elle vient de l'établissement antérieur du théorème de l'énergie cinétique, quand nous avons multiplié les deux membres de la relation fondamentale par le vecteur vitesse \vec{v} ,



Doc. 3. La réaction du support annule le poids.

autorisant ainsi la possibilité d'une solution de vitesse nulle. Nous nous permettrons donc d'éliminer ultérieurement cette solution « parasite », sans discussion approfondie, lorsque des situations semblables se présenteront.

Application 2

Freinage par frottement

Un palet de masse m est lancé sur une piste verglacée, avec une vitesse initiale \vec{v}_0 .

À quelle condition sur \vec{v}_0 parviendra-t-il à franchir la bande de largeur d , où il existe, en l'absence de glace, une force de frottement de norme $fm g$ tant que la vitesse est non nulle ?

Le travail de la force de contact, pour une distance x parcourue sur la bande non verglacée est donc :

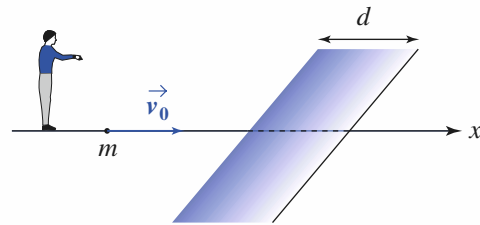
$$\mathcal{T} = -f m g x$$

et la variation d'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \mathcal{T}.$$

Le palet pourra donc traverser la bande si la vitesse ne s'annule pas avant l'abscisse $x = d$, donc :

$$v_0 > (2 f g d)^{1/2}.$$



Doc. 4. Freinage par frottement.

3 Énergie potentielle, énergie mécanique

3.1. Champs de forces conservatives

Nous introduisons d'abord la notion de champ de force conservative sur quelques exemples d'utilisation fréquente.

3.1.1. Particule dans le champ de pesanteur uniforme

Avec un axe vertical (Oz) pointant vers le haut, et dans l'hypothèse d'un champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ uniforme (doc. 5), le travail élémentaire du poids est :

$$\delta\mathcal{T} = -mgdz = -d(mgz).$$

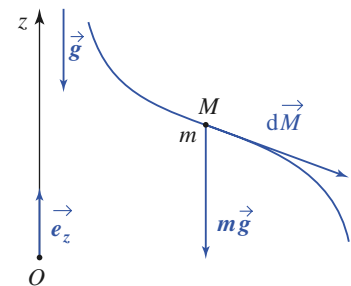
Le travail du poids entre $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ est :

$$\mathcal{T} = -(mgz_2 - mgz_1).$$

Il est indépendant du chemin suivi entre M_1 et M_2 et représente la diminution de la fonction $\mathcal{E}_p = mgz + \text{cte}$, nommée *énergie potentielle de pesanteur*. Remarquons que cette énergie potentielle est définie à une constante additive près.

3.1.2. Force de rappel élastique

Considérons un ressort rectiligne de raideur k parfaitement élastique, de longueur ℓ_0 à vide et de masse négligeable, fixé par l'une de ses extrémités à un point A fixe dans le référentiel \mathcal{R} . Un point matériel M est attaché à l'autre extrémité du ressort.



Doc. 5. L'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_p = mgz + \text{cte}$ avec l'axe Oz orienté vers le haut.

Posons $\overrightarrow{AM} = \ell \vec{e}$, \vec{e} étant un vecteur unitaire dirigé de A vers M (doc. 6). La force exercée par le ressort sur le point matériel M est :

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}$$

expression qui suppose évidemment $\ell > 0$ et qui n'est en pratique valable que dans le domaine d'élasticité du ressort (comportement linéaire).

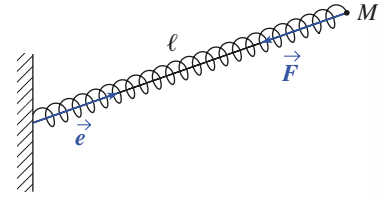
En envisageant un mouvement quelconque du point matériel dans \mathcal{R} , le travail élémentaire de la force \vec{F} est :

$$\delta \mathcal{T} = \vec{F} \cdot d\vec{M} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e} \cdot d(\ell \vec{e}), \text{ avec } d(\ell \vec{e}) = \ell d\vec{e} + \vec{e} d\ell,$$

\vec{e} étant unitaire, $d\vec{e}$ est orthogonal à \vec{e} et $\vec{e} \cdot d(\ell \vec{e}) = d\ell$.

Par suite : $\delta \mathcal{T} = -k(\ell - \ell_0)d\ell = -d\mathcal{E}_p$, avec $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$.

Nous avons choisi, par convention, l'énergie potentielle élastique nulle lorsque le ressort est au repos (tension nulle).



Doc. 6. L'énergie potentielle associée à une forme de rappel élastique :

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}$$

$$\text{et } \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2.$$

3.2. Énergie potentielle

3.2.1. Définitions

Une force qui ne dépend que de la position de son point d'application définit un champ de forces. C'est le cas des deux exemples que nous venons d'étudier.

Remarque : Il existe des forces n'obéissant pas à une telle définition ; c'est, par exemple, le cas des forces de contact.

Un champ de force dérive d'une énergie potentielle s'il existe une fonction $\mathcal{E}_p(\vec{r})$, telle que le travail élémentaire de la force vérifie :

$$\delta \mathcal{T} = -d\mathcal{E}_p.$$

\mathcal{E}_p , définie à une constante additive près, est l'énergie potentielle associée à ce champ de forces.

Nous voyons ainsi en reprenant les deux exemples introductifs, que :

- au champ de pesanteur uniforme peut être associée l'énergie potentielle : $\mathcal{E}_p = mgz + \text{cte}$ avec (Oz) orienté vers le haut ;
- à l'effort de rappel élastique du ressort peut être associée l'énergie potentielle : $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \text{cte}$.

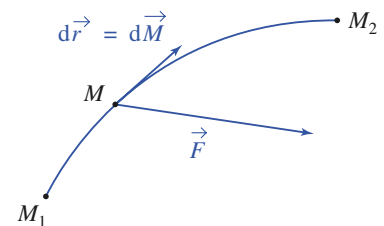
3.2.2. Propriétés

Calculons le travail d'un tel champ de forces le long d'un chemin allant d'un point initial M_1 à un point final M_2 (doc. 7).

$$\mathcal{T} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{M_1}^{M_2} -d\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(M_1) - \mathcal{E}_p(M_2).$$

Le travail de la force considérée ne dépend pas du chemin suivi ; le champ de force est dit *conservatif*.

Le travail d'une telle force le long d'une courbe fermée est nul.



Doc. 7. Force \vec{F} et déplacement élémentaire $d\vec{M} = d\vec{r}$.

3.2.3. Interprétation physique de l'énergie potentielle

Reprenons l'exemple du champ de forces de pesanteur. Un opérateur qui sou- lève l'objet de masse m d'une hauteur h augmente son énergie potentielle de la quantité mgh . Lors du retour à la position initiale (descente), le travail du poids sera positif et égal à mgh . L'énergie potentielle représente en quelque sorte une énergie *accumulée*, qui sera restituée lors du retour à l'état initial.

De la même façon, un ressort comprimé accumule de l'énergie (potentielle) qu'il restitue lorsqu'il se détend.

3.2.4. Expression du champ de forces

Soit un point matériel possédant trois degrés de liberté, c'est-à-dire libre de se déplacer dans l'espace. Le travail élémentaire de la force \vec{F} au cours d'un déplacement élémentaire $d\vec{M}$ est :

$$\vec{F} \cdot d\vec{M} = -d\mathcal{E}_p \text{ (par définition de l'énergie potentielle).}$$

Détaillons les deux membres de cette égalité en utilisant les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{M} &= F_x dx + F_y dy + F_z dz \\ d\mathcal{E}_p &= \left(\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial z}\right)_{x,y} dz. \end{aligned}$$

L'égalité de ces termes pour tout déplacement élémentaire (dx, dy, dz) nous permet d'identifier :

$$F_x = -\left(\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x}\right)_{y,z}; \quad F_y = -\left(\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial y}\right)_{x,z}; \quad F_z = -\left(\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial z}\right)_{x,y}.$$

Dans le cas d'un problème à un degré de liberté, noté x , nous aurons :

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(x); \quad \vec{F} = F(x)\vec{e}_x; \quad F(x) = -\frac{d\mathcal{E}_p(x)}{dx}.$$

3.3. Énergie mécanique d'un point matériel dans un référentiel

3.3.1. Énergie mécanique

Considérons le mouvement d'un point matériel de masse m dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , soumis à une force totale :

$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc}.$$

\vec{F}_c représente la résultante des forces conservatives dérivant de l'énergie potentielle totale \mathcal{E}_p . Les autres forces \vec{F}_{nc} (non conservatives) ne dérivent pas d'une énergie potentielle.

Le théorème de l'énergie cinétique donne alors :

$$\mathcal{E}_{K_2} - \mathcal{E}_{K_1} = \mathcal{T}_{nc} + \mathcal{E}_{P_1} - \mathcal{E}_{P_2}$$

$$\text{soit } (\mathcal{E}_{K_2} + \mathcal{E}_{P_2}) - (\mathcal{E}_{K_1} + \mathcal{E}_{P_1}) = \mathcal{T}_{nc}.$$

Posons alors : $\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_K$.

Cette grandeur s'appelle l'énergie mécanique de la particule dans \mathcal{R}_g . Elle dépend du choix de \mathcal{R}_g , mais aussi de la constante relative à l'énergie potentielle.

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie mécanique est égale au travail des forces non conservatives :

$$d\mathcal{E}_M = \delta\mathcal{T}_{nc} \quad \text{ou encore} \quad \frac{d\mathcal{E}_M}{dt} = \mathcal{P}_{nc}.$$

3.3.2. Intégrale première de l'énergie

Un point matériel est en évolution conservative dans \mathcal{R}_g si son énergie mécanique, dans ce référentiel, reste constante au cours du temps, c'est-à-dire si la puissance dissipée par chacune des forces non conservatives est nulle à tout instant.

L'équation : $\mathcal{E}_M = cte$
est appelée l'intégrale première de l'énergie.

Si une seule coordonnée suffit à repérer la position de M , cette équation est de la forme :

$$f(x, \dot{x}) = 0.$$

Son utilisation est vivement recommandée dans les problèmes à un degré de liberté.

Remarque

- Une telle situation à énergie mécanique constante est souvent une approximation en pratique, compte tenu de frottements inévitables en cas de liaisons. Elle permet néanmoins une première approche de la résolution des problèmes.
- Elle est remarquablement vérifiée pour le mouvement des planètes et des satellites.

4 Mouvement d'une particule en évolution conservative

4.1. Cadre d'étude

Nous prendrons comme exemple un système à un degré de liberté dont la position est repérée par la variable $x(t)$. Le point matériel étudié est soumis à une force $\vec{F} = F(x)\vec{e}_x$ dérivant d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p(x)$, soit :

$$F(x) = -\frac{d\mathcal{E}_p(x)}{dx}.$$

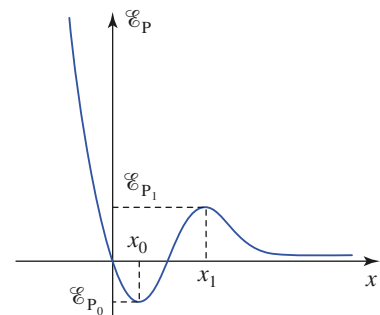
Pour l'exemple que nous étudions ici, le graphe des variations de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(x)$ (doc. 8) fait apparaître :

- des valeurs stationnaires : minimum à l'abscisse x_0 , maximum (local) en x_1 ;
- une divergence positive du côté $x \rightarrow -\infty$;
- une valeur limite du côté $x \rightarrow +\infty$.

4.2. Positions d'équilibre

La fonction énergie potentielle est dite *stationnaire* lorsqu'elle passe par un maximum ou un minimum : localement, ces variations sont très lentes. En ces points où $\frac{d\mathcal{E}_p(x)}{dx} = 0$, la force exercée sur la particule s'annule.

Pour l'exemple étudié, Les abscisses x_0 et x_1 correspondent donc à des positions d'équilibre.



Doc. 8. Graphe des variations de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(x)$.

4.3. Domaines accessibles à la trajectoire

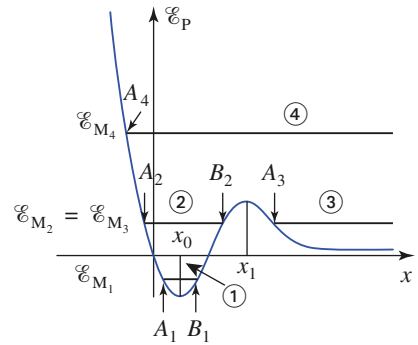
Le point matériel évolue dans un champ de forces conservatif. Son énergie mécanique est donc une constante du mouvement :

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{E}_P(x) = \text{cte}.$$

Dans la mesure où l'énergie cinétique est une grandeur positive ou nulle, nous voyons que les domaines accessibles à la trajectoire correspondent à :

$$\mathcal{E}_P(x) \leq \mathcal{E}_M.$$

Lorsque l'égalité est réalisée, la vitesse du point matériel s'annule.



Doc. 9. Énergie mécanique et énergie potentielle.

Dans un champ de forces conservatives, l'évolution d'un point matériel est limitée aux zones où l'énergie potentielle reste inférieure à son énergie mécanique : $\mathcal{E}_P(x) \leq \mathcal{E}_M$.

Pour le graphe d'énergie potentielle $\mathcal{E}_P(x)$ pris comme exemple, étudions l'évolution du mobile pour quelques valeurs significatives de son énergie mécanique (doc. 9).

• Cas ① : état d'énergie mécanique $\mathcal{E}_P(x) \leq \mathcal{E}_M \leq 0$

L'énergie du mobile est faible, et la condition $\mathcal{E}_P \leq \mathcal{E}_M$ le confine entre deux valeurs extrêmes de son abscisse (points A_1 et B_1).

Le point matériel ne peut s'échapper de la cuvette d'énergie potentielle, à proximité de l'abscisse d'équilibre x_0 : c'est un *état lié*.

• Cas ② : état d'énergie mécanique $0 \leq \mathcal{E}_M \leq \mathcal{E}_{P_1}$

C'est encore un état lié. L'amplitude des évolutions autour de x_0 est un peu plus grande (points extrêmes représentés par A_2 et B_2).

• Cas ③ : état d'énergie mécanique $0 \leq \mathcal{E}_M \leq \mathcal{E}_{P_1}$

L'énergie est la même que pour le cas ②, mais initialement, la particule est en dehors de la cuvette d'énergie potentielle. Le point matériel peut atteindre ici une abscisse minimale (point A_3). S'il est envoyé initialement vers A_3 , nous voyons qu'il ne peut pas franchir la barrière de potentiel : après avoir atteint A_3 , où il « rebondit », le point matériel repart à l'infini : c'est un *état de diffusion*.

• Cas ④ : état d'énergie mécanique $\mathcal{E}_M \leq \mathcal{E}_{P_1}$

L'énergie du mobile est trop importante pour qu'il soit confiné dans une cuvette d'énergie potentielle. Nous obtenons encore un *état de diffusion*.

4.4. Observation des trajectoires de phase

Simulons l'évolution du point matériel et observons sa *trajectoire de phase* dans les quatre cas que nous venons de discuter qualitativement : le document 10 nous permet de visualiser les évolutions correspondantes.

Notons que :

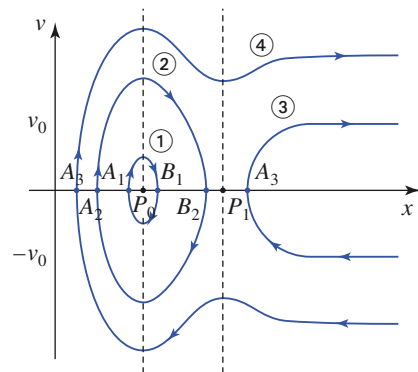
La trajectoire de phase d'un système conservatif à une dimension est une courbe à énergie mécanique constante.

Sur ces graphes, les points $P_0(x = x_0, v = 0)$ et $P_1(x = x_1, v = 0)$ représentent les positions d'équilibre du point matériel.

• *État lié* ①

Sur la trajectoire de phase, la particule reste confinée au voisinage de P_0 , qui représente la position d'équilibre ($x = x_0, v = 0$).

La trajectoire de phase contourne le point d'équilibre dans le sens horaire.



Doc. 10. Trajectoire de phase d'états liés et d'états de diffusion.

Les points $P_0(x_0, 0)$ et $P_1(x_1, 0)$ sont les points d'équilibre dans le plan de phase.

La trajectoire de phase est fermée, ce qui caractérise une *évolution périodique* du mobile qui oscille entre deux abscisses extrêmes accessibles (points A_1 et B_1).

Notons encore que cette trajectoire de phase du cas ① ressemble à une ellipse, comme pour un oscillateur harmonique (cf. chapitre 1), pour lequel la force de rappel vers la position d'équilibre est proportionnelle à l'écart à l'équilibre. Nous reviendrons sur cette approximation de rappel linéaire un peu plus loin en étudiant une technique de linéarisation du mouvement au voisinage de l'équilibre.

- **État lié** ②

L'évolution est semblable à celle du cas précédent. Cependant, la trajectoire de phase n'est plus du tout elliptique : les oscillations sont d'amplitude assez importante, et les oscillations ne sont plus harmoniques.

- **État de diffusion** ③

La trajectoire de phase n'est plus fermée : le mouvement cesse d'être périodique.

La particule peut, par exemple, venir de l'infini avec une vitesse $v = -v_0$, rebondir sur la barrière d'énergie potentielle, et retourner à l'infini avec la vitesse $v = +v_0$.

- **État de diffusion** ④

L'évolution correspond encore à un rebroussement simple de la trajectoire de mobile qui finit par s'éloigner pour ne plus revenir.

Nous visualisons ici très clairement la conservation de l'énergie mécanique du point matériel : lorsque l'énergie potentielle augmente, ce qui se produit en particulier lorsque l'abscisse approche la valeur x_1 , son énergie cinétique diminue. En effet, la trajectoire de phase se rapproche de l'axe (Ox), ce qui met en évidence un ralentissement du mobile.

4.5. Stabilité de l'équilibre

4.5.1. Point attracteur

Nous observons sur les trajectoires de phase du système que les points d'équilibre P_0 et P_1 ne sont pas équivalents : les trajectoires de phase contournent le point P_0 dans le sens horaire, tandis qu'elles tendent à éviter le point P_1 : le point P_0 est un *centre attracteur*, pas le point P_1 .

4.5.2. Équilibre stable, équilibre instable

L'état d'énergie \mathcal{E}_{M_1} correspond à des oscillations *au voisinage* de la position d'équilibre $x = x_0$, qui est une position d'équilibre stable.

Retrouvons ce fait en considérant la relation de conservation de l'énergie $\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P = \text{cte}$:

- Un point matériel lâché à l'abscisse x_0 sans vitesse initiale ne peut quitter cette position : l'énergie potentielle augmente au voisinage de $x = x_0$, et l'énergie cinétique ne peut donc pas croître.

Au contraire, l'énergie potentielle diminue au voisinage de $x = x_1$, de sorte que la moindre perturbation pourra provoquer le départ du point matériel abandonné à l'équilibre en $x = x_1$: le point matériel, immobile à l'abscisse x_1 sur la bosse d'énergie potentielle, tombe à gauche ou à droite à la moindre perturbation.

Un minimum (respectivement maximum) d'énergie potentielle correspond à une position d'équilibre stable (respectivement instable).

4.5.3. Technique de linéarisation

Essayons maintenant d'établir l'équation d'évolution du point matériel au voisinage de la position d'équilibre x_e . Pour cela, développons son énergie potentielle au voisinage de l'équilibre ($x \approx x_e$) :

$$\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_p(x_e) + \left(\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x}\right)_{(x_e)}(x - x_e) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial x^2}\right)_{(x_e)}(x - x_e)^2 + \dots$$

La position x_0 étant un équilibre : $\left(\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x}\right)_{(x_e)} = -F_x(x_e) = 0$.

Nous supposons, par la suite, que le terme d'ordre deux du développement n'est pas nul :

$$k = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial x^2}\right)_{(x_e)} \neq 0$$

ce qui permet d'écrire, au voisinage de l'équilibre :

$$\mathcal{E}_p(x) \approx \mathcal{E}_p(x_e) + \frac{k}{2}(x - x_e)^2 \quad \text{et} \quad F_x(x) = -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x} \approx -k(x - x_e)$$

dans ces conditions, l'équation d'évolution au voisinage de la position d'équilibre peut s'écrire :

$$m \frac{d^2(x - x_e)}{dt^2} = -k(x - x_e).$$

Le terme de force dépend linéairement de l'écart $x - x_e$ par rapport à la position d'équilibre : nous avons linéarisé l'équation du mouvement au voisinage de l'équilibre. Deux cas se présentent alors :

• Si $k < 0$: la fonction énergie potentielle présente un maximum en x_e .

Notant $\frac{t}{\tau} = \sqrt{-\frac{k}{m}}$, les solutions de l'équation du mouvement sont de la forme :

$$(x - x_e)_{(t)} = A e^{\frac{t}{\tau}} + B e^{-\frac{t}{\tau}}$$

où les constantes A et B sont fonctions des conditions initiales.

Nous voyons que cette évolution entraîne une divergence de la solution $x(t)$. L'approximation linéaire que nous venons d'effectuer cesse rapidement d'être valable, et il faut revoir l'équation du mouvement. Nous voyons tout de même que le mobile tend à fuir la position d'équilibre $x = x_e$, qui est *instable*.

• Si $k > 0$: la fonction énergie potentielle présente un minimum en x_e . Nous sommes en présence d'un oscillateur harmonique.

Notant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, les solutions de l'équation du mouvement sont de la forme :

$$(x - x_e)_{(t)} = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t).$$

Cette fois, le mobile oscille au voisinage de x_0 , à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: la position d'équilibre $x = x_e$ est *stable*.

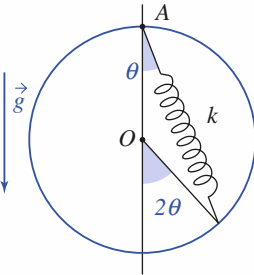
Ces résultats confirment les conclusions sur la stabilité déjà obtenues de façon plus générale.

La technique de linéarisation, lorsqu'elle est justifiée ($k \neq 0$), permet de préciser la nature du mouvement au voisinage de la position d'équilibre.

Application 3

Masse m se déplaçant sur un cercle et soumise à un ressort

Une masselotte, de masse m , peut coulisser sans frottements sur un cercle rigide de rayon R . À ce point matériel est fixée l'une des extrémités d'un ressort élastique sans masse, de raideur k , dont l'autre extrémité est attachée au point A du cercle. **Doc. 11.** Définition de θ . L'ensemble est disposé verticalement comme indiqué sur le document 11, puis la masselotte est libérée sans vitesse initiale à partir d'une position telle que le ressort soit tendu. Qu'observe-t-on ?



Utilisons l'angle θ défini sur le document comme paramètre d'étude.

La longueur totale du ressort à $\ell = 2R \cos \theta$, d'où son énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_{P_c} = \frac{1}{2}k(2R \cos \theta - \ell_0)^2.$$

L'énergie potentielle de pesanteur peut s'écrire :

$$\mathcal{E}_{P_p} = -mg\ell \cos \theta = -2mgR \cos^2 \theta.$$

En prenant l'énergie potentielle nulle en A (doc. 11) on a ainsi :

$$\mathcal{E}_P = \mathcal{E}_{P_p} + \mathcal{E}_{P_c} = \frac{1}{2}k[(2R \cos \theta - \ell_0)^2 - 2mgR \cos^2 \theta].$$

Il est conseillé pour cet exercice d'utiliser des grandeurs réduites α et β telles que $\ell_0 = 2R\alpha$ et $mg = \beta kR$. L'énergie potentielle totale devient alors :

$$\mathcal{E}_P = 2kR^2[(\alpha - \cos \theta)^2 - \beta \cos^2 \theta]$$

car $AM = 2R \cos \theta$ et $\mathcal{E}_{P_p} = -2mgR \cos^2 \theta$.

Nous pouvons alors étudier $\mathcal{E}_P(\theta)$:

$$\frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2} = 4kR^2 \sin \theta [\alpha - (1 - \beta) \cos \theta]$$

$$\text{et } \frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2} = 4kR^2[\alpha \cos \theta - (1 - \beta) \cos(2\theta)].$$

Les extrema utiles pour θ dans $[0, \frac{\pi}{2}]$ vérifient $\sin \theta = 0$ et $\cos \theta = \frac{\alpha}{(1 - \beta)}$.

• Si $\beta > 1$ ($mg > kR$), $\theta = 0$ est la seule position d'équilibre possible et $\frac{d^2\mathcal{E}_P}{d\theta^2}$, étant positive, cette position est stable.

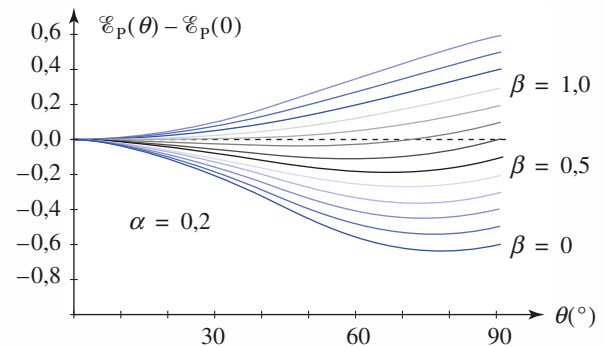
• Si $\beta < 1$ et si $\frac{\alpha}{(1 - \beta)} > 1$, donc $\alpha + \beta > 1$, il n'existe encore qu'une position d'équilibre.

$$\theta_1 = 0 \text{ et } \theta_2 = \arccos\left(\frac{\alpha}{(1 - \beta)}\right).$$

Nous pouvons vérifier que la dérivée seconde de \mathcal{E}_P est négative en θ_1 , et positive en θ_2 .

Cette dernière position est stable contrairement à la première. Le tracé des courbes $\mathcal{E}_P(\theta)$ pour diverses valeurs de α et β confirme ce résultat.

On peut retrouver quantitativement les résultats précédents sur le document suivant.



Doc. 12. Évolution de $\mathcal{E}_P(\theta) - \mathcal{E}_P(0)$ en fonction de θ ; $\alpha = 0,2$; β varie de 0 à 1,2 par pas de 0,1.

Remarque : L'axe (Oz) étant axe de symétrie, la position symétrique de θ_2 convient également.

CQFR

● **PUISSANCE, TRAVAIL D'UNE FORCE DANS UN RÉFÉRENTIEL**

• La puissance \mathcal{P} d'une force \vec{F} est égale au produit scalaire de cette force par la vitesse de déplacement de son point d'application :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

• Le travail \mathcal{T} d'une force est égal à $\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P} dt$. Il est égal à la circulation de \vec{F} .

● **THÉORÈMES DE LA PUISSANCE ET DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE**

• La puissance cinétique $\frac{d\mathcal{E}_K}{dt}$ (dérivée de l'énergie cinétique par rapport au temps) est égale à la puissance de toutes les forces s'exerçant sur le point matériel.

• La variation d'énergie cinétique $\Delta\mathcal{E}_K = \mathcal{E}_K(t_2) - \mathcal{E}_K(t_1)$ est égale au travail de toutes les forces pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$.

● **CHAMP DE FORCES CONSERVATIF**

Un champ de forces est conservatif s'il dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_P(\vec{r})$, telle que le travail élémentaire de la force vérifie :

$$\delta\mathcal{T} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -d\mathcal{E}_P.$$

● **ÉNERGIE MÉCANIQUE**

L'énergie mécanique d'un point matériel est $\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_P + \mathcal{E}_K$.

La variation de \mathcal{E}_M est égale au travail des forces qui ne dérivent pas de l'énergie potentielle, donc au travail des forces non conservatives.

● **MOUVEMENT CONSERVATIF À UN DEGRÉ DE LIBERTÉ**

L'équation du mouvement peut se déduire de $\mathcal{E}_M = \text{cte}$:

- l'évolution du point matériel est limitée aux zones où l'énergie potentielle reste inférieure à l'énergie mécanique : $\mathcal{E}_P(x) \leq \mathcal{E}_M$;
- les trajectoires de phase d'un système conservatif sont des courbes à énergie mécanique constante ;
- les *minima* de \mathcal{E}_P correspondent aux positions d'équilibre stables et les *maxima* aux positions d'équilibre instables. La technique de linéarisation, lorsqu'elle est justifiée, permet de préciser la nature du mouvement au voisinage de l'équilibre.

Contrôle rapide

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Définir la puissance d'une force, puis son travail.
- ✓ Le travail d'une force dépend-il du chemin suivi pour passer d'une position initiale à une position finale ? Existe-t-il des champs de force pour lesquels il n'en dépend pas ?
- ✓ Une force conservative dépend-elle explicitement du temps ?
- ✓ Quel est le lien entre une force conservative et l'énergie potentielle qui lui est associée ? Pourquoi qualifie-t-on cette énergie de « potentielle » ?
- ✓ Définir l'énergie mécanique d'un système matériel.
- ✓ À quelle condition cette énergie mécanique est-elle une constante du mouvement d'un point matériel ?
- ✓ Pour une évolution conservative, comment peut-on discuter graphiquement les zones, *a priori*, accessibles au mouvement ?
- ✓ Comment caractériser une position d'équilibre ? sa stabilité ?

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. Le travail d'une force de contact peut être :

- a. nul b. positif c. négatif.

2. L'énergie potentielle de pesanteur :

- a. augmente avec l'altitude
 b. diminue avec l'altitude.

3. L'énergie potentielle d'un ressort de longueur à vide ℓ_0 dont l'allongement est x est :

- a. $\frac{1}{2}kx^2$ b. $-\frac{1}{2}kx^2$
 c. $\frac{1}{2}k(x + \ell_0)^2$ d. $\frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2$.

4. La position d'équilibre z_0 stable du point matériel d'énergie potentielle $\mathcal{E}_P(z)$ et définie par :

a. $\left\{ \left(\frac{d\mathcal{E}_P}{dz} \right)_{z_0} > 0 ; \left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dz^2} \right)_{z_0} = 0 \right\}$

b. $\left\{ \left(\frac{d\mathcal{E}_P}{dz} \right)_{z_0} = 0 ; \left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dz^2} \right)_{z_0} > 0 \right\}$

c. $\left\{ \left(\frac{d\mathcal{E}_P}{dz} \right)_{z_0} = 0 ; \left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dz^2} \right)_{z_0} = 0 \right\}$

d. $\left\{ \left(\frac{d\mathcal{E}_P}{dz} \right)_{z_0} = 0 ; \left(\frac{d^2\mathcal{E}_P}{dz^2} \right)_{z_0} < 0 \right\}$.

► Solution, page 69.

Exercices

1 Lois de force

Imaginons que dans un certain domaine de l'espace contenant le point O , deux forces ne dépendent que du vecteur position $\vec{r} = \vec{OM}$ selon les lois

$$\vec{F}_1 = kx\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{F}_2 = ky\vec{e}_x$$

où k est une constante.

Nous admettons *a priori* l'éventualité de la réalisation physique de tels champs de force.

1) Montrer que \vec{F}_1 dérive d'une énergie potentielle \mathcal{E}_{P_1} qu'on exprimera avec le choix $\mathcal{E}_{P_1}(0) = 0$.

Vérifier, en visualisant les lignes de champ de \vec{F}_1 , que ce champ de force est à circulation conservative.

2) Constater, avec un contour rectangulaire très simple, que \vec{F}_2 n'est pas une force à circulation conservative.

Peut-on définir une énergie potentielle dont dériverait \vec{F}_2 ?

Calculer la circulation de \vec{F}_2 sur le cercle de centre O et de rayon R , contenu dans le plan (xOy) .

Que faut-il penser du résultat ?

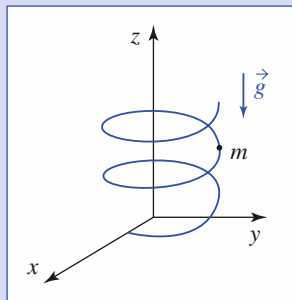
2 Mouvement d'une perle sur une hélice

On enfile des perles sur un fil métallique matérialisant une hélice circulaire d'axe (Oz) vertical ascendant et d'équations :

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta$$

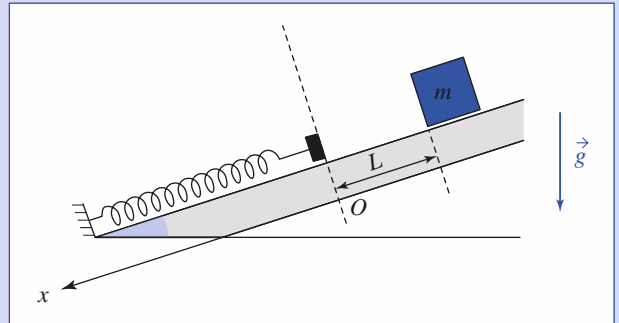
et $z = p\theta$, $p > 0$ étant le pas réduit de l'hélice.

La perle étant abandonnée sans vitesse initiale en un point de cote $z = h = p\theta_0$, étudier son mouvement ultérieur en l'absence de frottements : $z = f(t)$.



3 Le cube

On abandonne sans vitesse initiale un palet (un cube de masse m) sur un plan matériel lisse incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Le cube glisse alors sur la ligne de plus grande pente sur une distance L , avant de rencontrer un butoir solidaire d'un long ressort (idéal) de raideur k , disposé comme l'indique le schéma ci-après. (Les masses du ressort et du butoir sont négligeables.)



1) Déterminer la longueur dont le ressort est comprimé.
2) On recherche ici la position xv pour laquelle la vitesse du palet est maximale.

a) Cette position peut-elle correspondre à $x = 0$?

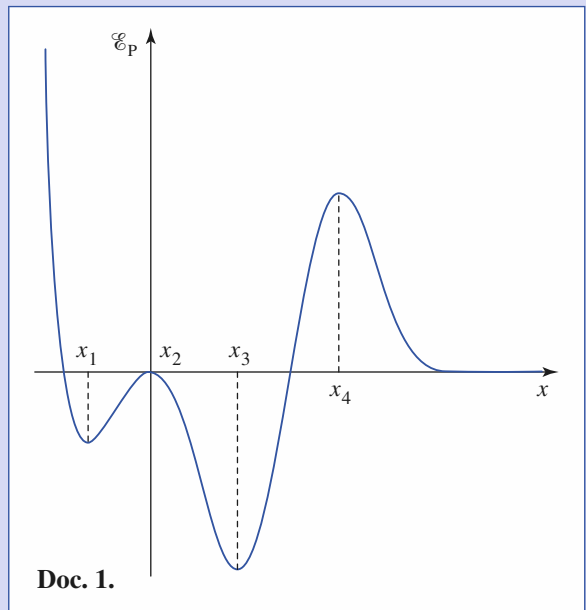
Pourquoi la vitesse maximale est-elle en fait atteinte un peu plus loin ? Donner, sans calcul superflu, l'abscisse de cette position.

b) Retrouver cette position par un raisonnement énergétique, ainsi que la vitesse maximale atteinte.

4 Renversement du temps

Une particule est assujettie à se déplacer sur l'axe (Ox) fixe dans un référentiel galiléen.

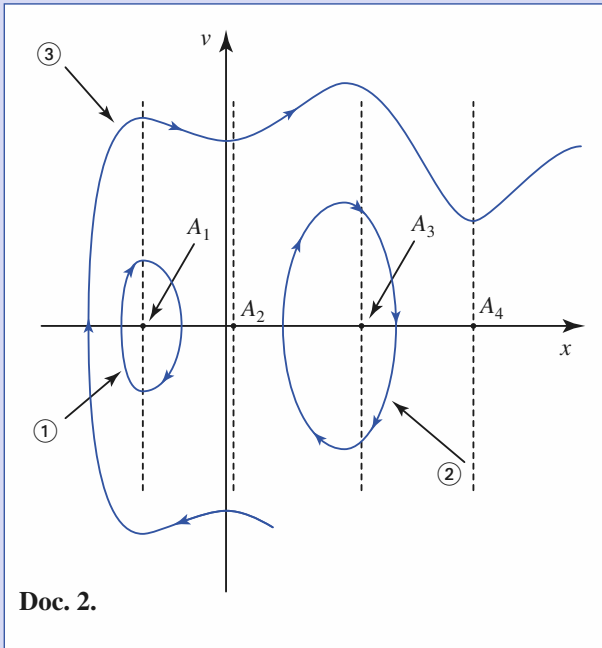
Elle est soumise à un champ de force conservative dérivant de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(x)$ dont l'allure des variations est donnée par le graphe suivant (*doc. 1*) :



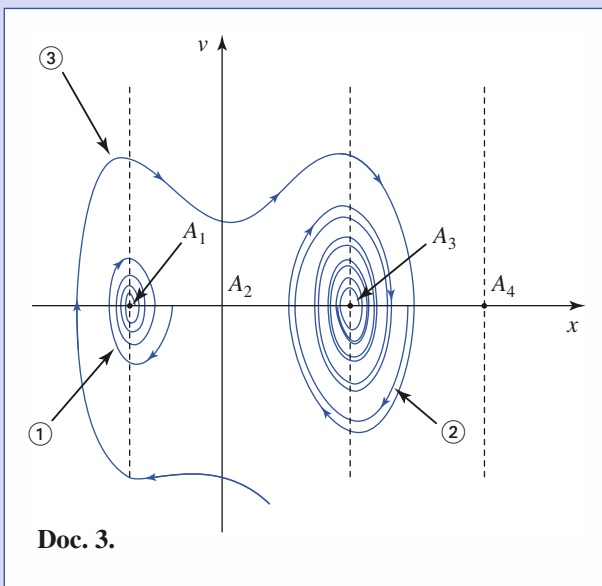
Doc. 1.

1) La figure suivante (*doc. 2*) indique quelques trajectoires de phase obtenues pour trois cas de conditions initiales.

Proposer quelques commentaires pour ces résultats. Les points A_i ($i = 1, \dots, 4$), d'abscisses x_i ($i = 1, \dots, 4$) peuvent-ils être qualifiés de « points attracteurs » pour ce système ?



2) La même particule est soumise, en plus du champ de force précédent, à une force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$.



a) Que dire de l'évolution de l'énergie mécanique de la particule ?

b) Proposer un commentaire des nouveaux résultats obtenus pour cette nouvelle situation, les trois conditions initiales ayant été reprises pour effectuer la simulation des nouvelles évolutions.

3) Étudions le cas particulier de la situation ②, en considérant les situations avec et sans frottement.

a) Quel est l'effet sur le renversement du temps (changement de variable $t \rightarrow -t$) sur la vitesse du mobile ?

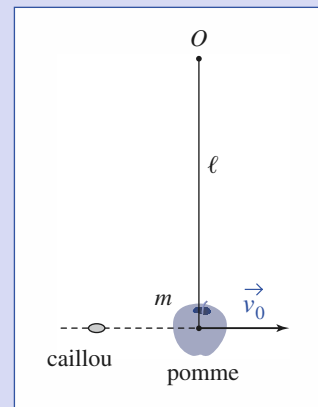
Quel type de transformation cela revient-il à effectuer sur sa trajectoire de phase ?

b) Comparer les effets de cette transformation sur les deux trajectoires envisagées.

c) On qualifie de réversible l'évolution d'un système quand celle-ci reste possible lorsque le sens dans lequel s'écoule le temps est inversé. Que dire des évolutions observées ici ?

5 Mouvements possibles d'un pendule

Une pomme est attachée à l'extrémité d'un fil de longueur ℓ fixé au point fixe O . On lance un caillou, à l'aide d'une lance-pierres, qui atteint la pomme, en s'y incrustant.



Le système {pomme-caillou} assimilé à un point matériel est alors animé, juste après le choc, d'une vitesse initiale \vec{v}_0 horizontale. Quels mouvements du pendule observe-t-on ? Établir que :

a) si $v_0 < (2g\ell)^{\frac{1}{2}}$, le mouvement est pendulaire,

b) si $(2g\ell)^{\frac{1}{2}} < v_0 < (5g\ell)^{\frac{1}{2}}$, il y a changement de nature du problème, la tension du fil s'annulant ;

c) si $v_0 > (5g\ell)^{\frac{1}{2}}$, le mouvement est révolutif.

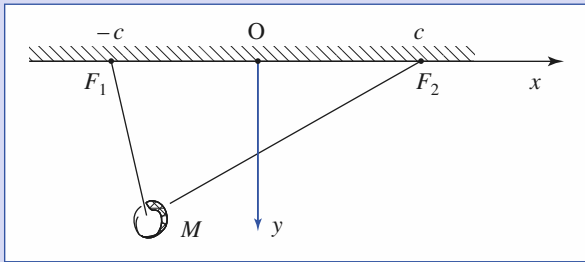
Exercices

6 Un pendule particulier

Une perle est enfilée sur un fil inextensible de longueur $2a$ dont les deux extrémités sont fixées en deux points F_1 et F_2 de l'axe horizontal (Ox) , aux abscisses $+c$ et $-c$.

La perle pouvant coulisser sans frottements sur le fil, étudier les petits mouvements décrits dans le plan vertical (xOy) lorsque la perle est très légèrement écartée de sa position d'équilibre.

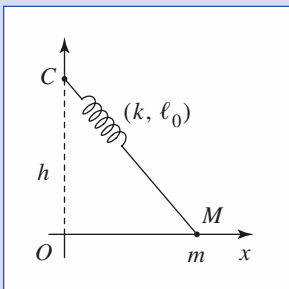
- 1) Quelle est la période des oscillations obtenues au voisinage de la position d'équilibre stable ?
- 2) Commenter le cas limite $a \gg c$.



7 Un oscillateur non harmonique

On dispose d'un ressort élastique de raideur k , de longueur naturelle ℓ_0 (longueur au repos) et de masse négligeable.

L'une des extrémités de ce ressort est reliée à un point C et l'autre à un anneau de masse m , couissant sans frottements sur un axe (Ox) horizontal dont la distance h au point C peut être réglée à volonté.



- 1) Que peut-on prévoir concernant le comportement du système pour les cas :
 - a) $\ell_0 < h$?
 - b) $\ell_0 > h$?

On envisagera d'abord une réponse intuitive, puis une étude graphique de l'énergie potentielle de ce système à évolution conservative pour vérifier ces affirmations.

- 2) Le cas $\ell_0 = h$ est un cas limite intéressant correspondant à des oscillations qualifiées d'anharmoniques, car non sinusoïdales. Ayant réglé la distance OC pour se trouver dans une telle situation, on abandonne sans vitesse initiale l'anneau à la distance $x = a$ du point O , avec $a \ll \ell_0$.
 - a) Montrer que l'intégrale première de l'énergie cinétique se simplifie en :

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{k}{8\ell_0^2} (a^4 - x^4)$$

après un développement limité à l'ordre le plus bas de l'énergie potentielle.

- b) En déduire que la période d'un tel mouvement est de la forme :

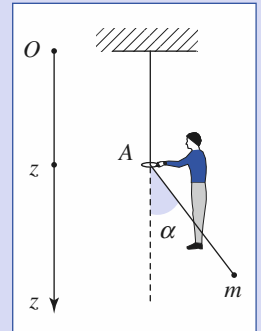
$$T = 8I \left(\frac{\ell_0}{a} \right) \left(\frac{m}{k} \right)^{\frac{1}{2}}$$

où I est une intégrale que l'on détermine numériquement et valant environ 1,31.

- c) La période d'un oscillateur harmonique dépend-elle de l'amplitude de ses oscillations ? Qu'en est-il ici ? Commenter.

8 Pendule simple de longueur lentement variable

Soit un fil inextensible (longueur L) auquel est accrochée une masse m ponctuelle. Un opérateur maintient un petit anneau de masse négligeable à l'altitude z (le fil passe dans cet anneau).



- 1) Étudier le mouvement de la masse m (petites oscillations).
- 2) Exprimer l'énergie de l'oscillateur en fonction de l'amplitude θ_{0z} de ses oscillations.

- 3) On désigne par \vec{R} la force exercée par l'opérateur pour maintenir l'anneau en place.

Montrer que sa moyenne temporelle peut s'écrire :

$$\langle \vec{R} \rangle = mg \frac{\theta_{0z}^2}{4} \vec{e}_z$$

- 4) L'opérateur déplace très lentement l'anneau (temps caractéristique très supérieur à la période des oscillations). En évaluant $\delta \mathcal{J}_{\text{op}}$ associé à un déplacement dz de l'anneau, établir une relation liant l'énergie du pendule et sa pulsation ω d'oscillation.

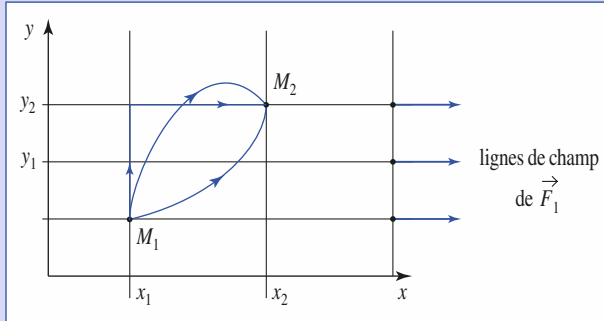
Corrigés

Solution du tac au tac, page 65.

1. Vrai : a, b, c
2. Vrai : a Faux : b
3. Vrai : a Faux : b, c, d
4. Vrai : b Faux : a, d, Manque d'information pour conclure : c

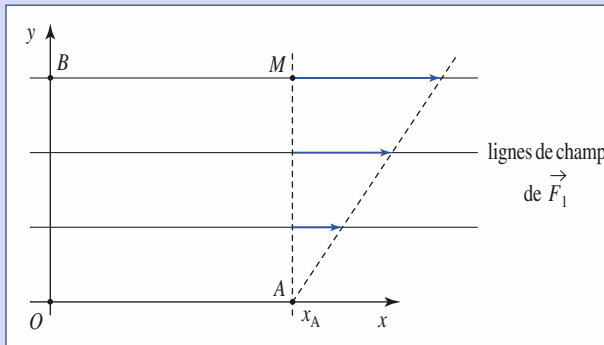
1 $\vec{F}_1 = kx\vec{e}_x$, d'où :

$$\mathcal{E}_{P_1} = -\frac{1}{2}kx^2$$



$$\int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_1 d\vec{M} = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \mathcal{E}_{P_1}(x) - \mathcal{E}_{P_1}(x_1), \text{ quel que soit le chemin suivi.}$$

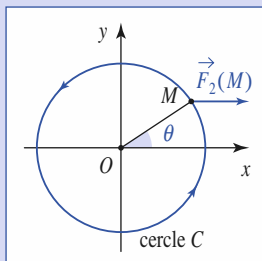
2) La circulation de \vec{F}_2 sur le trajet OAM est nulle, alors que sur le trajet OBM , elle est égale à $k y_B x_A \neq 0$: \vec{F}_2 n'est pas à circulation conservative.



On ne peut pas associer d'énergie potentielle à \vec{F}_2 .

$$\oint_C \vec{F}_2(M) d\vec{M} = \int_0^{2\pi} -ky \sin \theta R d\theta = -\pi k R^2.$$

Le travail est non nul et dépend du contour choisi.



2 En l'absence de frottement, seul le poids travaille. Celui-ci dérive de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p = mgz$.

La conservation de l'énergie mécanique de la perle s'écrit :

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = mgh.$$

La vitesse est : $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z = \dot{z}\left(-\frac{R}{p}\sin\theta\vec{e}_x + \frac{R}{p}\cos\theta\vec{e}_y + \vec{e}_z\right)$

La conservation de l'énergie mécanique devient donc :

$$\frac{1}{2}m\left(1 + \frac{R^2}{p^2}\right)\dot{z}^2 + mgz = mgh.$$

Par dérivation par rapport au temps, il vient :

$$\left(1 + \frac{R^2}{p^2}\right)\ddot{z} = -g.$$

À $t = 0$, $z = h$ et $\dot{z} = 0$, donc par intégration :

$$z(t) = -\frac{gt^2}{2\left(1 + \frac{R^2}{p^2}\right)} + h.$$

3 **1)** Le palet est en mouvement sans frottement sur le plan incliné. Les seuls efforts qui travaillent sont le poids du palet et la réaction du ressort (lorsqu'il est comprimé), qui dérivent des énergies potentielles respectives :

$$\mathcal{E}_{P(\text{pesanteur})} = -mgx \sin \alpha \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{P(\text{élastique})} = \frac{1}{2}kx^2.$$

L'énergie mécanique \mathcal{E}_M est une constante du mouvement qui peut s'écrire à divers instants :

- lorsque le palet démarre : $\mathcal{E}_M = mgL \sin \alpha$;
- lorsqu'il atteint $x = 0$: $\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}mv_0^2$;
- lorsqu'il a atteint l'abscisse $x > 0$:

$$\mathcal{E}_M = -mgx \sin \alpha + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

La compression maximale ($v = 0$) est donc donnée par :

$$mgL \sin \alpha = -mgx_M \sin \alpha + \frac{1}{2}kx_M^2$$

soit, en prenant la solution positive de cette équation du second degré en x_M :

$$x_M = a + \sqrt{a^2 + 2aL} \text{ en notant } a = \frac{mg \sin \alpha}{k}.$$

2) a) Lorsque le palet descend, c'est la projection du poids sur le plan incliné qui l'accélère. Cette action est constante et le palet accélère jusqu'à ce qu'il touche le ressort.

Lorsque le ressort commence à être comprimé, sa réaction s'oppose à la progression du palet, mais ne l'emporte pas encore sur l'action du poids. Le palet accélère donc jusqu'à l'abscisse x_v où les actions du ressort et du poids se compensent :

$$mg \sin \alpha = kx_v, \text{ soit } x_v = a.$$

b) La conservation de l'énergie nous donne :

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}kx^2 + mg(L+x) \sin \alpha.$$

La vitesse, fonction de x , est maximale lorsque :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2 + mg(L+x) \sin \alpha\right) = 0$$

ce qui redonne bien $x_v = a$, et la vitesse maximale atteinte est :

$$v_{\max} = \sqrt{(2L+a)g \sin \alpha},$$

qui est supérieure à la vitesse $v_0 = \sqrt{2Lg \sin \alpha}$ atteinte lorsque le palet rencontre le ressort.

Corrigés

4

1) Notons \mathcal{E}_{m_1} et \mathcal{E}_{m_3} les minima d'énergie potentielle atteints en x_1 et x_3 , \mathcal{E}_{M_2} et \mathcal{E}_{M_4} les maxima atteints en x_2 et x_4 .

Les simulations proposées font apparaître deux trajectoires fermées, donc deux cas d'évolutions cycliques : dans ces deux cas, l'énergie du point matériel est assez faible pour que celle-ci soit dans un état lié.

Elle reste confinée au fond de la cuvette d'énergie potentielle « centrée » en x_1 pour le cas ① pour lequel :

$$\mathcal{E}_{m_1} \leq \mathcal{E}_M \leq \mathcal{E}_{M_2},$$

et au fond de la cuvette d'énergie potentielle « centrée » en x_3 pour le cas ② pour lequel :

$$\mathcal{E}_{m_3} \leq \mathcal{E}_M \leq \mathcal{E}_{M_2}.$$

Le cas ③ correspond à un état de diffusion, d'énergie plus élevée, puisque la particule finit par s'échapper des deux cuvettes précédentes :

$$\mathcal{E}_{M_4} \leq \mathcal{E}_3.$$

Les deux premiers font apparaître les points d'équilibre stables (minima d'énergie potentielle) représentés par A_1 et A_3 dans le plan de phase comme des points attracteurs autour desquels les trajectoires de phase ont tendance à tourner dans le sens horaire (lorsque c'est possible). En revanche, l'énergie potentielle est maximale aux points A_2 et A_4 qui représentent des équilibres instables que les trajectoires de phase tendent à éviter.

2) a) L'énergie cinétique du point matériel évolue :

$$\frac{d\mathcal{E}_K}{dt} = m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \cdot (\vec{F} + \vec{f}) = -\frac{d\mathcal{E}_K}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} - \lambda v^2 = \frac{d\mathcal{E}_P}{dt} - \lambda v^2$$

soit encore :

$$\frac{d\mathcal{E}_M}{dt} = -\lambda v^2 < 0.$$

L'énergie mécanique de la particule diminue du fait des frottements.

b) La particule perd de l'énergie et se retrouve piégée au fond d'une cuvette d'énergie potentielle, ce qui est aisément observable pour les deux premiers cas. Nous constatons que pour les conditions initiales du cas ③, l'énergie initiale du point matériel lui permet d'échapper à la cuvette « centrée » en x_1 , mais qu'il perd trop d'énergie et n'arrive pas à s'échapper de la cuvette « centrée » en x_3 .

3) a) Le renversement du temps provoque le changement de signe de la vitesse. Ceci revient, dans le plan de phase, à effectuer une symétrie par rapport à (Ox) .

b) Cette symétrie ne modifie que le sens de parcours de la trajectoire cyclique obtenue en l'absence de frottement. En revanche, lorsque les frottements sont pris en compte, la trajectoire n'est plus symétrique par rapport à l'axe (Ox) .

c) L'évolution sans frottement est réversible, ce n'est pas le cas lorsque les frottements entrent en jeu.

5

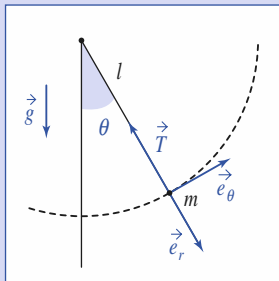
Étudions la tension T du fil supposé tendu. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à la masse m donne :

$$v^2 = v_0^2 - 2g\ell(1 - \cos\theta).$$

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la masse m donne (en projection sur \vec{e}_r) :

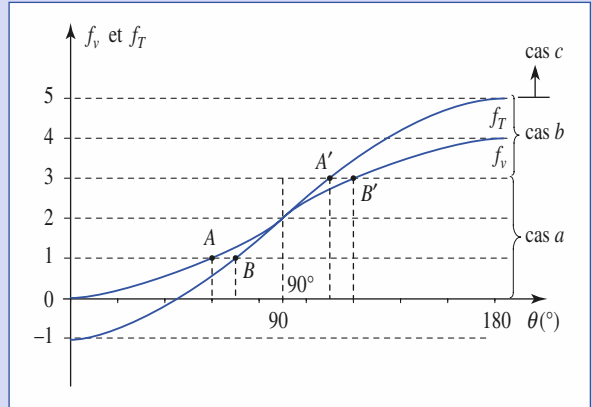
$$-m\frac{v^2}{\ell} = mg\cos\theta - T$$

soit $T = m\left[\frac{v_0^2}{\ell} + g(3\cos\theta - 2)\right]$.



• v s'annule quand $\frac{v_0^2}{g\ell} = f_v = 2(1 - \cos\theta)$.

• T s'annule quand $\frac{v_0^2}{g\ell} = f_T = 2 - 3\cos\theta$.



Traçons sur le même graphique f_v et f_T pour θ variant de 0° à 180° :

a) $0 < \frac{v_0^2}{g\ell} < 2$: la vitesse v s'annule avant la tension T , le mouvement est pendulaire.

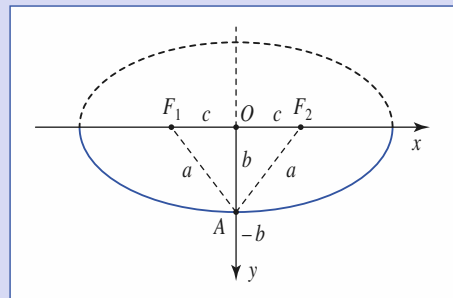
b) $0 < \frac{v_0^2}{g\ell} < 5$: la tension T s'annule avant la vitesse v , le fil n'est plus tendu : la masse retombe en chute libre jusqu'à ce que le fil soit à nouveau tendu...

c) $\frac{v_0^2}{g\ell} > 5$: $T > 0$, il y a mouvement révolutif (la vitesse v ne s'annule jamais).

6

1) La longueur du fil est : $2a = F_1M + F_2M$, ce qui définit une ellipse dont F_1 et F_2 sont les foyers. Son équation cartésienne est :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $2a = 2\sqrt{b^2 + c^2}$ (en utilisant la longueur des deux brins lorsque $x = 0$) (doc. ci-dessous).



La seule force qui travaille est le poids, qui dérive de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_P = -mgy + \text{cte}$ (l'axe y est orienté vers le bas). Celle-ci est minimale en A pour $x = 0$, position d'équilibre stable :

$$\mathcal{E}_P = -mgb\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + \text{cte}.$$

L'énergie cinétique de la perle est :

$$\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Raisonnons au voisinage de l'équilibre ($x = 0, y = -b$) :

$$\mathcal{E}_P \approx -mgb + \frac{1}{2}mgb\frac{x^2}{a^2} + \text{cte, et}$$

$$\mathcal{E}_K \approx \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \text{ (y passe par un extremum donc : } |dy| \ll |dx| \text{)}.$$

L'intégrale première de l'énergie nous donne donc :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mgb\frac{x^2}{a^2} = \text{cte.}$$

Par dérivation, nous obtenons l'équation des petites oscillations :

$$\ddot{x} + \frac{gb}{a^2}x = 0.$$

Nous reconnaissons une équation d'oscillateur harmonique de période :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{gb}}.$$

2) Pour $a \gg c, b = \sqrt{a^2 - c^2} \approx a$, et $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, ce qui correspond fort logiquement à la période d'oscillation d'un pendule simple de longueur a .



1) a) Si $\ell_0 < h$, le ressort est déjà tendu si M est en 0, et encore plus étiré lorsque $x \neq 0$: il est clair que la position $x = 0$ est position d'équilibre stable.

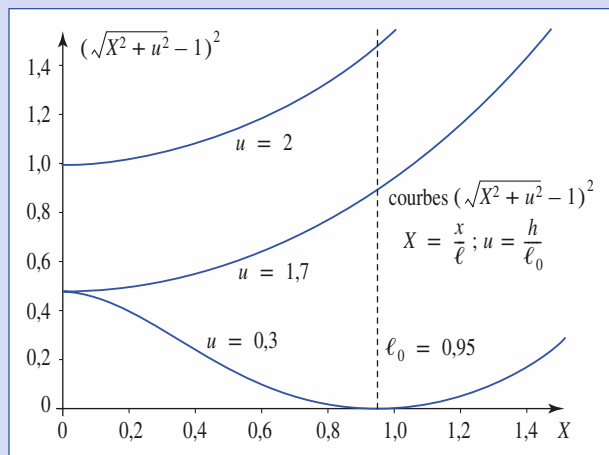
b) Si $\ell_0 > h$, il y a deux positions de M , de part et d'autre de 0, par lesquelles le ressort est au repos.

Plus près de 0, le ressort est comprimé (cette compression est maximale en 0, position d'équilibre instable) ; plus loin, il est étiré. Les deux positions pour lesquelles $x^2 + h^2 = \ell_0^2$ sont des positions d'équilibre stable.

Vérifions ces discussions intuitives par l'étude de la fonction énergie potentielle élastique :

$$\mathcal{E}_P(x) = \frac{1}{2}h(\sqrt{x^2 + h^2} - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k\ell_0^2(\sqrt{X^2 + u^2} - 1)^2,$$

en notant $X = \frac{x}{\ell_0}$ et $u = \frac{h}{\ell_0}$.



Le tracé de $f_n(X) = (\sqrt{X^2 + u^2} - 1)^2$ confirme les prévisions précédentes :

- si $\ell_0 < h$, soit $u > 1$, la fonction est minimale en $X = 0$: le point O est une position d'équilibre stable ;

- si $\ell_0 > h$, soit $u < 1$, la fonction présente un maximum local en $X = 0$, position d'équilibre instable, et passe par un minimum nul (le ressort est au repos) en $X = \sqrt{1 - u^2}$ (et aussi en $X = -\sqrt{1 - u^2}$) qui constitue une position d'équilibre stable.

2) a) Si $\ell_0 = h$, l'énergie potentielle élastique devient :

$$\mathcal{E}_P(x) = \frac{1}{2}h\ell_0^2\left(\sqrt{\left(\frac{x}{\ell_0}\right)^2 + 1} - 1\right)^2.$$

L'amplitude du mouvement étant faible, nous pouvons développer cette expression à l'ordre le plus bas non nul en $\frac{x}{\ell_0}$, ce qui donne :

$$\mathcal{E}_P(x) \approx \frac{1}{2}k\ell_0^2\left[\frac{1}{4}\left(\frac{x}{\ell_0}\right)^4\right].$$

L'intégrale première de l'énergie devient alors :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k\ell_0^2\left[\frac{1}{4}\left(\frac{x}{\ell_0}\right)^4\right] = \frac{1}{2}h\ell_0^2\left[\frac{1}{4}\left(\frac{a}{\ell_0}\right)^4\right],$$

ce qui conduit au résultat proposé :

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{k}{8\ell_0^2}(a^4 - x^4).$$

b) Le point matériel M effectue des oscillations d'amplitude a . Constatons que sa vitesse est la même, en norme, à l'abscisse x ou $-x$, qu'il aille de gauche à droite ou de droite à gauche.

Il met donc le même temps pour aller de $x = 0$ à $x = a$, pour aller de $x = a$ à $x = 0$, pour aller de $x = 0$ à $x = -a$, pour aller de $x = -a$ à $x = 0$, soit, à chaque fois, le quart de la période d'oscillation : $\frac{T}{4}$.

Considérons, par exemple, l'évolution de $x = 0$ à $x = a$, pour laquelle

$$\frac{dx}{dt} = +\sqrt{\frac{k}{4m\ell_0^2}}(a^4 - x^4).$$

Nous avons :

$$\frac{T}{4} = \int_{x=0}^{x=a} dt = \int_{x=0}^{x=a} \frac{dx}{x} = \sqrt{\frac{4m\ell_0^2}{k}} \int_{x=0}^a \frac{dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}.$$

Notons $x = au$, u variant de 0 à 1 pour l'évolution concernée, nous obtenons :

$$I = 8\sqrt{\frac{m\ell_0}{k} \frac{1}{a}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}},$$

l'intégrale correspondant au facteur I de l'énoncé.

c) Pour un oscillateur harmonique, l'équation d'évolution est de la forme $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = 0$, et la période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ de ces oscillations ne dépend pas de leur amplitude a .

Dans le cas que nous étudions ici, nous pouvons obtenir l'équation du mouvement par dérivation de l'intégrale première de l'énergie. Nous obtenons ainsi :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{\ell_0^2}x^3 = 0.$$

Nous voyons que le rappel de cet oscillateur n'est pas linéaire, mais en x^3 : ce n'est pas un oscillateur harmonique.

Corrigés

Lorsque l'amplitude a des oscillations diminue, le terme de rappel diminue donc beaucoup plus vite que dans le cas d'un rappel linéaire : à inertie équivalente, la période de l'oscillateur sera donc plus importante que celle, constante, du cas harmonique : nous avons en effet observé que la période T est d'autant plus grande que a est petit :

$$T = \text{cte} \times \frac{1}{a}.$$

8

1) L'énergie cinétique du pendule est :

$$\mathcal{E}_K = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2, \text{ avec } \ell = L - z.$$

Son énergie potentielle de pesanteur vaut :

$$\mathcal{E}_P = mg(\ell - \ell \cos \theta) \approx \frac{1}{2} mg \ell \theta^2, \text{ en prenant l'origine au repos du pendule.}$$

L'équation des petits mouvements est alors :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0, \text{ ce qui correspond à des oscillations sinusoïdales de pulsation}$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \sqrt{\frac{g}{L-z}}.$$

2) Notons $\theta = \theta_{0z} \cos(\omega t + \varphi)$, il vient :

$$\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P = \frac{1}{2} m (L-z)^2 \omega_z^2 \theta_{0z}^2.$$

3) En raisonnant au niveau de la masse m , nous écrivons :

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{T}.$$

En raisonnant au niveau de l'anneau, nous avons : $\vec{0} = \vec{R} - \vec{T} + \vec{T}'$, avec $\vec{T}' = T \vec{e}_z$, et $T = \|\vec{T}\|$.

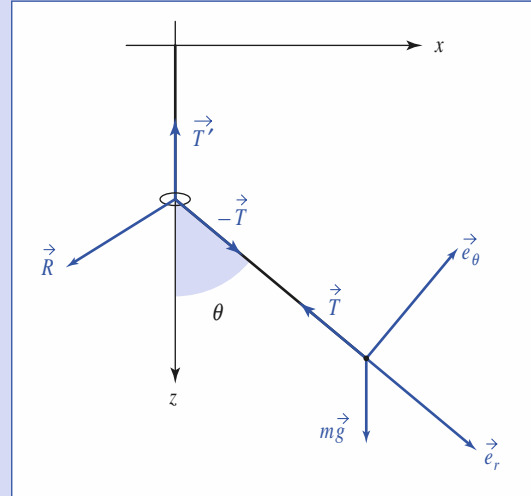
Nous écrivons donc :

$$\vec{R} = T(-\vec{e}_r + \vec{e}_z),$$

dont la composante horizontale est nulle en moyenne du fait des oscillations.

Pour de petits mouvements :

$$\begin{cases} (-\vec{e}_r + \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z = -\cos \theta + 1 \approx \frac{\theta^2}{2} \\ T = m(\vec{g} - \vec{a}) \cdot \vec{e}_r = mg(1 + \text{ordre } \theta^2 \text{ ou } \dot{\theta}^2) \end{cases}$$



de sorte que nous avons :

$$R_z \approx +mg \frac{\theta^2}{2} \text{ et } \langle \vec{R} \rangle \approx mg \frac{\theta_{0z}^2}{4} \vec{e}_z.$$

$$4) \delta \mathcal{T}_{\text{op}} = \langle \vec{R} \rangle \cdot dz \vec{e}_z = mg \frac{\theta_{0z}^2}{4} dz = \frac{1}{2L-z} \mathcal{E}_M dz.$$

La variation d'énergie du pendule est alors donnée par : $d\mathcal{E}_M = \delta \mathcal{T}_{\text{op}}$, soit

$$\frac{d\mathcal{E}_M}{\mathcal{E}_M} = \frac{1}{2L-z} dz = \frac{d\omega_z}{\omega_z}, \text{ et donc : } \frac{\mathcal{E}_M}{\omega_z} = \text{cte.}$$

Lorsque l'anneau est descendu, la pulsation des oscillations augmente (le pendule est plus court) et son énergie fait de même.

Mouvement libre d'un oscillateur harmonique

4

Introduction

Le premier oscillateur harmonique qui ait fait l'objet d'une expérimentation est, selon la tradition, le lustre de la cathédrale de Pise.

C'est en observant son balancement que Galilée (1564-1642) découvrit, à l'âge de dix-neuf ans, les lois du mouvement pendulaire.

Ce problème des petits mouvements d'un système autour d'une position d'équilibre stable se pose dans toutes les branches de la physique. Il est tout à fait remarquable qu'il relève d'un modèle physique et d'un traitement mathématique indépendants de la nature particulière des systèmes étudiés.

Le modèle physique est constitué par l'oscillateur harmonique, objet d'étude de ce chapitre.

Quant au traitement mathématique, c'est celui des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

Remarque

Dans ce chapitre, le référentiel utilisé est galiléen et toutes les dérivations temporelles se rapportent à ce référentiel.

O B J E C T I F S

- Définir le modèle de l'oscillateur harmonique.
- Étudier son mouvement et les limites du modèle.
- Étudier son évolution en présence d'un frottement fluide.

P R É R E Q U I S

- **Physique**
 - Énergie potentielle.
 - Intégrale première de l'énergie.
 - Frottement fluide.
- **Mathématiques**
 - Équations du second degré à coefficients réels.
 - Développement limité.

Oscillateur harmonique

1.1. Équation du mouvement

Considérons un point matériel de masse m évoluant dans un champ de forces conservatives dérivant d'une énergie potentielle \mathcal{E}_p . Son équation d'évolution en référentiel galiléen est :

$$m \vec{a} = \vec{F}.$$

Par la suite, nous nous limiterons à un système à un degré de liberté dont les mouvements sont repérés par la variable x , soit :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = 0.$$

Choisissons l'origine $x = 0$ en une position d'équilibre. En ce point, la force s'annule, et la fonction énergie potentielle est stationnaire :

$$F_{(x=0)} = -\left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}\right)_{(x=0)} = 0.$$

Nous supposons que la dérivée seconde de la fonction énergie potentielle est non nulle à l'équilibre, notée :

$$k = -\left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}\right)_{(x=0)} \neq 0.$$

Nous savons que l'équilibre est stable si l'énergie potentielle passe par un *minimum* en ce point, donc pour $k > 0$.

Développons la fonction énergie potentielle au voisinage de $x = 0$, nous avons :

$$\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_p(0) + x \left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}\right)_{(x=0)} + \frac{x^2}{2} \left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}\right)_{(x=0)} + \dots$$

Pour des évolutions au voisinage de la position d'équilibre $x = 0$, nous nous contenterons du terme parabolique (*doc. 1*) :

$$\mathcal{E}_p(x) \approx \mathcal{E}_p(0) + \frac{1}{2} k x^2.$$

La force subie par le mobile s'assimile ainsi à un rappel linéaire vers la position d'équilibre stable :

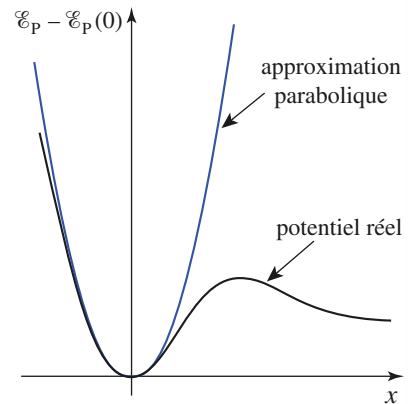
$$F(x) \approx -k x.$$

Et l'équation du mouvement devient celle d'un oscillateur harmonique :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k x$$

ou bien :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$



Doc. 1. Approximation parabolique de l'énergie potentielle au voisinage de l'équilibre.

L'oscillateur harmonique à un degré de liberté évolue dans un puits de potentiel parabolique :

$$\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_p(0) + \frac{1}{2} k x^2.$$

Il est soumis à une force de rappel linéaire :

$$F(x) = -k x.$$

Son équation du mouvement est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Nous pourrions retrouver des situations analogues dans de nombreuses situations physiques : systèmes mécaniques, électriques, acoustiques, thermodynamiques, etc.

Les expressions obtenues résultent d'approximations (« petits » mouvements au voisinage de l'équilibre), pour l'étude d'un mouvement conservatif (en particulier, l'absence de frottement) : *l'oscillateur harmonique est un modèle.*

1.2. Oscillations harmoniques

La solution générale de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

est une combinaison linéaire de deux solutions particulières linéairement indépendantes, d'où :

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t)$$

où A_1 et A_2 sont des constantes d'intégration que l'on déterminera à partir des conditions initiales :

$$x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = v_0.$$

Après avoir formulé $v = \frac{dx}{dt}$ et exprimé les conditions initiales, on a :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

qui peut encore s'écrire :

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

où x_m ($x_m > 0$), l'amplitude d'oscillation et φ , la phase à l'origine, sont les nouvelles expressions des constantes d'intégration.

En développant cette dernière expression et en identifiant les facteurs de $\cos(\omega_0 t)$ et de $\sin(\omega_0 t)$ avec ceux de l'expression précédente, on obtient :

$$x_m \cos \varphi = x_0 \quad \text{et} \quad x_m \sin \varphi = -\frac{v_0}{\omega_0}$$

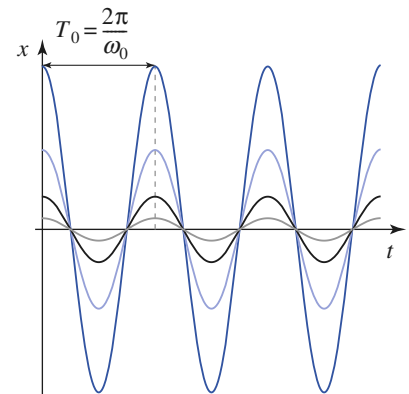
d'où $x_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$, $\tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}$ et $\cos \varphi$ est du signe de x_0 .

La période, appelée période propre des oscillations de l'oscillateur est :

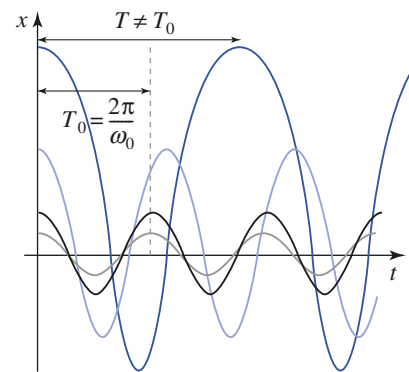
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Cette période est indépendante de l'amplitude des oscillations. Il y a *isochronisme des oscillations* (doc. 2).

Pour les grandes amplitudes d'oscillations, la fonction énergie potentielle réelle s'écarte de son approximation parabolique (doc. 1). Ainsi, pour des conditions initiales qui conduisent encore à des oscillations (plus ou moins symétriques) autour de la position d'équilibre stable $x = 0$, nous constaterons des écarts entre la période réelle d'oscillation T et sa valeur T_0 obtenue à la limite des petites oscillations (doc. 3).



Doc. 2. Isochronisme des oscillations de l'oscillateur harmonique.

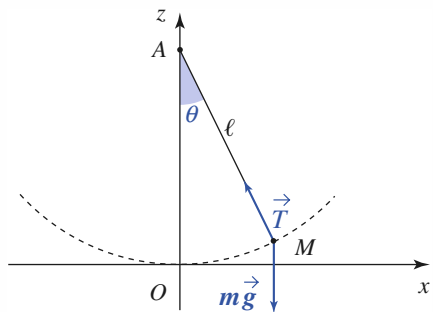


Doc. 3. La période des oscillations anharmoniques varie avec leur amplitude : ici, elle augmente.

Application 1

Pendule simple

Calculer la période des petites oscillations d'un pendule de longueur ℓ et de masse m (doc. 4) en utilisant la conservation de l'énergie.



Doc. 4. Pendule simple.

Le système est conservatif, car les frottements sont négligés, le travail de la force de tension est nul et enfin le poids dérive de l'énergie potentielle ; en posant par convention $\mathcal{E}_p(0) = 0$, nous obtenons :

$$\mathcal{E}_p = mg\ell(1 - \cos\theta).$$

Au voisinage de la position d'équilibre, $\theta = 0$; un développement limité au deuxième ordre de $\cos\theta$ permet d'écrire :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mg\ell\theta^2$$

ce qui est l'équation d'un puits de potentiel parabolique (doc. 5).

L'énergie mécanique \mathcal{E}_M est, par suite :

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mg\ell\theta^2.$$

C'est un invariant du mouvement dont la valeur est déterminée par les conditions initiales.

Dérivons \mathcal{E}_M par rapport au temps :

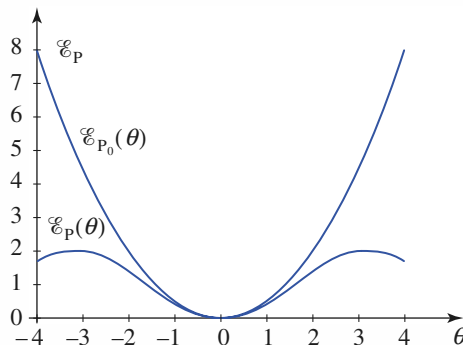
$$\frac{d\mathcal{E}_M}{dt} = m\ell\dot{\theta}(\ell\ddot{\theta} + g\theta) = 0.$$

En éliminant la solution parasite $\dot{\theta} = 0$, il reste l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0, \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

Un pendule simple oscillant à faible amplitude est un oscillateur harmonique de période propre :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$



Doc. 5. Énergie potentielle $\mathcal{E}_p(\theta)$ d'un pendule simple et sa partie parabolique $\mathcal{E}_{p_0}(\theta)$ au voisinage de sa position d'équilibre.

1.3. Portrait de phase

La position et la vitesse de l'oscillateur harmonique s'écrivent :

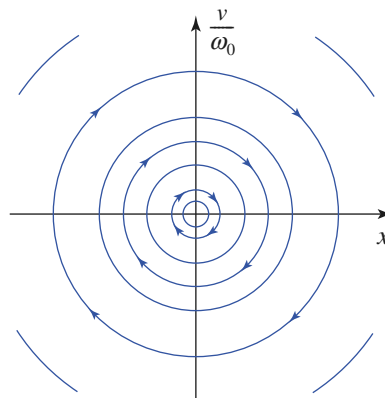
$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

de sorte que dans le plan de phase (x, v) , la trajectoire de phase de l'oscillateur harmonique décrit une ellipse d'équation :

$$\left(\frac{x}{x_m}\right)^2 + \left(\frac{v}{\omega_0 x_m}\right)^2 = 1.$$

Celle-ci peut même se ramener à un cercle de rayon x_m si nous portons la variable $\frac{v}{\omega_0}$ sur l'axe des ordonnées (doc. 6).

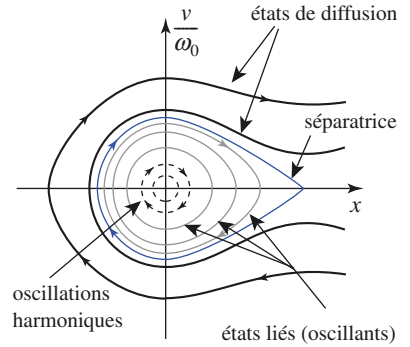
Pour le mobile évoluant dans le champ de forces réel, nous observons des écarts à l'oscillateur harmonique (doc. 7). Les trajectoires correspondant à des oscillations périodiques sont encore fermées, mais leur forme s'écarte du cercle décrit par l'oscillateur harmonique, d'autant plus nettement que leur amplitude augmente.



Doc. 6. Trajectoires de phase circulaires de l'oscillateur harmonique (axes orthonormés).

Le caractère circulaire de la trajectoire de phase tracée dans les axes $(O ; x, \frac{v}{\omega_0})$ permet un test visuel simple du caractère harmonique d'un oscillateur.

Rappelons qu'il est encore possible d'observer des évolutions où le mobile possède une énergie suffisante pour échapper à la cuvette d'énergie potentielle. La trajectoire de phase limite séparant les états liés (oscillations plus ou moins harmoniques) et les états de diffusion est appelée *séparatrice* (doc. 7).



Doc. 7. Trajectoires de phase de l'oscillateur réel.

1.4. Étude énergétique

1.4.1. Énergie mécanique

Convenons de prendre comme origine des énergies potentielles la position d'équilibre $x = 0$, soit : $\mathcal{E}_p(0) = 0$.

Dans ces conditions, l'énergie de l'oscillateur harmonique s'écrit :

$$\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

Le mouvement est conservatif, \mathcal{E}_M est donc une constante du mouvement que nous pouvons calculer à l'aide des expressions de $x(t)$ et $v(t)$:

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}mx_m^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0t + \varphi) + \frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega_0t + \varphi) = \frac{1}{2}kx_m^2.$$

L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique est constante et sa valeur est proportionnelle au carré de l'amplitude x_m des oscillations.

$$\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P = \frac{1}{2}kx_m^2.$$

1.4.2. Équipartition de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique

À l'instant t , les énergies cinétique et potentielle de l'oscillateur sont :

$$\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mx_m^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0t + \varphi)$$

$$\mathcal{E}_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0t + \varphi).$$

Ces énergies varient au cours du temps, leur somme \mathcal{E}_M restant constante. *Durant le mouvement, il y a échange permanent des formes cinétique et potentielle de l'énergie.* Les documents 8 et 9 illustrent, respectivement, l'aspect temporel et spatial de cet échange.

La moyenne temporelle $\langle f \rangle$ d'une fonction $f(t)$ est définie par :

$$\langle f \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} f(t) dt.$$

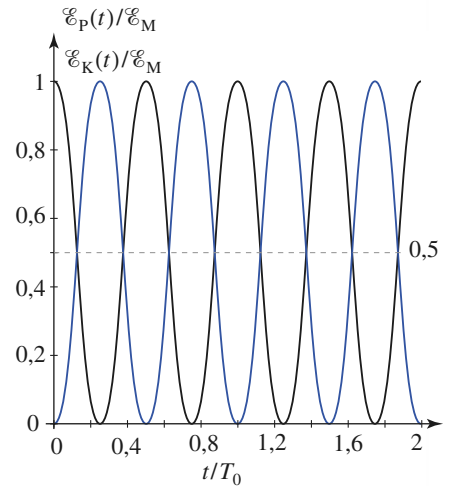
Pour une fonction f_T périodique, de période T , cette valeur moyenne peut être calculée sur une période :

$$\langle f_T \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f_T(t) dt.$$

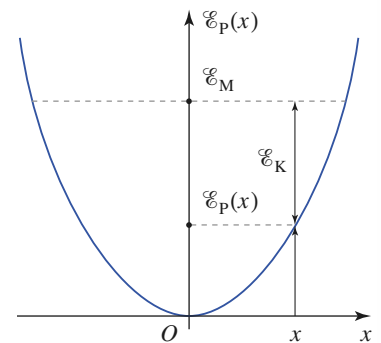
En particulier, les fonctions sinus et cosinus ont une moyenne nulle, et nous avons :

$$\langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle = \left\langle \frac{1 - \cos(2\omega t + 2\varphi)}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \left\langle \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}.$$



Doc. 8. Aspect temporel de l'échange mutuel des formes cinétique et potentielle de l'énergie mécanique.



Doc. 9. Aspect spatial de l'échange mutuel des formes cinétique et potentielle de l'énergie mécanique.

4. Mouvement libre d'un oscillateur harmonique

Nous voyons alors que : $\langle \mathcal{E}_K \rangle = \langle \mathcal{E}_P \rangle = \frac{1}{4} k x_m^2 = \frac{\mathcal{E}_M}{2}$.

Pendant le mouvement, il y a équipartition, en moyenne, de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique :

$$\langle \mathcal{E}_P \rangle = \langle \mathcal{E}_K \rangle = \frac{\mathcal{E}_M}{2}.$$

1.5. Oscillateur harmonique spatial

1.5.1. Décomposition du mouvement de l'oscillateur

Afin de généraliser les résultats précédents, considérons l'évolution du point matériel de masse m dans un champ conservatif à trois dimensions.

Prenons l'origine O comme point d'équilibre stable, pris comme référence d'énergie potentielle : $\mathcal{E}_p(O) = 0$.

Il existe en général un repère orthonormé $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ dans lequel l'expression de l'énergie potentielle peut s'écrire, au voisinage de la position d'équilibre :

$$\mathcal{E}_p(x, y, z) = \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 + \frac{1}{2} k_z z^2$$

où k_x , k_y et k_z sont trois constantes positives. Nous poserons ainsi :

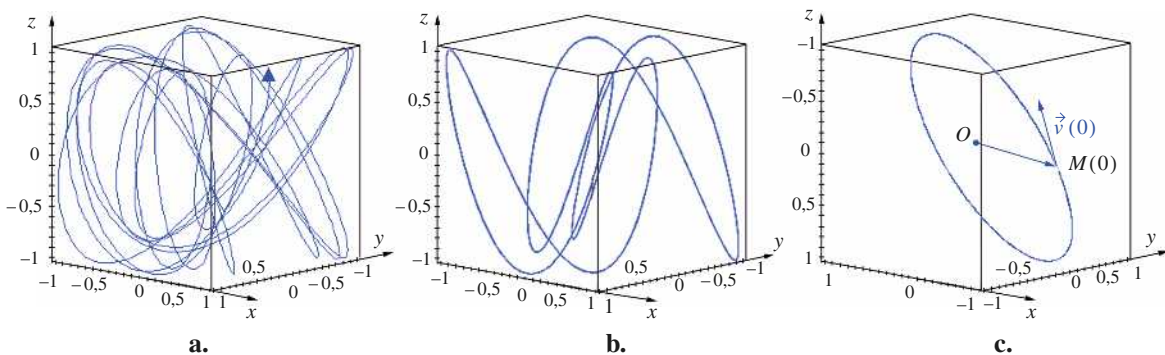
$$\omega_{0i} = \sqrt{\frac{k_i}{m}} \quad (i = x, y \text{ ou } z).$$

La force subie par le mobile est alors, à l'approximation linéaire :

$$\vec{F} = -k_x x \vec{e}_x - k_y y \vec{e}_y - k_z z \vec{e}_z$$

et l'équation du mouvement du mobile en référentiel galiléen devient, en projection sur les axes (Ox) , (Oy) et (Oz) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_{0x}^2 x = 0; \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \omega_{0y}^2 y = 0; \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \omega_{0z}^2 z = 0.$$



Doc. 10. Mouvement de l'oscillateur harmonique spatial

a. Anisotrope, à trajectoire ouverte. **b.** Anisotrope, à trajectoire fermée.

c. Isotrope, à trajectoire plane, elliptique. (Sur les trois axes sont portées les variations de $\frac{x}{x_m}$, $\frac{y}{y_m}$ et $\frac{z}{z_m}$).

Nous sommes donc ramenés à un ensemble de trois oscillateurs harmoniques à une dimension, de pulsations ω_{0i} ($i = x, y$ ou z).

L'énergie mécanique de l'oscillateur spatial :

$$\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P = \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_x x^2 \right] + \left[\frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}k_y y^2 \right] + \left[\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}k_z z^2 \right]$$

se ramène à la somme des énergies associées à ces trois oscillateurs indépendants.

- Le mouvement de l'oscillateur spatial résulte de la superposition des mouvements de trois oscillateurs harmoniques indépendants selon trois axes perpendiculaires (*doc. 10*).
- L'énergie mécanique de l'oscillateur spatial harmonique est la somme des énergies mécaniques des trois oscillateurs harmoniques associés à ces trois degrés de liberté.

1.5.2. Mouvement de l'oscillateur spatial isotrope

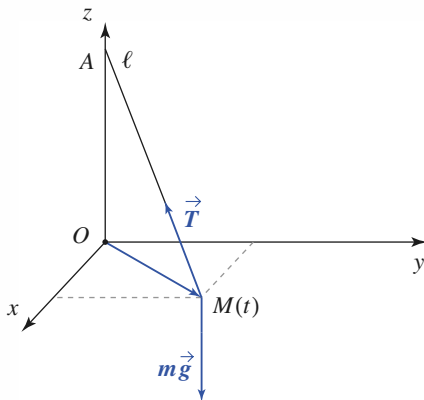
La trajectoire de l'oscillateur spatial est, en général, une courbe spatiale non fermée (*doc. 10a*). Elle peut l'être si les pulsations ω_{0x} , ω_{0y} et ω_{0z} sont dans des rapports rationnels (*doc. 10b*).

Nous pouvons, en revanche, en obtenir une description très simple lorsque cet oscillateur est isotrope : $k_x = k_y = k_z = k$.

Application 2

Pendule sphérique

Un pendule de longueur ℓ et de masse m est suspendu en $A(0; 0; 1)$ (*doc. 11*). Il est lancé en $M_0(x_0, y_0, z_0 \approx 0)$ avec une vitesse $\vec{v}_0(v_0, 0, 0)$ assez faible pour que le point M reste toujours au voisinage du plan horizontal. Étudier le mouvement de M et en déduire sa trajectoire.



Doc. 11. Pendule sphérique.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au point M s'écrit :

$$m \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = m \vec{g} + \vec{T}$$

où \vec{T} est la force exercée par le fil. L'équation précédente projetée sur les axes (Ox) et (Oy) donne :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = T_x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = T_y$$

$$\text{et } m \frac{d^2 z}{dt^2} = T_z - mg \cos \theta.$$

$$T_z \approx mg \cos \theta \approx mg \text{ et } \frac{-T_x}{x} = \frac{-T_y}{y} = \frac{T_z}{\ell - z} \approx \frac{mg}{\ell}.$$

La trajectoire de M étant quasi plane, les équations du mouvement s'en déduisent :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x \text{ et } \frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega_0^2 y, \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{g}{\ell}.$$

Elles donnent, par intégration, en tenant compte des conditions initiales :

$$\vec{OM}(t) = \vec{OM}_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\vec{v}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

ce qui est l'équation paramétrique d'une ellipse lorsque \vec{OM}_0 n'est pas colinéaire à \vec{v}_0 .

La force de rappel prend ici la forme très simple :

$$\vec{F} = -k \vec{r}.$$

L'équation du mouvement peut s'écrire sous forme vectorielle :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \vec{r} = \vec{0}, \text{ car } \omega_{0x} = \omega_{0y} = \omega_{0z} = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Compte tenu des conditions initiales, nous obtenons simplement :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \cos \omega_0 t + \frac{\vec{v}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Nous pouvons remarquer que la force de rappel est colinéaire au vecteur position : *c'est une force centrale*. Nous obtenons une *trajectoire plane*, dans le plan contenant le centre de force O et parallèle aux vecteurs \vec{r}_0 et \vec{v}_0 . La trajectoire est fermée, c'est *une ellipse* (doc. 10c).

2 Oscillations libres d'un oscillateur amorti

2.1. Oscillateur amorti par frottement fluide

2.1.1. Équation du mouvement

Nous garderons ici l'oscillateur harmonique à un degré de liberté comme modèle d'étude. Nous avons vu comment les raisonnements appliqués à ce modèle peuvent se prolonger dans le cas de l'oscillateur spatial.

Nous tiendrons compte à présent de l'influence de frottements, forces non conservatives qui viendront s'ajouter au champ de forces associé à l'énergie potentielle parabolique.

Nous adopterons comme modèle d'amortissement une force de frottement fluide : $\vec{f} = -h\vec{v} = -h\dot{x}\vec{e}_x$.

Dans ces conditions, l'équation du mouvement peut s'écrire :

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x}$$

ou encore :

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est la pulsation propre, ou pulsation de l'oscillateur non amorti, et $\tau = \frac{m}{h}$ est homogène à un temps. C'est le *temps de relaxation de l'énergie* de l'oscillateur (information sur la perte d'énergie de l'oscillateur).

Nous pourrions encore écrire l'équation du mouvement :

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

où $2\alpha = \frac{1}{\tau}$ est le *facteur d'amortissement* de l'oscillateur,

ou bien :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

où $Q = \omega_0 \tau$, grandeur sans dimensions, est appelé *facteur de qualité* de l'oscillateur.

Un oscillateur harmonique amorti peut être caractérisé par l'un des trois couples de constantes caractéristiques : (ω_0, τ) , $(\omega_0, 2\alpha)$ ou (ω_0, Q) .

2.1.2. Solutions de l'équation d'évolution

L'oscillateur harmonique idéal correspond à la limite $Q \rightarrow \infty$ (ou $\alpha \gg \omega_0$) : n'étant pas amorti, il oscille indéfiniment à la pulsation ω_0 .

Lorsque le frottement est pris en compte, nous devons chercher une solution de l'équation d'évolution :

$$\ddot{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0.$$

Constatons qu'une solution de la forme $x(t) = e^{rt}$ en est la solution si r est la solution de l'équation du second degré à coefficients réels :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

qui est l'**équation caractéristique** associée à l'équation différentielle d'évolution du système.

Notons r_1 et r_2 les racines, réelles ou complexes, conjuguées de l'équation caractéristique. Lorsque ces racines sont distinctes (le cas $Q = \frac{1}{2}$ donnant une racine double sera vu ultérieurement), nous pouvons écrire la solution générale de l'équation d'évolution sous la forme :

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

où A_1 et A_2 sont deux constantes que nous déterminerons à l'aide de deux conditions initiales, pour cette équation différentielle d'ordre deux : en général, nous utiliserons les valeurs des position et vitesse du mobile à l'instant $t = 0$. A_1 et A_2 sont en général *complexes* (et conjuguées, car $x(t)$ est réel).

2.2. Régimes d'évolution

Le type d'évolution observé dépend de l'importance de l'amortissement de l'oscillateur. Nous commencerons par un oscillateur assez peu amorti, encore assez proche de l'oscillateur idéal, donc par les valeurs encore élevées du facteur de qualité Q de l'oscillateur. Par la suite, nous observerons les effets d'une diminution de Q .

2.2.1. Régime pseudo-périodique : $Q > \frac{1}{2}$

2.2.1.1. Mouvement

Tant que $Q > \frac{1}{2}$ (soit $\alpha < \omega_0$), le discriminant Δ' de l'équation caractéristique est négatif : les racines de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées. En posant $\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$ ($\alpha = \frac{\omega_0}{2Q}$), il vient :

$$r_1 = -\alpha - j\omega \quad \text{et} \quad r_2 = -\alpha + j\omega.$$

La solution de l'équation du mouvement est de la forme :

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = e^{-\alpha t} (A_1 e^{-j\omega t} + A_2 e^{j\omega t}).$$

4. Mouvement libre d'un oscillateur harmonique

Le terme entre parenthèses est un facteur oscillant, de pulsation ω . Le facteur $e^{-\alpha t}$ cause une décroissance de l'amplitude d'oscillation (donc de l'énergie), caractérisée par le temps d'amortissement $\tau = \frac{1}{\alpha}$.

L'évolution est caractérisée par des *oscillations d'amplitude exponentiellement décroissante* (doc. 12).

La vitesse est $v(t) = r_1 A_1 e^{r_1 t} + r_2 A_2 e^{r_2 t}$;

compte tenu des conditions initiales $x(0) = x_0$ et $v(0) = v_0$, nous avons :

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = x_0 \\ r_1 A_1 + r_2 A_2 = v_0 \end{cases}$$

soit encore :

$$\begin{cases} A_1 = \frac{r_2 x_0 - v_0}{r_2 - r_1} = \frac{(-\alpha x_0 - v_0) + j\omega x_0}{2j\omega} \\ A_2 = \frac{r_1 x_0 - v_0}{r_1 - r_2} = \frac{(\alpha x_0 + v_0) + j\omega x_0}{2j\omega} \end{cases}$$

Le déplacement de l'oscillateur est ainsi :

$$x(t) = e^{-\alpha t} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{v_0 + \alpha x_0}{\omega} \sin \omega t \right).$$

La solution exprimée initialement en faisant intervenir des grandeurs complexes prend donc la forme :

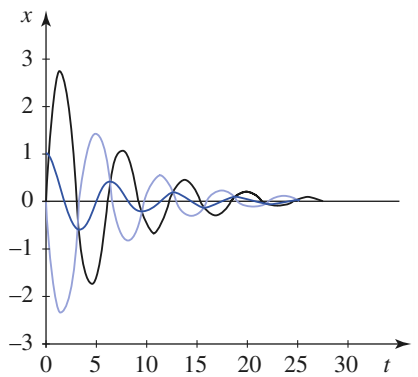
$$x(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

ou bien encore :

$$x(t) = C e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$$

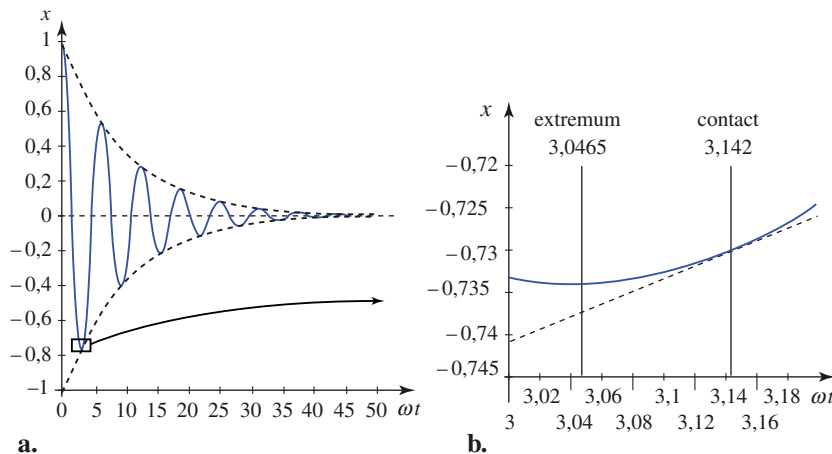
avec $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ et $\tan \varphi = \frac{B}{A}$ ($\cos \varphi$ est du signe de $A = x_0$).

Le signal oscille entre les deux enveloppes exponentielles $\pm C \cdot e^{-\alpha t}$ (doc. 13). Notons que les dates des *extrema* de x ne coïncident pas vraiment avec les dates de contact avec l'enveloppe.



Doc. 12. Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime pseudo-périodique ($Q > \frac{1}{2}$).

Le mobile est lâché en $x = x_0$ avec une vitesse v_0 positive, nulle ou négative pour les trois cas apparaissant sur la figure.



Doc. 13a. Variation de l'élongation, en régime pseudo-périodique, entre les deux enveloppes exponentielles.

b. Détail d'une partie de la courbe où il apparaît que l'extremum est distinct du point de contact avec l'exponentielle.

2.2.1.2. Portrait de phase

Les position et vitesse de l'oscillateur sont :

$$x(t) = e^{-\alpha t} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{v_0 + \alpha x_0}{\omega} \sin \omega t \right)$$

$$v(t) = e^{-\alpha t} \left(v_0 \cos \omega t + \frac{\alpha v_0 + \omega_0^2 x_0}{\omega} \sin \omega t \right).$$

Elles oscillent avec une amplitude exponentiellement décroissante : la trajectoire de phase est une spirale qui tourne dans le sens horaire autour du point attracteur O , position d'équilibre stable vers laquelle tend l'état de l'oscillateur (doc. 14).

Contrairement au cas de l'oscillateur sans frottement, les trajectoires obtenues ne sont pas symétriques par rapport à l'axe (Ox) . Cette dissymétrie correspond à un changement de signe du coefficient de la vitesse lors d'un renversement du temps. Du fait de la présence de ce terme de frottement fluide, l'équation du mouvement n'est plus invariante vis-à-vis du changement de variable $t \rightarrow -t$: le processus n'est pas réversible.

2.2.1.3. Pseudo-période

Quand le temps s'écoule, $x(t)$ tend vers zéro en oscillant. Le régime est oscillatoire sans être périodique, à cause de l'amortissement créé par les frottements. Il est dit *pseudo-périodique* et la *pseudo-période* du mouvement est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}}.$$

La pseudo-période est une fonction croissante de α , c'est-à-dire de l'amortissement. *Les frottements augmentent la pseudo-période T des oscillations* et la rendent supérieure à la période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. L'effet est cependant du second ordre.

Nous pouvons vérifier que la pseudo-période T est l'intervalle de temps qui sépare deux passages successifs et dans le même sens par la valeur $x = 0$, deux points de contact successifs avec la même enveloppe ou, encore, l'intervalle de temps qui sépare deux *extrema* de même nature.

2.2.2. Régime critique : $Q = \frac{1}{2}$ ($\alpha = \omega_0$)

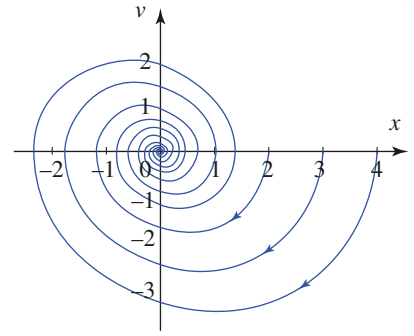
2.2.2.1. Mouvement

Lorsque α atteint la valeur ω_0 ($Q = \frac{1}{2}$), le discriminant de l'équation caractéristique s'annule.

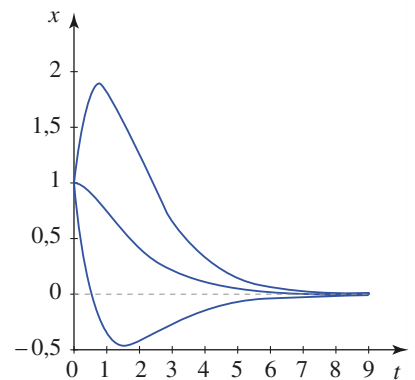
L'équation différentielle du mouvement est alors :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

ou bien encore :

$$\frac{d^2}{dt^2}(x(t)e^{\omega_0 t}) = 0.$$


Doc. 14. Portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti en régime pseudo-périodique ($Q = 3$). Le mobile est lâché sans vitesse initiale, pour diverses valeurs de x_0 .



Doc. 15. Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime critique ($Q = \frac{1}{2}$). Les conditions initiales sont les mêmes que celles du mouvement pseudo-périodique (doc. 12). Dans tous les cas, le retour à l'équilibre s'effectue plus rapidement.

4. Mouvement libre d'un oscillateur harmonique

La fonction $x(t)e^{\omega_0 t}$ est donc une fonction affine du temps, soit :

$$x(t) = (a + bt)e^{-\omega_0 t}.$$

Les conditions initiales donnent alors :

$$x(t) = [x_0 + (v_0 + \omega_0 x_0)t]e^{-\omega_0 t}.$$

Cette solution correspond à un retour vers l'équilibre $x = 0$ qui est juste non oscillant : son évolution est semblable à celle du régime oscillant précédent, mais avec des oscillations qui s'essoufflent dès la première ! La stabilisation à $x = 0$ est donc plus rapide que dans le cas précédent (doc. 15).

2.2.2.2. Portrait de phase

Le système tente encore de contourner l'origine (point attracteur) dans le sens horaire, mais ne peut y parvenir : il échoue rapidement au point O . (doc. 16).

2.2.3. Régime aperiodique : $Q < \frac{1}{2}$ ($\alpha > \omega_0$)

2.2.3.1. Mouvement

Pour un amortissement plus important encore, soit $\alpha > \omega_0$ (soit $Q < \frac{1}{2}$), le discriminant Δ' devient positif. Les racines de l'équation caractéristique sont maintenant réelles, et négatives :

$$r_1 = -\alpha - \omega \quad \text{et} \quad r_2 = -\alpha + \omega.$$

En posant cette fois : $\omega^2 = \alpha^2 - \omega_0^2$.

La solution de l'équation du mouvement est de la forme :

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = e^{-\alpha t} (A_1 e^{-\omega t} + A_2 e^{\omega t}).$$

L'évolution est à présent purement exponentielle. Comme dans le cas critique, le retour à $x = 0$ se fait sans oscillation, mais dure ici plus longtemps (doc. 17).

Les constantes A_1 et A_2 sont fixées par les conditions initiales. Nous les calculons de même qu'au § 2.2.1., et il vient :

$$\begin{cases} A_1 = \frac{r_2 x_0 - v_0}{r_2 - r_1} = \frac{(-\alpha x_0 - v_0) + \omega x_0}{2\omega} \\ A_2 = \frac{r_1 x_0 - v_0}{r_1 - r_2} = \frac{(\alpha x_0 + v_0) + \omega x_0}{2\omega} \end{cases}$$

Le déplacement de l'oscillateur est ainsi :

$$x(t) = e^{-\alpha t} \left(x_0 \operatorname{ch} \omega t + \frac{v_0 + \alpha x_0}{\omega} \operatorname{sh} \omega t \right)$$

suivant les valeurs de x_0 et v_0 , la fonction $x(t)$ évolue de façon monotone vers zéro ou passe par un extremum, comme l'illustre le document 17.

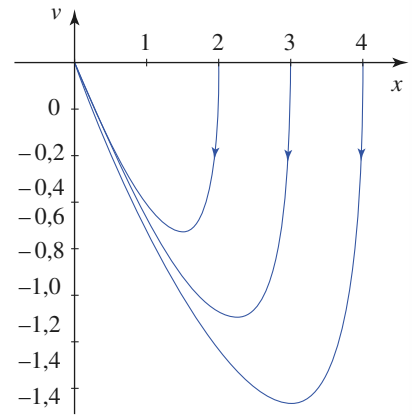
2.2.3.2. Portrait de phase

Les trajectoires de phase montrent un retour sans oscillation vers le point attracteur à l'origine (doc. 19).

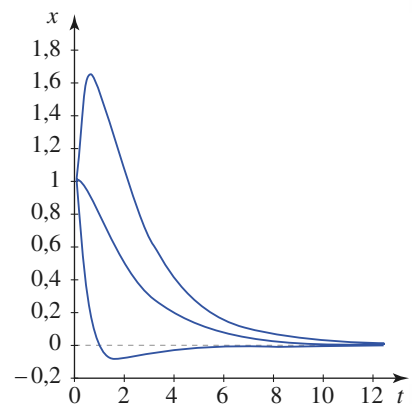
2.2.4. Temps de réponse d'un système physique

Nous venons d'étudier les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$



Doc. 16. Portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti en régime critique ($Q = \frac{1}{2}$).



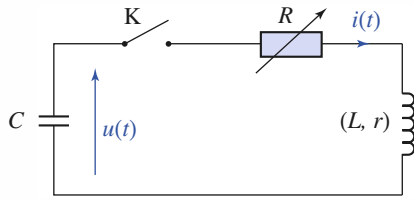
Doc. 17. Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime aperiodique ($Q < \frac{1}{2}$) suivant les conditions initiales, l'élongation passe par un extremum ou tend uniformément vers zéro.

Application 3

Amortissement critique d'un circuit (R, L, C) série

On place en série un condensateur de capacité $C = 10 \text{ nF}$, une bobine d'inductance $L = 1 \text{ mH}$ et de résistance $r = 5 \Omega$, une résistance réglable R et un interrupteur K (doc. 18). Le condensateur est chargé. À $t = 0$, on ferme K .

Quelle doit être la valeur de R pour que le condensateur se décharge le plus rapidement possible ?



Doc. 18. Circuit (R, L, C).

Notons $R' = R + r$ la résistance totale du circuit.

La loi des mailles s'écrit :

$$u(t) = R'i(t) + L\frac{di(t)}{dt}, \text{ avec } i(t) = -C\frac{du(t)}{dt}.$$

L'élimination de $i(t)$ donne l'équation d'évolution de la tension :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\alpha\frac{du}{dt} + \omega_0^2u = 0$$

en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ et $2\alpha = \frac{R'}{L}$.

Pour que $u(t)$ tende le plus rapidement possible vers zéro, il faut que le régime de décharge soit le régime critique $Q = \frac{1}{2}$, soit $\alpha = \omega_0$. D'où :

$$\frac{R'}{2L} = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \text{ soit } R' = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 200 \Omega$$

la valeur cherchée de la résistance réglable est :

$$R = R' - r = 195 \Omega.$$

Partant des conditions initiales $x_{(t=0)} = x_0$ et $\dot{x}_{(t=0)} = 0$, il existe un temps t_p tel que pour $t > t_p$ nous avons $|x_{(t > t_p)}| < px_0$ (avec p positif ; $p < 1$).

Ce temps t_p correspond souvent à un temps de mesure ou de réponse pour un système physique ; nous cherchons alors à le minimiser.

Ce temps t_p , fonction du facteur d'amortissement 2α pour un ω_0 donné, admet un minimum pour une valeur particulière $2\alpha_p$ de ce facteur. Il est possible d'obtenir, par des méthodes numériques ou expérimentales, cette valeur de α_p en fonction de p .

Souvent une « précision » de 5 % est suffisante ; ainsi si nous voulons que $t_{0,05}$ soit minimal ($p = 0,05$), il faut que $\alpha = 0,7 \omega_0$ (régime pseudo-périodique). Mais si nous désirons une précision supérieure ($p \approx 0$), il faut tendre vers le régime critique ($\alpha = \omega_0$).

2.3. Étude énergétique de l'oscillateur amorti

2.3.1. Puissance des forces de frottement

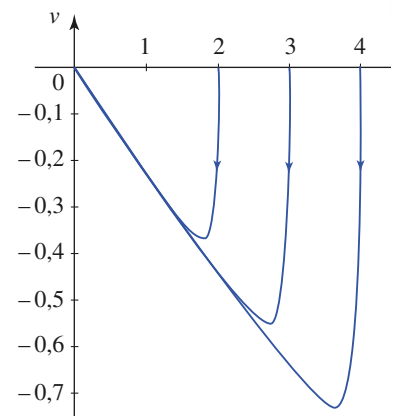
Reprenons l'équation différentielle de l'oscillateur amorti $m\dot{v} + hv + kx = 0$ et multiplions-la par $v = \dot{x}$, il vient :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = -hv^2$$

soit encore :

$$\frac{d^{\mathcal{E}}_M}{dt} = -hv^2 = f_r v < 0.$$

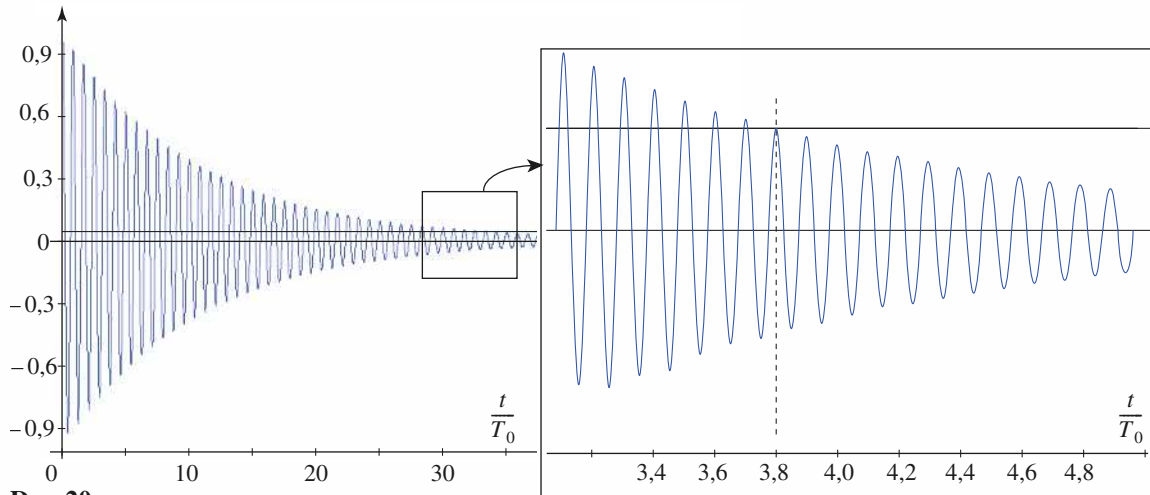
La dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique d'un oscillateur amorti est égale à la puissance des forces de frottement.



Doc. 19. Portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti en régime apériodique ($Q = 0,2$).

Application 4

Détermination du coefficient de qualité Q d'un oscillateur



Doc. 20

1) Soit la représentation graphique ci-dessus (doc. 20) représentant l'évolution (en fonction de $\frac{t}{T_0}$, avec

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$) de l'amplitude d'un oscillateur amorti par frottement fluide, obéissant à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

À la date $t = 0$, $x = x_0 = 1$, et la vitesse est nulle ; sur le graphique on a tracé la droite $x = 0,05$.

Estimer la valeur de Q .

2) Un diapason (pulsation propre 440 Hz) excité par un choc émet un son audible pendant environ 30 secondes.

En faisant toutes les approximations utiles, estimer le coefficient de qualité de cet oscillateur, si on le modélise par la même équation différentielle.

1) L'évolution de l'amplitude de l'oscillateur est donnée par l'équation suivante :

$$x(t) = Ae^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos(\omega t + \varphi),$$

avec
$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right).$$

L'oscillateur proposé est peu amorti, donc $Q \gg 1$, ainsi $\omega = \omega_0$.

À $t = 0$, la vitesse est nulle, soit :

$$\frac{\omega_0}{2Q} \cos(\varphi) + \omega_0 \sin(\varphi) = 0,$$

ce qui donne $\tan \varphi = -\frac{1}{2Q}$,

soit $\varphi \approx 0$, et donc :

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos(\omega_0 t), \text{ avec } x(t=0) = x_0.$$

Cherchons le nombre N de périodes pour que l'amplitude soit en permanence inférieure à 5 % de x_0 :

$$\frac{x_0}{20} = x_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}N \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

soit : $N = Q \frac{\ln(20)}{\pi} \approx 0,95Q$, c'est-à-dire au bout de Q périodes, environ.

Sur le zoom du graphique, on en déduit : $Q \approx 38$ ce qui justifie l'ensemble des approximations précédentes.

Remarque : Le tracé a été réalisé avec $Q = 40$.

2) On suppose ne plus entendre le diapason si l'amplitude de vibration est environ 5 % de l'amplitude initiale : sur $\Delta t = 30$ s on entend $Q = \frac{\Delta t}{T_0}$ oscillations, soit :

$$Q \approx \Delta t \cdot f_0 = 30 \cdot 440 \approx 12\,000,$$

ce qui est énorme, et assure la pureté de cette fréquence d'émission : l'onde sonore émise est quasi monochromatique.

2.3.2. Cas des régimes pseudo-périodiques

En utilisant l'expression $x(t) = Ce^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$ de l'élongation, nous observons, entre deux élongations séparées par une pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, un amortissement de :

$$\frac{x(t+T)}{x(t)} = e^{-\alpha T} = e^{-\delta}$$

où $\delta = \alpha T = \frac{\omega_0 T}{2Q}$ est une constante caractéristique de l'oscillateur appelé **décroissement logarithmique**.

L'expression du décroissement logarithmique d'un oscillateur *en régime pseudo-périodique* ($\alpha < \omega_0$ ou $Q > \frac{1}{2}$) est donc donnée, quel que soit t , par :

$$\delta = \ln \left[\frac{x(t)}{x(t+T)} \right] = \alpha T = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}}.$$

La détermination expérimentale du décroissement logarithmique δ permet d'atteindre le facteur de qualité Q de l'oscillateur amorti.

Intéressons-nous maintenant à la décroissance de l'énergie. Entre deux élongations *extrémales* successives $x(t_0)$ et $x(t_0 + T)$, pour lesquelles la vitesse est nulle, l'énergie mécanique passe de \mathcal{E}_M à $\mathcal{E}_M + \Delta\mathcal{E}_M$ avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_M &= \frac{1}{2}kx^2(t_0) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_M + \Delta\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}kx^2(t_0 + T) \\ &= \frac{1}{2}kx^2(t_0) \left[\frac{x(t_0 + T)}{x(t_0)} \right]^2 = \mathcal{E}_M e^{-2\delta} \end{aligned}$$

soit encore :
$$\frac{\Delta\mathcal{E}_M}{\mathcal{E}_M} = (e^{-2\delta} - 1) < 0.$$

Pour de *faibles amortissements* ($\delta \ll 1$ ou $Q \gg 1$), $\delta \approx \frac{\pi}{Q}$ puisque $T \approx T_0$.

L'expression précédente se simplifie en :

$$\frac{\Delta\mathcal{E}_M}{\mathcal{E}_M} = -2\delta = -\frac{2\pi}{Q} = \frac{T_0}{\tau} \quad \text{ou encore} \quad Q = 2\pi \frac{\mathcal{E}_M}{\Delta\mathcal{E}_M}.$$

CQFR

● **MODÈLE DE L'OSCILLATEUR HARMONIQUE**

- L'oscillateur harmonique à un degré de liberté évolue dans un puits de potentiel parabolique :

$$\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_p(0) + \frac{1}{2}kx^2. \text{ Il est soumis à une force de rappel linéaire : } F(x) = -kx.$$

Son équation du mouvement est : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

- Le mouvement de l'oscillateur harmonique est de la forme : $x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$.
- La période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ne dépend pas de l'amplitude des oscillations.
- L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique est constante et sa valeur est proportionnelle au carré de l'amplitude x_m des oscillations : $\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P = \frac{1}{2}kx_m^2$.

Pendant le mouvement, il y a équipartition, en moyenne, de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique : $\langle \mathcal{E}_p \rangle = \langle \mathcal{E}_K \rangle = \frac{\mathcal{E}_M}{2}$.

L'oscillateur harmonique est un modèle. Le caractère circulaire de la trajectoire de phase tracée dans les axes $(O ; x, \frac{v}{\omega_0})$ permet un test visuel simple du caractère harmonique de l'oscillateur.

● **OSCILLATEUR AMORTI PAR FROTTEMENT FLUIDE**

- L'équation d'un oscillateur amorti par frottement fluide est : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

avec
$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} & \text{pulsation propre} \\ Q = \frac{m\omega_0}{h} = \omega_0 \tau = \frac{\omega_0}{2\alpha} & \text{facteur de qualité.} \end{cases}$$

- La valeur du facteur de qualité permet d'identifier le type d'évolution libre du système lors de son retour à l'équilibre ($Q = \infty$ est le cas limite de l'oscillateur harmonique, non amorti).

$Q > \frac{1}{2}$: le mouvement est pseudo-périodique de pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}$.

$Q = \frac{1}{2}$: le mouvement est critique et la durée du retour à l'équilibre est minimale.

$Q < \frac{1}{2}$: le mouvement est apériodique.

- Pour les faibles amortissements, la variation relative de l'énergie mécanique de l'oscillateur au cours d'une pseudo-période est :

$$\frac{\Delta \mathcal{E}_M}{\mathcal{E}_M} = -2\delta = -\frac{2\pi}{Q} = -\frac{T_0}{\tau} \text{ ou } Q = 2\pi \frac{\mathcal{E}_M}{\Delta \mathcal{E}_M}.$$

- Souvent une « précision » de 5 % est suffisante ; ainsi si nous voulons que $t_{0,05}$ soit minimal ($p = 0,05$), il faut que $\alpha = 0,7\omega_0$ (régime pseudo-périodique). Mais si nous désirons une précision supérieure ($p \approx 0$), il faut tendre vers le régime critique ($\alpha = \omega_0$).

Contrôle rapide

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Connaissez-vous la définition d'un oscillateur harmonique ?
- ✓ Pouvez-vous citer des exemples d'oscillateurs harmoniques ?
- ✓ Comment varie l'amplitude d'un oscillateur harmonique ?
- ✓ La période des oscillations de l'oscillateur harmonique dépend-elle de la période ?
- ✓ L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique est-elle constante ?
- ✓ Que signifie l'expression « équipartition de l'énergie » d'un oscillateur harmonique ?
- ✓ Comment peut-on estimer le coefficient de qualité d'un oscillateur peu amorti ?
- ✓ Quelle est la définition des diverses solutions d'un oscillateur amorti en fonction de l'amortissement que l'on rappellera ?
- ✓ Qu'appelle-t-on « décrétement logarithmique » ?

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. Lorsque l'amplitude de l'oscillateur harmonique est multipliée par 2 :

- a. sa période est multipliée par : 2, $\sqrt{2}$, 1, $\frac{1}{2}$?
- b. son énergie est multipliée par : 2, 1, 4, 8 ?

2. La trajectoire d'un oscillateur harmonique spatial est :

- a. plane
- b. fermée
- c. les deux.

3. La période d'oscillation d'un pendule simple est :

- a. $\sqrt{\frac{g}{\ell}}$
- b. $\sqrt{\frac{\ell}{g}}$
- c. $2\pi\sqrt{\frac{g}{\ell}}$

- d. $2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$
- e. supérieure à $2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

4. Le décrétement logarithmique d'un oscillateur harmonique amorti par frottement fluide, de facteur de qualité Q :

- a. est indépendant de Q
- b. défini pour $Q > \frac{1}{2}$
- c. défini pour $Q < \frac{1}{2}$
- d. fonction croissante de Q .
- e. fonction décroissante de Q .

► Solution, page 93.

Exercice commenté

Oscillateur harmonique plan

ÉNONCÉ

Un point matériel M de masse m est lié aux quatre points fixes A_1 , A'_1 , A_2 et A'_2 d'un plan horizontal, par l'intermédiaire de quatre ressorts de même longueur propre a . On note k_1 la raideur des ressorts MA_1 , MA'_1 et k_2 celle des ressorts MA_2 , MA'_2 .

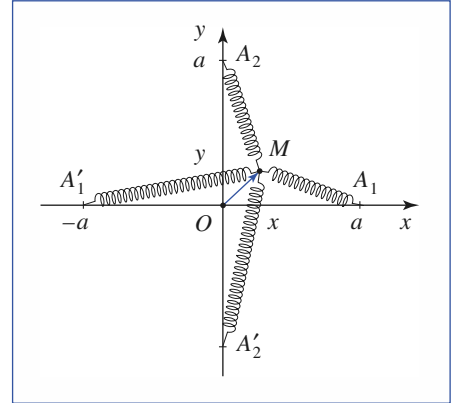
1) Le point $M(x, y)$ étant au voisinage de l'origine O , calculer son énergie potentielle \mathcal{E}_p .

2) En déduire la force \vec{f} appliquée au point M . La force est-elle centrale ?

3) En admettant que le point M glisse sans frottement sur le plan horizontal, étudier son mouvement sachant qu'il a été lancé en $M_0(x_0, 0)$ avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_y$.

4) Décrire la trajectoire de M dans les cas suivants :

a) $k_2 = 2k_1$; b) $k_2 = 9k_1$.



CONSEILS

L'énergie potentielle du point M est égale à la somme des énergies potentielles des forces appliquées en M .

Quelles sont ces forces ? Comment leur énergie potentielle s'exprime-t-elle ?

En général, le développement limité d'une fonction $f(u)$ au voisinage de zéro ne fournit une approximation convenable que si u est très petit devant 1.

Pour tenir compte de la condition $x \ll a$, il faut donc exprimer la fonction énergie potentielle sous la forme $\mathcal{E}_p(u)$ avec $u = \frac{x}{a}$.

Rappelons que seule une quantité sans dimension peut être comparée au nombre 1.

SOLUTION

1) Calculons l'énergie potentielle du ressort MA_1 , en considérant $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{a}$ comme des infiniment petits d'ordre un et en nous limitant à l'ordre deux :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{p_1} &= \frac{1}{2}k_1(\sqrt{(x-a)^2 + y^2} - a)^2 = \frac{1}{2}k_1a^2\left(\left[\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - 1\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}k_1a^2\left[\left(1 - \frac{x}{a} + \dots\right) - 1\right]^2 = \frac{1}{2}k_1x^2. \end{aligned}$$

Par un calcul analogue pour le ressort MA'_1 , nous établissons : $\mathcal{E}'_{p_1} = \frac{1}{2}k_1x^2$.

En substituant k_2 à k_1 et y à x pour les ressorts MA_2 et MA'_2 , nous obtenons :

$$\mathcal{E}_{p_2} = \mathcal{E}'_{p_2} = \frac{1}{2}k_2y^2.$$

D'où l'énergie potentielle du système global : $\mathcal{E}_p(x, y) = k_1x^2 + k_2y^2$.

2) L'oscillateur étant plan, nous en déduisons que $f_x = -2k_1x$ et $f_y = -2k_2y$.

Comme $k_1 \neq k_2$, la force \vec{f} n'est pas centrale (son support ne passe pas par le point O).

3) En projetant sur les axes la relation fondamentale de la dynamique appliquée au point matériel dans le référentiel d'étude supposé galiléen, il vient :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -2k_1x \quad \text{et} \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -2k_2y$$

d'où, par intégration, compte tenu des conditions initiales :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_1 t), \quad \text{avec} \quad \omega_1^2 = \frac{2k_1}{m};$$

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega_2} \sin(\omega_2 t), \quad \text{avec} \quad \omega_2^2 = \frac{2k_2}{m}.$$

$\sqrt{2}$ est-il rationnel ? Rappelons qu'un irrationnel ne peut se mettre sous la forme du rapport de deux entiers.

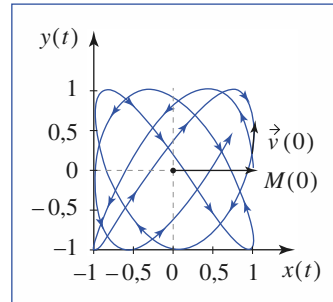
4) Les pulsations ω_1 et ω_2 étant distinctes, la trajectoire n'est, en général, ni périodique ni fermée.

En revanche, si le rapport des pulsations est rationnel, alors la trajectoire est fermée et le graphe de cette trajectoire est une courbe de Lissajous.

a) La trajectoire d'un oscillateur harmonique dont le rapport des pulsations

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{2} \text{ est irrationnel.}$$

Elle est non périodique et non fermée.

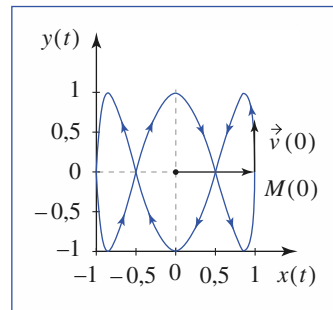


b) La trajectoire d'un oscillateur harmonique dont le rapport des pulsations

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 3 \text{ est rationnel.}$$

Elle est périodique et fermée :

c'est une courbe de Lissajous.



Exercices

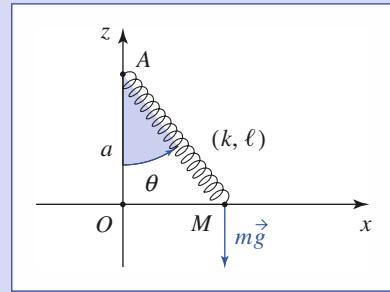
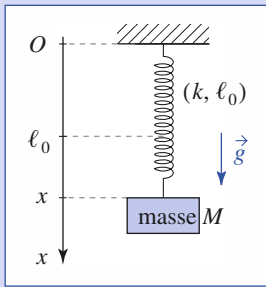
1 Une expérience simple

On suspend une masse m inconnue à un ressort de caractéristiques (k, ℓ_0) inconnues.

On constate que le ressort s'allonge de $\Delta \ell = 10 \text{ cm}$.

Calculer la période T_0 des oscillations de la masse, sachant que l'intensité de la pesanteur est :

$$g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$



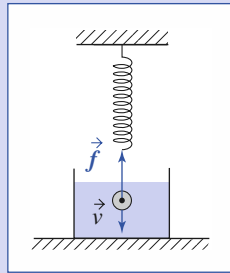
2 Détermination d'un coefficient de viscosité

Une sphère de rayon r et de masse m est suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 .

Déplacée dans un liquide de coefficient de viscosité η , la sphère est soumise à une force de frottement donnée par la formule de Stokes :

$$\vec{f} = -6\pi\eta r \vec{v}$$

où \vec{v} est la vitesse de la sphère.



1) Écrire l'équation du mouvement de la sphère plongée dans le liquide et en déduire l'expression de la pseudo-période T .

2) Dans l'air, où les frottements fluides sont négligeables, la période des oscillations est T_0 . Déterminer le coefficient de viscosité η du liquide en fonction de m, r, T et T_0 .

3 Glissement avec rappel le long d'un rail

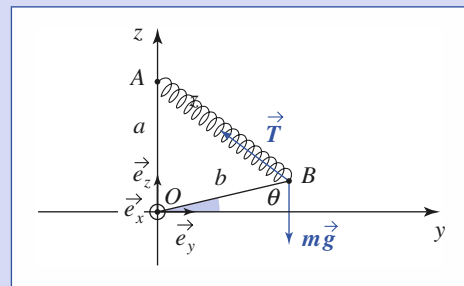
Déterminer la période T_0 des petites oscillations d'un point matériel M de masse m , assujéti à se déplacer sans frottement sur une droite horizontale, sous l'action d'un ressort (k, ℓ_0) dont l'autre extrémité est fixe en A de cote $a > \ell_0$ (cf. schéma) :

- en utilisant le principe fondamental de la dynamique ;
- en utilisant une méthode énergétique.

3) Que se passe-t-il si a devient inférieur à ℓ_0 ?

4 Gravimètre à ressort

Un gravimètre à ressort est constitué d'une tige OB de masse négligeable pouvant tourner autour d'un axe horizontal $(O; \vec{e}_x)$ et supportant en B une masse ponctuelle m (cf. schéma). Sous l'action du ressort AB , de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , la tige est horizontale à l'équilibre. On pose $OA = a, OB = b, AB = \ell$ et $\theta = (\vec{e}_y, \vec{OB})$ l'élongation angulaire de la tige OB .



1) Calculer la longueur ℓ_{eq} du ressort à l'équilibre.

À quelle condition cet équilibre existe-t-il ?

2) Déterminer la période T_0 des petites oscillations de ce pendule. Que se passe-t-il lorsque ka est voisin de mg ?

5 Mouvement sous l'action de forces proportionnelles à la distance

1) Étant donné deux points fixes A_1 et A_2 , étudier le mouvement d'un point matériel M , de masse m , soumis aux deux forces :

$$\vec{f}_1 = -k_1 \overrightarrow{A_1 M} \quad \text{et} \quad \vec{f}_2 = -k_2 \overrightarrow{A_2 M}$$

avec les hypothèses suivantes.

- k_1 et k_2 sont deux constantes positives ;
- $k_2 = -k_1 = k$ constante positive.

2) Généraliser les résultats obtenus dans le cas de N forces

$$\vec{f}_i = -k_i \overrightarrow{A_i M}.$$

Corrigés

Solution du tac au tac, page 89.

1. a : 1 ; b : 4.
2. Vrai : a, b, c pour l'oscillateur isotrope, manque d'information pour conclure dans le cas général.
3. Vrai : e Faux : a, b, c, d.
4. Vrai : c, e Faux : a, b, d.

1 À l'équilibre, le poids et la force de rappel du ressort se compensent : $mg = k\Delta\ell$.

En mouvement, l'évolution est régie par l'équation différentielle : $m\ddot{x} = mg - k(x - \ell_0)$, ce qui donne des oscillations de pulsation

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ autour de la position d'équilibre $x_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$ (en notant

$X = x - x_{\text{éq}}$, nous avons simplement : $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$).

La période des oscillations est donc :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta\ell}{g}} \approx 0,63 \text{ s}.$$

Ce système est isochrone à un pendule simple de longueur $\Delta\ell$.

2 1) L'équation du mouvement est : $m\ddot{z} = -k\Delta\ell + mg - 6\pi\eta r\dot{z} + f_A$, en prenant l'axe (Oz) sur lequel est repéré le déplacement orienté vers le bas ; $\Delta\ell$ est l'allongement du ressort, et f_A la poussée d'Archimède. Admettons que cette quantité soit constante.

Choisissons l'origine $z = 0$ au niveau de la position d'équilibre :

$-k\Delta\ell + mg + f_A = -kz$. Il vient alors :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = 0, \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ et } \frac{\omega_0}{Q} = \frac{6\pi\eta r}{m}.$$

La pseudo-période des oscillations amorties (l'énoncé suppose implicitement que le facteur de qualité Q est plus grand que $\frac{1}{2}$) est $T = \frac{2\pi}{\omega}$, avec $2\omega = \sqrt{|\Delta|}$,

où Δ est le discriminant de l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0,$$

soit : $\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right)$.

Nous obtenons ainsi :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{3\pi\eta r}{m\omega_0}\right)^2}}.$$

2) Dans l'air ($\eta = 0$), la sphère effectue des oscillations de pulsation

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

De l'égalité $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{3\pi\eta r}{m\omega_0}\right)^2}}$, nous tirons :

$$\eta = \frac{m\omega_0^2}{3\pi r} \sqrt{1 - \left(\frac{T_0}{T}\right)^2} = \frac{2m}{3r} \sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}}.$$

3 1) La réaction du support et le poids n'ont pas de composante selon (Ox) .
 Projets le principe fondamental de la dynamique sur l'axe (Ox) :

$$m\ddot{x} = -k(\ell - \ell_0) \sin \theta, \text{ avec } \ell = (a^2 + x^2)^{1/2} \text{ et } \sin \theta = \frac{x}{\ell}.$$

$$\text{Soit donc : } m\ddot{x} = -kx \left(1 - \frac{\ell_0}{(a^2 + x^2)^{1/2}} \right).$$

En ne conservant que les termes d'ordre un en x :

$$\ddot{x} = \left(-\frac{k}{m} \right) \left(1 - \frac{\ell_0}{a} \right) = -\omega_0^2 x,$$

$$\text{d'où la période } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{ma}{k(a - \ell_0)}}.$$

2) La réaction \vec{R} du support et le poids $m\vec{g}$ ont une puissance nulle. Écrivons que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P$ se conserve en ne considérant que l'énergie potentielle $\mathcal{E}_P(x)$ du ressort :

$$\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \text{ et } \mathcal{E}_P(x) = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2, \text{ avec :}$$

$$\ell = (a^2 + x^2)^{1/2}.$$

D'où $\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k[(a^2 + x^2)^{1/2} - \ell_0]^2$; en se limitant à l'ordre deux en $\frac{x}{a}$:

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(a - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}k\left(1 - \frac{\ell_0}{a}\right)x^2 = \text{cte}.$$

En dérivant par rapport au temps, nous obtenons l'équation du mouvement précédente (multipliée par \dot{x}), d'où la période :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{ma}{k(a - \ell_0)}}.$$

3) Pour $a < \ell_0$, l'équation du mouvement au voisinage de 0 reste valable,

mais elle prend la forme : $\ddot{x} = +\omega_0^2 x$, avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k(\ell_0 - a)}{m}}$.

La solution cesse d'être oscillante. Elle est maintenant de la forme :

$x(t) = Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}$ (où A et B sont fixées par les conditions initiales) : l'équilibre en $x = 0$ n'est plus stable.

4 1) La tige (de masse négligeable) et la masse m sont soumises à la tension \vec{T} du ressort, au poids $m\vec{g}$, et à une réaction au point O que nous ne connaissons pas *a priori*, mais qui ne travaille pas puisque l'extrémité de la tige en O ne se déplace pas.

Nous pouvons donc rechercher une position d'équilibre sous forme d'un extremum de la fonction énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_P(\theta) = mgz(\theta) + \frac{1}{2}k\Delta\ell^2(\theta) = mgz(\theta) + \frac{1}{2}k(\ell(\theta) - \ell_0)^2.$$

Nous avons : $z(\theta) = b \sin \theta$ et $\ell(\theta)$ tel que :

$$\ell^2(\theta) = \vec{AB}^2 = (\vec{AO} + \vec{OB})^2 = a^2 + b^2 - 2ab \sin \theta.$$

Corrigés

L'énergie potentielle est donc :

$$\mathcal{E}_p(\theta) = mgb \sin \theta + \frac{1}{2}k[\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \sin \theta} - \ell_0]^2$$

Exprimons la dérivée de cette énergie par rapport à θ :

$$\frac{d\mathcal{E}_p(\theta)}{d\theta} = mgb \cos \theta + k(\ell - \ell_0) \frac{d\ell(\theta)}{d\theta}$$

avec $\frac{d\ell(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{2\ell} \frac{d\ell^2(\theta)}{d\theta} = \frac{-ab \cos \theta}{\ell}$.

La condition d'équilibre est donc :

$$0 = \frac{d\mathcal{E}_p(\theta)}{d\theta} = b \cos \theta \left[mg - ka \frac{\ell - \ell_0}{\ell} \right].$$

La position recherchée, pour laquelle $\cos \theta \neq 0$, doit donc correspondre à :

$$\ell_{\text{eq}} = \ell_0 \frac{ka}{-mg + ka}.$$

Cette valeur est acceptable ($\ell > 0$) si $mg < ka$.

Remarque : Nous ne nous sommes pas assurés de la stabilité de l'équilibre trouvé, lorsqu'il existe. Il faudrait donc étudier le signe de la dérivée seconde $\frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2}$ en ce point.

Cependant, nous verrons si le système est oscillant au voisinage de cette position en établissant l'équation du mouvement...

2) L'énergie mécanique $\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P$, avec $\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}m(b\dot{\theta})^2$ est une constante du mouvement, donc :

$$0 = \frac{d\mathcal{E}_M}{dt} = mb^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta} \frac{d\mathcal{E}_P}{d\theta}$$

ce qui nous donne l'équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{mb^2} \frac{d\mathcal{E}_P}{d\theta}(\theta) = 0$$

soit encore :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{b} - \frac{ka}{mb} \left(1 - \frac{\ell_0}{\ell(\theta)} \right) \right) = 0.$$

Au voisinage de l'équilibre :

$$\theta = \theta_{\text{eq}} + \varepsilon \quad \text{et} \quad \ell \approx \ell_{\text{eq}} + \varepsilon \left(\frac{d\ell}{d\theta} \right)_{\theta = \theta_{\text{eq}}}.$$

L'équation du mouvement, linéarisée à l'ordre un en ε , devient ainsi :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{ka}{mb} \frac{\ell_0}{\ell_{\text{eq}}^2} \left(\frac{d\ell}{d\theta} \right)_{\theta_{\text{eq}}} \varepsilon = 0$$

soit encore :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{ka^2 \ell_0}{m \ell_{\text{eq}}^3} \varepsilon = 0$$

que nous pouvons identifier à une équation d'oscillation harmonique (l'équilibre est bien stable s'il existe !) de pulsation :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{ka^2 \ell_0}{m \ell_{\text{eq}}^3}} = \sqrt{\frac{k a^2}{m \ell_0^2} \left(1 - \frac{mg}{ka} \right)^3}.$$

Si ka est voisin de mg , la pulsation $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ devient très grande...

5

1) a) Notons G le barycentre des points A_1 et A_2 affectés des coefficients

k_1 et k_2 : $k_1 \vec{GA}_1 + k_2 \vec{GA}_2 = \vec{0}$. Nous obtenons :

$$\vec{f} = -k_1(\vec{A}_1\vec{G} + \vec{GM}) - k_2(\vec{A}_2\vec{G} + \vec{GM}) = -(k_1 + k_2)\vec{GM}.$$

L'équation du mouvement est alors :

$$m \frac{d^2\vec{GM}}{dt^2} = -(k_1 + k_2)\vec{GM}$$

soit : $\vec{GM} + \omega_0^2 \vec{GM} = \vec{0}$,

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$.

Le déplacement est alors de la forme :

$$\vec{GM}(t) = \vec{r}_0 \cos \omega_0 t + \frac{\vec{v}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

où $\vec{r}_0 = \vec{GM}(t=0)$ et $\vec{v}_0 = \dot{\vec{GM}}(t=0)$.

b) La force subie est ici uniforme : $\vec{f} = kA_1A_2$, le mouvement est uniformément accéléré :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2m} k A_1 A_2 t^2.$$

(Notons que, dans ce cas, il n'est plus possible de définir le barycentre G comme précédemment puisque $k_1 + k_2 = 0$.)

2) • Si $\sum_i k_i \neq 0$, il est possible de définir le barycentre G des points A_i affectés des coefficients k_i , de sorte que l'équation du mouvement devient :

$$\vec{GM} + \omega_0^2 \vec{GM} = \vec{0}, \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{\sum_i k_i}{m}.$$

Le mouvement correspond à des oscillations autour du point G si $\sum_i k_i > 0$.

• Si $\sum_i k_i = 0$, le point M est soumis à une accélération uniforme, ce qui donne une trajectoire parabolique en général.

Réponse d'un oscillateur à une excitation

5

Introduction

Pour l'étude de son régime forcé, l'oscillateur harmonique est considéré comme un système linéaire faisant correspondre à une excitation appliquée en entrée, une réponse délivrée en sortie. Selon le point de vue adopté, l'oscillateur utilisé ne sert que de modèle pour traiter une grande variété de phénomènes de même type, mais de natures physiques très différentes.

Il peut s'agir de réseaux électriques soumis à des excitations, de systèmes mécaniques soumis à des contraintes extérieures ou encore d'atomes et de molécules excités par des ondes lumineuses, etc.

Le phénomène de filtrage, c'est-à-dire la dépendance de l'amplitude de la réponse à la fréquence de l'excitation, sera développé.

À ce propos, il apparaîtra que l'oscillateur étudié est un filtre linéaire d'ordre deux. Pour un type d'excitation donné et selon la grandeur considérée comme réponse, un filtre peut ou ne peut pas présenter de phénomène de résonance. Lorsqu'une résonance est susceptible de se produire, suivant qu'elle accentue un défaut ou une qualité du système, elle sera dans la pratique évitée ou au contraire recherchée.

Pour illustrer le caractère unificateur de l'étude, les analogies électromécaniques seront mises en évidence et la notion d'impédance électrique étendue.

O B J E C T I F S

- Étudier le comportement d'un système linéaire soumis à une excitation.
- Examiner les différents types de filtrage.
- Utiliser les analogues électromécaniques pour montrer la généralité des résultats obtenus.
- Généraliser la notion d'impédance.

P R É R E Q U I S

- Oscillations libres.
- Notion d'impédance électrique.

Excitation de l'oscillateur

Considérons le dispositif expérimental représenté sur la *document 1* : une bille de masse m , suspendue à un ressort, effectue des mouvements verticaux au sein d'un fluide visqueux.

Cette bille est soumise à son poids $m\vec{g}$ et à la poussée d'Archimède \vec{f}_A . Nous admettrons que cette dernière reste constante, égale à celle qui s'exerce à l'équilibre.

Utilisé dans son domaine élastique, le ressort exerce sur la bille la force : $\vec{f}_k = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x$, où k désigne la raideur du ressort et ℓ_0 sa longueur à vide.

Nous admettrons que les effets de la viscosité du fluide sont convenablement représentés par une force de frottement fluide : $\vec{f}_v = -h\vec{v} = -h\dot{x}\vec{e}_x$.

L'équation d'évolution de la bille est alors :

$$m\ddot{x} = mg + f_A - k(\ell - \ell_0) - h\dot{x} \quad (1)$$

Au repos (le point A étant en O), nous avons :

$$0 = mg + f_A - k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) \quad (2)$$

Convenons de noter $x(t)$ le déplacement de la bille par rapport à sa position d'équilibre, et $x_A(t)$ celui du point A par rapport à O. Avec ces choix d'origines, la longueur du ressort est : $\ell = \ell_0 + x(t) - x_A(t)$.

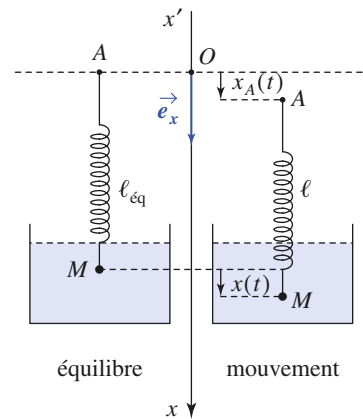
En retranchant membre à membre (1) et (2), l'équation du mouvement s'écrit :

$$m\ddot{x} = -k(x - x_A) - h\dot{x}$$

ou bien encore :
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 x_A(t)$$

en notant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation propre de l'oscillateur et $Q = \frac{m\omega_0}{h} = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \omega_0\tau$ son facteur de qualité (qui est sans dimension).

En agitant l'extrémité A du ressort, nous pouvons *exciter* le mouvement de cet oscillateur amorti. Ce fait est traduit par le *second membre*, non nul et pouvant dépendre du temps, de cette équation d'évolution.



Doc. 1. Modèle d'oscillateur mécanique linéaire amorti soumis à une excitation $x_A(t)$.

2 Réponse de l'oscillateur excité

2.1. Résolution de l'équation du mouvement

2.1.1. Principe de résolution

Mathématiquement le problème est celui de la détermination de la solution générale d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants avec un second membre fonction du temps.

Notons $x(t)$ la solution générale cherchée de l'équation avec second membre.

Lorsque le second membre est précisé, nous pourrions (en général) trouver assez facilement une solution particulière $x_1(t)$ de cette équation :

$$\ddot{x}_1(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}_1(t) + \omega_0^2 x_1(t) = \omega_0^2 x_A(t).$$

Nous constatons que la différence $x_0(t) = x(t) - x_1(t)$ est simplement solution de l'équation homogène (c'est-à-dire avec second membre nul) :

$$\ddot{x}_0(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}_0(t) + \omega_0^2 x_0(t) = 0.$$

Nous avons vu au chapitre précédent la forme générale de la solution $x_0(t)$, dont la forme dépend de la valeur du facteur de qualité Q de l'oscillateur, et qui peut être entièrement déterminée à l'aide des conditions initiales (valeurs de $x(t=0)$ et $\dot{x}(t=0)$). Dans ces conditions, nous aurons déterminé la solution générale $x(t) = x_0(t) + x_1(t)$ de l'équation avec second membre, compte tenu des conditions initiales.

2.1.2. Régimes libre, transitoire, et forcé

Nous savons désormais que :

La solution générale $x(t)$ s'analyse en la somme de :

- $x_0(t)$: solution générale de l'équation différentielle homogène ;
- $x_1(t)$: solution particulière de l'équation différentielle avec second membre, soit : $x(t) = x_0(t) + x_1(t)$.

Quand l'oscillateur est amorti, son régime libre, décrit par $x_0(t)$, disparaît avec le temps, comme il a été vu au chapitre 4. Seul persiste ensuite le régime forcé décrit par $x_1(t)$.

On appelle régime transitoire le régime représenté par $x(t)$ tant que $x_0(t)$ n'est pas négligeable devant $x_1(t)$.

2.2. Additivité des réponses

La linéarité de l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique entraîne l'additivité de ses réponses.

Cette propriété est connue sous le nom de *principe de superposition*.

Si $x_i(t)$ est la réponse de l'oscillateur à l'excitation $x_{A_i}(t)$, alors $x(t) = \sum_i x_i(t)$

est sa réponse à l'excitation $x_A(t) = \sum_i x_{A_i}(t)$. Il en sera ainsi, par exemple,

lorsque l'oscillateur est soumis à une excitation périodique décomposable en *série de Fourier* : sa réponse est la superposition de l'ensemble des réponses harmoniques.

2.3. Étude de la réponse à un échelon

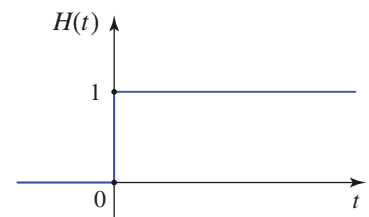
2.3.1. Échelon de déplacement

Pour mettre en œuvre le principe de résolution, considérons la réponse de l'oscillateur à un *échelon* de déplacement :

$$x_A(t) = X_0 H(t)$$

où X_0 est l'amplitude de cet échelon, et $H(t)$ désigne la fonction de Heaviside (doc. 2.) définie par :

$$H(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \text{ et } H(t) = 1 \text{ pour } t \geq 0.$$

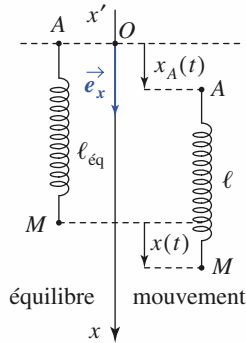


Doc. 2. Fonction échelon.

Application 1

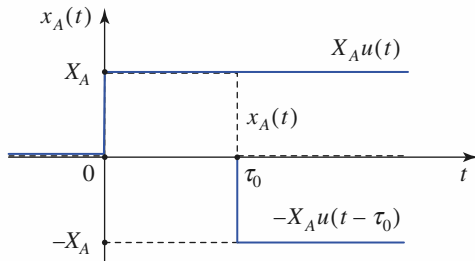
Réponse d'un oscillateur à un créneau de déplacement

Une masse m est suspendue à l'extrémité inférieure M d'un ressort de dureté k et de longueur à vide ℓ_0 (doc. 3). Elle est en équilibre et au repos. À $t = 0$, on soumet l'extrémité supérieure A du ressort à un déplacement constant X_A pendant une durée τ_0 , puis on ramène A à sa position initiale. Déterminer la réponse en élongation $x(t)$ du système.



Doc. 3. Oscillateur élastique vertical, excité par un déplacement $x_A(t)$.

L'excitation en créneau $x_A(t)$ est la superposition d'un premier échelon de déplacement $X_A u(t)$



Doc. 4. Un créneau de déplacement peut être analysé comme la superposition de deux échelons de déplacement.

débutant à $t = 0$ et d'un second échelon de déplacement $-X_A u(t - \tau_0)$ débutant à $t = \tau_0$, (doc. 4).

Les frottements étant négligés, les réponses aux deux échelons sont :

$$x_1(t) = X_A [1 - \cos \omega_0 t] u(t),$$

$$x_2(t) = -X_A [1 - \cos \omega_0 (t - \tau_0)] u(t - \tau_0).$$

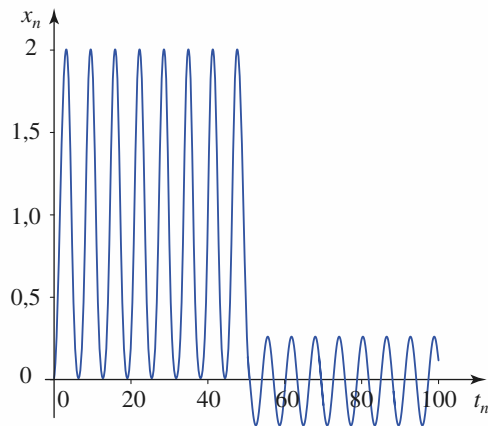
La réponse de l'oscillateur est la superposition des deux réponses précédentes : $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

Le graphe de $x(t)$ est donné au document 5.

Si $t > \tau_0$:

$$x(t) = X_A (\cos [\omega_0 (t - \tau_0)] - \cos \omega_0 t),$$

$$\text{soit } x(t) = 2X_A \sin\left(\omega_0 \frac{\tau_0}{2}\right) \sin\left[\omega_0 \left(t - \frac{\tau_0}{2}\right)\right].$$



Doc. 5. Réponse à un créneau de déplacement :

$$t_n = \omega_0 t, \tau_n = \omega_0 \tau \text{ et } x_n = \frac{x}{X_A}.$$

2.3.2. Détermination de la réponse

L'oscillateur, au repos à $t < 0$, est mis en mouvement par le déplacement brusque de l'extrémité A du ressort à $t = 0$, et nous devons ici résoudre, pour $t \geq 0$, l'équation :

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 X_0.$$

Cette équation avec second membre admet une solution particulière évidente, constante : $x_1(t) = X_0$ et nous savons que la solution générale de l'équation sans second membre est en principe de la forme : $x_0(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$

où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0.$$

La solution recherchée s'écrit donc :

$$x(t) = X_0 + A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

où les deux constantes A_1 et A_2 sont fixées par les conditions initiales.

À l'instant initial, le déplacement brusque du point crée un terme supplémentaire fini, d'amplitude kX_0 , dans l'action du ressort. La bille ayant une inertie représentée par sa masse, cette action crée à $t = 0$ une accélération non nulle, mais sans discontinuité de vitesse ou déplacement. Les conditions initiales sont ainsi :

$$x(0^+) = 0 \text{ et } v(0^+) = 0$$

ce qui nous donne :

$$\begin{cases} X_0 + A_1 + A_2 = 0 \\ r_1 A_1 + r_2 A_2 = 0 \end{cases}, \text{ soit : } \begin{cases} A_1 = \frac{r_2 X_0}{r_1 - r_2} \\ A_2 = \frac{r_1 X_0}{r_2 - r_1} \end{cases}$$

et la solution recherchée s'écrit finalement, pour $t \geq 0$:

$$x(t) = X_0 \left(1 + \frac{r_2 e^{r_1 t} - r_1 A_2 e^{r_2 t}}{r_1 - r_2} \right).$$

2.3.3. Régime transitoire et régime permanent

L'oscillateur est soumis à $t > 0$ à une excitation permanente, ici le déplacement constant X_0 imposé à l'extrémité du ressort.

Comme le facteur de qualité Q est positif, les solutions r_1 et r_2 sont éventuellement complexes, mais à partie réelle toujours négative. Ainsi, la solution obtenue tend vers la constante X_0 .

Pour une excitation permanente imposée, la réponse de l'oscillateur amorti tend vers une réponse limite qui est la réponse à cette excitation permanente.

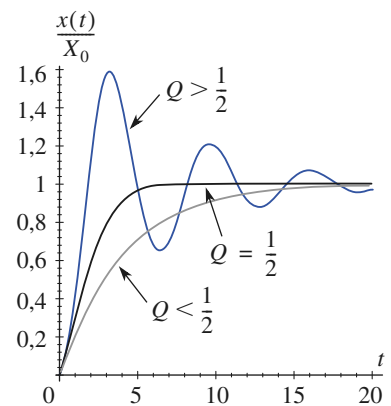
Le régime permanent ne s'établit pas instantanément : il est précédé par un régime transitoire.

Nous pouvons d'ailleurs prévoir que cette limite devrait en principe être atteinte en un temps de l'ordre de quelques τ , temps caractéristique de l'oscillateur que nous avons précédemment défini :

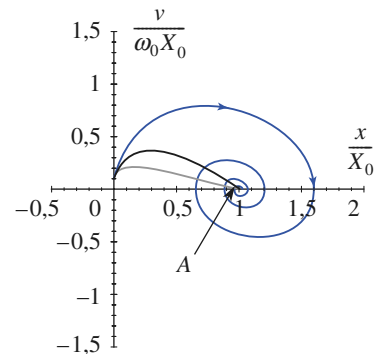
$$\tau = \frac{Q}{\omega_0} = \frac{1}{2\alpha}.$$

La nature exacte du régime transitoire qui mène à ce déplacement limite ne dépend que de la valeur du facteur de qualité de l'oscillateur. La valeur de ce dernier nous indique si la limite sera atteinte après un régime transitoire pseudo-périodique, critique, ou apériodique, comme nous pouvons l'observer sur le document 6a. Constatons que la limite est rapidement atteinte dans le cas du régime critique.

Déplacer l'extrémité revient à décaler la position d'équilibre de l'oscillateur. Dans le plan de phase (doc. 6b.), nous pouvons observer la modification de la position du centre attracteur : l'oscillateur qui était au repos se déplace pour rejoindre la nouvelle position d'équilibre représentée par le nouvel attracteur $A(X_0, 0)$.



a. Évolutions temporelles.



b. Trajectoires de phase.

Doc. 6. Régimes transitoires d'un oscillateur en réponse à une excitation en échelon.

Application 2

Réponse d'un oscillateur à une excitation en échelon

1) Exprimer complètement les solutions obtenues pour le régime transitoire, dans les cas pseudo-périodique et apériodique, en utilisant les notations α et ω introduites lors de l'étude du régime libre.

2) Pourquoi la forme proposée doit-elle être revue dans le cas particulier du régime critique ? Expliciter complètement la solution $x(t)$ dans ce cas particulier.

1) Pour le régime pseudo-périodique, $\alpha < \omega_0$ ($Q > \frac{1}{2}$), les racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique sont :

$r_1 = \alpha - j\omega$ et $r_2 = -\alpha + j\omega$ en notant $\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$ et les coefficients A_1 et A_2 sont :

$$A_1 = \frac{r_2 X_0}{r_1 - r_2} = \frac{X_0}{2} \left(-1 - j \frac{\alpha}{\omega} \right)$$

et
$$A_2 = \frac{r_1 X_0}{r_1 - r_2} = \frac{X_0}{2} \left(-1 + j \frac{\alpha}{\omega} \right)$$

ce qui donne :

$$x(t) = X_0 \left(1 - e^{-\alpha t} \left(\cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right) \right).$$

Dans le cas apériodique, $\alpha > \omega_0$ ($Q < \frac{1}{2}$), les racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique sont :

$r_1 = -\alpha - \omega$ et $r_2 = -\alpha + \omega$, en notant $\omega^2 = \alpha^2 - \omega_0^2$

et les coefficients A_1 et A_2 sont :

$$A_1 = \frac{r_2 X_0}{r_1 - r_2} = \frac{X_0}{2} \left(-1 + \frac{\alpha}{\omega} \right)$$

et
$$A_2 = \frac{r_1 X_0}{r_1 - r_2} = \frac{X_0}{2} \left(-1 - \frac{\alpha}{\omega} \right)$$

et l'évolution est donnée par :

$$x(t) = X_0 \left(1 - e^{-\alpha t} \left(\operatorname{ch} \omega t - \frac{\alpha}{\omega} \operatorname{sh} \omega t \right) \right).$$

2) Pour le cas critique, les racines r_1 et r_2 sont confondues : $r_1 = r_2 = -\omega_0$, et la solution doit être écrite sous la forme :

$$x(t) = X_0 (1 - (a + bt)e^{-\omega_0 t}).$$

Les conditions initiales imposant :

$a = 1$ et $-\omega_0 a + b = 0$, nous obtenons :

$$x(t) = X_0 (1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}).$$

3 Réponse à une excitation sinusoïdale

3.1. Régime transitoire et régime forcé

Observons la réponse d'un oscillateur harmonique amorti par frottement fluide, initialement au repos, soumis à une excitation sinusoïdale de pulsation ω appliquée à partir de l'instant $t = 0$ (doc. 7.) :

$$x_A(t) = x_{A_m} \cos(\omega t).$$

Nous constatons qu'après un régime transitoire dont la nature est liée aux conditions initiales à la valeur du facteur de qualité de l'oscillateur, un régime périodique permanent s'établit.

Nous pouvons interpréter ce fait en écrivant la réponse de l'oscillateur sous la forme (cf. § 2.1.1.) :

$$x(t) = x_1(t) + x_0(t).$$

Dans cette expression, la fonction $x_0(t)$ est une solution de l'équation du mouvement sans second membre, qui tend vers zéro lorsque le temps s'écoule, puisque l'oscillateur est amorti.

Par conséquent, la réponse oscillante qui se stabilise peu à peu sur les simulations observées n'est autre que la fonction $x_1(t)$. Plus précisément, la pulsation de $x_1(t)$ s'identifie à celle de l'excitation imposée.

Lorsque ce régime permanent sinusoïdal établi est atteint, nous avons :

$$x(t) = x_1(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

où les amplitudes x_m et la phase φ sont des fonctions de ω que nous étudierons par la suite.

Lorsqu'un oscillateur harmonique amorti par frottement fluide est soumis à une excitation sinusoïdale de pulsation ω , un régime permanent sinusoïdal de même pulsation que l'excitation imposée s'établit après un régime transitoire qui dépend du facteur de qualité de l'oscillateur.

Lorsque le régime sinusoïdal permanent est établi, la réponse de l'oscillateur correspond à un régime d'oscillations forcées, qui est imposé par l'excitation. Cette évolution, établie après le régime transitoire, ne fait pas intervenir les conditions initiales.

Remarque : Le terme $x_0(t)$ de régime transitoire tend vers zéro dans la mesure où l'oscillateur est amorti par les frottements. Pour le modèle de l'oscillateur harmonique parfait ($Q = \infty$), le régime permanent sinusoïdal ne pourrait pas s'établir, des oscillations à la pulsation propre ω_0 subsistant indéfiniment.

3.2. Obtention du régime permanent sinusoïdal

3.2.1. Techniques d'étude

En réponse à l'excitation : $x_A(t) = x_{A_m} \cos(\omega t)$, nous cherchons la solution particulière $x(t) = A(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$ de l'équation d'évolution :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 x_{A_m} \cos(\omega t).$$

Plusieurs méthodes, d'intérêt très inégal s'offrent à nous.

- *Méthode algébrique*

On explicite le premier membre de l'équation différentielle avec l'expression précédente de $x(t)$, puis on identifie les facteurs de $\cos(\omega t)$ et de $\sin(\omega t)$ des deux membres.

Cette méthode longue et fastidieuse est absolument à proscrire.

- *Méthode de la variable complexe*

La meilleure par son élégance et son efficacité. Elle est exposée ci-dessous.

- *Méthode de Fresnel*

Elle consiste à traduire géométriquement, dans le plan complexe, la méthode précédente.

3.2.2. Représentation complexe d'une grandeur sinusoïdale

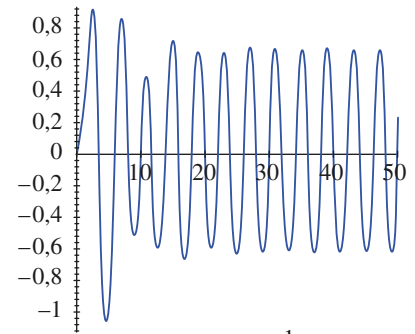
Soit $g(t) = g_m \cos(\omega t + \psi)$ une fonction sinusoïdale de nature physique quelconque.

Par définition, sa *représentation complexe* est la fonction $\underline{g}(t) = \underline{G} e^{j\omega t}$, avec $\underline{G} = g_m e^{j\psi}$ (\underline{G} : amplitude complexe et $j^2 = -1$).

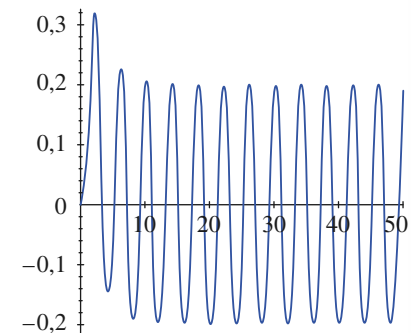
À $g(t) = g_m \cos(\omega t + \psi)$, on associe l'amplitude complexe $\underline{G} = g_m e^{j\psi}$, et inversement.

Retenons que $g_m = |\underline{G}|$ et $\psi = \arg(\underline{G})$, ainsi que la notation usuelle :

$$\underline{g}(t) = \underline{G} e^{j\omega t}.$$



$$Q = 3 > \frac{1}{2}$$



$$Q = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

Doc. 7. Réponse d'un oscillateur amorti à une excitation sinusoïdale imposée à $t = 0$.

Le retour à la notation réelle s'effectue en prenant la partie réelle de la grandeur complexe $g(t)$:

$$g(t) = \Re[e[\underline{g}(t)]] = \Re[\underline{G}e^{j\omega t}].$$

Remarque : La relation entre une fonction sinusoïdale et sa représentation complexe se conserve dans toutes les opérations linéaires : somme, multiplication par une constante. En revanche, elle ne se conserve pas dans un produit.

3.2.3. Application à l'oscillateur

En notation complexe, l'équation différentielle précédente s'écrit :

$$\frac{d^2 \underline{x}(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 \underline{x}(t) = \omega_0^2 x_{A_m} e^{j\omega t}.$$

La partie réelle $x(t)$ de la solution $\underline{x}(t)$ de cette équation différentielle est la réponse que nous recherchons.

L'efficacité de la méthode de la variable complexe résulte de la propriété suivante :

$$\underline{x}(t) = \underline{X}e^{j\omega t} \Rightarrow \frac{d \underline{x}(t)}{dt} = j\omega \underline{X}e^{j\omega t} = j\omega \underline{x} \Rightarrow \frac{d^2 \underline{x}(t)}{dt^2} = -\omega^2 \underline{X}e^{j\omega t} = -\omega^2 \underline{x}$$

de sorte que l'équation différentielle étudiée est transformée, en notation complexe, en une simple *équation algébrique* :

$$-\omega^2 \underline{x}(t) + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{x}(t) + \omega_0^2 \underline{x}(t) = \omega_0^2 x_{A_m} e^{j\omega t}$$

qui nous donne immédiatement l'amplitude complexe du déplacement de l'oscillateur excité :

$$\underline{x}(t) = \underline{X}e^{j\omega t}, \text{ avec } \underline{X} = \frac{\omega_0^2 x_{A_m}}{\omega_0^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} - \omega^2}.$$

Cette amplitude complexe nous permet alors d'identifier l'amplitude x_m de la réponse de l'oscillateur, et son déphasage φ par rapport à l'excitation :

$$\underline{x}(t) = x_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{X}e^{j\omega t}, \text{ soit } x_m = |\underline{X}| \text{ et } \varphi = \arg(\underline{X}).$$

3.3. Réponse harmonique en élongation

3.3.1. Amplitude de la réponse en élongation

De l'expression de l'amplitude complexe du déplacement, écrite sous la forme :

$$\underline{X} = x_{A_m} \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = x_{A_m} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j\frac{\omega}{Q}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

nous déduisons :

$$x_m(\omega) = |\underline{X}| = x_{A_m} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

pour simplifier cette écriture, nous pouvons introduire la variable sans dimension $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ et écrire :

$$x_m(u) = x_{A_m} \frac{1}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}} = x_{A_m} \frac{1}{\sqrt{F(u)}}.$$

Étudions les variations de l'élongation en fonction de la pulsation excitatrice, ou, ce qui revient au même, en fonction de u .

■ Comportements asymptotiques

À très basse fréquence, pour $\omega \ll \omega_0$ et donc $u \ll 1$, nous voyons que : $x_m = x_{A_m} (1 + \text{ordre}(u^2))$. La courbe part donc de la valeur x_{A_m} avec une tangente horizontale.

À très haute fréquence, soit $u \gg 1$, nous obtenons : $x_m \approx \frac{x_{A_m}}{u^2}$, donc une asymptote horizontale $x_m = 0$.

Pour la réponse en élongation, l'oscillateur harmonique amorti effectue un filtrage passe-bas.

■ Étude détaillée : influence de Q

Le document 8 précise la réponse obtenue pour différentes valeurs du facteur de qualité de l'oscillateur.

Pour détailler ce qui se produit entre les deux comportements limites précédents, écrivons :

$$\frac{dx_m}{du} = -\frac{1}{2}x_{A_m}[F(u)]^{-\frac{3}{2}}\frac{dF(u)}{du}, \text{ avec : } \frac{dF(u)}{du} = 4u\left(u^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2}\right).$$

Si $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, l'élongation est donc strictement décroissante lorsque u varie de 0 à l'infini.

En revanche, pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, elle passe par un maximum lorsque $u = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

L'oscillateur présente alors une *résonance* en élongation. Celle-ci survient à une pulsation un peu inférieure à la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

L'élongation maximale est alors :

$$x_{m,r} = x_{A_m} \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}.$$

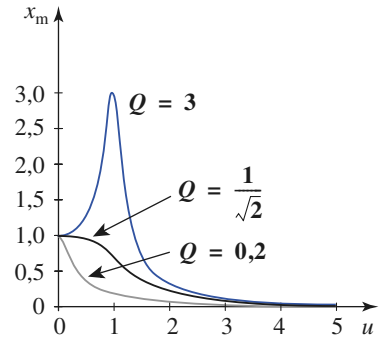
Pour de faibles amortissements (Q élevé), ce maximum est atteint pour une pulsation très proche de ω_0 , et il est pratiquement proportionnel à Q : $x_m \approx Qx_{A_m}$. Cette amplitude peut devenir très grande et causer la détérioration du résonateur. Pour de fortes amplitudes, le modèle du rappel linéaire serait aussi remis en cause.

Pour un amortissement suffisamment grand ($Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$), l'oscillateur harmonique amorti entre en résonance d'élongation à une pulsation ω_r légèrement inférieure à sa pulsation propre ω_0 ; si $Q \gg 1$: $x_m = Qx_{A_m}$.

3.3.2. Déphasage de la réponse en élongation

Sachant que $\underline{X} = x_{A_m} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}} = x_m e^{j\varphi}$,

φ est défini par : $\tan \varphi = -\frac{\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = -\frac{\frac{u}{Q}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ et $\sin \varphi < 0$.



Doc. 8. Variation de l'amplitude normalisée $x_{n_m} = \frac{x_m}{x_{A_m}}$ de la réponse en élongation en fonction de $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ pulsation normalisée de l'excitation pour différents amortissements.

■ Comportements asymptotiques

À basse fréquence ($u \ll 1$), $\underline{X} \approx x_{A_m}$ et $\varphi \approx 0$.

À la pulsation propre de l'oscillateur, ($u = 1$), $\underline{X} \approx x_{A_m}$ et $\varphi \approx -\frac{\pi}{2}$.

À haute fréquence ($u \gg 1$), $\underline{X} \approx -\frac{x_{A_m}}{u^2}$ et $\varphi \approx -\pi$.

À basse fréquence, excitation et élongation sont en phase, à la pulsation propre elles sont en quadrature ; à haute fréquence, elles sont en opposition de phase. Ce phénomène est général et peut être vérifié simplement en agitant une tige souple plus ou moins rapidement.

■ Étude détaillée : graphe $\varphi(\omega)$

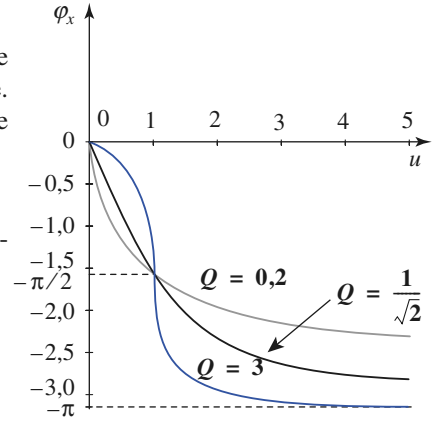
Nous pouvons plus précisément identifier le déphasage contenu dans l'élongation complexe :

$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{X}) = \arg\left(\frac{x_{A_m}}{1 + j\frac{u}{Q} - u^2}\right) = \arg(1 - u^2 - j\frac{u}{Q})$$

soit encore :

$$\varphi(\omega) = \arg\left(-j\left[\frac{u}{Q} + j(1 - u^2)\right]\right) = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1 - u^2}{\frac{u}{Q}}\right)$$

dont les variations sont tracées sur le document 9.



Doc. 9. Variation de déphasage $\varphi_x(u)$ de la réponse en élongation x par rapport à l'excitation ($u = \frac{\omega}{\omega_0}$ pulsation normalisée), pour différents amortissements.

Application 3

Amortissement optimal d'un vibrographe

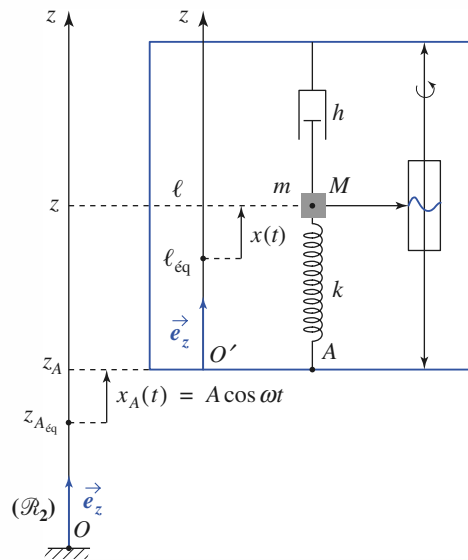
Un vibrographe est constitué d'un cadre rigide sur lequel sont suspendus un ressort de raideur k et de longueur propre ℓ_0 , un amortisseur de coefficient de frottement h et de masse m (doc. 10). Un stylet solidaire de la masse permet d'enregistrer son mouvement par rapport au cadre.

Le cadre est mis en mouvement vertical par rapport au référentiel du laboratoire \mathcal{R}_L , supposé galiléen :

$$z_A(t) = z_{A_{eq}} + A \cos \omega t.$$

1) On note ℓ_{eq} la longueur à l'équilibre du ressort et $x = \ell - \ell_{eq}$, l'élongation de la masse. Déterminer l'équation différentielle en x du mouvement de la masse par rapport au cadre.

2) Les vibrations du cadre étant des vibrations hautes fréquences, comment doit-on choisir l'amortissement de la masse pour que l'enregistrement de $x(t)$ reproduise au mieux, en régime établi, le mouvement $z_A(t)$ du cadre par rapport au référentiel du laboratoire ?



Doc. 10. Principe d'un vibrographe.

1) Notons par ℓ la longueur instantanée du ressort et par z la cote du point M dans le référentiel du laboratoire. Appliquons dans \mathcal{R}_L la relation fondamentale de la dynamique à la masse m :

$$m\ddot{z} = -mg - k(\ell - \ell_0) - h(\dot{z} - \dot{z}_A).$$

À l'équilibre, $0 = mg - k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0)$, d'où, en soustrayant membre à membre :

$$m\ddot{z} = -k(\ell - \ell_{\text{éq}}) - h(\dot{z} - \dot{z}_A),$$

Comme $x = \ell - \ell_{\text{éq}}$ et $z = z_A + \ell$, nous obtenons, en éliminant ℓ et z :

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = -\ddot{z}_A = \omega^2 A \cos \omega t$$

avec $2\alpha = \frac{h}{m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

2) Pour que l'enregistrement soit fidèle, il faut que $x(t)$ et $z_A(t)$ aient mêmes fréquences et mêmes amplitudes ou, tout au moins, des amplitudes proportionnelles. En régime établi, la fréquence de $x(t)$ est celle de $z_A(t)$.

Examinons la question de l'amplitude. Il faut éviter tout effet de filtrage sur la plage de fréquence utilisée, c'est-à-dire rendre, autant que possible, l'amplitude de la réponse $x(t)$ indépendante de la fréquence de l'excitation $z_A(t)$.

Explicitons l'amplitude de $x(t)$:

$$x_m = \frac{A\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}}$$

et posons $\Omega = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)$:

il vient :

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{A}{\sqrt{(\Omega^2 - 1)^2 + \left(\frac{2\alpha}{\omega_0}\right)^2 \Omega^2}} \\ &= \frac{A}{\sqrt{y(\Omega)}} \end{aligned}$$

avec
$$y(\Omega) = (\Omega^2 - 1)^2 + \left(\frac{2\alpha}{\omega_0}\right)^2 \Omega^2 = \Omega^4 + \left[\left(\frac{2\alpha}{\omega_0}\right)^2 - 2\right] \Omega^2 + 1.$$

Il s'agit de déterminer la valeur du coefficient de frottement α qui conserve à cette expression une valeur aussi voisine que possible de celle qu'elle a en haute fréquence à savoir $y(0) = 1$.

Pour cela, il faut que toutes les dérivées jusqu'à l'ordre trois, s'annulent en $\Omega = 0$.

Calculons ces dérivées :

$$\frac{dy}{d\Omega} = 4\Omega^3 + 2\left[\left(\frac{2\alpha}{\omega_0}\right)^2 - 2\right] \Omega,$$

$$\frac{d^2y}{d\Omega^2} = 12\Omega^2 + 2\left[\left(\frac{2\alpha}{\omega_0}\right)^2 - 2\right] \text{ et } \frac{d^3y}{d\Omega^3} = 24\Omega.$$

La valeur optimale de α doit satisfaire à :

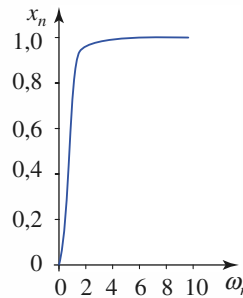
$$\left(\frac{2\alpha}{\omega_0}\right)^2 - 2 = 0, \text{ soit } \alpha = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \text{ ou } Q = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Le vibrographe est alors un *filtre passe-haut* avec une réponse en hautes fréquences aussi plate que possible.

Pour $\alpha = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$, l'expression de l'amplitude des elongations de la masse est :

$$x_m(\omega) = \frac{A}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\alpha}{\omega_0}\right)^4}}$$

Les variations de $x_m(\omega)$ sont données au document 11.



◀ Doc. 11. Réponse du vibrographe pour $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\left(x_n = \frac{x_m(\omega)}{A}; \omega_n = \frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

3.4. Réponse harmonique en vitesse

3.4.1. Amplitude $v_m(\omega)$ de la réponse en vitesse

Notons $\underline{v} = \underline{V}e^{j\omega t} = v_m e^{j(\omega t + \psi)}$ la représentation complexe de la vitesse.

Dans la mesure où $\underline{v} = j\omega \underline{x}$, nous avons :

$$\underline{V} = x_{A_m} \frac{j\omega}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = Q\omega_0 x_{A_m} \frac{j\frac{\omega}{Q}}{1 - u^2 + j\frac{u}{Q}}$$

ou encore :
$$\underline{V} = Q\omega_0 x_{A_m} \frac{1}{1 + jQ\left(u - \frac{1}{u}\right)}$$

ce qui donne pour l'amplitude de la vitesse :

$$v_m = Q\omega_0 x_{A_m} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(u - \frac{1}{u}\right)^2}}$$

Celle-ci tend vers zéro à très basse ou très haute fréquence ($u \ll 1$ ou $u \gg 1$), et passe par un maximum en $u = 1$.

Pour la réponse en vitesse, l'oscillateur harmonique amorti effectue un filtrage passe-bande, avec une résonance lorsque la fréquence excitatrice coïncide avec la fréquence propre de l'oscillateur.

Le document 12 illustre ce comportement. À la résonance, pour $\omega = \omega_0$, la valeur maximale $v_{m,r} = Q\omega_0 x_{A_m}$ peut devenir très importante, associée à une résonance aiguë, lorsque l'amortissement est faible.

3.4.2. Déphasage de la réponse en vitesse

Considérant la relation $\underline{v} = j\omega \underline{x}$, nous obtenons :

$$\psi(\omega) = \frac{\pi}{2} + \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1-u^2}{\frac{u}{Q}}\right) = \arctan\left[Q\left(\frac{1}{u} - u\right)\right]$$

dont le graphe est représenté sur le document 13.

À la résonance, la vitesse est en phase avec l'excitation.

3.5. Analyse harmonique

La réponse du système, en régime permanent sinusoïdal, à une excitation de la forme : $x_A(t) = X_0 \cos \omega t$ est de la forme $x(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$.

Faire l'analyse harmonique du système, c'est étudier sa réponse fréquentielle, autrement dit analyser les variations de l'amplitude $A(\omega)$ et du déphasage $\varphi(\omega)$ avec la pulsation ω ($\omega = 2\pi f$, où f est la fréquence de l'excitation).

3.5.1. Analyse de Fourier d'un signal

Nous admettons qu'un signal physique périodique $x_A(t)$, de période T , peut être écrit comme la superposition d'un ensemble de termes sinusoïdaux dont les fréquences sont des multiples entiers de la pulsion fondamentale $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$.

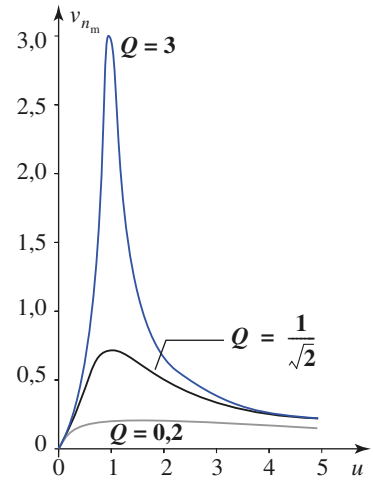
Ce résultat, appelé *théorème de Fourier*, se traduit par l'écriture :

$$x_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(\omega_n t + \alpha_n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n).$$

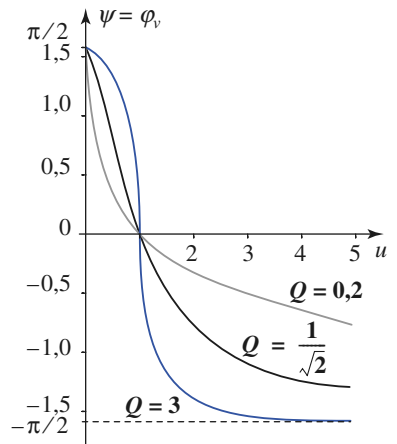
Cette série de termes sinusoïdaux est appelée *série de Fourier* du signal périodique. Décomposer le signal périodique en cette somme discrète de termes sinusoïdaux, c'est faire l'analyse de Fourier du signal.

Remarques

- Le calcul explicite des coefficients de cette série est au programme de deuxième année (cf. H-Prépa/Électronique, chapitre 12).
- Pour un signal physique non périodique, il faudrait remplacer cette sommation **discrète** par une sommation **continue**, l'intégrale de Fourier.



Doc. 12. Variation de l'amplitude : $v_{n_m} = \frac{v_m}{\omega_0 x_{A_m}}$ de la réponse en vitesse en fonction de la pulsation normalisée $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ de l'excitation, pour différents



Doc. 13. Variation de $\varphi_v(u)$ en fonction de $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ pulsation normalisée, pour différents amortissements.

Application 4

Déphasage de la vitesse par rapport à la force excitatrice

Soit $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = f(t)$ l'équation du mouvement d'un oscillateur soumis à la force excitatrice $f(t) = f_m \cos(\omega t + \psi)$. Calculer, en régime forcé :

- a) le déphasage φ_v de la vitesse $v(t)$ par rapport à la force ;
- b) le travail \mathcal{T} fourni à chaque période T , par la force à l'oscillateur :

a) Posons $2\alpha = \frac{h}{m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. En notation complexe, l'équation de l'oscillateur s'écrit :

$$\underline{X}[(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\alpha\omega] = \frac{F}{m}$$

où \underline{X} est l'amplitude complexe de l'élongation $x(t)$. L'amplitude complexe de la vitesse est $\underline{V} = j\omega\underline{X}$, d'où immédiatement son expression :

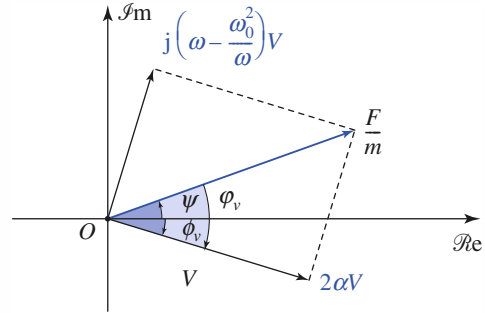
$$\underline{V} = \frac{j\omega \frac{F}{m}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\alpha\omega} = \frac{\frac{F}{m}}{2\alpha + j\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)} = V_m e^{j\varphi_v}$$

Dans le plan complexe (doc. 14), à partir de l'image de \underline{V} , on construit celle de $2\alpha\underline{V}$, puis celle de

$j\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)\underline{V}$. L'image de la somme est confondue avec celle de $\frac{F}{m}$.

Il apparaît alors que le déphasage : $\varphi_v = \phi_v - \psi$ de $v(t)$ par rapport à $f(t)$ peut être défini par :

$$\sin \varphi_v = \frac{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)v_m}{\frac{f_m}{m}}$$



Doc. 14. Une construction de Fresnel.

b) Explicitons l'expression du travail élémentaire $\delta\mathcal{T}$ de la force excitatrice :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{T} &= f v dt = f_m \cos(\omega t + \psi) v_m \cos(\omega t + \phi_v) dt \\ &= \frac{f_m v_m}{2} [\cos(\psi - \phi_v) + \cos(2\omega t + \psi + \phi_v)] dt. \end{aligned}$$

En intégrant sur une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, on obtient :

$$\mathcal{T} = \frac{f_m v_m}{2} T \cos \varphi_v$$

puisque la deuxième intégrale est nulle.

En utilisant l'expression de $\cos \varphi_v$, tirée de la construction de Fresnel :

$$\cos \varphi_v = \frac{2\alpha v_m}{\frac{f_m}{m}}$$

l'expression de \mathcal{T} s'écrit :

$$\mathcal{T} = \frac{f_m v_m}{2} \frac{2\alpha m v_m}{f_m} T = \frac{h v_m^2}{2} T$$

ce qui est aussi l'expression du travail des forces de frottement τ_f pendant une période.

3.5.2. Échelles caractéristiques de temps et de fréquences

En remarquant qu'à une échelle de temps caractéristique T correspond une fréquence caractéristique $f = \frac{1}{T}$, nous pouvons faire l'analyse qualitative suivante :

- un signal de fréquence élevée est un signal qui varie rapidement dans le temps, auquel est associé un intervalle de temps court ;

• à l'opposé, une *basse fréquence* correspond à un *temps caractéristique long*. Ainsi, dans la décomposition de Fourier d'un signal, les parties lentement variables sont associées aux termes de basse fréquence de la série de Fourier, tandis que les parties rapides (à l'extrême : une discontinuité de valeur) correspondent à des termes de haute fréquence.

3.5.3. Intérêt de l'analyse

Utilisons la propriété d'additivité des réponses de ce système linéaire : la réponse du système à une telle excitation est, après disparition du régime transitoire, la superposition des réponses à chaque terme. Nous pouvons ainsi établir les correspondances suivantes (*doc. 15.*).

signal exciteur	réponse $x(t) = x_1(t)$ en régime établi
$x_A(t) = x_{A_m} \cos[\omega t]$	$x(t) = x_m \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$ $= A(\omega)x_{A_m} \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$
$x_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos[\omega_n t + \alpha_n]$	$x_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A(\omega_n)c_n \cos[\omega_n t + \alpha_n + \varphi(\omega_n)]$

Doc. 15. *Additivité des réponses.*

Le facteur $A(\omega)$ est le rapport d'amplification introduit par le système, pour la pulsation ω . Nous voyons que :

L'analyse harmonique d'un système, c'est-à-dire la détermination de l'amplification $A(\omega)$ et du déphasage $\varphi(\omega)$ du système étudié, fournit des indications précieuses, puisqu'elle permet de prévoir la réponse du système à des signaux physiques variés.

Qualitativement, ce résultat permet de prévoir sans calcul certaines réponses du système.

Si, par exemple, $A(\omega)$ devient très faible au-delà d'une certaine fréquence f_c , la réponse du système sera pratiquement assimilable à la réponse aux termes « lents », c'est-à-dire associés à des fréquences inférieures à f_c , contenus dans le signal d'excitation.

De même, si nous sommes intéressés par la production d'un mouvement physique de « belle » amplitude, nous voyons qu'il est peu utile d'envoyer au système des signaux qui ne sont pas compatibles avec sa bande passante : nous faisons beaucoup d'efforts pour un résultat médiocre.

4 Analogies électromécaniques

4.1. Mise en évidence

On dit que deux systèmes physiques sont analogues quand ils réalisent deux représentations physiques d'un même système d'équations différentielles.

Suivant la nature des systèmes considérés, on parle d'analogies électromécaniques, électro-acoustiques, électrothermiques, etc. Dans ce qui suit, ne seront envisagées que les analogies électromécaniques à cause de leur importance pratique : simulations, machines analogiques, etc.

Comparons l'équation du mouvement de l'oscillateur mécanique décrit au § 1 :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = kx_A(t)$$

à l'équation différentielle d'un circuit (R, L, C) série (doc. 16) :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = e(t).$$

Nous remarquons que l'élongation x joue le même rôle que la charge q , que la vitesse $v = \frac{dx}{dt}$ joue un rôle identique à celui de l'intensité $i = \frac{dq}{dt}$, et que la force $kx_A(t)$ est l'équivalent de la f.e.m. $e(t)$.

En outre, la masse m est analogue à l'inductance L , le coefficient d'amortissement h à la résistance R , et à la raideur k se trouve associée l'inverse de la capacité $\frac{1}{C}$.

Concernant la masse m et l'inductance L , nous pouvons ajouter qu'à la relation fondamentale de la dynamique $f = m \frac{dv}{dt}$ est associée la relation liant la tension et le courant aux bornes de l'inductance $u = L \frac{di}{dt}$ et que l'énergie cinétique $\mathcal{E}_K = \frac{m}{2}v^2$ est analogue à l'énergie électromagnétique $\mathcal{E}_m = \frac{L}{2}i^2$.

S'agissant maintenant de la raideur k du ressort et de l'inverse de la capacité $\frac{1}{C}$, nous pouvons rapprocher des expressions de la force élastique $f = kx$ de celle de la d.d.p. $u = \frac{1}{C}q$ aux bornes du condensateur.

De même, les expressions de l'énergie potentielle du ressort $\mathcal{E}_p = \frac{k}{2}x^2$ et celle de l'énergie électrostatique du condensateur $\mathcal{E}_e = \frac{1}{2C}q^2$ sont formellement analogues.

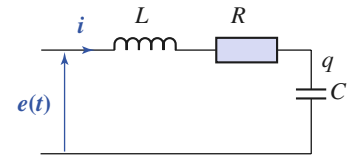
Enfin, l'amortisseur et le résistor sont deux éléments dissipatifs d'énergie.

La relation donnant la force exercée par l'amortisseur $f = hv$ est analogue à la loi d'Ohm $u = Ri$ pour la résistance électrique. Il en est de même pour les expressions des puissances dissipées par l'amortisseur $\mathcal{P} = hv^2$ et par la résistance $\mathcal{P} = Ri^2$.

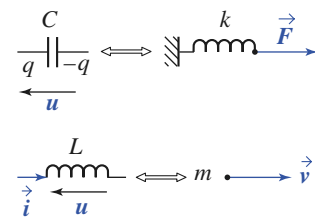
Pour nombreuses qu'elles soient, ces analogies sont formelles et ne correspondent pas à d'authentiques similitudes physiques.

Leur intérêt deviendra évident dès lors qu'il s'agira d'étudier le comportement de systèmes complexes constitués de parties mécaniques, électriques, acoustiques, etc.

En utilisant ces analogies, il sera possible, par exemple, de représenter la totalité du système par un réseau électrique au comportement équivalent, plus commode à étudier et dont les paramètres seront plus faciles à ajuster. Il est plus aisé de modifier la valeur d'une capacité que celle de la raideur d'un ressort et il est plus facile de mesurer l'intensité d'un courant que la vitesse d'un organe mécanique, etc.



Doc. 16. Circuit (R, L, C) série.



Doc. 17. Analogies électromécaniques. k a pour analogue $\frac{1}{C}$, et m a pour analogue L .

4.2. Tableau récapitulatif

mécanique		électricité	
élongation	x	charge	q
vitesse	v	intensité	i
force	f	tension	u
masse	m	inductance	L
coefficient de frottement	h	résistance	R
raideur	k	inverse de la capacité	$\frac{1}{C}$

◀ Doc. 18. Tableau des analogies électromécaniques.

4.3. Impédance mécanique

Pour exploiter commodément ces analogies électromécaniques, la notion d'impédance électrique a été généralisée. Ainsi a-t-on été amené à définir des impédances mécanique, acoustique, thermique, hydraulique, etc. Nous n'examinerons ci-dessous que les systèmes mécaniques à un degré de liberté et définirons l'impédance mécanique par analogie avec son homologue électrique.

Considérons un système mécanique en régime forcé dont la réponse à la force excitatrice sinusoïdale $f(t)$ est la vitesse $v(t)$ d'un de ses éléments.

On appelle impédance mécanique du système, la grandeur complexe définie par le rapport des amplitudes complexes : $\underline{Z} = \frac{\underline{F}}{\underline{V}}$.
 \underline{Z} s'exprime en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}$.

Calculons l'impédance mécanique de l'oscillateur étudié au § 1, en considérant qu'il est soumis à la force excitatrice $f(t) = kx_{A_m} \cos(\omega t + \psi)$. Il suffit pour cela de revenir à son équation écrite en termes complexes.

En posant $F = kx_{A_m}$, il vient :

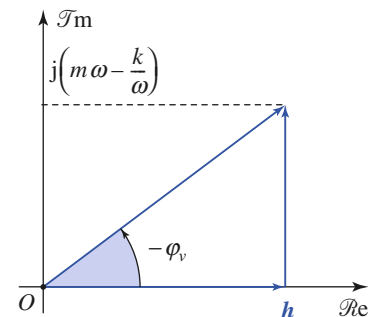
$$(-m\omega^2 + jh\omega + k)\underline{X} = \underline{F}, \text{ d'où } j\omega\underline{X}\left(j\omega m + h + \frac{k}{j\omega}\right) = \underline{F}.$$

Comme $\underline{V} = j\omega\underline{X}$, nous obtenons :

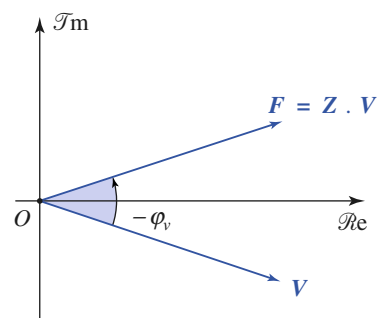
$$\underline{Z} = \frac{\underline{F}}{\underline{V}} = jm\omega + h + \frac{k}{j\omega} = h + j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right) = Ze^{-j\varphi_v}.$$

Le document 19 illustre la notion d'impédance mécanique.

Il sera utile de remarquer que l'argument de \underline{Z} est le déphasage de l'excitation $f(t)$ par rapport à $v(t)$, soit $-\varphi_v$, et que $\cos \varphi_v = \frac{h}{Z}$, où Z est le module de \underline{Z} .



Doc. 19. a. Construction de Fresnel de l'impédance mécanique \underline{Z} .



Doc. 19. b. Connaissant Z l'image de \underline{F} se déduit de celle de \underline{V} .

CQFR

- L'équation différentielle d'un oscillateur harmonique soumis à une excitation est de la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_A(t)$$

où ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur, Q son facteur de qualité, et $\omega_0^2 x_A(t)$ est le second membre représentant l'excitation appliquée au système.

● OBTENTION DE LA RÉPONSE DE L'OSCILLATEUR

Sa réponse en élongation $x(t) = x_0(t) + x_1(t)$ est la somme de :

- $x_0(t)$ solution générale de l'équation différentielle homogène ;
- $x_1(t)$ solution particulière de l'équation différentielle avec second membre.

Quand l'oscillateur est amorti, le régime libre de l'oscillateur, décrit par $x_0(t)$, disparaît avec le temps. Seul persiste ensuite le régime forcé décrit par $x_1(t)$. On appelle régime transitoire le régime représenté par $x(t)$, tant que $x_0(t)$ n'est pas négligeable devant $x_1(t)$.

● ADDITIVITÉ DES RÉPONSES

Quand plusieurs excitations agissent simultanément sur un oscillateur linéaire, la réponse de ce dernier est la somme de ses réponses à chacune des excitations prises isolément.

● RÉPONSE À UNE EXCITATION PERMANENTE SINUSOÏDALE

- Pour une excitation permanente imposée, la réponse de l'oscillateur linéaire amorti tend vers une réponse limite qui est une réponse à cette excitation permanente.
- Lorsqu'un oscillateur harmonique amorti par frottement fluide est soumis à une excitation sinusoïdale de pulsation ω , un régime permanent sinusoïdal de même pulsation que l'excitation imposée s'établit après un régime transitoire qui dépend du facteur de qualité de l'oscillateur.
- L'utilisation de la notation complexe, qui permet de substituer à l'équation différentielle du mouvement une équation algébrique, nous donne immédiatement accès à la réponse de l'oscillateur en régime sinusoïdal permanent établi.
- Pour la réponse en élongation, l'oscillateur harmonique amorti effectue un filtrage passe-bas. Pour un amortissement suffisamment grand ($Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$), l'oscillateur entre en résonance d'élongation à une pulsation ω_2 légèrement inférieure à sa pulsation propre ω_0 .
- Pour la réponse en vitesse, l'excitateur effectue un filtrage passe-bande, avec une résonance lorsque la fréquence excitatrice coïncide avec la fréquence propre de l'oscillateur (vitesse et force excitatrice sont alors en phase).
- L'analyse harmonique d'un système, c'est-à-dire la détermination de l'amplificateur $A(\omega)$ et du déphasage $\varphi(\omega)$ du système étudié, fournit des indications précieuses, puisqu'elle permet de prévoir la réponse du système à des signaux physiques variés.

● ANALOGIES ÉLECTROMÉCANIQUES

Le comportement des oscillateurs mécaniques et électriques font apparaître les analogies suivantes :

force f	→ tension u	élongation → charge q
vitesse v	→ intensité i	masse m → inductance L
coefficient de frottement h	→ résistance R	raideur k → inverse de la capacité $\frac{1}{C}$

L'impédance mécanique $\underline{Z} = \frac{F}{\underline{V}}$ est analogue de l'impédance électrique $\underline{Z} = \frac{U}{\underline{I}}$.

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Qu'est-ce que la réponse d'un oscillateur en régime sinusoïdal établi ?
- ✓ Quelles informations sont données par l'analyse harmonique de la réponse de l'oscillateur ?
- ✓ Quel est l'intérêt de la notation complexe pour l'analyse de la réponse harmonique ?
- ✓ Pour un oscillateur amorti par frottement fluide, y a-t-il toujours résonance de la réponse en élongation ? en vitesse ? Quels types de filtres correspondent à ces réponses ?
- ✓ Quels sont les analogues électriques d'une masse m ? d'un coefficient de raideur k ? d'un coefficient de frottement fluide h ?

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. Pour un oscillateur en régime forcé, le régime permanent est d'autant plus rapidement atteint :
 - a. que son facteur de qualité est élevé ($Q \gg 1$)
 - b. que son facteur de qualité est faible ($Q \ll 1$).
2. Soumis à une excitation permanente sinusoïdale de pulsation ω , un oscillateur amorti par frottement fluide tend vers le régime établi : $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$. La pulsation et l'amplitude excitatrices sont doublées. La réponse de l'oscillateur tend alors généralement vers :
 - a. $x(t) = 2A \cos(2\omega t + 2\varphi)$
 - b. $x(t) = A \cos(2\omega t + \varphi)$
 - c. $x(t) = 2A \cos(2\omega t + 2\varphi)$
 - d. autre chose.
3. La réponse d'un oscillateur à un échelon de déplacement imposé à $t = 0$ est $R(t)$. La réponse à un créneau de déplacement débutant à $t = t_0$ et de durée τ est donc :
 - a. $R(t - t_0) + R(t - t_0 + \tau)$
 - b. $R(t - t_0) - R(t - t_0 - \tau)$
 - c. $R(t - t_0) + R(t - t_0 - \tau)$
 - d. $R(t - t_0) - R(t - t_0 + \tau)$.
4. La réponse de l'oscillateur amorti, de facteur de qualité Q , à l'excitation $x_e \sin(\omega t)$ est $x_s \cos(\omega t + \varphi)$. La réponse au signal : $2x_e [\cos(\omega t) - \sin(\omega t)]$ est donc :
 - a. $2x_s [\sin(\omega t + \varphi) - \cos(\omega t + \varphi)]$
 - b. $2\sqrt{2}x_s \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{4}\right)$
 - c. $-2x_s [\cos(\omega t + \varphi) + \sin(\omega t + \varphi)]$
 - d. $2x_s [\cos(\omega t + \varphi) - \sin(\omega t + \varphi)]$
5. Un oscillateur amorti de facteur de qualité Q entre, en régime sinusoïdal, en résonance de déplacement ou de vitesse :
 - a. toujours
 - b. si $Q > \frac{1}{2}$
 - c. si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$
 - d. si $Q > 1$.
6. La réponse sinusoïdale en vitesse de l'oscillateur amorti de facteur de qualité Q est en quadrature avec la force excitatrice :
 - a. à basse fréquence
 - b. à la résonance
 - c. à haute fréquence.

► Solution, page 118.

Exercice commenté

Excitation d'un oscillateur à sa fréquence propre

ÉNONCÉ

On considère un oscillateur à un degré de liberté, au repos, soumis à partir de l'instant $t = 0$ à une excitation sinusoïdale de pulsation coïncidant avec sa pulsation propre ω_0 .

Son équation d'évolution est de la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = a\omega_0^2 \cos \omega_0 t.$$

1) On étudie, dans un premier temps, le cas d'un oscillateur idéal.

En utilisant la notation complexe, nous cherchons la solution de l'équation du mouvement sous la forme : $x(t) = A(t)e^{j\omega_0 t}$.

a) Quelle est la valeur de Q correspondante ? Quel phénomène peut-on attendre, compte tenu de la nature de l'excitation imposée ?

b) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la fonction $A(t)$? Résoudre celle-ci compte tenu des conditions initiales.

c) Indiquer l'allure de la solution réelle $x(t)$ ainsi obtenue. En quoi celle-ci est-elle physiquement inacceptable ?

2) L'oscillateur est réel, mais très peu amorti : on mènera donc les calculs en considérant le facteur $\frac{1}{Q}$ comme un terme infinitésimal, et on négligera dans les calculs les termes indépendants du temps d'ordre supérieur ou égal à 2 en $\frac{1}{Q}$.

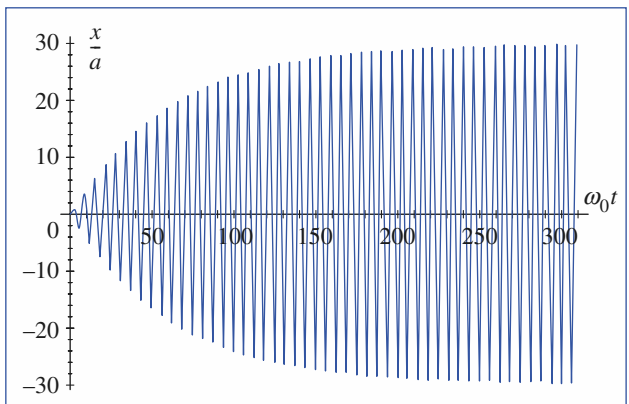
a) Quelle valeur approchée donne-t-on dans ces conditions à la pseudo-pulsation ω de l'oscillateur amorti ?

b) Quel est le temps τ caractérisant l'établissement du régime permanent sinusoïdal de pulsation ω_0 ?

c) Déterminer complètement la solution $x(t)$ de l'équation du mouvement ?

d) Simplifier son expression lorsque $t \ll \tau$. Commenter ce résultat ?

e) Simplifier de même $x(t)$ pour $t \gg \tau$, et commenter le graphe de $x(t)$ ci-contre, qui a été obtenu par simulation du mouvement.



CONSEILS

La solution de l'équation homogène est de la forme $A \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

La résolution de l'équation par la méthode de variation de la constante conduirait à rechercher une solution de la forme :

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Il est alors nécessaire de développer les calculs, puis d'identifier des termes en sinus ou cosinus... la méthode proposée ici est analogue, mais fait appel à la notation complexe, ce qui allège en principe les calculs...

SOLUTION

1) L'oscillateur est idéal.

a) L'oscillateur idéal correspond à $Q = \infty$. Excité à sa pulsation propre, cet oscillateur harmonique doit entrer en résonance, et son amplitude doit diverger.

b) En reportant la solution proposée dans l'équation du mouvement :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = a\omega_0^2 e^{j\omega_0 t}$$

nous obtenons :

$$\underline{A}''(t) + 2j\omega_0 \underline{A}'(t) = a\omega_0^2, \text{ soit : } \underline{A}'(t) = -j\frac{a\omega_0}{2} + \text{cte } e^{-2j\omega_0 t},$$

$$\text{soit } \underline{A}(t) = -j\frac{a\omega_0 t}{2} + \underline{\alpha} e^{-2j\omega_0 t} + \underline{\beta}.$$

Exercice commenté

Lorsqu'on utilise la notation complexe, on a tout intérêt à la conserver jusqu'au bout. On identifie le signal réel au dernier moment, en prenant la partie réelle du résultat final.

Le cas idéal $\varphi = \infty$ n'est qu'un modèle : nous en voyons ici une limite.

Le caractère fini du régime transitoire est lié à l'existence du frottement : τ est fini si Q n'est pas infini !

La première question nous montre clairement que dans le cas idéal, le régime sinusoïdal permanent n'est jamais atteint !

Cette partie est beaucoup plus proche du cours. Nous utilisons les méthodes de détermination de la solution déjà étudiées... et la notation complexe... Jusqu'à l'avant-dernière ligne !

La solution recherchée est donc de la forme :

$$\underline{x}(t) = -j \frac{a\omega_0 t}{2} e^{j\omega_0 t} + \underline{\alpha} e^{-j\omega_0 t} + \underline{\beta} e^{j\omega_0 t}.$$

Les conditions initiales $x(0) = 0$ et $v(0) = 0$ imposent, en notation complexe :

$$\begin{cases} \underline{\alpha} + \underline{\beta} = 0 \\ -j \frac{a\omega_0}{2} + j\omega_0(-\underline{\alpha} + \underline{\beta}) = 0 \end{cases},$$

soit :

$$\underline{\alpha} = -\underline{\beta} = -\frac{a}{4}.$$

c) L'amplitude complexe du déplacement de l'oscillateur vaut donc :

$$\underline{x}(t) = \frac{a}{2} (-j\omega_0 t e^{j\omega_0 t} + j \sin \omega_0 t).$$

Le mouvement est donné par :

$$x(t) = \Re e[\underline{x}(t)] = \frac{a\omega_0 t}{2} \sin \omega_0 t.$$

L'oscillateur harmonique oscille avec une amplitude croissante. Ce résultat est inacceptable pour $t \rightarrow \infty$ puisqu'il correspond à une divergence de l'amplitude d'oscillation.

2) a) La pseudo-pulsation est $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{8Q^2}\right)$, que nous confondrons avec ω_0 à l'ordre d'approximation envisagé dans les calculs.

b) Le temps τ caractérisant le régime transitoire est $\tau = \frac{Q}{\omega_0}$.

c) La solution de l'équation du mouvement est, en notation complexe, de la forme :

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t)$$

où $x_0(t)$ est solution de l'équation homogène, et $x_1(t)$ solution particulière avec second membre.

En utilisant la notation complexe, nous obtenons :

$$\underline{x}_1(t) = \frac{a\omega_0^2}{\omega_0^2 + j\frac{\omega_0^2}{Q} - \omega_0^2} e^{j\omega_0 t} = -jQa e^{j\omega_0 t}$$

en notation complexe, nous pouvons écrire :

$$\underline{x}_0(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} (\underline{A} e^{j\omega t} + \underline{B} e^{-j\omega t}).$$

La solution complète : $\underline{x}(t) = -jQa e^{j\omega_0 t} + e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} (\underline{A} e^{j\omega t} + \underline{B} e^{-j\omega t})$ doit satisfaire les conditions initiales, qui imposent :

$$\begin{cases} \underline{A} + \underline{B} = jQa \\ j\omega(\underline{A} - \underline{B}) - \frac{\omega_0}{2Q}(\underline{A} + \underline{B}) = -Qa\omega_0 \end{cases}.$$

Nous obtenons :

$$\underline{A} \approx \frac{Qa}{2} \left[j + \frac{1}{2Q} \right] \quad \text{et} \quad \underline{B} \approx \frac{Qa}{2} \left[-\frac{1}{2Q} \right].$$

Le déplacement complexe est alors :

$$\underline{x}(t) = Qa \left[-je^{j\omega_0 t} + e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \left(\frac{j}{2Q} \sin \omega t + je^{j\omega t} \right) \right]$$

donc en notation réelle :

$$x(t) = Qa \left[\sin \omega_0 t - e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \sin \omega t \right].$$

Attention : $\omega \approx \omega_0$ si Q est grand, mais cela n'implique pas $\sin \omega_0 t \approx \sin \omega t$. Ceci n'est valable que pour $t \ll \frac{2\pi}{|\omega_0 - \omega|}$, ce qui est le cas dans cette question.

Le régime permanent prend un certain temps à s'établir, mais il finit toujours pas s'installer pour $\frac{1}{Q} > 0$.

d) Pour $t \ll \tau$, nous avons : $e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \approx 1 - \frac{\omega_0 t}{2Q}$ et $\sin \omega t \approx \sin \omega_0 t$, donc :

$$x(t) \approx \frac{a\omega_0 t}{2} \sin \omega_0 t$$

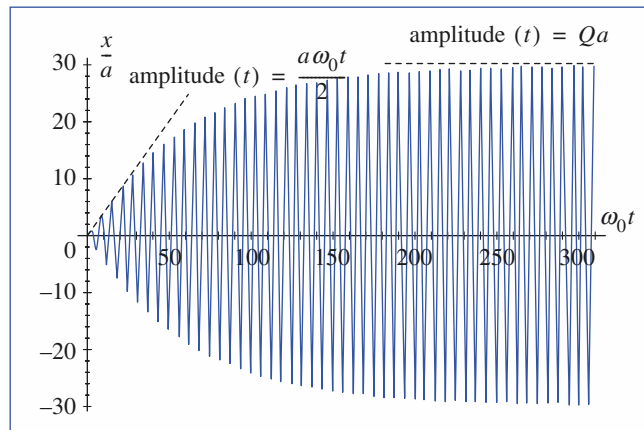
qui est la solution obtenue pour l'oscillateur avec frottement négligé.

e) Pour $t \gg \tau$, le terme exponentiel réel est négligeable et il reste :

$$x(t) \approx Qa \sin \omega_0 t.$$

L'amplitude s'est alors stabilisée à une valeur finie et importante : on est à la résonance.

La simulation fait bien apparaître ces deux régimes limites : croissance quasi linéaire de l'amplitude avec le temps au début, puis stabilisation à une forte amplitude d'oscillation à long terme.



Exercices

1 Bande passante de la réponse en vitesse

Le système étudié est l'oscillateur mécanique du document 1 page 96 du cours dont l'équation du mouvement est :

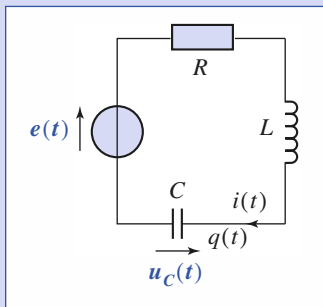
$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_A(t).$$

Soumis à l'excitation sinusoïdale $x_A(t) = x_{A_m} \cos(\omega t)$, on s'intéresse à sa réponse en vitesse. On appelle *bande passante* (à 3 dB) la bande de fréquences $\Delta f = (f_2 - f_1)$ à l'intérieur de laquelle l'amplitude de la vitesse $V(\omega)$ satisfait à l'inégalité $V(\omega) \geq \frac{V_r}{\sqrt{2}}$, où V_r est l'amplitude de la vitesse à la résonance. Calculer Δf .

2 Réponse forcée d'un circuit (R, L, C) à une f.e.m. sinusoïdale, analogie électromécanique

1) Déterminer la réponse forcée $q(t)$ d'un circuit (R, L, C) série soumis à une f.e.m. sinusoïdale $e(t) = E \sin \omega t$.

2) Proposer un équivalent mécanique de ce système et indiquer sans calcul sa réponse en déplacement.



3 Réponses d'un oscillateur harmonique amorti

Considérons un oscillateur harmonique faiblement amorti d'équation $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m}$, en équilibre et au repos

à l'origine O du référentiel. À $t = 0$, on lui applique un échelon de force $f(t) = F H(t)$. Déterminer sa réponse en élongation $x(t)$ et sa réponse en vitesse $\dot{x}(t)$.

($H(t) = 0$ à $t < 0$, $H(t) = 1$ à $t > 0$).

4 Réponse d'un oscillateur à différents types de déplacements

Une masse m est suspendue à l'extrémité M d'un ressort vertical de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . L'autre

extrémité se trouve en A . Le système étant en équilibre et au repos, on impose à l'extrémité A un déplacement vertical $z_A(t)$ à partir de sa position initiale. On néglige tout frottement.

1) La position de M est repérée par son élongation $z(t)$ à partir de sa position d'équilibre. Établir l'équation différentielle de son mouvement en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

2) Étudier la réponse en élongation $z(t)$ de l'oscillateur dans les cas suivants :

a) échelon de déplacement : $z_A(t) = a H(t)$, avec $a > 0$; $H(t) = 0$ pour $t < 0$ et $H(t) = 1$ pour $t \geq 0$.

b) rampe de déplacement : $z_A(t) = \frac{a}{\tau} t$ pour $t > 0$.

$$c) z_A(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ \frac{a}{\tau} t, & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ a, & \text{si } \tau < t \end{cases}$$

On fait tendre τ vers zéro, retrouver la réponse de l'oscillateur à l'échelon $z_A(t) = a H(t)$.

5 Définition énergétique de la bande passante d'un oscillateur

Soit $m\ddot{x}(t) + h\dot{x}(t) + kx(t) = f_m \cos(\omega t)$ l'équation d'un oscillateur amorti soumis à une force sinusoïdale.

1) Montrer que la puissance moyenne fournie par la force excitatrice est :

$$\langle \mathcal{P}_f \rangle = \frac{f_m^2}{2h} \cos^2 \varphi_v$$

où φ_v est le déphasage de la vitesse par rapport à la force.

2) On appelle bande passante Δf (ou $\Delta \omega$) de l'oscillateur, la bande de fréquence (ou de pulsations) à l'intérieur de laquelle $\frac{\langle \mathcal{P}_f \rangle}{\langle \mathcal{P}_f \rangle_{\max}} \geq \frac{1}{2}$. Calculer Δf (ou $\Delta \omega$).

6 Excitation sinusoïdale de durée limitée

Soit un oscillateur idéal (isé) à un degré de liberté, soumis à partir de l'instant $t = 0$ à une excitation sinusoïdale de pulsation ω .

Son équation d'évolution est donc de la forme :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m}.$$

1) L'excitation est appliquée à partir de $t = 0$:

$$f(t) = f_m \sin \omega t \text{ à } t > 0 \text{ (} \omega \neq \omega_0 \text{)}.$$

En recherchant la solution de l'équation du mouvement sous la forme : $\underline{x}(t) = \underline{x}_0(t) - \underline{x}_1(t)$, somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière, obtenir la réponse en déplacement $x(t)$ de l'oscillateur harmonique.

2) L'excitation est résonnante : $\omega = \omega_0$.

a) La solution obtenue n'est pas directement exploitable. On note donc $\omega = \omega_0(1 + \varepsilon)$, avec $|\varepsilon| \ll 1$.

Effectuer un développement limité de l'expression obtenue pour lever l'indétermination posée par le cas $\omega = \omega_0$.

b) Retrouver cette solution en utilisant la notation complexe, par la méthode de variation de la constante, en posant : $x(t) = A(t)e^{j\omega_0 t}$.

3) L'excitation est résonnante : $\omega = \omega_0$, et de durée limitée : l'excitation $f(t) = f_m \sin \omega t$ est appliquée pendant une période : $0 < t < \frac{2\pi}{\omega_0}$.

a) Déterminer par une méthode précédente la solution $x(t)$ à tout instant.

b) Retrouver celle-ci en utilisant une superposition de réponse, la force appliquée pouvant s'écrire sous la forme d'une somme d'excitations élémentaires.

7

Oscillations forcées d'un véhicule sur une route ondulée

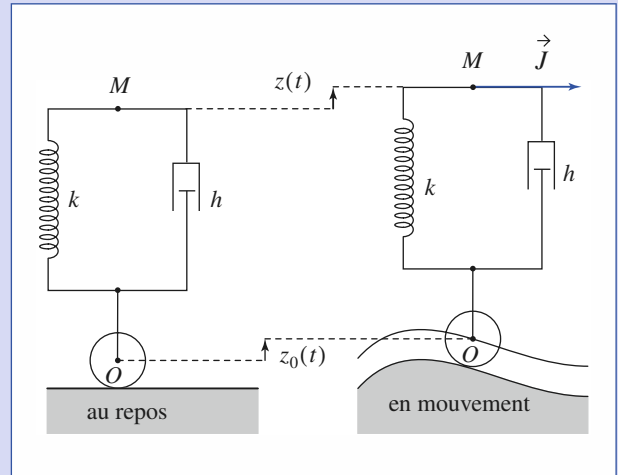
Un véhicule automobile est sommairement modélisé par une masse m placée en M et reposant sur une roue de centre O , par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k mis en parallèle sur un amortisseur de coefficient de frottement h . En toutes circonstances, l'axe OM reste vertical. On se propose d'examiner le comportement du véhicule lorsqu'il a la vitesse v sur une route dont le profil impose au centre O de la roue une elongation $z_O(t) = a \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$ par rapport à sa position d'équilibre. On repère le mouvement de la masse par elongation $z(t)$ par rapport à sa position d'équilibre quand le véhicule est repos.

On rappelle qu'un amortisseur placé entre O et M exerce sur M une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse relative de M par rapport à A : $f_r = -h(\dot{z}_M - \dot{z}_O)$.

1) Établir l'équation différentielle en $z(t)$ du mouvement de la masse, lorsque le véhicule se déplace à vitesse constante v .

2) Déterminer l'amplitude du mouvement d'oscillation vertical du véhicule en régime permanent.

À quelle allure convient-il de rouler pour que cette amplitude soit aussi faible que possible ?



8

La couleur du ciel

Pour décrire les interactions entre une onde lumineuse caractérisée par le vecteur champ électrique $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos \omega t$ et les électrons de la couche externe d'un atome, on utilise l'hypothèse de l'électron élastiquement lié de J.-J. Thomson.

1) Établir l'équation du mouvement d'un tel électron quand il est excité par $\vec{E}(t)$ en admettant qu'il est rappelé vers le centre O de l'atome par une force $\vec{f} = -k\vec{OM}$ et qu'il est freiné par une force proportionnelle à sa vitesse $\vec{f}_r = -h\vec{v}$. On notera par q et m respectivement la charge et la masse de l'électron et on posera :

$$2\alpha = \frac{h}{m} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

2) Démontrer qu'en régime établi, l'électron oscille parallèlement à \vec{E}_0 . On notera par x son elongation.

3) On considère que la réponse de l'atome à l'excitation est l'accélération a_x de son électron. Établir l'expression de l'accélération complexe.

4) Cet atome est éclairé par de la lumière blanche composée d'ondes dont les pulsations sont comprises entre ω_1 (rouge) et ω_2 (violet). Sachant que α et ω_2 sont tous deux très inférieurs à ω_0 , montrer que, dans ces conditions, l'amplitude a_x de l'accélération est proportionnelle à ω^2 .

5) Sachant qu'un électron accéléré rayonne une puissance \mathcal{P} lumineuse proportionnelle au carré de son accélération, expliquer pourquoi la couleur du ciel est bleue.

Corrigés

Solution du tac au tac, page 112.

1. Faux : a, b
2. Vrai : d Faux : a, b, c
3. Vrai : b Faux : a, c, d
4. Vrai : b, c Faux : a, d
5. Vrai : c Faux : a, b, d pour le déplacement
Vrai : a Faux : b, c, d pour la vitesse
6. Vrai : a, c Faux : b

1 Reprenons l'équation du mouvement forcé, en régime sinusoïdal permanent établi, en utilisant la notation complexe :

$$\left[-\omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right] \underline{x} = \omega_0^2 x_{A_0} e^{j\omega t}$$

ce qui donne pour la vitesse $\underline{v} = j\omega \underline{x}$:

$$\underline{v} = \omega_0 Q x_{A_0} e^{j\omega t} \frac{j\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = V_{\max} e^{j\omega t} \underline{F}(u)$$

en notant :

$$u = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \underline{F}(u) = \frac{1}{1 + jQ\left(u - \frac{1}{u}\right)}, \quad \text{et } V_{\max} = Q\omega_0 x_{A_0}.$$

L'amplitude de la vitesse est :

$$V(u) = |\underline{v}| = \frac{V_{\max}}{\sqrt{1 + Q^2\left(u - \frac{1}{u}\right)^2}}$$

Elle est maximale et vaut V_{\max} lorsque $u = 1$, soit $\omega = \omega_0$: $V_r = V_{\max}$.

Cette amplitude vaut $\frac{V_r}{\sqrt{2}}$ lorsque :

$$Q\left(u - \frac{1}{u}\right) = \pm 1$$

ce qui conduit à l'équation du second degré : $u^2 \pm \left(\frac{1}{Q}u - 1\right) = 0$ dont les solutions sont :

$$u = \pm \frac{1}{2Q} \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$$

Les racines qui nous intéressent sont les solutions positives, soit :

$$u = \pm \frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$$

Elles nous indiquent la bande passante recherchée :

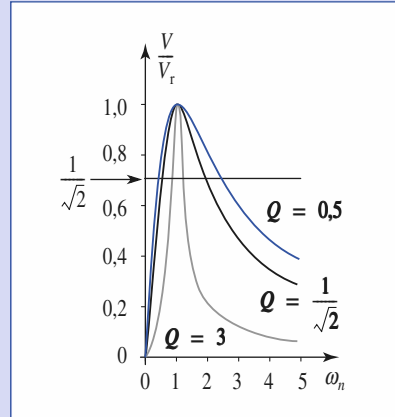
$$\Delta\omega = \omega^2 \Delta u = \omega_0 \cdot \frac{1}{Q}, \quad \text{soit : } Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

$$\text{d'où : } \Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

Notons la relation très générale entre bande passante et temps de relaxation de l'énergie :

$$\Delta\omega \tau = 1.$$

La bande passante d'un oscillateur est d'autant plus étroite que le temps de relaxation de l'énergie est plus long, c'est-à-dire que l'oscillateur est moins amorti.



2 1) L'équation électrique du circuit s'écrit :

$$e(t) = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} \quad \text{avec } i = \frac{dq}{dt}, \quad \text{soit :}$$

$$\ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{E}{L} \sin(\omega t)$$

$$\text{en notant : } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et } Q = \frac{L\omega_0}{R}.$$

En notation complexe, nous aurons : $\underline{q} = q_0 e^{j(\omega t + \phi)}$, avec :

$$\left(-\omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right) q = \frac{E}{L} e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\text{ce qui donne : } q_0 e^{j\phi} = \frac{-j\frac{E}{L}}{\omega_0^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q} - \omega^2} = \frac{-j\frac{E}{L}}{\underline{D}(\omega)}$$

et permet d'identifier :

$$\begin{cases} q_0 = \frac{E}{L\omega_0^2} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ e^{j\phi} = -j \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - \left(j\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)}{\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}\right|^2} \end{cases}$$

La dernière égalité nous donne :

$$\cos\phi = -\frac{\frac{\omega}{Q\omega_0}}{\left|\underline{D}(\omega)\right|^2} < 0 \quad \text{et} \quad \sin\phi = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}{\left|\underline{D}(\omega)\right|^2}$$

ce qui détermine le déphasage entre la charge et la tension excitatrice.

2) Passons aux équivalents développés en cours :

$$\begin{cases} e(t) = E \sin \omega t \rightarrow F(t) = F_0 \sin \omega t \\ L \rightarrow m \\ C \rightarrow \frac{1}{k} \\ R \rightarrow h \\ q \rightarrow x \\ i \rightarrow v \end{cases}$$

qui donnent l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t.$$

Nous obtenons par simple analogie :

$$\underline{x} = x_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

avec :

$$\begin{cases} x_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ \cos \phi \text{ et } \sin \phi \text{ identiques} \end{cases}$$

en notant : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{m\omega_0}{h}$.

3

Pour $t > 0$, l'équation du mouvement est :

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}.$$

Une solution particulière évidente de l'équation avec second membre est :

$$x = \frac{F}{m\omega_0^2} = \text{cte.}$$

Pour l'équation homogène, l'équation caractéristique est :

$$r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 = 0$$

dont les solutions sont (l'oscillateur est *faiblement* amorti) :

$$r = -\alpha + j\omega, \text{ avec } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

Nous en déduisons le déplacement :

$$x(t) = \frac{F}{m\omega_0^2} + [A \cos(\omega t + B \sin \omega t)] e^{-\alpha t}$$

où les constantes A et B sont données par les conditions initiales :

$$\text{à } t=0 \begin{cases} x(0) = 0 = \frac{F}{\omega_0^2} + A \\ v(0) = 0 = -A\alpha + B\omega \end{cases}$$

dont nous obtenons :

$$A = -\frac{F}{m\omega_0^2} \text{ et } B = -\frac{F}{m\omega_0^2} \frac{\alpha}{\omega}.$$

Le déplacement vaut donc :

$$x(t) = \frac{F}{m\omega_0^2} \left[1 - e^{-\alpha t} \left[\cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right] \right].$$

Par dérivation, le régime en vitesse est :

$$v(t) = \frac{F}{m\omega_0^2} e^{-\alpha t} \sin \omega t.$$

4

1) L'équation du mouvement s'écrit : $\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_A(t)$.

2) a) La solution particulière $z = \text{cte} = a$ convient.

La solution générale est de la forme :

$$z(t) = a + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t.$$

Pour $z = 0$ et $\dot{z} = 0$ à $t = 0$, il vient $A = -a$ et $B = 0$.

Finalement : $z(t) = a(1 - \cos \omega_0 t)$.

b) Nous pouvons chercher une solution particulière de la forme :

$z(t) = At + B$, soit, en remplaçant dans l'équation d'évolution :

$$\omega_0^2(At + B) = \omega_0^2 \frac{at}{\tau},$$

donc : $A = \frac{a}{\tau}$ et $B = 0$.

La solution particulière $z = a \frac{t}{\tau}$ convient donc.

La solution générale $z(t) = a \frac{t}{\tau} + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$, confrontée aux

conditions initiales : $z = 0$ et $\dot{z} = 0$ à $t = 0$, donne :

$$A = 0 \text{ et } B = -\frac{a}{\omega_0 \tau}.$$

Finalement, il vient : $z(t) = \frac{a}{\omega_0 \tau} (\omega_0 t - \sin \omega_0 t)$.

c) Pour $0 \leq t \leq \tau$, la solution précédente peut être utilisée :

$$z(0 \leq t \leq \tau) = \frac{a}{\omega_0 \tau} (\omega_0 t - \sin \omega_0 t).$$

Pour $t \geq \tau$, nous aurons une solution de la forme :

$$z(t) = a + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t,$$

avec à $t = \tau$: $z = a \left(1 - \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau}\right)$ et $\dot{z} = \frac{a}{\tau} (1 - \cos \omega_0 \tau)$,

$$\text{ce qui donne : } \begin{cases} A \cos \omega_0 \tau + B \sin \omega_0 \tau = -a \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau} \\ -A \sin \omega_0 \tau + B \cos \omega_0 \tau = \frac{a}{\omega_0 \tau} (1 - \cos \omega_0 \tau) \end{cases}$$

$$\text{soit encore : } \begin{cases} A = -\frac{a}{\omega_0 \tau} \sin \omega_0 \tau \\ B = \frac{a}{\omega_0 \tau} (\cos \omega_0 \tau - 1). \end{cases}$$

La solution est donc, pour $t \geq \tau$:

$$z(t \geq \tau) = a \left[1 + \left(\frac{\cos \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau} - 1 \right) \sin \omega_0 t - \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau} \cos \omega_0 t \right].$$

$$\text{quand } \omega_0 \tau \approx 0 : \begin{cases} \frac{\cos \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau} - 1 \approx \frac{\omega_0 \tau}{2} \approx 0 \\ \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau} \approx 1 \end{cases}$$

on obtient alors : $z(t \geq 0) = a[1 - \cos \omega_0 t]$, résultat identique au **2) a)**.

5

1) En régime forcé sinusoïdal, la valeur maximale de v peut s'exprimer en fonction de f_m et φ_v par $v_m = \frac{f_m}{h} \cos \varphi_v$.

La puissance instantanée est :

$$\mathcal{P}_f = f_m v_m \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi_v) = \frac{1}{2} f_m v_m [\cos(2\omega t + \varphi_v) + \cos \varphi_v].$$

La valeur moyenne de $\cos(2\omega t + \varphi_v)$ est nulle, d'où :

$$\langle \mathcal{P}_f \rangle = \frac{1}{2} f_m v_m \cos \varphi_v = \frac{1}{2} \frac{f_m^2}{h} \cos^2 \varphi_v.$$

Corrigés

2) En utilisant la notation complexe, nous avons :

$$\underline{v} = \frac{j\omega_0^2 \frac{f_m}{m} e^{j\omega t}}{\omega_0^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q} - \omega^2} = \frac{Q\omega_0}{m} \frac{f_m e^{j\omega t}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = v_m e^{j(\omega t + \varphi_v)}$$

où nous identifions :

$$v_m = \frac{Q\omega_0}{m} \frac{f_m}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \cos \varphi_v = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

avec $-\frac{\pi}{2} < \varphi_v < \frac{\pi}{2}$, soit $\varphi_v = \arctan\left[Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$.

La puissance moyenne est donc :

$$\langle \mathcal{P}_f \rangle = \frac{f_m^2}{2h} \frac{1}{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2},$$

soit : $\mathcal{P}_{\max} = \frac{1}{2} \frac{f_m^2}{h}$.

Nous avons $\mathcal{P}_f = \frac{\mathcal{P}_{\max}}{2}$ si $Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \pm 1$.

La résolution de cette équation du second degré :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \pm \frac{1}{Q}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 1 = 0$$

donne les racines positives :

$$\omega = \omega_0 \left[\pm \frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \right]$$

d'où la bande passante énergétique :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \quad (\text{ou } \Delta f = \frac{f_0}{Q}).$$

6

1) La solution de l'équation homogène est de la forme :

$$x_0(t) = \alpha e^{j\omega_0 t} + \beta e^{-j\omega_0 t}.$$

La solution particulière, sinusoïdale, de pulsation ω , s'identifie en notant

$$\underline{f}(t) = -j f_m e^{j\omega t}, \quad (x_1(t) \text{ étant alors la partie réelle de } \underline{x}_1(t)), \text{ soit :}$$

$$\underline{x}_1(t) = -j \frac{f_m}{m} \frac{e^{j\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

La solution (dont $x(t)$ sera la partie réelle) :

$$\underline{x}(t) = -j \frac{f_m}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{j\omega t} + \underline{\alpha} e^{j\omega t} + \underline{\beta} e^{-j\omega_0 t}$$

doit satisfaire les conditions initiales (déplacement et vitesse nuls à $t = 0$), ce qui nous donne finalement :

$$\underline{x}(t) = \frac{f_m}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left(-j e^{j\omega t} + j \frac{\omega + \omega_0}{2\omega_0} e^{j\omega_0 t} - j \frac{\omega - \omega_0}{2\omega_0} e^{-j\omega_0 t} \right)$$

soit en notation réelle :

$$x(t) = \frac{f_m}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right).$$

2) a) Développons l'expression obtenue pour $\varepsilon \ll 1$ (on suppose aussi $\varepsilon \omega_0 t \ll 1$) :

$$x(t) = \frac{f_m}{m\omega_0^2(-2\varepsilon - \varepsilon^2)} (\sin(\omega_0(1 + \varepsilon)t) - (1 + \varepsilon) \sin \omega_0 t) \\ \approx -\frac{f_m}{2m\omega_0^2\varepsilon} (\sin(\omega_0 t) + \varepsilon \omega_0 t \cos(\omega_0 t) - (1 + \varepsilon) \sin \omega_0 t)$$

ce qui donne :

$$x(t) = \frac{f_m}{2m\omega_0^2} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos(\omega_0 t)).$$

b) En reportant la solution proposée dans l'équation du mouvement, nous obtenons :

$$\underline{A}''(t) + 2j\omega_0 \underline{A}'(t) = -j \frac{f_m}{m}$$

soit : $\underline{A}(t) = -\frac{f_m}{2m\omega_0} t + \underline{\alpha} e^{-2j\omega_0 t} + \underline{\beta}$.

La solution recherchée est donc de la forme :

$$\underline{x}(t) = -j \frac{f_m t}{2m\omega_0} e^{j\omega_0 t} + \underline{\alpha} e^{-j\omega_0 t} + \underline{\beta} e^{j\omega_0 t}.$$

Les conditions initiales $x(0) = 0$ et $v(0) = 0$ permettent de retrouver :

$$x(t) = \frac{f_m}{2m\omega_0^2} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos(\omega_0 t)).$$

3) a) Nous connaissons la solution pour $t < 0$: $x(t) = 0$, et pour $0 < t < T$:

$$x(t) = \frac{f_m}{2m\omega_0^2} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos(\omega_0 t)).$$

Lorsque $t > T$, la solution recherchée est de la forme :

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_0(t) = \underline{\alpha} e^{j\omega_0 t} + \underline{\beta} e^{-j\omega_0 t}.$$

L'excitation appliquée correspond à une force bornée, de sorte que l'accélération de l'oscillateur est finie. Sa vitesse est donc continue. *A fortiori*, son déplacement aussi. Ainsi, à $t = T$:

$$x(T) = -\frac{\pi f_m}{m\omega_0^2} \quad \text{et} \quad \dot{x}(T) = 0.$$

Nous en déduisons finalement :

$$x(t) = -\frac{\pi f_m}{m\omega_0^2} \cos \omega_0 t.$$

b) Considérons l'excitation $F(t) = f_m \sin \omega t \cdot H(t)$, où $H(t)$ est l'échelon de Heavyside (nul à $t < 0$, égal à 1 à $t > 0$), pour laquelle nous avons déjà déterminé la réponse :

$$\underline{X}(t) \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{f_m}{2m\omega_0^2} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos(\omega_0 t)) & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

L'excitation de durée T peut s'écrire $f(t) = F(t) - F(t - T)$.

Superposons les réponses à $F(t)$ et $G(t) = F(t - T)$,

soit $x(t) = X(t) - X(t - T)$, nous obtenons :

• pour $t < 0$: $x(t) = 0$

- $0 < t < T$: $x(t) = \frac{f_m}{2m\omega_0^2} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos(\omega_0 t))$
- pour $t > T$: $x(t) = \frac{f_m}{2m\omega_0^2} [(\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos(\omega_0 t)) - (\sin \omega_0(t-T) - \omega_0(t-T) \cos(\omega_0(t-T)))]$

Cette dernière expression se simplifiant en :

$$x(t) = \frac{f_m}{2m\omega_0^2} [-\omega_0 T \cos(\omega_0 t)] = -\frac{\pi f_m}{m\omega_0^2} \cos \omega_0 t.$$

7

1) L'équation du mouvement est :

$$m\ddot{z} = -k(\ell - \ell_0) - h(\dot{z} - \dot{z}_0(t)) - mg.$$

L'origine est prise en $z = 0$ lorsque l'équilibre est réalisé (et que z_0 est nul), de sorte que :

$$k(\ell - \ell_0) - mg = k(z - z_0(t)).$$

L'équation d'évolution devient alors :

$$m\ddot{z} = -k(z - z_0) - h(\dot{z} - \dot{z}_0)$$

soit encore :

$$\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = a \left[\frac{k}{m} \cos \omega t - \frac{h}{m} \omega \sin \omega t \right]$$

en posant $\omega = \frac{2\pi\nu}{\lambda}$.

2) En utilisant la notation complexe pour étudier le régime sinusoïdal forcé, nous avons :

$$z(t) = a e^{j\omega t} \frac{\frac{k}{m} + j\omega \frac{h}{m}}{\frac{k}{m} + j\omega \frac{h}{m} - \omega^2}$$

L'amplitude des oscillations est donc :

$$z_m(\omega) = a \sqrt{\frac{k^2 + h^2 \omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + h^2 \omega^2}} = a \sqrt{\frac{N(\omega)}{D(\omega)}}$$

Pour $\begin{cases} \omega \rightarrow 0 : z_m \rightarrow a \\ \omega \rightarrow \infty : z_m \rightarrow 0. \end{cases}$

D'autre part, $\frac{dz_m}{d\omega}$ est proportionnelle à :

$$D(\omega) \frac{dN(\omega)}{d\omega} - N(\omega) \frac{dD(\omega)}{d\omega},$$

donc à : $-2m^2 h^2 \omega^4 + 2Q^2 \omega_0^2 \omega^2 - 2Q^2 \omega_0^4$

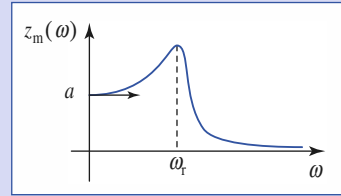
en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{m\omega_0}{h}$.

Par conséquent, $\frac{dz_m}{d\omega}$ s'annule pour $\omega = 0$ et pour

$$\omega = Q\omega_0 \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{Q^2}}}, \text{ notée } \omega_r \text{ (cette pulsation de résonance est}$$

proche de ω_0 si le facteur de qualité est élevé).

Le graphe de $z_m(\omega)$ a donc l'allure ci-dessous :



Il faut donc rouler à grande vitesse ($\omega \gg \omega_r$) pour que les amplitudes des vibrations soient faibles.

Attention : bien que l'amplitude des vibrations soit faible, pour un meilleur confort, il faut mieux rouler lentement sur ce type de surface : les parties ondulées qui délimitent la bande de roulement d'une autoroute sont faites pour réveiller éventuellement un conducteur !

8

$$1) \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + 2\alpha \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{q}{m} \vec{E}.$$

2) Soit $(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ un repère dont le vecteur unitaire \vec{e}_x est colinéaire et de même sens que \vec{E}_0 . L'équation précédente projetée sur \vec{e}_y et \vec{e}_z conduit à deux équations d'oscillateurs amortis non entretenus, en revanche, en projection sur \vec{e}_x , on obtient une équation d'oscillateur entretenu.

3) L'amplitude complexe de l'élongation de l'électron est :

$$\underline{X}(\omega) = \frac{q}{m} \frac{E_x}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\alpha\omega}$$

avec E_x amplitude complexe de la composante $E_x(t)$ de l'onde lumineuse. D'où l'expression de l'accélération complexe de l'électron :

$$\underline{a}_{x_m}(\omega) = -\omega^2 \underline{X}(\omega)$$

d'où :
$$a_{x_m}(\omega) = \frac{\frac{q}{m} \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}} E_0;$$

$$a_{x_m}(0) = 0 \text{ et } \lim_{\omega \rightarrow \infty} a_{x_m} = \frac{q}{m} E_0.$$

$$4) a_{x_m}(\omega) = \frac{q E \omega^2}{m \omega_0^2}$$

$$5) \mathcal{P} \approx \left(\frac{q}{m}\right)^2 \frac{E^2 \omega^4}{\omega_0^4}$$

Le rapport des longueurs d'onde de la lumière bleue et rouge est :

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{0,45}{0,7} = 0,64.$$

Le rapport des intensités diffusées sera $\frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_1} = \left(\frac{1}{0,64}\right)^4 \approx 6$: la lumière bleue est environ six fois plus diffusée que la lumière rouge. C'est pour cette raison que la couleur du ciel est bleue.

6

Théorème du moment cinétique

O B J E C T I F S

- Moment d'une force en un point ou par rapport à un axe.
- Moment cinétique d'un point matériel.
- Théorème du moment cinétique.
- Conservation du moment cinétique pour un mouvement à force centrale.

P R É R E Q U I S

- Dynamique du point matériel.
- Produit vectoriel.

Introduction

Pour déclencher certains mouvements, le choix d'un bon bras de levier permet une grande économie d'effort : pour monter une roue de secours, mieux vaut une grande croix qu'une petite manivelle !

Nous verrons ici qu'il peut être intéressant de substituer à l'association force-relation fondamentale de la dynamique l'ensemble moment de force-théorème du moment cinétique.

Ce peut être une façon efficace d'obtenir l'équation du mouvement du point matériel.

Moment d'une force

1.1. Moment en un point

Par définition, le moment en un point O de la force \vec{F} appliquée en M est :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{OM} \wedge \vec{F}.$$

En particulier, ce moment est nul si le point O appartient à la droite (M, \vec{F}) . Nous dirons alors que la force appliquée au point M « passe par » le point O .

Si la force \vec{F} appliquée en un point M « passe par le point O », son moment en O est nul.

1.2. Moment par rapport à un axe

Soit Δ un axe passant par O , orienté selon la direction de son vecteur unitaire \vec{e} . (doc. 1)

Le produit scalaire : $\mathcal{M}_\Delta = \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{e}$

est le moment de la force \vec{F} par rapport à l'axe Δ orienté.

Le produit scalaire a la même valeur pour tout point O de Δ .

1.2.1. Force « passant » par l'axe Δ

Nous dirons que la force \vec{F} , appliquée au point M , « passe » par l'axe Δ si la droite (M, \vec{F}) possède un point d'intersection M_Δ avec Δ (doc. 2). Le moment de la force par rapport à ce point est nul, donc le moment par rapport à l'axe est nul.

1.2.2. Force parallèle à l'axe Δ

À la limite, le point M_Δ peut être renvoyé à l'infini (doc. 3), ce qui se produit lorsque la force exercée au point M est parallèle à l'axe Δ .

Le moment par rapport à un axe Δ d'une force « parallèle à » ou « passant par » cet axe est nul.

1.2.3. Force orthogonale à l'axe

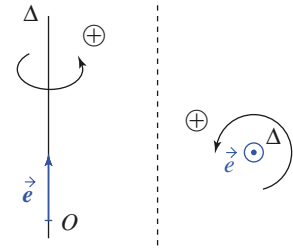
Soit une force \vec{F} orthogonale à Δ appliquée en M et D la droite colinéaire à \vec{F} passant par M . Notons d la longueur du segment H_1H_2 (bras de levier) de la perpendiculaire commune à Δ et à D (doc. 4) :

$$\mathcal{M}_\Delta = (\vec{H_1M} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e} = (\vec{H_1H_2} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}.$$

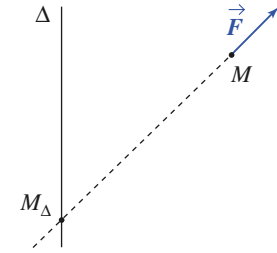
Nous pouvons donc retenir la règle de calcul :

- $|\mathcal{M}_\Delta| = Fd$;
- $\mathcal{M}_\Delta > 0$ si \vec{F} « fait tourner » M autour de Δ dans le sens positif ;
- $\mathcal{M}_\Delta < 0$ dans le cas contraire.

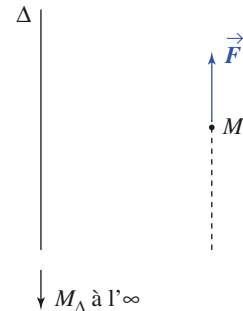
Remarque : Cette règle de calcul peut s'appliquer à une force quelconque, en décomposant celle-ci en une force parallèle à Δ et une force orthogonale à Δ .



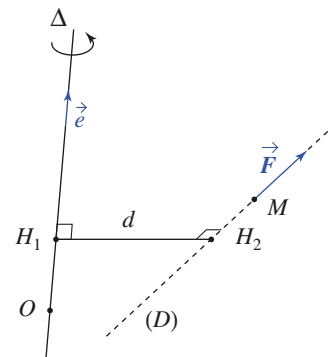
Doc. 1. Vecteur unitaire \vec{e} orientant l'axe Δ .



Doc. 2. Le moment par rapport à l'axe Δ de la force est nul si celle-ci « passe » par l'axe.



Doc. 3. Le moment par rapport à l'axe Δ de la force est nul si celle-ci est parallèle à l'axe.



Doc. 4. Force \vec{F} orthogonale à l'axe Δ : $\mathcal{M}_\Delta = Fd$.

2 Moment cinétique

2.1. Moment cinétique en un point

Le moment cinétique en O dans le référentiel \mathcal{R} , du point matériel M de masse m est :

$$\vec{L}_0(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{OM} \wedge \vec{p} = m \vec{OM} \wedge \vec{v}.$$

Remarque

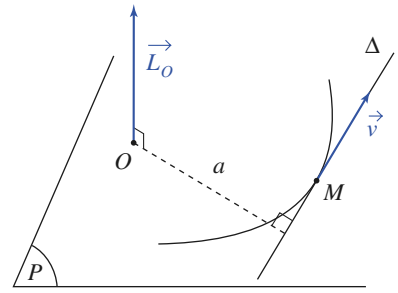
• Soit Δ la droite passant par M , parallèle à \vec{v} , et a la distance entre O et Δ (doc. 5). Le moment cinétique en O du point matériel M est normal au plan défini par Δ et O et a pour norme :

$$L_O = mav.$$

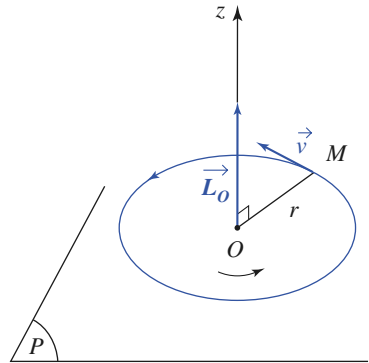
• D'après cette définition, nous voyons que le moment cinétique au point O est nul si le point matériel M semble se diriger vers O : sa vitesse « passe par O ».

• Si M est en **mouvement circulaire** de centre O , de rayon r et de vitesse angulaire ω , dans un plan dont le vecteur unitaire normal est \vec{e}_z , alors (doc. 6) :

$$\vec{L}_O = mr^2 \omega \vec{e}_z.$$



Doc. 5. Moment cinétique.



Doc. 6. Mouvement circulaire : moment cinétique en O .

Application 1

Moment cinétique en coordonnées cylindriques

Le repère cartésien $(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ étant fixe dans \mathcal{R} , exprimer le moment cinétique en O et le moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) en coordonnées cylindriques du point M (doc. 7).

Il vient (notation simplifiée) :

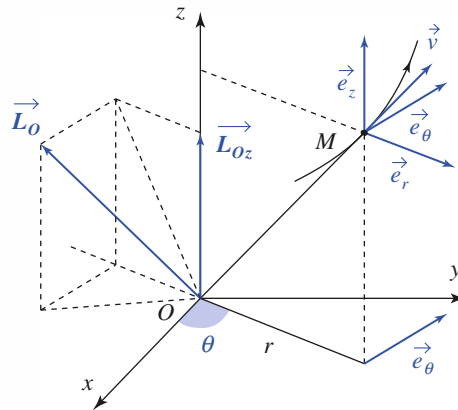
$$\vec{L}_O = m[(r\dot{\vec{e}}_r + z\dot{\vec{e}}_z) \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z)],$$

$$\vec{L}_O = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z + m(z\dot{r} - r\dot{z})\vec{e}_\theta - mrz\dot{\theta}\vec{e}_r;$$

d'où : $L_{(Oz)} = mr^2\dot{\theta}$.

Dans le cas d'un mouvement dans le plan (Oxy) , et

seulement dans ce cas : $\vec{L}_O = L_{(Oz)}\vec{e}_z$,



Doc. 7. Le point M est repéré en coordonnées cylindriques.

2.2. Moment cinétique par rapport à un axe

Soit l'axe orienté Δ , défini par le point O et le vecteur unitaire \vec{e} . Montrons que le produit scalaire $\vec{e} \cdot \vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}}$ ne dépend pas du point O choisi sur Δ .

Considérons pour cela deux points O et O' de Δ :

$$\vec{e} \cdot \vec{L}_O - \vec{e} \cdot \vec{L}_{O'} = m \vec{e} \cdot (\overrightarrow{OO'} \wedge \vec{v}).$$

\vec{e} et $\overrightarrow{OO'}$ sont parallèles, donc : $\vec{e} \cdot \vec{L}_O = \vec{e} \cdot \vec{L}_{O'}$.

Le moment cinétique par rapport à l'axe Δ , défini par le point O et le vecteur \vec{e} , du point matériel M dans le référentiel \mathcal{R} est la projection du moment cinétique en O sur l'axe Δ : $L_{\Delta}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{e} \cdot \vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}}$.

Cette grandeur est indépendante du choix du point O , point quelconque de l'axe Δ .

Le moment cinétique par rapport à l'axe Δ est nul si la vitesse du point matériel M « passe par l'axe Δ », ou si elle est parallèle à l'axe Δ .

3 Théorème du moment cinétique

Intéressons-nous à la relation liant la variation du moment cinétique d'un point matériel et la force appliquée à ce point matériel.

3.1. Application en un point fixe

O étant un point fixe par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R}_g , calculons la dérivée dans \mathcal{R}_g de $\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g}$ par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = m \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{v} + m \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{v} \wedge \vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{M}_O$$

où \vec{M}_O représente le moment en O de la somme des forces appliquées en M au point matériel, il en résulte :

Théorème du moment cinétique en un point fixe O :

$$\vec{M}_O = \left(\frac{d\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g}, \text{ dans le référentiel galiléen } \mathcal{R}_g.$$

3.2. Application par rapport à un axe fixe

Soit Δ un axe fixe dans \mathcal{R}_g . En projetant les deux termes de l'équation précédente sur Δ , nous obtenons, avec $\vec{e} = \text{cte}$:

$$\mathcal{M}_{\Delta} = \vec{e} \cdot \vec{M}_O = \left(\frac{d\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} \cdot \vec{e} = \frac{dL_{\Delta}(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt}.$$

Par conséquent, nous pouvons appliquer le :

Théorème du moment cinétique en projection sur l'axe fixe Δ :

$$\mathcal{M}_{\Delta} = \frac{dL_{\Delta}(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt}, \text{ dans le référentiel galiléen } \mathcal{R}_g.$$

Application 2

Oscillations d'un pendule

Un point matériel M de masse m est suspendu par une tige rigide (de masse négligeable) en un point O fixe. Nous étudions ses mouvements dans un plan vertical (xOy) , (Ox) désignant la verticale descendante. Sa rotation autour de l'axe (Oz) s'effectuant sans frottement.

Les frottements de l'air sont négligés.

1) Équation du mouvement

a) En utilisant le théorème du moment cinétique, établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle d'inclinaison θ .

b) Retrouver l'équation du mouvement en utilisant une autre loi de conservation.

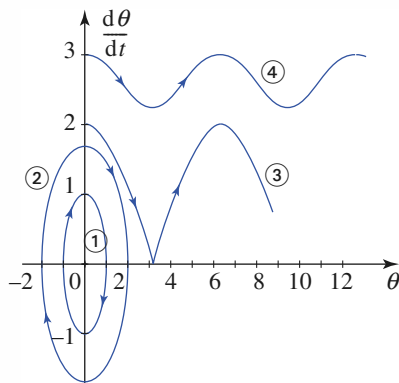
c) Établir l'expression de la réaction \vec{R} de l'axe de rotation, exercée à l'extrémité fixe de la tige (on notera $\vec{R} = N\vec{e}_r + T\vec{e}_\theta + F\vec{e}_z$). Commenter.

d) Commenter le mouvement dans le cas où l'angle θ est supposé petit ?

2) Le schéma représente la trajectoire de phase du pendule dans le plan $(\theta, \frac{d\theta}{dt})$, lorsqu'il est lancé en $\theta = 0$ avec une vitesse angulaire initiale positive et variée.

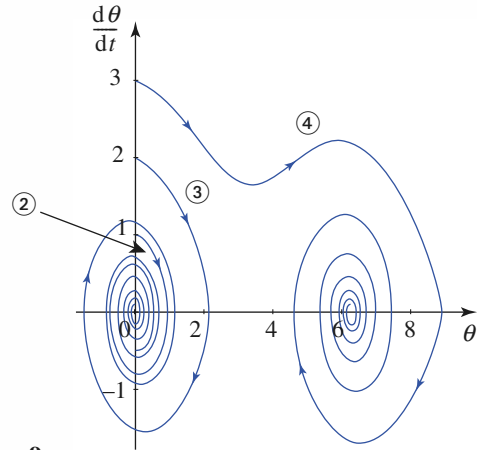
a) Quels sont les points attracteurs de ce système ?

b) Commenter les trajectoires de phase ①, ②, ③ et ④ observées sur la simulation du mouvement du pendule (doc. 8).



Doc. 8.

c) Pour les trajectoires ②, ③ et ④, la deuxième simulation montre l'effet d'une résistance de l'air (doc. 9). Que se passe-t-il ?



Doc. 9.

Remarque : En réalité, ce système n'est pas un point matériel, mais les raisonnements précédents s'appliquent encore dans la mesure où la tige a une masse négligeable devant celle du point fixé à son extrémité.

1) a) Le moment cinétique au point O fixe du référentiel galiléen du laboratoire est :

$$\vec{L}_O = \ell \vec{e}_r \wedge m \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta = m \ell^2 \dot{\theta} \vec{e}_z.$$

Les forces exercées sur l'ensemble rigide tige + masse sont le poids de la masse m et la réaction d'axe \vec{R} . Le moment du poids en O est :

$$\ell \vec{e}_r \wedge m \vec{g} = -m g \ell \sin \theta \vec{e}_z.$$

Le moment de la réaction d'axe est nul : elle passe par le point O .

En appliquant le théorème du moment cinétique au point fixe O , nous obtenons donc :

$$m \ell^2 \ddot{\theta} \vec{e}_z = -m g \ell \sin \theta \vec{e}_z.$$

$$\text{soit :} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0.$$

(Notons que nous pouvons aussi utiliser directement le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) pour obtenir ce résultat.)

b) Le point d'application O de la réaction d'axe est immobile, et la rotation se fait sans frottement. La seule force qui travaille est le poids de la masse m , qui dérive de l'énergie potentielle :

$$-m g x = -m g \ell \cos \theta \quad (\text{à une constante près}).$$

L'énergie mécanique $\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta$ est donc une constante du mouvement. Par dérivation par rapport au temps, nous retrouvons l'équation du mouvement déjà obtenue.

c) Écrivons la relation fondamentale de la dynamique pour la masse m .

Notons que la tige ayant une masse négligeable, la force \vec{R} qu'exerce l'axe sur celle-ci doit être compensée par la force qu'exerce le point M sur la tige, soit $-\vec{R}$.

La masse m est donc soumise à la force \vec{R} de la part de la tige, et à son poids. Son équation du mouvement est :

$$m\vec{a} = \vec{R} + m\vec{g}$$

$$= (N + mg \cos \theta)\vec{e}_r + (T - mg \sin \theta)\vec{e}_\theta + F\vec{e}_z,$$

$$\text{avec } \vec{a} = \frac{d(\ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta)}{dt} = \ell\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \ell\dot{\theta}^2\vec{e}_r.$$

Il vient donc :

$$N = m\ell\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta;$$

$$T = m\ell\ddot{\theta} + mg \sin \theta = 0; \quad F = 0.$$

La réaction est donc simplement radiale pour ce pendule simple (ce serait faux si la masse de la tige n'était pas négligeable).

d) Si $\theta \ll 1$, l'équation différentielle vérifiée par θ est $\ddot{\theta} = -\omega_0^2\theta$: nous sommes en présence d'un oscillateur harmonique.

2) a) L'équilibre est possible pour $\theta = 0$ [π]. Si $\theta = 0$ [2π], le pendule est dans la position verticale basse, au minimum accessible de l'énergie potentielle de pesanteur, donc en position stable. Au contraire, les positions repérées par $\theta = \pi$ [2π] correspondent à un équilibre instable.

Les points attracteurs correspondant sont donc de la forme $A_n(\theta = 2n\pi, \dot{\theta} = 0)$.

b) Dans les cas ① et ②, le pendule oscille autour de la position d'équilibre $\theta = 0$.

Pour le cas ③, la vitesse initiale est suffisante (mais pas beaucoup plus !) pour faire le tour complet, et recommencer indéfiniment.

Pour le dernier cas, la vitesse est importante et la vitesse du mobile reste encore importante lorsqu'il passe en position haute.

c) Avec frottement, les oscillations du cas ② « s'essoufflent » et conduisent peu à peu vers le point attracteur A_0 .

Dans le cas ③, le frottement ne permet pas au pendule de faire un tour complet ; il retombe avant d'atteindre $\theta = \pi$, et tend lui aussi vers A_0 .

Pour le cas ④, un tour complet est effectué, mais pas le deuxième : il se dirige vers l'attracteur A_1 .

3.3. Théorème du moment cinétique et relation fondamentale de la dynamique

Le mouvement d'un point matériel M , de masse m , est régi, dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , par la relation fondamentale de la dynamique (deuxième loi de Newton) :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

Le mouvement du point M est en général un mouvement à trois degrés de liberté, et cette relation nous fournit, en projection, trois équations : le mouvement peut être déterminé, compte tenu des position et vitesse initiales du point matériel.

C'est en utilisant la relation fondamentale de la dynamique que nous avons établi les théorèmes du moment cinétique en un point fixe O , ou en projection sur un axe fixe Δ . Ce sont donc des conséquences de la deuxième loi de Newton, qui n'apportent pas d'information supplémentaire sur le mouvement...

Dans l'application précédente, nous avons obtenu l'équation du mouvement du pendule, en rotation autour d'un axe fixe, en utilisant le théorème du moment cinétique.

Nous avons déjà obtenu cette équation par application du principe fondamental de la dynamique (en projection sur \vec{e}_θ), ou par le théorème de l'énergie

cinétique. Le théorème apparaît donc comme un autre moyen d'étudier le mouvement d'un point matériel. Dans le cas du pendule, cette méthode est agréable car très rapide.

Remarques

- Le théorème du moment cinétique est une conséquence de la deuxième loi de Newton. Son utilisation n'apporte pas d'information que ne contenait déjà la relation fondamentale de la dynamique. Pour certains mouvements du point matériel, en particulier les mouvements de rotation autour d'un axe, il donne un accès très rapide à l'équation du mouvement.
- Un solide est un système matériel rigide mais non ponctuel, qui possède en général six degrés de liberté de mouvement : mouvements de translation et de rotation. Nous verrons en seconde année, que le théorème du moment cinétique est un auxiliaire utile pour l'étude du moment du système.

4 Mouvement à force centrale

4.1. Définition

Soit O un point fixe d'un référentiel galiléen \mathcal{R}_g . Le point matériel M est soumis à un champ de force centrale de centre O si, à chaque instant, la force \vec{F} qui lui est appliquée est colinéaire à \vec{OM} .

4.2. Conservation du moment cinétique

Le moment de la force centrale est nul en O . Par conséquent, le moment cinétique \vec{L}_O est une constante du mouvement.

Comme $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$, nous voyons que le vecteur position et la vitesse du point matériel sont en permanence perpendiculaires au vecteur \vec{L}_O constant (doc. 10).

Pour un mouvement à force centrale, le moment cinétique \vec{L}_O est conservé. La trajectoire du point matériel est contenue dans le plan contenant O et perpendiculaire à \vec{L}_O .

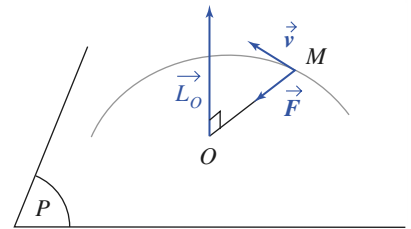
Dans le cas où le moment cinétique est nul, il n'est pas possible de définir un plan normal à \vec{L}_O . Dans ce cas, le vecteur position $\vec{r} = \vec{OM}$ et le vecteur vitesse sont colinéaires. Dans ces conditions, le vecteur position garde une direction constante, et la trajectoire est rectiligne.

Si le moment cinétique est nul, la trajectoire est rectiligne, placée sur une droite passant par le point O .

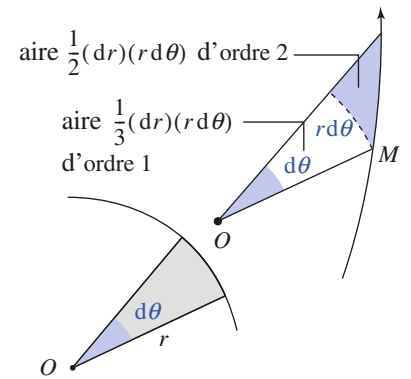
4.3. Loi des aires

Repérons M par ses coordonnées polaires dans le plan de sa trajectoire. La conservation de \vec{L}_O se traduit par (cf. Application 1) :

$$r^2 \dot{\theta} = C \text{ (constante).}$$



Doc. 10. Soumis à une force centrale, M décrit une trajectoire plane.



Doc. 11. Aire balayée par le rayon OM :

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

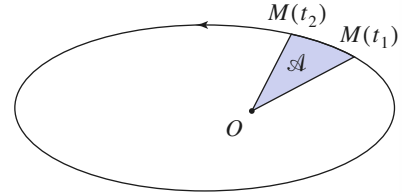
La quantité $r^2\dot{\theta}$ s'interprète géométriquement. Le document 11 nous suggère que, pour une variation élémentaire $d\theta$, l'aire $d\mathcal{A}$ « balayée » par le rayon OM est équivalente à celle du secteur circulaire de rayon r et d'angle $d\theta$:

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2}r^2d\theta.$$

$\mathcal{A}(t)$ étant l'aire balayée par OM depuis l'instant initial, nous avons :

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{C}{2}.$$

$\frac{d\mathcal{A}}{dt}$, appelée vitesse aréolaire, est constante pour un mouvement à force centrale.



Doc. 12. Loi des aires. \mathcal{A} est proportionnelle à $t_2 - t_1$.

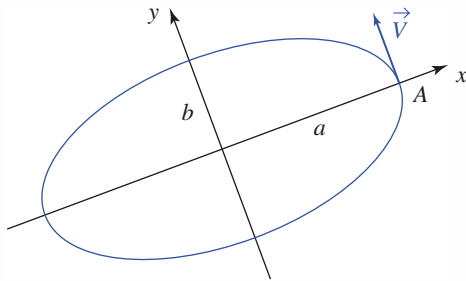
Ce résultat constitue la loi des aires (doc. 12).

Application 3

Loi des aires et période d'un oscillateur harmonique

Un point matériel de masse m subit une force de rappel élastique $\vec{F} = -k\vec{r}$ l'attirant au point origine O .

- 1) Pourquoi la trajectoire sera-t-elle plane ?
- 2) En étudiant l'évolution du vecteur position $\vec{r}(t)$ du mobile, justifier que la trajectoire est une ellipse dont les axes seront notés (Ox) et (Oy) .
- 3) On note V le module de la vitesse au point A sur l'axe (Ox) (doc. 13). Relier la longueur b du demi-axe de l'ellipse à V, k et m .

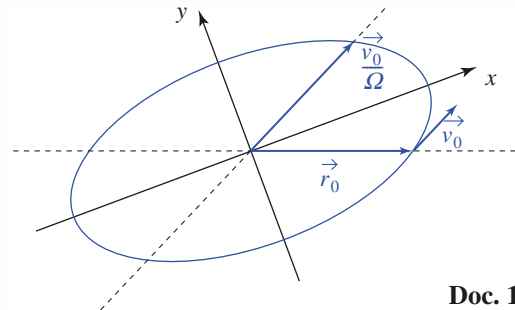


Doc. 13.

- 4) Quelle est la période T du mouvement ?
- 5) Retrouver celle-ci en utilisant la loi des aires, sachant que l'aire de l'ellipse est $S = \pi ab$.

1) Il s'agit d'un mouvement à force centrale. L'équation du mouvement est : $m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r}$, soit : $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \Omega^2\vec{r} = \vec{0}$, avec $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Nous en déduisons : $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \cos \Omega t + \frac{\vec{v}_0}{\Omega} \sin \Omega t$.
La trajectoire est donc une ellipse de centre O (doc. 14).



Doc. 14.

3) Comme le mouvement est périodique, nous pouvons recalculer l'origine $t = 0$ au point A , et les coordonnées du mobile s'écrivent alors dans les axes (xOy) :

$$x(t) = a \cos \Omega t \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{V}{\Omega} \sin \Omega t.$$

En particulier : $b = \frac{V}{\Omega}$.

4) La période du mouvement est $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.

5) En utilisant la loi des aires, nous avons $T = \frac{S}{C/2}$,

où la constante des aires peut, par exemple, être calculée en fonction des données du mouvement en A : $C = aV$.

Il vient ainsi :

$$T = \frac{2\pi ab}{aV} = \frac{2\pi}{\Omega} \quad \text{et le résultat est retrouvé.}$$

CQFR

● MOMENT D'UNE FORCE

• *Moment en un point*

Le moment au point O de la force \vec{F} appliquée en M est : $\vec{M}_O = \vec{OM} \wedge \vec{F}$.

Si la force \vec{F} « passe par le point O », son moment en O est nul.

• *Moment par rapport à un axe*

Le produit scalaire $\mathcal{M}_\Delta = \vec{M}_O \cdot \vec{e}$ est le moment de la force \vec{F} par rapport à l'axe Δ qui passe par le point O , et qui est orienté par son vecteur unitaire \vec{e} .

Le moment par rapport à l'axe Δ d'une force \vec{F} « parallèle à » ou « passant par » l'axe Δ est nul.

● MOMENT CINÉTIQUE

Le moment cinétique au point O du point matériel M dans le référentiel \mathcal{R} est :

$$\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} = m \vec{OM} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}.$$

● THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , le théorème du moment cinétique peut être appliqué :

• en un point fixe O : $\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{M}_O$;

• en projection sur un axe fixe Δ : $\frac{dL_\Delta(M)}{dt} = \mathcal{M}_\Delta$;

• le théorème du moment cinétique est une conséquence de la deuxième loi de Newton. Dans certains cas, il donne accès rapidement à l'équation du mouvement (exemple : rotation autour d'un axe fixe).

● MOUVEMENT À FORCE CENTRALE

• Conservation du moment cinétique : pour un mouvement à force centrale de centre O fixe, le moment cinétique \vec{L}_O est une constante du mouvement.

• La trajectoire du point matériel est contenue dans le plan contenant O et perpendiculaire à \vec{L}_O (si le moment cinétique est nul, la trajectoire est sur une droite passant par O).

• La loi des aires est assurée : la vitesse aréolaire $\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$ est une constante du mouvement :

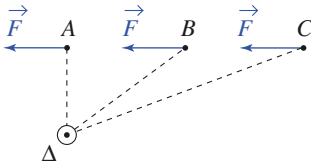
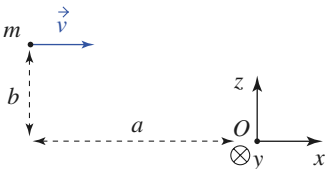
$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{C}{2}.$$

Contrôle rapide

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Quelle est la définition du moment d'une force par rapport à un point, par rapport à un axe ? Pour quels cas remarquables sait-on que ce moment s'annule ?
- ✓ Définir le moment cinétique d'un point matériel, par rapport à un point ou par rapport à un axe. Dans quels cas sait-on que ce moment sera nul ?
- ✓ Énoncer le théorème du moment cinétique, sous forme vectorielle puis scalaire.
- ✓ Quelles sont les caractéristiques d'un mouvement à force centrale ?

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. 
- Le moment de la force \vec{F} par rapport à l'axe Δ est plus important si elle est appliquée :**
- a. en A b. en B c. en C
 d. le moment est toujours le même.
2. 
- Le moment cinétique au point O vaut :**
- a. $mbv\vec{e}_y$ b. $-mav\vec{e}_z$ c. $m(b\vec{e}_y - a\vec{e}_z)v$
 d. $mbv\vec{e}_z$
3. **Un point matériel est en rotation sur un cercle de centre O. Le mouvement peut être étudié en utilisant :**
- a. la relation fondamentale de la dynamique
 b. le théorème du moment cinétique
 c. le théorème de la puissance cinétique.
4. **Un mouvement à force centrale est :**
- a. parfois rectiligne
 b. toujours plan
 c. plan pour certaines conditions initiales.

► Solution, page 136.

Exercice commenté

Applications des formules de Binet

ÉNONCÉ

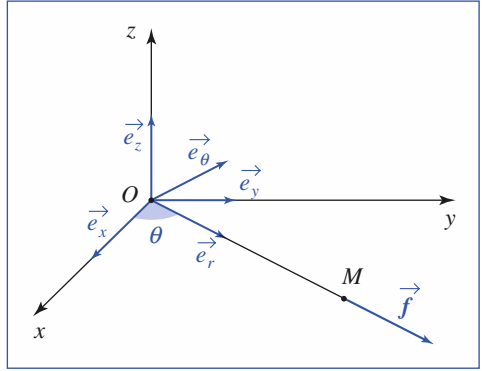
On considère dans un référentiel galiléen une particule M de masse m , soumise à une force centrale $\vec{f} = f(r)\vec{e}_r$.

1) Posons $u = \frac{1}{r}$. Démontrer que la vitesse \vec{v} et l'accélération \vec{a} de cette particule peuvent s'exprimer à l'aide de u et des dérivées de u par rapport à θ .

2) Déterminer la loi de force $f(r)$ pour que la trajectoire de la particule soit une spirale logarithmique $r = ae^\theta$.

On précisera la constante à partir des conditions initiales r_0 et θ_0 .

3) À $t = 0$, la particule M est lancée en $M_0(\vec{r}_0 = \vec{OM}_0)$ avec une vitesse \vec{v}_0 orthogonale à \vec{r}_0 .



Déterminer sa trajectoire sachant qu'elle se trouve dans un champ de forces centrales attractives : $\vec{f} = -\frac{k}{r^3}\vec{e}_r$.

Discuter suivant les valeurs de $v_0 = \|\vec{v}_0\|$ la nature des trajectoires.

CONSEILS

La question 1) propose d'éliminer la variable temps des équations différentielles. Pour cela, il faut utiliser les règles de dérivation des fonctions composées :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

Utiliser les expressions de la vitesse et de l'accélération en coordonnées polaires.

Comment introduire dans les calculs l'indication : « particule soumise à une force centrale » ?

En utilisant la loi des aires, remplacer systématiquement $\dot{\theta}$ par une fonction de u .

Pour la question 2), la fonction $u(\theta)$ est connue.

L'accélération et la loi de force s'en déduisent.

SOLUTION

1) Rappelons l'expression de la vitesse en coordonnées polaires :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Le mouvement étant à force centrale, on dispose de l'intégrale première des aires : $r^2\dot{\theta} = C$.

D'où $\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -C \frac{du}{d\theta}$ et $r\dot{\theta} = \frac{C}{r} = Cu$, qui conduisent à la première formule de Binet : $\vec{v} = C\left(-\frac{du}{d\theta}\vec{e}_r + u\vec{e}_\theta\right)$.

Considérons maintenant l'expression de l'accélération en coordonnées polaires :

$$\vec{a} = [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2]\vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

La composante orthogonale est nulle dans le cas d'un mouvement à force centrale. Examinons la composante radiale.

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -C \frac{d^2u}{d\theta^2} \frac{C}{r^2} = -C^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} \quad \text{et} \quad r\dot{\theta}^2 = \frac{C^2}{r^3} = C^2 u^3,$$

d'où la seconde formule de Binet : $\vec{a} = -C^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)\vec{e}_r$.

2) Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule s'écrit :

$$f = -mC^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right), \quad \text{avec} \quad u = \frac{1}{a} e^{-\theta}$$

d'où immédiatement $f = -mC^2 u^2 [u + u]$, soit $f(r) = -\frac{2mC^2}{r^3}$.

Pour la question 3), il faut résoudre une équation différentielle en $u(\theta)$. Quelle est la forme générale des solutions de :

$$u'' = \alpha u,$$

selon que α est négatif, nul ou positif ?

• La loi de force est donc de la forme : $f(r) = -\frac{k}{r^3}$.

• La valeur de C est déterminée par les conditions initiales, donc $k = 2mr_0^4 \dot{\theta}_0^2$.

3) On applique à la particule M la relation fondamentale de la dynamique :

$$-mC^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -ku^3, \text{ d'où } \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{k}{mC^2} \right) u = 0, \text{ avec } C = r_0 v_0.$$

Pour la suite du problème, l'axe polaire sera pris colinéaire et de même sens que \vec{OM}_0 , ce qui signifie que $\theta(0) = 0$.

1^{er} cas : $\frac{k}{mC^2} = 1$, d'où $v_0 = \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{k}{m}} = v_c$.

L'équation différentielle du mouvement s'écrit alors $\frac{d^2 u}{d\theta^2} = 0$, ce qui s'intègre en $u = A\theta + B$, avec A et B déterminés par les conditions initiales :

$$u(0) = \frac{1}{r_0} \text{ et } \left(\frac{du}{d\theta} \right)_{\theta=0} = -\frac{1}{C} \dot{r}(0) = 0,$$

d'où $r = r_0$, ce qui est l'équation d'un cercle centré sur le centre de forces.

2^e cas : $\frac{k}{mC^2} < 1$, d'où $v_0 > \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{k}{m}} = v_c$.

Posons $p = \sqrt{1 - \frac{k}{mC^2}}$; il vient $\frac{d^2 u}{d\theta^2} + pu = 0$. Avec les mêmes conditions initiales, l'équation différentielle du mouvement s'intègre en $u = u(0) \cos(p\theta)$, d'où : $r = \frac{r_0}{\cos(p\theta)}$. La trajectoire admet une asymptote

d'équation $\theta = \frac{\pi}{2p}$.

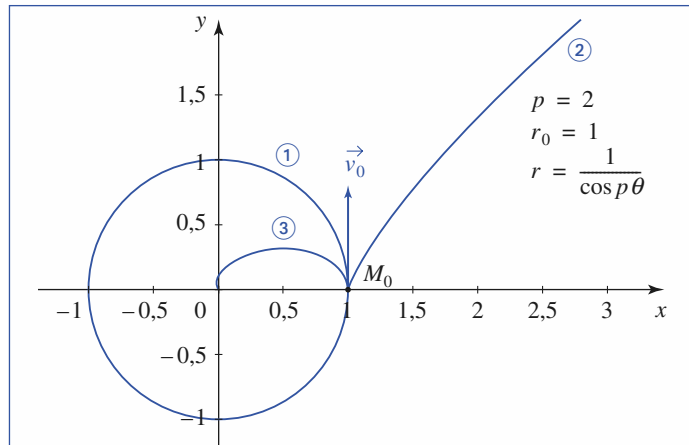
3^e cas : $\frac{k}{mC^2} > 1$, d'où $v_0 < \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{k}{m}} = v_c$.

En posant $p = \sqrt{\frac{k}{mC^2} - 1}$, l'équation du mouvement s'écrit : $\frac{d^2 u}{d\theta^2} = pu$.

Sa solution est $u = u(0) \operatorname{ch}(p\theta)$, d'où : $r = \frac{r_0}{\operatorname{ch}(p\theta)}$.

La trajectoire admet le centre de forces comme point asymptote.

Le schéma ci-dessous illustre la discussion précédente.



Trajectoires dans un champ de forces en r^{-3} .

① : trajectoire circulaire $v_0 = v_c$;

② : $v_0 > v_c$ et $p = 2$;

③ : $v_0 < v_c$ et $p = 2$.

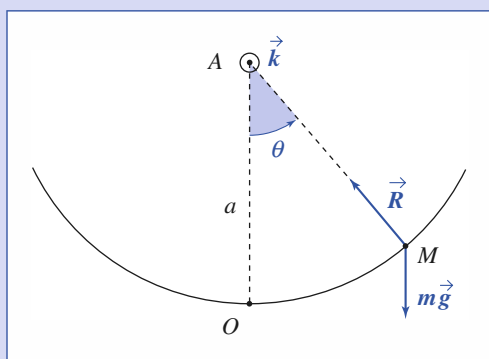
Exercices

1 La loi des aires retrouvée

Montrer que la loi des aires peut être retrouvée en utilisant la relation fondamentale de la dynamique appliquée au mobile soumis à une force centrale.

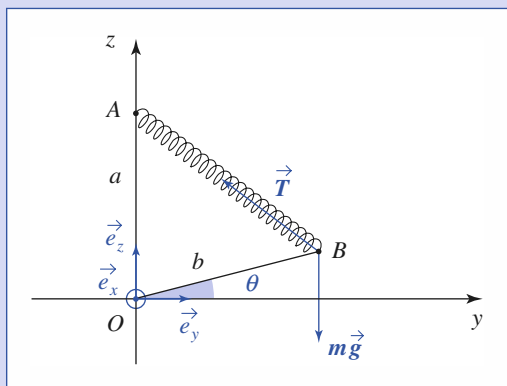
2 Un point matériel sur un guide circulaire

Un point matériel M de masse m est assujéti à glisser sans frottement sous l'action de son poids sur un guide circulaire de rayon a (cf. schéma). Déterminer la période T_0 de ses petits mouvements autour de sa position d'équilibre.



3 Gravimètre à ressort

Un gravimètre à ressort est constitué d'une tige OB de masse négligeable pouvant tourner autour d'un axe horizontal ($O ; \vec{e}_x$) et supportant en B une masse ponctuelle m (cf. schéma). Sous l'action du ressort AB , de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , la tige est horizontale à l'équilibre. On pose $OA = a$, $OB = b$, $AB = \ell$ et $\theta = (\vec{e}_y, \vec{OB})$ l'élongation angulaire de la tige OB .



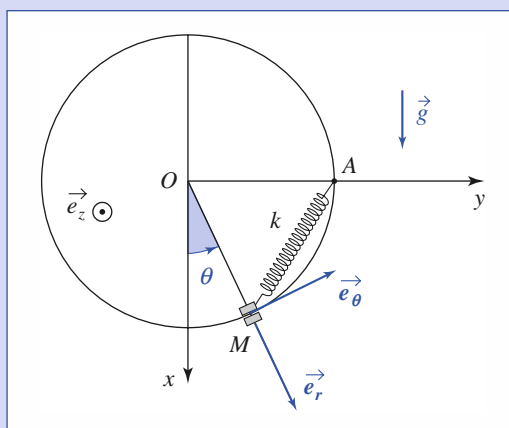
Cet exercice a déjà été traité (cf. chapitre 4, exercice 4), mais nous allons ici le résoudre à l'aide du théorème du moment cinétique pour répondre aux mêmes questions.

1) Calculer la longueur ℓ_{eq} du ressort à l'équilibre. À quelle condition cet équilibre existe-t-il ?

2) Déterminer la période T_0 des petites oscillations de ce pendule. Que se passe-t-il lorsque ka est voisin de mg ?

4 Trois méthodes pour un même mouvement

Un point matériel de masse m est assujéti à glisser sans frottement sur un cerceau vertical de rayon R et centre O . Il est lié au point A par un ressort de raideur k et de longueur au repos négligeable.



1) Établir l'équation du mouvement du mobile en utilisant successivement les trois méthodes suivantes :

- a) le théorème du moment cinétique ;
- b) la relation fondamentale de la dynamique ;
- c) le bilan énergétique.

2) Discuter l'existence de positions d'équilibre, leur stabilité, et dans l'affirmative, la période des petites oscillations au voisinage de l'équilibre.

5 Pendule en rotation uniforme

L'extrémité O d'un fil OM de masse négligeable et de longueur ℓ est fixe. Un objet quasi ponctuel de masse m est suspendu en M .

L'objet est écarté d'un angle α par rapport à la verticale, puis lancé. Quelle vitesse initiale faut-il lui donner pour qu'il décrive des cercles horizontaux ?

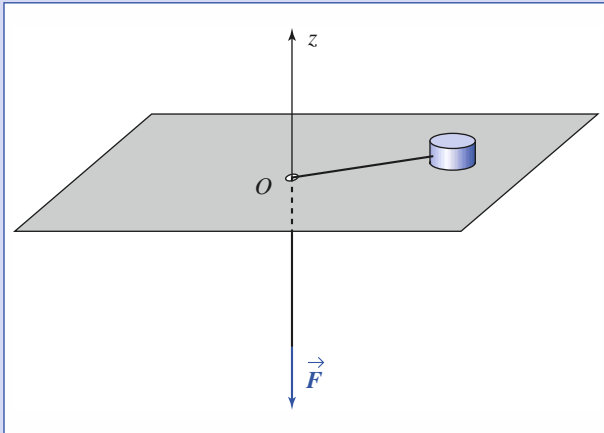
Exprimer sa période de révolution en fonction de g , ℓ et α .

6 Pour l'attirer, il faut être très fort

Un palet de masse M glisse sans frottement sur un plateau horizontal percé d'un trou à l'origine.

Sa position est repérée par les coordonnées polaires r et θ d'axe (Oz).

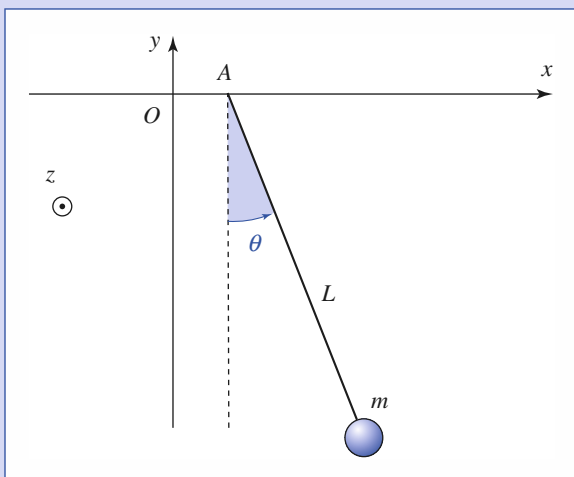
L'expérimentateur lance le palet, à la distance r_0 du point O , avec une vitesse initiale orthoradiale $\vec{v}(0) = v_0 \vec{e}_{\theta(t=0)}$ (on prendra $\theta(0) = 0$), et tire sur le fil de façon à rapprocher régulièrement le palet de point O : $r(t) = r - Vt$



1) Étudier l'évolution de la force \vec{F} qu'il doit exercer pour réaliser cet objectif. Commenter.

2) Calculer directement le travail de traction fourni par cet opérateur s'il fait passer la distance du mobile à l'axe de la valeur r_0 à la valeur r . Retrouver ce résultat par une autre méthode.

7 Théorème du moment cinétique appliqué en un point mobile



Prenons un pendule simple, de masse m et de longueur L , et imposons de petites oscillations horizontales à son extrémité A : $x_A = x_0 \sin \omega t$.

1) Pour utiliser le théorème du moment cinétique, pourquoi vaut-il mieux l'appliquer au point mobile A plutôt qu'au point fixe O ? Reprendre la démonstration du théo-

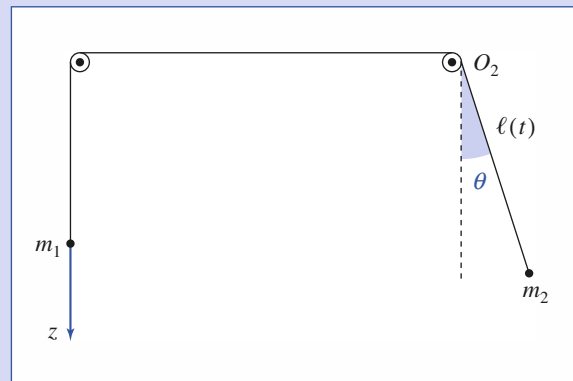
rème pour exprimer la dérivée : $\frac{dL_A}{dt}$.

2) Établir l'équation du mouvement du pendule simple effectuant de petites oscillations.

3) Quel est son mouvement lorsqu'un régime sinusoïdal permanent s'est établi (ce qui suppose quelques frottements, que nous avons en fait négligés).

4) Quelle est la pulsation ω_0 au voisinage de laquelle nos hypothèses d'étude sont à reprendre ? Que dire des mouvements du point A et du mobile selon que $\omega < \omega_0$ ou $\omega > \omega_0$?

8 Un pendule particulier



Deux poulies, de masse et de dimensions négligeables, supportent un fil inextensible et sans masse aux extrémités duquel sont accrochées deux masses m_1 et m_2 :

- m_2 est assujettie à se déplacer uniquement le long d'un axe vertical ;
- m_1 peut osciller dans le plan vertical en plus du mouvement de translation.

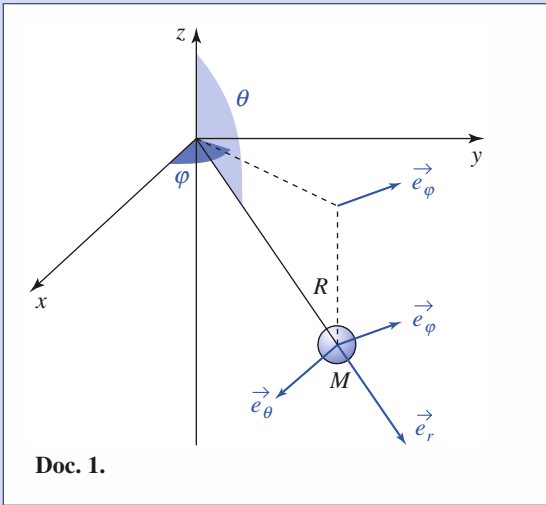
1) Établir les équations des mouvements fixant l'évolution au cours du temps des fonctions $l(t)$ et $\theta(t)$.

2) Dans l'hypothèse d'oscillations de faible amplitude, linéariser les équations différentielles. En déduire les expressions de $l(t)$ et de $y(t) = l(t)\theta(t)$. Que représente $y(t)$? Montrer que, sous certaines conditions, on retrouve les oscillations d'un pendule simple.

On pourra poser $a = g \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$.

Exercices

9 Pendule sphérique



Un pendule simple est constitué d'un point matériel de masse m attaché à un fil souple inextensible de longueur R , fixé en un point O , origine d'un repère $(O ; x, y, z)$ du référentiel terrestre supposé galiléen.

L'axe (Oz) est choisi vertical ascendant et on utilise les coordonnées sphériques (r, θ, φ) de centre O et d'axe (Oz) .

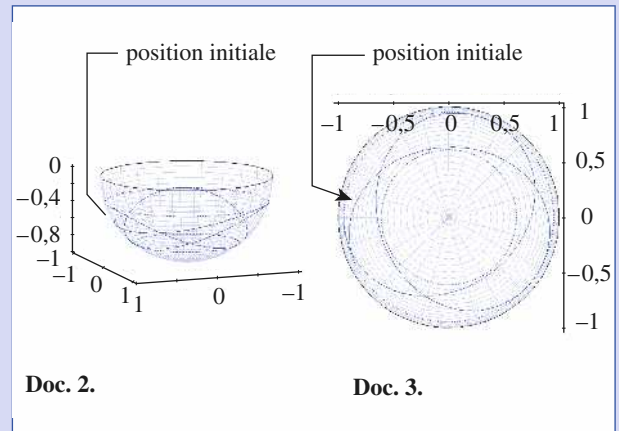
Les conditions initiales sont, *a priori*, quelconques, mais supposées connues.

On étudie le mouvement du pendule dans le cas où le fil reste toujours tendu : le mobile évolue sur la sphère de centre O et rayon R .

1) Montrer que la quantité $\sin^2 \theta \dot{\varphi}$ est une constante du mouvement. Quelle(s) conclusion(s) peut-on en déduire concernant le mouvement du pendule autour de l'axe (Oz) ?

2) Les documents 2 et 3 représentent le résultat d'une simulation du mouvement du pendule : la première vue est « en perspective », la seconde « vue de dessus ». Que constate-t-on ?

3) Quelle autre constante du mouvement peut-on proposer ? Donner alors une explication des limites accessibles à la trajectoire du pendule.



Corrigés

Solution du tac au tac, page 131.
 1. Vrai : d Faux : a, b, c 3. Vrai : a, b, c
 2. Vrai : a Faux : b, c, d 4. Vrai : a, b Faux : c

1 Nous savons que le mouvement à force centrale est en général contenu dans un plan contenant le centre de forces O . Utilisons dans ce plan les coordonnées polaires (r, θ) pour repérer le point mobile M .
 Son accélération s'écrivant :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta.$$

L'équation du mouvement est :

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta = \frac{F}{m}\vec{e}_r.$$

Le caractère central de la force assure donc :

$$0 = (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

ce qui redonne bien la loi des aires : $r^2\dot{\theta} = C$.

2 L'absence de frottement nous indique une réaction \vec{R} perpendiculaire au mouvement, qui pointe donc vers le point fixe A où son moment est nul. Le théorème du moment cinétique, appliqué en A , nous donne donc :

$$ma^2\ddot{\theta}\vec{k} = \vec{AM} \wedge m\vec{g} = -mg \sin \theta \vec{k}$$

soit : $\ddot{\theta} + \frac{g}{a} \sin \theta = 0$.

Au voisinage de l'équilibre $\theta_{\text{eq}} = 0$, nous aurons, à l'ordre linéaire :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{g}{a}.$$

La période des petites oscillations est : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$.

3 1) L'équation du mouvement peut être obtenue en appliquant le théorème du moment cinétique au point fixe O :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OB} \wedge m\vec{g} + \vec{OB} \wedge \vec{T}.$$

Le point B décrit un cercle de centre O et rayon b à vitesse angulaire $\dot{\theta}$:

$$\vec{L}_O = mb^2 \dot{\theta} \vec{e}_x.$$

La longueur du ressort est :

$$\ell(\theta) = AB = \sqrt{(\vec{OA} - \vec{OB})^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \sin \theta}.$$

La tension du ressort s'écrit donc :

$$\vec{T} = k(\ell - \ell_0) \frac{\vec{BA}}{\ell} = k \frac{\ell - \ell_0}{\ell} [-b \cos \theta \vec{e}_y + (a - b \sin \theta) \vec{e}_z].$$

Son moment au point O vaut : $\vec{OB} \wedge \vec{T} = -k \left(\frac{\ell - \ell_0}{\ell} \right) ab \cos \theta \vec{e}_x$.

Le moment du poids en O est :

$$\vec{OB} \wedge m\vec{g} = -mgb \cos \theta \vec{e}_x.$$

L'équation du mouvement (théorème du moment cinétique projeté sur \vec{e}_x) est finalement :

$$mb^2 \ddot{\theta} = -mgb \cos \theta - k \frac{\ell - \ell_0}{\ell} ab \cos \theta.$$

Pour que la position $\theta = 0$ soit position d'équilibre, il faut donc avoir :

$$0 = -mgb - k \left(\frac{\ell - \ell_0}{\ell} \right)_{\theta=0} ab$$

soit : $\sqrt{a^2 + b^2} = \ell(\theta = 0) = \frac{ka}{ka - mg} \ell_0,$

ce qui n'est possible que si $ka > mg$.

1) a) Considérons les petits mouvements au voisinage de $\theta_{eq} = 0$.

Nous noterons $\cos \theta = 1$, à l'ordre linéaire en θ .

De même, $\ell(\theta) \approx \ell_{eq} - \frac{ab}{\ell_{eq}} \theta$.

À l'ordre linéaire, l'équation du mouvement devient alors :

$$mb^2 \ddot{\theta} \approx -mgb - kab \left(1 - \frac{\ell_0}{\ell_{eq}} - \frac{ab \ell_0}{\ell_{eq}^3} \theta \right)$$

ce qui nous donne une équation d'oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{k a^2 \ell_0}{m \ell_{eq}^3} \theta = 0$$

dont la pulsation est donnée par :

$$\omega_0^2 = \frac{k a^2 \ell_0}{m \ell_{eq}^3} = \frac{k a^2}{m \ell_0^2} \left(\frac{ka - mg}{ka} \right)^3$$

dont nous déduisons la période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ des petites oscillations au voisinage de l'équilibre $\theta_{eq} = 0$, identique à celle trouvée à *chapitre 4*.

4

1) a) Le moment cinétique au point fixe O est :

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = R\vec{e}_r \wedge mR\dot{\theta}\vec{e}_\theta = mR^2 \dot{\theta} \vec{e}_z.$$

La réaction du support passe par O (pas de frottement).

Le moment du poids en O est :

$$\vec{M}_{poids/O} = \vec{OM} \wedge m\vec{g} = -mgR \sin \theta \vec{e}_z.$$

Le moment de la tension du ressort en O est :

$$\vec{M}_{ressort/O} = \vec{OM} \wedge \vec{T} = \vec{OM} \wedge k\vec{MA} = k\vec{OM} \wedge \vec{OA} = kR^2 \cos \theta \vec{e}_z.$$

Appliquons le théorème du moment cinétique au point fixe O , en projection sur la direction de l'axe (Oz) . Nous obtenons :

$$mR^2 \ddot{\theta} = -mgR \sin \theta + kR^2 \cos \theta \quad \text{ou} \quad \ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta + \Omega^2 \cos \theta,$$

avec $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ et $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

b) La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{R} + \vec{T} + m\vec{g} \quad \text{où la réaction } \vec{R} \text{ du support est dirigée suivant } \vec{e}_r.$$

En projection sur \vec{e}_θ , nous avons :

$$\vec{T} \cdot \vec{e}_\theta = k\vec{MA} \cdot \vec{e}_\theta = k\vec{OA} \cdot \vec{e}_\theta = kR \cos \theta$$

et il vient ainsi :

$$mR\ddot{\theta} = 0 + kR \cos \theta - mg \sin \theta$$

résultat conforme au précédent.

c) La réaction du support ne travaillant pas, nous savons que l'énergie mécanique, somme de l'énergie cinétique du mobile $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}mR^2 \dot{\theta}^2$, de son énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_p = -mgR \cos \theta + \text{cte}$, et de l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}kAM^2 = kR^2(1 - \sin \theta)$, est une constante du mouvement :

$$\frac{1}{2}mR^2 \dot{\theta}^2 - mgR \cos \theta + kR^2(1 - \sin \theta) = \text{cte}$$

en dérivant par rapport au temps et en simplifiant par $\dot{\theta}$, nous retrouvons l'équation du mouvement :

$$mR^2 \ddot{\theta} + mgR \sin \theta - kR^2 \cos \theta = 0.$$

2) L'équilibre correspond à $\omega^2 \sin \theta = \Omega^2 \cos \theta$ ce qui donne une solution

θ_0 comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$: $\theta_0 = \arctan\left(\frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)$, et une solution

$\theta_1 = \pi + \theta_0$.

Au voisinage de l'équilibre, notons $\theta = \theta_{eq} + \varepsilon$, et linéarisons l'équation du mouvement :

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon} &= -\omega^2(\sin \theta_{eq} + \varepsilon \cos \theta_{eq}) + \Omega^2(\cos \theta_{eq} - \varepsilon \sin \theta_{eq}) \\ &= -(\omega^2 \cos \theta_{eq} + \Omega^2 \sin \theta_{eq})\varepsilon \end{aligned}$$

pour $\theta_{eq} = \theta_0$, nous obtenons une équation linéarisée de la forme :

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0$$

avec $\omega_0^2 = (\omega^2 \cos \theta_0 + \Omega^2 \sin \theta_0) > 0$.

Nous obtenons ainsi les oscillations harmoniques de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ au voisinage de θ_0 , qui est une position d'équilibre stable.

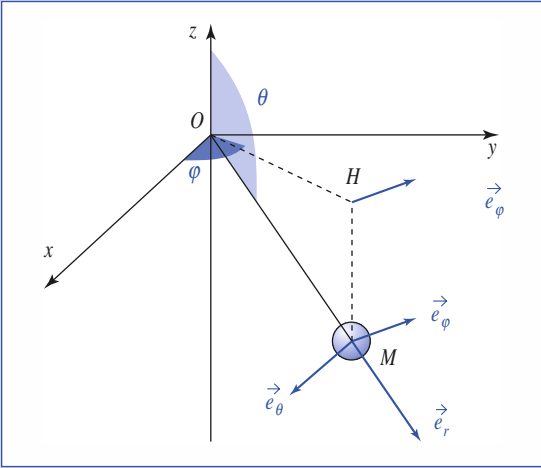
Le même raisonnement nous montre que la position θ_1 constitue un équilibre instable.

5

Le point matériel M est soumis à deux forces : son poids et la force de tension du fil.

Corrigés

• 1^{re} méthode



La position du point M correspond à $\vec{OM} = \ell \vec{e}_r$.

Sa vitesse est :

$$\begin{aligned} \vec{v}_M &= \ell(\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) \\ &= \ell \sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi, \end{aligned}$$

car θ est ici constant.

Son moment cinétique en O est donc :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \ell \vec{e}_r \wedge m \ell (\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) \\ &= -m \ell^2 \sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

Pour le vecteur unitaire \vec{e}_θ :

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \cos \theta (-\sin \varphi \dot{\varphi} \vec{e}_x + \cos \varphi \dot{\varphi} \vec{e}_y) \dot{\varphi} = \cos \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

de sorte que :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = -m \ell^2 (\sin \theta \ddot{\varphi} \vec{e}_\theta + \sin \theta \dot{\varphi}^2 \vec{e}_\theta) \quad (1)$$

En appliquant le théorème du moment cinétique au point fixe O , nous obtenons :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OM} \wedge m \vec{g} = -m g \ell \vec{e}_r \wedge \vec{e}_z = m g \ell \sin \theta \vec{e}_\varphi \quad (2)$$

Identifions les deux expressions (1) et (2) :

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = 0 : \text{la rotation est uniforme} \\ \ell \dot{\varphi}^2 \cos \alpha = g. \end{cases}$$

Or $\dot{\varphi} = \frac{v}{\ell \sin \alpha}$, donc :

$$v^2 = \frac{g \ell \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}.$$

• 2^e méthode

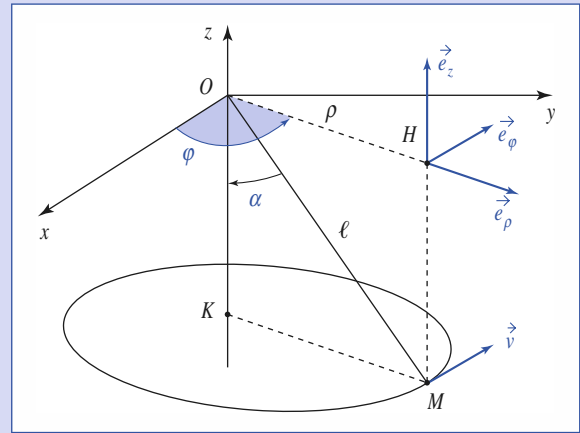
On utilise la relation entre force et accélération ; pour cela, il faut introduire l'inconnue T : tension du fil.

En coordonnées cylindriques, la solution cherchée correspond à ρ et z constants, en notant $\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$ dans ce système de coordonnées, avec $\rho = \ell \sin \alpha$.

La vitesse du mobile est $\vec{v}_M = \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$, et l'accélération de ce mouvement circulaire de rayon $\rho = \ell \sin \alpha$: $\vec{a}_M = \rho \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi - \rho \dot{\varphi}^2 \vec{e}_\rho$.

La relation fondamentale de la dynamique s'écrivant :

$$m \vec{a} = -m g \vec{e}_z + T (\cos \alpha \vec{e}_z - \sin \alpha \vec{e}_\rho)$$



nous obtenons, en projection sur \vec{e}_ρ , \vec{e}_φ et \vec{e}_z :

$$\begin{cases} m \ell \dot{\varphi}^2 = T \\ \ddot{\varphi} = 0 \\ 0 = T \cos \alpha - m g \end{cases}$$

La rotation est uniforme ($\ddot{\varphi} = 0$) et $m \ell \dot{\varphi}^2 = \frac{m g}{\cos \alpha}$, soit :

$$v^2 = \frac{g \ell \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}.$$

• Période de révolution

Elle vaut $T = \frac{2\pi}{\dot{\varphi}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g \cos \alpha}}$.

Pour α petit, $\cos \alpha \approx 1$ et cette période s'identifie à celle des oscillations du pendule simple de longueur $T \approx 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$.



1) Constatons que le poids et la réaction du plateau s'équilibrent, le palet est soumis à la traction exercée par le fil qui est toujours dirigée vers le point O : c'est un mouvement à force centrale.

La conservation du moment cinétique au point O nous permet d'écrire : $r^2 \dot{\theta} = \text{cte} = r_0 v_0$.

Compte tenu de la loi d'évolution du rayon, la vitesse angulaire du palet augmente au cours du mouvement :

$$\dot{\theta}(t) = \frac{r_0 v_0}{(r_0 - Vt)^2}.$$

L'équation du mouvement du palet est, en projection radiale :

$$M(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) = -F$$

ce qui donne pour la force de traction à exercer :

$$F = M r \dot{\theta}^2 = \frac{M r_0^2 v_0^2}{(r_0 - Vt)^3}$$

celle-ci ne cesse d'augmenter, et deviendrait théoriquement infinie pour t tendant vers l'instant $t_0 = \frac{r_0}{V}$ auquel le palet devrait atteindre le point O .

L'opérateur sera limité dans cette évolution par la force maximale qu'il peut exercer, à moins que le fil casse avant...

2) L'opérateur exerce la force instantanée :

$$F(t) = \frac{Mr_0^2 v_0^2}{r(t)}$$

ce qui permet de calculer le travail fourni par l'opérateur, qui effectue des déplacements élémentaires de valeur $dz = -dr = +Vdt$:

$$\mathcal{T} = \int_{x=r_1}^{r_2} \frac{Mr_0^2 v_0^2}{r^3} (-dr) = \frac{1}{2} Mr_0^2 v_0^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right).$$

L'énergie potentielle de pesanteur ne varie pas, ce travail doit donc s'identifier à la variation d'énergie cinétique du mobile. Nous vérifions ainsi :

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}_C &= \frac{1}{2} M (V_1^2 - V_0^2) = \frac{1}{2} M (r_1^2 \dot{\theta}_1^2 + V^2) - (v_0^2 + V^2) \\ &= \frac{1}{2} M \left(\frac{r_0^2 v_0^2}{r_1^2} - v_0^2 \right) = \mathcal{T}. \end{aligned}$$

7

1) Les forces appliquées au pendule sont son poids, et la tension du fil, que nous ne connaissons pas, *a priori*, et qu'il nous importe assez peu d'explicitier si nous pouvons nous en passer.

Or, la tension du fil passe par le point A, mais pas par O : dans l'expression du théorème du moment cinétique, il est donc plus intéressant d'utiliser le point A pour « éliminer » la tension du fil.

Exprimons la dérivée du moment cinétique au point A, en tenant compte de son mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{dL_A}{dt} &= \frac{d}{dt} (\overrightarrow{AM} \wedge m \overrightarrow{v}_M) = (\overrightarrow{v}_M - \overrightarrow{v}_A) \wedge m \overrightarrow{v}_M + \overrightarrow{AM} \wedge m \frac{d\overrightarrow{v}_M}{dt} \\ &= m \overrightarrow{v}_M \wedge \overrightarrow{v}_A + \overrightarrow{\mathcal{M}}_A \end{aligned}$$

où le moment des forces extérieures en A se réduit à celui du poids :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{AM} \wedge m \vec{g} = -mgL \sin \theta \vec{e}_z.$$

L'équation du mouvement donnée par le théorème du moment cinétique est

donc :
$$\frac{dL_A}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A + m \overrightarrow{v}_M \wedge \overrightarrow{v}_A.$$

2) La vitesse du point M est :

$$\overrightarrow{v}_M = \frac{d(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM})}{dt} = (\dot{x}_A + L \dot{\theta} \cos \theta) \vec{e}_x + (L \dot{\theta} \sin \theta) \vec{e}_y$$

nous obtenons donc :

$$m \overrightarrow{v}_M \wedge \overrightarrow{v}_A = m \dot{x}_A L \dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_z \quad (\text{qui est d'ordre deux})$$

et le moment cinétique en A du pendule :

$$L_A = \overrightarrow{AM} \wedge m \overrightarrow{v}_M = mL(L \dot{\theta} + \dot{x}_A \cos \theta) \vec{e}_z \approx mL(L \dot{\theta} + \dot{x}_A) \vec{e}_z.$$

Conservons les seuls termes linéaires en θ , $\dot{\theta}$ ou \dot{x}_A dans l'équation du mouvement, que nous projetons sur l'axe (Oz). Il nous reste simplement :

$$mL(L \ddot{\theta} + \ddot{x}_A) = -mgL\theta$$

soit encore :
$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \omega^2 \frac{x_0}{L} \sin \omega t$$

où $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ est la pulsation propre du pendule simple.

3) En régime sinusoïdal forcé établi, il vient :

$$\theta = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{x_0}{L} \sin \omega t.$$

4) Le pendule entre en résonance pour $\omega = \omega_0$, ce qui remet bien entendu en cause le traitement linéaire.

Si la pulsation excitatrice est inférieure à ω_0 , nous voyons que le mouvement du pendule est en phase avec l'excitation, alors qu'il est en opposition de phase pour $\omega > \omega_0$.

Ces résultats peuvent être observés très facilement en agitant l'extrémité d'une règle (ce n'est pas un pendule simple, mais les conclusions restent utilisables) dont on tient l'extrémité entre deux doigts.

8

1) Le système est déterminé par trois paramètres :

la position de la masse m_1 est repérée par $z(t)$, celle de m_2 par $\ell(t)$ et $\theta(t)$. Il faut trois équations, la distance entre O_1 et O_2 aussi, on en déduit :

$$z(t) + \ell(t) = \text{cte} \quad (1)$$

Le système constitué des deux masses, du fil et des poulies, est conservatif, on peut donc écrire :

$$\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P = \text{cte}.$$

Or $\overrightarrow{O_2 M_2} = \ell(t) \vec{e}_r$,

donc $\vec{v}(M_2) = \frac{d\ell}{dt} \vec{e}_r + \ell(t) \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_K &= \frac{1}{2} m_1 v^2(M_1) + \frac{1}{2} m_2 v^2(M_2) \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\ell}^2 + (\ell \dot{\theta})^2) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\ell}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\ell \dot{\theta})^2 \end{aligned}$$

(car $\dot{z} = -\dot{\ell}$ d'après l'équation (1)). L'énergie potentielle de pesanteur est (en utilisant (1)) :

$$\mathcal{E}_P = -m_1 g z - m_2 g \ell \cos \theta + \text{cte} = m_1 g \ell - m_2 g \ell \cos \theta + \text{cte}'.$$

La conservation de l'énergie s'écrit alors :

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\ell}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\ell \dot{\theta})^2 + g \ell (m_1 - m_2 \cos \theta) = \text{cte}.$$

On peut écrire cette équation sous la forme :

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \dot{\ell} \ddot{\ell} + m_2 (\ell \dot{\ell} \dot{\theta}^2 + \ell^2 \ddot{\theta}) \\ + m_1 g \dot{\ell} - m_2 g \dot{\ell} \cos \theta + m_2 g \ell \dot{\theta} \sin \theta = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

La dernière équation nous est donnée ou bien par la relation fondamentale de la dynamique appliquée à la masse m_2 , projetée sur \vec{e}_θ , ou bien par le théorème du moment cinétique en O_2 appliqué à la masse m_2 (ces deux méthodes permettent d'éliminer la force tension du fil).

Attention : l'énergie mécanique de la masse m_2 ne se conserve pas, la tension du fil n'est pas orthogonale au mouvement, son travail est *a priori* non nul.

• 1^{re} méthode

Les forces appliquées à m_2 sont le poids et la tension du fil (portée par \vec{e}_r). La relation fondamentale de la dynamique projetée sur \vec{e}_θ donne l'équation :

$$(2 \dot{\ell} \ddot{\theta} + \ell \ddot{\theta}) = -g \sin \theta \quad (3)$$

(en effet, $\vec{a}(M_2) \cdot \vec{e}_\theta = 2 \dot{\ell} \ddot{\theta} + \ell \ddot{\theta}$).

Corrigés

En reportant l'équation (3) dans l'équation (2), celle-ci se simplifie et donne, après simplification par ℓ :

$$(m_1 + m_2)\ddot{\ell} + m_1g - m_2g \cos \theta - m_2\ell \dot{\theta}^2 = 0 \quad (2 \text{ bis})$$

• 2^e méthode

Le théorème du moment cinétique en O_2 , appliqué à m_2 , s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}_{O_2}}{dt} = \vec{O_2M_2} \wedge m_2\vec{g} \quad \text{avec} \quad \vec{L}_{O_2} = m_2\vec{O_2M_2} \wedge \vec{v}(M_2) = m_2\ell^2\dot{\theta}\vec{e}_z,$$

d'où $m_2(2\ell\dot{\ell}\dot{\theta} + \ell^2\ddot{\theta}) = -m_2g\ell \sin \theta$. En simplifiant par ℓ on retrouve bien l'équation (3).

2) \dot{z} donc $\dot{\ell}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\theta}^2$ et $\ddot{\theta}$ sont des infiniment petits.

Les équations (2 bis) et (3) deviennent au premier ordre :

$$(m_1 + m_2)\ddot{\ell} + (m_1 - m_2)g = 0 \quad (2')$$

$$\ell\ddot{\theta} = -g\theta. \quad (3')$$

La première équation s'écrit $\ddot{\ell} = a$, d'où, avec des conditions initiales quelconques :

$$\ell(t) = \frac{1}{2}at^2 + \dot{\ell}_0t + \ell_0$$

$y(t) = \ell(t)\theta(t)$, d'où $\ddot{y} = \ell\ddot{\theta} + 2\dot{\ell}\dot{\theta} + \ddot{\ell}\theta = (a - g)\theta$ en utilisant les équations (2') et (3'). Au premier ordre :

$y(t) = \ell_0\theta(t)$, donc $\ddot{y} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\frac{g}{\ell_0}y = 0$ (en remplaçant a par son expression). En posant :

$$\omega = \sqrt{\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\frac{g}{\ell_0}}, \quad \text{on a, avec des conditions initiales quelconques :}$$

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

$y(t)$ représente la projection de la position de m_1 sur l'axe horizontal (avec des petites oscillations).

Si $m_1 = m_2$ et $\dot{\ell}_0 = 0$, la longueur ℓ reste constante et les oscillations ont une pulsation égale à $\sqrt{\frac{g}{\ell_0}}$, on retrouve sous ces conditions les oscillations d'un pendule simple.

9

1) Le mobile est soumis à son poids, qui est vertical, et à la tension du fil, constamment dirigée vers l'origine O .

Ces forces « passent » par l'axe (Oz) : leur moment par rapport à l'axe (Oz) est nul : le moment cinétique du pendule par rapport à l'axe (Oz) est une constante du mouvement.

Calculons le moment cinétique en O :

$$\vec{L}_O = R\vec{e}_r \wedge m(R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + R\sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\phi) = mR^2(\dot{\theta}\vec{e}_\phi - \sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\theta)$$

de sorte que :

$$L_z = \vec{e}_z \cdot \vec{L}_O = mR^2\sin^2\theta\dot{\phi}$$

cette grandeur étant inchangée au cours du mouvement, nous avons bien :

$$\sin^2\theta\dot{\phi} = \text{cte} = A.$$

Nous pouvons remarquer que $\dot{\phi}$ ne peut pas changer de signe : le pendule tourne toujours dans le même sens autour de l'axe (Oz) : nous pouvons l'observer sur la simulation pour la vue de dessus.

Si le sinus de l'angle θ augmente, c'est-à-dire si le pendule s'écarte de la verticale, cette rotation se ralentit : c'est la même chose pour un patineur qui tourne sur lui-même et se met à écarter les bras.

2) Outre la conservation du sens de rotation du pendule autour de l'axe (Oz) , nous pouvons remarquer que l'inclinaison de celui-ci reste confinée entre deux valeurs particulières : l'angle θ évolue entre un minimum θ_{\min} et un maximum θ_{\max} .

3) Le fil étant inextensible et son point de fixation immobile, la tension du fil ne travaille pas. Dans ces conditions l'énergie mécanique, somme de l'énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2)$$

et de son énergie potentielle de pesanteur :

$$\mathcal{E}_P = mgR \cos \theta \quad (\text{origine prise à } z = 0)$$

est une constante du mouvement :

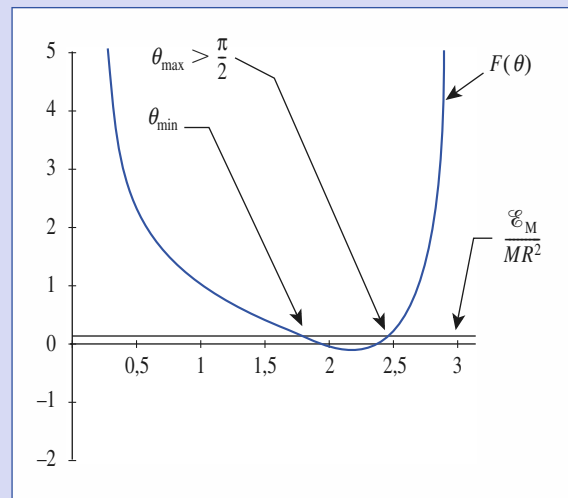
$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) + mgR \cos \theta = \text{cte}.$$

Utilisons $\sin^2\theta\dot{\phi}^2 = \text{cte} = A$, nous pouvons écrire la conservation de l'énergie sous la forme :

$$\frac{\mathcal{E}_M}{mR^2} = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \left(\frac{A^2}{\sin^2\theta} + \frac{g}{R} \cos \theta \right) = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + F(\theta).$$

Le terme d'énergie cinétique lié au facteur $\dot{\theta}^2$ étant positif ou nul, nous voyons que le domaine accessible à l'angle θ est limité par la contrainte :

$$F(\theta) \leq \frac{\mathcal{E}_M}{mR^2}.$$



Nous pouvons tracer l'allure du graphe de $F(\theta)$ pour θ variant de 0 à π , indiqué ci-dessus, et faire apparaître les limites θ_{\min} et θ_{\max} accessibles au pendule. Notons que θ_{\max} est nécessairement compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π , de sorte que l'altitude minimale du pendule est toujours négative. C'est plutôt rassurant : on voit mal comment le pendule pourrait tourner en restant orienté vers le haut, sans jamais redescendre...

Force centrale conservative Mouvement newtonien



Introduction

Kepler (1571-1630) énonça, entre 1604 et 1618, trois lois expérimentales sur le mouvement des planètes. Ces lois sont le résultat d'une étude systématique des observations accumulées par l'astronome danois Tycho Brahé (1546-1601) et de celles qu'il réalisa lui-même sur le mouvement de la planète Mars. C'est à partir de ces lois expérimentales que Newton édifia sa mécanique et sa théorie de la gravitation en 1687. La notion de force de gravitation, qui agit instantanément à distance sans nécessiter de support matériel pour sa transmission, a provoqué beaucoup de réticences de la part de certains de ses contemporains. Newton qui était parfaitement conscient de cette difficulté conceptuelle, a pu écrire, qu'a priori, « voilà qui me paraît d'une si grande absurdité que nulle personne ayant quelque capacité de raisonnement philosophique ne pourra jamais, ce me semble, y ajouter crédit ». L'expérience a donné à la théorie le crédit que lui contestait ses contradicteurs, mais le problème conceptuel soulevé par ces derniers n'était, certes, pas sans objet.

O B J E C T I F S

- Champ de forces centrales et conservatives.
- Interactions gravitationnelle et coulombienne.
- Discussion d'un mouvement à force centrale conservative.
- Mouvements observables dans un champ newtonien, les trois lois de Kepler, satellites.

P R É R E Q U I S

- Dynamique du point matériel.
- Théorème du moment cinétique.
- Forces centrales.
- Énergie du point matériel.

Forces centrales conservatives

1.1. Description du champ de force

1.1.1. Force centrale

Un champ de forces centrales de centre O vérifie : $\vec{F} = F\vec{e}_r$; le support de la force \vec{F} passe par le point fixe O .

1.1.2. Champ de force conservative

Il est conservatif s'il est possible de lui associer une énergie potentielle $\mathcal{E}_p(\vec{r})$, de sorte que lors d'un déplacement élémentaire le travail élémentaire de la force \vec{F} s'écrit : $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -d\mathcal{E}_p$.

Sachant que le déplacement élémentaire est de la forme :

$$d(\vec{OM}) = d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\vec{e}_r.$$

Le vecteur \vec{e}_r a une norme constante (unité), de sorte que : $\vec{e}_r \cdot d\vec{e}_r = 0$. Le travail élémentaire de la force centrale est donc nul pour tout déplacement perpendiculaire à \vec{e}_r , qui garde constante la distance r au point fixe O constante en faisant varier la direction repérée par les angles θ et φ des coordonnées sphériques (doc. 1). Nous en déduisons que l'énergie potentielle ne dépend que de la distance r au centre de force, pas de la direction :

$$\mathcal{E}_p(\vec{r}) = \mathcal{E}_p(r, \theta, \varphi) = \mathcal{E}_p(r).$$

Utilisant alors $\vec{F} \cdot d\vec{r} = Fdr$, nous pouvons affirmer que :

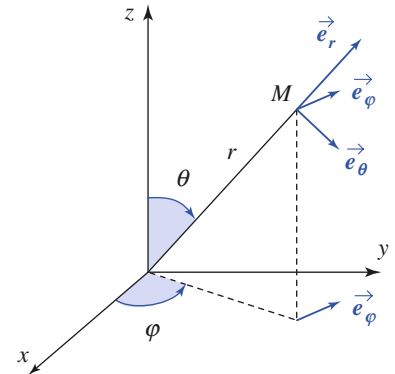
Un champ de force centrale conservative est de la forme $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$ avec $F(r) = -\frac{d\mathcal{E}_p(r)}{dr}$, $\mathcal{E}_p(r)$ désignant l'énergie potentielle (définie à une constante près) associée à ce champ de force.

Remarque : Il existe des champs de forces centrales non conservatifs ; c'est le cas de certaines forces de contact.

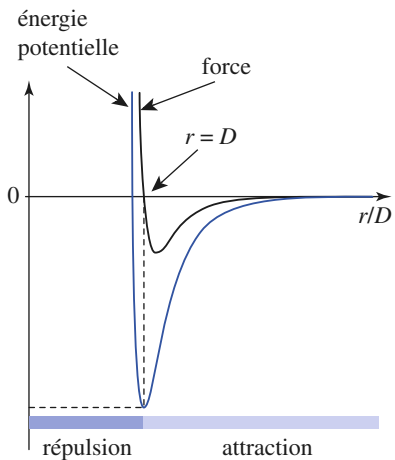
1.1.3. Attraction et répulsion

La force est attractive lorsqu'elle est dirigée vers O , soit : $F(r) < 0$. L'énergie potentielle est alors une fonction croissante de la distance r au centre de force O . Elle est au contraire répulsive si $F(r) > 0$, donc lorsque l'énergie potentielle est une fonction décroissante de la distance.

Sur le document 2 est représentée une fonction énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ qui peut par exemple décrire l'interaction entre deux molécules distantes de r : à distance supérieure à D , la force d'interaction est attractive (c'est la force de Van der Waals, responsable, par exemple, de la cohésion de l'eau en phase liquide, ou à l'origine d'écart à la loi des gaz parfaits en phase gazeuse). À courte distance ($r < D$), nous observons une répulsion brutale : les nuages électroniques des molécules se repoussent fortement lorsqu'elles viennent « au contact ».



Doc. 1. Coordonnées sphériques d'axe (Oz).



Doc. 2. Énergie potentielle d'interaction de deux molécules.

1.2. Interaction gravitationnelle

1.2.1. Loi de gravitation

Deux points matériels M_1 et M_2 , de masses m_1 et m_2 et distants de r , exercent l'un sur l'autre une force attractive, appelée force de gravitation, telle que :

$$\vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_{12}$$

$G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ est une constante universelle.

\vec{e}_{12} est le vecteur unitaire de l'axe $M_1 M_2$ orienté de M_1 vers M_2 (doc. 3).

Cette loi, dite de gravitation universelle, a été formulée par Newton pour expliquer les orbites planétaires.

La masse pesante qui intervient dans l'expression de la force de gravitation est identique à la masse inerte de la relation fondamentale de la dynamique. Il s'agit là d'un postulat supplémentaire, dont la validité est confirmée par toutes les expériences.

1.2.2. Champ de gravitation d'un astre

Le champ de gravitation créé par un ensemble de points matériels P_i ($i = 1 \dots N$) de masses m_i est, au point M , la superposition des champs de gravitation créés par chacun des points P_i :

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = \sum_{i=1}^N -G m_i \frac{\vec{P_i M}}{P_i M^3}$$

Le champ de gravitation engendré par un corps est la superposition des champs de gravitation engendrés par les éléments qui le composent. En notant P le point courant décrivant l'astre (doc. 4.), et en découpant le corps en volumes élémentaires $d\tau_p$, de masse $dm = \rho(P) d\tau_p$, où ρ est la masse volumique de l'élément considéré, nous avons :

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = \iiint_{\text{astre}} -G \rho(P) \frac{\vec{PM}}{PM^3} d\tau_p$$

Son expression est en générale délicate à établir, mais nous pourrions en pratique nous contenter d'en utiliser une expression dans les cas suivants :

■ L'astre possède une symétrie sphérique

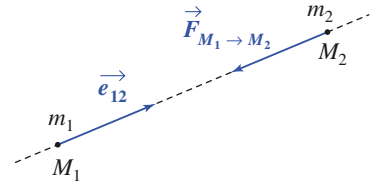
Notons O le centre de l'astre sphérique, pour lequel la masse volumique ne dépend que de la distance au centre : $\rho(P) = \rho(r_p)$, et R son rayon (doc. 5). La masse totale de cet astre est :

$$M_{\text{astre}} = \iiint_{\text{astre}} \rho(P) d\tau_p = \int_{r_p=0}^R \rho(r_p) 4\pi r_p^2 dr_p$$

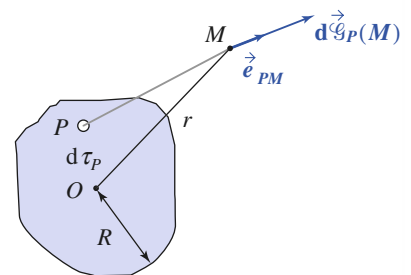
En dehors de l'astre, c'est-à-dire à distance $r > R$, le champ de gravitation prend la forme très simple :

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = -GM_{\text{astre}} \frac{\vec{OM}}{OM^3} = -GM_{\text{astre}} \frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

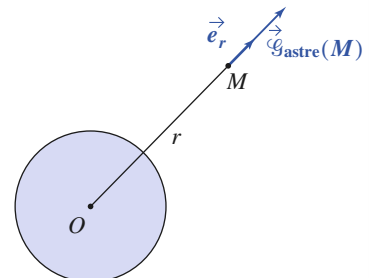
et s'identifie donc au champ qui, par un point matériel de masse M , serait placé au centre O de l'astre à symétrie sphérique.



Doc. 3. Force d'attraction gravitationnelle (force attractive).



Doc. 4. Décomposition du champ de gravitation



Doc. 5. Astre à symétrie sphérique

■ *L'astre est observé à grande distance*

Assimiler la Terre, la Lune, le Soleil à des astres à symétrie sphérique est une hypothèse très raisonnable, mais ce n'est qu'une approximation.

Plus généralement, pour un astre de forme plus ou moins torturée, l'expression du champ de gravitation :

$$\vec{g}(M) = -GM_{\text{astre}} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

où M est la masse totale de l'astre et O son centre d'inertie, constitue une excellente approximation lorsque la distance d'observation est grande devant le rayon R de l'astre : $r \gg R$.

Ce résultat correspond alors au terme prépondérant issu du calcul complet (et complexe) du champ de gravitation de l'astre. Bien entendu, l'approximation est valable à distance r d'autant plus faible que l'astre possède une physionomie quasi sphérique.

Le champ de gravitation engendré par un astre de masse M_{astre} , de centre d'inertie O , en un point M situé à l'extérieur de l'astre est :

$$\vec{g}(M) = -GM_{\text{astre}} \frac{\vec{OM}}{OM^3} = -GM_{\text{astre}} \frac{\vec{e}_r}{r^2}.$$

Cette expression est exacte dans le cas d'un astre à symétrie sphérique, et constitue une bonne approximation du champ de gravitation si l'astre est quasi sphérique ou bien à distance r suffisamment grande par rapport à la dimension caractéristique R d'un astre peu régulier.

1.2.3. Pesanteur terrestre

Au voisinage de la surface terrestre, un objet de masse m est soumis à son **poinds** :

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

En première approximation, le poids est égal à la force de gravitation exercée par la Terre. Cette force est quasiment uniforme dans un domaine dont les dimensions sont petites par rapport au rayon terrestre R_T . D'où :

$$\vec{g} \approx -G \frac{m_T}{R_T^2} \vec{e}_r.$$

Nous verrons une définition plus précise du poids : elle sera donnée lors de l'étude de la dynamique terrestre au *chapitre 8*.

Il est bien entendu impossible d'assimiler la norme du champ de gravitation à une constante pour étudier le mouvement des satellites : l'altitude d'un satellite terrestre géostationnaire est de l'ordre de 36 000 km, non négligeable par rapport au rayon terrestre $R_T = 6\,400$ km.

1.3. Interaction coulombienne

Une charge Q en un point P et une charge q en un point M , immobiles, interagissent en exerçant l'une sur l'autre une force. La force subie par le point matériel chargé M est, dans le vide :

$$\vec{f}_{P \rightarrow M} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}.$$

Notons l'analogie formelle avec la loi d'attraction gravitationnelle :

$$\vec{f}_{P \rightarrow M} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3} \leftrightarrow \vec{f}_{P \rightarrow M} = -GmM \frac{\vec{PM}}{PM^3}.$$

Remarquons aussi que la force d'origine électrique est attractive pour des charges de signe opposé, et répulsive pour des charges de même signe. Pour la gravitation, la force est toujours attractive.

Remarque : Comme dans le cas gravitationnel, la force exercée sur le point matériel M chargé reste applicable lorsque le point P est remplacé par une distribution de charges à symétrie sphérique (et rayon R) centrée en P : la force se calcule alors, hors de cette distribution ($PM > R$), comme si toute la charge Q de cette distribution était concentrée en P .

Application 1

La constante de gravitation vaut $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI.

La constante d'interaction électrostatique vaut :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ SI.}$$

Précisez les unités du système international correspondant à ces deux constantes.

Comparer les interactions gravitationnelles et électrostatiques entre deux électrons. (Charge $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C et masse $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg).

La quantité G s'exprime sous la forme du produit d'une force par une distance au carré, divisé par une masse au carré donc :

$$[G] = \{MLT^{-2}\} \cdot L^2 \cdot M^{-2} = M^{-1}L^3T^{-2}.$$

On notera donc :

$$G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}.$$

La quantité $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ s'exprime sous la forme du produit d'une force par une distance au carré, divisé par une charge au carré, donc :

$$\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] = \{MLT^{-2}\} \cdot L^2 \cdot Q^{-2} = MQ^{-2}L^3T^{-2}.$$

On pourrait écrire : $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot \text{C}^{-2} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$,

mais en réalité ϵ_0 est homogène à des farads par mètre, et on écrira :

$$\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \approx 9 \cdot 10^9 \text{ m} \cdot \text{F}^{-1}.$$

La dépendance de ces interactions en fonction de la distance séparant les deux électrons étant la même pour les deux interactions, nous avons simplement :

$$\frac{f_{\text{électrostatique}}}{f_{\text{gravitationnelle}}} = \left(\frac{e}{m} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} G \right) = 4,2 \cdot 10^{42}.$$

Cet ordre de grandeur justifie que pour l'étude de mouvements de particules chargées, il est en général tout à fait inutile de prendre en compte les forces de gravitation.

En revanche, pour les trajectoires de satellites autour d'un astre, seule la gravitation interviendra.

1.4. Champ newtonien

Pour la gravitation comme pour l'interaction coulombienne, nous avons obtenu une force subie par le point M (de masse m ou de charge q), situé à distance r du centre de force O de la forme :

$$\vec{F}_{\rightarrow M} = -\alpha \frac{\vec{OM}}{OM^3} = -\alpha \frac{\vec{e}_r}{r^2}.$$

Nous parlerons de champ newtonien (ou coulombien) lorsque le champ de force centrale possède une intensité inversement proportionnelle à la distance

au centre O au carré :

$$\vec{F} = -\alpha \frac{\vec{e}_r}{r^2}.$$

Nous identifions immédiatement l'énergie potentielle, définie à une constante près :

$$\frac{d\mathcal{E}_P(r)}{dr} = -F(r) = +\frac{\alpha}{r^2} \Rightarrow \mathcal{E}_P(r) = -\frac{\alpha}{r} + \text{cte.}$$

Un champ de force centrale newtonien est de la forme : $\vec{F} = -\alpha \frac{\vec{e}_r}{r^2}$.

L'énergie potentielle associée est : $\mathcal{E}_P(r) = -\frac{\alpha}{r} + \text{cte.}$

Le champ de force newtonien est attractif lorsque la constante d'interaction α est positive, répulsif le cas échéant.

- Pour un point matériel M de masse m évoluant dans le champ de gravitation d'un astre sphérique de masse M , nous avons : $\alpha = GmM$, et l'interaction est attractive.
- Pour un point matériel M portant la charge q évoluant dans le champ électrostatique engendré par une charge Q au point O , la constante d'interaction devient : $\alpha = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}$.

2 Mouvement à force centrale conservative

2.1. Description du mouvement

2.1.1. Coordonnées polaires

Nous savons que lors d'un mouvement où il est soumis à un champ de force centrale, de centre O fixe, dans un référentiel galiléen, la trajectoire d'un point matériel est en général dans un plan (passant par O et perpendiculaire au moment cinétique constant \vec{L}_O ; cf. chapitre 6).

Pour repérer le mouvement du point matériel dans ce plan, il nous suffit de deux coordonnées. La force étant constamment radiale, nous ferons le choix des coordonnées polaires (r, θ) de centre O (doc.6.) :

$$\vec{OM}(t) = r\vec{e}_r \text{ et } \vec{F} = F(r)\vec{e}_r \quad (\text{rappelons que } \vec{e}_r \text{ dépend de } \theta!).$$

Les vitesses et accélérations du mobile s'écrivent alors :

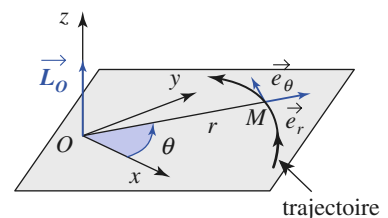
$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \right) + \left(\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}^2\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \right) \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

2.1.2. Équations du mouvement plan

En écrivant la relation fondamentale de la dynamique, en projection sur les deux vecteurs de la base locale, nous obtenons donc :

$$\begin{cases} \text{équation radiale} & \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{F(r)}{m} = -\frac{1}{m} \frac{d\mathcal{E}_P(r)}{dr} \\ \text{équation orthoradiale} & 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0. \end{cases}$$



Doc. 6. Coordonnées polaires dans le plan de la trajectoire

Nous obtenons donc en général un système d'équations différentielles couplées, d'ordre deux, en $r(t)$ et $\theta(t)$, qui n'est pas linéaire... Nous ne pourrions certainement pas en donner des solutions analytiques simples dans le cas général !

L'obtention d'une expression exacte des coordonnées polaires $r(t)$ et $\theta(t)$, dans le plan de la trajectoire d'un point matériel soumis à un champ de force centrale est un problème en général complexe, qui nécessite la résolution d'un système d'équations différentielles non linéaires couplées.

2.2. Lois de conservation

Le problème s'annonce complexe, et toute information est bonne à prendre ! En particulier, nous pouvons dégager des lois de conservation pour le mouvement étudié, qui nous donneront autant d'équations utilisables...

2.2.1. Conservation du moment cinétique

En remarquant que : $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$, nous voyons que la projection orthoradiale de la relation fondamentale de la dynamique nous permet de retrouver la loi des aires :

$$r^2\dot{\theta} = \text{cte} = C \text{ (constante des aires).}$$

Nous savons que celle-ci traduit la conservation du moment cinétique du point matériel au point O fixe (cf. chapitre 6).

La constante des aires C étant déterminée par les conditions initiales, nous pouvons ramener le système précédent aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} = \frac{F(r)}{m} = -\frac{1}{m} \frac{d\mathcal{E}_P(r)}{dr} \\ \dot{\theta} = \frac{C}{r^2}. \end{cases}$$

Il nous reste ainsi une équation différentielle d'ordre deux en $r(t)$ à résoudre. Celle-ci n'est toujours pas linéaire, et nous ne saurons pas en donner de solution simple en général. Si toutefois celle-ci était accessible, il suffirait de reporter $r(t)$ dans la seconde équation pour obtenir $\theta(t)$ par intégration par rapport au temps.

L'utilisation de la loi des aires permet de ramener le problème à une seule équation différentielle en $r(t)$, d'ordre deux, et encore non linéaire.

2.2.2. Conservation de l'énergie

Observons le second membre de l'équation radiale du mouvement. Nous pouvons l'intégrer par rapport à la variable r pour faire apparaître l'énergie potentielle. Pour cela, multiplions les deux membres de cette équation par $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$, ce qui nous donne :

$$\ddot{r}\dot{r} - C^2 \frac{\dot{r}}{r^3} = -\frac{1}{m} \frac{dr}{dt} \frac{d\mathcal{E}_P(r)}{dr}$$

ou encore :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{C^2}{r^2} \right) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{m} \mathcal{E}_P(r) \right)$$

qui s'intègre par rapport au temps en : $\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\right) + \mathcal{E}_P(r) = \text{cte}$ qui n'est rien d'autre que la traduction de la conservation de l'énergie mécanique \mathcal{E}_M du mobile, la force radiale étant conservative :

$$\text{Cte} = \mathcal{E}_M = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P = \frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{E}_P = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \mathcal{E}_P = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\right) + \mathcal{E}_P.$$

La vitesse radiale peut être extraite de cette expression :

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm \sqrt{\mathcal{E}_M - \frac{mC^2}{2r^2} - \mathcal{E}_P(r)}.$$

Les grandeurs \mathcal{E}_M et C sont des constantes du mouvement, déterminées à partir des conditions initiales, et la fonction $\mathcal{E}_P(r)$ caractérise le champ de force centrale conservative dans lequel évolue le point matériel. Le choix du signe de la racine dépend des conditions antérieures du mouvement.

Cette expression fait apparaître une équation différentielle d'ordre un, qui peut se prêter assez aisément à un calcul numérique (en utilisant la méthode de résolution d'Euler, par exemple, cf. *Annexe*).

Notons que, dans le cas général, l'obtention d'une solution exacte de cette équation différentielle reste encore peu probable !

L'utilisation de la conservation de l'énergie permet d'obtenir une équation différentielle non linéaire d'ordre un en $r(t)$.

2.3. Discussion du mouvement radial

2.3.1. Énergie potentielle effective

Les conservations du moment cinétique et de l'énergie nous ont permis d'écrire :

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} + \mathcal{E}_P(r) = \mathcal{E}_M = \text{cte}.$$

Nous pouvons encore écrire cette équation sous la forme :

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{P_{\text{eff}}}(r) = \mathcal{E}_M$$

où la fonction $\mathcal{E}_{P_{\text{eff}}}(r)$ est homogène à une énergie :

$$\mathcal{E}_{P_{\text{eff}}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + \mathcal{E}_P(r).$$

Nous appellerons cette fonction *l'énergie potentielle effective* du mouvement.

Remarque : Attention ! cette fonction dépend de r , comme la fonction énergie potentielle $\mathcal{E}_P(r)$ associée à la force centrale, mais aussi du mouvement étudié : son expression fait intervenir la constante des aires, donc les conditions initiales.

2.3.2. Domaine accessible à la trajectoire

Le terme $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ est par nature positif ou nul. Le domaine des valeurs de r accessibles au mouvement est donc restreint aux valeurs telles que :

$$\mathcal{E}_{P_{\text{eff}}}(r) \leq \mathcal{E}_M.$$

Lorsque l'égalité survient, \dot{r} s'annule : la distance au centre de force O atteint une valeur extrême, qui peut être un minimum ou un maximum.

Le domaine des valeurs de r accessible à la trajectoire est défini par $\mathcal{E}_{\text{P eff}}(r) \leq \mathcal{E}_M$, où la fonction énergie potentielle effective est définie par : $\mathcal{E}_{\text{P eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + \mathcal{E}_P(r)$. Cette quantité dépend des conditions initiales.

Remarque : À l'instant où \dot{r} s'annule, l'accélération radiale n'est pas nulle a priori, et \dot{r} change de signe. C'est ce qui fait basculer le signe devant la racine que nous avons obtenue au § 2.2. précédent pour exprimer $\frac{dr}{dt}$.

2.3.3. Énergie potentielle et énergie potentielle effective

Cette discussion du domaine accessible à la trajectoire est formellement analogue à celle que nous avons développée au chapitre 3. Nous savions déjà que le domaine accessible à la trajectoire doit vérifier :

$$\mathcal{E}_P(r) = \mathcal{E}_M - \mathcal{E}_K \leq \mathcal{E}_M.$$

Application 2

Distance de plus courte approche d'un météore

Un météore de masse m , négligeable devant la masse M_T de la Terre, arrive de l'infini avec la vitesse \vec{v}_0 par rapport à la Terre. Son paramètre d'impact est $OH = b$ (doc. 7). Calculer sa distance r_{min} de plus courte approche de la Terre, en fonction de v_0, b, M_T, G constante de gravitation et R_T rayon de la Terre.

Pour l'étude du mouvement relatif du météore par rapport à la Terre, on se place dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_0 . Ce référentiel a son origine au centre O de la Terre, et ses axes $(Ox), (Oy)$ et (Oz) sont respectivement parallèles à ceux de Copernic, de directions supposées fixes (cf. chapitre 9).

Dans \mathcal{R}_0 l'énergie mécanique du météore est :

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Remarquons que le moment cinétique L_O est conservé quand on fait « glisser » $m\vec{v}_0$ sur la droite support D . En conséquence :

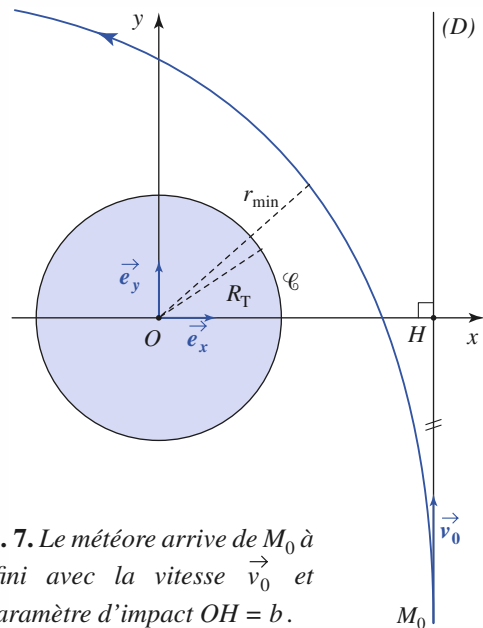
$$\vec{L}_O = \vec{OH} \wedge m\vec{v}_0 = mbv_0\vec{e}_z$$

d'où la constante des aires : $C = \frac{L_{Oz}}{m} = bv_0$ et l'expression de l'énergie potentielle effective :

$$\mathcal{E}_{\text{P eff}}(r) = \frac{m(bv_0)^2}{2r^2} - G\frac{M_T m}{r}.$$

La distance de plus courte approche est solution de l'équation $\mathcal{E}_{\text{P eff}}(r) = \mathcal{E}_M$, soit :

$$r_{\text{min}} = -G\frac{M_T}{v_0^2} + \sqrt{\left(G\frac{M_T}{v_0^2}\right)^2 + b^2}.$$



Doc. 7. Le météore arrive de M_0 à l'infini avec la vitesse \vec{v}_0 et le paramètre d'impact $OH = b$.

r_{min} est une fonction croissante de b . Le météore contournera la Terre sans la rencontrer si :

$$r_{\text{min}} > R_T$$

c'est-à-dire si :

$$b > b_{\text{min}} = R_T \sqrt{1 + 2G\frac{M_T}{R_T v_0^2}}.$$

Pour le mouvement à force centrale, l'énergie cinétique ne peut s'annuler : en effet, la constante des aires n'est, en général, pas nulle, et la composante orthoradiale de la vitesse $v_\theta = r\dot{\theta} = \frac{C}{r}$ ne s'annule pas.

Ici, c'est la fonction énergie potentielle effective que nous utilisons, et non plus la seule énergie potentielle, car nous avons :

$$\mathcal{E}_{p_{\text{eff}}}(r) = \mathcal{E}_M - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \leq \mathcal{E}_M.$$

2.4. Observation de quelques mouvements

2.4.1. Énergie potentielle en $\frac{1}{r^n}$

Considérons une énergie potentielle d'expression simple, par exemple :

$$\mathcal{E}_p(r) = -\frac{K}{r^n}, \text{ soit } F(r) = -\frac{nK}{r^{n+1}}.$$

Le champ de forces est attracteur si nK est positif, répulsif le cas échéant.

L'oscillateur harmonique spatial isotrope correspond ici à $n = -2$ et $K < 0$: $\mathcal{E}_p = |K|r^2$.

Un champ newtonien correspond à $n = 1$, attractif pour $K > 0$, répulsif sinon.

2.4.2. Cas d'un champ répulsif

Envisageons, dans un premier temps, un champ répulsif : la fonction énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ est décroissante, de même que le terme $\frac{mC^2}{2r^2}$.

L'énergie potentielle effective est donc une fonction strictement décroissante de la distance au centre de force, qui diverge en $r = 0$ (doc. 8).

Le graphe de $\mathcal{E}_{p_{\text{eff}}}(r)$, auquel nous superposons la droite horizontale représentant l'énergie mécanique \mathcal{E}_M fait alors apparaître un minimum r_{min} qui peut être atteint si le point matériel se dirige initialement vers les r décroissants.

Dans tous les cas, il est clair que nous avons affaire à un état de diffusion, le point matériel finissant toujours par s'éloigner indéfiniment du centre O (doc. 9).

2.4.3. Cas d'un champ attractif

Ce cas est *a priori* beaucoup plus riche : nous pouvons imaginer que le point matériel peut échapper à l'attraction vers le centre O (état de diffusion), ou bien rester au voisinage (état lié), ou même pire comme nous allons le voir...

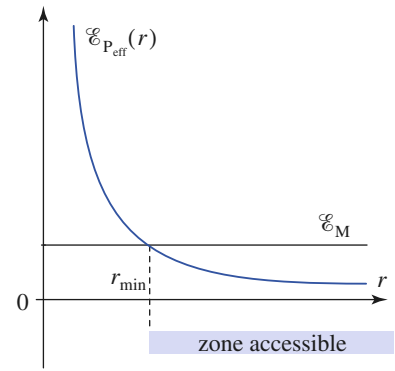
Ces différents cas apparaissent naturellement en traçant le graphe de l'énergie potentielle effective :

$$\mathcal{E}_p(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{K}{r^n} \text{ (avec } K \text{ du signe de } n\text{)}.$$

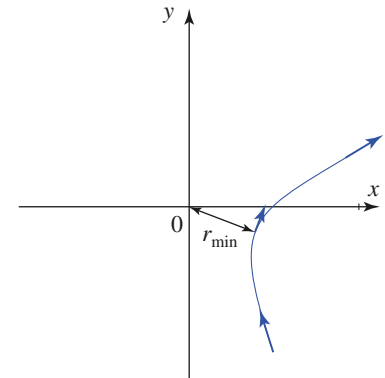
■ Cas n° 1 : $n < 0$ (et $K < 0$)

L'énergie potentielle effective tend vers $+\infty$ en $r \rightarrow 0$ où le terme cinétique l'emporte, et en $r \rightarrow +\infty$ où le terme potentiel l'emporte. Son graphe fait apparaître une cuvette, et le tracé de la constante énergie mécanique fait apparaître une distance minimale r_{min} et une distance maximale r_{max} entre lesquelles r peut varier (doc. 10).

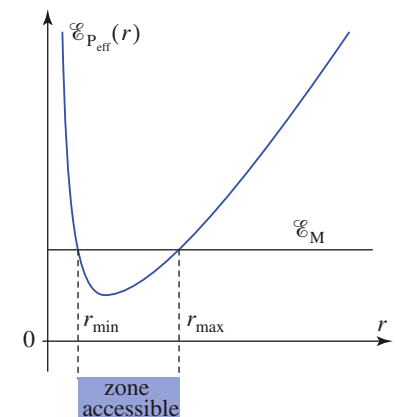
La simulation du mouvement fait apparaître une trajectoire qui n'est en général pas fermée, pour laquelle la distance au centre de force O oscille entre r_{min} et r_{max} (doc. 11).



Doc. 8. Énergie potentielle effective dans un cas répulsif ($n = 1, k < 0$).

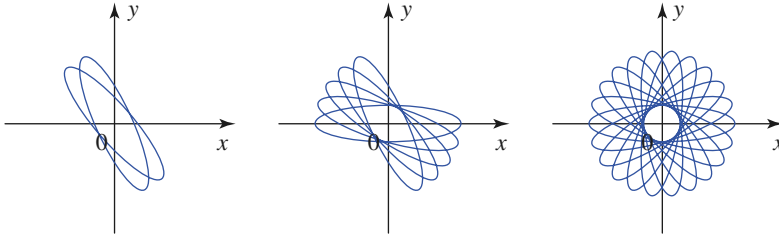


Doc. 9. État de diffusion, avec passage par la distance d'approche minimale r_{min} .



Doc. 10. Énergie potentielle effective pour $n < 0$ (ici $n = -1, 2$) et $k < 0$.

Remarque : Le cas $n = -2$ est particulier, puisqu'il s'agit alors d'un oscillateur harmonique spatial : $\mathcal{E}_p(r) = |K|r^2$ et $F(r) = 2kr = -2|k|r$. Nous savons que dans ce cas la trajectoire est fermée : c'est une ellipse.



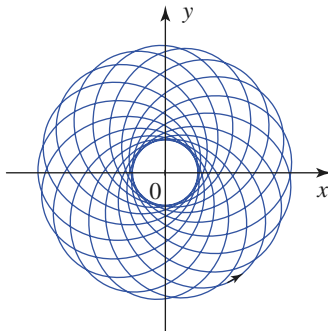
Doc. 11. Mouvement pour $n < 0$ (ici $n = -1,5$), oscillations de la distance au centre de force.

■ **Cas n° 2 : $0 < n < 2$ (et $K > 0$)**

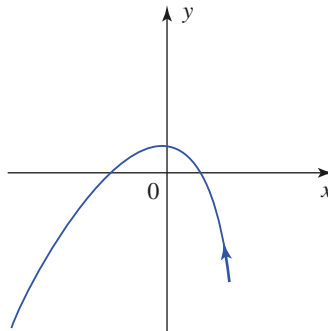
L'énergie potentielle effective diverge encore vers $+\infty$ en $r \rightarrow 0$ où le terme cinétique l'emporte. En revanche, elle tend vers zéro par valeurs négatives pour $r \rightarrow \infty$, faisant apparaître une courbe « en cuvette » (doc. 12).

Nous pouvons alors observer un état lié si $\mathcal{E}_M < 0$ (doc. 13a), ou un état de diffusion si $\mathcal{E}_M > 0$ (doc. 13b).

Remarque : Le cas du champ newtonien correspond ici à $n = 1$. Nous verrons plus loin que pour ce champ très particulier, les trajectoires des états liés sont fermées : ce sont des ellipses.



Doc. 13a. État lié ($n = 1,2$).



Doc. 13b. État de diffusion ($n = 1,2$).

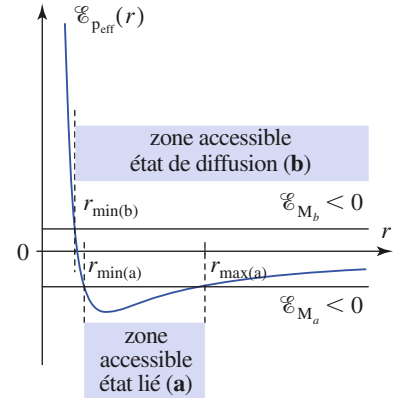
■ **Cas n° 3 : $n > 2$ (et $K > 0$)**

L'énergie potentielle effective diverge cette fois vers $-\infty$ en $r \rightarrow 0$ où le terme potentiel l'emporte, et elle tend vers zéro par valeurs positives pour $r \rightarrow \infty$, faisant apparaître une courbe « à bosse » : la fonction énergie potentielle effective passe cette fois par un maximum $\mathcal{E}_{P_{\text{eff max}}}$ (doc. 14).

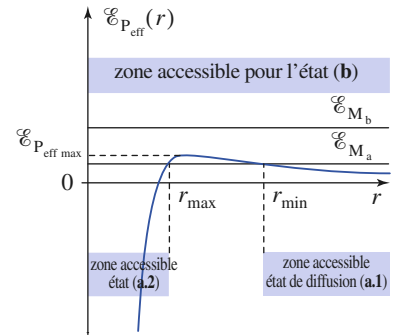
Si l'énergie mécanique est inférieure à ce maximum ($\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_{M_a}$ sur le doc. 14), nous pouvons observer un état de diffusion (cas de l'état **a.1.**), pour lequel la distance r ne peut descendre en deçà d'un minimum r_{min} (doc. 15a).

Pour une même valeur de l'énergie mécanique, nous pouvons aussi rencontrer un cas (état **a.2.**) où la distance r possède une borne supérieure r_{max} , mais pas de borne inférieure non nulle : concrètement, cela signifie que la force attractive est trop forte à courte distance, et que le point matériel vient s'écraser sur le centre attracteur O !

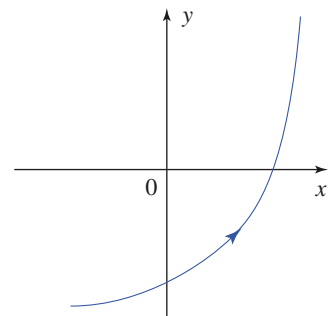
Si l'énergie est supérieure à $\mathcal{E}_{P_{\text{eff max}}}$ (état **b.** sur le doc. 14), cette collision survient encore si le point matériel se dirige initialement vers le centre de force O (doc. 15b).



Doc. 12. Énergie potentielle effective pour $0 < n < 2$ ici ($n = 1,2$).



Doc. 14. Énergie potentielle effective pour $n > 2$ ici ($n = 3$).

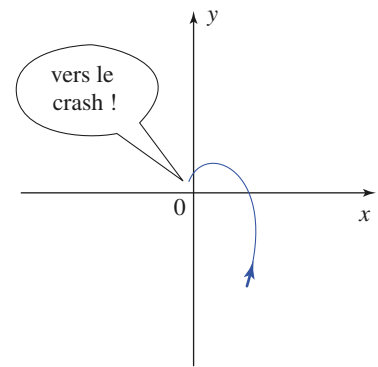


Doc. 15a. Le point matériel s'échappe !

Ces résultats sont assez exotiques... il est plutôt heureux que l'attraction gravitationnelle entre dans la catégorie $n < 2$!

Il ne faudrait pas conclure que de tels cas n'existent pas : les interactions de Van der Waals entre molécules correspondent à des forces attractives, avec $n = 6$. Toutefois, il existe un « garde-fou » à courte distance, sous la forme d'une répulsion très forte lorsque les nuages électroniques deviennent trop proches.

Dans le cas d'un champ de forces dérivant d'une énergie potentielle en $\frac{1}{r^n}$, l'utilisation de l'énergie potentielle effective permet une discussion qualitative simple, même si nous ne savons pas résoudre explicitement les équations du mouvement.



Doc. 15b. Il va s'écraser sur le centre attracteur.

3 Mouvement dans un champ newtonien

3.1. Le problème de Kepler

3.1.1. Importance des champs newtoniens

Un mouvement est dit keplerien lorsqu'il s'effectue sous l'action d'une force centrale en $\frac{1}{r^2}$, de centre de force fixe dans le référentiel galiléen d'étude, c'est-à-dire dans un champ de forces newtonien.

Le cas des champs newtoniens est évidemment important : il correspond à l'interaction gravitationnelle (entre corps à géométrie sphérique, en toute rigueur). Leur étude nous permettra donc de comprendre, par exemple, le mouvement des planètes gravitant autour du Soleil.

Le problème de Kepler concerne plus généralement toute une série de problèmes physiques, tant à l'échelle microscopique (interaction entre particules chargées), qu'à l'échelle macroscopique (interaction entre planète et satellite).

3.1.2. Les trois lois de Kepler

Kepler énonça trois lois expérimentales sur le mouvement des planètes. Ces lois sont le résultat d'une étude systématique des observations accumulées par l'astronome danois Tycho Brahé, et celles effectuées par Kepler en observant le mouvement de la planète Mars.

- *Première loi* (1605) : chaque planète décrit, dans le sens direct, une trajectoire elliptique dont le Soleil est un foyer.
- *Deuxième loi* (1604) : l'aire balayée par le rayon Soleil-planète est proportionnelle au temps mis pour la décrire.
- *Troisième loi* (1618) : le carré du temps de révolution sidérale d'une planète est proportionnel au cube du grand axe de l'ellipse qu'elle décrit. Notant T la période de révolution et a le demi-grand axe, le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ est le même pour toutes les planètes gravitant autour du Soleil.

Nous connaissons bien la deuxième loi de Kepler : c'est la loi des aires.

La formation du système solaire à partir d'une nébuleuse originelle, possédant un moment cinétique initial qui a été conservé (système quasi isolé), est une hypothèse qui permet de comprendre pourquoi les planètes tournent toutes dans le même sens.

Dans le cas du mouvement newtonien, nous établirons le contenu des première et troisième lois expérimentales de Kepler. C'est à partir de ces lois expérimentales que Newton édifia sa théorie de la gravitation en 1687.

3.2. Satellites, trajectoires circulaires

3.2.1. Satellites

Dans ce paragraphe, l'interaction newtonienne correspond à l'attraction gravitationnelle subie par un satellite de masse m évoluant dans le champ de gravitation d'un astre de masse M .

La constante α (définie au §1.4.) est positive car le champ gravitationnel correspond à une force attractive : $\alpha = GmM$.

Par souci de simplicité, nous utiliserons les hypothèses suivantes :

- L'effet d'autres astres est ici négligé. Nous en reparlerons au *chapitre 9* : c'est l'effet des marées.
- La masse du satellite est supposée très inférieure à celle de l'astre. Dans ces conditions, nous considérerons que le satellite constitue un mobile de masse m évoluant dans un référentiel galiléen où l'astre de masse M est immobile, son centre O étant le centre du champ de force newtonien. Nous reviendrons sur cette hypothèse au *chapitre 10* lors de l'étude des systèmes de deux points matériels en interaction.

3.2.2. États liés

Les satellites restent par définition au voisinage de l'astre auprès duquel ils gravitent. C'est le cas des planètes orbitant autour du Soleil observées par Kepler.

Considérons l'énergie du point matériel, qui est ici une constante du mouvement :

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{E}_P(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r} = \text{cte.}$$

Posons $r = \infty$ dans l'équation de conservation de l'énergie, nous obtenons : $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \mathcal{E}_M$. Ce cas n'a de sens que si l'énergie est positive. À l'inverse, pour un satellite, la trajectoire se limite à des valeurs finies de la distance r : ces *états liés* correspondent à des valeurs négatives de l'énergie.

Les satellites correspondent à des mobiles en état lié évoluant dans le champ de gravitation, attractif, de l'astre autour duquel ils gravitent : leur énergie est négative.

3.2.3. Orbite circulaire

Calculons la vitesse v_c qu'il faut communiquer à un satellite pour que sa trajectoire soit un cercle de rayon r_c .

Sur ce cercle, l'accélération est : $\vec{a} = -\frac{v_c^2}{r_c}\vec{e}_r$, qui s'identifie à $\frac{\vec{F}}{m} = -\frac{\alpha}{m r_c^2}\vec{e}_r$,

où M est la masse de l'astre. Nous en déduisons :

La vitesse d'un satellite en trajectoire circulaire de rayon r_c est :

$$v_c = \sqrt{\frac{\alpha}{m r_c}} = \sqrt{\frac{GM}{r_c}}.$$

Nous pouvons alors vérifier que l'énergie du satellite :

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}mv_c^2 - \frac{GmM}{r_c} = -\frac{1}{2}\frac{GmM}{r_c} = -\frac{\alpha}{2r_c}$$

est bien négative.

L'énergie associée à une trajectoire circulaire de rayon r_c est :

$$\mathcal{E}_M = -\frac{\alpha}{2r_c}$$

3.2.4. Troisième loi de Kepler

La période de révolution du satellite en orbite circulaire est :

$$T = \frac{2\pi r_c}{v_c} = 2\pi\sqrt{\frac{mr_c^2}{\alpha}} = 2\pi\sqrt{\frac{r_c^3}{GM}}$$

Dans le cas des planètes, satellites du Soleil, de masse M_\odot , pour la plupart en trajectoire (quasi) circulaire autour de notre étoile, Kepler a ainsi pu vérifier :

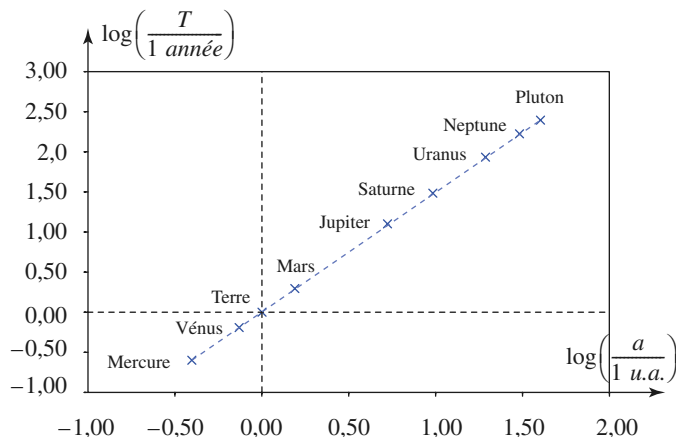
Dans le système solaire, les planètes en trajectoire circulaire autour du Soleil ont une période liée à leur rayon de giration par : $\frac{T^2}{r_c^2} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot}$.

Remarque : Pour une trajectoire elliptique, il faut remplacer le rayon r_c de la trajectoire circulaire par le demi-grand axe a de l'ellipse dans ce résultat.

Vérifions la troisième loi de Kepler dans le système solaire.

	demi-grand axe a (u.a.)	période T (années)	excentricité e
Mercure	0,387	0,241	0,205
Vénus	0,723	0,615	0,006
Terre	1,000	1,000	0,016
Mars	1,523	1,880	0,093
Jupiter	5,202	11,85	0,048
Saturne	9,554	29,47	0,055
Uranus	19,218	84,29	0,046
Neptune	30,109	164,78	0,008
Pluton	39,60	247,80	0,246

Doc. 16. Les planètes du système solaire.



Doc. 17. Tracé de $\log\left(\frac{T}{1 \text{ année}}\right)$ en fonction de $\log\left(\frac{a}{1 \text{ u.a.}}\right)$: c'est une droite de pente $3/2$, donc $\frac{T^2}{a^3} = \text{cte}$.

Le tracé du document 17 permet de vérifier la troisième loi de Kepler.

3.2.5. Première vitesse cosmique

Dans le cas d'un satellite terrestre, $M = M_T$ masse de la Terre, et la vitesse minimale correspond au cas $r = R_T$ (rayon terrestre : $R_T \approx 6\,370 \text{ km}$).

Cette vitesse est la vitesse en orbite circulaire basse, encore appelée première vitesse cosmique :

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_T}} \approx \sqrt{gR_T} \approx 7,92 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

où g est l'intensité de champ de pesanteur sur Terre, assimilable en ordre de grandeur au champ de gravitation à altitude nulle : $g \approx \frac{GM}{R_T^2} \approx 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Remarque : Cette vitesse est considérable, comparée aux vitesses communément rencontrées sur Terre. Pour économiser l'énergie à fournir pour satelliser un objet, il est utile de se placer près de l'équateur où la vitesse liée au mouvement de rotation de la Terre sur elle-même correspond à : $R_T \cdot \Omega_T \approx 0,46 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

3.2.6. Deuxième vitesse cosmique

Le satellite pourrait totalement échapper à l'attraction terrestre si son énergie devenait juste nulle : la distance r peut devenir infinie.

La vitesse nécessaire v_2 , deuxième vitesse cosmique, est donnée par :

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GmM}{R_T} = 0 \text{ soit : } v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}} \approx \sqrt{2}v_1 \approx 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Application 3

Informations télévisées et satellite géostationnaire

1) On entend couramment dire aux journaux télévisés : « la navette est maintenant sur orbite ; les astronautes ont échappé à l'attraction terrestre ». Que peut-on penser d'une telle affirmation ?

2) Sur quel type d'orbite doit se situer un satellite géostationnaire ? Évaluer l'altitude correspondante.

1) C'est absurde : s'ils avaient échappé à l'attraction terrestre, ils ne seraient plus dans un état lié, et ne resteraient pas au voisinage de la Terre. Cette erreur est due au fait que les astronautes apparaissent en « apesanteur » dans la fusée, c'est-à-dire flottant « librement » dans la cabine, contrairement à tout terrien se déplaçant dans une pièce. Ceci vient du fait que la cabine gravite autour de la Terre de la même façon que l'astronaute : nous percevons leur mouvement relatif, assez peu naturel il est vrai, mais leurs mouvements autour de la Terre sont semblables, et toujours gouvernés par l'attraction gravitationnelle de la Terre, à laquelle ils n'ont (surtout) pas échappé.

2) Le satellite doit tourner exactement à même vitesse angulaire que la Terre, donc $\dot{\theta} = \text{cte} = \Omega_T$. D'après la loi des aires, ceci implique $r = \text{cte}$: la trajectoire est un cercle, dont le centre est le centre de la Terre O (assimilée à un astre à géométrie sphérique).

Le satellite étant géostationnaire, le cercle décrit est nécessairement compris dans le plan équatorial.

Sur ce cercle, l'accélération est :

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\vec{e}_r = -r\Omega_T^2\vec{e}_r, \text{ qui s'identifie à } \frac{\vec{F}}{m} = -GM_T\frac{\vec{e}_r}{r^2}.$$

Nous en déduisons le rayon de la trajectoire :

$$r = \left(\frac{GM}{\Omega_T^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Remarque : Nous étudions ici le mouvement dans un référentiel en translation quasi circulaire dans le système solaire, dans lequel la Terre tourne sur elle-même. Ce référentiel, appelé géocentrique, est galiléen avec une très bonne approximation : cf. chapitre 9.

Le champ de pesanteur est assimilable (en ordre de grandeur) au champ de gravitation à altitude nulle, soit :

$$g \approx \frac{GM_T}{R_T^2}, \text{ donc : } r = \left(\frac{gR_T^2}{\Omega_T^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Prenant $\Omega_T \approx \frac{2\pi}{24 \text{ heures}} \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, nous obtenons : $r \approx 42,2 \cdot 10^3 \text{ km}$, soit une altitude :

$$z_{\text{géostationnaire}} = r - R_T \approx 35,8 \cdot 10^3 \text{ km}.$$

Il n'existe donc qu'une seule orbite géostationnaire, que viennent encombrer de plus en plus de satellites de télécommunications ...

3.3. Lois de conservation

3.3.1. Moment cinétique

Nous savons que le moment cinétique est une constante du mouvement, qui a lieu dans un plan.

Nous repérons encore la position du mobile à l'aide des coordonnées polaires (r, θ) .

La loi des aires est une conséquence de cette loi de conservation : $r^2 \dot{\theta} = C$.

3.3.2. Énergie

La force dérive d'une énergie potentielle, dont nous prenons l'origine à l'infini :

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = -\alpha \frac{\vec{e}_r}{r^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_P(r) = -\frac{\alpha}{r}.$$

La conservation de l'énergie est traduite par :

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} + \mathcal{E}_P(r) = \mathcal{E}_M = \text{cte} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \mathcal{E}_{P_{\text{eff}}}(r) = \mathcal{E}_M$$

où l'énergie potentielle effective est :

$$\mathcal{E}_{P_{\text{eff}}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r}.$$

3.3.3. Vecteur de Runge-Lenz

Le caractère particulier de l'interaction newtonienne nous permet d'écrire une loi supplémentaire. Pour l'établir, reprenons l'équation du mouvement :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \frac{\vec{e}_r}{r^2}.$$

Le moment cinétique, constant, est :

$$\vec{L}_O = m \vec{r} \wedge \vec{v} = m r \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z.$$

En multipliant vectoriellement l'équation du mouvement par \vec{L}_O , nous obtenons :

$$\vec{L}_O \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge \left(-\alpha \frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) = -\alpha m \dot{\theta} \vec{e}_\theta = -\alpha m \frac{d\vec{e}_r}{dt}.$$

Nous constatons que le rayon r a disparu dans le second membre très précisément parce que le champ est newtonien. D'autre part, comme le moment cinétique est constant :

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_O \wedge \vec{v}) = \vec{L}_O \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \frac{d\vec{e}_r}{dt},$$

soit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v} \wedge \vec{L}_O}{\alpha} - \vec{e}_r \right) = \vec{0}$$

ce qui nous montre que le vecteur de Runge-Lenz, défini par :

$$\vec{A} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{L}_O}{\alpha} - \vec{e}_r$$

est une constante du mouvement newtonien.

Un mouvement newtonien est un mouvement à force centrale, où la force est conservative, et proportionnelle à $\frac{1}{r^2}$: $\vec{F}_{M \rightarrow m} = -\frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r$;

le moment cinétique : $\vec{L}_O = m\vec{r} \wedge \vec{v} = mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = mC\vec{e}_z$,

l'énergie : $\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r}$, et le vecteur de Runge-Lenz :

$\vec{A} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{L}_O}{\alpha} - \vec{e}_r$ sont des constantes du mouvement.

Application 4

Norme du vecteur de Runge-Lenz

1) Exprimer les composantes du vecteur de Runge-Lenz dans la base locale des coordonnées polaires.

2) On note $e = \|\vec{A}\|$. Montrer que cette norme peut être reliée de façon simple à l'énergie du point matériel.

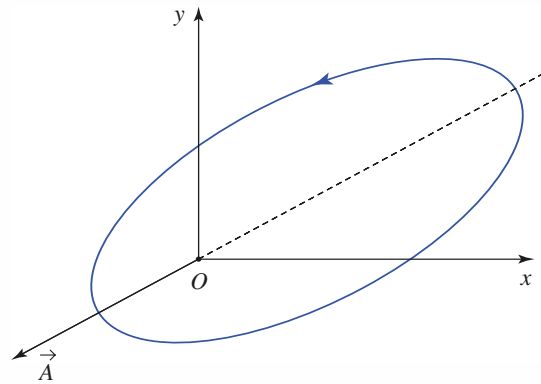
1) Explicitons le vecteur de Runge-Lenz (utilisable uniquement pour une interaction newtonienne) en simplifiant cette expression à l'aide de la relation $r^2\dot{\theta} = C$, il vient :

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\vec{v} \wedge \vec{L}_O}{\alpha} - \vec{e}_r = \frac{(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \wedge mC\vec{e}_z}{\alpha} - \vec{e}_r \\ &= \left(\frac{mC^2}{\alpha r} - 1\right)\vec{e}_r - \frac{mC}{\alpha}r\dot{\theta}\vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

Nous voyons que le vecteur de Runge-Lenz est parallèle au rayon vecteur lorsque la distance r au centre de force passe par une valeur extrême (doc. 18).

2) Calculons à présent e^2 en écrivant :

$$\begin{aligned} e^2 &= \left(\frac{mC^2}{\alpha r} - 1\right)^2 + \left(\frac{mC}{\alpha}r\dot{\theta}\right)^2 \\ &= \frac{2mC^2}{\alpha^2} \left[\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2}\right) - \frac{\alpha}{r} \right] + 1. \end{aligned}$$



Doc. 18. Position du vecteur Runge-Lenz pour une trajectoire elliptique de foyer O .

En identifiant le terme entre crochets, qui n'est autre que l'énergie \mathcal{E}_M , nous en déduisons :

$$e^2 = \frac{2mC^2}{\alpha^2} \mathcal{E}_M + 1,$$

ou encore :

$$\mathcal{E}_M = \frac{\alpha^2}{2mC^2} (e^2 - 1).$$

3.4. Les trajectoires sont des coniques

Le vecteur de Runge-Lenz est par construction dans le plan de la trajectoire. Nous venons d'explicitier ses composantes dans l'application précédente :

$$\vec{A} = \left(\frac{mC^2}{\alpha r} - 1\right)\vec{e}_r - \frac{mC}{\alpha}r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

en particulier, nous avons : $\vec{A} \cdot \vec{r} = \frac{mC^2}{\alpha} - r$.

Convenons de prendre sa direction comme origine des angles : l'axe polaire (O, \vec{e}_x) est colinéaire et dirigé dans le même sens que \vec{A} , dont la norme est notée $e = \|\vec{A}\|$.

Nous avons alors :

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = \|\vec{A}\| r \cos \theta = e r \cos \theta$$

en comparant ces deux expressions, nous identifions l'équation polaire de la trajectoire :

$$r(\theta) = \frac{\frac{mC^2}{\alpha}}{1 + e \cos \theta}.$$

Il s'agit de l'équation d'une courbe conique, d'excentricité $e = \|\vec{A}\|$ et de paramètre $p = \frac{mC^2}{\alpha}$:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

nous obtiendrons ainsi (on rappelle que $e \geq 0$) :

- une trajectoire elliptique, si l'excentricité est inférieure à 1 (un cercle, si $e = 0$) ;
- une trajectoire parabolique, si l'excentricité vaut 1 ;
- une trajectoire hyperbolique, si l'excentricité est plus grande que 1.

Si nous reprenons la relation entre énergie et excentricité de la conique obtenue dans l'application précédente :

$$\mathcal{E}_M = \frac{\alpha}{2mC^2}(e^2 - 1)$$

nous voyons que nous pouvons encore classer la nature des trajectoires à l'aide du signe de l'énergie :

- la trajectoire est elliptique si l'énergie est négative (c'est le cas pour les trajectoires circulaires) ;
- la trajectoire est parabolique si l'énergie est nulle ;
- la trajectoire est hyperbolique si l'énergie est positive.

3.5. Représentation du mouvement

3.5.1. Domaine accessible aux variations de r

Le champ de force newtonien appartient à la catégorie des forces centrales conservatives. Nous pouvons discuter le domaine des valeurs de r accessibles à la trajectoire en utilisant la fonction énergie potentielle effective :

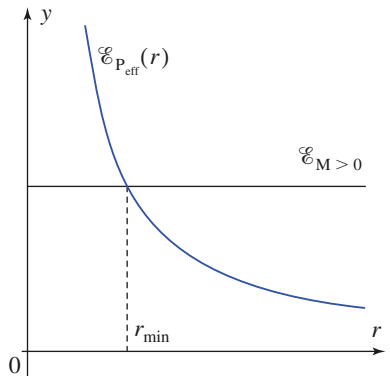
$$\mathcal{E}_{P_{\text{eff}}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r} \leq \mathcal{E}_M.$$

Le terme en $\frac{1}{r^2}$ l'emporte en $r \rightarrow 0$ où cette fonction tend vers $+\infty$.

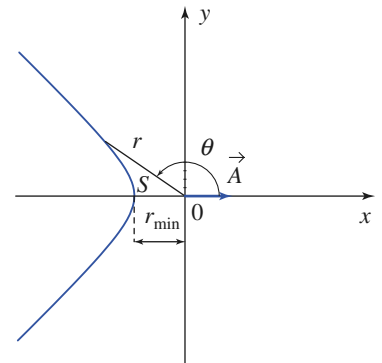
3.5.2. Force newtonienne répulsive : états de diffusion

Dans le cas d'une force répulsive, α est négatif, et la fonction énergie potentielle effective est positive et strictement décroissante.

L'énergie est une constante positive, et la condition $\mathcal{E}_{P_{\text{eff}}}(r) \leq \mathcal{E}_M$ montre que la distance au centre de force O possède une valeur minimale r_{min} (doc 19).



Doc. 19. Énergie potentielle effective dans un champ newtonien répulsif.



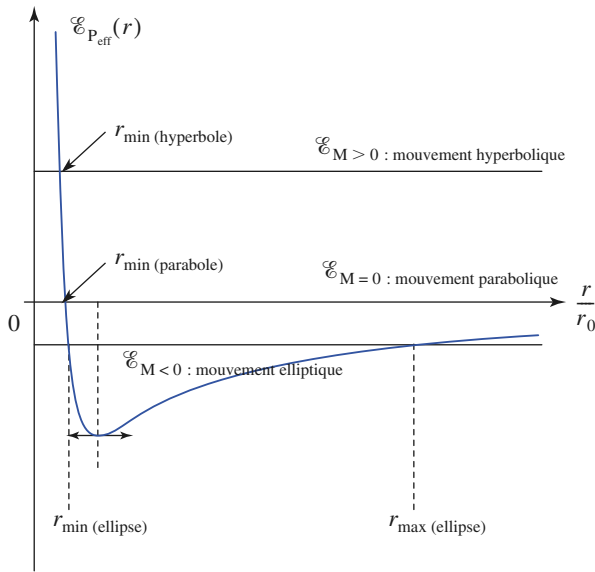
Doc. 20. Branche d'hyperbole du mouvement répulsif.

Remarque : La trajectoire est hyperbolique : la distance r_{\min} est atteinte au sommet S de la branche d'hyperbole décrite par le point matériel. En ce point, la dérivée \dot{r} est nulle et le vecteur de Lenz est colinéaire au rayon vecteur (doc. 20).

3.5.3. Force newtonienne attractive : états liés et états de diffusion

Si la force est attractive, α est positif, et la fonction énergie potentielle effective présente un minimum négatif (doc. 21). La distance correspondante est :

$$r_0 = \frac{mC^2}{\alpha} = p \quad \text{avec :} \quad \mathcal{E}_{P_{\text{eff}}}(r_0) = -\frac{\alpha}{2p}$$



Doc. 21. Énergie potentielle effective du cas attractif.

■ Si l'énergie est négative ($e < 1$, trajectoire elliptique)

La distance r évolue entre une valeur maximale r_{\max} et une valeur minimale r_{\min} : nous avons affaire à un état lié. Ces distances correspondent respectivement à l'apogée A et au périhélie P de la trajectoire elliptique (doc. 22).

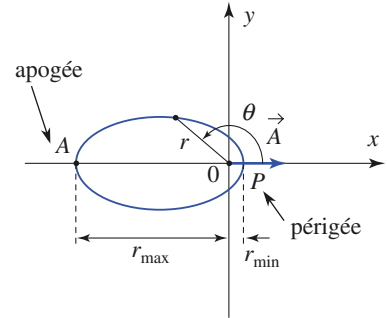
■ Si l'énergie est nulle ($e = 1$, trajectoire parabolique)

L'apogée de la trajectoire est renvoyé à l'infini (doc. 23).

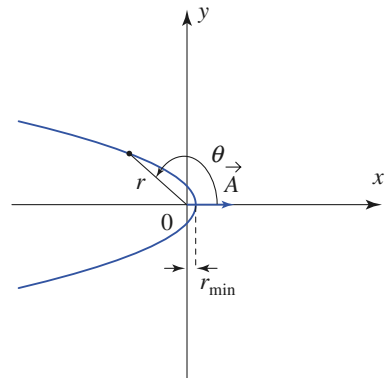
Remarque : Pour certaines comètes dont la période de révolution est extrêmement longue, la trajectoire est elliptique, mais tellement allongée que nous pourrions pratiquement l'assimiler à une parabole lorsque la comète vient virer près du Soleil.

■ Si l'énergie est positive ($e > 1$, trajectoire hyperbolique)

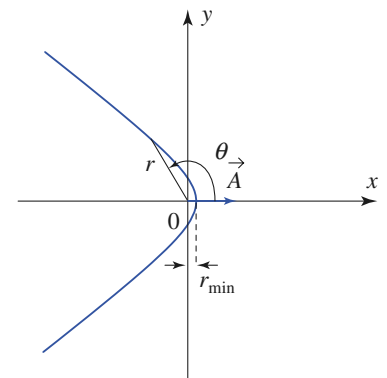
Comme dans le cas répulsif, nous obtenons un état de diffusion. Attention cependant, car la branche d'hyperbole décrite par le point matériel diffère dans les deux cas : pour une force répulsive, nous avons observé une trajectoire où le point matériel fuyait le centre de force (doc. 20). Ici, il est attiré vers O, mais finit quand même par s'échapper (doc. 24).



Doc. 22. Mouvement elliptique.



Doc. 23. Mouvement parabolique.



Doc. 24. Branche d'hyperbole du mouvement attractif.

Application 5

Déviation d'un météore

Un météore de masse m , négligeable devant la masse M_T de la Terre, arrive de l'infini avec la vitesse \vec{v}_0 par rapport à la Terre. Son paramètre d'impact est $OH = b$ (doc. 25). Calculer :

- a) l'invariant \vec{A} de Runge-Lenz du mouvement ;
- b) la distance minimale d'approche r_{\min} ainsi que la valeur minimale b_{\min} pour que le météore contourne la Terre sans la rencontrer ;
- c) la déviation D du météore dans le champ de gravitation de la Terre dans l'hypothèse $b > b_{\min}$.

a) Calculons le moment cinétique \vec{L}_O du météore par rapport à O , centre de la terre, dans \mathcal{R}_0 , référentiel géocentrique (cf. chapitre 9) :

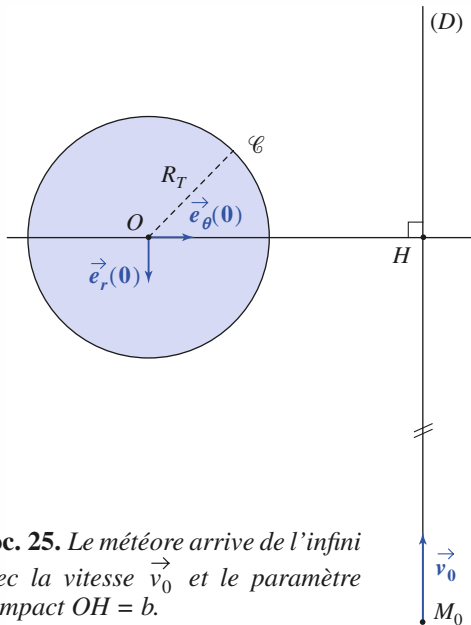
$$\vec{L}_O = \vec{OH} \wedge (m\vec{v}_0) = mbv_0 \vec{e}_z$$

d'où, en posant $\alpha = GM_T m$, le vecteur de Runge-Lenz :

$$\vec{A} = \frac{1}{\alpha} \vec{v}_0 \wedge \vec{L} - \vec{e}_r(0) = \frac{mbv_0^2}{\alpha} \vec{e}_\theta(0) - \vec{e}_r(0)$$

avec $\vec{e}_r(0)$ et $\vec{e}_\theta(0)$ définis sur le document 25.

b) Le météore arrivant de l'infini avec une vitesse non nulle, son énergie mécanique est positive.



Doc. 25. Le météore arrive de l'infini avec la vitesse \vec{v}_0 et le paramètre d'impact $OH = b$.

La trajectoire est une hyperbole de paramètre :

$$p = \frac{L^2}{m\alpha} = \frac{mb^2v_0^2}{\alpha}$$

et son excentricité est :

$$e^2 = \vec{A}^2 = 1 + \left(\frac{mbv_0^2}{\alpha}\right)^2$$

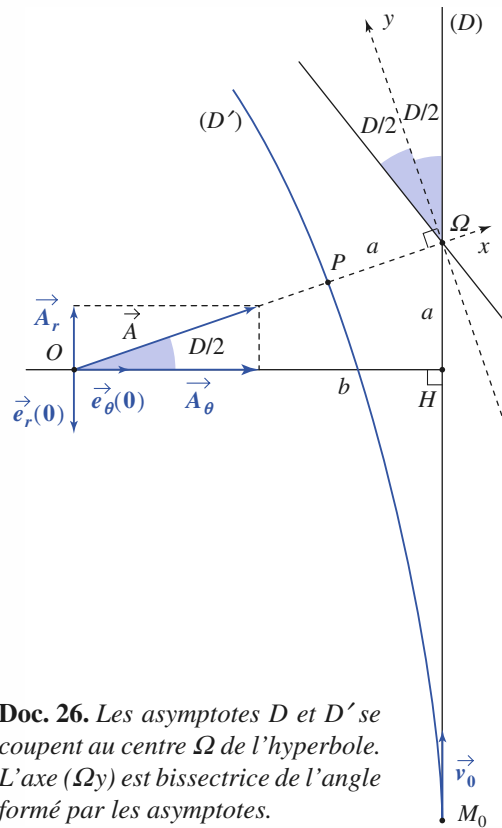
La distance de plus courte approche est :

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e} = p \frac{e-1}{e^2-1} = -\frac{\alpha}{mv_0^2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{mv_0^2}\right)^2 + b^2}$$

r_{\min} est une fonction croissante de b . Le météore contournera la Terre sans la rencontrer si $r_{\min} > R_T$, soit $b > b_{\min}$ tel que :

$$b_{\min} = R_T \sqrt{1 + 2 \frac{\alpha}{R_T m v_0^2}} \quad (\text{avec } \alpha = GmM_T)$$

On retrouve bien le même résultat que dans l'Application 2, page 149 (avec $\alpha = GmM_T$).



Doc. 26. Les asymptotes D et D' se coupent au centre Ω de l'hyperbole. L'axe (Ωy) est bissectrice de l'angle formé par les asymptotes.

CQFR

● FORCE CENTRALE CONSERVATIVE

Un champ de force centrale conservative est de la forme $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$ avec :

$$F(r) = -\frac{d\mathcal{E}_P(r)}{dr},$$

$\mathcal{E}_P(r)$ désignant l'énergie potentielle (définie à une constante près) associée à ce champ de force.

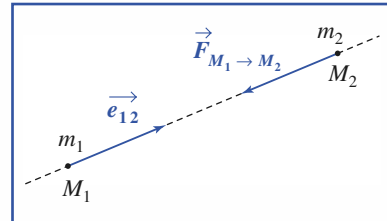
● INTERACTION DE GRAVITATION

Force d'interaction entre deux points matériels :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -Gm_1m_2\frac{\vec{e}_{12}}{r_{12}^2}.$$

Le champ de gravitation engendré par un astre de masse M_{astre} , de centre d'inertie O , en un point M situé à l'extérieur de l'astre est :

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = -GM_{\text{astre}}\frac{\vec{OM}}{OM^3} = -GM_{\text{astre}}\frac{\vec{e}_r}{r^2}.$$



Force d'attraction gravitationnelle (force attractive).

Cette expression est exacte dans le cas d'un astre à symétrie sphérique, et constitue une bonne approximation du champ de gravitation si l'astre est quasi sphérique ou bien à distance r suffisamment grande par rapport à la dimension caractéristique R d'un astre peu régulier.

● MOUVEMENT DANS UN CHAMP À FORCE CENTRALE CONSERVATIVE

L'obtention d'une expression exacte des coordonnées polaires $r(t)$ et $\theta(t)$, dans le plan de la trajectoire d'un point matériel soumis à un champ de force centrale est un problème en général complexe, qui nécessite la résolution d'un système d'équations différentielles non linéaires couplées.

L'utilisation de la loi des aires permet de ramener le problème à une seule équation différentielle en $r(t)$, d'ordre deux, et non linéaire.

L'utilisation de la conservation de l'énergie permet d'obtenir une équation différentielle non linéaire d'ordre un en $r(t)$.

Le domaine des valeurs de r accessible à la trajectoire est défini par $\mathcal{E}_{P_{\text{eff}}}(r) \leq \mathcal{E}_M$, où la fonction énergie potentielle effective est définie par :

$$\mathcal{E}_{P_{\text{eff}}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + \mathcal{E}_P(r).$$

● MOUVEMENT DANS UN CHAMP NEWTONIEN

• Champ newtonien

Un champ de force centrale newtonien est de la forme :

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = -\alpha\frac{\vec{e}_r}{r^2}.$$

L'énergie potentielle associée est :

$$\mathcal{E}_P(r) = -\frac{\alpha}{r} + \text{cte.}$$

Le champ de force newtonien est attractif lorsque la constante d'interaction α est positive, répulsif le cas échéant.

CQFR

• **Lois de conservation**

Un mouvement newtonien est un mouvement à force centrale, où la force est conservative, et proportionnelle

$$\text{à } \frac{1}{r^2} : \quad \vec{F} = -\alpha \frac{\vec{e}_r}{r^2};$$

• le moment cinétique : $\vec{L}_O = m\vec{r} \wedge \vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = mC\vec{e}_z$,

• l'énergie : $\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r}$,

• le vecteur de Runge-Lenz : $\vec{A} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{L}_O}{\alpha} - \vec{e}_r$

sont des constantes du mouvement.

• **Satellites**

Les satellites correspondent à des mobiles en état lié évoluant dans le champ de gravitation, attractif, de l'astre autour duquel ils gravitent : leur énergie est négative.

La vitesse d'un satellite en trajectoire circulaire de rayon r_c est :

$$v_c = \sqrt{\frac{\alpha}{mr_c}} = \sqrt{\frac{GM}{r_c}}.$$

L'énergie associée à une trajectoire circulaire de rayon r_c est :

$$\mathcal{E}_M = -\frac{\alpha}{2r_c}.$$

Dans le système solaire, les planètes en trajectoire circulaire autour du Soleil de masse M_\odot ont une période liée à leur rayon de giration par :

$$\frac{T^2}{r_c^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot}.$$

Remarque : Pour une trajectoire elliptique, il faut remplacer le rayon r_c de la trajectoire circulaire par le demi-grand axe a de l'ellipse dans ce résultat.

La généralisation de ce résultat est la troisième loi de Kepler : $\frac{T^2}{a^3} = \text{cte}$, a étant le demi-grand axe de l'ellipse.

• **Trajectoires**

Le point matériel décrit une conique d'équation polaire : $r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \alpha}$.

- Si $\mathcal{E}_M < 0$ ($e < 1$) : trajectoire elliptique (attraction).
- Si $\mathcal{E}_M = 0$ ($e = 1$) : trajectoire parabolique (attraction).
- Si $\mathcal{E}_M > 0$ ($e > 1$) : trajectoire hyperbolique (attraction ou répulsion).

Contrôle rapide

Avez-vous retenu l'essentiel ?

Définitions :

- ✓ Qu'est-ce qu'une force centrale conservative ?
- ✓ Quelle sont les constantes du mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale conservative ?
- ✓ Qu'appelle-t-on énergie potentielle effective ?
- ✓ Qu'est-ce qu'un champ de force newtonien ? en citer des exemples.
- ✓ Comment peut-on relier dans ce cas la vitesse et l'énergie au rayon de la trajectoire circulaire d'un point matériel ?
- ✓ Quelle constante du mouvement supplémentaire est associée à un mouvement newtonien ?
- ✓ Quelles sont les trajectoires observables dans un champ newtonien répulsif ? attractif ?
- ✓ Quelles sont les trois lois de Kepler ?

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. Pour un mouvement à force centrale conservative, la conservation de l'énergie est traduite par :

- a. $\frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{E}_{P_{\text{eff}}}(r) = \text{cte}$
- b. $\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \mathcal{E}_P(r) = \text{cte}$
- c. $\frac{mC^2}{2r^2} + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_P(r) = \text{cte}$
- d. $\frac{1}{2}mv\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{P_{\text{eff}}}(r) = \text{cte}$.

2. Un satellite peut avoir une trajectoire :

- a. circulaire
- b. elliptique
- c. parabolique
- d. hyperbolique.

3. Un satellite en orbite elliptique doit passer à une orbite circulaire. Faut-il pour cela :

- a. l'accélérer
- b. le ralentir
- c. cela dépend de l'endroit où on corrige la trajectoire.

4. Pour une force centrale en $\frac{1}{r^n}$ un état lié correspond :

- a. à une énergie positive, jamais !
- b. à une énergie négative, toujours !
- c. cela dépend de n et du caractère attractif ou répulsif du champ.

5. Un satellite en orbite basse (au-dessous de l'orbite géostationnaire) :

- a. a une période inférieure à un jour
- b. supérieure à un jour
- c. cela dépend ...

► Solution, page 168.

Exercice commenté

Satellite à trajectoire elliptique

ÉNONCÉ

1) Une trajectoire bornée

Un point matériel de masse m se déplace dans le champ de forces centrales newtonien $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r$. On note \mathcal{E}_M son énergie et $\vec{L}_O = mC\vec{e}_z$ son moment cinétique au point O .

a) Quelle est l'équation permettant d'obtenir les valeurs extrêmes r_{\min} et r_{\max} de la distance r au centre de force O ?

b) À quelles conditions portant sur α et \mathcal{E}_M cette équation permet-elle effectivement d'obtenir r_{\min} et r_{\max} ?

Dans l'affirmative, exprimer ces distances extrêmes à l'aide des données.

c) Le cas d'un objet de masse m soumis au champ gravitationnel d'un astre de masse $M \gg m$, immobile au point O , est-il compatible avec le cas recherché ici ? Nous ferons cette hypothèse par la suite.

2) Trajectoire elliptique

a) En utilisant le vecteur de Runge-Lenz ; $\vec{A} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{L}_O}{\alpha} - \vec{e}_r$, établir l'équation polaire de la trajectoire sous la forme :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Exprimer les constantes p et e (paramètre et excentricité de la conique) à l'aide des données.

b) La trajectoire elliptique est représentée ci-contre.

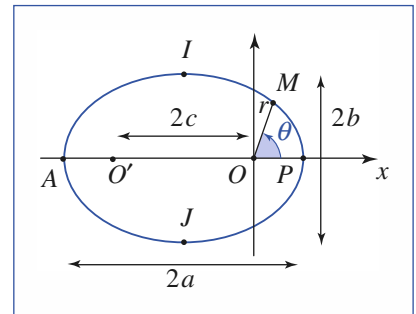
Son demi grand axe est noté a , son demi petit axe est noté b . La distance entre ses deux foyers est $2c = OO'$.

Que vaut la somme $OM + OM'$?

Exprimer les distances a , b et c à l'aide de p et e .

Établir les relations liant c , e , et a d'une part, b , p et a d'autre part.

c) Exprimer les distances extrêmes r_{\min} et r_{\max} à l'aide de p et e , et retrouver par ces expressions la relation reliant l'énergie du satellite à l'excentricité de sa trajectoire elliptique. Exprimer simplement l'énergie à l'aide de α et a .



3) Troisième loi de Kepler

a) La surface de l'ellipse est $S = \pi ab$. Montrer que si I désigne la période de révolution du satellite, le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ peut s'exprimer en fonction de constantes qui sont indépendantes du satellite lui-même.

b) Pourquoi Kepler a-t-il constaté que le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ est identique pour les planètes du système solaire ?

CONSEILS

Nous savons que la trajectoire du point matériel est plane. Nous travaillons en utilisant les coordonnées polaires dans ce plan : (r, θ) .

La détermination des valeurs limites de r se fait en utilisant l'égalité entre l'énergie mécanique et l'énergie potentielle effective.

L'équation de degré 2 : $ax^2 + bx + c = 0$ à coefficients réels admet deux racines réelles ou complexes conjuguées dont

la somme vaut $-\frac{b}{a}$ et le produit $\frac{c}{a}$.

SOLUTION

1) Une trajectoire bornée

a) L'énergie du point matériel est :

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

Lorsque la distance r passe par un extremum, $\dot{r} = 0$, donc :

$$2\mathcal{E}_M r^2 + 2\alpha r^2 - mC^2 = 0$$

est l'équation de degré 2 qui permet de déterminer les valeurs r_{\min} et r_{\max} .

b) L'équation doit admettre deux solutions réelles et positives,

donc : $-\frac{2\alpha}{2\mathcal{E}_M} > 0$ et $-\frac{mC^2}{2\mathcal{E}_M} > 0$ ce qui impose : $\alpha > 0$ et $\mathcal{E}_M < 0$.

$\left\{ \begin{array}{l} \alpha > 0 : \text{le champ de force newtonien est attractif ;} \\ \mathcal{E}_M < 0 : \text{il s'agit d'un état lié (à trajectoire elliptique).} \end{array} \right.$

La résolution de l'équation de degré 2 donne alors :

$$\begin{cases} r_{\min} = -\frac{\alpha}{2\mathcal{E}_M} - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2\mathcal{E}_M}\right)^2 + \frac{mC^2}{2\mathcal{E}_M}} \\ r_{\max} = -\frac{\alpha}{2\mathcal{E}_M} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2\mathcal{E}_M}\right)^2 + \frac{mC^2}{2\mathcal{E}_M}} \end{cases}$$

c) La constante $\alpha = GmM$ est bien positive.

Le satellite est dans un état lié si son énergie est négative.

2) Trajectoire elliptique

a) Le vecteur de Runge-lenz peut être exprimé :

$$\vec{A} = \frac{1}{\alpha} (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \wedge mC\vec{e}_z - \vec{e}_r$$

ce qui donne :

$$\vec{A} = \left(\frac{mC^2}{\alpha r} - 1\right)\vec{e}_r - \frac{mC\dot{\theta}}{\alpha}\vec{e}_\theta.$$

Notons $\theta = (\widehat{\vec{A}, \vec{e}_r})$, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \vec{A} \cdot \vec{r} = A \cdot r \cdot \cos \theta \\ \vec{A} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{mC^2}{\alpha} - r. \end{cases}$$

Ce qui donne bien :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad \text{avec } p = \frac{mC^2}{\alpha} \text{ et } e = A = \|\vec{A}\|.$$

b) $OM + O'M$ est une constante qui peut-être calculée lorsque M est au périhélie P ou bien à l'apogée A : $OM + O'M = 2a$.

Constatons que $OP = \frac{p}{1+e}$ et $OA = \frac{p}{1-e}$, nous avons :

$$\begin{cases} 2c = O'P - OP = \frac{2pe}{1-e^2}, \text{ soit } c = \frac{ep}{1-e^2}, \\ 2a = OA + OP = \frac{2p}{1-e^2}, \text{ soit } a = \frac{p}{1-e^2}. \end{cases}$$

D'autre part : $2a = OI + O'I = 2\sqrt{b^2 + c^2}$ donc $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$.

Nous avons ainsi : $c = ea$ et $b^2 = ap$.

c) Les distances extrêmes sont :

$$r_{\min} = OP = \frac{p}{1+e} \text{ et } r_{\max} = OA = \frac{p}{1-e},$$

$$\text{donc :} \quad -\frac{\alpha}{\mathcal{E}_M} = r_{\min} + r_{\max} = \frac{2p}{1-e^2},$$

$$\text{soit :} \quad \mathcal{E}_M = -\frac{\alpha}{2p}(1-e^2),$$

Nous avons vu en cours que \vec{A} est une constante du mouvement, lorsque le champ est newtonien.

La relation $OM + O'M = \text{cte}$ définit l'ellipse de foyers O et O' .

La relation $\mathcal{E}_M = -\frac{\alpha}{2r_c}$ obtenue pour une trajectoire circulaire se généralise en $\mathcal{E}_M = -\frac{\alpha}{2a}$ pour la trajectoire elliptique.

La relation $\mathcal{E}_M = -\frac{\alpha}{2p}(1-e^2)$ ne se réduit pas à la seule ellipse, elle est

Exercice commenté

valable pour les trajectoires hyperbolique ou parabolique.

Lorsqu'on s'intéresse au temps passé sur la trajectoire à force centrale, il est logique de penser à utiliser la loi des aires :

$$\frac{C}{2} = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r \cdot r \frac{d\theta}{dt}.$$

que nous pouvons encore écrire :

$$\mathcal{E}_M = -\frac{\alpha}{2a}.$$

3) Troisième loi de Kepler

a) L'aire balayée par unité de temps est : $\frac{C}{2}$, donc :

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{C}{2}.$$

En élevant au carré, il vient :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{C^2} = \frac{4\pi^2 a^3 p}{C^2} = \frac{4\pi^2 m}{\alpha} p.$$

Sachant que $\alpha = GmM$, nous voyons que le rapport $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$ ne fait intervenir que la masse de l'astre autour duquel gravite le satellite.

b) Les planètes gravitent autour du Soleil, beaucoup plus massif qu'elle, de masse M_\odot .

La constante vaut alors : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot}$, applicable à toutes les planètes du système solaire.

Exercices

1 Conséquences d'une erreur de satellisation

On désire placer un satellite terrestre sur une orbite circulaire de rayon r_0 . Lors de l'injection sur orbite en M_0 , à la distance r_0 du centre O de la Terre, le satellite est abandonné avec une vitesse \vec{v}'_0 différente de celle \vec{v}_0 souhaité.

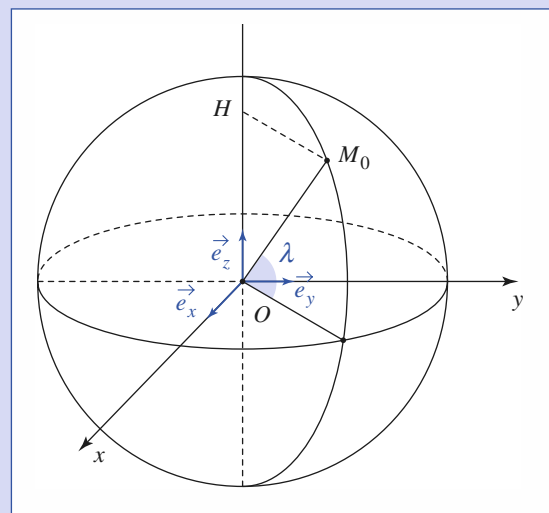
1) La vitesse \vec{v}'_0 a la direction voulue, mais pas la norme. Calculer l'excentricité de la trajectoire obtenue en fonction de $\frac{v'_0}{v_0}$ et discuter le résultat.

2) La vitesse \vec{v}'_0 a la norme requise mais pas la direction voulue. On pose $\alpha = (\vec{v}'_0, \vec{v}_0)$.

Déterminer l'inclinaison $\beta = (\overrightarrow{OM_0}, \vec{e}'_x)$ de l'axe focal de la trajectoire et son excentricité.

2 Énergie de mise sur orbite d'un satellite terrestre

Un satellite terrestre de masse m est lancé d'une base M_0 située à la latitude λ .



Quelle énergie $\Delta\mathcal{E}$ faut-il lui fournir pour le placer sur une orbite circulaire de rayon r ? On exprimera $\Delta\mathcal{E}$ en fonction de m , λ , g_0 intensité du champ de gravitation au sol, R_T rayon terrestre et ω_T vitesse de rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_0 = (O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Commenter l'expression obtenue.

3 Freinage d'un satellite quasi circulaire

Dans les couches supérieures de l'atmosphère, un satellite circulaire de masse m est faiblement freiné par une force de norme $f_r = \alpha m v^2$, où α est une constante positive et v la vitesse du satellite dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_0 . En admettant que la trajectoire du satellite reste quasi circulaire, calculer, après une révolution, les variations $\Delta \mathcal{E}_M$ de son énergie mécanique, $\Delta \mathcal{E}_K$ de son énergie cinétique et Δr du rayon de son orbite.

4 Mouvement d'une comète parabolique

Dans le référentiel galiléen associé au Soleil de masse M_0 , on considère le mouvement de la Terre et celui d'une comète. La trajectoire de la Terre est supposée circulaire de rayon r_0 .

1) Calculer en fonction de M_0 , r_0 et G constante de gravitation, la vitesse v_0 de la Terre.

2) La trajectoire de la comète est coplanaire à celle de la Terre. Son périhélie est à la distance $\frac{r_0}{2}$ et sa vitesse en ce point est $2v_0$.

Quelle est la nature de la trajectoire de la comète ? Exprimer la vitesse v de la comète en fonction de sa distance r au centre du Soleil.

3) L'orbite de la comète coupe celle de la Terre en deux points A et B . Montrer que AB est un diamètre de l'orbite terrestre et calculer, en ces points, l'angle des deux orbites.

5 Intégrale première de Laplace

1) Montrer qu'un mouvement képlérien d'un point matériel soumis à une force $\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r$ ($\alpha > 0$) admet l'intégrale première de Laplace :

$$\vec{H} = \frac{m}{\alpha} C \vec{v} - \vec{e}_\theta$$

où C est la constante des aires, \vec{v} est la vitesse du point matériel et \vec{H} un vecteur constant déterminé par les conditions initiales. En déduire que la norme de \vec{H} est égale à l'excentricité e de la conique trajectoire.

2) Montrer que la norme de \vec{H} s'identifie à l'excentricité e de la trajectoire.

3) Pour un satellite en trajectoire elliptique, représenter les vecteurs de Runge-Lenz \vec{A} et de Laplace \vec{H} dans le plan de trajectoire.

6 Utilisation de l'invariant de Runge-Lenz pour un mouvement hyperbolique

Soit une particule de masse m soumise à une force répulsive $\vec{F} = +\frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r$, avec $\alpha > 0$ de la part d'un point fixe O .

Étudier le mouvement de cette particule en utilisant l'invariant de Runge-Lenz :

$$\vec{A} = \frac{1}{\alpha} \vec{v} \wedge \vec{L}_0 - \vec{e}_r$$

\vec{v} représentant la vitesse de la particule et \vec{L}_0 son moment cinétique par rapport au point O .

7 Demi-ellipse de transfert

On désire transférer un satellite terrestre d'une orbite circulaire basse de rayon r_1 sur une orbite circulaire haute de rayon $r_2 > r_1$. Pour cela, en un point P de l'orbite basse, on communique à l'aide de fusées pendant un temps très court une vitesse supplémentaire faisant décrire au satellite une demi-ellipse se raccordant tangentiellement en A à l'orbite haute. Arrivé en A , on communique à nouveau au satellite le supplément de vitesse lui permettant de décrire l'orbite circulaire haute. On note g_0 l'accélération de la pesanteur à la surface du sol et R_T le rayon de la Terre.

1) Calculer la vitesse v_1 du satellite circulaire sur son orbite basse et la nouvelle vitesse v'_1 après l'allumage des fusées, sachant que \vec{v}_1 et \vec{v}'_1 sont colinéaires.

2) À quelle vitesse v'_2 le satellite atteint-il le point A ? Quelle est la vitesse finale v_2 du satellite sur son orbite haute ?

8 Diffusion du Rutherford

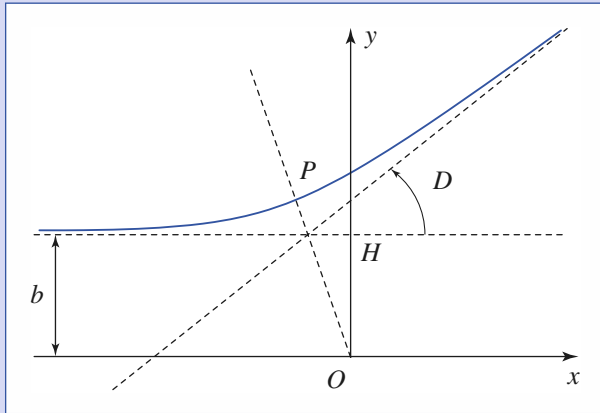
Une particule α (noyau d'hélium) de masse m et charge $q = 2e$ vient de l'infini avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$, et s'approche avec le paramètre d'impact $b = OH$ d'un noyau cible (O_r) de masse $M \gg m$ et charge $Q = z_e$ que l'on considérera immobile au point O .

La trajectoire de la particule α a l'allure indiquée sur le schéma page suivante, D représentant la valeur de sa déviation par rapport à sa direction initiale.

1) Quelle est l'énergie \mathcal{E}_M associée au mouvement étudié ? Quelle est la nature de la trajectoire représentée ?

2) Que représente la distance OP ? L'exprimer à l'aide des données.

Exercices



3) Un calcul de la déviation D .

a) Montrer que le vecteur de Runge-Lenz $\vec{A} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{L}_O}{\alpha} - \vec{e}_r$

est une constante du mouvement, $\alpha = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}$.

Déterminer ses composantes dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et représenter ce vecteur sur le schéma.

b) On note β l'angle (\vec{A}, \vec{e}_x) . Quel est la relation liant β et D ?

c) En déduire la valeur de D .

Corrigés

Solution du tac au tac, page 163.

- | | |
|-------------------|-------------|
| 1. Vrai : b, c, d | Faux : a |
| 2. Vrai : a, b | Faux : c, d |
| 3. Vrai : c | Faux : a, b |
| 4. Vrai : c | Faux : a, b |
| 5. Vrai : a | Faux : b, c |

1

1) Calculons le moment cinétique du satellite par rapport au centre O

de la Terre : $\vec{L}' = \vec{OM}_0 \wedge m\vec{v}'_0 = mr_0v'_0\vec{e}_z$.

Le vecteur de Runge-Lenz du mouvement est :

$$\vec{A} = \frac{1}{k}v'_0 \wedge \vec{L}' - \vec{e}_r(0) = \left(\frac{mr_0v'^2_0}{k} - 1 \right) \vec{e}_r(0).$$

Pour le mouvement circulaire on aurait eu :

$$\vec{A} = \frac{1}{k}v_0 \wedge \vec{L} - \vec{e}_r(0) = \left(\frac{mr_0v^2_0}{k} - 1 \right) \vec{e}_r(0) = \vec{0}, \text{ d'où } \frac{mr_0}{k} = \frac{1}{v^2_0},$$

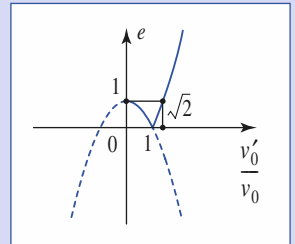
d'où l'expression définitive de l'invariant de Runge-Lenz :

$$\vec{A} = \left[\left(\frac{v'^2_0}{v_0} \right) - 1 \right] \vec{e}_r.$$

La trajectoire admet le support de \vec{OM}_0 comme axe focal et son excentricité est :

$$e = \left| \left(\frac{v'^2_0}{v_0} \right) - 1 \right|.$$

Les variations de e en fonction de $\frac{v'_0}{v_0}$ sont illustrées sur le document ci-contre. Signalons seulement que pour $\frac{v'_0}{v_0} = 0$. La trajectoire est rectiligne et la notion d'excentricité n'a plus de sens.



2) Calculons le nouveau moment cinétique du satellite par rapport au centre O de la Terre :

$$\vec{L}' = \vec{OM}_0 \wedge m\vec{v}'_0 = mr_0v_0 \cos \alpha \vec{e}_z.$$

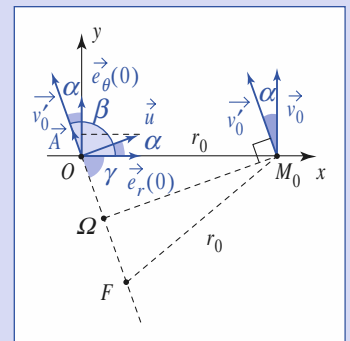
Le vecteur de Runge-Lenz du nouveau mouvement est :

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{1}{k}v'_0 \wedge \vec{L}' - \vec{e}_r(0) \\ &= \frac{mr_0v_0^2 \cos \alpha}{k} \vec{u} - \vec{e}_r(0). \end{aligned}$$

En posant $\vec{u} = \frac{v'_0}{v_0} \wedge \vec{e}_z$.

En remarquant que $mr_0v_0^2 = k$, on obtient l'expression définitive de \vec{A} :

$$\vec{A} = \cos \alpha \vec{u} - \vec{e}_r(0)$$



dont la norme est :

$$e = \|\vec{A}\| = \sqrt{\cos^2 \alpha + 1 - 2 \cos^2 \alpha} = |\sin \alpha|.$$

La trajectoire est elliptique.

L'inclinaison du nouvel axe focal sur \vec{OM}_0 s'obtient en se souvenant que \vec{A} pointe vers le périégée de l'ellipse, et donc :

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

• Autre solution

Le satellite a l'énergie mécanique souhaitée :

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{k}{r_0} = -\frac{k}{2r_0}, \text{ d'où } a = r_0.$$

À l'apogée ou au périégée, les vitesses \vec{v} sont normales au rayon r . Nous pouvons exprimer l'énergie et le moment cinétique pour ces deux points :

$$L' = mr_0 v_0 \cos \alpha = mrv$$

$$\mathcal{E}_M = -\frac{k}{2r_0} = -\frac{k}{r} = \frac{1}{2}mv^2.$$

En éliminant v , nous déduisons une équation du second degré en r . Sachant que $rv_0^2 = k$, les deux solutions sont :

$$r_A = r_0(1 + |\sin \alpha|) \text{ et } r_P = r_0(1 - |\sin \alpha|).$$

On retrouve bien :

$$a = \frac{1}{2}(r_A + r_P) = r_0 \text{ et } e = \frac{(r_A - r_P)}{(r_A + r_P)} = |\sin \alpha|.$$



L'énergie du satellite au sol est :

$$\mathcal{E}_{M_0} = \frac{m}{2}(HM_0 \omega_T)^2 - G \frac{M_T m}{R_T} = \frac{m}{2}(R_T \omega_T \cos \lambda)^2 - G \frac{M_T m}{R_T}.$$

Sur son orbite circulaire : $\frac{mv^2}{r} = G \frac{M_T m}{r^2}$.

Le satellite possède alors l'énergie cinétique : $\mathcal{E}_K = \frac{m}{2}v^2 = G \frac{M_T m}{2r}$.

Et l'énergie mécanique : $\mathcal{E}_M = G \frac{M_T m}{2r} - G \frac{M_T m}{r} = -G \frac{M_T m}{2r}$.

L'énergie de mise sur orbite est : $\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}_M - \mathcal{E}_{M_0}$

$$\Delta \mathcal{E} = GM_T m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r} \right) - \frac{m}{2} (R_T \omega_T)^2 \cos^2 \lambda.$$

Cette énergie est d'autant plus faible que $\cos^2 \lambda$ est plus grand, c'est-à-dire que la base est plus proche de l'équateur.

Les meilleures bases de lancement sont les bases équatoriales.

Remarques

On notera que $\Delta \mathcal{E}$ est l'énergie fournie au satellite. Elle est beaucoup plus faible que l'énergie fournie par la fusée. Cette dernière emporte non seulement le satellite, mais aussi une masse importante de carburant et elle doit encore vaincre la résistance de l'air.

Généralement les satellites sont lancés vers l'est, afin de tirer profit de la vitesse d'entraînement de la Terre qui est de l'ordre de $v = 465 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ à l'équateur. Si le satellite est lancé à l'ouest, pour une orbite de même altitude, il faudrait lui fournir une vitesse supplémentaire de $930 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. En lançant le satellite vers le nord ou le sud, on perdrait le bénéfice de la vitesse d'entraînement. Cependant, comme la Terre tourne autour de l'axe des pôles, le satellite sur son orbite polaire passe au-dessus de toutes les régions du globe en quelques périodes.



L'équation du mouvement du satellite est :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GM_T m}{r^2} \vec{e}_r - \alpha m v^2 \vec{T},$$

\vec{T} : vecteur unitaire de la tangente orientée dans le sens du mouvement.

La trajectoire est quasi circulaire :

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GM_T m}{r^2},$$

d'où : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GM_T m}{r^2} \vec{e}_r - \alpha \frac{GM_T m}{r} \vec{T}.$

On multiplie par $\vec{v} dt = \vec{dOM}$:

$$m\vec{v} \cdot d\vec{v} = -\frac{GM_T m}{r^2} dr - \alpha \frac{GM_T m}{r} r d\theta,$$

soit : $d\left(\frac{mv^2}{2} - \frac{GM_T m}{r}\right) = -\alpha GM_T m d\theta.$

$\Delta \mathcal{E}_M = -\alpha GM_T m 2\pi < 0$. Le satellite perd de son énergie mécanique.

Pour un satellite circulaire :

$$\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GM_T m}{2r} = -\frac{\mathcal{E}_P}{2};$$

or $\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P = -\mathcal{E}_K$, donc $\Delta \mathcal{E}_K = -\Delta \mathcal{E}_M > 0$.

Le freinage augmente l'énergie cinétique du satellite. Ce résultat d'apparence paradoxale est dû au fait que \mathcal{E}_M et \mathcal{E}_K sont de signes opposés.

Par différenciation de $\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P = \frac{\mathcal{E}_P}{2} = \frac{GM_T m}{2r}$,

$$\Delta \mathcal{E}_M = \frac{GM_T m}{2r^2} \Delta r,$$

$\Delta \mathcal{E}_M = 2\pi \alpha GM_T m = \frac{GM_T m}{2r^2} \Delta r$, d'où $\Delta r = -4\pi \alpha r^2 < 0$.

Le freinage rapproche le satellite du sol, tout en augmentant son énergie cinétique.



1) Notons m la masse de la Terre. D'après la relation fondamentale de la dynamique :

$$m \frac{v_0^2}{r_0} = -G \frac{M_0 m}{r_0^2}, \text{ d'où } v_0 = \sqrt{G \frac{M_0}{r_0}}.$$

2) Soit m' la masse de la comète. Calculons son énergie mécanique :

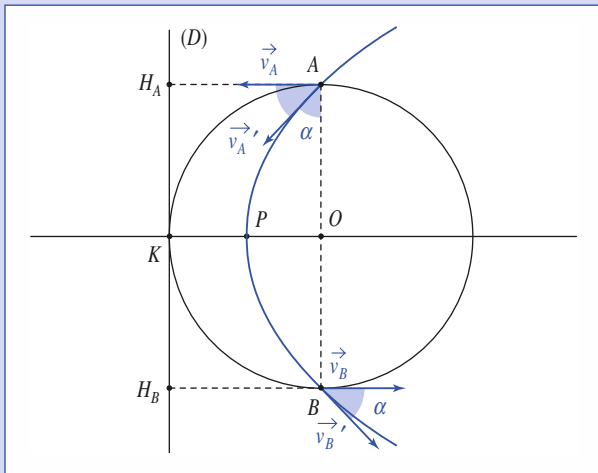
$$\mathcal{E}'_M = \frac{m'}{2}(2v_0)^2 - G \frac{M_0 m'}{r_0} = 2m' \left(v_0^2 - G \frac{M_0}{r_0} \right) = 0.$$

La trajectoire de la comète est une parabole.

Lorsqu'elle se trouve à la distance r du centre du Soleil, sa vitesse v est telle que :

$$\mathcal{E}'_M = \frac{m'}{2}v^2 - \frac{GM_0 m'}{r} = 0, \text{ d'où } v = \sqrt{\frac{2GM_0}{r}} = v_0 \sqrt{\frac{2r_0}{r}}.$$

Corrigés



3) Au point d'insertion A, la vitesse \vec{v}_A de la comète est colinéaire à la bissectrice de l'angle \widehat{OAH}_A . On retrouve la même propriété en B.

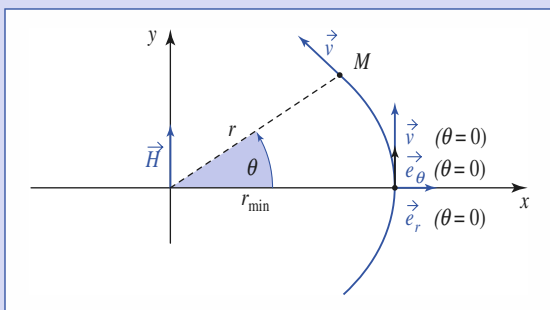
5) 1) Le vecteur \vec{H} étant fourni, calculons sa dérivée temporelle :

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{mC}{\alpha} \frac{d\vec{v}}{dt} + \dot{\theta} \vec{e}_r = \frac{C}{\alpha} \cdot \left(\frac{-\alpha \vec{e}_r}{r^2} \right) + \dot{\theta} \vec{e}_r = \vec{0} \quad \text{car } C = r^2 \dot{\theta}$$

ce qui prouve la proposition à vérifier.

\vec{H} : vecteur constant, sans dimension, est déterminé par les conditions initiales. La réussite du facteur intégrant $r^2 \dot{\theta}$ est due au fait que la force est en r^2 .

2) Prenons la direction $\theta = 0$ (axe Ox) correspondant au passage de r par sa valeur minimale r_{\min} . Nous avons alors \vec{v} , et \vec{H} , dirigés parallèlement à $\vec{e}_\theta(\theta = 0) = \vec{e}_y$, comme indiqué sur la figure :



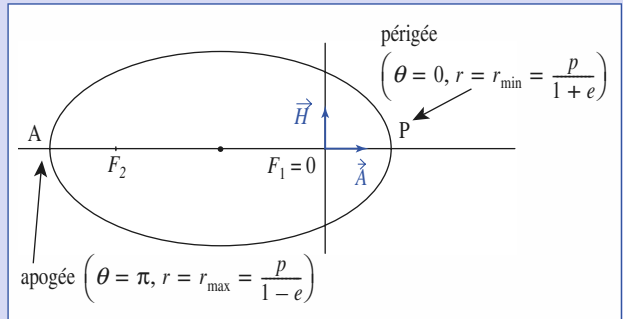
Nous pouvons écrire : $\vec{H} \cdot \vec{e}_\theta = \frac{mC}{\alpha} r \dot{\theta} - 1 = \frac{mC^2}{\alpha r} - 1$, et identifier cette expression à : $\vec{H} \cdot \vec{e}_\theta = H \cdot \cos \theta$, ce qui donne l'équation polaire :

$$r = \frac{mC^2 / \alpha}{1 + H \cdot \cos \theta}$$

qui correspond à une conique de paramètre $p = \frac{mC^2}{\alpha}$ et d'excentricité $e = H$: l'excentricité s'identifie bien à la norme du vecteur de Laplace.

3) Il suffit de porter $\vec{H} = \frac{mC}{\alpha} \vec{v} - \vec{e}_\theta = \vec{H}$ (calculé pour $\theta = 0$) = $\left(\frac{mC^2}{\alpha r_{\min}} - 1 \right) \vec{e}_y$

et $\vec{A} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{L}}{\alpha} - \vec{e}_r = \vec{A}$ (calculé pour $\theta = 0$) = $\left(\frac{mC^2}{\alpha r_{\min}} - 1 \right) \vec{e}_x$ sur le plan xOy pour observer :



Ces deux vecteurs orthogonaux ont la même norme.

6) L'équation du mouvement est $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r$. Le vecteur \vec{A} est un invariant ($\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{0}$) ; il est déterminé par les conditions initiales.

Choisissons l'axe des x tel que (Ox) soit colinéaire et de même sens que \vec{A} .

Le calcul de \vec{A} , nous donne :

$$A \cos \theta = -\frac{L_z^2}{\alpha m} - r, \quad \text{soit } r = -\frac{\frac{L_z^2}{\alpha m}}{1 + A \cos \theta},$$

avec $A > 0$, $\frac{L_z^2}{\alpha m} > 0$ (et $L_z > 0$ par exemple).

r étant positif, nous devons avoir :

$$1 + A \cos \theta \leq 0, \quad \text{soit } -1 \leq \cos \theta \leq -\frac{1}{A} \quad \text{et } A = e > 1.$$

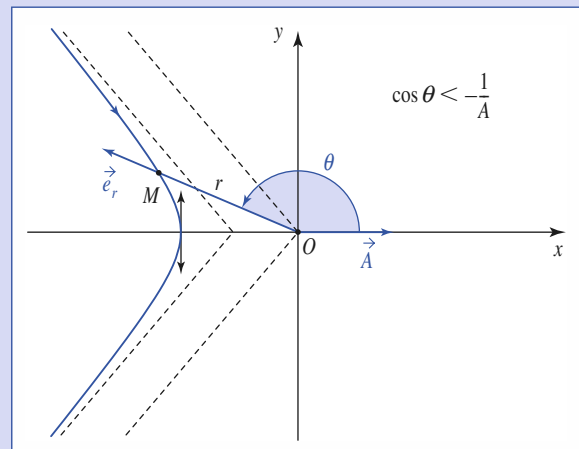
La trajectoire ne peut être qu'une hyperbole comme indiquée sur le schéma ($L_z > 0$ sur ce schéma).

Sachant que $\vec{A} = \left(1 + L_z \frac{r \dot{\theta}}{\alpha} \right) \vec{e}_r + L_z \frac{\dot{r}}{\alpha} \vec{e}_\theta$,

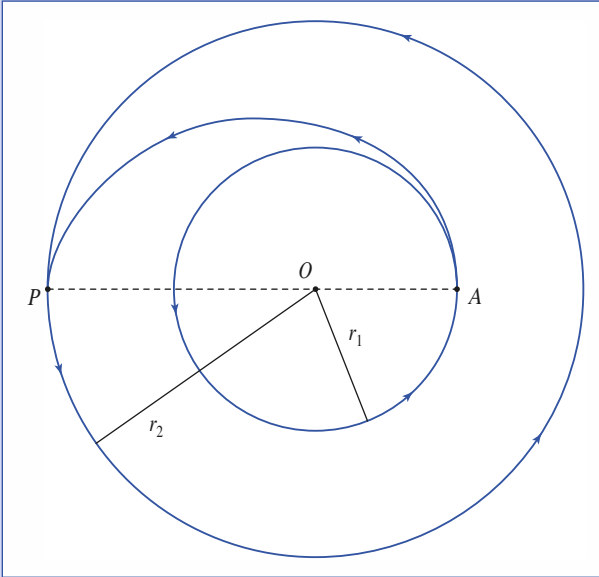
$$\mathcal{E}_M = \frac{m}{2} v^2 + \frac{k}{r} \quad \text{et que } \vec{A}^2 - 1 = \frac{2L_z^2}{m\alpha^2} \mathcal{E}_M;$$

nous retrouvons les caractéristiques énergétiques du moment hyperbolique :

$$\mathcal{E}_M > 0.$$



7 1) $v_1 = \sqrt{\frac{k}{mr_1}} = R_T \sqrt{\frac{g_0}{r_1}}$. La trajectoire de transfert est une demi-ellipse de périégée P et d'apogée A .



Sur cette ellipse, le satellite a l'énergie :

$$\mathcal{E}_M = -\frac{k}{r_1 + r_2} = \frac{m}{2}v_1^2 - \frac{k}{r_1}$$

d'où $v_1' = R_T \sqrt{\frac{2g_0 r_2}{r_1(r_1 + r_2)}} = v_1 \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} > v_1$

2) En utilisant la constante des aires :

$$v_2' = C \frac{r_1 v_1'}{r_2} = R_T \sqrt{\frac{2g_0 r_1}{r_2(r_1 + r_2)}}$$

Le supplément de vitesse à communiquer donne au satellite la vitesse :

$$v_2 = \sqrt{\frac{k}{mr^2}} = R_T \sqrt{\frac{g_0}{r_2}} > v_2'$$

À chaque opération, l'énergie du satellite augmente, car on le fait passer d'une trajectoire à une trajectoire extérieure.

8 1) L'interaction mise en jeu est l'interaction coulombienne, qui fait apparaître un champ de forces centrales consécutives : $\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r$, où la constante d'interaction est : $\alpha = \frac{-qQ}{4\pi\epsilon_0}$. Elle est ici négative : l'interaction est répulsive.

L'énergie, constante, peut être calculée à l'infini, où $r \rightarrow \infty$ et $\|\vec{v}\| \rightarrow v_0$, soit

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}mv_0^2 > 0.$$

La trajectoire est une *branche d'hyperbole*.

2) $OP = r_{\min}$, distance minimale d'approche.

La conservation de l'énergie permet d'écrire :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mr\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

où la constante des aires est donnée par le calcul du moment cinétique en O , autre constante du mouvement :

$$\vec{L}_O = (m\vec{r} \wedge \vec{v})_{\text{calculé à } t=-\infty} = -mbv_0 \vec{e}_z,$$

donc $C = -bv_0$.

Nous obtenons ainsi :

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

avec $\dot{r} = 0$ au point P , soit :

$$r^2 + 2\frac{\alpha}{mv_0^2}r - \frac{C^2}{v_0^2} = 0$$

dont la solution positive est :

$$\begin{aligned} r_{\min} &= -\frac{\alpha}{mv_0^2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{mv_0^2}\right)^2 + \frac{C^2}{v_0^2}} \\ &= \sqrt{b^2 + \left(\frac{\alpha}{mv_0^2}\right)^2} - \frac{\alpha}{mv_0^2}. \end{aligned}$$

3) a) Calculons :

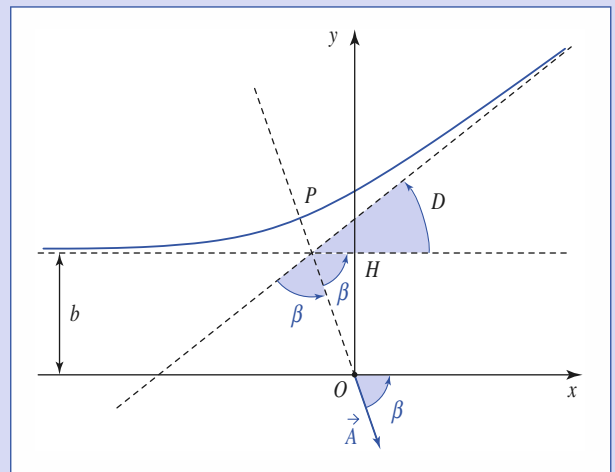
$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \wedge \frac{\vec{L}_O}{\alpha} - \dot{\theta} \vec{e}_\theta = \left(\frac{-\alpha}{mr^2} \vec{e}_r\right) \wedge \left(\frac{mr^2 \dot{\theta}}{\alpha} \vec{e}_z\right) - \dot{\theta} \vec{e}_\theta = \vec{0}$$

ce qui montre que le vecteur de Runge-Lenz est une constante du mouvement,

qui peut être calculée à $t = -\infty$: $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$, $\vec{e}_r = -\vec{e}_x$, $\vec{L}_O = -mbv_0 \vec{e}_z$, ce qui donne :

$$\vec{A} = \vec{e}_x - \frac{mbv_0^2}{\alpha} \vec{e}_y.$$

Nous savons que l'axe (O, \vec{A}) est un axe de symétrie pour la trajectoire, ce qui permet de placer le vecteur de Runge-Lenz sur le schéma, pointant dans la concavité de la branche d'hyperbole trajectoire.



b) Nous avons : $\pi = 2\beta + D$, donc $\frac{D}{2} = \frac{\pi}{2} - \beta$.

c) Il vient alors :

$$\tan \frac{D}{2} = \cotan \beta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{e}_x}{-\vec{A} \cdot \vec{e}_y} = \frac{-\alpha}{mbv_0^2} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 mbv_0^2}.$$

8

Changements de référentiels Mécanique non galiléenne

O B J E C T I F S

- Cinématique du changement de référentiel.
- Lois de la dynamique en référentiel non galiléen

P R É R E Q U I

- Mécanique du point en référentiel galiléen.

Introduction

Les référentiels liés à un véhicule en accélération, à un vaisseau spatial ou à une essence sont des référentiels non galiléens.

L'expérience montre que les lois de la mécanique (comme le principe d'inertie) ne s'y appliquent plus de façon simple.

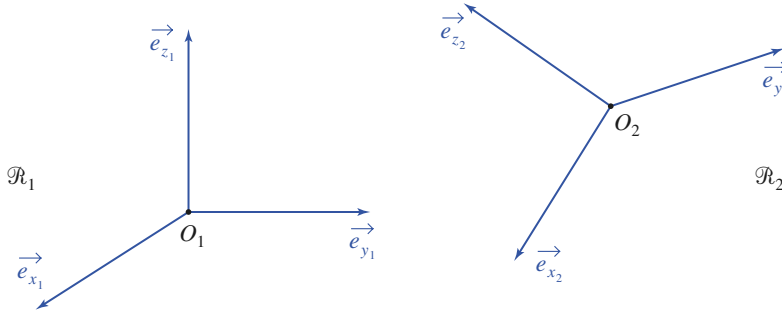
Après une étude de la cinématique permettant de passer d'un référentiel d'observation à un autre (celui du sol et celui de la voiture, par exemple), nous définirons les forces d'inertie qui interviennent dans les référentiels non galiléens.

Changements de référentiel

1.1. Mouvement relatif de deux référentiels

1.1.1. Description du mouvement

Considérons deux référentiels \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 se déplaçant l'un par rapport à l'autre et désignons par $(O_1; \vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1})$ et $(O_2; \vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_{z_2})$ deux repères cartésiens liés respectivement à \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 (doc. 1).



◀ **Doc. 1.** Deux référentiels \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 (avec deux repères cartésiens liés) en mouvement l'un par rapport à l'autre.

Pour décrire le mouvement relatif de ces deux référentiels nous voyons qu'il nous faudra en principe six paramètres qui correspondent à :

- trois paramètres pour décrire la translation faisant passer du point O_1 au point O_2 ;
- trois paramètres pour définir la rotation permettant de passer du trièdre $(\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1})$ au trièdre $(\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_{z_2})$.

1.1.2. Rotation relative de deux trièdres

Dans \mathcal{R}_1 , les vecteurs unitaires $(\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_{z_2})$ sont mobiles en respectant les propriétés :

$$\vec{e}_{x_2}^2 = \vec{e}_{y_2}^2 = \vec{e}_{z_2}^2 = 1 \quad \text{et} \quad \vec{e}_{x_2} \cdot \vec{e}_{y_2} = \vec{e}_{x_2} \cdot \vec{e}_{z_2} = \vec{e}_{y_2} \cdot \vec{e}_{z_2} = 0.$$

En dérivant dans \mathcal{R}_1 les relations ci-dessus, nous obtenons :

$$\vec{e}_{x_2} \cdot \left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{e}_{y_2} \cdot \left(\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{e}_{z_2} \cdot \left(\frac{d\vec{e}_{z_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} = 0$$

$$\begin{cases} \vec{e}_{x_2} \cdot \left(\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} + \vec{e}_{y_2} \cdot \left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} = 0 \\ \vec{e}_{x_2} \cdot \left(\frac{d\vec{e}_{z_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} + \vec{e}_{z_2} \cdot \left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} = 0 \\ \vec{e}_{z_2} \cdot \left(\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} + \vec{e}_{y_2} \cdot \left(\frac{d\vec{e}_{z_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} = 0. \end{cases}$$

$$\text{En posant } \vec{\Omega}_{x_2} = \vec{e}_{x_2} \cdot \left(\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1}, \quad \vec{\Omega}_{y_2} = \vec{e}_{y_2} \cdot \left(\frac{d\vec{e}_{z_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}_{z_2} = \vec{e}_{z_2} \cdot \left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1}$$

nous pouvons introduire le vecteur $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \Omega_{x_2} \vec{e}_{x_2} + \Omega_{y_2} \vec{e}_{y_2} + \Omega_{z_2} \vec{e}_{z_2}$ et constater que nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} &= \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{e}_{x_2}; \\ \left(\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} &= \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{e}_{y_2}; \\ \left(\frac{d\vec{e}_{z_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} &= \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{e}_{z_2}. \end{aligned}$$

1.1.3. Translation et rotation

Le mouvement relatif de deux référentiels \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 est la superposition :

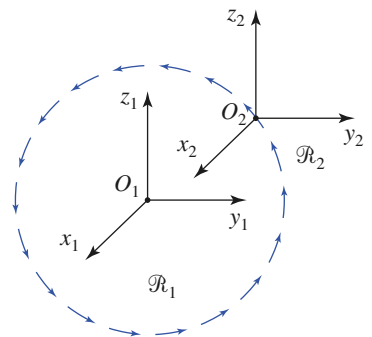
- d'une rotation à vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}$, appelé vecteur rotation d'entraînement de \mathcal{R}_2 par rapport à \mathcal{R}_1 ;
- d'une translation caractérisée, par exemple, par $\vec{v}(O_2)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{O}_1O_2}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1}$, où O_1 et O_2 sont des points fixes de \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 respectivement.

La donnée de ces deux entités nous permettra par la suite de relier les vitesses et accélérations d'un point dans ces deux référentiels.

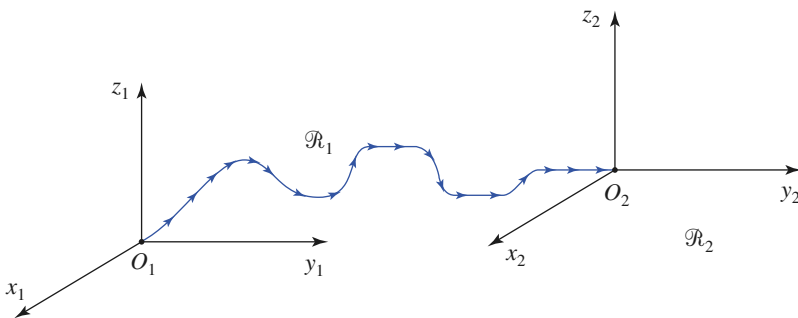
1.1.4. Cas particuliers

- \mathcal{R}_2 est en translation par rapport à \mathcal{R}_1 : $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2} = \vec{0}$

Les vecteurs \vec{e}_{x_2} , \vec{e}_{y_2} , \vec{e}_{z_2} , et de manière générale tout vecteur lié à \mathcal{R}_2 restent constants dans \mathcal{R}_1 .



Doc. 3. \mathcal{R}_2 est en translation circulaire par rapport à \mathcal{R}_1 .



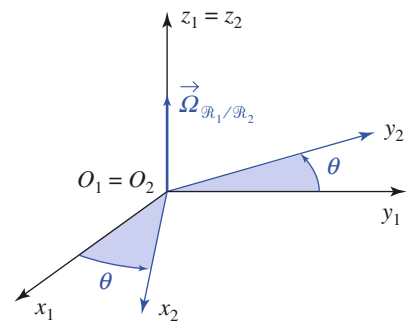
Doc. 2. \mathcal{R}_2 est en translation quelconque par rapport \mathcal{R}_1 .

Notons que la translation de \mathcal{R}_2 n'est pas forcément rectiligne et que la trajectoire du point O_2 est, *a priori*, quelconque (cette trajectoire peut même être un cercle ; \mathcal{R}_2 est alors en translation circulaire par rapport à \mathcal{R}_1 : cf. doc. 3).

- \mathcal{R}_2 est en rotation autour d'un axe fixe de \mathcal{R}_1

Choisissons les axes (Oz_1) et (Oz_2) de manière à ce qu'ils coïncident avec l'axe de rotation. Nous pouvons alors vérifier que le vecteur rotation d'entraînement s'écrit : $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2} = \dot{\theta} \vec{e}_{z_1}$, en désignant par θ l'angle commun :

$$\theta = (\widehat{Ox_1, Ox_2}) = (\widehat{Oy_1, Oy_2}) \quad (\text{doc. 4}).$$



Doc. 4. \mathcal{R}_2 est en rotation autour de l'axe (Oz_1) dans \mathcal{R}_1 .

1.2. Rotation et dérivation des vecteurs

1.2.1. Loi de dérivation composée d'un vecteur

L'évolution d'un vecteur $\vec{U}(t)$ (position, vitesse...) peut différer, selon qu'elle est observée dans \mathcal{R}_1 ou \mathcal{R}_2 .

Nous chercherons ici à relier les dérivées correspondantes $\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1}$ et $\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2}$.

Exprimons \vec{U} dans la base $(\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_{z_2})$:

$$\vec{U}(t) = U_{x_2} \vec{e}_{x_2} + U_{y_2} \vec{e}_{y_2} + U_{z_2} \vec{e}_{z_2}.$$

Dans le référentiel \mathcal{R}_2 , le vecteur évolue :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} = \frac{dU_{x_2}}{dt} \vec{e}_{x_2} + \frac{dU_{y_2}}{dt} \vec{e}_{y_2} + \frac{dU_{z_2}}{dt} \vec{e}_{z_2}.$$

Dans le référentiel \mathcal{R}_1 , il faut aussi tenir compte des variations des vecteurs de base $\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}$ et \vec{e}_{z_2} car il y a mouvement relatif de \mathcal{R}_2 par rapport à \mathcal{R}_1 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} &= \frac{dU_{x_2}}{dt} \vec{e}_{x_2} + \frac{dU_{y_2}}{dt} \vec{e}_{y_2} + \frac{dU_{z_2}}{dt} \vec{e}_{z_2} \\ &\quad + U_{x_2} \left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} + U_{y_2} \left(\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} + U_{z_2} \left(\frac{d\vec{e}_{z_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1}. \end{aligned}$$

La première partie de cette expression est $\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2}$. Les évolutions de $\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}$ et \vec{e}_{z_2} dans \mathcal{R}_1 sont liées au vecteur de rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}$, et nous avons :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + U_{x_2} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{e}_{x_2} + U_{y_2} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{e}_{y_2} + U_{z_2} \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{e}_{z_2}.$$

Les évolutions d'un vecteur $\vec{U}(t)$ dans deux référentiels \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 sont liées par la relation de dérivation composée :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{U}(t)$$

où $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}$ est le vecteur rotation d'entraînement de \mathcal{R}_2 par rapport à \mathcal{R}_1 .

1.2.2. Composition des rotations

Pour un vecteur \vec{U} observé dans trois référentiels $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ et \mathcal{R}_3 en mouvement les uns par rapport aux autres, écrivons :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{U}$$

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_2} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_3} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} \wedge \vec{U}$$

$$\text{d'où : } \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_3} + (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}) \wedge \vec{U}.$$

De plus : $\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_3} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{U}$.

Comme les deux dernières relations sont valables pour tout vecteur $\vec{U}(t)$, il est possible d'en identifier les termes, et :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_1} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}.$$

Le mouvement de rotation relative de deux référentiels est, a priori, décrit par trois paramètres. Cette rotation peut éventuellement être décomposée en rotations « élémentaires » grâce à la loi de composition des rotations d'entraînement :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_1} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}.$$

L'application qui suit donne une illustration de ce « découpage ».

Application 1

Dérivées des vecteurs de la base locale des coordonnées sphériques

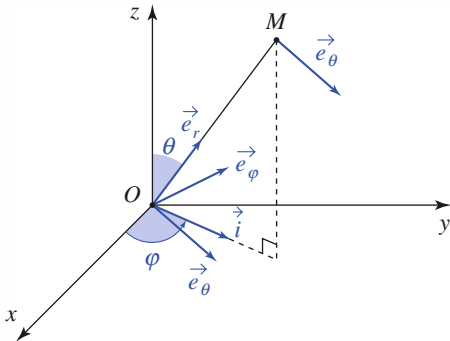
Soit un repère cartésien $(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié à un référentiel \mathcal{R} . Un point M est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) .

Soit le référentiel \mathcal{R}' dans lequel O est fixe ainsi que les vecteurs de la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ (doc. 5).

Déterminer $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, puis les expressions de :

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}, \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} \text{ et } \left(\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$$

ainsi que celle de la vitesse de M .



Doc. 5.

Montrons que le mouvement de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} se décompose en deux rotations.

Soit le référentiel \mathcal{R}_1 lié au repère $(O ; \vec{i}, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$, en rotation d'axe (Oz) par rapport à \mathcal{R} , ainsi :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}} = \dot{\varphi} \vec{e}_z.$$

\vec{e}_φ est un vecteur constant de \mathcal{R}_1 et de \mathcal{R}' . \mathcal{R}' est donc en rotation d'axe $(O ; \vec{e}_\varphi)$ par rapport à \mathcal{R}_1 , et :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}_1} = \dot{\theta} \vec{e}_\varphi.$$

Donc :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi.$$

Remarquons que l'expression simple $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ utilise une base qui n'est liée ni à \mathcal{R} ni à \mathcal{R}' .

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} + (\dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi) \wedge \vec{e}_r$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} = \vec{0}, \text{ soit } \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + \dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

Et de même :

$$\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \dot{\varphi} \cos \theta \vec{e}_\varphi - \dot{\theta} \vec{e}_r.$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = -\dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_r - \dot{\varphi} \cos \theta \vec{e}_\theta.$$

Enfin $\vec{OM} = r \vec{e}_r,$

d'où : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}}$

donc : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi.$

1.3. Composition des vitesses

1.3.1. Vitesse absolue, vitesse relative

La vitesse d'un point mobile M est définie dans \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 par :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} \quad \text{et} \quad \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_2}.$$

En utilisant la relation précédente, nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} &= \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} \\ &= \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M} \end{aligned}$$

soit encore :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2} + [\vec{v}(O_2)_{/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}].$$

La vitesse obtenue est la *vitesse absolue*, vitesse du point M dans le premier référentiel \mathcal{R}_1 : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1}$.

Le premier terme du membre de gauche de cette égalité est la *vitesse relative*, vitesse du point M dans le second référentiel \mathcal{R}_2 : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2}$.

1.3.2. Point coïncident

Le point coïncident (ou coïncidant) est le point, fixe dans \mathcal{R}_2 , qui coïncide avec le point M à l'instant t .

Par définition, le point coïncident n'a pas de vitesse relative : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2} = 0$.

Ainsi, la vitesse du point coïncident associé à l'instant t au point M est :

$$\vec{v}_e(M) = \vec{v}(O_2)_{/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}.$$

C'est la vitesse qu'aurait le point M dans \mathcal{R}_1 , s'il était fixe dans \mathcal{R}_2 , simplement entraîné par le mouvement relatif de ce référentiel.

La vitesse (absolue) du point coïncident est ainsi appelée *vitesse d'entraînement*.

1.3.3. Cas où \mathcal{R}_2 est en translation par rapport à \mathcal{R}_1

$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \vec{0}$ et \vec{v}_e est indépendant du point M . Donc **tous les points liés à \mathcal{R}_2 ont même vitesse par rapport à \mathcal{R}_1** .

1.3.4. Cas où \mathcal{R}_2 est en rotation par rapport à \mathcal{R}_1 autour d'un axe fixe

Notons $(Oz) = (O_1z_1) = (O_2z_2)$ l'axe fixe dans le référentiel \mathcal{R}_1 , autour duquel le référentiel \mathcal{R}_2 tourne à la vitesse angulaire :

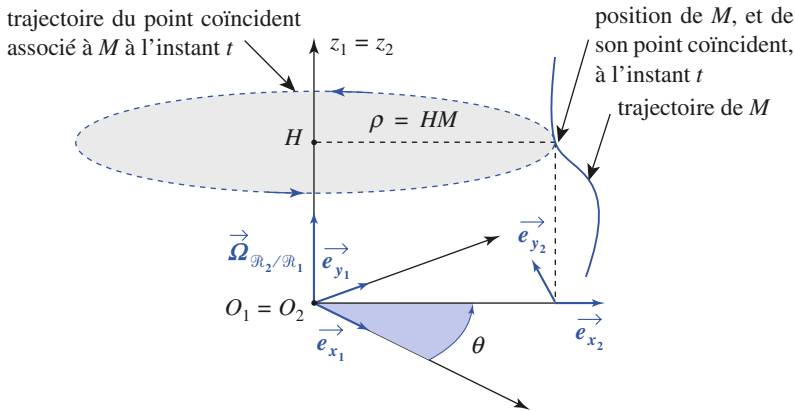
$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \omega \vec{e}_z = \dot{\theta} \vec{e}_z.$$

Le point coïncident avec M à l'instant t , qui est fixe dans \mathcal{R}_2 , décrit dans \mathcal{R}_1 une trajectoire circulaire d'axe (Oz) , de rayon $\rho = H(t)M(t)$, où $H(t)$ est la projection de M sur l'axe de rotation, à l'instant t (*doc.* 6).

La vitesse d'entraînement est ici :

$$\vec{v}_e(M) = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{OM} = \omega \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{HM}.$$

Si \mathcal{R}_2 est une translation par rapport à \mathcal{R}_1 , tous les points liés à \mathcal{R}_2 ont la même vitesse par rapport à \mathcal{R}_1 .



Doc. 6. Rotation autour d'un axe fixe, trajectoire circulaire du point coïncident.

Lors d'une rotation autour d'un axe fixe :

$$\vec{v}_e(M) = \omega \wedge \overrightarrow{HM}$$

où H est la projection de M sur l'axe de rotation.

1.4. Composition des accélérations

Pour étudier un mouvement, nous devons utiliser la relation fondamentale de la dynamique. Il est donc utile de prolonger cette étude pour exprimer l'accélération d'un point mobile.

1.4.1. Accélération absolue

Reprenons donc l'expression de la vitesse absolue en développant l'expression de $\vec{v}_e(M)$:

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_2} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

dont nous pouvons déduire celle de l'accélération absolue en dérivant les trois termes précédents dans le référentiel \mathcal{R}_1 :

$$\begin{aligned} \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1} &= \left(\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{O_2M}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_2} + \left(\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_1} \\ &+ \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \left\{ \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M} \right\}. \end{aligned}$$

Remarque

Il n'est pas utile de préciser dans quel référentiel est exprimée la dérivée du vecteur rotation car la loi de dérivation composée, appliquée à ce vecteur,

$$\text{nous donne :} \quad \left(\frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_2} = \left(\frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1}.$$

1.4.2. Accélération relative

Dans l'expression de l'accélération absolue, nous reconnaissons un terme d'accélération relative :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_2} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{O_2M}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_2}.$$

1.4.3. Accélération d'entraînement

Lorsque les vitesse et accélération relatives de M sont annulées, nous obtenons l'accélération absolue du point coïncident, qui est l'accélération d'entraînement :

$$\vec{a}_e(M) = \left(\frac{d^2 \overrightarrow{O_1 O_2}}{dt^2} \right)_{/ \mathcal{R}_1} + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2 M} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \left\{ \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2 M} \right\}.$$

1.4.4. Accélération de Coriolis

Remarquons que l'accélération absolue ne se réduit pas, lorsque la vitesse relative est non nulle, à la seule somme de l'accélération relative d'entraînement, car nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{a}(M)_{/ \mathcal{R}_1} &= \vec{a}(M)_{/ \mathcal{R}_2} + \vec{a}_e(M) + 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{O_2 M}}{dt} \right)_{/ \mathcal{R}_2} \\ &= \vec{a}(M)_{/ \mathcal{R}_2} + \vec{a}_e(M) + 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{v}(M)_{/ \mathcal{R}_2}. \end{aligned}$$

Le terme supplémentaire est appelé *accélération de Coriolis* :

$$\vec{a}_C(M) = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{v}(M)_{/ \mathcal{R}_2}.$$

1.4.5. Loi de composition des accélérations

Nous pouvons alors énoncer la loi de composition des accélérations :

L'accélération absolue $\vec{a}(M)_{/ \mathcal{R}_1}$ du point M dans le référentiel \mathcal{R}_1 est la somme de l'accélération relative $\vec{a}(M)_{/ \mathcal{R}_2}$, de l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e(M)$ ou accélération absolue du point coïncident, et de l'accélération de Coriolis $\vec{a}_C(M) = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{v}(M)_{/ \mathcal{R}_2}$:

$$\vec{a}(M)_{/ \mathcal{R}_1} = \vec{a}(M)_{/ \mathcal{R}_2} + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_C(M).$$

Il est inutile de vouloir retenir l'expression précédente de $\vec{a}_e(M)$ au § 1.4.1. !

1.4.6. Cas particulier où \mathcal{R}_2 est en translation par rapport à \mathcal{R}_1

Dans ce cas $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \vec{0}$, de sorte que nous obtenons les résultats suivants :

Lorsque le référentiel \mathcal{R}_2 est en translation par rapport à \mathcal{R}_1 :

- les champs de vitesse d'entraînement et d'accélération d'entraînement sont *uniformes* :

$\vec{v}_e(M) = \vec{v}(O_2)_{/ \mathcal{R}_1}$ et $\vec{a}_e(M) = \vec{a}(O_2)_{/ \mathcal{R}_1}$ ne dépendent pas du point M ;

- il n'y a pas d'accélération de Coriolis : $\vec{a}_C(M) = \vec{0}$.

Ces résultats très simples méritent d'être retenus.

L'Application 2 illustre le cas d'une translation circulaire.

1.4.7. Cas particulier où \mathcal{R}_2 est en rotation autour d'un axe fixe (Δ) de \mathcal{R}_1

Comme précédemment, on suppose que la rotation se fait autour de l'axe commun

(Δ) = ($O_1 z_1$) = ($O_2 z_2$) avec la vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \dot{\theta} \vec{e}_{z_1}$ (doc. 6).

Application 2

Translation circulaire

Une grande roue de fête foraine, de rayon R , tourne à vitesse angulaire constante ω autour d'un axe horizontal (Ox).

\mathcal{R}_1 est le référentiel terrestre et \mathcal{R}_2 le référentiel lié à une nacelle (doc. 7).

Exprimer dans une base appropriée la vitesse d'entraînement et l'accélération d'entraînement d'un point de \mathcal{R}_2 par rapport à \mathcal{R}_1 .

\mathcal{R}_2 est en translation par rapport à \mathcal{R}_1 . La vitesse et l'accélération d'entraînement ont donc la même valeur en tout point.

Soit P le point d'attache de la nacelle, situé dans le même plan vertical que O , origine de \mathcal{R}_1 .

P est fixe dans \mathcal{R}_2 ; donc :

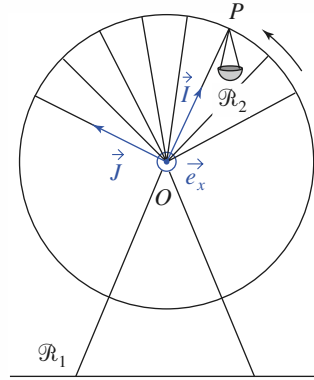
$$\vec{v}_e = \vec{v}(P)_{/\mathcal{R}_1} \quad \text{et} \quad \vec{a}_e = \vec{a}(P)_{/\mathcal{R}_1}.$$

Utilisons la base orthonormée $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{e}_x)$ définie par $\vec{OP} = R\vec{I}$.

P est en mouvement circulaire uniforme par rapport à \mathcal{R}_1 . D'où :

$$\vec{v}_e = \vec{v}(P)_{/\mathcal{R}_1} = \omega R \vec{J} \quad \text{et}$$

$$\vec{a}_e = \vec{a}(P)_{/\mathcal{R}_1} = -\omega^2 R \vec{I} = \omega^2 \vec{OP}.$$



Doc. 7. \mathcal{R}_2 est en translation par rapport à \mathcal{R}_1 .

Le point coïncident décrit dans \mathcal{R}_1 une trajectoire circulaire, de centre H , projection du point M sur l'axe de rotation à l'instant t . Ce mouvement circulaire de rayon $\rho = HM$ décrit à la vitesse angulaire Ω nous donne accès aux vitesse et accélération d'entraînement :

$$\vec{v}_e(M) = \vec{\Omega} \wedge \vec{HM} = \rho \dot{\theta} \vec{e}_{y_2}$$

$$\vec{a}_e(M) = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{HM} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{HM}) = \rho \ddot{\theta} \vec{e}_{y_2} - \rho \dot{\theta}^2 \vec{e}_{x_2}.$$

Remarque : Ces expressions nous rappellent celles de la vitesse et de l'accélération d'un point en coordonnées cylindriques, quand la distance ρ à l'axe (Oz) est constante, puisque la trajectoire du point coïncident dans \mathcal{R}_1 est circulaire. La distance du point M à cet axe est susceptible de varier, ce qui fera intervenir des termes dans les expressions de ses vitesse et accélération relatives.

L'accélération de Coriolis est ici :

$$\vec{a}_C(M) = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2} = 2\dot{\theta} \vec{e}_z \wedge (\dot{x}_2 \vec{e}_{x_2} + \dot{y}_2 \vec{e}_{y_2} + \dot{z}_2 \vec{e}_{z_2}).$$

Lors d'une rotation de \mathcal{R}_2 autour d'un axe fixe (Δ) de \mathcal{R}_1 , l'accélération d'entraînement du point M (de projection H sur (Δ)) est :

$$\vec{a}_e(M) = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{HM} - \vec{\Omega}^2 \vec{HM}.$$

Si la rotation est uniforme, l'accélération d'entraînement est radiale et centripète :

$$\vec{a}_e = -\Omega^2 \vec{HM}.$$

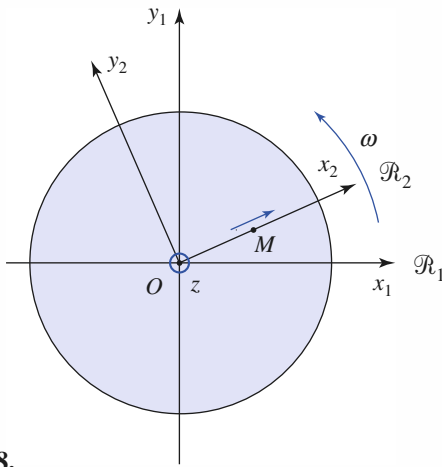
Application 3

Mouvement radial sur un plateau tournant

Soit un plateau horizontal (manège, par exemple) tournant avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe vertical fixe (Oz).

\mathcal{R}_1 est le référentiel terrestre et \mathcal{R}_2 est le référentiel lié au plateau (doc. 8).

Un mobile de position M décrit à vitesse constante \vec{v} l'axe (Ox_2), lié à \mathcal{R}_2 . Exprimer $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1}$ et $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1}$ dans la base $(\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2})$.



Doc. 8.

Le point coïncident de M décrit un cercle de rayon x_2 à la vitesse angulaire ω ; donc :

$$\vec{v}_c(M) = \omega x_2 \vec{e}_{y_2}$$

$$\text{et : } \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = v \vec{e}_{x_2} + \omega x_2 \vec{e}_{y_2}.$$

• 1^{re} méthode : Calcul direct de $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1}$

$$\left(\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} = v \left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1} + \dot{\omega} x_2 \vec{e}_{y_2} + \omega v \vec{e}_{y_2} + \omega x_2 \left(\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1}.$$

Les dérivées des vecteurs unitaires sont connues, d'où :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1} = (\dot{\omega} x_2 + 2\omega v) \vec{e}_{y_2} - \omega^2 x_2 \vec{e}_{x_2}.$$

• 2^{re} méthode : Calcul de $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1}$ par composition des accélérations

Dans \mathcal{R}_1 , le mouvement du point coïncident est circulaire, d'où :

$$\vec{a}_e(M) = \dot{\omega} x_2 \vec{e}_{y_2} - \omega^2 x_2 \vec{e}_{x_2}.$$

La vitesse de M dans \mathcal{R}_2 étant uniforme :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_2} = \vec{0}.$$

$$\text{De plus : } \vec{a}_c = 2\omega \vec{e}_z \wedge v \vec{e}_{x_2} = 2\omega v \vec{e}_{y_2}.$$

Finalement :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1} = (\dot{\omega} x_2 + 2\omega v) \vec{e}_{y_2} - \omega^2 x_2 \vec{e}_{x_2}.$$

2 Mécanique en référentiel non galiléen

2.1. Référentiels galiléens

2.1.1. Caractère galiléen d'un référentiel

La première loi de Newton affirme qu'un point matériel isolé décrit un mouvement rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen. Ceci constitue une définition de principe d'un référentiel galiléen.

En pratique, il est délicat de réaliser expérimentalement un système isolé : au laboratoire, un mobile sur coussin d'air lancé sur une table horizontale garde une vitesse constante : un système pseudo-isolé a été réalisé ; le coussin d'air permettant de compenser le poids et de minimiser les frottements. De façon pragmatique, nous dirons que :

Un référentiel \mathcal{R}_g est galiléen si l'application de la relation fondamentale de la dynamique à un point matériel de masse m :

$$\vec{F} = m\vec{a}_{/ \mathcal{R}_g}$$

permet de prévoir une évolution confirmée par l'expérience.

Par exemple, le référentiel terrestre \mathcal{R}_T est assimilable à un référentiel galiléen, pour des vitesses modérées et des durées d'expériences limitées. *Nous admettrons ce fait dans toute la suite de ce chapitre.* Ce n'est bien entendu qu'une approximation, dont nous discuterons plus précisément les limites dans le prochain chapitre.

2.1.2. Classe des référentiels galiléens

Imaginons un point matériel de position M , isolé, et supposons qu'il existe deux référentiels galiléens \mathcal{R}_{g1} et \mathcal{R}_{g2} . Par hypothèse :

$$\vec{a}(M)_{/ \mathcal{R}_{g1}} = \vec{a}(M)_{/ \mathcal{R}_{g2}} = \vec{0}.$$

D'où :

$$\vec{a}_e(M) + 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_{g2}/\mathcal{R}_{g1}} \wedge \vec{v}(M)_{/ \mathcal{R}_{g2}} = \vec{0}.$$

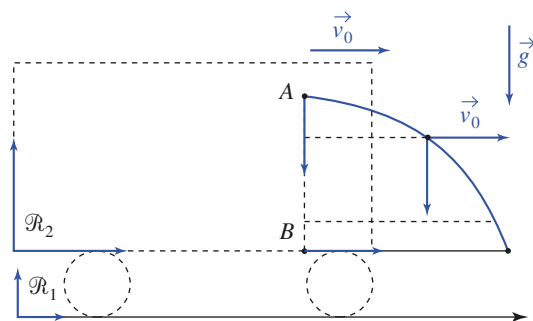
Cette relation doit être vérifiée en toute position et pour toute vitesse, ce qui se traduit par :

- $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \vec{0}$: \mathcal{R}_{g2} est en translation par rapport à \mathcal{R}_{g1} .
- $\vec{a}_e(M) = \vec{0}$: cette translation est rectiligne uniforme.

Application 4

Chute libre dans un train

Le référentiel terrestre étant galiléen, un train roule à vitesse constante v_0 sur une voie rectiligne. Un passager lâche une bille en A, avec une vitesse initiale nulle. En quel point B la bille touche-t-elle le plancher du wagon ?



• Analyse dans \mathcal{R}_2

Le référentiel du train \mathcal{R}_2 est en translation rectiligne et uniforme par rapport au référentiel terrestre.

Il est donc galiléen : la chute dans \mathcal{R}_2 est verticale (l'axe AB est vertical dans \mathcal{R}_2).

• Analyse dans \mathcal{R}_1

Par rapport à \mathcal{R}_1 , la bille est lancée avec une vitesse initiale dont la composante horizontale est v_0 ; en l'absence de force horizontale, cette vitesse se conserve (*doc. 9*, courbe bleue).

Le point B, lié au train, situé sous le point A, a une vitesse v_0 par rapport à \mathcal{R}_1 . La bille et B restent donc sur une même verticale et finissent par se rencontrer.

◀ **Doc. 9.** Trajectoires de la bille dans les deux référentiels.

Nous pouvons en conclure que deux référentiels galiléens sont l'un par rapport à l'autre en translation rectiligne et uniforme.

La réciproque est immédiate : si \mathcal{R}_2 est en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R}_{g1} , galiléen, les accélérations d'entraînement et de Coriolis sont nulles dans \mathcal{R}_2 , qui est donc galiléen.

L'ensemble des référentiels galiléens est constitué par tous les référentiels en translation rectiligne et uniforme par rapport à l'un d'entre eux.

2.2. Lois de la dynamique en référentiel non galiléen

Dans tout ce qui suit, le référentiel \mathcal{R}_g , désigne un référentiel d'inertie (ou galiléen), et \mathcal{R} est un référentiel quelconque.

2.2.1. Relation fondamentale de la dynamique

Désignons par \vec{F} la force totale galiléenne (origine matérielle) subie par le point matériel M de masse m .

D'après la relation fondamentale de la dynamique dans \mathcal{R}_g :

$$\vec{F} = m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = m[\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_C(M)]$$

ce qui nous permet d'écrire, dans le référentiel \mathcal{R} :

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{F} + \vec{F}_{i_e} + \vec{F}_{i_c}$$

où \vec{F}_{i_e} et \vec{F}_{i_c} sont des termes vectoriels, homogènes à la force \vec{F} , que nous appellerons forces d'inertie, valant respectivement :

$$\vec{F}_{i_e} = -m \vec{a}_e(M) \quad \text{et} \quad \vec{F}_{i_c} = -m \vec{a}_C(M)$$

qui permettent de prendre en compte, lors de l'écriture de la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel \mathcal{R} , son caractère éventuellement non galiléen.

Dans un référentiel \mathcal{R} en mouvement accéléré par rapport à un référentiel galiléen, il faut introduire des forces d'inertie pour traduire correctement la relation fondamentale de la dynamique :

$$\vec{F} + \vec{F}_{i_e} + \vec{F}_{i_c} = m \vec{a}_r = m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}.$$

• $\vec{F}_{i_e} = -m \overrightarrow{(\text{accélération du point coïncident})}$ est la force d'inertie d'entraînement.

$\vec{F}_{i_c} = -2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$ est la force d'inertie de Coriolis. Cette force n'existe que si le point matériel est en mouvement par rapport à \mathcal{R} et si \mathcal{R} est en rotation par rapport à \mathcal{R}_g .

2.2.2. Exemple d'un mouvement de translation accéléré de \mathcal{R} dans \mathcal{R}_g

Le vecteur rotation de \mathcal{R} par rapport à \mathcal{R}_g est nul. La force d'inertie de Coriolis est donc également nulle : $\vec{F}_{i_c} = \vec{0}$.

Tout point lié à \mathcal{R} a même vitesse et accélération dans \mathcal{R}_g que l'origine O du repère attaché à \mathcal{R} .

L'accélération d'entraînement ne dépend donc pas du point M :

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}_e(O) = \vec{a}_e.$$

Par suite :

$$\vec{F}_{i_e} = -m\vec{a}_e.$$

Lorsque le référentiel \mathcal{R} est en translation par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R}_g , les forces d'inertie se réduisent à la seule force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{i_e} = -m\vec{a}_e$, où l'accélération d'entraînement \vec{a}_e est indépendante de la position du point M .

2.2.3. « Pseudo-forces » à effets bien réels

La force \vec{F} traduit une *interaction* du point M avec son environnement, et elle est invariante par changement de référentiel.

Les forces d'inertie \vec{F}_{i_e} et \vec{F}_{i_c} sont homogènes à des forces, mais dépendent du référentiel d'étude \mathcal{R} . Elles ne résultent pas d'une interaction, mais du caractère non galiléen du référentiel \mathcal{R} : ce sont des « pseudo-forces ».

Considérons un ascenseur en translation verticale d'accélération $\vec{G} = G\vec{e}_z$ dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_T assimilé ici à un référentiel galiléen.

Le champ de pesanteur \vec{g} est uniforme. Un ressort, accroché au plafond de l'ascenseur, est de masse négligeable, de raideur k et de longueur au repos ℓ_0 (doc. 10).

Un point matériel de masse m est accroché à l'extrémité inférieure du ressort. Nous dirons qu'il est à l'équilibre relatif s'il reste immobile par rapport à l'ascenseur. Lorsque l'accélération \vec{G} de l'ascenseur est nulle, l'ascenseur étant par exemple immobile, la longueur à l'équilibre du ressort est ℓ_{eq} telle que $\ell_{eq} - \ell_0 = \frac{mg}{k}$.

■ Point de vue de A, immobile dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_T .

Le mouvement de la masse m dans \mathcal{R}_T , lorsque la longueur du ressort est ℓ'_{eq} ,

obéit à la loi : $m\vec{a}_{/R_T} = m\vec{G} = k(\ell'_{eq} - \ell_0)\vec{e}_z + m\vec{g}$, donc :

$$\ell'_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k} + \frac{mG}{k}.$$

■ Point de vue de B, immobile dans le référentiel accéléré \mathcal{R} .

Si B oublie la force d'inertie d'entraînement et écrit :

$$m\vec{a}_{/R} = \vec{0} = k(\ell'_{eq} - \ell_0)\vec{e}_z + m\vec{g},$$

il ne trouvera pas la bonne longueur ℓ'_{eq} à l'équilibre relatif.

Donc B doit tenir compte de la force d'inertie $\vec{F}_{i_e} = -m\vec{G}$ et écrire :

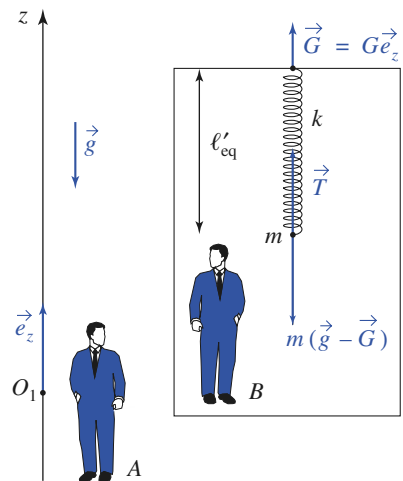
$$m\vec{a}_{/R} = \vec{0} = k(\ell'_{eq} - \ell_0)\vec{e}_z + m\vec{g} - m\vec{G}$$

pour obtenir le bon allongement du ressort à l'équilibre relatif.

L'effet de la force d'inertie, « pseudo-force », est donc bien réel dans \mathcal{R} .

D'ailleurs, lorsque l'ascenseur accélère, l'observateur B se sent « plus lourd »,

car lui aussi est soumis à une force d'inertie $\vec{F}_{i_e} = -m_B\vec{G}$.



Doc. 10. Accéléromètre.

Les forces d'inertie ne traduisent pas une interaction, mais le caractère non galiléen du référentiel d'étude. Les effets de ces « pseudo-forces » sont cependant bien réels dans le référentiel non galiléen.

Remarques

- \vec{G} est l'accélération d'entraînement de la masse m .
- La mesure de $\ell'_{\text{eq}} - \ell_0 = \frac{mG}{k}$ permet de calculer G : il s'agit d'un accéléromètre.
- Les lois de la mécanique dans l'ascenseur sont les mêmes que dans \mathcal{R}_T à la condition de remplacer \vec{g} par $(\vec{g} - \vec{G})$ qui peut être qualifié de champ de pesanteur apparent.
- Lorsque $\vec{G} = \vec{g}$, donc $G = -g$, la pesanteur apparente est nulle : il s'agit alors d'un état qualifié d'impesanteur. Dans l'approximation d'un champ \vec{g} uniforme, une bille lancée par B décrirait, en l'absence de frottement, un mouvement rectiligne uniforme.

Application J

Oscillations d'un pendule

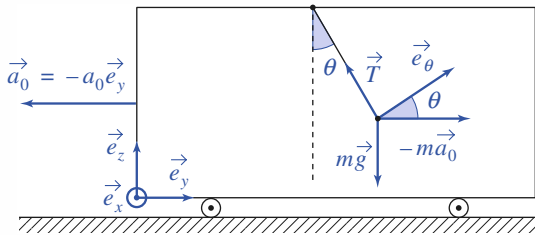
Le passager d'un véhicule en translation horizontale d'accélération constante $\vec{a}_0 = -a_0 \vec{e}_y$, étudie les petites oscillations planes du pendule simple formé par une masse m et un fil de longueur ℓ accroché au plafond du véhicule.

Quelle période mesure-t-il sachant que :

$$a_0 = g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \text{ et que } \ell = 1 \text{ m} ?$$

En projetant la relation fondamentale appliquée au point matériel dans \mathcal{R} lié au véhicule, sur l'axe orthoradial des coordonnées polaires de M (doc. 12) nous obtenons :

$$m \ell \ddot{\theta} = -mg \sin \theta + ma_0 \cos \theta.$$



Doc. 11. Oscillations d'un pendule.

La position d'équilibre correspond à $\tan \theta_e = \frac{a_0}{g}$.

Pour des petits mouvements au voisinage de cette position d'équilibre, en posant $\xi = \theta - \theta_e$, l'équation se transforme en :

$$\ell \frac{d^2 \xi}{dt^2} = f(\xi) = f(0) + \xi \left(\frac{df}{d\xi} \right)_{\xi=0} + \dots,$$

avec $f(\xi) = -g \sin(\theta_e + \xi) + a_0 \cos(\theta_e + \xi)$,
 $f(0) = 0$ et :

$$\left(\frac{df}{d\xi} \right)_{\xi=0} = -g \cos \theta_e - a_0 \sin \theta_e = -\sqrt{g^2 + a_0^2}.$$

L'équation linéarisée (nous négligeons les termes d'ordre supérieur à un en ξ) devient :

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\frac{\sqrt{g^2 + a_0^2}}{\ell} \xi.$$

La période des petites oscillations est donc :

$$T = 2\pi \left(\frac{\ell^2}{g^2 + a_0^2} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

A.N. : $\theta_e = 45^\circ$ et $T = 1,7 \text{ s}$.

2.2.4. Exemple d'une rotation \mathcal{R} autour d'un axe fixe de \mathcal{R}_g

Le référentiel \mathcal{R} est en rotation autour de l'axe (Oz) fixe dans \mathcal{R}_g , avec la vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_g} = \vec{\Omega} = \omega \vec{e}_z$.

Dans \mathcal{R} , nous écrivons :

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{F} + \vec{F}_{i_e} + \vec{F}_{i_c}$$

où les forces d'inertie sont :

$$\vec{F}_{i_e} = -m \vec{a}_e(M) = -m \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{HM} + m \omega^2 \overrightarrow{HM}$$

$$\vec{F}_{i_c} = -m \vec{a}_c(M) = -2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}.$$

Notons alors que :

Lorsque le référentiel \mathcal{R} est en rotation par rapport à un axe fixe de \mathcal{R}_g , il faut tenir compte des forces d'inertie.

Si la rotation est uniforme à vitesse $\omega \vec{e}_z = \text{cte}$:

- la force d'inertie d'entraînement est centrifuge : $\vec{F}_{i_e} = +m \omega^2 \overrightarrow{HM}$;
- la force d'inertie de Coriolis n'est en général pas nulle.

Pour illustrer les forces d'inertie apparaissant dans un référentiel tournant, considérons un bonhomme évoluant sur le plateau horizontal d'un manège tournant à vitesse angulaire constante $\omega \vec{e}_z$ autour de l'axe vertical (Oz) (doc. 12).

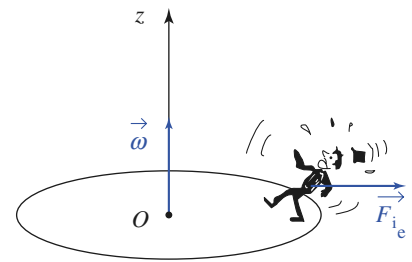
Dans un premier temps, le bonhomme tente de se maintenir immobile sur le plateau. Pour maintenir son équilibre dans le référentiel non galiléen lié au plateau, il doit tenir compte de son poids, de la réaction du plateau, mais aussi de la force d'inertie centrifuge $\vec{F}_{i_e} = m \omega^2 \overrightarrow{HM}$ qui tend à l'éjecter du manège (doc. 12a.) ! Pour nous, qui l'observons depuis le sol, et le voyons décrire un cercle de rayon HM à vitesse angulaire ω , ce bonhomme a un mouvement accéléré dans le référentiel galiléen lié au sol, avec $m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = -m \omega^2 \overrightarrow{HM}$: nous lui conseillerons donc de trouver un moyen d'assurer cette accélération. Ici encore, les points de vue des observateurs placés dans le référentiel \mathcal{R}_g lié au sol ou \mathcal{R} lié au plateau se rejoignent...

Supposons maintenant que le bonhomme cherche à rejoindre le centre du plateau. Pour cela, il cherchera à suivre une trajectoire rectiligne dans le référentiel \mathcal{R} , en suivant un rayon du plateau circulaire en rotation. Quittant son équilibre précédent, il peut se dire qu'il lui suffit de se propulser en direction du point O en s'efforçant de vaincre la force centrifuge. Funeste intuition (doc. 12b.) !

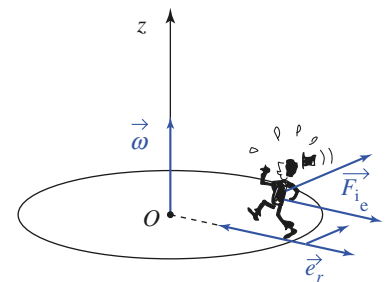
Pour nous, liés au sol, son erreur est évidente : lorsqu'il se dirige vers le centre O du plateau, il oublie que le plateau « se dérobe » sous ses pas, puisqu'il tourne. Il aurait donc dû avancer un peu « en crabe » pour compenser cet effet.

Pour lui, qui quitte une position où le plateau lui semblait immobile, la surprise est logique, mais l'erreur bien réelle. Alors aidons-le à rééduquer sont intuition, en lui indiquant que dans le référentiel \mathcal{R} où il se déplace à vitesse $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = -v \vec{e}_r$ vers le point O , il doit aussi tenir compte de la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{i_c} = -2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = 2m \omega v \vec{e}_\theta$.

Cette force doit être compensée s'il veut aller en ligne droite sur le plateau...



a. Pour tenir l'équilibre dans \mathcal{R} , il faut penser à la force centrifuge



b. Pour avancer droit sur le plateau, il faut tenir compte de \vec{F}_{i_e} ... et de \vec{F}_{i_c} perpendiculaire au mouvement relatif

Doc. 12.

Application 6

Quelques ordres de grandeur

1) En reprenant l'expression de l'accélération absolue de notre bonhomme en mouvement à vitesse relative constante $-v\vec{e}_r$ sur le plateau, retrouver les forces d'inertie dont il doit être conscient pour avancer en ligne droite, suivant un rayon, sur un plateau.

2) En prenant des ordres de grandeur plausibles, estimer si les corrections que le bonhomme doit apporter lors de son déplacement sont importantes ou non.

3) La Terre tourne sur elle-même, et le référentiel terrestre n'est pas galiléen. Un bon sprinter doit-il tenir compte de la force de Coriolis pour éviter de « mordre » sur la piste de son voisin ?

Le bonhomme a pour position :

$$\overrightarrow{OM} = r(t)\vec{e}_r(t) = (r_0 - vt)\vec{e}_r(t).$$

Sa vitesse absolue est :

$$\vec{v}(M)_{J\mathcal{R}_g} = -v\vec{e}_r + (r_0 - vt)\omega\vec{e}_\theta,$$

et son accélération absolue vaut :

$$\begin{aligned}\vec{a}(M)_{J\mathcal{R}_g} &= -v\omega\vec{e}_\theta + [-v\omega\vec{e}_\theta - (r_0 - vt)\omega^2\vec{e}_r] \\ &= -\omega^2\overrightarrow{HM} - 2v\omega\vec{e}_\theta.\end{aligned}$$

Les forces d'inertie, dont doit tenir compte le bonhomme dans le référentiel lié au plateau, sont donc :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{i_e} + \vec{F}_{i_c} &= m(\vec{a}(M)_{J\mathcal{R}} - \vec{a}(M)_{J\mathcal{R}_g}) = -m\vec{a}(M)_{J\mathcal{R}_g} \\ &= m\omega^2\overrightarrow{HM} + 2mv\omega\vec{e}_\theta,\end{aligned}$$

résultat en accord avec les termes utilisés dans la discussion précédente.

2) Considérons un plateau de rayon $r_0 = 4$ m, tournant à vitesse angulaire $\omega = \frac{2\pi}{10}$ rad/s (un tour en dix secondes), sur lequel le bonhomme se déplace à $v = 1$ m . s⁻¹, et comparons les forces d'inertie à son poids mg ($g \approx 10$ m . s⁻²) :

$$\frac{F_{i_e}}{mg} \approx \frac{r_0\omega^2}{g} \approx 0,16 \quad \text{et} \quad \frac{F_{i_c}}{mg} \approx \frac{2r_0v\omega}{g} \approx 0,5.$$

Ces termes sont donc loin d'être négligeables !

3) Sans entrer dans des détails tels que l'orientation de la piste par rapport à l'axe des pôles, nous pouvons estimer que la force d'inertie de Coriolis est de l'ordre de $2m\Omega_T v$, où $\Omega_T \approx \frac{2\pi}{1 \text{ jour}} \approx 7 \cdot 10^{-5}$ rad . s⁻¹

$$\text{et } v \approx \frac{100 \text{ mètres}}{10 \text{ secondes}} \approx 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$\text{Nous avons alors : } \frac{F_{i_c}}{mg} \approx 1,4 \cdot 10^{-4}.$$

La force de Coriolis est clairement sans influence sur la course du sprinter.

2.2.5. Théorème du moment cinétique dans \mathcal{R} non galiléen

Le point O étant fixe dans \mathcal{R} et le moment cinétique en O étant défini par :

$$\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M)_{J\mathcal{R}} = m\overrightarrow{OM} \wedge v_r\vec{e}_r,$$

sa dérivée temporelle dans \mathcal{R} est :

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{J\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{a}_r = \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{F} + \vec{F}_{i_e} + \vec{F}_{i_c}).$$

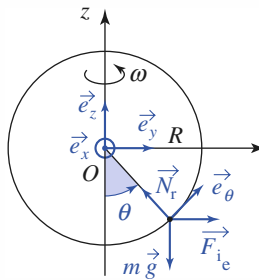
Le théorème du moment cinétique reste valable en référentiel non galiléen, en remplaçant la force galiléenne \vec{F} par $\vec{F} + \vec{F}_{i_e} + \vec{F}_{i_c}$.

Application 7

Perle sur cercle tournant

Une perle est enfilée sur un cercle métallique de rayon R qui tourne à la vitesse angulaire ω constante autour d'un diamètre vertical (doc. 13).

Montrer que l'on peut observer l'existence d'un équilibre relatif stable de la perle pour un angle θ_e avec la verticale non nul, si la vitesse angulaire est suffisamment élevée. On négligera ici le rôle des frottements.



Doc. 13. Perle sur cercle tournant. La force d'inertie de Coriolis est colinéaire à \vec{e}_x .

Appliquons le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Ox) fixe dans le référentiel \mathcal{R} non galiléen lié au cercle. Les moments par rapport à cet axe de la réaction \vec{N} du cercle et de la force d'inertie de Coriolis sont nuls (\vec{N} a d'ailleurs une composante N_x qui annule \vec{F}_{ic}).

Nous obtenons donc $L_{Ox} = mR^2 \frac{d\theta}{dt}$,

puis $\frac{dL_{Ox}}{dt} = -mgR \sin \theta + m\omega^2 R^2 \sin \theta \cos \theta$

(moment des forces par rapport à l'axe (Ox)).

En posant $\omega_0^2 = \frac{g}{R}$, l'équation se transforme en :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \left[\sin \theta - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \right].$$

Les positions d'équilibre relatif doivent satisfaire à $\theta = \text{cte}$ quel que soit t , et donc $\ddot{\theta} = 0$:

$$\begin{cases} \sin \theta = 0, & \text{soit } \theta_1 = 0 \text{ et } \theta_2 = \pi \\ \cos \theta = \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2, & \text{soit } \theta = \arccos \left[\left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right], \omega > \omega_0. \end{cases}$$

Pour discuter la stabilité de ces positions d'équilibre posons :

$$\xi = \theta - \theta_e \text{ et } f(\xi) = -\frac{g}{R} \left[\sin(\theta_e + \xi) - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \sin(\theta_e + \xi) \cos(\theta_e + \xi) \right]$$

nous obtenons l'équation approchée :

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = \xi \left(\frac{df}{d\xi} \right)_{\xi=0}.$$

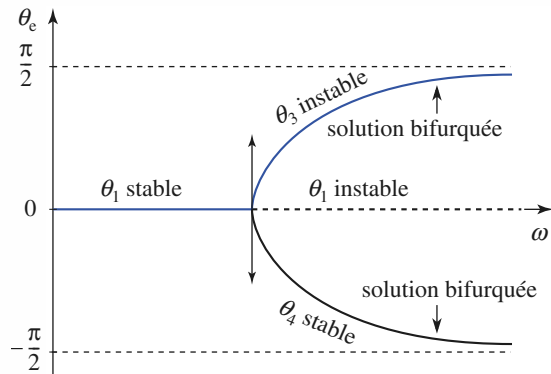
Dans le cas $\xi \left(\frac{df}{d\xi} \right)_{\xi=0} < 0$, la force tangentielle subie par la particule est une force de rappel et l'équilibre est alors stable.

$$\text{Ici } \left(\frac{df}{d\xi} \right)_{\xi=0} = -\left(\frac{g}{R} \right) \left[\cos \theta_e - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \cos 2\theta_e \right].$$

Les positions d'équilibre stable sont donc :

- pour $\omega < \omega_0$: $\theta_1 = 0$ (la position $\theta_2 = \pi$ étant instable) ;
- pour $\omega > \omega_0$: $\theta_{3,4} = \pm \arccos \left[\left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]$, les autres positions étant instables.

La courbe donnant θ_e en fonction de ω est représentée ci-dessous (doc. 14) : il y a changement de comportement du système pour $\omega = \omega_0$. Ce phénomène curieux se rencontre dans divers domaines de la physique ; on parle de *brisure de symétrie*.



Doc. 14.

2.2.6. Puissance et énergie cinétique en référentiel non galiléen

2.2.6.1. Théorème de l'énergie cinétique

Dans \mathcal{R} la puissance de la force d'inertie de Coriolis est nulle :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{i_c})_{/\mathcal{R}} = [-2m\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_g} \wedge \vec{v}_r(M)] \cdot \vec{v}_r(M) = 0.$$

Mais, en général, il n'en est pas de même de la puissance de la force d'inertie d'entraînement et par suite :

Le théorème de l'énergie cinétique s'applique dans \mathcal{R} en introduisant le travail de la force d'inertie d'entraînement :

$$\Delta \mathcal{E}_K = \mathcal{T}(\vec{F}) + \mathcal{T}(\vec{F}_{i_e}).$$

Le travail de la force d'inertie de Coriolis \vec{F}_{i_c} est nul dans \mathcal{R} :

$$\mathcal{T}(\vec{F}_{i_c}) = 0.$$

2.2.6.2. Forces d'inertie non conservatives

La force d'inertie de Coriolis fait intervenir la vitesse, mais elle ne travaille pas. La recherche d'une énergie potentielle associée est absurde et sans intérêt.

La force d'inertie d'entraînement travaille, mais il n'est généralement pas possible de lui associer une énergie potentielle. Prenons, par exemple, le cas d'une translation accélérée de \mathcal{R} par rapport à \mathcal{R}_g , avec $\vec{a} = a_0 \cos(\Omega t) \vec{e}_x$.

Le travail élémentaire, dans \mathcal{R} , de la force d'inertie $\vec{F}_{i_e} = -m\vec{a}_e(M) = -m\vec{a}$ est alors :

$$\delta \mathcal{T}_{i_e} = \vec{F}_{i_e} \cdot d\vec{r} = -ma_0 \cos \Omega t dx = -d(ma_0 x \cos \Omega t) = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}(x, t) \cdot dx$$

où la fonction $\mathcal{E}(x, t) = ma_0 x \cos \Omega t$ est homogène à une énergie, mais dépend explicitement du temps : la force d'inertie d'entraînement n'est pas conservative, puisque, dans ce cas, son travail dépend de la loi horaire associée au déplacement effectué.

La force d'inertie d'entraînement travaille, mais n'est en général pas conservative.

Dans le cas précédent, si $\Omega = 0$, donc si l'accélération \vec{a} est constante, la force d'inertie d'entraînement devient conservative puisqu'il est alors possible de lui associer la fonction énergie potentielle : $\mathcal{E}_p(x) = ma_0 x$.

Il existe donc des cas où la force d'inertie d'entraînement est malgré tout conservative...

2.2.6.3. Référentiel \mathcal{R} en rotation uniforme autour d'un axe fixe de \mathcal{R}_g

Notons (Oz) cet axe de rotation, et $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_g} = \omega \vec{e}_z$, supposée constante, la vitesse de rotation.

Nous avons alors :

$$\vec{F}_{i_e} = m\omega^2 \vec{HM} = m r \omega^2 \vec{e}_r$$

en utilisant les coordonnées cylindriques d'axe (Oz) .

Le travail, dans \mathcal{R} , de la force d'inertie d'entraînement :

$$\delta \mathcal{T}_{i_e} = \vec{F}_{i_e} \cdot d\vec{r} = (mr\omega^2 \vec{e}_r) \cdot (dr\vec{e}_r + r d\theta \cdot \vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z)$$

se met alors sous la forme :

$$\delta \mathcal{T}_{i_e} = mr\omega^2 dr = -d\left(-\frac{1}{2}mr^2\omega^2\right)$$

de sorte qu'il est possible, dans ce cas, de définir une énergie potentielle associée à l'inertie d'entraînement :

Dans un référentiel \mathcal{R} tournant à vitesse angulaire constante $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_g} = \omega \vec{e}_z$ autour de l'axe (Oz) fixe dans \mathcal{R}_g , la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{i_e} = mr\omega^2 \vec{e}_r$ dérive de l'énergie potentielle : $\mathcal{E}_{P_{i_e}} = -\frac{1}{2}mr^2\omega^2$ (coordonnées cylindriques d'axe (Oz)).

Appliquons cette propriété pour étudier un mouvement à un degré de liberté.

Reprenons l'exemple de l'Application 7. Les notations étant identiques, retrouvons les positions d'équilibre relatif de la perle sur le cercle et discutons leur stabilité.

Dans \mathcal{R} la force de contact \vec{R} et la force d'inertie de Coriolis ne travaillent pas. Les autres forces, poids et force d'inertie d'entraînement, admettent les énergies potentielles respectives :

$$\mathcal{E}_{P_p} = -mgR \cos \theta \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{P_{ie}} = -\frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2 \theta$$

avec des constantes choisies nulles, soit au total :

$$\mathcal{E}_P = -mgR \cos \theta - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2 \theta.$$

Pour ce système en évolution conservative, l'énergie mécanique se conserve et nous retrouvons aisément l'équation du mouvement en θ en dérivant par rapport au temps : $\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P$, avec $\mathcal{E}_{K/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_K = \frac{1}{2}mR^2 \dot{\theta}^2$.

Pour rechercher les positions d'équilibre et discuter de leur stabilité, il suffit d'étudier les *extrema* de l'énergie potentielle. En posant $\omega_0^2 = \frac{g}{R}$, nous obtenons :

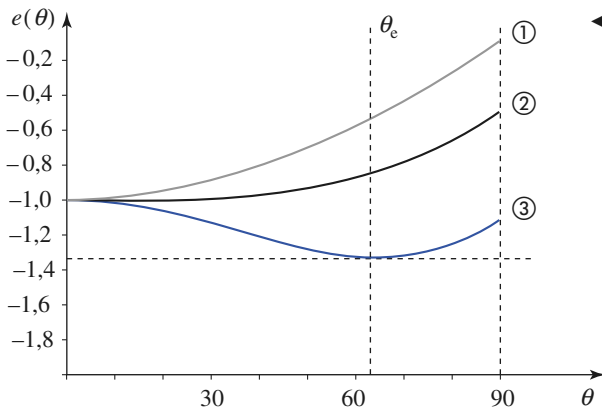
$$\mathcal{E}_P(\theta) = -mgR \left[\cos \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \sin^2 \theta \right].$$

Le problème cherché ayant déjà été résolu par ailleurs, contentons-nous d'une vérification graphique de la question : il est très simple de représenter la valeur réduite $e(\theta) = -(\cos(\theta) + \alpha \sin^2(\theta))$ avec sa machine à calculer (opération vivement conseillée !). Nous obtiendrons des courbes ayant les allures suivantes (*doc.* 15) :

Ces résultats sont conformes à notre attente :

- pour $\omega < \omega_0$ ($\alpha < \frac{1}{2}$), la position $\theta = \theta_1 = 0$ est stable ;
- pour $\omega > \omega_0$ ($\alpha > \frac{1}{2}$), cette position d'équilibre devient instable, et c'est

$\theta_e = \theta_3 = \arccos\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$ (ou bien $\theta_e = \theta_4 = -\theta_3$) qui est position d'équilibre stable.



◀ **Doc. 15.** Étude graphique de l'énergie potentielle réduite :

$$e(\theta) = -(\cos \theta + \alpha \sin^2 \theta), \text{ avec :}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \text{ et } \omega_0^2 = \frac{g}{R}.$$

① $\omega < \omega_0$ et $\alpha < \frac{1}{2}$.

② $\omega = \omega_0$ et $\alpha = \frac{1}{2}$.

③ $\omega > \omega_0$ et $\alpha > \frac{1}{2}$, le minimum est en :

$$\theta_e = \arccos \left[\left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right].$$

Terminons cette étude par une question. Peut-on appliquer simplement le théorème de l'énergie cinétique au point matériel dans \mathcal{R}_T ?

Si vous obtenez, en traduisant par exemple la conservation de l'énergie mécanique dans \mathcal{R}_T :

$$\frac{1}{2} m R^2 \left[\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \omega^2 \right] - m g R \cos(\theta) = \text{cte},$$

vous vous êtes trompés ! Cherchons l'erreur...

Vous avez tout simplement traduit que la force de contact sur le point matériel ne travaille pas dans \mathcal{R}_T , et là, c'est faux, puisque \vec{N} a une composante N_x opposée à \vec{F}_{i_e} et donc que $\vec{N} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T}$ est non nulle. En poursuivant vous pourrez retrouver l'équation correcte.

Il n'y a pas contradiction avec l'absence de frottements : c'est la puissance totale des forces de contact (prenant en compte la force que le point matériel exerce sur le cercle) qui doit être nulle.

CQFR

● CHANGEMENTS DE RÉFÉRENTIELS

• Le mouvement relatif de deux référentiels \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 est la superposition :

- d'une rotation à vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}$ appelé vecteur rotation d'entraînement de \mathcal{R}_2 par rapport à \mathcal{R}_1 ;
- d'une translation caractérisée, par exemple, par $\vec{v}(O_2)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1}$, où O_1 et O_2 sont des points fixes de \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 respectivement.

• Les évolutions d'un vecteur $\vec{U}(t)$ dans deux référentiels \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 sont liées par la relation de dérivation composée :

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{U}(t).$$

• Le mouvement de rotation relative de deux référentiels peut être décomposé éventuellement en un ensemble de rotations « élémentaires » grâce à la loi de composition des rotations :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_1} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}.$$

• La vitesse absolue d'un point mobile M , dans le référentiel \mathcal{R}_1 , peut se décomposer en la norme de sa vitesse relative, vitesse du point M dans le référentiel \mathcal{R}_2 , et de sa vitesse d'entraînement :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{v}_e(M).$$

La vitesse d'entraînement est la vitesse, dans \mathcal{R}_1 , du point fixe de \mathcal{R}_2 coïncidant avec M à l'instant t .

• L'accélération absolue $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1}$ est la somme de l'accélération relative $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_2}$, de l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e(M)$ ou accélération absolue du point coïncident, et de l'accélération de Coriolis :

$$\vec{a}_C(M) = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2} :$$

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_2} + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_C(M).$$

• Lorsque \mathcal{R}_2 est en translation par rapport à \mathcal{R}_1 , les champs de vitesse d'entraînement et d'accélération d'entraînement sont uniformes : $\vec{v}_e(M) = \vec{v}_e(O_2)_{/\mathcal{R}_1}$ et $\vec{a}_e(M) = \vec{a}_e(O_2)_{/\mathcal{R}_1}$, et l'accélération de Coriolis est nulle :

$$\vec{a}_C(M) = \vec{0}.$$

• Lorsque \mathcal{R}_2 est en rotation autour d'un axe Δ fixe de \mathcal{R}_1 , l'accélération d'entraînement du point M (de projection H sur (Δ)) est :

$$\vec{a}_e(M) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{HM} - \omega^2 \overrightarrow{HM}.$$

Si la rotation est uniforme, l'accélération d'entraînement est centripète :

$$\vec{a}_e(M) = -\omega^2 \overrightarrow{HM}.$$

CQFR

● MÉCANIQUE EN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN

• Un référentiel \mathcal{R}_g est galiléen si l'application de la relation fondamentale de la dynamique $\vec{F} = m\vec{a}_{/g}$ à un point matériel de masse m permet de prévoir une évolution en accord avec l'expérience. Dans un référentiel galiléen, un mobile isolé garde une vitesse constante.

L'ensemble des référentiels galiléens est constitué par tous les référentiels en translation rectiligne et uniforme par rapport à l'un d'entre eux.

• Dans un référentiel \mathcal{R} en mouvement accéléré par rapport à un référentiel galiléen, il faut introduire les forces d'inertie pour traduire correctement la relation fondamentale de la dynamique :

$$m\vec{a}(M)_{/R} = \vec{F} + \vec{F}_{i_e} + \vec{F}_{i_c}.$$

- $\vec{F}_{i_e} = -m\vec{a}_e(M)$ est la force d'inertie d'entraînement.
- $\vec{F}_{i_c} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$ est la force d'inertie de Coriolis qui n'existe que s'il y a mouvement relatif dans \mathcal{R} , et si \mathcal{R} est en rotation par rapport à \mathcal{R}_g .

Les forces d'inertie ne traduisent pas une interaction, mais le caractère non galiléen du référentiel \mathcal{R} . Les effets de ces « pseudo-forces » sont cependant bien réels dans le référentiel non galiléen.

• Lorsque le référentiel \mathcal{R} est en translation par rapport à \mathcal{R}_g , les forces d'inertie se réduisent à la seule force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{i_e} = -m\vec{a}_e$, où l'accélération d'entraînement est indépendante de la position du point M .

• Lorsque le référentiel \mathcal{R} est en rotation par rapport à un axe fixe de \mathcal{R}_g , il faut tenir compte des forces d'inertie.

Si la rotation est uniforme à vitesse $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ constante :

- la force d'inertie d'entraînement est centrifuge : $\vec{F}_{i_e} = +m\omega^2\vec{HM}$;
- la force d'inertie de Coriolis n'est pas nulle en général.
- Pour appliquer le théorème du moment cinétique en référentiel non galiléen, il faut faire intervenir le moment des forces d'inertie.
- Le théorème de l'énergie cinétique s'applique en introduisant le travail de la force d'inertie d'entraînement : $\Delta\mathcal{E}_K = \mathcal{T}(\vec{F}) + \mathcal{T}(\vec{F}_{i_e})$, le travail de la force d'inertie de Coriolis étant nul.

La force d'inertie d'entraînement travaille, mais n'est pas en général conservative.

Dans un référentiel \mathcal{R} tournant à vitesse de rotation constante autour d'un axe fixe de \mathcal{R}_g , la force d'inertie $\vec{F}_{i_e} = m\omega^2\vec{HM} = mr\omega^2\vec{e}_r$ dérive de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{P_{ie}} = -\frac{1}{2}mr^2\omega^2$ (coordonnées cylindriques d'axe (Oz) = axe de rotation).

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Comment peut-on décomposer, en général, le mouvement relatif de deux référentiels ?
- ✓ Qu'est-ce que la composition des rotations pour ces mouvements relatifs ?
- ✓ Comment peut-on caractériser un mouvement de translation relative de deux référentiels ?
- ✓ Rappeler la loi de dérivation composée d'un vecteur.
- ✓ Définir le point coïncident.
- ✓ Que sont les vitesses et accélérations d'entraînement ?
- ✓ Quelle est l'expression de l'accélération de Coriolis ?
- ✓ Caractériser les référentiels galiléens.
- ✓ Définir les forces d'inertie, en référentiel non galiléen.
- ✓ Faut-il tenir compte de toutes ces forces pour appliquer la relation fondamentale de la dynamique, le théorème du moment cinétique ou le théorème de l'énergie cinétique ?
- ✓ Quelles sont celles qui travaillent ? peuvent-elles dériver d'une énergie potentielle ?

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. Le mouvement relatif de deux référentiels nécessite *a priori* la donnée de n variables.

- a. $n = 1$ b. $n = 2$ c. $n = 3$
 d. $n = 4$ e. $n = 5$ f. $n = 6$.

2. Si \mathcal{R} tourne autour d'un axe fixe de \mathcal{R}_g , le mouvement relatif est décrit par n variables :

- a. $n = 1$ b. $n = 2$ c. $n = 3$ d. $n = 4$.

3. L'accélération d'entraînement est nulle lorsque :

- a. \mathcal{R} est en translation par rapport à \mathcal{R}_g .
 b. en translation uniforme.
 c. en translation rectiligne uniforme.
 d. en rotation uniforme.

4. L'accélération de Coriolis est nulle lorsque :

- a. \mathcal{R} est en translation par rapport à \mathcal{R}_g .
 b. en translation uniforme.
 c. en translation rectiligne uniforme.
 d. en rotation uniforme.

5. La force d'inertie d'entraînement est conservative lorsque :

- a. \mathcal{R} est en translation par rapport à \mathcal{R}_g .
 b. en translation à vitesse constante.
 c. en translation à accélération constante.
 d. en rotation autour d'un axe fixe de \mathcal{R}_g .

► Solution, page 199.

Exercice commenté

Le champion de tir

ÉNONCÉ

Afin d'accroître la difficulté de l'opération, un champion de tir réputé a placé sa cible sur le bord d'un manège de rayon R . Il s'est installé au point diamétralement opposé et la plate-forme tourne à vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical du manège. Sachant que la balle sort du fusil avec une vitesse relative v_0 connue, sous quel angle α par rapport au diamètre reliant le tireur et sa cible, celui-ci doit-il viser pour atteindre son but ?

On négligera les effets de frottement de l'air et on supposera que v_0 est très grand devant $R\omega$.

On négligera les effets de la pesanteur en précisant la validité de cette approximation.

Envisager deux méthodes de résolution, en utilisant soit le référentiel \mathcal{R} du manège, soit le référentiel terrestre \mathcal{R}_T .

Proposer une application numérique raisonnable ; v_0 est typiquement de l'ordre de $500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

CONSEILS

L'énoncé ne précise pas de repère et ne fournit pas de figure.

Pour chaque référentiel d'étude, il faut commencer par tracer un schéma sur lequel on précise un repère constitué d'axes fixes, le point de départ, le point d'arrivée et éventuellement l'allure (qualitative) de la trajectoire.

La pesanteur peut être négligée si, dans l'équation obtenue, le terme qui lui est lié est négligeable devant les autres.

L'équation simplifiée du mouvement peut se traiter de deux façons.

• On peut résoudre le système de deux équations différentielles en $x(t)$ et $y(t)$.

SOLUTION

■ Résolution dans \mathcal{R}

Soit $(O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ un repère lié au manège. Le point O est choisi sur l'axe de rotation, à hauteur du fusil. L'équation du mouvement dans \mathcal{R} est déduite de :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + m\omega^2\vec{OM} - 2m\omega\vec{e}_z \wedge \vec{v},$$

comme $v \gg R\omega$, $2m\omega v \gg m\omega^2 OM$.

La force d'inertie d'entraînement est négligeable devant celle de Coriolis.

Le terme de pesanteur est également négligeable si : $g \ll \omega v$.

L'équation différentielle se simplifie en : $\frac{d\vec{v}}{dt} = -2\omega\vec{e}_z \wedge \vec{v}$.

• Première méthode

Nous partons du système d'équations différentielles :

$$\frac{dv_x}{dt} = 2\omega v_y \quad \text{et} \quad \frac{dv_y}{dt} = -2\omega v_x$$

d'où, en dérivant l'une par rapport au temps :

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = -4\omega^2 v_x \quad \text{et} \quad \frac{d^2v_y}{dt^2} = -4\omega^2 v_y.$$

Les conditions initiales sont $v_x(0) = v_0 \cos \alpha$ et $v_y(0) = v_0 \sin \alpha$.

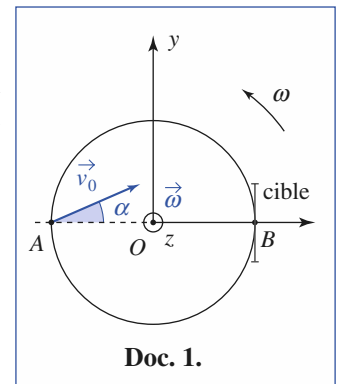
Les solutions compatibles entre elles et avec les conditions initiales sont :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos(2\omega t - \alpha) \quad \text{et} \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -v_0 \sin(2\omega t - \alpha).$$

Les valeurs initiales de x et y sont : $x(0) = -R$ et $y(0) = 0$.

Nous pouvons en déduire $x(t)$ et $y(t)$:

$$x(t) = \frac{v_0 \sin \alpha}{2\omega} - R + \frac{v_0}{2\omega} \sin(2\omega t - \alpha) \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{v_0}{2\omega} \cos \alpha - \frac{v_0}{2\omega} \cos(2\omega t - \alpha).$$



Exercice commenté

• On peut également conserver l'équation sous forme vectorielle et déduire directement que la trajectoire est un cercle dont on peut déterminer le rayon. Cette seconde méthode, plus élaborée, est plus simple au niveau des calculs. Se souvenir de la liaison entre vitesse et accélération normale.

Pour l'analyse dans \mathcal{R}_T , il faut voir que l'hypothèse $v \gg \omega R$ implique des angles de rotation très faibles pendant la trajectoire.

Quelle approximation cela permet-il ?

Quelle est la direction de la trajectoire dans \mathcal{R}_T ?

Il faut tenir compte de la vitesse d'entraînement au point de lancement.

Le mobile passe en $B(+R, 0)$ à la date τ , soit :

$$2R = \frac{v_0}{2\omega} [\sin \alpha + \sin(2\omega\tau - \alpha)] \quad \text{et} \quad 0 = \frac{v_0}{2\omega} [\cos \alpha - \cos(2\omega\tau - \alpha)].$$

Nous en déduisons : $\sin \alpha = \frac{2\omega R}{v_0}$, soit si $\omega R \ll v_0$: $\alpha = \frac{2\omega R}{v_0}$.

• Seconde méthode

Si la pesanteur est négligée, la trajectoire est dans le plan $z = 0$.

$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$. L'accélération constante est normale à la trajectoire et la vitesse

(scalaire) reste constante.

• Le mouvement est donc circulaire uniforme, de rayon R , avec :

$$\frac{v^2}{R} = a = 2\omega v.$$

La trajectoire est donc un cercle de rayon :

$$R = \frac{v}{2\omega}.$$

• L'analyse géométrique de la figure montre que :

$$2R = AB = 2R \sin \alpha, \quad \text{soit} \quad \sin \alpha \approx \alpha \approx \frac{2\omega R}{v}.$$

■ Résolution dans \mathcal{R}_T

Soit $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ un repère lié à \mathcal{R}_T : $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{0}$.

Le mouvement dans \mathcal{R}_T est rectiligne et uniforme.

La vitesse dans \mathcal{R}_T est :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{v}_{0/\mathcal{R}} - R\omega \vec{e}_y.$$

Elle fait donc avec l'axe (OX) un angle θ tel que :

$$\tan \theta = \frac{v_0 \sin \alpha - R\omega}{v_0 \cos \alpha}$$

soit, à l'ordre un : $\theta = \alpha - \frac{R\omega}{v_0}$.

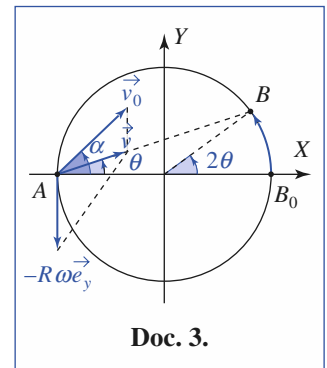
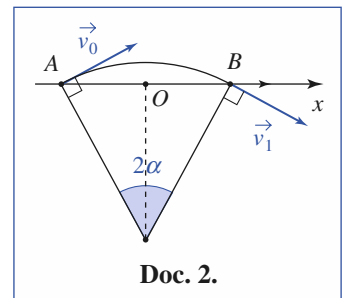
Le temps mis par la balle pour atteindre B , initialement en B_0 est :

$$\tau = \frac{AB}{v_0} = \frac{2R \cos \theta}{v_0} \approx \frac{2R}{v_0}.$$

Pendant ce temps, la cible a tourné d'un angle 2θ (doc. 3.), soit : $2\theta = \omega\tau$.

Nous en déduisons : $\frac{2R}{v_0} = \frac{2\theta}{\omega} = \frac{2\alpha}{\omega} - \frac{2R}{v_0}$, soit $\alpha = \frac{2R\omega}{v_0}$.

Avec $R = 4\text{ m}$, $\omega = \frac{2\pi}{10} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $v_0 = 500$, on a : $\alpha \approx 10^{-2} \text{ rad}$, soit environ $0,6^\circ$. Remarquons que : $\frac{g}{\omega v} \approx 0,03 \ll 1$.



Exercices

1 Accélération en coordonnées cylindriques

1) Quelle est l'accélération d'un point, exprimée dans la base locale des coordonnées cylindriques ?

2) Quel est le vecteur rotation du repère $(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ par rapport au repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$?

En déduire une autre méthode de calcul de l'accélération précédente, utilisant les changements de référentiel.

2 Traversée d'une rivière

Un nageur, dont la vitesse par rapport à l'eau est v_1 , veut traverser une rivière de largeur ℓ . On suppose que le courant a une vitesse v_0 uniforme. Déterminer le temps de traversée τ si :

- il nage perpendiculairement aux berges, en se laissant déporter par le courant ;
- il suit une trajectoire perpendiculaire aux berges.

3 Projectiles sur une cible mobile

Des projectiles sont envoyés, avec une vitesse $\vec{v} = v \vec{e}_x$ constante, sur une cible mobile, qui subit une translation uniforme de vitesse : $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$.

Si T est la durée qui sépare l'émission de deux projectiles, déterminer la durée T' qui sépare leur réception sur la cible.

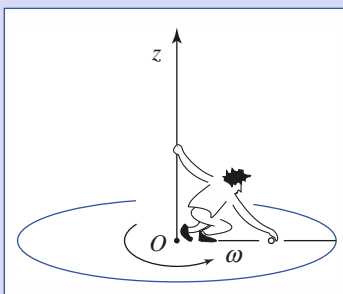
4 Rondelle sur demi-sphère accélérée

Un joueur a placé son palet de hockey sur glace (rondelle en canadien) au sommet d'une demi-sphère métallique de rayon R , fixée à une plate-forme mobile.

La plate-forme tractée se mettant en mouvement avec une accélération horizontale a_0 constante, qu'advient-il au palet ? On négligera les frottements, et on tracera la courbe donnant l'angle de rupture du contact en fonction du rapport $\frac{a_0}{g}$.

5 Bille posée sur un plateau

Un expérimentateur se tenant sur un plateau tournant dépose, sans vitesse relative dans le référentiel tournant, une bille glissant sans frottement sur le plateau.



La bille étant posée à distance r_0 , on cherche à étudier son mouvement ultérieur.

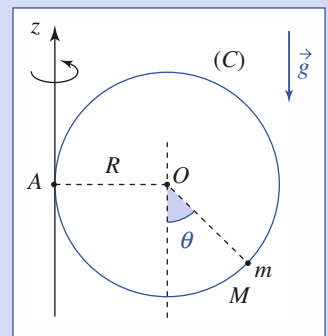
Le plateau tourne à vitesse angulaire constante autour de l'axe vertical (Oz) .

1) Étudier le mouvement dans le référentiel du laboratoire, galiléen, noté $\mathcal{R}_0(O; X, Y, z)$ (l'axe (OX) est choisi de façon à avoir $X = r_0$ et $Y = 0$ à l'instant initial).

2) Étudier le mouvement de la bille dans le référentiel tournant $\mathcal{R}(O; x, y, z)$ lié au plateau. On pourra noter $u = x + iy$, affixe du point M dans le plan complexe.

6 Point matériel sur cercle en rotation

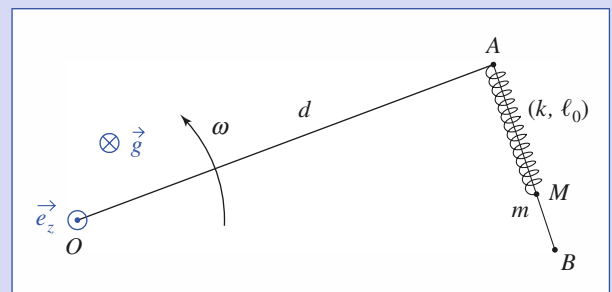
Une perle est mobile sans frottements sur une circonférence matérielle (C) qui tourne à vitesse angulaire ω constante autour d'un axe vertical (Az) tangent en A au cercle.



1) Déterminer la ou les position(s) d'équilibre relatif de la perle, qui ne peut s'échapper du cercle. (On utilisera la méthode qui paraît la plus efficace.)

2) Étudier les petits mouvements autour de la position d'équilibre stable. On calculera la période associée dans le cas où $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $R = 0,1 \text{ m}$ et $\omega = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

7 Un tachymètre particulier



Le « L » métallique OAB tourne à vitesse angulaire constante ω dans le plan horizontal, autour de l'axe vertical (Oz) . Un ressort de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0 est fixé en A au L , et à son extrémité est attaché un anneau de masse m , qui coulisse sans frottements sur la partie rectiligne AB . On désigne par ℓ la longueur du ressort.

Étudier la loi donnant ℓ en fonction de ω .

L'appareil peut-il servir de tachymètre ?

Qu'advient-il si on veut l'utiliser avec un rotor à axe horizontal ?

Exercices

8 Point matériel et satellite

Un astronaute est passager d'un vaisseau spatial en mouvement circulaire de rayon r autour d'un astre A de rayon $R < r$. Afin de mesurer la vitesse angulaire ω de son vaisseau autour de A , il étudie les oscillations d'un système {masse-ressort} (masse m , ressort de raideur k) le long d'un axe (Gx) pointant vers l'astre, le point de fixation G du ressort étant confondu avec le centre d'inertie du vaisseau spatial, et un guidage sans frottements assurant le mouvement rectiligne de la masse m le long de l'axe (Gx).

On pourra poser $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $\mathcal{G}_0 = \frac{GM_A}{r^2}$, M_A désignant la masse de l'astre, à symétrie sphérique.

Montrer que la mesure de la période des oscillations de la masse m permet dans son principe le calcul de la vitesse angulaire du satellite autour de A .
La méthode est-elle performante ?

9 Oscillations forcées d'un pendule simple

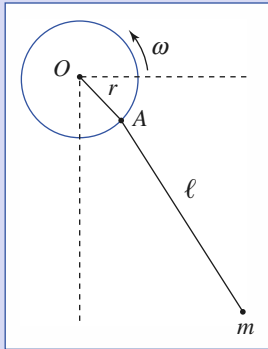
On a noué l'extrémité d'un fil, auquel est fixé un petit anneau de masse m , à un crochet qui tourne autour d'un axe horizontal à la vitesse angulaire constante ω , la distance du crochet à l'axe étant r , et la longueur du fil ℓ .

On supposera que $\frac{r\omega^2}{g}$ reste très inférieur à l'unité.

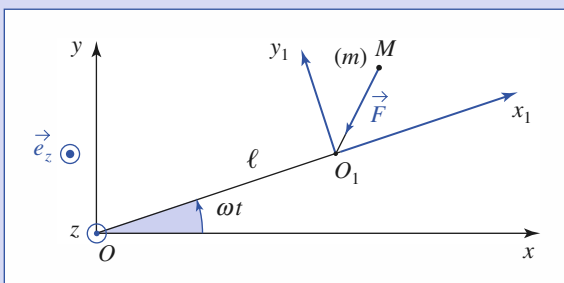
Montrer que ce dispositif constitue un pendule entretenu dont on donnera l'équation du mouvement.

Qu'advient-il si on augmentait la vitesse angulaire du moteur entraînant le crochet ?

Nous nous limiterons aux mouvements de faible amplitude.



10 Mouvement d'un point matériel dans des référentiels non galiléens



Un point matériel M de masse m est mobile sans frottements dans le plan horizontal (xOy). Il est soumis à la force totale $\vec{F} = -k\vec{O_1M}$, avec $k > 0$, le point O_1 étant l'extrémité d'une tige de longueur ℓ qui tourne à la vitesse angulaire constante ω autour de l'axe (Oz) vertical ascendant.

1) Concevoir un dispositif expérimental permettant la réalisation d'une telle situation.

2) On désigne par \mathcal{R}_1 le référentiel tournant ($O_1; x_1, y_1, z$) lié à la tige. Déterminer la position d'équilibre relatif M_0 du point dans \mathcal{R}_1 .

On pourra poser : $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ et on supposera que $\omega_0 > \omega$.

3) Soit \mathcal{R}_2 le référentiel lié au repère ($M_0; x, y, z$) dont l'origine est en M_0 et dont les axes sont respectivement parallèles à ceux de ($O; x, y, z$). Quelle est, pour des conditions initiales quelconques, la nature de la trajectoire du point matériel dans un tel référentiel ?

11 Point matériel sur un plateau tournant

Un plateau de forme circulaire, de centre O et de rayon L , a un mouvement de rotation uniforme, de vitesse angulaire ω , autour d'un axe (Oz) perpendiculaire au plan du plateau, relativement à un référentiel terrestre galiléen.

Les axes (Ox) et (Oy) sont horizontaux et liés au plateau. Un point matériel M , de masse m , mobile sans frottements sur le plateau, est attaché aux extrémités de quatre ressorts identiques AM, BM, CM et DM , les points d'attache A, B, C et D étant situés sur la circonférence de rayon L et liés au plateau.

Les ressorts sont supposés de masse négligeable, à spires non jointives et de raideur k chacun.

Lorsque M est en O , les ressorts ont leur longueur au repos, c'est-à-dire L .

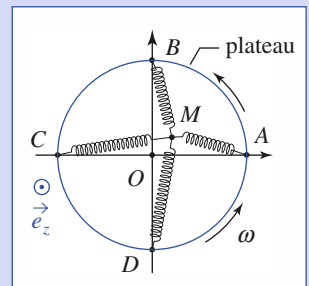
On se propose d'étudier le mouvement du point matériel M relativement au référentiel $\mathcal{R}(O; x, y, z)$ lié au plateau.

1) Le point $M(x, y, 0)$ étant voisin de O , montrer que la force totale exercée par les ressorts sur ce point est approximativement égale à :

$$\vec{F}_{\text{ressorts}} = -2kxe_x - 2kye_y.$$

2) Écrire, dans le cadre de cette approximation, les équations du mouvement de M dans le repère \mathcal{R} .

On posera $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$.



3) À l'instant $t = 0$, $x = x_0$ et $y = 0$; en outre M est au repos par rapport au plateau.

Donner les lois horaires $x(t)$ et $y(t)$. Conclure quant à la nature du mouvement et à la stabilité.

4) Montrer que le point matériel est en évolution conservative dans \mathcal{R} et formuler l'énergie potentielle associée. Que dire de la position 0 ($r = OM = 0$) concernant cette énergie potentielle, selon les valeurs comparées de ω et de ω_0 ?

Que conclure de ce résultat ?

5) On suppose maintenant que les ressorts AM et CM sont identiques et de raideur k_1 , les ressorts BM et DM étant également identiques, mais de raideur k_2 .

On suppose $k_1 < k_2$ et on pose :

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{m} \quad \text{et} \quad \omega_2^2 = \frac{k_2}{m}.$$

On étudie le mouvement de M dans ces conditions. Les équations en x et y du mouvement ont des solutions particulières de la forme : $x = X e^{pt}$ et $y = Y e^{pt}$ où p est en général un nombre complexe.

À quelle équation satisfait p ? Sachant que la solution générale est obtenue par combinaison linéaire de deux solutions du type précédent (dans le cas d'existence de deux valeurs p_1 et p_2 différentes) montrer que le point O est position d'équilibre relatif stable si $\omega < \omega_1$ ou $\omega > \omega_2$. Qu'advient-il dans le cas contraire ?

12 Chute libre sur un manège

Un enfant est dans un manège tournant à vitesse angulaire ω constante, autour de l'axe vertical (Oz). Il s'est assis sur un siège surélevé, distant de r_0 de l'axe de rotation, et placé à une hauteur h au-dessus du plancher. Il laisse échapper une bille de sa poche.

1) Comment décrit-il alors la trajectoire de sa bille ?

2) En quel point heurte-t-elle le plancher ?

3) Sa mère, immobile hors du manège, a vu la chute. Est-elle d'accord avec son fils ?

Données : $\omega = 2\pi N$, avec $N = \frac{1}{8}$ Hz ; $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $h = 1,50 \text{ m}$; $r_0 = 5 \text{ m}$.

Corrigés

Solution du tac au tac, page 194.

1. Vrai : f Faux : a, b, c, d, e
2. Vrai : a Faux : b, c, d
3. Vrai : c Faux : a, b, d
4. Vrai : a, b, c Faux : d
5. Vrai : b, c Faux : a, d

1

1) En coordonnées cylindriques :

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z; \quad \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

2) $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e}_z$.

Nous pouvons alors utiliser : $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_C$.

Dans le repère en rotation à vitesse $\vec{\Omega}$ autour de (Oz), les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ sont fixes, de sorte que :

$$\vec{v}_r = \dot{r}\vec{e}_r + \dot{z}\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{a}_r = \ddot{r}\vec{e}_r + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

Le point coïncident a , dans le référentiel lié à ($O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$), un mouvement circulaire de rayon r et d'axe (Oz) :

$$\vec{v}_c = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta, \quad \vec{a}_c = r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r.$$

L'accélération de Coriolis vaut :

$$\vec{a}_C = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r = 2\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

Sommons les trois accélérations, relative, d'entraînement et de Coriolis, nous retrouvons :

$$\vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_C = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

2

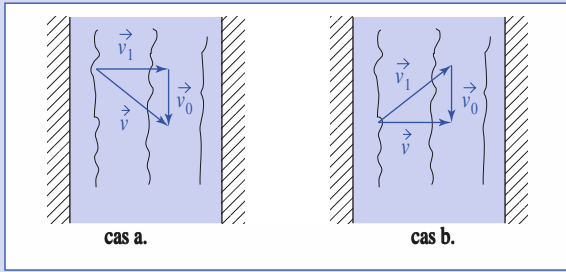
a) v_1 est la composante de \vec{v} perpendiculaire aux berges.

Donc $\tau_1 = \frac{\ell}{v_1}$.

b) $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_0$, \vec{v} étant perpendiculaire aux berges, donc : $v^2 = v_1^2 - v_0^2$ et

$$\tau_2 = \frac{\ell}{\sqrt{v_1^2 - v_0^2}}.$$

Corrigés



3 Dans le référentiel de la cible, la vitesse des projectiles est :

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0.$$

La distance, indépendante du référentiel, entre deux projectiles est :

$$d = vT = v'T'$$

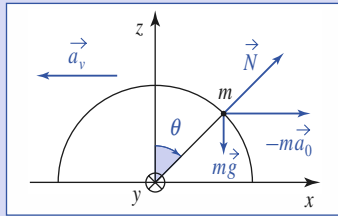
donc :
$$T' = T \frac{v}{v - v_0}.$$

4 Dans le référentiel $\mathcal{R}(O; x, y, z)$ non galiléen, le principe fondamental nous donne :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} - m\vec{a}_0,$$

soit, par projections en posant

$$\vec{a}_0 = -a_0 \vec{e}_x :$$



$$mR\ddot{\theta} = ma_0 \cos \theta + mg \sin \theta, \quad (1)$$

$$-mR\dot{\theta}^2 = ma_0 \sin \theta - mg \cos \theta + N. \quad (2)$$

Le théorème de la puissance cinétique appliqué dans ce même référentiel donne :

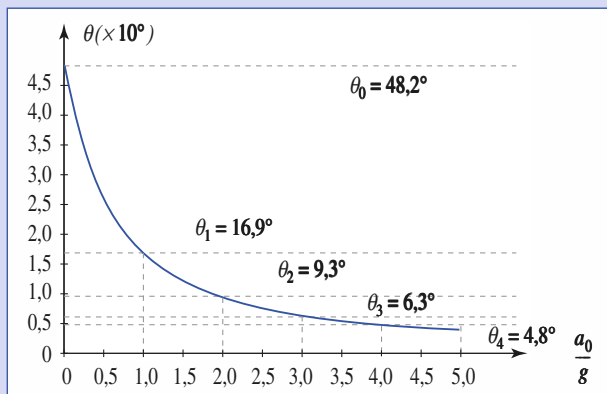
$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}^2 + mgR \cos \theta \right] = -m\vec{a}_0 \cdot \vec{v} = ma_0 R \cos \theta \frac{d\theta}{dt}. \quad (3)$$

Nous retrouvons l'équation (1).

L'intégration de (3) donne : $R \frac{\dot{\theta}^2}{2} = a_0 \sin \theta + g(1 - \cos \theta)$, soit :

$$N = mg \left[(3 \cos \theta - 2) - 3 \frac{a_0}{g} \sin \theta \right].$$

L'angle de rupture est tel que $\cos \theta - \frac{2}{3} = \frac{3a_0}{g} \sin \theta$.



5 1) Dans \mathcal{R}_0 , en l'absence de frottement, le mouvement de la bille est rectiligne et uniforme, à vitesse :

$$\vec{v}(0) = r_0 \Omega \vec{e}_y,$$

donc : $X = r_0, Y = r_0 \Omega t$.

2) Dans \mathcal{R} , il faut tenir compte des forces d'inertie (le poids est compensé par la réaction du plateau) :

$$\begin{aligned} m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} &= \vec{0} - m\vec{a}_c(M) - m\vec{a}_C(M) \\ &= +m\omega^2 \vec{OM} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

Soit $\ddot{x} = +\omega^2 x + 2\omega \dot{y}$ et $\ddot{y} = +\omega^2 y - 2\omega \dot{x}$, ce qui s'écrit encore :

$$\ddot{u} + 2i\omega \dot{u} - \omega^2 u = 0 \text{ avec } u = x + iy.$$

La solution est $u = (\alpha + \beta t)e^{-i\omega t}$, car $\Delta = 0$.

En introduisant les conditions initiales,

$$u(t=0) = r_0 \text{ et :}$$

$$\dot{u}(t=0) = 0$$

$$u = r_0(1 + i\omega t)e^{-i\omega t} \text{ soit :}$$

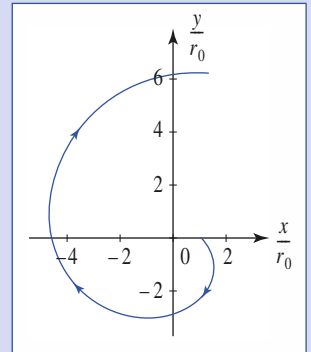
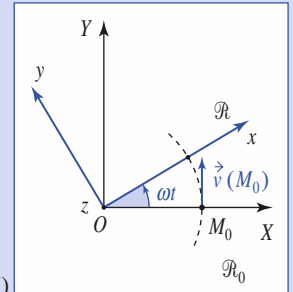
$$x(t) = r_0[\cos \omega t + \omega t \sin \omega t]$$

$$y(t) = r_0[-\sin \omega t + \omega t \cos \omega t].$$

$$\text{Ou encore } r = r_0 \sqrt{1 + \omega^2 t^2}$$

$$\text{et } \theta = -\omega t + \arctan(\omega t).$$

Les lois horaires dans \mathcal{R} et \mathcal{R}_0 sont cohérentes entre elles.



6 1) Raisonnons dans le référentiel $\mathcal{R}(A; x, y, z)$ en rotation à la vitesse ω par rapport à un référentiel fixe.

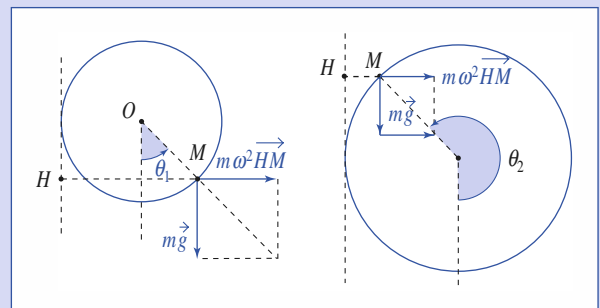
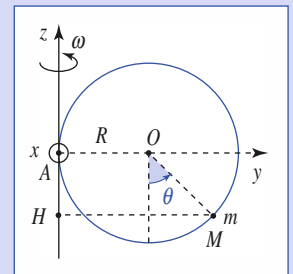
La position d'équilibre est obtenue lorsque $m\vec{g} + m\omega^2 \vec{HM}$ est normal au cercle, soit :

$$\frac{\omega^2(1 + \sin \theta)}{\omega_0^2} = \tan \theta$$

$$\text{(avec } \omega_0^2 = \frac{g}{R} \text{)}.$$

Il existe donc deux positions d'équilibre :

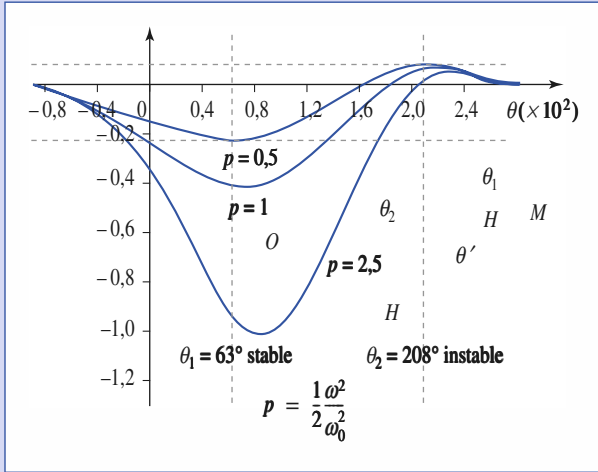
$$\theta_1 (\sin \theta_1 > 0; \tan \theta_1 > 0) \text{ et } \theta_2 (\sin \theta_2 < 0; \tan \theta_2 > 0).$$



θ_1 est stable et θ_2 est instable. En effet, l'énergie potentielle (dont dérive la force de pesanteur et d'inertie d'entraînement) est telle que :

$$\mathcal{E}_P = -mgR \left(\cos \theta + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} (1 + \sin \theta)^2 \right).$$

On observe un minimum pour $\theta_1 \approx 63^\circ$ (stable) et un maximum pour $\theta_2 \approx 208^\circ$ (instable).



2) Le théorème de l'énergie cinétique dans \mathcal{R} donne :

$$\frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}^2 + \mathcal{E}_P = \mathcal{E}_M(\text{cte}), \text{ soit en dérivant :}$$

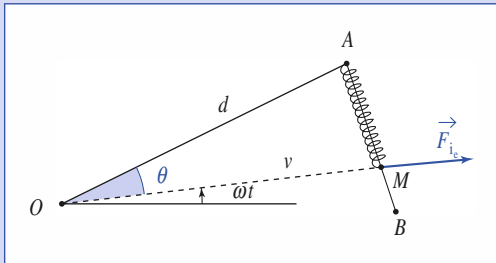
$$mR^2 \ddot{\theta} + mgR \left(\sin \theta - \frac{\omega^2}{2} \cos \theta (1 + \sin \theta) \right) = 0.$$

En posant $\theta = \theta_1 + \alpha$ ($\alpha \ll 1$) et en utilisant $f(\theta) = f(\theta_1) + \alpha \left(\frac{df}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_1}$,

$$\text{on obtient : } \ddot{\alpha} + \omega_0^2 \left[\frac{1 + \sin^3 \theta_1}{\cos \theta_1 (1 + \sin \theta_1)} \right] \alpha = 0.$$

A.N. : $T = 0,45 \text{ s}$.

7



Si l'anneau de masse m est en équilibre dans le référentiel mobile au « L », nous avons :

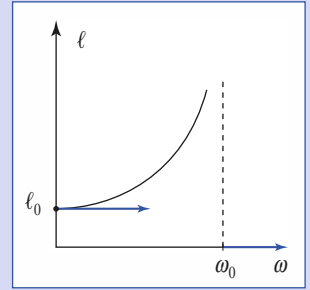
$$\vec{0} = M\vec{g} + \vec{R} + m\omega^2 \vec{OM} - k(\ell - \ell_0) \vec{e}_{AB},$$

soit encore (par projection sur \vec{e}_{AB} et en remarquant que $\vec{OM} \cdot \vec{e}_{AB} = \ell$) :

$$m\omega^2 = k(\ell - \ell_0).$$

En posant $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ nous obtenons :

$$\ell = \frac{\ell_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}.$$



Le système n'est utilisable que si $\omega < \omega_0$.

Cet appareil peut servir de tachymètre et sera d'autant plus précis que $\left(\frac{d\ell}{d\omega} \right)$ est grand, donc que ω est voisin de ω_0 .

La valeur de ℓ trouvée précédemment peut être aussi trouvée en cherchant le minimum de l'énergie potentielle dont dérivent les diverses forces :

$\mathcal{E}_P = \frac{1}{2} k(\ell - \ell_0)^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$ (\mathcal{E}_P dont dérive la force d'inertie d'entraînement et élasticité du ressort).

Si l'axe est horizontal, l'équation devient :

$$m\ddot{\ell} = mg \cos(\omega t + \theta) + m\omega^2 \ell - k(\ell - \ell_0).$$

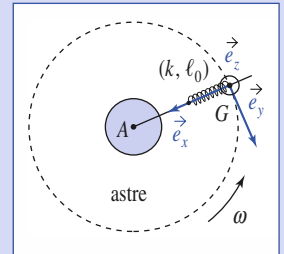
Il n'y a plus de position d'équilibre.

8

La vitesse angulaire de rotation ω du satellite est donnée par :

$$\omega^2 = \frac{\mathcal{G}_0}{r}; \vec{a}_G = -\omega^2 \vec{AG} = \mathcal{G}_0 \vec{e}_x.$$

Dans le référentiel $\mathcal{R}(G; x, y, z)$, la relation fondamentale de la dynamique donne (avec \vec{R} la réaction de l'axe (Gx) sur la masse) :



$$m\vec{a}_{/\mathcal{R}} = m\ddot{x}\vec{e}_x = -k(x - \ell_0)\vec{e}_x + GM_A \frac{m}{(r-x)^2} \vec{e}_x - m\vec{a}_c - m\vec{a}_C + \vec{R}$$

$$\text{avec } \vec{a}_c = -\omega^2 \vec{AM} = -\omega^2 \vec{AG} - \omega^2 \vec{GM} = \vec{a}_G - \omega^2 x \vec{e}_x$$

$$\text{et } \vec{a}_C = +2\omega \vec{e}_z \wedge \dot{x} \vec{e}_x \quad (\vec{a}_C \perp (Gx)).$$

$$\text{Soit, en simplifiant, } \ddot{x} + (\omega_0^2 - 3\omega^2)x = \omega_0^2 \ell_0.$$

$$\text{Si } \omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{3}}, \text{ alors } T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - 3\omega^2}} = T_0 \frac{1}{\left(1 - \frac{3\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{1/2}}.$$

Examinons le cas d'un satellite terrestre :

$$\omega^2 = \frac{\mathcal{G}_0}{r} \approx \frac{10}{6370 \cdot 10^3} \ll \omega_0^2, \text{ soit } T = T_0 \left(1 + \frac{3\omega^2}{2\omega_0^2}\right).$$

La méthode est peu sensible puisque T et T_0 sont très proches.

Corrigés

9

Le référentiel $\mathcal{R}'(A; x', y', z)$ est en translation à vitesse non uniforme par rapport au référentiel $\mathcal{R}(O; x, y, z)$ fixe : il n'est donc pas galiléen. Le mouvement de la masse m dans \mathcal{R}' est solution de l'équation :

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = m \vec{g} + \vec{T} - m \vec{a}(A)_{/\mathcal{R}}$$

avec :

$$\vec{a}(A)_{/\mathcal{R}} = r[\ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2 \vec{e}_r] = -r\omega^2 \vec{e}_r.$$

$$D'où \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = \frac{r}{\ell} \omega^2 \sin(\omega t - \theta).$$

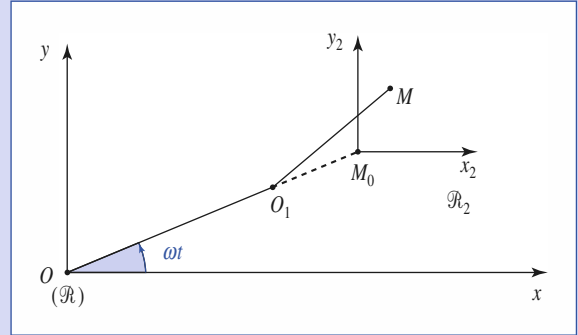
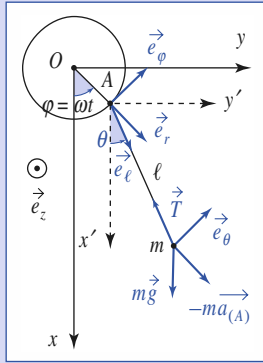
Avec $\theta \ll 1$, nous obtenons :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{r}{\ell} \omega^2 \cos \omega t \right) \theta = \frac{r}{\ell} \omega^2 \sin \omega t.$$

Si $\frac{r\omega^2}{g} \ll 1$, l'équation devient $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = \frac{r}{\ell} \omega^2 \sin \omega t$ dont la solution permanente est :

$$\theta = \frac{r}{\ell} \omega^2 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t, \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{g}{\ell}.$$

Si ω augmente, il y aura résonance pour $\omega = \omega_0$, mais nous sortons du domaine de validité de notre équation différentielle.



11

1) Utilisons l'énergie potentielle des ressorts pour un ressort accroché en $P(x_P, y_P)$:

$$\mathcal{E}_P = \frac{1}{2} k \left([(x_P - x)^2 + (y_P - y)^2]^{\frac{1}{2}} - L \right)^2.$$

Le développement limité à l'ordre deux en x, y est donné par :

$$\mathcal{E}_P = \frac{1}{2} \frac{k}{L^4} (xx_P + yy_P)^2.$$

En prenant les divers points d'attache, on obtient $\mathcal{E}_P = k(x^2 + y^2)$. D'où :

$$\vec{F} = -2k\vec{OM}.$$

2) Le principe fondamental de la dynamique appliqué à M dans $\mathcal{R}(O; x, y)$ donne :

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = -2k\vec{OM} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} + m\vec{\omega}^2 \vec{OM}$$

soit :

$$\ddot{x} + (\omega_0^2 - \omega^2)x - 2\omega\dot{y} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{y} + (\omega_0^2 - \omega^2)y + 2\omega\dot{x} = 0.$$

3) Posant $u = x + iy$ nous avons : $\ddot{u} + 2i\omega\dot{u} + (\omega_0^2 - \omega^2)u = 0$, dont la solution est :

$$u = \frac{\omega + \omega_0}{2\omega_0} x_0 e^{i(\omega_0 - \omega)t} + \frac{\omega_0 + \omega}{2\omega_0} x_0 e^{-i(\omega_0 + \omega)t}$$

$$\text{soit : } \begin{cases} x = \frac{x_0}{2\omega_0} [(\omega_0 + \omega) \cos(\omega_0 - \omega)t + (\omega_0 - \omega) \cos(\omega + \omega_0)t] \\ y = \frac{x_0}{2\omega_0} [(\omega_0 + \omega) \sin(\omega_0 - \omega)t - (\omega_0 - \omega) \sin(\omega + \omega_0)t] \end{cases}$$

$$\text{ou encore } \begin{cases} x = x_0 \left[\cos \omega_0 t \cos \omega t + \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \sin \omega t \right] \\ y = x_0 \left[-\cos \omega_0 t \sin \omega t + \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \cos \omega t \right]. \end{cases}$$

Nous voyons que x et y évoluent dans le domaine :

$$\left[-x_0 \left(1 + \frac{\omega}{\omega_0} \right), x_0 \left(1 + \frac{\omega}{\omega_0} \right) \right], \text{ la solution est donc stable.}$$

$$4) \mathcal{E}_P = k(x^2 + y^2) - \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} m (\omega_0^2 - \omega^2) (x^2 + y^2).$$

Lorsque $\omega_0 > \omega$, \mathcal{E}_P présente un maximum en $x = y = 0$. La stabilité du mouvement à deux dimensions est assurée par la force de Coriolis.

10

1) La modélisation correspond à un pendule simple accroché à un point A décrivant une trajectoire circulaire à ω constante, avec θ faible.

2) Le principe fondamental de la dynamique appliqué à M dans le référentiel \mathcal{R}_1 non galiléen donne :

$$m \vec{a}_{/\mathcal{R}_1} = \vec{0} \\ = -k\vec{O_1M} + \vec{F}_{i_c} + \vec{F}_{i_c},$$

avec $\vec{F}_{i_c} = m\omega^2 \vec{OM}$ et $\vec{F}_{i_c} = 2m\omega \vec{e}_z \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{0}$ à l'équilibre.

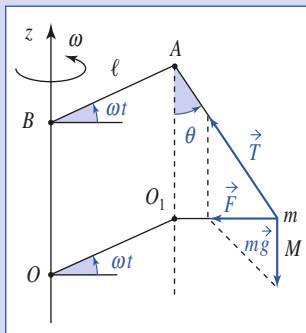
$$D'où : \vec{O_1M}_0 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \ell \vec{e}_{x_1}.$$

3) Le référentiel \mathcal{R}_2 non galiléen est en translation. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à M dans \mathcal{R}_2 donne :

$$m \vec{a}_{/\mathcal{R}_2} = -k\vec{O_1M} + m\omega^2 \vec{OM}_0 = -k\vec{M}_0M,$$

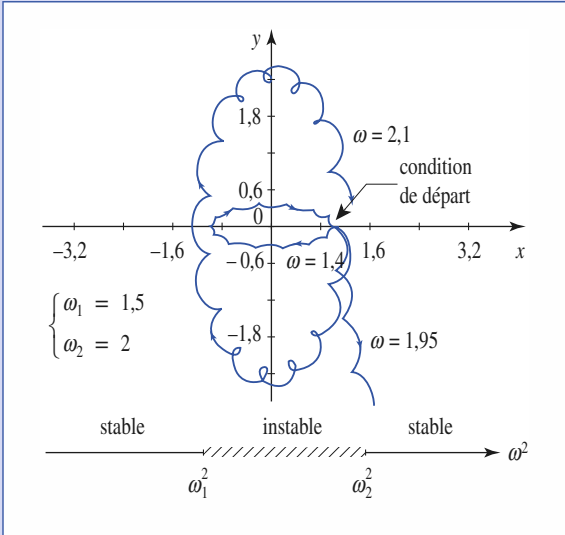
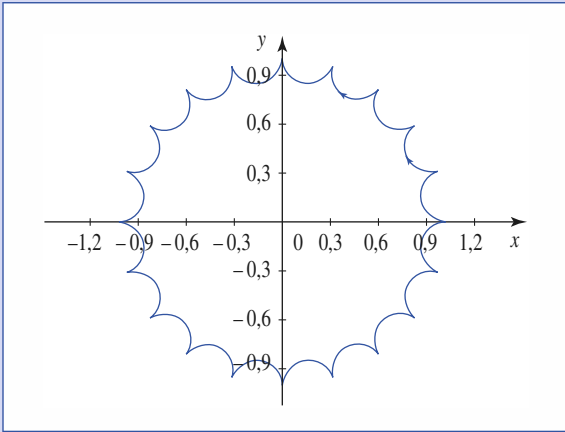
$$\text{soit : } \vec{a}_{/\mathcal{R}_2} = \frac{d^2}{dt^2} (\vec{M}_0M)_{/\mathcal{R}_2} = -\omega_0^2 \vec{M}_0M.$$

C'est un oscillateur spatial isotrope dans \mathcal{R}_2 . Son mouvement est elliptique, de centre M_0 .



5) Des méthodes de calcul identiques conduisent à :

$$\ddot{x} + (\omega_1^2 - \omega^2)x - 2\omega\dot{y} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{y} + (\omega_2^2 - \omega^2)y + 2\omega\dot{x} = 0.$$



Pour que $x = Xe^{pt}$ et $y = Ye^{pt}$ existent (non nuls) il faut que :

$$p^4 + (\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega^2)p^2 + (\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) = 0$$

et que les solutions aient leur partie réelle négative ou nulle. Or le discriminant de l'équation en p^2 est positif.

Il faut donc que les solutions en p^2 soient négatives, ce qui conduit à :

$$(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) > 0.$$

1) $\mathcal{R}(O; x, y, z)$ représente le référentiel lié au manège. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la bille dans \mathcal{R} donne :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = m\vec{g} + m\omega^2\vec{HM} \\ - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}.$$

D'où les équations du mouvement en projection :

$$\ddot{x} = \omega^2x + 2\omega\dot{y},$$

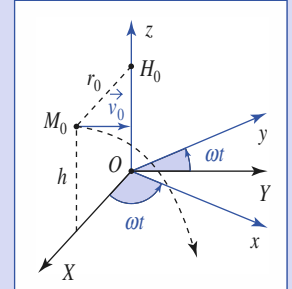
$$\ddot{y} = \omega^2y - 2\omega\dot{x}, \quad \ddot{z} = -g.$$

Pour résoudre les équations couplées en x et y , posons $u = x + iy$, soit : $\ddot{u} + 2i\omega\dot{u} - \omega^2u = 0$, dont la solution, compte tenu des conditions initiales : $x(0)=0, y(0)=0, z(0)=h, \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$, est :

$$u = r_0(1 + i\omega t)e^{-i\omega t}.$$

Le mouvement est donc décrit par :

$$\begin{cases} x(t) = r_0[\cos \omega t + \omega t \sin \omega t] \\ y(t) = r_0[\omega t \cos \omega t - \sin \omega t] \\ z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$



2) La bille touche le plancher à :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,55 \text{ s soit pour}$$

$$\omega t_1 = 0,43 \text{ (soit } 23^\circ \text{):}$$

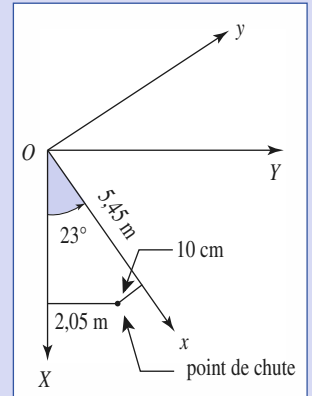
$$x = 5,45 \text{ m}; \quad y = -0,10 \text{ m}.$$

3) Un raisonnement dans le référentiel fixe donne : $\ddot{X} = 0; \ddot{Y} = 0; \ddot{z} = -g$ soit :

$$X = r_0; \quad Y = r_0\omega t; \quad z = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

$$A.N. : X = 5 \text{ m}; \quad Y = 2,05 \text{ m}.$$

Nous pouvons alors vérifier qu'au moment du contact avec le plateau, ces résultats sont bien cohérents en réalisant la figure ci-dessus.



9

Caractère galiléen approché des référentiels utilisés en mécanique terrestre

O B J E C T I F S

- Référentiels usuels en mécanique terrestre.
- Critique du caractère « galiléen » de ces référentiels.

P R É R E Q U I S

- Mécanique du point en référentiel galiléen.
- Lois de la dynamique en référentiel non galiléen.

Introduction

Nous savons (chapitre précédent) que les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis sont loin d'être négligeables.

Nous avons l'habitude de travailler dans le « référentiel galiléen du laboratoire ». Nous verrons dans quelle mesure ce genre d'hypothèse peut être remis en cause par l'expérience.

Nécessité de corrections : le pendule de Foucault

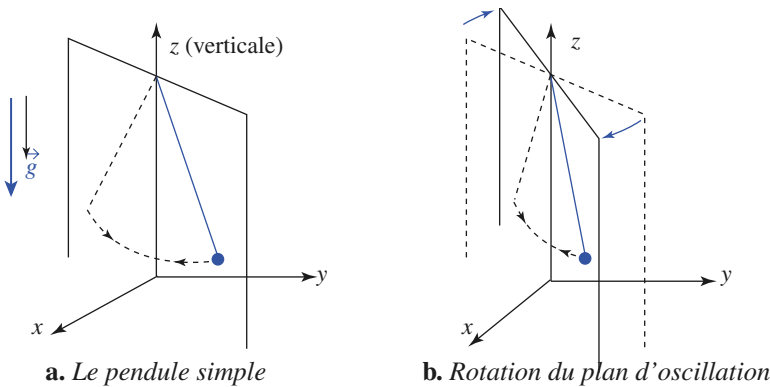
Considérons un pendule simple inextensible de longueur ℓ oscillant dans le champ de pesanteur terrestre, d'accélération g .

Nous savons bien que sa période d'oscillation est $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

Si nous écartons légèrement ce pendule de la verticale et le laissons évoluer sans lui communiquer de vitesse initiale, nous pouvons vérifier expérimentalement ce résultat en observant les oscillations du pendule, qui ont lieu dans un plan vertical (*doc. 1*).

En 1851, Léon Foucault (1819-1868) réalisa cette expérience avec un pendule de longueur $\ell = 67$ m fixé (et toujours fixé à cet endroit aujourd'hui) sous la coupole du Panthéon à Paris. Le plan d'oscillation du pendule de Foucault effectua une lente rotation autour de la verticale, mettant ainsi en évidence la rotation de la Terre, et le rôle joué par la force de Coriolis.

Cette expérience, à première vue anodine, montre par son résultat que le référentiel terrestre (« référentiel du laboratoire ») n'est pas galiléen. Nous préciserons dans ce qui suit pourquoi, et comment modifier les équations du mouvement dans ce référentiel terrestre « pas tout à fait » galiléen.



Doc. 1. Le plan d'oscillation du pendule de Foucault tourne.

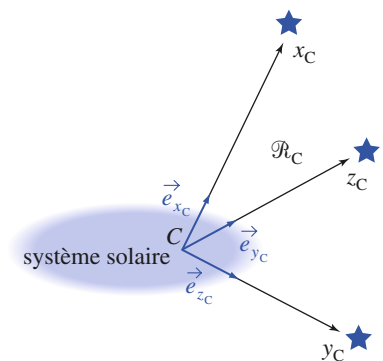
2 Les référentiels de Copernic et Kepler

2.1. Le référentiel de Copernic \mathcal{R}_C

Le référentiel de Copernic, noté \mathcal{R}_C , est défini par la donnée du repère (C ; \vec{e}_{x_C} , \vec{e}_{y_C} , \vec{e}_{z_C}), où C est le centre de masse (ou d'inertie) du système solaire, et les axes (Cx_C), (Cy_C) et (Cz_C) liés aux directions de trois étoiles suffisamment éloignées pour pouvoir être considérées comme fixes. Pour des points matériels mobiles dans le système solaire, ce référentiel est galiléen avec une excellente précision.

Dans le référentiel de Copernic \mathcal{R}_C , la relation fondamentale de la dynamique s'applique à un point matériel de masse m :

$$\vec{F}_{\text{grav}} + \vec{F}_a = m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_C}$$



Doc. 2. Référentiel de Copernic, C est le centre de masse du système solaire.

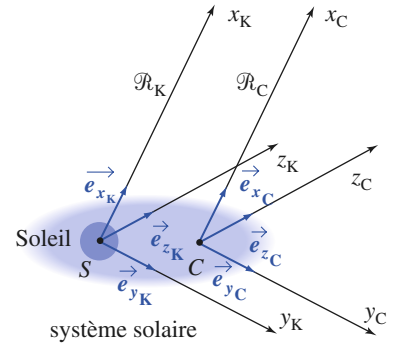
où $\vec{F}_{\text{grav}} = m[\vec{G}_T(M) + \vec{G}_L(M) + \vec{G}_S(M) + \dots]$ est la force gravitationnelle exercée sur le point matériel par la Terre, la Lune, le Soleil, les autres planètes..., et où \vec{F}_a désigne la résultante d'éventuelles autres interactions subies par le point matériel.

2.2. Référentiel de Kepler \mathcal{R}_K

2.2.1. Définition

Le référentiel de Kepler \mathcal{R}_K se déduit du référentiel de Copernic par translation : l'origine d'un repère képlérien, encore appelé repère héliocentrique, est le centre d'inertie S du Soleil, et ses axes (Sx_K), (Sy_K) et (Sz_K) peuvent être choisis parallèles à ceux d'un repère spatial de \mathcal{R}_C .

L'approximation consistant à supposer que \mathcal{R}_K est galiléen est en général excellente.



Doc. 3. Référentiel de Kepler (ou héliocentrique).

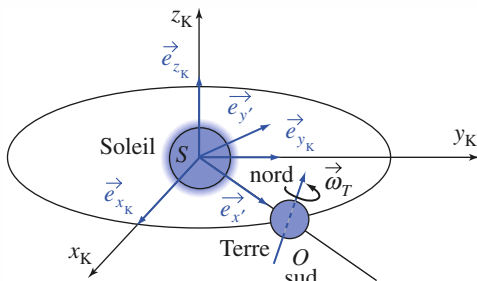
S : centre du Soleil (en réalité C et S sont très voisins).

Application 1

Jour sidéral et jour solaire moyen

Sachant qu'un jour solaire correspond à la durée séparant les passages successifs du Soleil au zénith d'un même point terrestre et qu'en moyenne l'année sidérale vaut 366,25 jours solaires, retrouver, par composition de mouvements, la valeur du jour sidéral terrestre.

On simplifiera le problème en supposant que l'axe (nord-sud) de rotation de la Terre est perpendiculaire au plan de l'écliptique, et que l'orbite terrestre autour du Soleil est circulaire (approximations valables par effet de moyenne).



Doc. 4. Jour sidéral et jour solaire moyen.

Soit \mathcal{R}' le référentiel et ($S ; \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}$) un repère dont l'axe ($S, \vec{e}_{x'}$) pointe de S vers la Terre.

Il faut remarquer que le jour solaire représente la durée de révolution de la Terre sur elle-même dans \mathcal{R}' . Il suffit alors de traduire la composition des mouvements de rotation :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_C} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}_C}.$$

Les vecteurs rotation étant supposés colinéaires, alors

$$\frac{2\pi}{T_{\text{sid}}} = \frac{2\pi}{T_{\text{solmoy}}} + \frac{2\pi}{T_{\text{orb}}}, \text{ avec } T_{\text{orb}} = 1 \text{ an.}$$

On obtient :

$$\frac{T_{\text{orb}}}{T_{\text{sid}}} = \frac{T_{\text{orb}}}{T_{\text{solmoy}}} + 1.$$

Une révolution de la Terre autour du Soleil correspond donc à 366,25 jours sidéraux et par suite :

$$T_{\text{sid}} = 86\,164 \text{ s} = 23 \text{ h } 56 \text{ mn } 4 \text{ s.}$$

Le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_C} = \omega_T \vec{e}_z$ a pour norme la vitesse de rotation ω_T :

$$\omega_T = \frac{2\pi}{T_{\text{sid}}} = \frac{2\pi}{86\,164} \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2.2.2. Le mouvement de la Terre dans \mathcal{R}_K

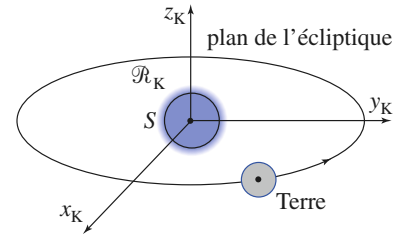
La Terre décrit dans \mathcal{R}_K une trajectoire elliptique, pratiquement circulaire, d'excentricité $e = 0,016\ 73\dots$, dans un plan appelé plan de l'écliptique, la distance moyenne TS étant de l'ordre de $1,5 \cdot 10^{11}$ m*.

La durée de révolution de la Terre autour du Soleil, c'est-à-dire le temps mis pour décrire l'ellipse, s'appelle l'année sidérale et vaut sensiblement 365,25 jours**.

De plus, la Terre tourne sur elle-même avec une période de rotation $T = \frac{2\pi}{\Omega_T}$

proche de 24 heures. Cette période de rotation propre, appelée jour sidéral, vaut exactement 86 164 secondes.

L'application précédente propose de retrouver cette valeur.



Doc. 4. Le mouvement de la Terre.

3 Le référentiel géocentrique \mathcal{R}_O

3.1. Définition

Un repère spatial lié au référentiel géocentrique \mathcal{R}_O a son origine au centre d'inertie $O = T$ de la Terre, et ses axes (Ox_O) , (Oy_O) et (Oz_O) sont respectivement parallèles à ceux du référentiel de Copernic (doc. 5).

\mathcal{R}_O décrit donc dans \mathcal{R}_C un mouvement de translation avec une accélération $\vec{a}(O)_{/\mathcal{R}_C}$. Ce référentiel géocentrique n'est donc pas galiléen, puisqu'il faut faire intervenir la force d'inertie d'entraînement indépendante du point considéré car le référentiel \mathcal{R}_O est en translation) $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}(O)_{/\mathcal{R}_C}$ dans la relation fondamentale de la dynamique exprimée dans \mathcal{R}_O .

3.2. La relation fondamentale de la dynamique en référentiel géocentrique

3.2.1. Accélération d'entraînement et champs de gravitation

Soit un point matériel M , de masse m , dont nous étudions le mouvement dans \mathcal{R}_O géocentrique. Ce point matériel subit :

- les forces gravitationnelles exercées par la Terre, la Lune, le Soleil, les autres planètes..., traduites par l'existence d'un champ de gravitation :

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = \vec{\mathcal{G}}_T(M) + \vec{\mathcal{G}}_L(M) + \vec{\mathcal{G}}_S(M) + \text{vecteurs champs de gravitation des autres astres.}$$

En raison de la décroissance en $\frac{1}{r^2}$ de l'interaction gravitationnelle, le terme $\vec{\mathcal{G}}_T(M)$ est prépondérant au voisinage de la Terre ;

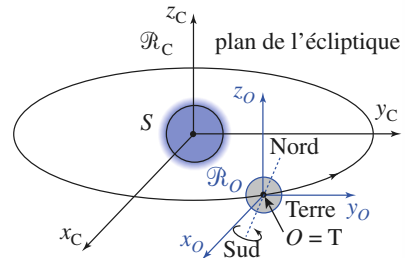
- d'éventuelles forces appliquées notées \vec{F}_a résultant d'autres interactions matérielles avec le point M ;

- la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}(O)_{/\mathcal{R}_C}$. Le référentiel géocentrique étant en translation dans \mathcal{R}_C , l'accélération d'entraînement est uniforme et égale à $\vec{a}(O)_{/\mathcal{R}_C}$.

La relation fondamentale de la dynamique dans \mathcal{R}_O a pour expression :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_O} = \vec{F}_a + m[\vec{\mathcal{G}}_T(M) + \vec{\mathcal{G}}_L(M) + \vec{\mathcal{G}}_S(M) + \dots] - m\vec{a}(O)_{/\mathcal{R}_C}$$

* Plus précisément, le demi-grand axe de l'ellipse est appelé unité astronomique de la distance et vaut :
 1 U.A. = 149 598 600 km.
 ** Le jour a pour symbole d :
 1 d = 86 400 s.



Doc. 5. Le référentiel géocentrique \mathcal{R}_O est en translation par rapport à \mathcal{R}_C .

Application 2

Estimer l'ordre de grandeur de la norme de l'accélération $\vec{a}(O)_{/\mathcal{R}_C}$.

En première approximation, le centre d'inertie O de la Terre décrit dans \mathcal{R}_C une trajectoire circulaire, de rayon $ST = 1,5 \cdot 10^{11}$ m à la vitesse angulaire

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \text{ avec } T = 1 \text{ an} \approx \pi \cdot 10^7 \text{ s.}$$

La valeur de $\vec{a}(O)_{/\mathcal{R}_C}$ est donc environ :

$$a(O)_{/\mathcal{R}_C} = \omega^2 ST \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

La force d'inertie associée, bien que faible, n'est pas négligeable.

3.2.2. Terme différentiel ou terme de marée

Le mouvement du centre d'inertie O de la Terre peut être étudié dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_C en l'assimilant à un point matériel de masse M_T , soit :

$$M_T \vec{a}(O)_{/\mathcal{R}_C} = M_T [\vec{\mathcal{G}}_L(O) + \vec{\mathcal{G}}_S(O) + \dots].$$

En reportant dans l'équation du mouvement de la masse m , nous obtenons :

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_C} = \begin{cases} \vec{F}_a + m \vec{\mathcal{G}}_T(M) \\ + m [(\vec{\mathcal{G}}_L(M) - \vec{\mathcal{G}}_L(O)) + (\vec{\mathcal{G}}_S(M) - \vec{\mathcal{G}}_S(O)) + \dots] \end{cases}$$

La prise en compte du caractère non galiléen de \mathcal{R}_O impose de comptabiliser les champs de gravitation des astres autres que la Terre au point O . C'est pourquoi nous avons pris en compte les champs au point M , car ils sont du même ordre de grandeur que cette accélération d'entraînement.

Nous constatons ainsi que c'est le terme différentiel (ou terme de marée) :

$$m [\vec{\mathcal{G}}_{\text{autres astres}}(M) - \vec{\mathcal{G}}_{\text{autres astres}}(O)]$$

qui intervient dans l'équation du mouvement du mobile dans le référentiel géocentrique.

Le terme d'accélération différentielle dû à un astre A est défini par :

$$\vec{\gamma}_A = \vec{\mathcal{G}}_A(M) - \vec{\mathcal{G}}_A(O)$$

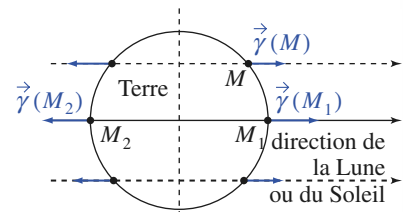
$\vec{\mathcal{G}}_A(O)$ et $\vec{\mathcal{G}}_A(M)$ représentant les champs de gravitation de l'astre A en M et O .

3.2.3. Caractère quasi-galiléen de \mathcal{R}_O en domaine terrestre

Sur Terre, le terme d'accélération différentielle provient essentiellement des effets de la Lune et du Soleil : la Lune est beaucoup moins massive que le Soleil, mais est beaucoup plus proche et les termes lunaire et solaire sont du même ordre de grandeur.

Pour un point matériel M de masse m au voisinage immédiat de la Terre ($r = OM$ de l'ordre de R_T), nous pouvons estimer les termes de marée.

Considérons uniquement les points M_1 et M_2 , où les normes sont maximales.



Doc. 6. Termes différentiels dûs au Soleil ou à la Lune à la surface de la Terre.

Pour la Lune :

$$\vec{\mathcal{G}}_L(M_1) - \vec{\mathcal{G}}_L(O) = 2GM_L \frac{R_T}{TL^3} = 2g_0 \frac{M_L}{M_T} \left(\frac{R_T}{TL}\right)^3 = 1,1 \cdot 10^{-7} g_0$$

avec $g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2}$.

Pour le Soleil :

$$\vec{\mathcal{G}}_S(M_1) - \vec{\mathcal{G}}_S(O) = 2GM_S \frac{R_T}{TS^3} = 2g_0 \frac{M_S}{M_T} \left(\frac{R_T}{TS}\right)^3 = 5,1 \cdot 10^{-8} g_0.$$

Ces termes sont faibles et n'interviennent que dans des situations exceptionnelles (marées). Notons encore que leur rapport est 0,45 ; l'influence lunaire est donc légèrement prépondérante.

Ces résultats montrent que dans le domaine terrestre, on peut fréquemment négliger ce terme différentiel et considérer que \mathcal{R}_O se comporte comme un référentiel remarquablement galiléen, à la condition expresse de ne tenir compte que du champ gravitationnel terrestre dans la relation fondamentale de la dynamique qui devient :

$$m\vec{a}(O)_{\mathcal{R}_O} \approx \vec{F}_a + m\vec{\mathcal{G}}_T(M).$$

Soleil :	$M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg.
Terre :	$M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg.
Lune :	$M_L = M_T/81$.
δT :	$1 \text{ u.a.} = 1,5 \cdot 10^{11}$ m.
TL :	$384\,000 \text{ km} \approx 60 R_T$.

Dans le domaine terrestre, le référentiel géocentrique \mathcal{R}_O est remarquablement galiléen, si on néglige le terme différentiel de marée ; le seul champ gravitationnel à considérer est alors celui créé par la Terre.

Un raisonnement similaire est applicable au référentiel P -centrique de toute planète.

3.3. Effets du terme différentiel

3.3.1. L'effet d'accélération différentielle

Imaginons un vaisseau spatial « tombant en chute libre » (mouvement de translation) dans le champ gravitationnel de la Terre, en négligeant toute autre attraction.

C désignant le centre d'inertie du vaisseau, la relation fondamentale de la dynamique appliquée à ce point matériel particulier dans le repère géocentrique de cet astre supposé galiléen donne :

$$\vec{a}(C) = \vec{\mathcal{G}}_T(C).$$

Dans le référentiel \mathcal{R}_v lié au vaisseau, dont l'accélération d'entraînement est $\vec{a}(C)$, la relation fondamentale de la dynamique appliquée à un point-matériel s'écrit :

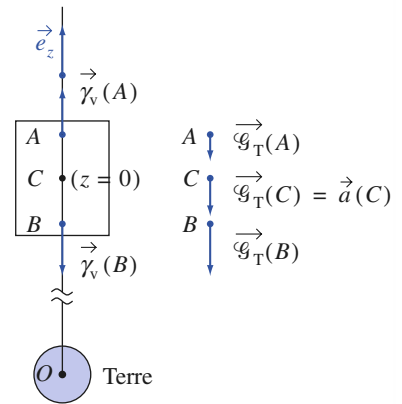
$$m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}_v} = \vec{F}_a + m\vec{\mathcal{G}}_T(M) - m\vec{\mathcal{G}}_T(C) = \vec{F}_a + \vec{\gamma}_v(M).$$

Le terme $\vec{\gamma}_v(M)$ est le *terme différentiel* relatif à notre problème.

- En première approximation le champ $\vec{\mathcal{G}}_T$ peut être considéré comme uniforme dans la cabine du vaisseau. Le terme différentiel y est alors nul.

Si par exemple $\vec{F}_a = \vec{0}$, le point matériel n'est soumis à aucune force dans \mathcal{R}_v : il y décrit un mouvement relatif rectiligne et uniforme (état d'impesanteur, à ne pas confondre avec un cas de gravitation nulle !).

- En réalité $\vec{\mathcal{G}}_T(M)$ n'est pas uniforme : sa norme décroît avec la distance au centre de la Terre (loi en $G \frac{M_T}{r^2}$).



Doc. 7. Vaisseau spatial en chute libre :

$$\begin{aligned} \vec{e}_z \cdot \vec{\gamma}_v(M) &= GM_T \left(\frac{1}{OC^2} - \frac{1}{OM^2} \right) \\ &\approx \frac{2GM_T}{OC^2} \frac{z}{OC} \end{aligned}$$

illustré en $M = A$ et $M = B$.

Négligeant ici l'effet directionnel et posant $\vec{\mathcal{G}}_T(C) = -\mathcal{G}_0 \vec{e}_z$, nous voyons que :

$$\vec{e}_z \cdot \vec{\gamma}_i(M) = \vec{e}_z \cdot [\vec{\mathcal{G}}_T(M) - \vec{\mathcal{G}}_T(C)] \approx 2 \mathcal{G}_0 \frac{z}{r}, \text{ avec } r = OC \text{ et } z = 0 \text{ en } C.$$

Ainsi le terme différentiel agit comme précisé sur le *document 7* : un point matériel plus éloigné de O que ne l'est C est repoussé vers le « haut » tandis qu'un objet plus proche est attiré vers le « bas » de la cabine.

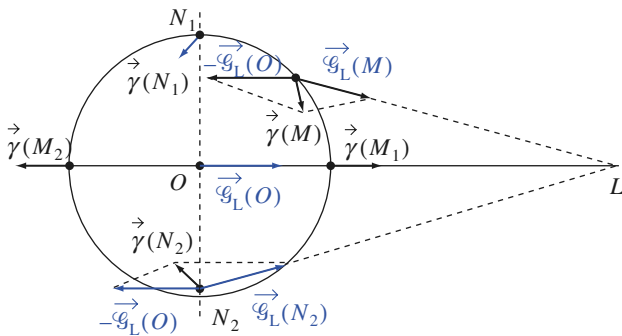
3.3.2. Théorie statique des marées océaniques

Simplifions le problème en oubliant :

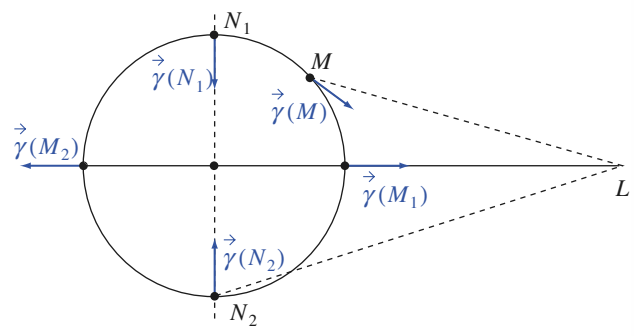
- la rotation de la Terre,
- le terme de marée dû à la présence de la Lune et du Soleil.

Avec ces hypothèses simplificatrices, la Terre est recouverte d'une couche uniforme d'eau. Nous appelons théorie statique des marées l'explication du phénomène des marées basée sur ces hypothèses simplificatrices.

Commençons par étudier l'influence de la présence de la Lune par simple analyse graphique du terme différentiel $\vec{\gamma}(M) = \vec{\mathcal{G}}_L(M) - \vec{\mathcal{G}}_L(O)$, que nous obtenons par construction vectorielle (*doc. 8 et 9*).

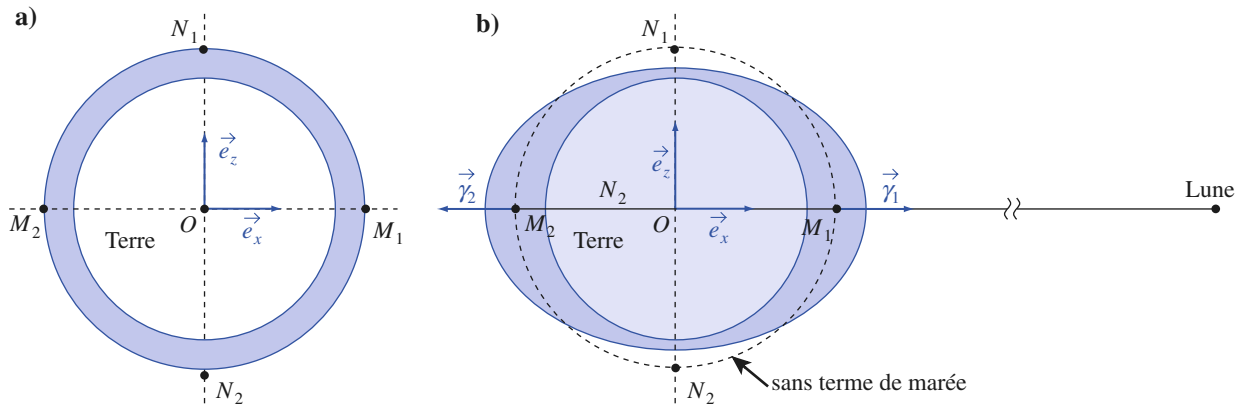


Doc. 8. Mise en évidence des vecteurs permettant la construction graphique des $\vec{\gamma}(M_i)$.



Doc. 9. Analyse graphique du terme différentiel. Disposition plus réaliste des termes différentiels.

La valeur du terme différentielle apparaît maximale aux points M_1 et M_2 (*doc. 8*). La formation de « bourrelets océaniques » (*doc. 10*) en découle. En traduisant l'équilibre de l'eau, nous pourrions estimer la dénivellation par rapport à l'absence du terme différentiel. À titre indicatif, mentionnons que l'on obtient une amplitude en M_1 ou en M_2 de l'ordre de 0,6 m.



Doc. 10. Bourrelets océaniques. L'échelle n'est pas respectée.

3.3.2.1. Période du phénomène

Les bourrelets océaniques admettent constamment l'axe (Ox) comme axe de révolution ; nous constatons ainsi que pour un point lié à la Terre il existera deux marées hautes par jour (marées hautes espacées de 12 heures, la hauteur des marées étant plus importante à l'équateur).

En fait, comme la Lune a un mouvement circulaire apparent autour de la Terre (lunaison) de durée de l'ordre de 29 jours, il y aura retard d'environ $\frac{24 \times 60}{29} \approx 50$ mn par jour des marées hautes en un lieu.

3.3.2.2. Marées de vives eaux et de mortes eaux

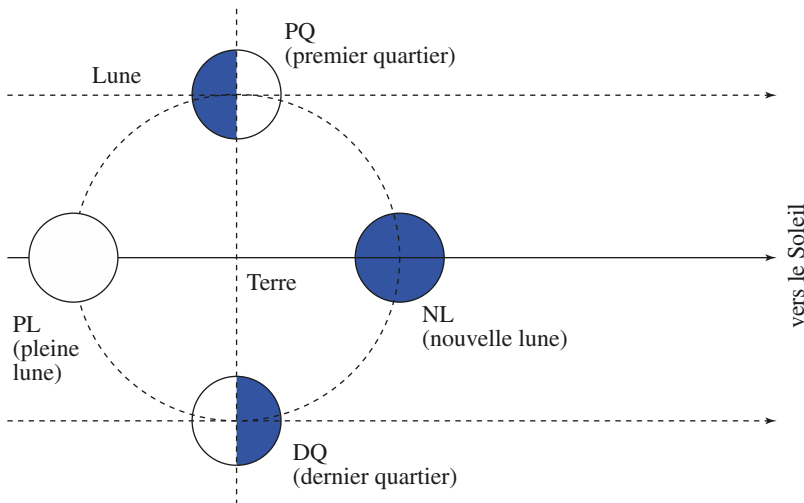
Le Soleil apporte une contribution non négligeable au phénomène de marées. Nous avons vu que le rapport des termes différentiels maxima était :

$$\frac{\text{terme solaire max}}{\text{terme lunaire max}} = 0,45.$$

Il faut donc tenir compte de la position du Soleil. En supposant toujours que la Lune tourne autour de la Terre dans le plan de l'écliptique, nous avons représenté (*doc. 11*) quatre positions bien connues du cycle lunaire, par rapport à l'axe Terre-Soleil.

Aux points PL (pleine Lune) et NL (nouvelle Lune), les termes différentiels s'ajoutent : les marées sont les plus importantes possibles ; nous parlons de marées de vives eaux.

Aux points PQ (premier quartier) et DQ (dernier quartier), les termes différentiels se retranchent : les marées sont d'amplitude les plus faibles possible, nous parlons alors de marées de mortes eaux.



Doc. 11. Effets conjugués du Soleil et de la Lune.

3.3.2.3. Limites de cette approche

Outre les approximations concernant le mouvement de la Lune, nous n'avons pas tenu compte dans cette théorie statique du mouvement des masses océaniques ; c'est là une approximation très critiquable car ces mouvements faussent nettement les conclusions de la théorie statique : par exemple, les bourrelets océaniques ne sont plus alignés avec O et la Lune.

En outre, la considération de phénomènes de propagation jointe aux conditions aux limites locales (relief des côtes) expliquent pourquoi certaines marées ont des amplitudes très importantes (15 m dans la baie de Fundy au Canada, 10 m dans la baie du Mont Saint-Michel) alors qu'elles sont de l'ordre de 0,1 m sur certaines îles du Pacifique.

4 Le référentiel terrestre \mathcal{R}_T

4.1. Définition

Il s'agit du référentiel \mathcal{R}_T lié à la Terre, en rotation à vitesse angulaire $\vec{\omega}_T$ constante autour de l'axe des pôles géographiques, noté par la suite (Oz) , qui est fixe dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_O (doc. 12).

4.2. La relation fondamentale de la dynamique en repère terrestre

L'application de la relation fondamentale de la dynamique au mouvement d'un point matériel M de masse m dans \mathcal{R}_T se formule, avec les notations déjà utilisées pour le mouvement dans \mathcal{R}_O .

Il vient :

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{F}_a + m[\vec{\mathcal{G}}_T(M) + \vec{\mathcal{G}}_L(M) + \vec{\mathcal{G}}_S(M) + \dots] - m \vec{a}_e(M)_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_C} - m \vec{a}_C(M)_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_C}$$

avec :

$$\vec{a}_e(M)_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_C} = \vec{a}(O)_{/\mathcal{R}_C} - \omega_T^2 \vec{HM},$$

car cette accélération est celle du point coïncidant avec M , fixe dans \mathcal{R}_T , et qui décrit donc dans \mathcal{R}_O un cercle centré en H sur (Oz) à la vitesse angulaire $\vec{\omega}_T$ constante (doc. 13).

Comme l'accélération de Coriolis vaut :

$$\vec{a}_C(M)_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_C} = 2\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T},$$

il vient :

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{F}_a + m \vec{\mathcal{G}}_T(M) + m \omega_T^2 \vec{HM} + m(-2\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T}) + m[(\vec{\mathcal{G}}_L(M) - \vec{\mathcal{G}}_L(O)) + (\vec{\mathcal{G}}_S(M) - \vec{\mathcal{G}}_S(O)) + \dots]$$

Cette expression est assez compliquée. Nous allons la simplifier en définissant le poids du corps.

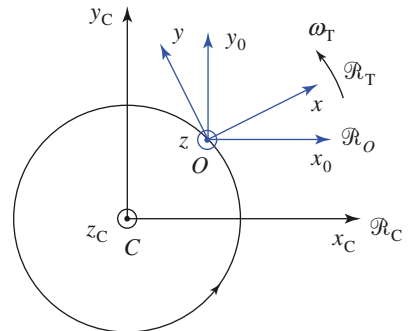
4.3. Le poids d'un corps

Imaginons un point matériel fixé à l'extrémité d'un fil en équilibre dans \mathcal{R}_T .

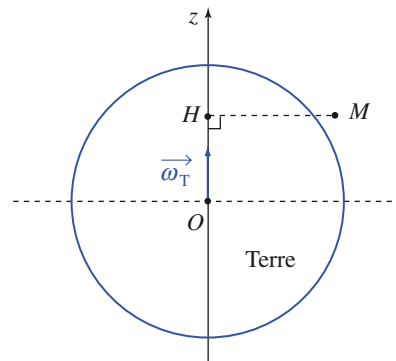
Nous traduisons l'équilibre du point (M, m) par l'annulation de la somme des forces subies, soit (doc. 14) :

$$\vec{\text{force de tension du fil}} + \vec{\text{poids}} = \vec{0}.$$

La direction du fil fournit alors la *verticale locale*, support du poids.



Doc. 12. Mise en évidence du référentiel terrestre \mathcal{R}_T .



Doc. 13. $\vec{a}_e(M) = \vec{a}(O) - \omega^2 \vec{HM}$.

Traduisons cet équilibre précédent ($\vec{v}(M)_{/R_T} = \vec{0}$ et $\vec{a}(M)_{/R_T} = \vec{0}$) dans l'équation du mouvement, \vec{F}_a étant alors la force de tension du fil.

Il vient :

$$\vec{0} = \vec{F}_a + m\vec{G}_T(M) + m\omega_T^2 HM + m[(\vec{G}_L(M) - \vec{G}_L(O)) + (\vec{G}_S(M) - \vec{G}_S(O)) + \dots]$$

qu'il suffit d'identifier à l'équation précédente pour en déduire le poids, force proportionnelle à la masse par :

$$\vec{\text{poids}} = m\vec{g}(M) = m\vec{G}_T(M) + m\omega_T^2 \vec{HM} + m[\text{terme de marée}].$$

Le terme de marée, de l'ordre de $10^{-7}g_0$, étant en général négligeable,

$$\vec{g}(M) \approx \vec{G}_T(M) + \omega_T^2 \vec{HM}$$

$\vec{g}(M)$ désigne le champ de pesanteur terrestre au point M (doc. 15).

Le premier terme est le champ de gravitation terrestre en M ; le second est qualifié de terme axifuge, H désignant le projeté orthogonal au point M sur l'axe de rotation de la Terre.

4.4. Relation fondamentale de la dynamique simplifiée

Le référentiel terrestre est en rotation par rapport au référentiel géocentrique R_O : la force d'inertie d'entraînement associée, axifuge, est incluse dans le poids.

La relation fondamentale de la dynamique du point matériel M de masse m en référentiel terrestre se formule avec le poids :

$$m\vec{a}(M)_{/R_T} = \vec{F}_a + m\vec{g}(M) + [-2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}(M)_{/R_T}].$$

Il est essentiel de noter que le terme axifuge $m\omega_T^2 \vec{HM}$ est contenu dans le poids ; enfin le terme de Coriolis est souvent négligé dans les cas courants ; pour v de l'ordre de $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, par exemple, l'accélération de Coriolis, de l'ordre de $2\omega_T v \approx 10^{-4}g_0$, est encore faible.

Dans ces conditions, l'écriture « usuelle » de la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel terrestre :

$$m\vec{a}(M)_{/R_T} = \vec{F}_a + m\vec{g}(M)$$

s'avère dans de nombreuses expériences largement satisfaisante.

4.5. Importance du terme axifuge

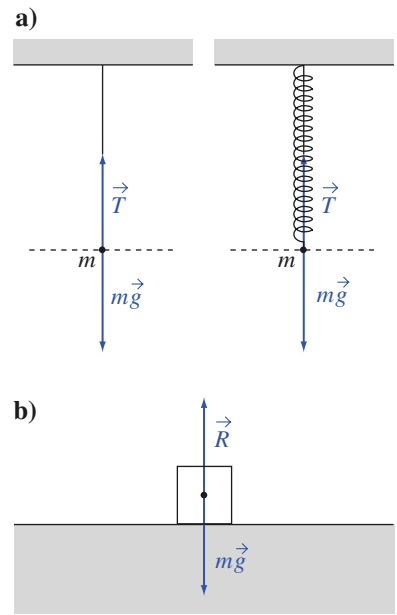
La norme du terme axifuge, pour un point matériel situé à la surface de la Terre, n'excède pas $\omega_T^2 R_T$ (valeur maximale obtenue à l'équateur).

Ce terme vaut numériquement :

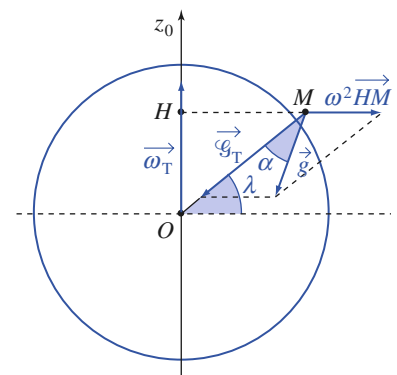
$$\omega_T^2 R_T = (7,3 \cdot 10^{-5})^2 \times 6\,370 \cdot 10^3 = 0,034 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Le terme gravitationnel vaut dans les mêmes conditions :

$$g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2} = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \text{ environ.}$$



Doc. 14. Définition usuelle du poids d'un corps.



Doc. 15. Les composantes (pas à l'échelle !) du poids.

Le terme axifuge est donc un terme correctif, mais qui doit être pris en compte lors d'estimations précises du champ de pesanteur.

En fait, les mesures du champ de pesanteur peuvent fournir des résultats très précis et l'étude des variations de ce champ est beaucoup plus complexe qu'il n'y paraît dans cette approche.

Il faut tenir compte de la forme de la Terre (géoïde, renflée à l'équateur où g est donc plus faible qu'aux pôles) ; il faut encore faire intervenir des variations locales dues au relief, au sous-sol...

Application 3

Angle de la verticale locale avec le champ de gravitation terrestre

Déterminer, en fonction de la latitude λ , l'angle α que fait la verticale du lieu avec le champ de gravitation terrestre, en un point M à la surface de la Terre.

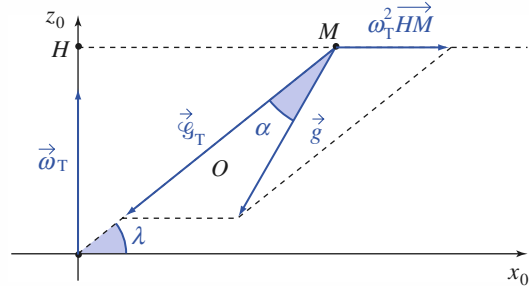
Dans l'approximation sphérique le champ de gravitation terrestre $\vec{\mathcal{G}}_T(M)$ a son support passant par le centre O de la Terre, et la construction vectorielle montre que le champ de pesanteur \vec{g} directeur de la verticale du lieu, fait un angle α avec $\vec{\mathcal{G}}_T$ tel que (relation des sinus dans le triangle) :

$$\frac{\omega_T^2 HM}{\sin \alpha} = \frac{g}{\sin \lambda}.$$

Comme $HM = R_T \cos \lambda$, nous en déduisons :

$$\sin \alpha = \frac{\omega_T^2 R_T \sin(2\lambda)}{2g}.$$

La valeur maximale de l'angle α est obtenue pour $\lambda = 45^\circ$, soit $\alpha = 1,73 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \approx 6'$.



Doc. 16. Angle de \vec{g} avec le champ de gravitation terrestre.

4.6. Importance du terme de Coriolis

La force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{i_c} = -2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}_r$ est en norme inférieure ou égale à $2m\omega_T v_r$ que nous pouvons comparer à l'ordre de grandeur du poids mg_0 :

$$\frac{F_{i_c}}{mg_0} < 2\omega_T \frac{v_r}{g_0} = \frac{v_r}{6,7 \cdot 10^4} \quad (v_r \text{ en m} \cdot \text{s}^{-1}).$$

Il faut donc atteindre des vitesses très élevées pour que les deux termes soient du même ordre de grandeur.

Retenons qu'à $v_r = 700 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 2\,500 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, la force de Coriolis n'exède pas 1 % du poids.

Les effets de cette force seront mis en évidence dans des cas particuliers : masses importantes, grandes durées d'une expérience ou encore grande précision de mesure.

4.7. Analyse du mouvement du pendule de Foucault

4.7.1. En oubliant la force de Coriolis...

Envisageons l'étude des petites oscillations du pendule de longueur ℓ dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_T , en oubliant le terme de Coriolis.

Nous écrivons « usuellement » :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = m\vec{g} + \vec{T}.$$

Traisons les calculs en utilisant le fait que l'angle θ d'inclinaison du pendule par rapport à la verticale locale (Az) (*doc.* 17) est petit.

À un ordre relatif de degré 2 par rapport à cette inclinaison, nous pouvons écrire :

$$\ddot{z} \approx 0, \text{ donc } T_z \approx mg$$

et par suite :

$$T_x \approx -T \frac{x}{\ell} \approx -\frac{mg}{\ell} x, \quad T_y \approx -\frac{mg}{\ell} y.$$

Dans ces conditions, les équations du mouvement du pendule dans le plan (xAy) sont simplement :

$$\ddot{x} = -\frac{g}{\ell} x \quad \text{et} \quad \ddot{y} = -\frac{g}{\ell} y.$$

Nous obtenons un oscillateur harmonique plan de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

Pour $\ell = 67$ m (expérience du Panthéon), la période du pendule est :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}, \text{ de l'ordre d'une dizaine de secondes.}$$

Si le pendule est écarté au point $(x_0, 0, 0)$ et lâché sans vitesse initiale, il oscille dans le plan verticale (xAz) :

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t \quad \text{et} \quad y(t) = 0.$$

4.7.2. Le pendule se met à tourner...

Observons ce mouvement simple, et ajoutons qualitativement l'effet du terme de Coriolis $-2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T}$ (*doc.* 18).

Nous voyons que le pendule se trouve dévié, et « rate » finalement son passage au point A. En revenant, sa vitesse étant inversée, la déviation n'est pas compensée, mais s'ajoute au contraire à la précédente : le plan d'oscillation du pendule se met à tourner...

4.7.3. Perturbation de l'équation du mouvement

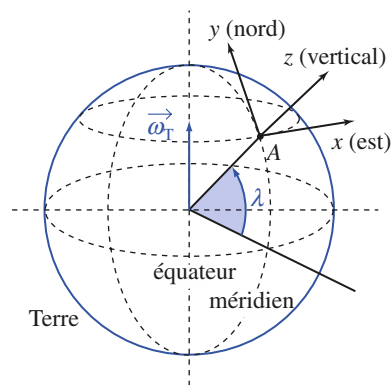
Nous pouvons maintenant traduire l'équation du mouvement :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = m\vec{g} + \vec{T} - 2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T}$$

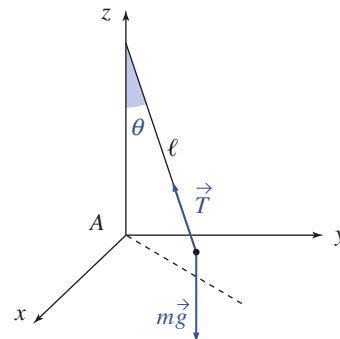
dans le repère $(A ; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, ce qui donne :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = T_x & + 2m\omega_T \sin \lambda \dot{y} - 2m\omega_T \cos \lambda \dot{z} \\ m\ddot{y} = T_y & + 2m\omega_T \sin \lambda \dot{x} \\ m\ddot{z} = T_z - mg & + 2m\omega_T \cos \lambda \dot{x} \end{cases}$$

La vitesse du pendule est de l'ordre de $x_0 \Omega$, et l'accélération relative au terme de Coriolis de l'ordre de $2\omega_T \Omega x_0$. Pour un écart x_0 de l'ordre du mètre, cette accélération est de l'ordre de 10^{-3} g : le terme de Coriolis est un *terme correctif*.

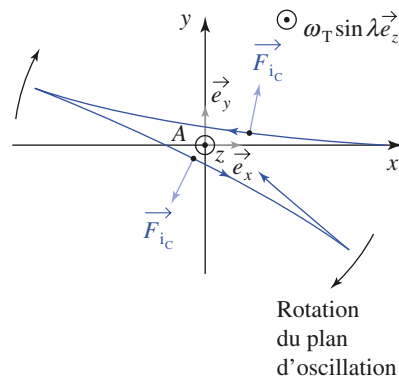


a. Repère terrestre local. La latitude λ est positive dans l'hémisphère Nord.



b. Le pendule en mouvement.

Doc. 17.



Doc. 18. Déviation (numériquement exagérée) du pendule, pour une expérience dans l'hémisphère Nord.

L'angle θ restant petit, x , y et leurs dérivées sont d'ordre θ , z et ses dérivées d'ordre θ^2 , de sorte que nous pouvons encore utiliser les expressions précédentes de T_x et T_y , et négliger le terme en \dot{z} dans l'équation sur (Ax) , soit :

$$\begin{cases} \ddot{x} \approx -\omega_0^2 x + 2\omega_T \sin \lambda \dot{y} \\ \ddot{y} \approx -\omega_0^2 y - 2\omega_T \sin \lambda \dot{x} . \end{cases}$$

Équation qui peut s'écrire :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\omega_0^2 \vec{r} - 2\vec{\omega}_T \wedge \dot{\vec{r}}$$

avec $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$

$\vec{\omega}_T = \omega_T \sin \lambda \vec{e}_z$, la projection de $\vec{\omega}_T$ sur la verticale locale, Az .

Notant $u = x + iy$, il vient :

$$\ddot{u} + i\omega_T \sin \lambda \dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

équation différentielle du deuxième ordre pour laquelle l'équation caractéristique s'écrit :

$$r^2 + 2i\omega_T \sin \lambda r + \omega_0^2 = 0$$

dont les solutions sont :

$$r = -i\omega_T \sin \lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 + (\omega_T \sin \lambda)^2} .$$

Sachant que $\omega_T \ll \omega_0$, nous pouvons écrire :

$$r \approx -i\omega_T \sin \lambda \pm i\omega_0$$

et le mouvement correspond à :

$$u = \left(A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t} \right) e^{-i\omega_T \sin \lambda t} .$$

À l'instant initial, $u = x_0$ et $\dot{u} = 0$, soit, avec $\omega_T \ll \Omega$:

$$u \approx x_0 \cos \omega_0 t e^{-i\omega_T \sin \lambda t} .$$

Le mouvement est ainsi décrit par :

$$x(t) \approx (x_0 \cos \omega_0 t) \cdot [\cos(\omega_T \sin \lambda t)]$$

$$y(t) \approx (x_0 \cos \omega_0 t) \cdot [-\sin(\omega_T \sin \lambda t)]$$

ce qui traduit une rotation du plan d'oscillation à vitesse angulaire $(-\omega_T \sin \lambda)$ autour de l'axe (Az) .

À Paris ($\lambda \approx 45^\circ$), cette rotation s'effectue en $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_T \sin \lambda} \approx 31 \text{ h } 47 \text{ min}$, ce que confirme l'expérience.

CQFR

● LE RÉFÉRENTIEL DE COPERNIC

Le référentiel de Copernic, noté \mathcal{R}_C , est défini par la donnée du repère $(C; \vec{e}_{x_C}, \vec{e}_{y_C}, \vec{e}_{z_C})$, où C est le centre de masse (ou d'inertie) du système solaire, et les axes (Cx_C) , (Cy_C) et (Cz_C) liés aux directions de trois étoiles considérées comme fixes.

Pour des points matériels mobiles dans le système solaire, ce référentiel est galiléen avec une excellente précision.

● LE RÉFÉRENTIEL DE KEPLER

Le référentiel de Kepler \mathcal{R}_K se déduit du référentiel de Copernic par translation : l'origine d'un repère képlérien, encore appelé repère héliocentrique, est le centre d'inertie S du Soleil, et ses axes (Sx_K) , (Sy_K) et (Sz_K) peuvent être choisis parallèles à ceux d'un repère spatial de \mathcal{R}_C .

En général, \mathcal{R}_K est supposé galiléen, avec une excellente approximation.

● LE RÉFÉRENTIEL GÉOCENTRIQUE

• Un repère spatial lié au référentiel géocentrique \mathcal{R}_O a son origine au centre d'inertie $O = T$ de la Terre, et ses axes (Ox_O) , (Oy_O) et (Oz_O) sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic.

• Le référentiel géocentrique \mathcal{R}_O , en translation quasi circulaire par rapport à celui de Copernic \mathcal{R}_C , n'est pas galiléen.

• On peut cependant le considérer comme galiléen si le seul champ gravitationnel pris en compte est celui de la Terre. Le terme de marées, correspondant à l'accélération différentielle $\vec{\gamma}_A = g_A(M) - g_A(O)$, est, en effet, généralement négligeable. Il permet cependant une interprétation qualitative des marées océaniques dans le cadre de la théorie statique.

● LE RÉFÉRENTIEL TERRESTRE

• Le référentiel terrestre \mathcal{R}_T est en rotation par rapport au référentiel géocentrique \mathcal{R}_O : la force d'inertie d'entraînement associée, axifuge, est incluse dans le poids.

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à un point matériel M de masse m en référentiel terrestre se formule avec le poids :

$$m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}_T} = \vec{F}_a + m\vec{g}(M) + [-2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}_T}].$$

• Le champ de pesanteur terrestre est : $\vec{g} = g_T(M) + \omega_T^2 \overrightarrow{HM}$. On a pris en compte, dans cette expression, le terme axifuge lié à la rotation de la Terre sur elle-même, et négligé le terme de marée, très faible.

• La force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{F}_{i_c} = -2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}_r$$

est responsable de la déviation, généralement faible pour des vitesses et durées d'expériences usuelles, du point matériel par rapport à la trajectoire prévue en « oubliant » ce terme.

Contrôle rapide

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Définir les référentiels de Copernic, de Kepler, géocentrique \mathcal{R}_O , et terrestre \mathcal{R}_T .
- ✓ Que peut-on dire des deux premiers ?
- ✓ Quelles sont les forces d'inerties dans \mathcal{R}_O ? Qu'appelle-t-on « terme différentiel », ou « terme de marée » ?
- ✓ Quelles sont les forces d'inertie dans \mathcal{R}_T ?
- ✓ Définir le poids d'un corps.
- ✓ Que met en évidence le pendule de Foucault ?

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. Dans le référentiel géocentrique :

- a. la force d'inertie de Coriolis est nulle
- b. la force d'inertie d'entraînement est nulle
- c. le champ d'accélération d'entraînement est uniforme
- d. le champ d'accélération d'entraînement est indépendant du temps.

2. À la surface terrestre, l'intensité du champ de pesanteur varie :

- a. à cause de la force d'inertie d'entraînement
- b. à cause de la force d'inertie de Coriolis
- c. parce que la Terre n'est pas ronde
- d. en fait, on néglige ses variations car elles sont trop faibles pour être accessibles aux instruments de mesure.

3. Au pôle Nord, le plan d'oscillation du pendule de Foucault fait un tour :

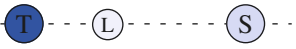


- a. en un jour
- b. en un peu plus d'un jour

- c. en un peu moins d'un jour
- d. en fait, au pôle, il n'y a pas de rotation.

4. Un projectile est lancé vers le haut dans le référentiel terrestre. Lorsqu'il retombe à l'altitude initiale, il a :

- a. dévié vers l'Est
- b. dévié vers l'Ouest
- c. en fait, les déviations se compensent et il retombe exactement au point de départ.

5. Sur les trois figures suivantes, pour quel cas attend-on des marées de plus faible amplitude ?

- a. 
- b. 
- c. 

► Solution, page 221.

Exercices

1 Lunaison

On appelle lunaison (ou période de révolution synodique de la Lune) la durée séparant deux phases identiques de la Lune pour un observateur terrestre.

Sachant que la Lune tourne sur elle-même, dans le référentiel de Copernic \mathcal{R}_C en 27,32 jours, et qu'elle effectue une révolution autour de la Terre pendant le même temps, déterminer la lunaison (on pourra supposer que la Lune se déplace dans le plan de l'écliptique).

2 Un cas de mouvement terrestre à forces d'inertie nulles

Un motard emmène une amie faire un tour sur sa moto, un prototype mis au point pour l'occasion. Atteignant une vitesse de pointe de $296 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, il s'écrit : « J'ai réussi à annuler les forces d'inertie ! ».

L'aventure se produisant dans l'hémisphère Nord, déterminer la latitude du lieu, la direction empruntée et le sens de la marche de la moto. Comment peut-on retrouver ce résultat à l'aide du référentiel géocentrique ?

3 Pesanteur apparente dans un navire

Un navire se déplace vers l'ouest, en suivant un parallèle, à la latitude $\lambda = 40^\circ$, à la vitesse $v = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Quelle est la variation relative du poids d'un corps associé à un tel mouvement, pour un passager du navire, qui utilise l'équilibre local d'un point matériel pour définir le poids d'un corps ?

4 Variation du poids d'un corps

Évaluer la variation relative du poids d'un corps situé à l'équateur terrestre, due au terme de marée solaire, les pesées (avec balance à ressort) ayant lieu en deux points diamétralement opposés, alignés avec le centre de la Terre et le Soleil. Conclure sur l'influence des termes différentiels sur le poids d'un corps.

Données

$d(\text{Terre-Soleil}) = TS = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ et $R_T = 6\,370 \text{ km}$.

5 Usure des rails

Un train de masse $m = 2 \cdot 10^6 \text{ kg}$ avance vers le nord, le long d'un méridien, à la vitesse de $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, dans une région de latitude $\lambda = 45^\circ$ de l'hémisphère Nord.

Préciser la valeur et la direction de la force latérale exercée par le train sur les rails.

6 Stabilité interne d'un globule

On appelle ici globule un petit corps sphérique homogène de masse volumique μ .

Un tel globule a été émis par éruption volcanique par un astre A et on le suppose en mouvement dans le référentiel A -centrique de l'astre, au voisinage de la surface de celui-ci.

En comparant à la périphérie du globule le champ gravitationnel propre et le terme de marée dû à l'astre, formuler une condition de cohésion des particules du globule.

On désignera par ρ la masse volumique moyenne de l'astre et on montrera que si l'inégalité $\mu > 2\rho$ n'est pas vérifiée, il y a risque de dislocation du corps.

7 Encore raté !

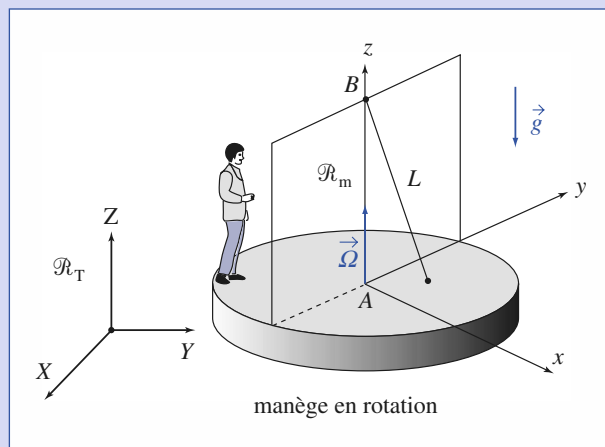
Disposant d'une lunette de visée, un tireur vise une cible (une mire avec réticules horizontaux et verticaux) placée plein nord à un kilomètre de lui. Connaissant la vitesse de la balle ($v_0 = 800 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$), il corrige l'angle de hausse pour tenir compte de l'influence de la pesanteur.

Les réglages étant supposés parfaits et la résistance de l'air négligeable, à quelle distance du centre la balle atteindra-t-elle la cible ?

Données : la latitude du lieu est $\lambda = 45^\circ$.

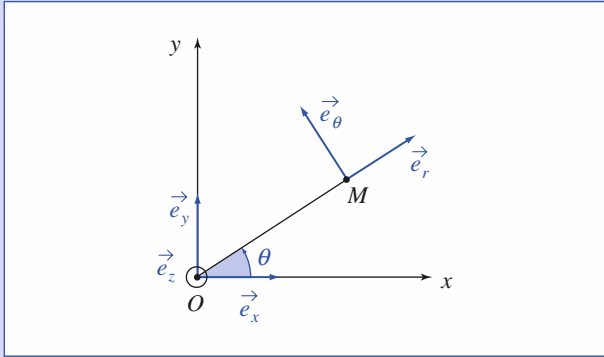
8 Mouvement d'un pendule étudié dans un référentiel tournant

Un observateur est debout sur la plate-forme d'un manège en rotation à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ constante autour de l'axe (Az) par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen.



Exercices

Il observe le mouvement d'un point matériel M de masse m , accroché par l'intermédiaire d'un fil de masse négligeable de longueur L en B (B étant fixe lors de la rotation du manège) ; M effectue de petits mouvements autour de sa position d'équilibre A .



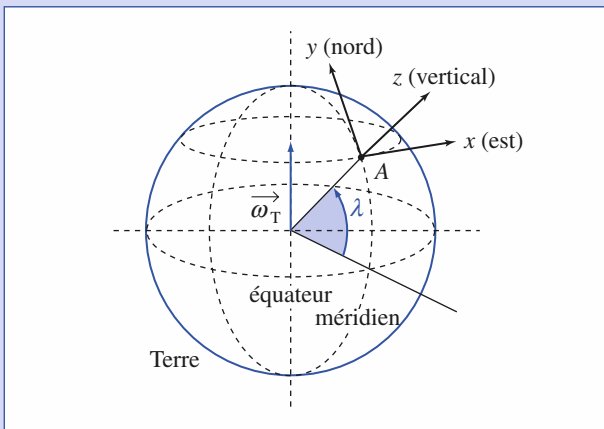
On pose $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$.

- Établir l'équation différentielle du mouvement de M dans le référentiel de l'observateur (\mathcal{R}_m) défini par le repère ($A ; x, y, z$) lié au manège.
- Vérifier cette équation en considérant un mouvement connu.

9

Chute libre dans le référentiel terrestre : Déviation vers l'est

On abandonne sans vitesse initiale un point matériel à l'altitude h dans le référentiel terrestre, à la verticale du point A de latitude λ à la surface de la Terre.



1) En négligeant l'influence de la force de Coriolis sur le mouvement, établir les expressions de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$, ainsi que le temps de chute. Faire l'application numérique pour $h = 150$ m et $g = 9,81$ m . s⁻².

2) Vérifier le caractère correctif du terme de Coriolis. Exprimer de façon générale la force de Coriolis, et identifier le terme correctif principal donné par cette force.

3) Écrire, au premier ordre de correction, les équations du mouvement avec la force de Coriolis.

Vérifier la « déviation vers l'Est » annoncée, et faire l'application numérique à la latitude $\lambda = 50^\circ$.

10

Déviation vers l'est en utilisant le référentiel géocentrique

Nous avons montré (exercice précédent) qu'un point matériel abandonné sans vitesse initiale à l'altitude h au-dessus du sol atteignait celui-ci en un point distant de :

$$\Delta x = \omega_T \cos(\lambda) \left(\frac{g_0}{3} \right) \left(\frac{2h}{g_0} \right)^{\frac{3}{2}}$$

de la verticale du point de lancement, la déviation se faisant vers l'est (en l'absence de perturbation et en négligeant la résistance de l'air).

Montrer qu'on peut retrouver ce résultat en utilisant le référentiel géocentrique.

11

Analogie magnétique du pendule de Foucault

Une particule de masse m et de charge q est mobile dans un plan (xOy) en présence d'un champ électrostatique $\vec{E} = -\alpha \vec{OM}$ et d'un champ magnétostatique uniforme $\vec{B} = B \vec{e}_z$. On néglige le terme de pesanteur ainsi que tout frottement.

1) Établir l'équation du mouvement de la particule et faire un parallèle avec l'équation bidimensionnelle du pendule de Foucault dans les cas $\alpha q > 0$.

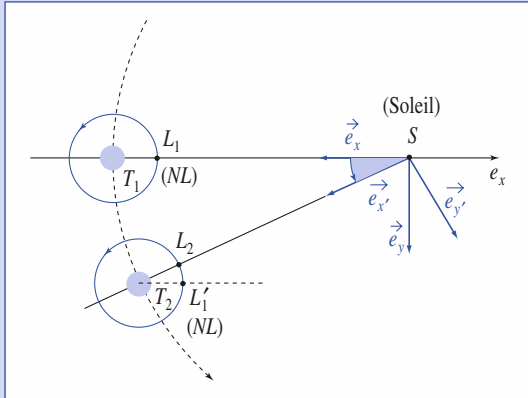
2) En étudiant les propriétés du moment cinétique en O de la particule établir une intégrale première du mouvement et montrer que, pour des conditions initiales connues (avec \vec{L}_O non nul), il existe une distance minimale d'approche au point O .

Corrigés

Solution du tac au tac, page 218.

1. Vrai : a, c Faux : b, d
2. Vrai : a, c Faux : b, d
3. Vrai : a Faux : b, c, d
4. Vrai : b Faux : a, c
5. Vrai : c Faux : a, b

1



Les vitesses angulaires de rotation de la Lune sur elle-même et autour de la Terre dans le référentiel de Copernic \mathcal{R}_C sont identiques : nous voyons toujours la même face de la Lune. La composition des vitesses angulaires de rotation donne :

$$\vec{\omega}_{\text{Lune}/\mathcal{R}_C} = \vec{\omega}_{\text{Lune}/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}_C}.$$

La lunaison représente « le passage de L_1 à L_2 », soit $T_{\text{lunaison}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{Lune}/\mathcal{R}}}$.

« Le passage de L_1 à L_1' » correspond à la période de rotation de Lune dans \mathcal{R}_C , soit

$$T_{\text{rotation}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{Lune}/\mathcal{R}_C}} = 27,32 \text{ jours}, \text{ d'où } T_{\text{lunaison}} = 29,53 \text{ jours}.$$

La Lune étant l'astre prépondérant pour les marées océaniques, cette période se retrouve naturellement dans les données des horaires de marée.

2

On cherche à annuler

$$\vec{F}_{i_e} + \vec{F}_{i_c} \text{ avec :}$$

$$\vec{F}_{i_e} = m\omega_T^2 \vec{HM}$$

$$\text{et } \vec{F}_{i_c} = -2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}$$

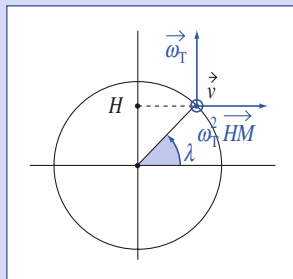
Le véhicule doit se déplacer vers l'ouest en un point de latitude λ telle que :

$$\cos \lambda = \frac{2v}{\omega_T R_T}, \text{ soit } \lambda = 69,3^\circ.$$

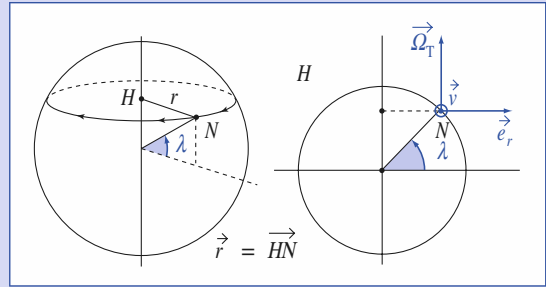
On vérifie que les accélérations du véhicule dans \mathcal{R}_T et \mathcal{R}_O sont identiques :

$$\begin{aligned} m\vec{a}_{\mathcal{R}_T} &= m\vec{g} + \vec{R} - 2\vec{\omega}_T \wedge \vec{v} \\ &= m\mathcal{G}_T(M) + \vec{R} + m\omega_T^2 \vec{HM} - 2\vec{\omega}_T \wedge \vec{v} \\ &= m\mathcal{G}_T(M) + \vec{R} \end{aligned}$$

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}_O} = \vec{R} + m\mathcal{G}_T(M) \text{ par définition.}$$



3



Si un point matériel est en équilibre par rapport au navire, lorsque nous lui appliquons une force \vec{f}_a (en plus des forces de pesanteur), nous avons :

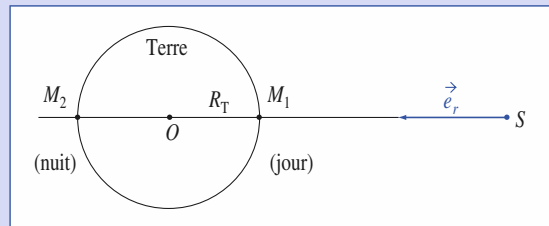
$$m\vec{a}_{\text{bateau}} = \vec{0} = \vec{f}_a + m\vec{g} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$$

$$\text{soit } \vec{f}_a + m\vec{g} + m\frac{v^2}{r}\vec{e}_r - 2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v} = \vec{0}.$$

Il existe donc une pesanteur apparente $\vec{g}' = \vec{g} + \left(\frac{v^2}{r} - 2\omega_T v\right)\vec{e}_r$.

$$\text{A.N. : } \frac{g' - g}{g} \approx 1,7 \cdot 10^{-4}.$$

4



Étudions le terme de marée en M_1 :

$$\vec{\gamma}_S(M_1) = \vec{\mathcal{G}}_S(M_1) - \vec{\mathcal{G}}_S(O) = (f(r) - f(d))\vec{e}_r$$

$$\text{avec } f(r) = -G\frac{M_S}{r^2} \text{ et } r - d = -R_T.$$

$$\text{D'où : } \vec{\gamma}_S(M_1) = \left(-R_T 2G\frac{M_S}{d^3} - \frac{R_T^2}{2} 6G\frac{M_S}{d^4}\right)\vec{e}_r$$

$$\text{en développant à l'ordre deux, et } \vec{\gamma}_S(M_2) = \left(R_T G\frac{M_S}{d^3} - \frac{R_T^2}{2} 6G\frac{M_S}{d^4}\right)\vec{e}_r.$$

$\vec{\mathcal{G}}(M_1)$ est de même sens que \vec{e}_r et $\vec{\mathcal{G}}(M_2)$ en sens inverse. Nous en déduisons donc que l'écart relatif sur le poids est :

$$\frac{p_2 - p_1}{p} = -\frac{m\vec{e}_r[\gamma_S(M_2) + \gamma_S(M_1)]}{mg} = 6\frac{R_T^2}{d^4} G\frac{M_S}{g}$$

Sachant que $G\frac{M_S}{d^3} = \frac{4\pi^2}{T_{\text{orb}}^2}$, nous avons $\frac{p_2 - p_1}{p} = 6,6 \cdot 10^{-12}$ (avec la

Lune nous aurions trouvé $5,7 \cdot 10^{-9}$).

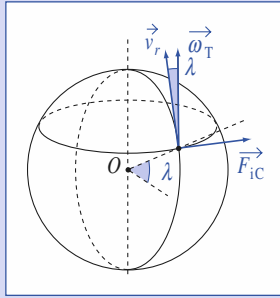
Ces termes sont trop faibles pour être mis en évidence.

Corrigés

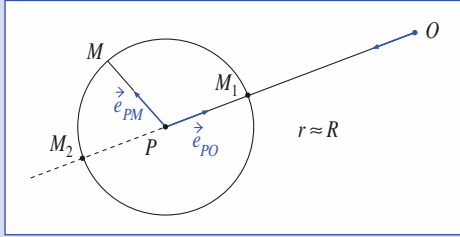
5 $\vec{F}_{iC} = -2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}_r$.

Cette force doit être compensée par les rails : le rail droit (plus à l'est) sera donc plus usé.

$$F_{iC} = 2m\omega_T v_r \sin \lambda = 5,7 \text{ kN}.$$



6



Soit P le centre du globule et O le centre de l'astre. Le référentiel A -centrique \mathcal{R}_O est supposé galiléen, mais le référentiel P -centrique \mathcal{R}_P ne l'est pas.

La relation fondamentale de la dynamique, appliquée à une masse δm située en M donne $\delta m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_P} = \delta m (\vec{\mathcal{G}}_P(M) + \vec{\mathcal{G}}_A(M)) - \delta m \vec{a}_c(M)$,

$$\text{avec } \vec{a}_c(M) = \vec{a}(P)_{/\mathcal{R}_O} = \vec{\mathcal{G}}_A(P), \text{ d'où :}$$

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_P} = \vec{\mathcal{G}}_P(M) + [\vec{\mathcal{G}}_A(M) - \vec{\mathcal{G}}_A(P)].$$

Le second terme est le terme de marée dû à l'influence de l'astre A dans \mathcal{R}_P .

Si le terme de marée (voisin de $2G \frac{M_A}{r^3} a$) est inférieur à $\mathcal{G}_P(M)$:

($\mathcal{G}_P(M) = G \frac{M_P}{a^2}$), la cohésion du globule est possible : c'est-à-dire si

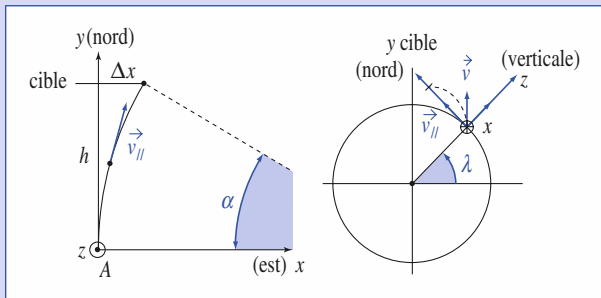
$$\frac{M_P}{a^3} > 2 \frac{M_A}{R^3}; \text{ comme } M_P = \frac{4}{3} \pi a^3 \mu \text{ et } M_A = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho, \text{ d'où } \mu > 2\rho.$$

Si $\mu < 2\rho$ le globule peut se disloquer.

7

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la balle dans \mathcal{R}_T donne :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}.$$



Seul nous intéresse le mouvement projeté dans le plan horizontal, soit :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -2\omega_T \sin \lambda \vec{e}_z \wedge \vec{v}_{//}.$$

L'accélération est normale à la trajectoire. Celle-ci est une portion de cercle (dans le plan horizontal) de rayon $\rho = \frac{v_{//}}{2\omega_T \sin \lambda}$.

$$v_{//} = v_0 \text{ et } \Delta x = \rho(1 - \cos \alpha), \text{ avec } \sin \alpha \approx \frac{h}{\rho},$$

$$\text{soit } \Delta x \approx \frac{h^2}{2\rho} = \frac{h^2 \omega_T \sin \lambda}{v_0}.$$

A.N. : $\Delta x = 6,5 \text{ cm}$ vers l'est.

8

1) Le point matériel est soumis à la tension du fil \vec{T} , et à son poids $m\vec{g}$.

M effectuant de petits mouvements autour de (Az) , M se déplace pratiquement dans un plan horizontal.

D'où :

$$|\vec{T}| = mg$$

$$\text{et } \vec{T} + m\vec{g} = -m\vec{g} \frac{\vec{AM}}{L}$$

$$\text{soit } \vec{T} + m\vec{g} = -m\omega_0^2 \vec{AM}.$$

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à M dans le référentiel du manège donne :

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_m} = -m\omega_0^2 \vec{AM} + m\Omega^2 \vec{AM} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_m}$$

soit :

$$\left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}_m} = -(\omega_0^2 - \Omega^2) \vec{r} - 2\vec{\Omega} \wedge \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_m}, \text{ avec } \vec{r} = r\vec{e}_r.$$

2) Un mouvement connu : mouvement d'oscillation dans un plan pour un observateur du référentiel terrestre, soit :

$$r = r_0 \cos \omega_0 t \text{ et } \theta = -\Omega t.$$

En développant et en projetant sur \vec{e}_r et \vec{e}_θ , nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -(\omega_0^2 - \Omega^2)r + 2\Omega r \frac{d\theta}{dt} \\ 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -2\Omega \frac{dr}{dt} \end{cases}$$

La vérification est évidente.

Remarque

L'équation obtenue :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -(\omega_0^2 - \Omega^2) \vec{r} - 2\vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

est à rapprocher de celle relative à l'évolution du pendule de Foucault (cf. § 4.7.3.) :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\omega_0^2 \vec{r} - 2\vec{\omega}_{Tz} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

ou encore :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -[(\omega_0^2 + \omega_{Tz}^2) - \omega_{Tz}^2] \vec{r} - 2\vec{\omega}_{Tz} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

La solution de cette dernière équation correspond à un pendule oscillant avec la pulsation $\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_T^2} \approx \omega_0$ (car $\omega_0 \gg \omega_T$) et dont le plan d'oscillation tourne à $-\omega_T \vec{e}_z$.

9

1) L'équation du mouvement de chute libre est simplement :

$$m\vec{a} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z, \text{ donc :}$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \frac{dz}{dt} = -gt \quad \text{et} \quad z = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

Le temps de chute est :

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad \text{A.N. : } \Delta t = 5,53 \text{ s.}$$

2) La vitesse maximale est $g\Delta t = \sqrt{2gh} \approx 54,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Le rapport de la force de Coriolis au poids est au plus de l'ordre de :

$$\frac{2\omega_T \cdot g\Delta t}{g} \approx 8 \cdot 10^{-4}.$$

La force de Coriolis est bien un terme correctif (il sera sans doute plus difficile de négliger les frottements de l'air lors de la chute).

Son expression générale est :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ic} &= -2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v} \\ &= 2m\omega_T [(-\cos\lambda \dot{z} + \sin\lambda \dot{y})\vec{e}_x + (-\sin\lambda \dot{x} + \cos\lambda \dot{z})\vec{e}_y] \end{aligned}$$

dont le terme prépondérant est :

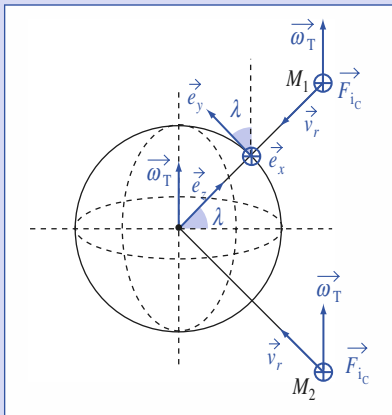
$$\vec{F}'_{ic} = -2m\omega_T \cos\lambda \dot{z} \vec{e}_x$$

puisque le mouvement principal est vertical.

3) Le mouvement est légèrement perturbé suivant x : $\ddot{x} \approx -2\omega_T \cos\lambda \dot{z}$, où nous pouvons remplacer \dot{z} par son expression approchée $-gt$.

Il vient alors : $\ddot{x} = 2\omega_T \cos\lambda gt$, soit $x = \frac{1}{3}g\omega_T \cos\lambda \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}$ au point de chute.

L'application numérique donne : $x = 2,6 \text{ cm}$ au point de chute, ce qui est très inférieur à h .



Chute libre et déviation vers l'est. \vec{F}'_{ic} est orientée suivant \vec{e}_x (vers l'est) pour les deux points M_1 et M_2 située dans le plan de la figure.

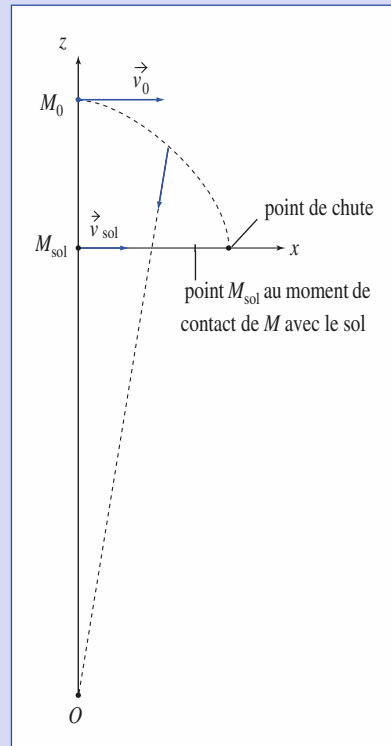
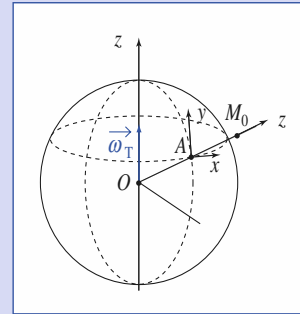
$$\vec{\omega}_T = \omega_T(\vec{e}_y \cos\lambda + \vec{e}_z \sin\lambda).$$

L'expérience a été réalisée historiquement dans un point de mine.

En fait, la valeur expérimentale est légèrement inférieure à la valeur prévue, compte tenu des frottements dans l'air.

À l'ordre deux, en poursuivant la méthode, on constate une très faible déviation vers le sud (terme en $\omega_T^2 \dots$).

10



Le référentiel \mathcal{R}_O géocentrique est galiléen. Soit $A(x, y, z)$ le repère lié à \mathcal{R}_O . On notera R_T le rayon terrestre.

Dans ce repère, un point matériel lâché sans vitesse initiale de l'altitude h au-dessus du sol est tel qu'à $t = 0$:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = h \\ v_{0x} &= (h + R_T)\omega_T \cos\lambda, \quad v_{0y} = 0 \quad \text{et} \quad v_{0z} = 0. \end{aligned}$$

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à cette masse dans \mathcal{R}_O donne :

$$\vec{a}(M) = \vec{\mathcal{G}}_T(M) = -GM_T \frac{\vec{OM}}{OM^3}.$$

Corrigés

Développons cette accélération en tenant compte de $R_T \gg x, y$ et z :

$$\vec{a}(M) = -GM_T \left[\left(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (R_T + z)\vec{e}_z \right) \cdot \left(x^2 + y^2 + (R_T + z)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \right]$$

$$\vec{a}(M) \approx -\frac{GM_T}{R_T^2} \left(\frac{x}{R_T}\vec{e}_x + \frac{y}{R_T}\vec{e}_y + \left(1 - \frac{2z}{R_T} \right) \vec{e}_z \right).$$

Nous obtenons, avec $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$:

$$\ddot{x} = -\frac{g_0}{R_T}x; \quad \ddot{y} = -\frac{g_0}{R_T}y; \quad \ddot{z} = -g_0 \left(1 - \frac{2z}{R_T} \right).$$

Les solutions, en posant $\Omega^2 = \frac{g_0}{R_T}$, sont :

$$\begin{cases} x = (h + R_T) \frac{\omega_T}{\Omega} \cos \lambda \sin \Omega t \\ y = 0 \\ z = \frac{R_T}{2} + \left(h - \frac{R_T}{2} \right) \text{ch}(\sqrt{2}\Omega t). \end{cases}$$

Si le point matériel tombait suivant la verticale locale, il arriverait au point B lié à R_T , coïncidant avec A à la date $t = 0$: $x_B = R_T \omega_T \cos \lambda t$, t étant la durée

de la chute voisine de $\sqrt{\frac{2h}{g_0}}$ (et donc telle que $\Omega t = \sqrt{\frac{2h}{R_T}} \ll 1$).

La déviation vers l'est est donc représentée par :

$$\Delta x = (h + R_T) \frac{\omega_T}{\Omega} \cos \lambda \sin \Omega t - R_T \omega_T \cos \lambda t, \quad \text{avec } t = \sqrt{\frac{2h}{g_0}}.$$

Le développement limité donne alors :

$$\Delta x = h \omega_T \cos \lambda t - \frac{R_T}{6} \cos \lambda \omega_T \Omega^2 t^3 = \omega_T \cos \lambda \left[\frac{2h}{g_0} - \frac{R_T \Omega^2}{6} \left(\frac{2h}{g_0} \right)^{\frac{3}{2}} \right],$$

$$\text{soit} \quad \Delta x = \left(\frac{2h}{g_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\omega_T \cos \lambda}{3} g_0.$$

Ce résultat est cohérent avec le résultat de l'étude de la déviation vers l'est effectuée dans le référentiel terrestre (voir exercice précédent).

11

1) La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule donne $m\vec{a}(M) = q\vec{\alpha}\vec{OM} + q\vec{v}(M) \wedge B\vec{e}_z$, que nous pouvons écrire :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega_0^2\vec{r} - 2\vec{\Omega}_F \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \text{avec } \omega_0^2 = \frac{aq}{m} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}_F = \frac{qB}{2m}\vec{e}_z.$$

2) La force magnétique ne travaille pas. Il existe un invariant, déduit de l'énergie mécanique de cette particule, qui se conserve :

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}aqr^2 = \text{cte.}$$

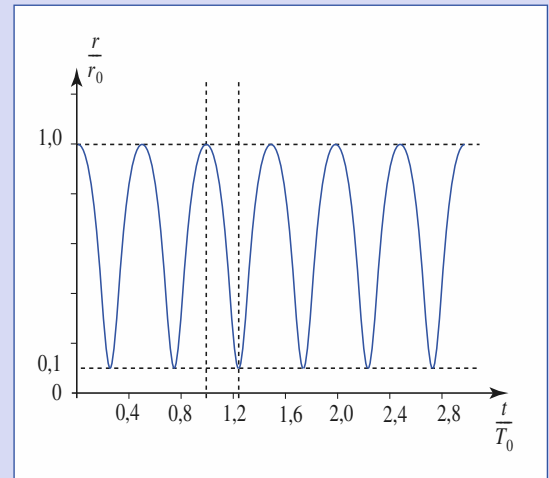
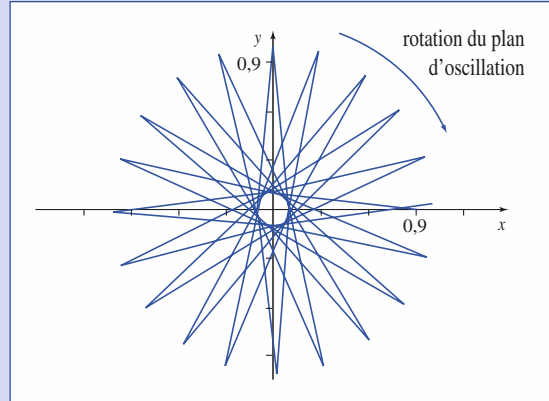
Avec, à $t = 0$: $r = r_0$, $\dot{r}(0) = 0$, $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, nous obtenons :

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \omega_0^2(r_0^2 - r^2) \quad \text{et} \quad (r \leq r_0).$$

L'application du théorème du moment cinétique en O à la particule nous donne :

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = -2\Omega_F r \dot{r},$$

soit $r^2\dot{\theta} = \Omega_F(r_0^2 - r^2)$ (même conditions initiales).



L'élimination de $\dot{\theta}$ donne :

$$\dot{r}^2 + \Omega_F^2 \frac{(r_0^2 - r^2)^2}{r^2} + \omega_0^2(r^2 - r_0^2) = 0.$$

$\dot{r}^2 > 0$; $r_0^2 - r^2 > 0$ et, en éliminant la solution évidente $r = r_0$:

$$r^2 \geq \frac{\Omega_F^2}{\omega_0^2 + \Omega_F^2} r_0^2, \quad \text{soit} \quad \frac{r_0}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{\Omega_F^2}}} < r < r_0.$$

Ce que nous pouvons visualiser sur la simulation suivante où $\omega_0 = 10\Omega_F$:

$$r_{\min} = \frac{r_0}{\sqrt{1 + 100}} \approx \frac{r_0}{10}.$$

Systeme de deux points matériels

10

Introduction

Le problème à deux corps est un problème d'une importance théorique considérable.

Cela est dû aux trois raisons suivantes :

- *en mécanique classique, toutes les forces connues sont des forces à deux corps ;*
- *de nombreux systèmes physiques peuvent être modélisés par des systèmes matériels à deux particules, comme nous le verrons dans ce chapitre ;*
- *ce problème a la particularité de recevoir une solution générale complète par l'utilisation du référentiel barycentrique et de la notion de masse réduite.*

Les lois de conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique nous permettront d'obtenir des résultats importants valables pour toutes les forces d'interaction. Lorsque les forces d'interaction dérivent d'une énergie potentielle, la conservation de l'énergie mécanique permettra de déterminer les équations du mouvement. Cette utilisation des lois de conservation est remarquable d'efficacité et mérite d'être soulignée.

O B J E C T I F S

- Résoudre le problème à deux corps en utilisant sa réduction canonique.
- Utiliser et montrer l'importance des lois de conservation.
- Définir l'énergie potentielle effective d'un système de deux particules en interaction.
- Dégager les notions d'état lié et d'état de diffusion.

P R É R E Q U I S

- MATHÉMATIQUES
 - Coordonnées polaires.
- PHYSIQUE
 - Référentiel barycentrique.
 - Système de points matériels.

Description du système

1.1. Le système étudié

Nous avons étudié aux *chapitres* 1 et 2 la cinématique et la dynamique d'un point matériel.

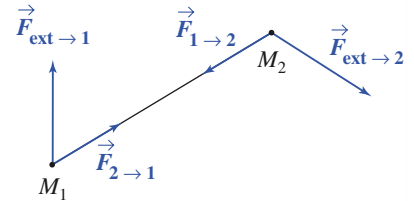
Nous nous intéressons ici au comportement d'un système constitué de deux points matériels, notés M_1 et M_2 , de masses respectives m_1 et m_2 .

Ce modèle peut être utilisé pour décrire (de façon simplifiée) les mouvements de deux astres en interaction gravitationnelle, de deux charges en interaction coulombienne, etc. et constitue une première approche de l'étude plus générale d'un système de N corps en interaction.

Les points matériels M_1 et M_2 sont soumis aux effets (*doc.* 1) :

- de leur interaction mutuelle : la force exercée par M_1 sur M_2 sera notée $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$. Nous savons que l'interaction entre points matériels vérifie $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$, colinéaire à $\overrightarrow{M_1 M_2}$;
- de leur interaction avec le « milieu extérieur », c'est-à-dire tout ce qui n'appartient pas au système de deux points matériels.

Nous noterons ainsi $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1}$ et $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2}$ les forces exercées respectivement sur M_1 et M_2 par le milieu extérieur.



Doc. 1. Actions exercées sur le système.

1.2. Repérage des positions

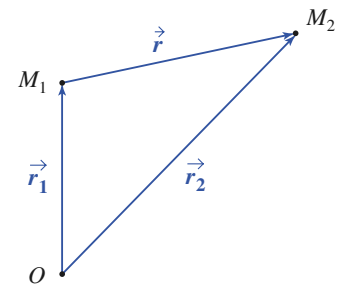
1.2.1. Positions absolues, position relative

Dans un repère d'origine O lié au référentiel \mathcal{R} d'étude, les positions des deux points matériels sont notées (*doc.* 2.) :

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1} \quad \text{et} \quad \vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}.$$

La position relative de M_2 par rapport à M_1 est :

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \overrightarrow{M_1 M_2}.$$



Doc. 2. Positions absolue et relative.

1.2.2. Barycentre G

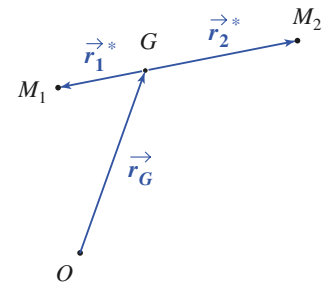
Le barycentre des deux points matériels M_1 et M_2 , de masse m_1 et m_2 , est défini par :

$$m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0}.$$

Nous pouvons développer cette égalité de façon à faire apparaître la position absolue du centre d'inertie G du système (*doc.* 3) :

$$m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_G) + m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_G) = \vec{0}$$

soit :
$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2}.$$



Doc. 3. Barycentre, positions barycentriques.

1.2.3. Positions barycentriques

Nous pouvons encore repérer les positions de M_1 et M_2 par rapport à leur barycentre (*doc.* 3) :

$$\vec{r}_1^* = \overrightarrow{GM_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_G \quad \text{et} \quad \vec{r}_2^* = \overrightarrow{GM_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_G$$

et constater qu'elles se déduisent de leur position relative par de simples homothéties :

$$\vec{r}_1^* = \frac{-m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{r}_2^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}.$$

Le barycentre G étant défini par $m_1 \vec{r}_1^* + m_2 \vec{r}_2^* = \vec{0}$:

Les points matériels M_1 et M_2 peuvent être décrits par leur position absolue :

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1} \quad \text{et} \quad \vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}$$

où O est l'origine d'un repère lié au référentiel d'étude.

Ils peuvent aussi être décrits par la position de leur barycentre et leur position relative :

$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{et} \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \overrightarrow{M_1 M_2};$$

leur position barycentrique se déduit de leur position relative par simple homothétie :

$$\vec{r}_1^* = \frac{-m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{r}_2^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}.$$

1.3. Cinématique du système

Décrite par l'évolution des positions absolues \vec{r}_1 et \vec{r}_2 , la cinématique du système nous ramène à la cinématique du point présentée au *chapitre* 1. Notons aussi que :

Décrite en terme de position barycentrique \vec{r}_G et position relative \vec{r} la cinématique du système fait apparaître :

- une translation d'ensemble associée au mouvement du point G ;
- une évolution de l'orientation de la position relative \vec{r} : le système tourbillonne autour de son barycentre ;
- une évolution de la distance $r = \|\vec{r}\|$: le système peut se dilater (ou se contracter).

Cette description est très générale et pourrait s'appliquer à un ensemble quelconque de points matériels : dans le cas d'un solide indéformable, dont les points restent à distance relative constante, nous pourrions retrouver les mouvements de translation et tourbillonnement (le solide est un objet à six degrés de liberté).

Dans le cas d'un fluide en mouvement, les phénomènes de dilatation ou contraction pourront venir s'ajouter aux mouvements précédents.

2 Éléments cinétiques du système

2.1. Éléments cinétiques de l'ensemble

2.1.1. Définition

À chaque point matériel M_i ($i = 1$ ou 2) est associée, dans le référentiel \mathcal{R} , une quantité de mouvement (ou impulsion), un moment cinétique calculable en tout point O , une énergie cinétique.

Leur sommation conduit, par définition, aux éléments cinétiques de l'ensemble.

2.1.2. Quantité de mouvement (ou résultante cinétique)

La quantité de mouvement du système est

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2.$$

Elle peut être développée sous la forme :

$$\vec{p} = \frac{d}{dt}(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = \frac{d}{dt}(m_1 + m_2) \vec{r}_G.$$

Nous en déduisons que :

La quantité de mouvement du système est $\vec{p} = M \vec{v}_G$, et peut s'identifier à la quantité de mouvement qu'aurait le barycentre G , si on lui affectait la masse totale $M = m_1 + m_2$.

2.1.3. Moment cinétique

Le moment cinétique du système, calculé en un point O , est :

$$\vec{L}_O = m_1 \overrightarrow{OM}_1 \wedge \vec{v}_1 + m_2 \overrightarrow{OM}_2 \wedge \vec{v}_2 = \vec{r}_1 \wedge \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{p}_2$$

et son moment cinétique par rapport à un axe $\Delta = (O, \vec{e}_\Delta)$ est :

$$L_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{e}_\Delta,$$

ce résultat étant indépendant du point O choisi sur l'axe Δ .

Remarque : Rappelons que comme le calcul du moment d'une force par rapport à un axe, le moment cinétique par rapport à l'axe Δ est nul lorsque la vitesse du point matériel est parallèle à cet axe, ou bien lorsqu'elle « passe » par cet axe.

2.1.4. Composition du moment cinétique

Relions, dans le référentiel \mathcal{R} , les valeurs prises par le moment cinétique du point matériel M_1 en deux points O et O' :

$$\vec{L}_{1O'} = m(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}_1) \wedge \vec{v}_1 = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p}_1 + \vec{L}_{1O}.$$

Par sommation, nous obtenons pour le système $\vec{L}_{O'} = \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{p} + \vec{L}_O$ et nous pouvons écrire que :

Les moments cinétiques en deux points O et O' sont liés par la relation :

$$\vec{L}_{O'} = \vec{L}_O + \vec{p} \wedge \overrightarrow{OO'}.$$

2.1.5. Énergie cinétique

L'énergie cinétique du système est :

$$\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2.$$

2.2. Référentiel barycentrique

2.2.1. Définition

\mathcal{R} étant le référentiel d'étude, le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* est le référentiel *en translation* par rapport à \mathcal{R} dans lequel la résultante cinétique du système est nulle : $\vec{p}_{/\mathcal{R}^*} = \vec{p}^* = \vec{0}$.

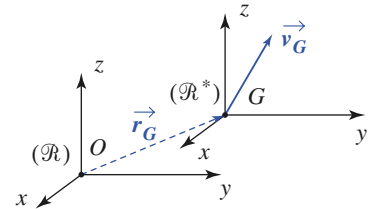
Remarque : Nous continuerons ensuite à noter avec un astérisque toute grandeur relative au référentiel barycentrique. Ainsi, \vec{v}_i^* est la vitesse $\vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}^*}$ du point M_i dans \mathcal{R}^* .

2.2.2. Référentiel du centre de masse

La quantité de mouvement est $\vec{p} = M\vec{v}_G$ dans \mathcal{R} et $\vec{p}^* = M\vec{v}_G^* = \vec{0}$ dans \mathcal{R}^* . Nous constatons que (doc. 4.) :

Le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* est en translation à vitesse \vec{v}_G par rapport au référentiel d'étude \mathcal{R} .

Le point G est fixe dans le référentiel barycentrique, encore appelé référentiel du centre de masse.



Doc. 4. \mathcal{R}^* est en translation par rapport à \mathcal{R} , à vitesse \vec{v}_G .

Notons que si le référentiel d'étude que nous choisissons est souvent galiléen (ou approximativement...), ce n'est peut-être pas le cas pour \mathcal{R}^* : le mouvement de translation de \mathcal{R}^* par rapport à \mathcal{R} n'est pas nécessairement rectiligne uniforme.

2.2.3. Le référentiel \mathcal{R}^* est en translation à vitesse \vec{v}_G

\mathcal{R}^* est en translation par rapport à \mathcal{R} , et les dérivées d'un vecteur sont identiques dans les deux référentiels :

$$\left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{\mathcal{R}^*}.$$

Tant que nous travaillerons dans ces deux référentiels, nous ne préciserons plus le référentiel de référence.

Bien entendu, les vitesses et accélérations diffèrent dans \mathcal{R} et \mathcal{R}^* . Les lois de composition des vitesses et accélérations sont ici très simples :

Dans \mathcal{R}^* , les champs de vitesse et accélération d'entraînement sont uniformes : $\vec{v}_e^*(M) = \vec{v}_G$ et $\vec{a}_e^*(M) = \vec{a}_G$, et il n'y a pas d'accélération de Coriolis.

2.2.4. Moment cinétique barycentrique

La loi de composition du moment cinétique :

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{O'} + \vec{OO'} \wedge \vec{p}$$

appliquée au moment cinétique exprimé dans le référentiel \mathcal{R}^* ($\vec{p}^* = \vec{0}$), nous indique que :

Dans le référentiel barycentrique, le moment cinétique du système est le même en tout point : $\vec{L}_O^* = \vec{L}_{O'}^* = \vec{L}^*$.

2.2.5. Mobile fictif d'un système à deux corps

Exprimons le moment et l'énergie cinétique des deux particules dans \mathcal{R}^* :

$$\vec{L}^* = \vec{L}_O^* = \vec{r}_1 \wedge m_1 \vec{v}_1^* + \vec{r}_2 \wedge m_2 \vec{v}_2^* = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \wedge m_2 \vec{v}_2^* = \vec{r} \wedge \frac{m_1 m_2}{m_1 m_2} \dot{\vec{r}},$$

$$\text{car : } \vec{v}_2^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}};$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_K^* &= \frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2} = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{-m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 (\dot{\vec{r}})^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 (\dot{\vec{r}})^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}^2. \end{aligned}$$

Ces deux expressions font apparaître la masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ appelée masse réduite du système à deux corps : elle est inférieure à m_1 et à m_2 .

Au système de deux points matériels peut être associé un mobile M fictif de masse réduite $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, de position barycentrique : $\vec{GM} = \vec{r}$, de vitesse barycentrique $\vec{v}^* = \dot{\vec{r}}$.

Le moment cinétique et l'énergie cinétique barycentriques du système de deux points matériels (de masse m_1 et m_2) s'identifient à ceux qu'aurait le mobile fictif M en mouvement dans le référentiel barycentrique :

$$\vec{L}^* = \mu \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_K^* = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 \quad \text{avec} \quad \vec{r} = \vec{GM} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

2.3. Théorèmes de Kœnig

2.3.1. Moment cinétique en G

Le moment cinétique, calculé dans \mathcal{R} , au point G , est :

$$\begin{aligned} \vec{L}_G &= m_1 \vec{GM}_1 \wedge \vec{v}_1 + m_2 \vec{GM}_2 \wedge \vec{v}_2 = m_1 \vec{r}_1^* \wedge (\vec{v}_G + \vec{v}_1^*) + m_2 \vec{r}_2^* \wedge (\vec{v}_G + \vec{v}_2^*) \\ &= \vec{0} \wedge \vec{v}_G + \vec{L}^*. \end{aligned}$$

Le moment cinétique du système au point G est égal à son moment cinétique barycentrique : $\vec{L}_G = \vec{L}^*$.

2.3.2. Premier théorème de Kœnig

Utilisons la loi de composition du moment cinétique pour exprimer le moment cinétique au point O :

$$\vec{L}_O = \vec{L}_G + \vec{OG} \wedge M \vec{v}_G.$$

Le premier terme s'identifiant au moment cinétique barycentrique :

Premier théorème de Kœnig

Le moment cinétique en O du système S de masse M est la somme du moment cinétique barycentrique et du moment cinétique en O du point

G affecté de toute la masse : $\vec{L}_O = \vec{L}^* + \vec{OG} \wedge M\vec{v}_G$.

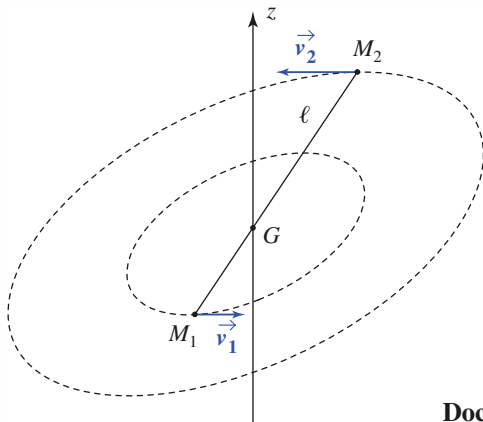
Application 1

Système en rotation

Soit le système de deux points matériels M_1 et M_2 , de masse m_1 et m_2 , reliés par un fil de masse négligeable et de longueur ℓ constante.

Leur barycentre G est fixe dans le référentiel d'étude \mathcal{R} , et ils sont en rotation autour de l'axe (Gz), orthogonal à M_1M_2 , à la vitesse angulaire ω (doc. 5.)

Exprimer le moment cinétique en G du système.



Doc. 5.

Plusieurs méthodes sont envisageables.

• *Calcul direct* : dans le référentiel \mathcal{R} de l'observateur, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \vec{L}_G &= m_1 \overrightarrow{GM_1} \wedge \vec{v}_1 + m_2 \overrightarrow{GM_2} \wedge \vec{v}_2 \\ &= m_1 \overrightarrow{GM_1} \wedge (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \end{aligned}$$

car $m_2 \overrightarrow{GM_2} = -m_1 \overrightarrow{GM_1}$;

$\vec{v}_1 = \omega \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{GM_1}$ et $\vec{v}_2 = \omega \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{GM_2}$, d'où :

$$\vec{L}_G = m_1 \omega \overrightarrow{GM_1} \wedge (\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{GM_1})$$

avec $\overrightarrow{GM_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{M_2M_1}$.

Le calcul du double produit vectoriel donne :

$$\vec{L}_G = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ell^2 \omega \vec{e}_z.$$

• *Second calcul* : le référentiel d'étude \mathcal{R} est également le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* .

$\vec{L}^* = \vec{L}_O$ est indépendant de O .

$\vec{L}_G = \vec{L}_{M_2} = m_1 \overrightarrow{M_2M_1} \wedge \vec{v}_1^*$, d'où :

$$\vec{L}_G = m_1 \omega \overrightarrow{M_2M_1} \wedge (\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{GM_1}).$$

Nous retrouvons bien le même résultat.

2.3.3. Énergie cinétique

L'énergie cinétique dans \mathcal{R} est :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_K &= \frac{1}{2} m_1 (\vec{v}_G + \vec{v}_1^*)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\vec{v}_G + \vec{v}_2^*)^2 \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \vec{v}_G^2 + (m_1 \vec{v}_1^* + m_2 \vec{v}_2^*) \cdot \vec{v}_G + \mathcal{E}_K^* \end{aligned}$$

où le terme central est nul par définition du référentiel barycentrique.

Second théorème de Kœnig

L'énergie cinétique du système S est la somme de son énergie cinétique barycentrique et de l'énergie cinétique du point G affecté de toute la

masse : $\mathcal{E}_K = \mathcal{E}_K^* + \frac{1}{2}Mv_G^2$.

L'énergie cinétique du système est donc minimale dans le référentiel barycentrique.

3 Dynamique d'ensemble

3.1. Actions mécaniques

3.1.1. Résultante des actions extérieures

La résultante des actions mécaniques subies par le système est :

$$\vec{R} = (\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1}) + (\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2}) = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1} + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2}$$

car les actions intérieures s'annulent.

La résultante des actions mécaniques subies par un système de points matériels est égale à la somme des forces extérieures subies par ces points :

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M_i} = \vec{R}_{\text{ext}} \quad (\vec{R}_{\text{int}} = \vec{0}).$$

3.1.2. Moment des actions extérieures

Calculons, de même, le moment en un point O des actions subies par le système :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_O &= \vec{OM}_1 \wedge (\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1}) + \vec{OM}_2 \wedge (\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2}) \\ &= \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}O} + \vec{M}_1 \vec{M}_2 \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \end{aligned}$$

où le dernier terme est, nul car $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ est colinéaire à $\vec{M}_1 \vec{M}_2$.

Le moment, en un point O , résultant des actions mécaniques subies par un système de points matériels, est égal à la somme des moments des forces extérieures subies par ces points :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \sum_i \vec{OM}_i \wedge \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M_i} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}O} \quad (\vec{\mathcal{M}}_{\text{int}O} = \vec{0}).$$

3.1.3. Loi de composition des moments

Le moment d'une force \vec{F} appliquée en un point M , peut être calculé en O ou en O' . Ces calculs sont liés par la relation :

$$\vec{\mathcal{M}}_{O'} = (\vec{O'O} + \vec{OM}) \wedge \vec{F} = \vec{O'O} \wedge \vec{F} + \vec{\mathcal{M}}_O.$$

Ce résultat peut être étendu par sommation à un ensemble de forces de résultante \vec{R} :

Les moments d'un ensemble de forces de résultante \vec{R} en deux points O et O' sont liés par la relation :

$$\vec{\mathcal{M}}_{O'} = \vec{\mathcal{M}}_O + \vec{R} \wedge \vec{OO}' .$$

3.1.4. Cas des forces de pesanteur

Les forces extérieures peuvent être appliquées en un point ou réparties sur l'ensemble du solide, comme le poids.

Notons $\vec{P} = M\vec{g}$ le poids total et calculons le moment résultant en O des forces de pesanteur :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \sum_{i=1}^n m_i \vec{OM}_i \wedge \vec{g} = M \vec{OG} \wedge \vec{g} = \vec{OG} \wedge \vec{P}$$

ou, pour une répartition continue de matière :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_O &= \int_S \rho(M) \vec{OM} \wedge \vec{g} \, d\tau = \left[\int_S \rho(M) \vec{OM} \, d\tau \right] \wedge \vec{g} = M \vec{OG} \wedge \vec{g} \\ &= \vec{OG} \wedge \vec{P} . \end{aligned}$$

L'action de la pesanteur sur un système est équivalente à une force égale au poids total et appliquée au barycentre.

Affirmer que « le poids s'applique en G » est un abus de langage, car le poids est une force répartie.

Cette propriété n'est vraie que parce que le champ de pesanteur \vec{g} est uniforme. Il faut bien se garder d'appliquer systématiquement en G toutes les forces réparties.

3.2. Théorème de la résultante cinétique (ou quantité de mouvement)

Écrivons pour chaque élément du système la relation fondamentale de la dynamique :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \end{cases} .$$

La somme de ces deux équations nous donne $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{R}_{\text{ext}}$.

Le mouvement du barycentre est identique à celui d'un point matériel de masse M soumis à une force égale à la résultante des forces extérieures :

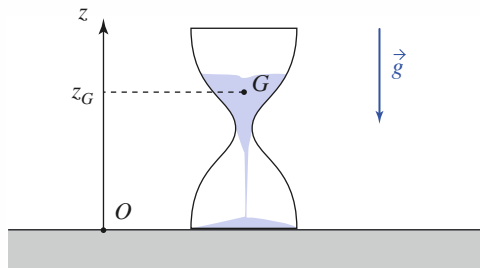
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{R}_{\text{ext}} .$$

Application 2

Poids apparent d'un sablier

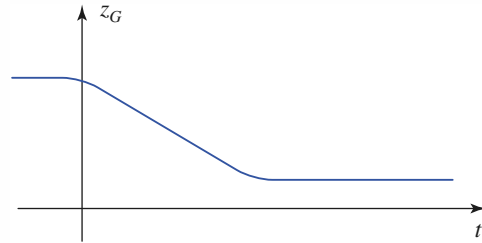
Pour préparer ses épreuves de physique, un étudiant s'impose de résoudre des exercices en un quart d'heure.

Il prend donc un sablier de masse totale m (doc. 6a), le retourne et se pose alors la question : son poids apparent, c'est-à-dire la force qu'il exerce sur la table, est-il modifié par rapport à la situation d'équilibre ?



Doc. 6a. Sablier.

Pour répondre à cette question, nous supposons que, à l'exception du début et de la fin du fonctionnement, l'altitude z_G du barycentre du sable décroît comme une fonction affine du temps (doc. 6b). Une étude qualitative de la courbe $z_G(t)$ suffit à prévoir le sens de la modification.



Doc. 6b. Altitude du barycentre.

Soit \mathcal{S} le système constitué par le sablier et les grains de sable, de masse totale m .

Si $\vec{R} = R\vec{e}_z$ est la réaction de la table sur le sablier, nous pouvons écrire :

$$m\ddot{z}_G = R - mg.$$

En raison du principe des actions réciproques, R représente également la force exercée par le sablier sur la table, soit son poids apparent.

À l'équilibre (lorsque l'écoulement est terminé) :

$$\ddot{z}_G = 0, \text{ d'où } R = mg.$$

En début de fonctionnement :

$$\ddot{z}_G < 0, \text{ d'où } R < mg.$$

Pendant le régime permanent d'écoulement :

$$\ddot{z}_G = 0, \text{ d'où } R = mg.$$

Pendant la phase d'arrêt, $\ddot{z}_G > 0$, d'où $R > mg$.

Avec le modèle d'écoulement adopté, le poids apparent est égal à sa valeur à l'équilibre pendant toute la durée du régime permanent.

3.3. Théorème du moment cinétique

3.3.1. Expression en un point fixe O

Comme précédemment, écrivons le théorème pour chaque point matériel :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{L}_{1O}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{O_{\text{ext} \rightarrow 1}} + \vec{\mathcal{M}}_{O_{2 \rightarrow 1}} \\ \frac{d\vec{L}_{2O}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{O_{\text{ext} \rightarrow 2}} + \vec{\mathcal{M}}_{O_{1 \rightarrow 2}} \end{cases}$$

et la somme nous donne $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{O_{\text{ext}}}$.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{O_{\text{ext}}} \text{ traduit le théorème du moment cinétique en un point } O \text{ fixe.}$$

3.3.2. Théorème du moment cinétique barycentrique

En appliquant le théorème du moment cinétique au point fixe O , utilisons le premier théorème de Kœnig: $\vec{L}_O = \vec{L}^* + \vec{OG} \wedge m\vec{v}_G$. Nous obtenons :

$$\vec{M}_{O_{\text{ext}}} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\vec{L}^*}{dt} + \vec{v}_G \wedge M\vec{v}_G + \vec{OG} \wedge \vec{R}_{\text{ext}}.$$

Sachant que (loi de composition des moments) $\vec{M}_{G_{\text{ext}}} = \vec{M}_{O_{\text{ext}}} + \vec{R}_{\text{ext}} \wedge \vec{OG}$ nous pouvons écrire :

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{M}_{G_{\text{ext}}}.$$

L'égalité $\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{M}_{G_{\text{ext}}}$ traduit le théorème du moment cinétique barycentrique.

Remarque : Nous pouvons lire ce résultat de deux façons qui sont assez surprenantes :

- nous pouvons appliquer le théorème du moment cinétique dans le référentiel galiléen \mathcal{R} , comme si le point G était fixe... ce qui n'est pourtant pas le cas en général !
- dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* , le théorème du moment cinétique s'applique au point fixe G , comme si \mathcal{R}^* était galiléen... ce qui n'est pourtant pas le cas en général !

3.3.3. Théorème scalaire du moment cinétique

Par projection sur un axe fixe Δ , l'équation du théorème du moment cinétique devient immédiatement :

L'égalité $\frac{dL_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta_{\text{ext}}}$ traduit le théorème du moment cinétique, en projection sur un axe fixe $\Delta = (O, \vec{e}_\Delta)$.

Application 3

Machine d'Atwood

Soit la masse d'Atwood ci-contre (doc. 7) ; calculer l'accélération de la masse m_1 sachant que la poulie est idéale (masse nulle).

Soit \mathcal{S} le système constitué de M_1 et de M_2 et Δ l'axe de la poulie. L'analyse cinématique donne :

$$\dot{z}_1 + \dot{z}_2 = 0 \quad \text{et} \quad L_\Delta = (-m_1\dot{z}_1 + m_2\dot{z}_2)R.$$

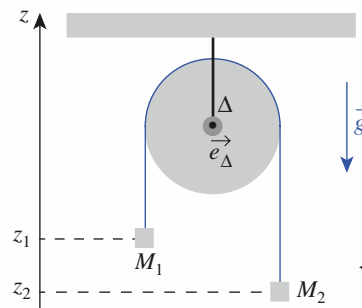
La poulie étant idéale, $\mathcal{M}_{\Delta_{\text{poulie} \rightarrow \mathcal{S}}} = 0$, donc :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta_{\text{poids}}} = (-m_2 + m_1)Rg.$$

D'où le résultat : $\ddot{z}_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}g.$

L'application du théorème du moment cinétique au

système \mathcal{S} permet de ne pas avoir à tenir compte des forces intérieures de tension, ainsi que de la force exercée par l'axe de la poulie qui a un moment nul par rapport à cet axe.



◀ Doc. 7. Machine d'Atwood.

3.4. Cas d'un référentiel non galiléen

Les résultats précédents découlent de la relation fondamentale de la dynamique, appliquée à chaque point matériel du système. Dans un référentiel non galiléen, nous savons qu'il suffit d'ajouter aux forces traduisant des interactions les forces d'inertie, donc :

Dans un référentiel non galiléen, les résultats précédents sont applicables, à condition de comptabiliser les forces d'inertie agissant sur les points matériels comme des forces extérieures supplémentaires.

3.5. Loi d'inertie pour un système

3.5.1. Système isolé ou pseudo-isolé

Le système de points matériels est isolé si chacun de ses éléments n'est soumis à aucune force extérieure.

C'est un cas théoriquement inaccessible à l'expérience (il est, par exemple, impossible d'éliminer les forces de gravitation). Il est moins irréaliste d'envisager un système pseudo-isolé tel que les forces extérieures s'annulent pour chacun de ses éléments : des points matériels glissant sans frottement sur un plan horizontal (poids et réaction du plan s'annulent) constituent un système pseudo-isolé. Cette situation est illustrée dans l'Application 4.

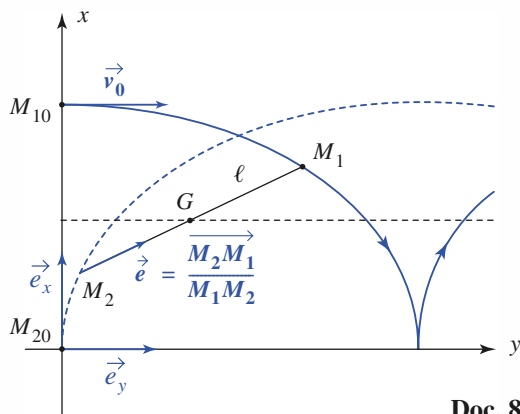
Application 4

Glissades

Deux points matériels M_1 et M_2 , de même masse m , reliés à un fil idéal de longueur ℓ constante, glissent sans frottements sur un plan horizontal (xOy).

À l'instant initial, ils occupent les positions :

$M_{10}(\ell, 0)$ et $M_{20}(0, 0)$ et un choc communiqué brusquement à M_1 la vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_y$, celle de M_2 étant nulle. Étudier le mouvement de M_2 et calculer la tension du fil (doc. 8).



Doc. 8.

Le système est pseudo-isolé.

Le barycentre G conserve sa vitesse initiale :

$$\vec{v}(G) = \frac{m_1 \vec{v}_0 + \vec{0}}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2} v_0 \vec{e}_y.$$

Repérons par $\theta = (\vec{e}_y, \vec{e})$ la position du système dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* , soit :

$$\vec{L}^* = 2m \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \dot{\theta} \vec{e}_z.$$

$\dot{\theta}$ conserve donc sa valeur initiale, donc $\dot{\theta} = \frac{v_0}{\ell}$, et nous obtenons :

$$x_2^* = -\frac{\ell}{2} \cos\left(\frac{v_0 t}{\ell}\right) \quad \text{et} \quad y_2^* = -\frac{\ell}{2} \sin\left(\frac{v_0 t}{\ell}\right),$$

$$x_2 = \frac{\ell}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{v_0 t}{\ell}\right) \right] \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{\ell}{2} \left[\frac{v_0 t}{\ell} - \sin\left(\frac{v_0 t}{\ell}\right) \right].$$

La trajectoire est une cycloïde.

\mathcal{R}^* étant galiléen, nous avons $m \vec{a}^*(M_2) = T \vec{e}$, soit :

$$T = m \dot{\theta}^2 \frac{\ell}{2} = \frac{m v_0^2}{2\ell}, \text{ constante.}$$

3.5.2. Lois de conservation

Si le système de points matériels est isolé, la résultante et le moment des actions extérieures sont nuls.

Dans ces conditions, la quantité de mouvement totale $\vec{p} = M\vec{v}_G$ et le moment cinétique barycentrique \vec{L}^* sont des constantes du mouvement.

Le moment cinétique \vec{L}_O en un point fixe du référentiel galiléen est lui aussi conservé.

4 Étude énergétique

4.1. Puissance des forces intérieures

4.1.1. Expression de la puissance

La puissance des forces intérieures au système s'écrit :

$$\mathcal{P} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_2 = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

La force intérieure est colinéaire à $\overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{r} = r \vec{e}_r$ (doc. 9), nous écrivons :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = F_{1 \rightarrow 2} \vec{e}_r$$

où $\vec{e}_r = \vec{e}_{12}$ est le vecteur unitaire dirigé de M_1 vers M_2 .

Nous avons d'autre part :

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \frac{d\overrightarrow{M_1 M_2}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt}.$$

Sachant que $\vec{e}_r \cdot \frac{d\vec{e}_r}{dt} = 0$ puisqu'il s'agit par définition d'un vecteur de norme constante, nous en déduisons que :

La puissance des forces intérieures au système est :

$$\mathcal{P} = F_{1 \rightarrow 2} \frac{dr}{dt}.$$

Nous savons que la résultante et le moment des actions intérieures sont nuls, mais :

La puissance des forces intérieures est en général non nulle si le système est déformable. En revanche, elle l'est pour un système rigide : $r = \text{cte}$.

4.1.2. Changement de référentiel

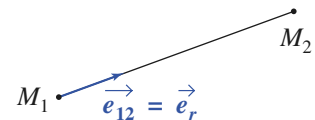
Dans un référentiel \mathcal{R}' , cette puissance s'écrirait :

$$\mathcal{P}' = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot (\vec{v}_2' - \vec{v}_1')$$

sachant que : $\vec{v}_2' - \vec{v}_1' = \left. \frac{d\overrightarrow{M_1 M_2}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \left. \frac{d\overrightarrow{M_1 M_2}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{M_1 M_2}$

nous voyons que :

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{M_1 M_2}) = \mathcal{P}, \text{ donc } \mathcal{P}' = \mathcal{P}$$



Doc. 9. Disposition du vecteur unitaire.

ce qui est naturel, car l'expression de la puissance \mathcal{P} ne fait intervenir que la variation de la distance séparant M_1 et M_2 , qui ne dépend pas du référentiel.

La puissance des forces intérieures au système ne dépend pas du référentiel.

4.2. Théorème de l'énergie cinétique

4.2.1. Énergie cinétique et puissance

Pour chaque point matériel ($i = 1$ ou 2), le théorème de la puissance cinétique s'écrit :

$$\frac{d\mathcal{E}_{K_i}}{dt} = \vec{F}_{\rightarrow i} \cdot \vec{v}_i$$

par sommation, nous en déduisons :

Pour le système de points matériels, le théorème de la puissance cinétique s'écrit :

$$\frac{d\mathcal{E}_K}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}$$

Remarques

• Le travail des forces extérieures dépend, comme l'énergie cinétique, du référentiel.

• Pour un système rigide, nous aurons simplement : $\frac{d\mathcal{E}_K}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}}$.

4.2.2. Énergie cinétique et travail

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit $\Delta\mathcal{E}_K = \mathcal{T}_{\text{ext}} + \mathcal{T}_{\text{int}}$ et fait intervenir le travail de toutes les forces entre l'état initial et l'état final du système.

Remarque : Comme la puissance, le travail des forces intérieures est indépendant du référentiel. Il est nul pour un système rigide.

Application J

Jeux de glace

Une femme A ($m_A = 55 \text{ kg}$) et un homme B ($m_B = 75 \text{ kg}$) se tiennent côte à côte et immobiles sur un lac gelé (négliger les frottements).

B repousse A en appliquant une force constante $F = 150 \text{ N}$. Sachant que son bras a une longueur $\ell = 70 \text{ cm}$, déterminer leurs vitesses.

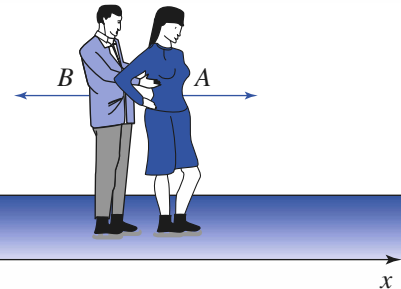
Le travail des forces extérieures est nul.

W_{int} se calcule aisément dans le référentiel lié à B :

$$W_{\text{int}} = F\ell = \Delta\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}(m_A v_A^2 + m_B v_B^2).$$

La quantité de mouvement se conserve, soit :

$$m_A v_A + m_B v_B = 0.$$



Doc. 10.

Il en résulte :

$$v_A^2 = 2F\ell \frac{m_B}{m_A(m_A + m_B)},$$

d'où $v_A = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $v_B = -1,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

4.3. Énergie potentielle

4.3.1. Force intérieure conservative

Nous avons discuté au *chapitre 7* le caractère conservatif d'une force centrale. De même ici, la force d'interaction entre les points M_1 et M_2 est conservative lorsque :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1 \rightarrow 2} &= F_{1 \rightarrow 2}(r) \vec{e}_r \\ &= -\frac{d\mathcal{E}_{P_{\text{int}}}(r)}{dr} \vec{e}_r\end{aligned}$$

où $\mathcal{E}_{P_{\text{int}}}(r)$ est la fonction énergie potentielle (définie à une constante près) associée aux interactions internes au système.

Par exemple, si les deux points sont reliés par un ressort de raideur k et de longueur ℓ_0 au repos, nous aurons :

$$\mathcal{E}_{P_{\text{int}}}(r) = \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2.$$

4.3.2. Énergie potentielle totale

Au système, nous associons la fonction énergie potentielle totale :

$$\mathcal{E}_P = \mathcal{E}_{P_{\text{int}}} + \mathcal{E}_{P_{\text{ext}}}$$

où $\mathcal{E}_{P_{\text{int}}}$ est la fonction énergie potentielle interne, et où $\mathcal{E}_{P_{\text{ext}}}$ comptabilise les énergies potentielles associées à toutes les forces extérieures qui sont conservatives.

Le travail de toutes les forces agissant sur le système s'écrit alors :

$$\mathcal{T} = -\Delta\mathcal{E}_P + \mathcal{T}_{\text{NC}}$$

où \mathcal{T}_{NC} désigne le travail des forces non conservatives, tant intérieures qu'extérieures (des forces de frottement visqueux, par exemple).

4.4. Énergie mécanique

L'énergie mécanique du système est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_{P_{\text{int}}} + \mathcal{E}_{P_{\text{ext}}}.$$

Le théorème de l'énergie s'écrit alors :

$$\Delta\mathcal{E}_M = \mathcal{T}_{\text{NC}}.$$

Pour un système conservatif, l'énergie mécanique est une constante du mouvement.

L'équation correspondante, appelée intégrale première de l'énergie $\mathcal{E}_M = \text{cte}$, peut alors être utilisée pour obtenir l'évolution du système s'il possède un unique degré de liberté.

Cette discussion est analogue à celle que nous avons déjà réalisée au *chapitre 3*.

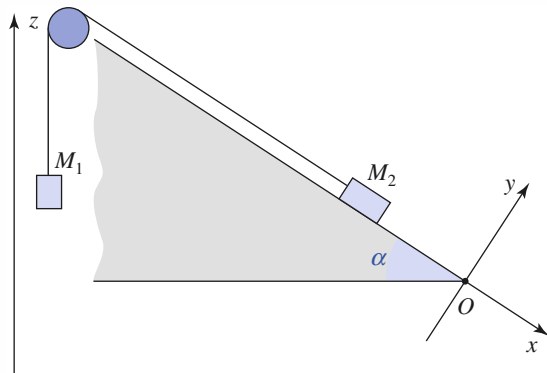
Application 6

Plan incliné et poulie

Deux objets de masse m_1 et m_2 sont représentés par les points matériels M_1 et M_2 . M_2 glisse sans frottements sur le plan incliné, et ils sont liés par un fil idéal qui passe dans la gorge d'une poulie idéale (doc. 11)

1) Décrire les forces non conservatives et déterminer leurs puissances.

2) Déterminer l'accélération de M_1 .



Doc. 11.

1) • Action du fil sur M_1 :

$$\vec{F}_{T_1} = T \vec{e}_z,$$

où T est la tension du fil et $\mathcal{P}_{T_1} = T \dot{z}_1$.

• Action du fil sur M_2 :

$$\vec{F}_{T_2} = -T \vec{e}_x,$$

avec $\dot{x}_2 = \dot{z}_1$, d'où $\mathcal{P}_{T_2} = -T \dot{z}_1$

• Action du plan incliné sur M_2 :

$$\vec{R} = R \vec{e}_y, \text{ soit } \mathcal{P}_R = R \vec{e}_y \cdot \dot{x} \vec{e}_x = 0.$$

• La puissance totale des forces non conservatives est bien nulle.

2) • Analyse cinématique :

$$z_2 = -x_2 \sin \alpha, \text{ soit } \dot{z}_2 = -\dot{x}_2 \sin \alpha = -\dot{z}_1 \sin \alpha.$$

$$\mathcal{E}_P = \mathcal{E}_{P_{\text{ext}}} = m_1 g z_1 + m_2 g z_2.$$

$$\mathcal{E}_K = \frac{1}{2} (m_1 \dot{z}_1^2 + m_2 \dot{x}_1^2) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{z}_1^2.$$

• Le système est conservatif, donc :

$$\frac{d\mathcal{E}_P}{dt} + \frac{d\mathcal{E}_K}{dt} = 0,$$

$$\text{soit } (m_1 + m_2) \ddot{z}_1 \dot{z}_1 + g \dot{z}_1 (m_1 - m_2 \sin \alpha) = 0.$$

En éliminant la solution parasite $\dot{z}_1 = 0$, nous obtenons :

$$\ddot{z}_1 = g \frac{m_2 \sin \alpha - m_1}{m_1 + m_2}.$$

5 Évolution du système de deux points matériels

5.1. Position du problème

La dynamique du système est contenue dans les deux équations :

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \end{cases}$$

Nous savons que la somme de ces équations nous permet d'étudier le mouvement du barycentre du système (théorème de la résultante cinétique) :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{R}_{\text{ext}}.$$

Pour achever l'étude du mouvement, nous devons encore déterminer le tourbillonnement et la dilatation du système des points M_1 et M_2 , c'est-à-dire étudier l'évolution du vecteur position relative $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \overrightarrow{M_1M_2}$.

Nous pouvons faire apparaître son équation d'évolution en divisant les équations des mouvements de M_1 et M_2 par m_1 et m_2 respectivement, et en les retranchant, ce qui nous donne :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1}}{m_1} + \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

ce qui n'est pas très explicite en général... mais se simplifiera beaucoup dans le cas d'un système isolé.

5.2. Cas d'un système isolé

5.2.1. Mouvement du barycentre

Pour un système isolé, la quantité de mouvement totale se conserve : le barycentre G a un mouvement rectiligne uniforme.

5.2.2. Mouvement relatif

L'équation du mouvement devient :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

soit encore, en utilisant la masse réduite du système :

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = F_{1 \rightarrow 2} \vec{e}_r$$

et nous constatons que :

L'étude du mouvement relatif, en référentiel galiléen, du système à deux points matériels isolé se ramène à l'étude du mouvement du mobile fictif soumis à la force centrale $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$:

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = F_{1 \rightarrow 2} \vec{e}_r.$$

5.2.3. Moment cinétique barycentrique

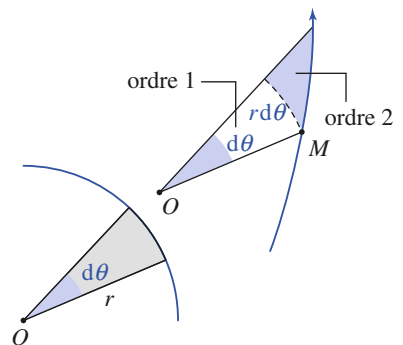
La force agissant sur le mobile est centrale, et nous retrouvons une loi déjà évoquée au § 3.5. :

Le moment cinétique du mobile fictif, égal au moment cinétique barycentrique $\vec{L}^* = \mu \vec{r} \wedge \vec{r}'$, est conservé.

Cette loi de conservation implique que :

Le mouvement du mobile fictif est plan, et satisfait la loi des aires.

Nous l'étudierons alors en utilisant les coordonnées polaires (r, θ) dans le plan de trajectoire (doc. 12), la constante des aires $r^2 \dot{\theta} = C$ étant fixée par les conditions initiales du mouvement.



Doc. 12. Aire balayée par le rayon OM :

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

5.2.4. Cas d'un système conservatif

Supposons l'interaction $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ conservative :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = F_{1 \rightarrow 2} \vec{e}_r = - \frac{d\mathcal{E}_{P_{\text{int}}}(r)}{dr} \vec{e}_r$$

Pour le système isolé, l'énergie potentielle est réduite à la seule énergie potentielle intérieure : $\mathcal{E}_P = \mathcal{E}_{P_{\text{int}}}$.

Nous pouvons associer cette énergie potentielle au mobile fictif, qui est soumis à la force conservative $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$.

L'énergie mécanique se conserve :

$$\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_{P_{\text{int}}} = \text{cte}$$

et l'énergie cinétique vaut, d'après le second théorème de Kœnig :

$$\mathcal{E}_K = \mathcal{E}_K^* + \frac{1}{2} M v_G^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} M \dot{v}_G^2.$$

La vitesse du barycentre étant une constante, nous en déduisons que :

La conservation de l'énergie mécanique du système isolé, lorsque la force intérieure est conservative, est traduite par la conservation de l'énergie mécanique du mobile fictif : $\mathcal{E}_M^* = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \mathcal{E}_{P_{\text{int}}}$, qui est l'énergie mécanique barycentrique du système.

Les techniques d'étude des mouvements à force centrale sont applicables au mouvement du mobile fictif.

Rappelons en particulier que le mouvement radial du mobile peut être discuté en utilisant la fonction énergie potentielle effective, car :

$$\mathcal{E}_M^* = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \mathcal{E}_{P_{\text{eff}}}(r) \geq \mathcal{E}_{P_{\text{eff}}}(r) \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_{P_{\text{eff}}}(r) = \frac{\mu C^2}{2r^2} + \mathcal{E}_{P_{\text{int}}}(r)$$

où C est la constante des aires associée au mouvement plan du mobile fictif.

Dans le cas d'une force newtonienne, par exemple, nous savons que la trajectoire du mobile fictif sera une ellipse si $\mathcal{E}_M^* < 0$, une parabole pour $\mathcal{E}_M^* = 0$, et une branche d'hyperbole pour $\mathcal{E}_M^* > 0$.

5.2.5. Mouvements des points matériels

Le mouvement du barycentre G et celui du mobile fictif M étant connus, il nous est possible de revenir à celui des points matériels M_1 et M_2 : leur position barycentrique se déduit de celle de M par de simples homothéties de centre G (cf. § 1.2) :

$$\vec{r}_1^* = \frac{-m_2}{M} \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{r}_2^* = \frac{m_1}{M} \vec{r}.$$

5.3. Intervention d'un champ de force extérieur

5.3.1. Intervention d'un troisième corps

Nous sommes ici dans le cas de l'intervention d'(au moins) un troisième corps qui vient perturber le système à deux corps auquel nous nous étions limités.

La simplicité de la résolution du problème à deux corps vient du découplage des mouvements d'ensemble (barycentre) et relatif (mobile fictif). Mais le

Application 7

Observation d'un doublet stellaire

Une étoile double est un ensemble isolé de deux étoiles composantes M_1 et M_2 formant un état lié.

Observées dans le référentiel de Copernic, ces étoiles décrivent des ellipses dont le rapport des demi-grands axes vaut : $X = \frac{a_2}{a_1}$. On note que la distance qui les sépare varie entre un minimum d_{\min} et un maximum d_{\max} . La période du mouvement est T .

Montrer que ces données observationnelles donnent accès aux valeurs des masses m_1 et m_2 des deux étoiles.

(On rappelle la loi de Képler $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu}{\alpha}$ pour un point matériel de masse μ évoluant dans le champ de force newtonien : $\vec{f} = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r$.)

Dans le référentiel galiléen \mathcal{R}^* , le mobile fictif de masse réduite μ est soumis à la force newtonienne $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_r$ ($\alpha = Gm_1 m_2$).

Il décrit une trajectoire elliptique dont G est un

foyer, avec $GA = d_{\max}$ à l'apogée et $GP = d_{\min}$ au périogée, et donc $2a = d_{\min} + d_{\max}$.

En utilisant la troisième loi de Képler, nous avons :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu}{\alpha} = \frac{4\pi^2 m_1 m_2}{Gm_1 m_2 (m_1 + m_2)} = \frac{4\pi^2}{GM}, \text{ donc :}$$

$$m_1 + m_2 = \frac{\pi^2 (d_{\min} + d_{\max})^2}{GT^2} = M.$$

D'autre part :

$$\vec{r}_1^* = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{r}_2^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}, \text{ donc :}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = X = \frac{m_1}{m_2}.$$

Connaissant la somme M et le rapport X des deux masses, nous obtenons :

$$m_1 = \frac{X}{1+X}M \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{1}{1+X}M$$

grâce aux observations astronomiques du système binaire.

problème se complique dès qu'intervient (au moins) un troisième corps : on ne peut plus découpler les équations du mouvement par un changement de variable adéquat. On peut alors faire appel à des méthodes numériques, ou envisager des solutions approchées lorsque l'influence du troisième corps intervient sous la forme d'une petite perturbation de l'évolution du système binaire.

Nous nous limiterons, dans ce que suit, à discuter de façon élémentaire l'influence d'un champ de gravitation extérieur $\vec{\mathcal{G}}(\vec{r})$, agissant sur le système des points matériels M_1 et M_2 en interaction : ce champ peut être le champ d'un astre agissant sur un système lié planète-satellite, par exemple.

5.3.2. Le champ de gravitation extérieur est uniforme

C'est, par exemple, une très bonne approximation pour décrire un système de deux masses liées par un ressort, tombant dans le champ de pesanteur terrestre (notons qu'il faudrait alors parler du champ de pesanteur \vec{g} plutôt que du seul champ de gravitation terrestre $\vec{\mathcal{G}}_T$).

Notons $\vec{\mathcal{G}}(M_1) = \vec{\mathcal{G}}(M_2) = \vec{\mathcal{G}}_0$ le champ uniforme, les équations d'évolution sont ici :

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = m_1 \vec{\mathcal{G}}_0 + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = m_2 \vec{\mathcal{G}}_0 + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \end{cases}$$

La somme de ces équations nous donne le mouvement du barycentre :

$$M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{R}_{\text{ext}} = M \vec{\mathcal{G}}_0.$$

Le mouvement du barycentre est donc un mouvement *accélééré* (\mathcal{R}^* n'est plus galiléen) correspondant à une chute libre dans le champ de gravitation extérieur.

Faisons maintenant apparaître l'évolution du mobile fictif :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \frac{\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 2}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow 1}}{m_1} + \frac{1}{m} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ &= \frac{m_2 \vec{\mathcal{G}}_0}{m_2} - \frac{m_1 \vec{\mathcal{G}}_0}{m_1} + \frac{1}{m} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{m} \vec{F}_{1 \rightarrow 2}. \end{aligned}$$

Le champ de gravitation *uniforme* est donc sans influence sur le mouvement relatif : nous sommes ramenés à l'étude du mouvement du mobile fictif, *comme si le système était isolé*.

Lorsque le système est soumis à un champ de gravitation externe uniforme, le mouvement du barycentre G est un mouvement de chute libre dans ce champ de gravitation, tandis que le mouvement relatif n'est pas affecté par le champ extérieur.

Envisageons le cas du système Terre-Lune. Le Soleil est le troisième corps qui engendre le champ gravitationnel extérieur. Les distances Terre-Soleil et Lune-Soleil sont très grandes par rapport à la distance Terre-Lune : le champ gravitationnel du Soleil est donc pratiquement le même au niveau du « point » M_1 Terre et du « point » M_2 Lune :

$$ST \approx SL \approx 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m} \gg TL \approx 3,8 \cdot 10^8 \text{ m}.$$

Le système Terre-Lune ne constitue absolument pas un système isolé : la force d'attraction gravitationnelle exercée par le Soleil sur la Terre, ou bien sur la Lune, n'est pas négligeable devant la force d'interaction entre la Terre et la Lune, puisque nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\|\vec{\mathcal{G}}_{\text{Soleil} \rightarrow \text{Terre}}\|}{\|\vec{\mathcal{G}}_{\text{Lune} \rightarrow \text{Terre}}\|} &\approx \frac{M_{\text{Soleil}}}{M_{\text{Lune}}} \frac{TL^2}{ST^2} \approx 173 \\ \frac{\|\vec{\mathcal{G}}_{\text{Soleil} \rightarrow \text{Lune}}\|}{\|\vec{\mathcal{G}}_{\text{Terre} \rightarrow \text{Lune}}\|} &\approx \frac{M_{\text{Soleil}}}{M_{\text{Terre}}} \frac{TL^2}{SL^2} \approx 2. \end{aligned}$$

Remarques

- La force la plus importante s'exerçant sur la Terre est celle due au Soleil, donc la concavité de la trajectoire de la Terre est toujours tournée vers le Soleil.
- De même, la force la plus importante s'exerçant sur la Lune est encore celle due au Soleil, donc la concavité de sa trajectoire est aussi toujours tournée vers le Soleil, bien que la Lune « tourne autour de la Terre ».

Les résultats que nous avons établis nous indiquent que, d'une part, le centre de gravité du système Terre-Lune évolue dans un état lié autour du Soleil ; d'autre part, le système Terre-Lune tourbillonne sur lui-même : ce moment relatif n'est pas influencé par le Soleil dans l'approximation de champ extérieur uniforme.

Remarque : Dans le cas du système Terre-Lune : $\frac{M_{\text{Terre}}}{M_{\text{Lune}}} \approx 81$, de sorte que le mouvement barycentrique de la Lune est pratiquement identique à celui du mobile fictif.

5.3.3. Le champ de gravitation extérieur n'est pas uniforme

Nous supposons ici que le champ extérieur n'est plus uniforme, mais qu'il diffère relativement peu en M_1 et M_2 (et donc aussi en G).

Dans l'exemple du système Terre-Lune influencé par le Soleil, cette hypothèse est justifiée par le fait que $ST \approx SL \gg TL$.

Dans ce cas, le mouvement du barycentre est donné par :

$$M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = m_1 \vec{\mathcal{G}}_{\text{ext}}(M_1) + m_2 \vec{\mathcal{G}}_{\text{ext}}(M_2) = M \vec{\mathcal{G}}_0$$

où $\vec{\mathcal{G}}_0$ désigne maintenant le champ « moyen » :

$$\vec{\mathcal{G}}_0 = \frac{m_1 \vec{\mathcal{G}}_{\text{ext}}(M_1) + m_2 \vec{\mathcal{G}}_{\text{ext}}(M_2)}{M}.$$

Pour étudier les mouvements barycentriques de M_1 et M_2 , plaçons-nous dans le référentiel \mathcal{R}^* . Celui-ci n'est pas galiléen mais en translation, de sorte qu'il faut tenir compte de l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e = \vec{a}_G = \vec{\mathcal{G}}_0$ qui est uniforme :

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1^*}{dt^2} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2} + m_1 \vec{\mathcal{G}}_{\text{ext}}(M_1) - m_1 \vec{\mathcal{G}}_0 \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2^*}{dt^2} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + m_2 \vec{\mathcal{G}}_{\text{ext}}(M_2) - m_2 \vec{\mathcal{G}}_0 \end{cases}$$

Nous voyons apparaître un terme d'accélération différentielle dans ces équations d'évolution barycentrique, ou terme de marée. Ses effets ont été discutés qualitativement au *chapitre* précédent.

● DÉFINITIONS

• Barycentre

Le barycentre des deux points matériels M_1 et M_2 , de masse m_1 et m_2 , est défini par :

$$m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0}, \text{ ou encore : } \overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2}.$$

• Mouvement du système

Décrite en termes de position barycentrique $\overrightarrow{r_G} = \overrightarrow{OG}$ et position relative $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$, la cinématique du système fait apparaître :

- une translation d'ensemble associée au mouvement du point G ;
- une évolution de l'orientation de la position relative \vec{r} : le système tourbillonne autour de son barycentre ;
- une évolution de la distance $r = \|\vec{r}\|$: le système peut se dilater (ou se contracter).

• Éléments cinétiques du système des deux points matériels

Quantité de mouvement : La quantité de mouvement est : $\vec{p} = M \overrightarrow{v_G}$, où M est la masse totale $M = m_1 + m_2$.

Moment cinétique :

- Le moment cinétique en un point O , est : $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{p}_1 + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{p}_2$.
- Le moment cinétique par rapport à un axe $\Delta = (O, \vec{e}_\Delta)$ est : $L_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{e}_\Delta$.
- Les moments cinétiques en deux points O et O' sont liés par la relation : $\vec{L}_{O'} = \vec{L}_O + \vec{p} \wedge \overrightarrow{OO'}$.

Énergie cinétique : L'énergie cinétique du système est : $\mathcal{E}_K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$.

• Référentiel barycentrique

\mathcal{R} étant le référentiel d'étude, le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* est le référentiel *en translation* par rapport à \mathcal{R} dans lequel la résultante cinétique du système est nulle : $\vec{p}_{/\mathcal{R}^*} = \vec{p}^* = \vec{0}$: il est en translation à vitesse $\overrightarrow{v_G}$ par rapport au référentiel d'étude \mathcal{R} . Le référentiel \mathcal{R}^* est encore appelé *référentiel du centre de masse*.

Dans ce référentiel \mathcal{R}^ :*

- le moment cinétique du système est le même en tout point : $\vec{L}_O^* = \vec{L}_{O'}^* = \vec{L}^*$.
- le moment cinétique du système au point G est égal à son moment cinétique barycentrique : $\vec{L}_G = \vec{L}^*$.

• Utilisation du mobile fictif

Le moment cinétique et l'énergie cinétique barycentriques du système s'identifient à ceux qu'aurait le mobile fictif de masse μ , placé en M tel que $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2}$ en mouvement dans le référentiel barycentrique :

$$\vec{L}^* = \mu \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} \text{ et } \mathcal{E}_K^* = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2, \text{ avec } \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \text{ ou encore } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

CQFR

• **Théorèmes de Kœnig**

Le moment cinétique en O du système S est la somme du moment cinétique barycentrique et du moment cinétique en O du point G affecté de toute la masse :

$$\vec{L}_O = \vec{L}^* + \vec{OG} \wedge M\vec{v}_G = \vec{L}^* + \vec{OG} \wedge \vec{p}.$$

L'énergie cinétique du système S est la somme de son énergie cinétique barycentrique et de l'énergie cinétique du point G affecté de toute la masse :

$$\mathcal{E}_K = \mathcal{E}_K^* + \frac{1}{2}Mv_G^2.$$

● **ÉVOLUTIONS DU SYSTÈME DE DEUX POINTS MATÉRIELS**• **Actions exercées sur le système**

La résultante des actions mécaniques subies par le système est égale à la somme des forces extérieures subies par ses points :

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M_i} = \vec{R}_{\text{ext}} \quad (\vec{R}_{\text{int}} = \vec{0}).$$

Le moment, en un point O , résultant des actions mécaniques subies par le système est égal à la somme des moments en O des forces extérieures subies par ses points :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \sum_i \vec{OM}_i \wedge \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M_i} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext } O} \quad (\vec{\mathcal{M}}_{\text{int } O} = \vec{0}).$$

Les moments d'un ensemble de forces de résultante \vec{R} en deux points O et O' sont liés par la relation :

$$\vec{\mathcal{M}}_{O'} = \vec{\mathcal{M}}_O + \vec{R} \wedge \vec{OO'}.$$

La puissance des forces intérieures au système est : $\mathcal{P} = F_{1 \rightarrow 2} \frac{dr}{dt}$, et ne dépend pas du référentiel. Elle est en général non nulle si le système est déformable. Elle est nulle pour un système rigide : $r = \text{cte}$.

• **Dynamique d'ensemble**

Le mouvement du barycentre est identique à celui d'un point matériel de masse M soumis à une force égale à la résultante des forces extérieures :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{R}_{\text{ext}}.$$

$\frac{dL_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{O_{\text{ext}}}$ traduit le théorème du moment cinétique en un point O fixe.

L'égalité $\frac{dL^*}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{G_{\text{ext}}}$ traduit le théorème du moment cinétique barycentrique.

L'égalité $\frac{dL_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta_{\text{ext}}}$ traduit le théorème du moment cinétique, en projection sur un axe fixe $\Delta = (O, \vec{e}_\Delta)$.

Dans un référentiel non galiléen, les résultats précédents sont applicables, à condition de comptabiliser les forces d'inertie agissant sur les points matériels comme des forces extérieures supplémentaires.

• *Étude énergétique*

Le théorème de la puissance cinétique s'écrit : $\frac{d\mathcal{E}_K}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}$.

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit : $\Delta\mathcal{E}_K = \mathcal{T}_{\text{ext}} + \mathcal{T}_{\text{int}}$ et fait intervenir le travail de *toutes* les forces entre l'état initial et l'état final du système.

L'énergie mécanique du système est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_{P_{\text{int}}} + \mathcal{E}_{P_{\text{ext}}}.$$

Le théorème de l'énergie s'écrit alors $\Delta\mathcal{E}_M = \mathcal{T}_{\text{NC}}$.

Pour un système conservatif, l'énergie mécanique est une constante du mouvement.

● **SYSTÈME DE DEUX POINTS MATÉRIELS ISOLÉ**

• *Généralités*

La résultante et le moment des actions extérieures sont nuls.

La quantité de mouvement totale $\vec{p} = M\vec{v}_G$ et le moment cinétique barycentrique \vec{L}^* sont des constantes du mouvement.

Le moment cinétique \vec{L}_O en un point fixe du référentiel galiléen est lui aussi conservé.

• *Utilisation du mobile fictif*

L'étude du mouvement relatif, en référentiel galiléen, du système à deux corps *isolé* se ramène à l'étude du mouvement du mobile fictif soumis à la force *centrale* $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$:

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = F_{1 \rightarrow 2} \vec{e}_r, \text{ avec } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Le moment cinétique du mobile fictif $\vec{L}^* = \mu \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}$, est conservé. Le mouvement du mobile fictif est plan, et satisfait la loi des aires.

La conservation de l'énergie mécanique du système isolé, lorsque la force intérieure est conservative, est traduite par la conservation de l'énergie mécanique du mobile fictif : $\mathcal{E}_M^* = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \mathcal{E}_{P_{\text{int}}}$, qui est l'énergie mécanique barycentrique du système.

● **SYSTÈME DE DEUX POINTS MATÉRIELS SOUMIS À UN CHAMP DE GRAVITATION EXTERNE UNIFORME**

Lorsque le système est soumis à un champ de gravitation externe uniforme :

- le mouvement du barycentre G est un mouvement de chute libre dans ce champ de gravitation ;
- le mouvement relatif n'est pas affecté par le champ extérieur.

Contrôle rapide

Avez-vous retenu l'essentiel ?

- ✓ Définir le barycentre de deux points matériels, et les positions barycentriques des deux points.
- ✓ Définir le référentiel barycentrique du système.
- ✓ Définir le mobile fictif associé au système. Que représentent les énergie et moment cinétiques dans R^* ?
- ✓ Qu'est-ce que la composition des moments de force ? des moments cinétiques ?
- ✓ Énoncer les théorèmes de Kœnig.
- ✓ Qu'est-ce que le théorème du moment cinétique barycentrique ?
- ✓ Énoncer le théorème du moment cinétique.
- ✓ Définir, lorsque c'est possible, l'énergie mécanique du système. Quelle est la valeur de sa variation entre deux états du système ?
- ✓ Dans quelle mesure peut-on ramener l'étude de l'évolution du système binaire à celle de son mobile fictif ? Quelles sont les lois de conservations associées au mouvement de celui-ci ?
- ✓ Par quel type de perturbation peut se manifester l'influence du champ de gravitation d'un troisième corps sur le comportement du système binaire ?

Du tac au tac (Vrai ou faux)

1. Pour le système à deux corps, lorsque R^* est galiléen, on a nécessairement :

- a. une quantité de mouvement du système constante
- b. un moment cinétique barycentrique constant
- c. une énergie cinétique égale à l'énergie cinétique barycentrique
- d. un travail des actions extérieures nul.

2. Le mobile fictif a une masse :

- a. inférieure à m_1
- b. inférieure à m_2
- c. inférieure à la masse du système
- d. en fait, tous ces résultats dépendent du rapport des masses m_1 et m_2 .

3. Dans le référentiel barycentrique, on a toujours (en norme pour les quantités vectorielles) :

- a. une quantité de mouvement minimale

- b. un moment cinétique minimal
- c. une énergie cinétique minimale.

4. Les actions intérieures :

- a. n'interviennent pas dans la dynamique d'ensemble
- b. peuvent intervenir dans l'évolution de l'énergie
- c. travaillent dès qu'il y a mouvement relatif.

5. Le mouvement relatif et le mouvement d'ensemble ne peuvent être découplés que si :

- a. R^* est galiléen
- b. les actions extérieures sont nulles
- c. les forces extérieures appliquées à M_1 et M_2 sont identiques.

► Solution, page 253.

Exercices

1 Composition des barycentres

Soit quatre points matériels de même masse, non coplanaires, de positions A, B, C et D .

Déterminer par une construction géométrique, la position du barycentre des systèmes suivants :

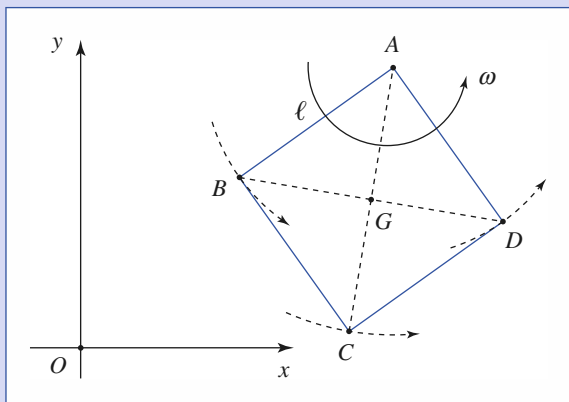
- 1) \mathcal{S}_1 constitué de A et B ;
- 2) \mathcal{S}_2 constitué de A, B et C ;
- 3) \mathcal{S}_3 constitué de A, B, C et D .

2 Utilisations des théorèmes de Kœnig

Un carré $ABCD$ de côté ℓ peut tourner autour du point A en restant dans le plan (xOy) , avec une vitesse angulaire de rotation ω . Des objets ponctuels de masse m se trouvent aux sommets et la masse des tiges est négligée.

Déterminer, dans le référentiel d'étude \mathcal{R} , la quantité de mouvement, le moment cinétique en A ainsi que l'énergie cinétique :

- 1) par un calcul direct ;
- 2) par utilisation des théorèmes de Kœnig (les calculs effectués dans le cours se généralisent sans peine au cas d'un nombre N quelconque de points matériels).



3 Deux particules en interaction dans le référentiel du laboratoire

Un système isolé de deux particules M_1, M_2 interagissant suivant une loi de force attractive en $\frac{1}{r^2}$, se déplace de telle sorte que la distance entre les deux particules reste constante et égale à r_0 . On note m_1 et m_2 les masses des deux particules.

Analyser leurs mouvements dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R}_L supposé galiléen.

4 Molécule diatomique et potentiel de Morse

Dans une molécule diatomique, l'énergie potentielle d'interaction entre les deux atomes est donnée par la formule de Morse :

$$\mathcal{E}_p(r) = D(1 - e^{-\alpha(r-r_0)})^2$$

où D et α sont des constantes, r la distance entre les deux atomes à un instant donné et r_0 la distance à l'équilibre.

1) Calculer la force de rappel $f(r)$ qui s'exerce entre les deux atomes.

2) On note $x = (r - r_0)$ l'écart à l'équilibre et μ la masse réduite de la molécule. Montrer que la force de rappel est proportionnelle à x lorsque x est petit ($\alpha x \ll 1$).

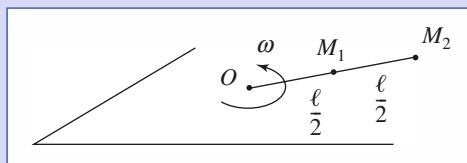
Quelle est alors la fréquence de vibration de la molécule quand on l'écarte légèrement de sa position d'équilibre ?

5 Systèmes de deux masses reliées par un fil

On fixe deux points matériels M_1 et M_2 de même masse m : le premier, M_1 , au milieu d'un fil inextensible de longueur ℓ et le second, M_2 , à l'une des extrémités de ce fil. L'ensemble tourne sans frottements dans un plan horizontal, avec la vitesse angulaire ω autour du point fixe constitué par l'autre extrémité du fil.

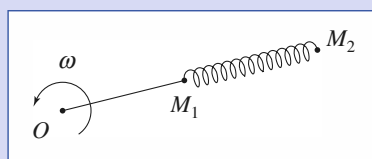
- 1) Calculer les tensions T_1 et T_2 des deux brins de fil.
- 2) À $t = 0$, le fil casse entre O et M_1 . Décrire le mouvement ultérieur du système constitué par les deux points matériels.

Calculer la tension T' du fil reliant M_1 à M_2 dans ce nouveau mouvement.



6 Système de deux masses liées par un ressort

On reprend le système de l'exercice précédent, mais, cette fois, c'est un ressort de raideur k qui relie M_1 et M_2 .



On néglige l'inertie ainsi que la longueur au repos du ressort. OM_1 est égale à $\frac{\ell}{2}$.

Lorsque l'ensemble tourne à vitesse angulaire constante, la distance M_1M_2 est égale à $\frac{\ell}{2}$.

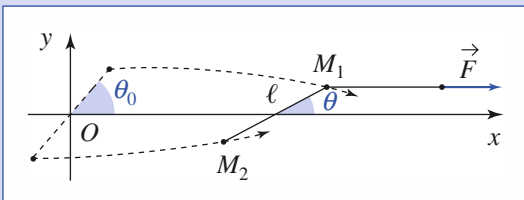
- 1) Exprimer la raideur k du ressort à l'aide des autres données.
- 2) Étudier le mouvement du système une fois que le fil reliant O et M_1 a cassé.

7 Glissades

Deux points matériels M_1 et M_2 de même masse m glissent sans frottements sur un plan horizontal (un lac gelé, par exemple). Ils sont reliés par un fil idéal de longueur 2ℓ , et un opérateur extérieur tire M_1 en lui appliquant une force constante $\vec{F} = F \vec{e}_x$. Étudier le mouvement de M_2 .

Données (à $t = 0$) :

- Les vitesses sont nulles,
- $M_1(0) : x_1(0) = \ell \cos \theta_0$ et $y_1(0) = \ell \sin \theta_0$;
- $M_2(0) : x_2(0) = -\ell \cos \theta_0$ et $y_2(0) = -\ell \sin \theta_0$;
- $\theta_0 \ll 1$ rad.



8 Seuil énergétique

Par collision avec un projectile A de masse m_A , on cherche à casser un objet B , de masse m_B , en deux morceaux. Le travail des forces de collision est, en valeur absolue, égal à W_0 .

1) Justifier que la rupture n'est envisageable que si l'énergie cinétique barycentrique \mathcal{E}_K^* du système est supérieure à un certain seuil.

2) **Première méthode :** A est lancé sur la cible B immobile dans le référentiel du laboratoire. Quelle doit être l'énergie cinétique initiale du système pour réaliser la rupture ?

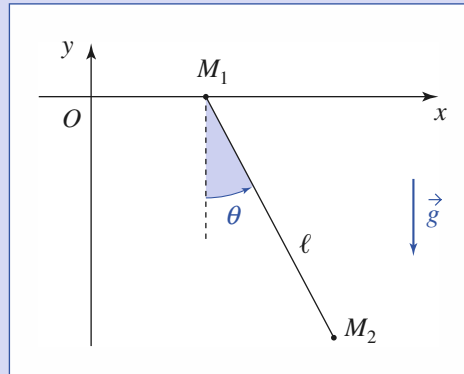
3) **Deuxième méthode :** c'est maintenant A qui sert de cible à B qui joue le rôle de projectile. Est-ce énergétiquement plus économique ?

4) En fait, comment faudrait-il s'y prendre pour avoir un minimum d'énergie initiale à communiquer au système ?

9 Pendule à point d'attache mobile

Un pendule est constitué d'un point matériel M_2 de masse m_2 , relié par un fil idéal de longueur ℓ à un objet de

masse m_1 , modélisé par un point matériel M_1 glissant sans frottement sur un axe horizontal (Ox), M_2 oscille dans le plan (xOz), et sa position par rapport à M_1 est repérée par l'angle θ .



Le système est lâché sans vitesse initiale avec un angle θ_0 . Déterminer son mouvement pour les faibles valeurs de θ_0 .

10 Vitesses limites de particules en état de diffusion

On considère dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_L du laboratoire deux particules M_1 et M_2 de masse m_1 et m_2 et de charge q_1 et q_2 de même signe.

À l'instant initial, ces deux particules sont lâchées sans vitesse initiale à la distance r_0 l'une de l'autre.

En négligeant le poids des particules, calculer leur vitesse limite $v_{1\infty}$ et $v_{2\infty}$:

- 1) en utilisant l'intégrale première de l'énergie dans \mathcal{R}_L ;
- 2) en étudiant le mouvement de la particule réduite M dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* .

Remarque

Les deux particules exercent l'une sur l'autre une force d'interaction répulsive :

$$\vec{f}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_{12}$$

11 Modélisation d'une collision

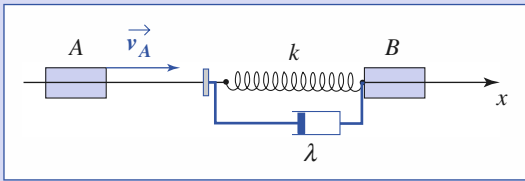
Deux particules A et B de même masse m , sont assujetties à glisser sans frottements le long d'un axe horizontal.

A est lancée avec une vitesse initiale v_A sur B , initialement immobile.

On modélise les efforts mis en jeu dans la collision par un ressort fixé à B , de longueur ℓ au repos, de raideur k , et de masse négligeable.

Exercices

Pour tenir compte d'une éventuelle dissipation d'énergie, on introduit de plus un frottement fluide de coefficient λ .



- 1) Quel est le mouvement du centre d'inertie de l'ensemble ?
- 2) Établir l'équation du mouvement relatif, repéré par $X(t) = x_B(t) - x_A(t)$.

Définir la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q associés à cette équation. On supposera par la suite le régime pseudo-périodique.

- 3) Exprimer le temps de collision τ , pendant lequel les mobiles A et B interagissent.

Indiquer les valeurs des vitesses v'_A et v'_B des deux mobiles après la collision en faisant intervenir la durée τ .

- 4) Que deviennent les résultats précédents pour une collision purement élastique, c'est-à-dire pour $\lambda = 0$? Comparer les énergies cinétiques \mathcal{E}_K et \mathcal{E}'_K avant et après la collision. Ce résultat dépend-il des valeurs des masses de A et B ?

- 5) Un choc parfaitement mou correspondrait à un état final où le projectile A vient se coller sur la cible B. Quelle valeur limite faut-il donner à Q pour obtenir ce cas limite ? Que valent alors v'_A et v'_B ? \mathcal{E}'_K et \mathcal{E}'_K ? Commenter.

12 Observation d'une étoile double

Un système d'étoile double Sirius A et B a été observé au télescope. La position angulaire des deux étoiles est représentée à différentes dates sur la figure ci-contre.

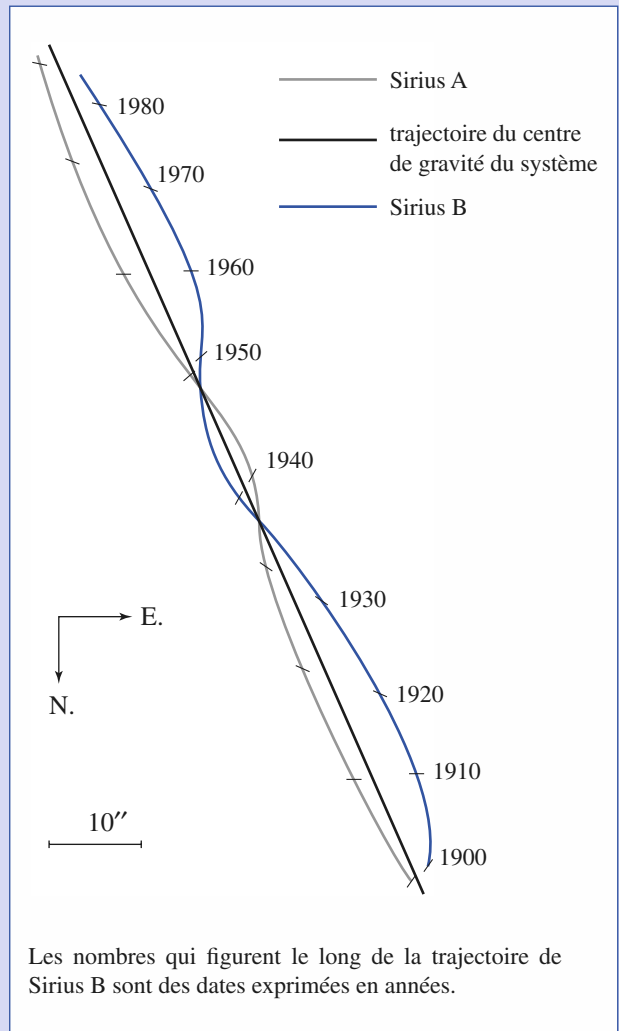
- 1) Comment fait-on pour repérer la position angulaire absolue d'une étoile ?
- 2) Pourquoi la trajectoire du centre d'inertie des deux étoiles est-elle, à l'échelle de la figure, une droite ?
- 3) a) Rappeler les trois lois de Kepler relatives au mouvement des planètes.
b) Démontrer la loi relative à la vitesse aréolaire.
c) Démontrer la loi sur la période dans le cas de trajectoires circulaires.
- 4) En utilisant la figure, donner un ordre de grandeur du rapport des masses des deux compagnons et de leur période de rotation autour de leur centre de masse.
- 5) Quelle méthode permet de mesurer la distance de la Terre à cette étoile double située à $d = 2,7$ parsec, avec :
1 parsec $\approx 3,3$ années de lumière ou encore :
1 parsec $\approx 3,1 \times 10^{16}$ m ?

- 6) Connaissant la distance d , la figure permet-elle de déterminer directement le demi-grand axe de la trajectoire des deux compagnons ?

- 7) En supposant que ces deux demi-grands axes a_1 et a_2 sont connus ainsi que la période T de rotation des deux compagnons autour de leur barycentre, montrer que l'on peut déterminer leurs masses m_1 et m_2 . On exprimera ces masses en fonction de a_1 , a_2 , T et de la constante de gravitation G . On pourra supposer que les trajectoires des deux étoiles autour de leur barycentre sont circulaires.

- 8) Une autre méthode consiste à mesurer les vitesses des deux compagnons, pour d'autres systèmes doubles.

- a) Comment peut-on mesurer la vitesse d'une étoile ?
- b) On suppose que les trajectoires des deux compagnons sont circulaires, que leurs vitesses dans le référentiel barycentrique sont v_1 et v_2 et que leur période de rotation est T . Montrer que ces données permettent de calculer les masses m_1 et m_2 des deux compagnons.



c) *Application numérique* : Pour une étoile double différente de Sirius, on a trouvé $T = 26$ jours, $v_1 = 48 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_2 = 80 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Sachant que $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ S.I.}$, calculer m_1 et m_2 . Les deux étoiles de ces systèmes peuvent-elles être du même type que le Soleil ($M_s = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$) ?

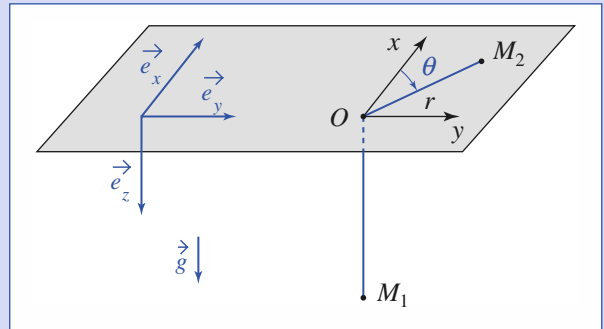
13 Un mouvement à force centrale

Deux points matériels M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 , sont reliés par un fil inextensible de longueur ℓ et de masse négligeable.

Les points matériels M_1 et M_2 sont assujettis à glisser sans frottements, le premier sur l'axe vertical ($O ; \vec{e}_z$) dirigé vers le bas :

$$\vec{g} = g\vec{e}_z \text{ avec } g > 0$$

(g , accélération de la pesanteur) et le second sur le plan horizontal ($O ; \vec{e}_x, \vec{e}_y$), le fil les reliant passant sans frottements à travers un trou ponctuel situé en O .



À $t = 0$, M_1 est abandonné sans vitesse initiale et M_2 , situé en A tel que $\vec{OA} = \vec{r}_0$ possède une vitesse \vec{v}_0 , orthoradiale.

- 1) Pour quelle valeur v_c de v_0 , le point M_1 reste-t-il immobile ? Quel est, dans ces conditions, le mouvement de M_2 ?
- 2) Calculer l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{\text{Peff}}(r)$ du système.
- 3) Discuter le mouvement de M_2 en fonction de la valeur de la norme v_0 de la vitesse initiale.

Corrigés

Solution du tac au tac, page 249.

1. Vrai : a Faux : b, c, d
2. Vrai : a, b, c Faux : d
3. Vrai : c Faux : a, b
4. Vrai : a, b Faux : c
5. Vrai : aucune Faux : a, b, c

1 Le barycentre d'un ensemble ($i = 1, \dots, N$) de points matériels M_i de masses m_i sera défini par :

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OM}_1 + m_2 \vec{OM}_2 + \dots + m_N \vec{OM}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}$$

• Pour \mathcal{S}_1 : $\vec{OG}_1 = \frac{m\vec{OA} + m\vec{OB}}{2m} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$.

• Pour \mathcal{S}_2 : $\vec{OG}_2 = \frac{m\vec{OA} + m\vec{OB} + m\vec{OC}}{3m} = \frac{2\vec{OG}_1 + \vec{OC}}{3}$.

G_2 est ainsi le barycentre de G_1 affecté de la masse $2m$, et de C affecté de la masse m .

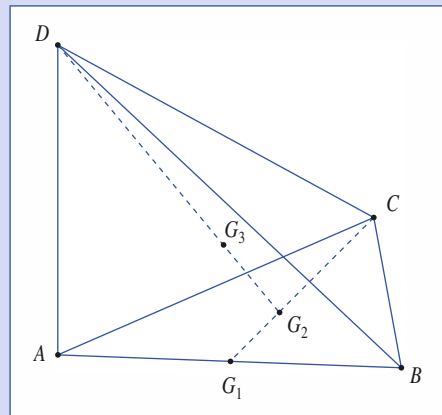
• Pour \mathcal{S}_3 : de même, G_3 est le barycentre de G_2 affecté de la masse $3m$ et de D affecté de la masse m .
Nous obtenons ainsi :

1) \mathcal{S}_1 : G_1 au milieu du segment AB .

2) \mathcal{S}_2 : $2\vec{OG}_1 + \vec{OC} = \vec{0}$. G_2 est donc au $\frac{1}{3}$ de la médiane G_1C .

3) \mathcal{S}_3 : $3\vec{OG}_2 + \vec{OD} = \vec{0}$.

G_3 est donc au $\frac{1}{4}$ du segment G_2D et il est commun aux droites joignant un sommet au barycentre du triangle opposé.



Corrigés

2 1) Calcul direct :

Pour A : $\vec{p} = \vec{0}$, $\vec{L}_A = \vec{0}$, $\mathcal{E}_K = 0$.

Pour B : $\vec{p} = m\omega\vec{e}_z \wedge \vec{AB}$, $\vec{L}_A = m\omega\ell^2\vec{e}_z$ et $\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}m\ell^2\omega^2$.

Pour C : $\vec{p} = m\omega\vec{e}_z \wedge \vec{AC}$, $\vec{L}_C = 2m\omega\ell^2\vec{e}_z$ et $\mathcal{E}_K = m\ell^2\omega^2$.

Pour le système complet : $\vec{p} = 2m\omega\vec{BD}$
 $\vec{L}_A = 4m\omega\ell^2\vec{e}_z$ et $\mathcal{E}_K = 2m\ell^2\omega^2$.

2) Théorème de Kœnig :

$\vec{v}_{G/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\omega\vec{e}_z \wedge \vec{AC}$, donc $\vec{p} = 2m\omega\vec{BD}$ ($BD = \ell\sqrt{2}$).

Dans \mathcal{R}^* , les quatre points décrivent un cercle de rayon $\frac{\ell}{\sqrt{2}}$ à la vitesse angulaire ω : $\vec{L}^* = 4m\frac{\ell^2}{2}\omega\vec{e}_z$ et $\mathcal{E}_K^* = 4\frac{1}{2}m\frac{\ell^2}{2}\omega^2 = m\ell^2\omega^2$.

Dans \mathcal{R} , G décrit un cercle de rayon $\frac{\ell}{\sqrt{2}}$, d'où :

$\vec{L}_A = 2m\ell^2\omega\vec{e}_z + \vec{L}^*$, d'où $\mathcal{E}_K = m\ell^2\omega^2 + \mathcal{E}_K^*$.

3

Le système étant isolé, le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* est galiléen, et se déplace à vitesse \vec{v}_G constante.

Dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* , la particule fictive M de masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ décrit une trajectoire plane (force centrale), satisfaisant la loi des aires. Dans ce cas, il s'agit d'un cercle puisque $r = \text{cte} = r_0$, donc la vitesse de rotation est uniforme, notée ω , avec :

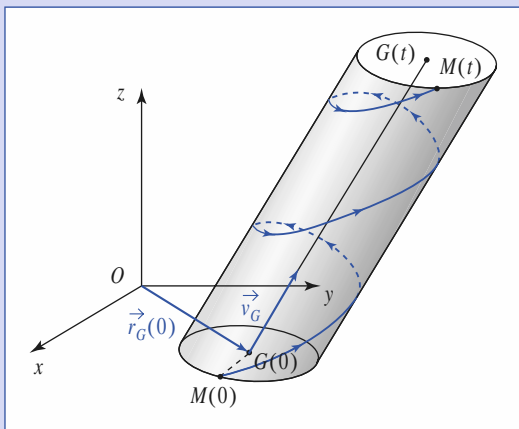
$-\mu r_0 \omega^2 = -\frac{\alpha}{r_0^2}$ ($\alpha = \text{cte}$ de force newtonienne, qui doit être positive).

Nous pouvons écrire, en choisissant convenablement les axes (Ox) et (Oy) :

$\vec{GM} = r_0(\cos\omega t\vec{e}_x + \sin\omega t\vec{e}_y)$

où le signe donné à ω indique le sens de rotation sur le cercle trajectoire. Le mouvement absolu de la particule fictive est de la forme :

$\vec{OM} = \vec{r}_G(0) + \vec{v}_G \cdot t + r_0(\cos\omega t\vec{e}_x + \sin\omega t\vec{e}_y)$



Les trajectoires de M_1 et M_2 s'en déduisent dans la mesure où :

$\vec{GM}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{GM}$ et $\vec{GM}_2 = +\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{GM}$

$\vec{OM}_1(t) = \vec{r}_G(0) + \vec{v}_G \cdot t - r_0\frac{m_2}{m_1 + m_2}(\cos\omega t\vec{e}_x + \sin\omega t\vec{e}_y)$

$\vec{OM}_2(t) = \vec{r}_G(0) + \vec{v}_G \cdot t + r_0\frac{m_1}{m_1 + m_2}(\cos\omega t\vec{e}_x + \sin\omega t\vec{e}_y)$.

4

1) $f(r) = \frac{d\mathcal{E}_P}{dr} = -2\alpha D(1 - e^{-\alpha(r-r_0)})e^{-\alpha(r-r_0)}$.

2) $f = -2\alpha^2 D x$ et $v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi\sqrt{\mu}} \sqrt{2D}$ (μ : masse réduite).

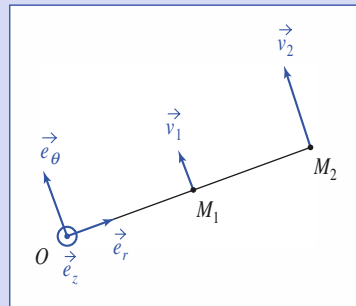
5

1) Les vitesses des deux mobiles sont :

$\vec{v}_1 = \frac{\ell}{2}\omega\vec{e}_\theta$ et $\vec{v}_2 = \ell\omega\vec{e}_\theta$.

Leurs accélérations sont :

$\vec{a}_1 = -\frac{\ell}{2}\omega^2\vec{e}_\theta$ et $\vec{a}_2 = -\ell\omega^2\vec{e}_\theta$.



L'application de la relation fondamentale de la dynamique, en projection radiale, donne :

$$\begin{cases} -m\frac{\ell}{2}\omega^2 = -T_1 + T_2 \\ -m\ell\omega^2 = -T_2 \end{cases}$$

soit : $T_2 = m\ell\omega^2$ et $T_1 = \frac{3}{2}m\ell\omega^2$.

2) Le système a un mouvement d'ensemble rectiligne et uniforme de vitesse $\vec{v}_G = \frac{3}{2}\ell\omega\vec{e}_\theta(0)$ où $\vec{e}_\theta(0)$ est le vecteur unitaire orthogonal au fil à $t = 0$. Dans le référentiel barycentrique, les deux particules ont un mouvement circulaire de rayon $\frac{\ell}{4}$ autour de G , milieu de M_1M_2 .

La conservation du moment cinétique barycentrique nous indique que cette rotation s'effectue à la vitesse angulaire ω .

Le mobile fictif effectue une rotation circulaire de rayon $\frac{\ell}{2}$ autour de G , à vitesse angulaire ω , et sa masse est $\mu = \frac{m}{2}$, donc :

$\frac{m}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \omega^2 = T'$,

soit : $T' = \frac{1}{4}m\ell\omega^2$, nouvelle tension du fil.

La conservation de la rotation, et du caractère « tendu » du fil reliant M_1 et M_2 est à la base du fonctionnement des « bolas » utilisés par les gauchos dans la pampa sud-américaine.

6

1) Les tensions T_1 et T_2 sont les mêmes dans l'exercice précédent. En particulier $T_2 = k\frac{\ell}{2}$, donc : $k = 2mv^2$.

2) Le mouvement rectiligne uniforme du barycentre est inchangé :

$$\vec{v}_G = \frac{3}{2}\ell\omega\vec{e}_\theta(0).$$

En revanche, le mouvement circulaire de M_1 , M_2 , ou du mobile fictif M de masse $\frac{m}{2}$, autour de G dans le référentiel \mathcal{R}^* est à remettre en cause : $T' \neq T_2$, donc le ressort ne peut garder un allongement constant.

L'équation du mouvement relatif est :

$$\frac{m}{2}\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r},$$

dont la résolution est immédiate :

$$\vec{r} = \vec{r}(0)\cos(\Omega t) + \frac{\vec{v}(0)}{\Omega}\sin(\Omega t), \text{ avec } \Omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} = 2\omega.$$

Les conditions initiales sont :

$$\vec{r}(0) = \frac{\ell}{2}\vec{e}_r(0) \quad \text{et} \quad \dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}(0) = \frac{\ell}{2}\omega\vec{e}_\theta(0).$$

Remarque

Rappelons que le référentiel \mathcal{R}^* est en translation par rapport au référentiel \mathcal{R} d'étude, de sorte qu'au départ, il n'y a pas de mouvement radial de la particule fictive, mais il y a, en revanche, une rotation à vitesse angulaire initiale ω . La vitesse de rotation du mobile fictif n'est pas non plus constante, puis le rayon r varie : le mouvement du mobile fictif satisfait la loi des aires.

Finalement, le mobile fictif décrit autour de G une ellipse d'équation horaire :

$$\vec{r}(t) = \frac{\ell}{2}\left(\vec{e}_r(0)\cos(2\omega t) + \frac{1}{2}\vec{e}_\theta(0)\sin(2\omega t)\right).$$

Les mouvements barycentriques de M_1 et M_2 s'en déduisent par des homothéties de centre G et de rapport respectifs $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$.

7

Le mouvement des points M_1 et M_2 se décompose en un mouvement de translation du point G dans le plan (xOy) , chaque point ayant, de plus, un mouvement de rotation circulaire de rayon ℓ autour de G dans le référentiel barycentrique.

Pour obtenir le mouvement de G , appliquons le théorème de la résultante cinétique à l'ensemble, ce qui élimine l'interaction entre M_1 et M_2 véhiculée par le fil :

$$2m\vec{a}_G = F\vec{e}_x, \quad \text{soit } \ddot{x}_G = \frac{F}{2m} \quad \text{et} \quad \ddot{y}_G = 0.$$

Compte tenu des conditions initiales, il vient :

$$x_G(t) = \frac{1}{4m}Ft^2 \quad \text{et} \quad y_G(t) = 0.$$

Le mouvement de rotation peut être étudié en utilisant le théorème du moment cinétique barycentrique :

$$\frac{dL^*}{dt} = \vec{M}_{G_{\text{ext}}},$$

soit : $\mu(2\ell)^2\ddot{\theta} = 2m\ell^2\ddot{\theta} = -F\ell\sin\theta$.

L'équation d'évolution de $\theta(t)$ est donc :

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\sin\theta, \quad \text{avec } \omega^2 = \frac{F}{2m\ell}.$$

Pour un angle θ petit, cette équation peut être linéarisée :

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta, \quad \text{soit } \theta = \theta_0\cos(\omega t) \quad \text{pour } \dot{\theta}(0) = 0.$$

Le mouvement de M_2 correspond à :

$$x_2 = x_G - \ell\cos\theta \quad \text{et} \quad y_2 = y_G - \ell\sin\theta$$

soit, à l'ordre d'approximation linéaire utilisée :

$$x_2 = x_G - \ell \quad \text{et} \quad y_2 = y_G - \ell\theta_0\cos(\omega t).$$

8

1) Dans le référentiel barycentrique, on obtient au minimum, à l'état final, A et B (cassés en deux) immobiles (énergies cinétiques finales minimales !). Pour cela, il faut que l'énergie cinétique barycentrique initiale soit au moins égale à W_0 pour pouvoir casser B en deux : $\mathcal{E}_K^* \geq W_0$.

2) Au départ : $\mathcal{E}_K = \mathcal{E}_{K_A} = \frac{1}{2}m_A v_A^2$.

La vitesse du centre d'inertie est : $v_G = \frac{m_A v_A}{m_A + m_B}$.

Le théorème de Kœnig nous donne donc :

$$\mathcal{E}_K^* = \mathcal{E}_K - \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_G^2 = \frac{1}{2}\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}v_A^2.$$

La condition $\mathcal{E}_K^* \geq W_0$ devient donc :

$$\mathcal{E}_K \geq W_0\left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right).$$

3) Cette fois, $\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}m v_B^2$ et $\mathcal{E}_K^* = \frac{1}{2}\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}v_B^2$.

La condition de rupture est ici :

$$\mathcal{E}_K \geq W_0\left(1 + \frac{m_B}{m_A}\right).$$

Cette solution est énergétiquement moins coûteuse si $m_B < m_A$: c'est la particule la plus lourde qui doit servir de cible.

4) La solution énergétiquement la plus économique consiste à faire en sorte que le référentiel du laboratoire coïncide avec le référentiel barycentrique : il faut

mettre en mouvement les deux masses, avec $\frac{|v_A|}{|v_B|} = \frac{m_B}{m_A}$.

Remarque

Pour cette raison, dans les anneaux de collision à haute énergie (au CERN, par exemple, où la mécanique relativiste entre en jeu), on réalise des collisions particule-antiparticule avec deux jets accélérés.

9

Le système possède deux degrés de liberté : x (abscisse de M_1) et θ peuvent varier de façon indépendante.

Les deux équations différentielles reliant θ et x peuvent être déduites de deux intégrales premières sachant que le système est conservatif et que la composante p_x de la quantité de mouvement se conserve.

Corrigés

• Intégrale première de l'énergie

Le système est conservatif.

Énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p = -m_2 g \ell \cos \theta, \quad \vec{v}(M_2) = (\dot{x} + \ell \cos \theta \dot{\theta}) \vec{e}_x + \ell \sin \theta \dot{\theta} \vec{e}_z$$

$$\text{d'où } \mathcal{E}_K = \frac{1}{2} [m_1 \dot{x}^2 + m_2 (\dot{x}^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2 + 2\ell \dot{x} \cos \theta \dot{\theta})]$$

$$\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_K = \text{cte.}$$

• Intégrale première de la quantité de mouvement

La composante horizontale de la résultante des forces extérieures est nulle, soit :

$$p_x = m_1 \dot{x} + m_2 (\dot{x} + \ell \cos \theta \dot{\theta}) = \text{cte} = 0 \quad \text{et } \dot{x} = -\frac{m_2 \ell \cos \theta \dot{\theta}}{m_1 + m_2}$$

En éliminant les termes d'ordre supérieur à deux : $\dot{x} = -\frac{m_2 \ell}{m_1 + m_2} \dot{\theta}$ et :

$$m_2 g \ell \frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2} [(m_1 + m_2) \dot{x}^2 + m_2 (\ell^2 \dot{\theta}^2 + 2\ell \dot{x} \dot{\theta})] = \text{cte.}$$

$$g \theta^2 + \ell \dot{\theta}^2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \text{cte, d'où } \ddot{\theta} = -\omega^2 \theta, \quad \text{avec } \omega^2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g$$

Le mouvement est oscillatoire, avec une pulsation ω . Si $m_1 \gg m_2$, M_1 est pratiquement immobile, et nous retrouvons l'expression de ω^2 pour le pendule simple.

10 L'énergie potentielle du système : $\mathcal{E}_p(r) = \frac{k}{r}$, avec $k = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0}$.

L'énergie mécanique est donc :

$$\mathcal{E}_M = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 + \frac{k}{r} = \frac{k}{r_0},$$

puisque les vitesses initiales sont nulles.

Le centre d'inertie G du système est immobile dans \mathcal{R}_L , d'où :

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{0};$$

$$v_1 = -\sqrt{\frac{2km_2}{m_1(m_1+m_2)}} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)$$

et

$$v_2 = \sqrt{\frac{2km_1}{m_2(m_1+m_2)}} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right).$$

Les vitesses limites atteintes quand les particules sont infiniment éloignées :

$$v_{1\infty} = -\sqrt{\frac{2km_2}{m_1(m_1+m_2)}} \frac{1}{r_0} \quad \text{et} \quad v_{2\infty} = \sqrt{\frac{2km_1}{m_2(m_1+m_2)}} \frac{1}{r_0}$$

b) Le référentiel \mathcal{R}^* est confondu avec \mathcal{R}_L . La conservation de l'énergie mécanique de la particule réduite M s'écrit :

$$\frac{\mu}{2} v^2 + \frac{k}{r} = \frac{k}{r_0}$$

$$\text{Donc } v = \sqrt{\frac{2k}{\mu} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)}, \quad \text{et} \quad v_\infty = \sqrt{\frac{2k}{\mu} \frac{1}{r_0}}$$

$$\text{D'où : } v_{1\infty} = \frac{-m_2}{m_1+m_2} v_\infty = \sqrt{\frac{2km_2}{m_1(m_1+m_2)}} \frac{1}{r_0}$$

$$v_{2\infty} = \frac{+m_1}{m_1+m_2} v_\infty = \sqrt{\frac{2km_1}{m_2(m_1+m_2)}} \frac{1}{r_0}$$

11

1) Le barycentre G se déplace à vitesse constante $v_G = \frac{v_A + v_B}{2} = \frac{v_A}{2}$.

2) Le mobile fictif, de masse réduite $\frac{m}{2}$, satisfait l'équation du mouvement :

$$\frac{m}{2} \ddot{X} = -k(X - \ell) - \lambda \dot{X}$$

soit encore :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 (X - \ell) = 0$$

où on pose : $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ et $Q = \frac{m\omega_0}{2\lambda}$.

Le régime est supposé pseudo-périodique, donc : $\frac{1}{2} < Q < \infty$.

3) La collision dure tant que le ressort est en compression, soit $X(t) < \ell$. La solution de l'équation d'évolution est de la forme :

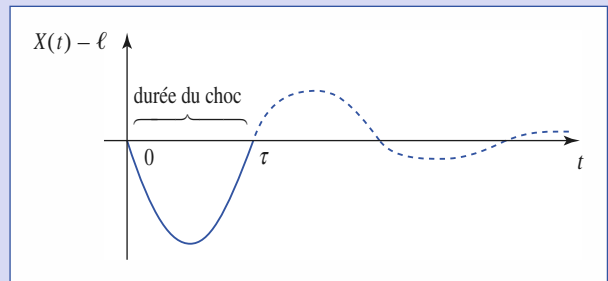
$$X(t) = \ell + [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)$$

en notant $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

Les conditions initiales, à $t = 0$ où le choc commence, sont : $X(0) = \ell$ et $\dot{X}(0) = -v_A$, de sorte que durant le choc :

$$X(t) = \ell - \frac{v_A}{\Omega} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \sin(\Omega t).$$

L'allure de cette fonction est la suivante :



et la durée de collision τ satisfait l'équation :

$$e^{-\frac{\omega_0 \tau}{2Q}} \sin(\Omega \tau) = \frac{\ell \Omega}{v_A}$$

Avant le choc, les vitesses sont v_A et $v_B = 0$.

Après le choc, elles valent :

$$\begin{cases} v'_A = v_G - \frac{1}{2} \dot{X}(\tau) = \frac{v_A}{2} \left(1 - e^{-\frac{\omega_0 \tau}{2Q}} \left(\Omega \cos \Omega \tau - \frac{\omega_0 \tau}{2Q} \sin \Omega \tau \right) \right) \\ v'_B = v_G + \frac{1}{2} \dot{X}(\tau) = \frac{v_A}{2} \left(1 + e^{-\frac{\omega_0 \tau}{2Q}} \left(\Omega \cos \Omega \tau - \frac{\omega_0 \tau}{2Q} \sin \Omega \tau \right) \right) \end{cases}$$

Avant le choc : $\mathcal{E}_K = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{m v_A^2}{2}$.

Après le choc : $\mathcal{E}'_K = \frac{1}{2} m v_A'^2 + \frac{1}{2} m v_B'^2 = \frac{m v_A^2}{2} \left(1 + \frac{\left(\dot{X}(\tau) \right)^2}{v_A^2} \right)$.

Bien évidemment, $\dot{X}(\tau)$ est positive, mais inférieure à $v_A = |\dot{X}(0)|$ puisque l'oscillation a été un peu amortie : $\mathcal{E}'_K < \mathcal{E}_K$.

Le frottement a converti une partie de l'énergie cinétique initiale en énergie cinétique microscopique : échauffement au niveau des parties où il y a du frottement.

4) On envisage ici la limite $Q \rightarrow \infty$ de sorte que :

$$X(t) = \ell - \frac{v_A}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

pendant la collision, la durée $\tau = \frac{\pi}{\omega_0}$.

Après le choc : $v'_A = 0$ et $v'_B = v_A$.

Il n'y a pas de dissipation de l'énergie cinétique macroscopique : $\mathcal{E}'_K = \mathcal{E}_K$. Le mobile A a simplement transféré son énergie cinétique intégralement au mobile B. Les joueurs de pétanque appellent cela un « carreau parfait ».

5) La durée de collision doit ici devenir infinie, ce qui est réalisé si $Q \rightarrow \frac{1}{2}$ car on a alors $\Omega \rightarrow 0$: l'oscillation ne ramène $X(t)$ à la valeur ℓ qu'au bout d'un temps τ extrêmement long.

Utilisant $\tau \rightarrow \infty$, il vient : $v'_A = \frac{v_A}{2} = v'_B$. Les deux mobiles restent bien « collés » !

Nous constatons alors : $\mathcal{E}'_K = \frac{1}{4} m v_A^2 = \frac{1}{2} \mathcal{E}_K$. La dissipation d'énergie correspond à la perte de la moitié de l'énergie cinétique macroscopique disponible.

12 1) On repère la direction dans un système d'axes « fixes », donc pour un observateur terrestre, les axes du référentiel de Copernic.

2) Le système doit être isolé puisque le mouvement du barycentre est (au moins à l'échelle du temps d'observation) rectiligne (et uniforme si on regarde l'amplitude du déplacement obtenu tous les dix ans).

3) a) Ces lois ont été énoncées au chapitre 7 :

Loi 1 : Caractère elliptique des trajectoires des planètes autour du Soleil.

Loi 2 : Loi des aires vérifiée par ces mouvements.

Loi 3 : Rapport $\frac{T^2}{a^3}$ constant dans le système solaire.

b) La loi des aires résulte de la conservation du moment cinétique. En utilisant les coordonnées polaires dans le plan d'une trajectoire à force centrale :

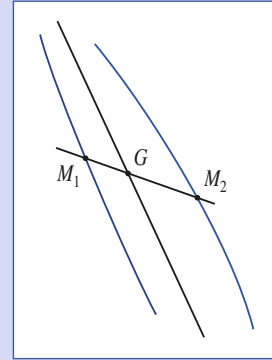
$\vec{L} = m\vec{r} \wedge \vec{v} = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = \vec{c}te$, on obtient : $r \dot{\theta} = cte = C$, constante des aires. L'aire balayée par unité de temps par le rayon vecteur \vec{r} est égale à $\frac{C}{2}$.

c) Pour un mouvement newtonien circulaire : $-\frac{m v^2}{r} \vec{e}_r = -\frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r$, α étant la constante de force, donc : $r v^2 = \frac{\alpha}{m}$. La période du mouvement est :

$$T = \frac{2\pi r}{v} \text{ donc } T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{v^2} = \frac{4\pi^2 r^3 m}{\alpha}$$

Pour le mouvement circulaire, le rayon r s'identifie au demi-grand axe de la trajectoire, ce qui donne bien :

$$\frac{T^2}{a^3} = cte = \frac{4\pi^2 m}{\alpha}$$



4) Nous pouvons utiliser : $\frac{GM_1}{GM_2} = \frac{m_2}{m_1}$ à différentes dates ce qui donne :

$$\frac{m_2}{m_1} \approx 2, \text{ de façon très approximative.}$$

5) La distance peut être mesurée par la méthode de la parallaxe (chapitre 1, exercice 3).

6) Il n'est pas certain que le plan de figure (plan de projection des positions) coïncide avec le plan des ellipses : le grand axe de la trajectoire n'est pas déterminé.

7) $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{\alpha}$, avec a demi-grand axe de l'ellipse décrite par le mobile fictif, de masse réduite $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, nous donne : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$,

avec $a = a_1 \frac{m_1 + m_2}{m_2} = a_2 \frac{m_1 + m_2}{m_1}$ puisque les trajectoires de M_1, M_2 et du mobile fictif sont homothétiques dans \mathcal{R}^* .

Nous en déduisons :

$$m_1 = \frac{4\pi^2}{GT^2} a_2 (a_1 + a_2)^2 \text{ et } m_2 = \frac{4\pi^2}{GT^2} a_1 (a_1 + a_2)^2.$$

8) a) Par décalage Doppler des raies observables dans son spectre (une étoile présente un spectre d'ionisation continu, dans lequel apparaissent des raies sombres du fait de l'absorption de radiations précises par certains éléments présents dans sa couronne).

b) Écrivons pour M_1 :

$$m_1 \frac{v_1^2}{a_1} = \frac{G m_1 m_2}{(a_1 + a_2)^2}, \text{ avec } T = \frac{2\pi a_1}{v_1}, \text{ et de même pour } M_2, \text{ il vient :}$$

$$m_1 = \frac{T}{2\pi G} v_2 (v_1 + v_2)^2 \text{ et } m_2 = \frac{T}{2\pi G} v_1 (v_1 + v_2)^2.$$

c) A.N. : $m_2 \approx 4,2 \cdot 10^{30}$ kg et $m_1 = 7,0 \cdot 10^{30}$ kg.

Ces étoiles sont un peu plus massives que le Soleil, et de natures assez voisines.

13 1) Si le point M_1 est immobile, la tension du fil est égale à son poids : $T = m_1 g$.

Pour le mouvement circulaire uniforme de M_2 , nous avons : $m_2 \frac{v_c^2}{r_0} = T$, donc :

$$v_c = \sqrt{\frac{m_1}{m_2} g r_0}.$$

Corrigés

2) L'énergie mécanique du système est une constante du mouvement (pas de frottement), qui s'écrit :

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}m_1\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - m_1gz$$

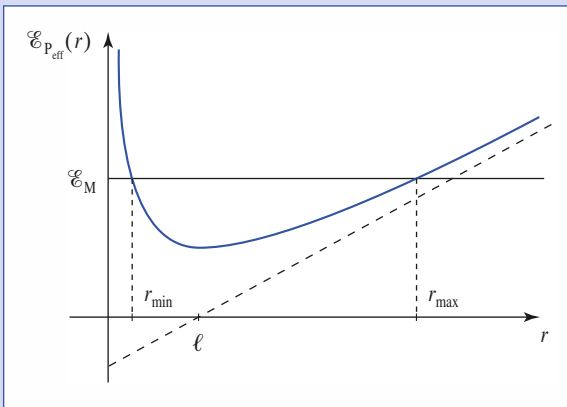
où nous avons : $\ell = r + z$ et $\dot{z} + \dot{r} = 0$, avec $r^2\dot{\theta} = C = r_0v_0$ car le point M_2 est soumis à la traction du fil qui est une force centrale.

Nous obtenons ainsi :

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{P_{\text{eff}}}(r),$$

avec $\mathcal{E}_{P_{\text{eff}}}(r) = \frac{1}{2}(m_2r_0^2v_0^2)\frac{1}{r^2} + m_1g(r - \ell)$

dont le *graphe* à l'allure suivante :



Ce qui laisse prévoir un état lié pour lequel la distance $OM_1 = r$ varie entre les valeurs extrêmes r_{\min} et r_{\max} .

3) Les conditions initiales fixent la valeur de l'énergie :

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}m_2v_0^2 + m_1g(r_0 - \ell)$$

et l'intégrale première de l'énergie s'écrit :

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_2v_0^2\left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right) + m_1g(r - r_0) = 0.$$

Les valeurs extrêmes de r sont données par $\dot{r} = 0$, soit :

$$\frac{1}{2}m_2v_0^2\left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right) + m_2v_c^2\left(\frac{r}{r_0} - 1\right) = 0.$$

En notant $x = \frac{r}{r_0}$, il vient :

$$\frac{(x-1)}{x^2}\left(\frac{2v_c^2}{v_0^2}x^2 - x - 1\right) = 0$$

dont les solutions positives sont :

$$x = 1 \text{ et } x = \frac{v_0^2}{4v_c^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8v_c^2}{v_0^2}}\right).$$

Les valeurs r_{\min} et r_{\max} correspondant à r_0 et $r_0\frac{v_0^2}{4v_c^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8v_c^2}{v_0^2}}\right)$.

On a $r_0 = r_{\min}$ si $v_0 > v_c$ et $r_0 = r_{\max}$ si $v_0 < v_c$.

Annexe

Résolution numérique d'une équation d'évolution : méthode d'Euler

1 Modèle physique

Un problème physique doit être modélisé : la situation est traduite sous forme d'équations.

La résolution des équations permet de prédire des résultats associés au modèle utilisé.

La confrontation de ces prédictions avec l'expérience permet de valider, invalider, ou préciser les limites d'utilisations du modèle proposé.

2 Équation d'évolution

La physique s'intéresse à l'étude de l'évolution d'un système. En mécanique, nous étudierons des mouvements de système. Le modèle propose en général des formes pour les interactions mises en jeu, et débouche sur une équation d'évolution du système.

Pour confronter le modèle à l'expérience, il faut au préalable résoudre ces équations d'évolution. Les techniques de calcul différentiel peuvent nous permettre de résoudre ces équations. Assez souvent, nous ne serons pas en mesure de proposer une solution explicite du modèle étudié. Si la solution est connue, mais d'expression complexe (série de termes à calculer), nous pourrions l'évaluer numériquement. Si la solution n'est pas accessible, nous tenterons de résoudre numériquement les équations différentielles du modèle.

Nous aborderons ici une technique de résolution numérique élémentaire d'une équation d'évolution.

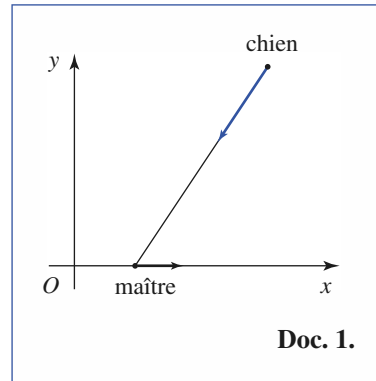
3 Le chien de Leonhard Euler

L'exemple d'étude est celui de la cinématique d'un chien courant après son maître.

■ Modèle

L'évolution est décrite dans un plan, les positions repérées dans le repère (xOy) (doc. 1).

Le chien se déplace à vitesse de norme v_c constante, en se dirigeant droit vers son maître (si le maître se déplace, le chien corrige donc en permanence sa direction).



Si nous notons $M(x_m, y_m)$ la position du maître et $C(x_c, y_c)$ celle du chien, la vitesse du chien à l'instant t est :

$$\vec{v}_c = v_c \frac{\vec{CM}}{CM} = v_c \left[\frac{x_m - x_c}{\sqrt{(x_m - x_c)^2 + (y_m - y_c)^2}} \vec{e}_x + \frac{y_m - y_c}{\sqrt{(x_m - x_c)^2 + (y_m - y_c)^2}} \vec{e}_y \right].$$

■ Équation d'évolution, conditions aux limites

Supposons la vitesse du maître non nulle, mais constante, et plaçons l'axe (Ox) sur la trajectoire rectiligne du maître :

$$\vec{v}_m = v_m \vec{e}_x.$$

Le problème à résoudre est donc régi par les équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{dx_m}{dt} = v_m ; & \frac{dy_m}{dt} = 0 \\ \frac{dx_c}{dt} = v_c \frac{x_m - x_c}{\sqrt{(x_m - x_c)^2 + (y_m - y_c)^2}} ; & \frac{dy_c}{dt} = v_c \frac{y_m - y_c}{\sqrt{(x_m - x_c)^2 + (y_m - y_c)^2}} \end{cases}$$

et nous devons le résoudre, connaissant les conditions initiales :

$$(x_m, y_m)_{t=0} = (0 ; 0) \text{ et } (x_m, y_m)_{t=0} = (x_{m_0}, y_{m_0}).$$

4 Méthode d'Euler

■ Équation d'évolution

Le problème est régi par une équation différentielle d'ordre un de la forme :

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \vec{G}(\vec{F}, t)$$

Annexe

la fonction vectorielle \vec{F} correspondant ici au vecteur (x_m, y_m, x_c, y_c) , et la fonction \vec{G} étant identifiable par les seconds membres des équations différentielles ci-dessus (dans le cas présent \vec{G} ne dépend pas explicitement du temps).

■ Calcul pas à pas

Pour calculer $\vec{F}(t)$, nous procéderons « pas à pas », en considérant qu'entre deux intervalles de temps t et $t + \delta t$, la dérivée $\frac{d\vec{F}}{dt}$ a sa valeur $\vec{G}(\vec{F}(t), t)$ prise à l'instant t , dans ces conditions, nous écrivons :

$$\vec{F}(t + \delta t) \approx \vec{F}(t) + \vec{G}(\vec{F}(t), t) \delta t.$$

Ainsi, connaissant $\vec{F}(t)$, nous calculons $\vec{G}(\vec{F}(t), t)$ ce qui permet de prédire la valeur $\vec{F}(t + \delta t)$ au pas de calcul suivant, et ainsi de suite.

5 Simulation numérique

■ Calcul à l'aide d'un tableur

Un tableur se prête aisément à ce genre de calcul « de proche en proche », puisqu'il suffit d'associer une ligne à chaque pas du calcul itératif de la solution.

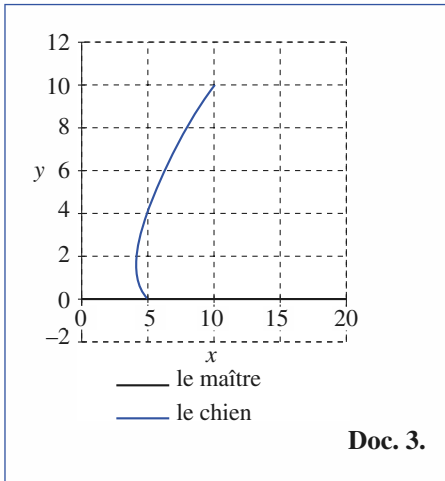
À l'aide du tableur Excel, nous obtenons :

B	C	D	E	F	G	H	I
1							
2			xm(0)	ym(0)			
3	point du départ du maître		0	0			
4							
5			xc(0)	yc(0)			
6			10	10			
7	point du départ du chien						
8							
9			vm				
10	vitesse du maître		1				
11							
12			vc				
13	vitesse du chien						
14			2				
15							
16					déplacement du maître	déplacement du chien	
17	t	xm(t)	ym(t)	xc(t)	yc(t)	dxc	dyc
18	0,00	0	0	10	10	1	-1,41
19	1,00	0,1	0	8,59	8,59	0,2	-0,14
20	2,00	0,2	0	8,45	8,44	0,3	-0,14
21	3,00	0,3	0	8,31	8,3	0,4	-0,14
22	4,00	0,4	0	8,17	8,16	0,5	-0,14
23	5,00	0,5	0	8,03	8,01	0,6	-0,14
24	6,00	0,6	0	7,89	7,87	0,7	-0,14
25	7,00	0,7	0	7,72	7,72	0,8	-0,13
26	8,00	0,8	0	7,57	7,57		0,15
27	9,00	0,9	0	7,42	7,42		0,15
28	10,00	1	0	7,27	7,27		0,15
29	11,00	1,1	0	7,12	7,12		0,15
30	12,00	1,2	0	6,97	6,97		0,16
31	13,00	1,3	0	6,96	6,82	1,4	-0,13
32	14,00	1,4	0	6,84	6,66	1,5	-0,12
33	15,00	1,5	0	6,71	6,51	1,6	-0,12
34	16,00	1,6	0	6,58	6,35	1,7	-0,12
35	17,00	1,7	0	6,46	6,2	1,8	-0,12
36	18,00	1,8	0	6,34	6,04	1,9	-0,12
37	19,00	1,9	0	6,22	5,88	2	-0,12

Doc. 2. Document Excel.

■ Résultat de simulation

Pour un pas d'itération $\delta t = 0,1$ s, le tracé des positions successivement calculées nous donne le *graphe* suivant :



Comme nous avons donné au chien une vitesse de $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ alors que le maître se déplace à $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, le chien rattrape son maître. Ce résultat du calcul est déjà un bon point : l'évolution simulée est plausible.

■ Comment ajuster δt ?

Pour δt , il faut trouver un compromis :

- si δt est « grand », la simulation est rapide car le nombre d'itérations est réduit. En revanche, la précision des résultats risque de souffrir de cette économie de moyens : notre calcul conduit à assimiler constamment la courbe à sa tangente, celle-ci étant considérée comme constante durant δt , approximation d'autant plus mauvaise que δt est grand ;
- si δt est « petit » cette approximation est meilleure. La simulation est plus précise, mais le temps de calcul augmente...

Une première méthode peut être pragmatique : pour éviter un trop grand nombre de calculs, on peut commencer par une simulation à « grand » δt , puis diminuer peu à peu le pas d'itération jusqu'à ce que sa valeur n'ait plus d'influence sur la courbe simulée. Nous estimons alors que le calcul effectué est « convenablement précis » pour le domaine d'évolution envisagé.

Dans le cas envisagé, il est clair que le choix $\delta t = 1$ s (*doc. 4*) est inacceptable, que le choix $\delta t = 0,1$ s (*doc. 5*) donne une courbe « assez régulière ». Dans le premier, le chien « saute autour de son maître » après l'avoir rejoint. C'est peut-être réaliste en pratique, mais pas en accord avec le modèle ! En regardant d'un peu plus près les

résultats numériques, nous pourrions voir que ce phénomène persiste encore un peu (les bonds du chien étant le long de l'axe (Ox) , nous ne les voyons pas sur le résultat graphique). Avec $\delta t = 0,01$ s (*doc. 5*), ce phénomène s'atténue encore. Avec un pas plus fin, nous ne constaterons plus de différence notable.

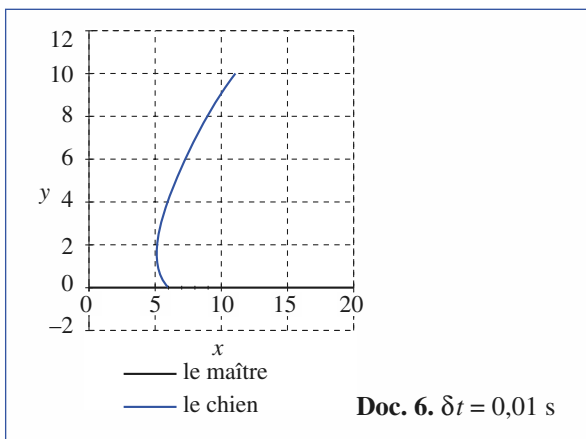
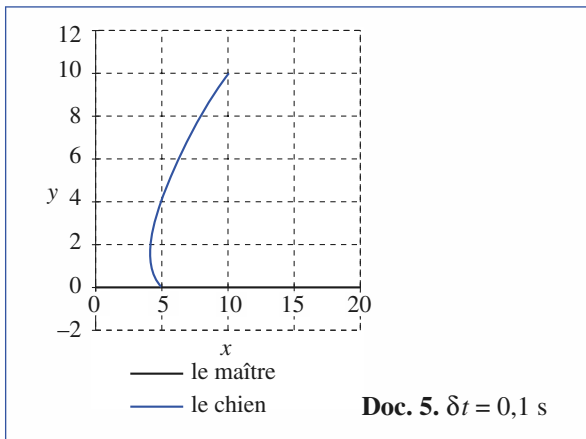
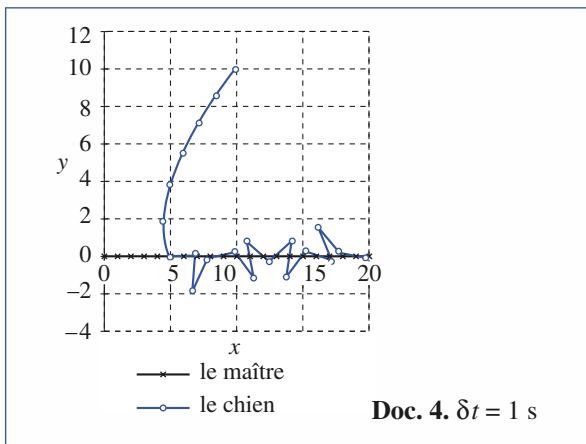
Nous pouvons aussi ajuster le pas δt en choisissant d'emblée une valeur adaptée au problème physique envisagé : si la distance entre le maître et le chien est initialement égale à L , nous pouvons proposer un temps caractéristique pour le problème $\tau = \frac{L}{|v_m - v_c|}$, donnant un ordre de grandeur du temps au bout duquel le chien doit avoir rattrapé son maître. En choisissant δt raisonnablement petit par rapport à τ , nous pouvons espérer obtenir une résolution numérique satisfaisante.

Attention toutefois, car nous pouvons aussi définir les temps caractéristiques $\tau_m = \frac{L}{v_m}$ et $\tau_c = \frac{L}{v_c}$ affectés aux déplacements du maître et du chien. Si, par exemple, v_c et v_m sont voisines, nous voyons qu'il faudra longtemps au chien pour rattraper son maître : le choix $\delta t = \frac{\tau}{10}$ peut sembler convenable, alors qu'il est peut-être trop grand pour calculer avec précision les mouvements du chien et du maître, nettement plus rapides que le mouvement relatif. Lorsque plusieurs temps caractéristiques se présentent, il faudra donc prendre δt raisonnablement petit par rapport au plus petit d'entre eux.

Dans le cas numérique envisagé : $L \approx 14 \text{ m}$, $v_m \approx 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $v_c \approx 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, soit $\tau \approx 14 \text{ s}$, $\tau_m = 14 \text{ s}$ et $\tau_c = 7 \text{ s}$. Ces temps sont du même ordre de grandeur, et le choix $\delta t = 0,01$ s est raisonnable, pour une précision recherchée de l'ordre de 1 %.

Les progrès en termes de rapidité de calcul peuvent enfin amener à la conclusion suivante : puisque nous disposons de machines (de plus en plus) puissantes, il n'est pas utile de se casser la tête à chercher un « bon » pas de calcul : prenons de suite un pas minuscule, puisque c'est la machine qui travaille, et qu'elle travaille vite. N'oublions pas cependant que la machine, aussi rapide soit-elle, a aussi ses limites : elle fait des calculs approchés, avec un nombre de décimales fini. Donc, si nous prenons un pas de calcul ridiculement faible, la machine risque d'ajouter beaucoup de petites erreurs (à la limite, le déplacement calculé pourrait être plus petit que l'erreur commise par la machine !) dont l'accumulation conduit à une erreur finale non négligeable.

Annexe



■ Application des résultats

En voulant trop simplifier, nous avons pris un problème aisé à comprendre, mais peu réaliste : drôle de chien en

effet ! À la limite, le cas de simulation fautive $\delta t = 1$ s pourrait sembler convenir, le chien sautant autour de son maître. La confrontation de la simulation avec l'expérience doit être reportée à des cas ultérieurs.

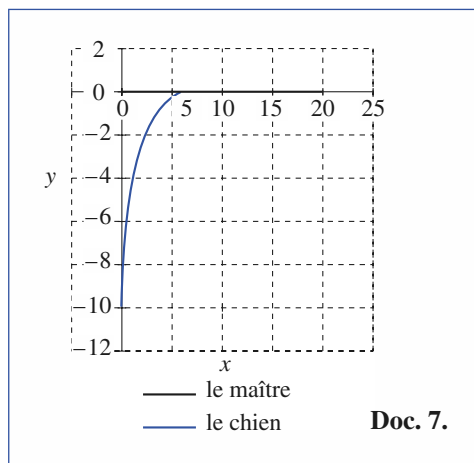
En revanche, nous pouvons confronter le résultat de la simulation au calcul exact, qui est ici possible.

Dans l'exercice « promenade », page 26, le chien est lâché en $(x_{c_0}, y_{c_0}) = (0, -d)$, et le calcul montre que le

$$\text{chien rejoint son maître au bout de } \Delta t = \frac{d}{v_m} \frac{\frac{v_c}{v_m}}{\left(\frac{v_c}{v_m}\right)^2 - 1}.$$

L'application numérique, pour $d = 10$ m, donne $\Delta t \approx 6,66$ s.

En utilisant la simulation numérique pour $\delta t = 0,01$ s (doc. 5), nous constatons sur les lignes du tableur que le chien rejoint son maître à la 667^e ligne de calcul, donc après $\Delta t = 6,67$ s (ensuite, il fait de tout petits bonds numériques autour du maître qui avance le long de (Ox)). Ce résultat est en accord avec le précédent, compte tenu de la précision de l'ordre du pourcentage attendue...



Remarque :

Les solutions d'une équation différentielle sont très sensibles à la valeur du pas d'intégration lors de l'utilisation de l'algorithme d'Euler : cette méthode d'intégration n'est donc que très rarement utilisée. On lui préfère des algorithmes plus performants tels que la méthode « Runge-Kutta d'ordre quatre ».

Problème

Mouvement à trois corps

ÉNONCÉ

L'objet du problème est d'étudier certains aspects du mouvement de trois corps en interaction gravitationnelle. On désignera par G la constante de gravitation universelle.

A. Deux masses ponctuelles m_1 et m_2 en interaction gravitationnelle forment un système isolé. À l'instant t , elles sont situées respectivement aux points A_1 et A_2 repérés dans un référentiel galiléen par $\vec{R}_1 = \overrightarrow{OA_1}$ et $\vec{R}_2 = \overrightarrow{OA_2}$, avec les vitesses \vec{v}_1 et \vec{v}_2 ; on pose $\vec{r} = \overrightarrow{A_1A_2}$ et $r = \|\vec{r}\|$.

- 1) Donner l'expression de l'énergie potentielle d'interaction des deux masses.
- 2) Déterminer la position de leur centre d'inertie C . Quelle est la trajectoire de C ? Déterminer sa vitesse.
- 3) Calculer l'énergie cinétique des deux masses dans le référentiel barycentrique; montrer qu'elle est égale à celle d'une masse ponctuelle de vitesse $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ et de masse μ que l'on déterminera en fonction de m_1 et m_2 .
- 4) Montrer que le mouvement relatif de m_2 par rapport à m_1 , caractérisé par $\vec{r}(t)$, est équivalent à celui de cette masse ponctuelle soumise à une force que l'on explicitera et dont on précisera les caractéristiques.
- 5) À quelle condition portant sur r et $v = \|\dot{\vec{v}}\|$ les deux masses restent-elles à distance finie l'une de l'autre?
- 6) a) À quelle condition portant sur r et v les deux masses restent-elles à distance fixe r_0 l'une de l'autre?
b) Déterminer dans ce cas la période T de leur mouvement, ainsi que la vitesse angulaire Ω en fonction des masses, de r_0 et G .

B. On étudie un cas particulier du problème à trois corps « restreint », à savoir :

- Deux masses m_1 et m_2 sont beaucoup plus grandes que la troisième m , soit $m_1 \gg m$ et $m_2 \gg m$. La masse m est supposée ponctuelle comme m_1 et m_2 .
- Les deux masses m_1 et m_2 , à distance constante l'une de l'autre, effectuent un mouvement de rotation à la vitesse angulaire Ω autour de leur centre d'inertie C . Ce mouvement, décrit au **A.6)** n'est pas affecté par la présence de la troisième masse m . On ne considère dans cette partie que les situations où les trois masses restent alignées au cours du temps. La masse m est située au point A . On prendra la direction $\overrightarrow{A_1A_2}$ comme axe $(x'Cx)$ d'origine C , avec $\overrightarrow{CA_1} = -r_1\vec{e}_x = r_1^*\vec{r}_1^*$ et $\overrightarrow{CA_2} = r_2\vec{e}_x = r_2^*\vec{r}_2^*$ $\overrightarrow{CA} = x\vec{e}_x$ et \vec{e}_x vecteur unitaire.

- 1) Exprimer, en fonction de x à l'aide des paramètres du système, la composante selon $x'Cx$ de la force totale qui s'exerce sur la masse m dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire Ω .
- 2) Montrer que, dans ce référentiel tournant, cette composante dérive d'une fonction $U(x)$ qui joue le rôle d'une « énergie potentielle ». Expliciter $U(x)$.
- 3) Effectuer une étude qualitative de $U(x)$ en fonction de x ; par une analyse graphique, montrer qu'il a trois positions « d'équilibre » possibles pour la masse m et les situer qualitativement par rapport aux masses m_1 et m_2 .
- 4) Discuter de la stabilité de ces positions d'équilibre dans le référentiel tournant, vis-à-vis des déplacements selon l'axe $(x'Cx)$.

C. 1) Trois masses, *a priori* différentes, m_1 , m_2 et m_3 sont situées respectivement aux trois sommets A_1 , A_2 et A_3 d'un triangle équilatéral de côté d ; soit C leur centre d'inertie.

\vec{F}_1 étant la résultante des forces de gravitation s'exerçant sur la masse m_1 , montrer que :

$$\vec{F}_1 = -Gm_1 \frac{(m_1 + m_2 + m_3)}{d^3} \overrightarrow{CA_1}.$$

Problème

2) En déduire que, si les masses tournent dans leur plan avec une certaine vitesse angulaire commune Ω que l'on déterminera, elles sont en équilibre relatif.

On limite, dans toute la suite de cette partie, l'étude au cas où, comme en **B**, l'une des masses, $m_3 = m$ est beaucoup plus petite que les deux autres m_1 et m_2 , dont le mouvement circulaire n'est pas modifié par m . On prend la direction $\overrightarrow{A_1A_2}$ comme axe ($X'CX$). La masse m , placée en A , est repérée par $\vec{R}(t) = \vec{CA}$ de coordonnées (X, Y) . On s'intéresse à la stabilité de la masse m au voisinage du sommet A_3 du triangle équilatéral de base A_1A_2 , en limitant d'abord l'étude aux mouvements dans ce plan. On oriente l'axe ($Y'CY$) de telle sorte que l'ordonnée de A_3 soit positive.

3) Écrire, dans le référentiel tournant, « l'énergie potentielle » $U(X, Y)$ dont dérive la somme des forces gravitationnelles et d'inertie d'entraînement agissant sur la masse m ; on posera :

$$\|\overrightarrow{AA_1}\| = d_1(X, Y) \text{ et } \|\overrightarrow{AA_2}\| = d_2(X, Y).$$

4) On note par la suite :

$$u(X, Y) = \frac{U(X, Y)}{m}, \quad u_X(X, Y) = \frac{\partial u(X, Y)}{\partial X} \text{ et } u_{XY} = \frac{\partial^2 u(X, Y)}{\partial X \partial Y}, \text{ etc.}$$

Écrire les équations du mouvement liant X, Y , leurs dérivées, en faisant intervenir la vitesse de rotation Ω et les termes $u_X(X, Y)$ et $u_Y(X, Y)$.

5) En vue d'étudier la stabilité de m au voisinage du point A_3 , on pose $X = X_0 + x$, $Y = Y_0 + y$, où (X_0, Y_0) sont les coordonnées du point d'équilibre A_3 de la masse m , dont on ne demande pas le calcul explicite.

Écrire les équations du mouvement, en se limitant aux termes du premier ordre en x et y . Pour alléger l'écriture, on notera : $u_{XX} = u_{XX}(X_0, Y_0)$, $u_{XY} = u_{XY}(X_0, Y_0)$, etc.

6) On cherche des solutions du type : $x = a \exp(\lambda t)$, $y = b \exp(\lambda t)$, où a et b sont des constantes.

Monter que λ doit vérifier l'équation caractéristique :

$$\lambda^4 + \lambda^2(4\Omega^2 + u_{XX} + u_{YY}) + (u_{XX}u_{YY} - u_{XY}^2) = 0.$$

7) On admet que si l'on pose :

$$\lambda = \lambda' \Omega \quad m_1 = \alpha(m_1 + m_2) \quad \text{et} \quad m_2 = (1 - \alpha)(m_1 + m_2)$$

et que l'on évalue les dérivées partielles figurant dans l'équation caractéristique de la question **C.6**), la variable λ'^2 vérifie l'équation du second degré suivante :

$$\lambda'^4 + \lambda'^2 + \frac{27}{4}\alpha(1 - \alpha) = 0.$$

Soit Δ le discriminant de cette équation.

a) Que conclure sur la stabilité de la position d'équilibre si $\Delta \geq 0$?

b) Même question si $\Delta < 0$.

c) En déduire les valeurs de α pour lesquelles la position d'équilibre est stable.

8) Pour le système Lune-Terre, le rapport de la masse légère m_1 à la masse totale $(m_1 + m_2)$ est $\alpha = 0,012$. En considérant ce système comme isolé, quelles conclusions tirez-vous quant à la stabilité de la position d'équilibre d'un petit objet dont la position formerait un triangle équilatéral avec les centres de la Terre et de la Lune ?

Même question pour le système Jupiter-Soleil pour lequel $\alpha = 0,001$. L'observation des « planètes troyennes », de même période de révolution que Jupiter autour du Soleil et faisant avec lui et le Soleil un triangle équilatéral, conforte-t-elle votre conclusion ?

9) Par une analyse qualitative des forces s'exerçant dans le référentiel tournant, étudier la stabilité de la position A_3 vis-à-vis de petits mouvements orthogonaux au plan (XCY).

SOLUTION

A. 1) L'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle est :

$$\mathcal{E}_P = -\frac{Gm_1m_2}{r},$$

la force d'interaction étant $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -Gm_1m_2 \frac{\vec{r}}{r^3}$.

2) Notons $\vec{R} = \vec{OC}$, nous avons :

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2}{m_1 + m_2}.$$

Le système étant isolé, le centre d'inertie a une *trajectoire rectiligne parcourue à vitesse uniforme* dans le référentiel galiléen d'étude.

3) Dans le référentiel barycentrique :

$$\vec{r}_1^* = \vec{CA}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{r}_2^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r},$$

donc :

$$\mathcal{E}_K^* = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}_1^*)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{r}_2^*)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(\dot{r})^2 = \frac{1}{2}\mu(\dot{r})^2,$$

où $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$ est la masse réduite du mobile fictif.

4) Dans le référentiel barycentrique, galiléen, les équations des mouvements de A_1 et A_2 s'écrivent :

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1^*}{dt^2} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad m_2 \frac{d^2\vec{r}_2^*}{dt^2} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2}, \quad \text{ce qui}$$

revient à écrire :

$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\text{soit :} \quad \mu \ddot{\vec{r}} = -Gm_1m_2 \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

L'étude des mouvements de A_1 et A_2 se ramène donc à celui du mobile fictif de position $\vec{r}(t)$.

5) Le système doit former un état lié, donc $\mathcal{E}_M^* = \mathcal{E}_K^* + \mathcal{E}_P^*$ doit être négative,

$$\text{soit :} \quad \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{Gm_1m_2}{r} = \mathcal{E}_M^* < 0.$$

6) a) La distance reste fixe si la trajectoire barycentrique du mobile fictif est un cercle de rayon r_0 :

$$\mu \frac{v^2}{r_0} = G \frac{m_1m_2}{r_0^2} \rightarrow r_0 v^2 = G(m_1 + m_2).$$

b) La période du mouvement circulaire est alors :

$$T = \frac{2\pi r_0}{v},$$

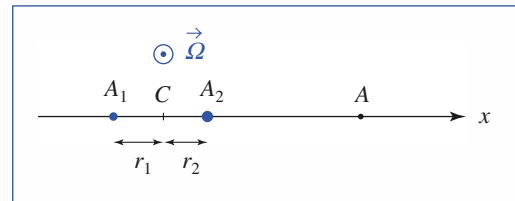
$$\text{soit :} \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r_0^3}{G(m_1 + m_2)}}$$

et la pulsation $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ est :

$$\Omega = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{r_0^3}}.$$

$$\text{B. 1)} \quad F_x = m \left(-Gm_1 \frac{x+r_1}{|x+r_1|^3} - Gm_2 \frac{x-r_2}{|x-r_2|^3} \right)$$

est la force d'origine gravitationnelle.



Dans le référentiel tournant, il faut faire intervenir les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis :

$$\vec{F}_{i_e} = m\Omega^2 x \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{F}_{i_c} = -2m\Omega \wedge \dot{x} \vec{e}_x.$$

Notons que la particule de masse m ne peut rester sur l'axe x que si $\dot{x} = 0$, car la force de Coriolis lui fait quitter l'axe x dès qu'il y a mouvement : on ne s'intéresse implicitement ici qu'à un équilibre du point A dans le référentiel tournant, pour lequel la force totale, dirigée suivant x :

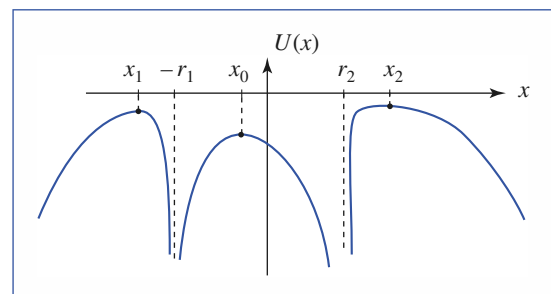
$$f_x = m \left(-Gm_1 \frac{x+r_1}{|x+r_1|^3} - Gm_2 \frac{x-r_2}{|x-r_2|^3} + x\Omega^2 \right)$$

doit être nulle.

2) À cette expression peut être associée l'énergie potentielle (prise nulle à l'infini) :

$$U(x) = m \left(-\frac{Gm_1}{|x+r_1|} - \frac{Gm_2}{|x-r_2|} - \frac{1}{2}\Omega^2 x^2 \right).$$

3) Le graphe de $U(x)$:



fait apparaître trois positions x_0 (entre A_1 et A_2), x_1 et x_2

Problème

(hors du segment A_1A_2) pour lesquelles l'équilibre est réalisé.

4) Ces trois positions correspondent à des *maxima d'énergie potentielle* : elles sont *instables*, tout au moins vis-à-vis d'un déplacement suivant l'axe (Cx), mais il faudrait tenir compte de la force de Coriolis pour étudier complètement le mouvement, et discuter la stabilité.

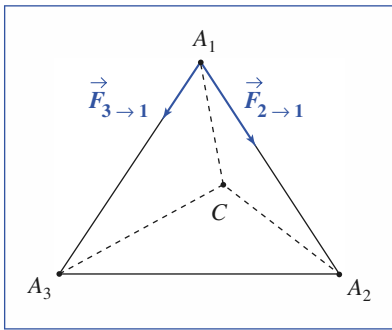
C. 1) La force gravitationnelle agissant sur A_1 s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\rightarrow 1} &= Gm_1 \left(m_2 \frac{\vec{A}_1A_2}{A_1A_2^3} + m_3 \frac{\vec{A}_1A_3}{A_1A_3^3} \right) \\ &= G \frac{m_1}{d^3} (m_2 \vec{A}_1A_2 + m_3 \vec{A}_1A_3).\end{aligned}$$

Sachant que, par définition du centre d'inertie :

$$m_1 \vec{CA}_1 + m_2 \vec{CA}_2 + m_3 \vec{CA}_3 = \vec{0}, \text{ il vient :}$$

$$\vec{F}_{\rightarrow 1} = -Gm_1 \frac{m_1 + m_2 + m_3}{d^3} \vec{CA}_1.$$



2) L'équilibre recherché correspond à $m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1$, soit :

$$-\Omega^2 \vec{CA}_1 = -\frac{G(m_1 + m_2 + m_3)}{d^3} \vec{CA}_1, \text{ et donc :}$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2 + m_3)}{d^3}}.$$

(Cette relation pouvant être établie avec l'une quelconque des trois masses.)

Dans le cas $m_3 \ll m_1$ et m_2 , on retrouve la valeur de la première partie.

3) La force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{i_c} = m\Omega^2 \vec{CA}$ agissant sur la masse m dérive de l'énergie potentielle $-\frac{1}{2}m\Omega^2(X^2 + Y^2)$. En lui ajoutant les énergies potentielles gravitationnelles, il vient :

$$U(X, Y) = -m \left[\frac{Gm_1}{d_1(X, Y)} + \frac{Gm_2}{d_2(X, Y)} + \Omega^2(X^2 + Y^2) \right].$$

4) Aux forces dérivant de cette énergie potentielle, de

composantes $\begin{pmatrix} -m \frac{\partial u}{\partial X} \\ -m \frac{\partial u}{\partial Y} \end{pmatrix}$, il faut ajouter la force d'inertie de

Coriolis $\vec{F}_{i_c} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$, de composantes $\begin{pmatrix} 2m\Omega \dot{Y} \\ -2m\Omega \dot{X} \end{pmatrix}$,

pour écrire la relation fondamentale de la dynamique :

$$m\vec{a} = \left(-\frac{\partial U}{\partial X}(X, Y)\vec{e}_X - \frac{\partial U}{\partial Y}(X, Y)\vec{e}_Y \right) + \vec{F}_{i_c},$$

ce qui donne :

$$\ddot{X} = -u_X + 2\Omega \dot{Y} \text{ et } \ddot{Y} = -u_Y - 2\Omega \dot{X}$$

5) À l'ordre linéaire, on écrit :

$$\begin{cases} u_X(X_0 + x, Y_0 + y) = u_X(X_0, Y_0) + u_{XX}x + u_{XY}y \\ u_Y(X_0 + x, Y_0 + y) = u_Y(X_0, Y_0) + u_{XY}x + u_{YY}y \end{cases}$$

Les termes d'ordre 0 devant se simplifier pour la position d'équilibre, il reste :

$$\ddot{x} = -u_{XX}x - u_{XY}y + 2\Omega \dot{y}$$

$$\ddot{y} = -u_{XY}x - u_{YY}y - 2\Omega \dot{x}$$

6) En remplaçant x et y par les solutions proposées :

$$\begin{cases} (\lambda^2 + u_{XX})a + (u_{XY} - 2\lambda\Omega)b = 0 \\ (u_{XY} + 2\lambda\Omega)a + (\lambda^2 + u_{YY})b = 0 \end{cases}$$

Ce système admet des solutions (a, b) non nulles si, et seulement si, son déterminant est nul :

$$\lambda^4 + \lambda^2(4\Omega^2 + u_{XX} + u_{YY}) + (u_{XX}u_{YY} - u_{XY}^2) = 0.$$

7) a) L'équation $\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\alpha(1 - \alpha) = 0$ est une équation du deuxième degré en λ^2 .

Ces racines ont une somme négative (égale à -1) et un produit positif (car $\alpha(1 - \alpha) > 0$ puisque $0 < \alpha < 1$).

Dans le cas $\Delta > 0$, cette équation admet deux racines réelles et négatives, nous pouvons en déduire quatre racines λ' imaginaires pures : les solutions $x(t)$ et $y(t)$ sont bornées, et le système est stable.

b) Dans le cas $\Delta < 0$, l'équation du deuxième degré donne deux racines complexes conjuguées s'écrivant :

$$-\frac{1}{2} \pm jA = -\frac{1}{2} \sqrt{1 + 4A^2} e^{\pm j\varphi} \quad (\text{avec } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}).$$

La résolution de $\lambda'^2 = -\frac{1}{2} \sqrt{1 + 4A^2} e^{\pm j\varphi}$ donne :

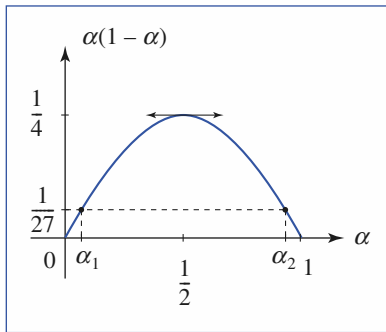
$$\lambda' = \pm \left[\frac{\sqrt{1 + 4A^2}}{2} \right]^{1/2} \left(j \cos \frac{\varphi}{2} \mp \sin \frac{\varphi}{2} \right),$$

et donc certaines racines à partie réelle positive : $x(t)$ et $y(t)$ contiennent des termes qui divergent, *le système est instable*.

c) La stabilité est assurée par $\Delta > 0$, donc par l'inégalité : $\alpha(1 - \alpha) < \frac{1}{27}$, car $\Delta = 1 - 27\alpha(1 - \alpha)$ (voir document ci-après).

Ceci est assuré par : $\alpha < \alpha_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{23}{27}}\right) \approx 0,038$

ou bien : $\alpha > \alpha_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{23}{27}}\right) \approx 0,96$.



8) Pour le système Terre-Lune : $\alpha < \alpha_1$, ce qui assure la stabilité de l'équilibre relatif (encore faudrait-il considérer les termes d'accélération différentielle dans le référentiel barycentrique Terre-Lune, dûs aux autres planètes, et surtout au Soleil...). Pour le système Soleil-Jupiter, $\alpha < \alpha_1$ aussi, donc stabilité encore (et corrections supplémentaires à venir aussi...).

9) Ajoutons un déplacement z selon l'axe (C_z).

Les forces de gravitation ne sont modifiées, dans (CXY), qu'à l'ordre z^2 , et, d'autre part, ramènent la masse m vers le plan (CXY). Le mouvement selon (C_z) est donc stable (si le mouvement est déjà stable dans (CXY)).

Dans le plan (CXY), les forces de gravitation ne sont donc pratiquement pas modifiées, les composantes de la force de Coriolis $-2m\Omega\vec{e}_z \wedge \vec{v}$ sont strictement inchangées, de même que la force d'inertie d'entraînement qui reste $\vec{F}_{i_e} = m\Omega^2(X\vec{e}_X + Y\vec{e}_Y)$: le mouvement (faible) parallèle à (C_z) ne remet pas en cause l'étude précédente.

Index

A-B

Accélération 17
absolue 178
de Coriolis 179
différentielle 209
d'entraînement 179
relative 178
Additivité des réponses 97
Amortissement critique 85
Amplitude complexe 101
Analogie électromécanique 108
Analyse
de Fourier d'un signal 106
harmonique 106
Barycentre G 226
Base vectorielle 9

C-D

Champ
de forces conservatives 56
de gravitation 143
newtonien 145
Changement de référentiel 173
Composition
des accélérations 178
de vitesse 16
Conservation du moment cinétique 128
Constante de Planck 9
Coordonnées
cartésiennes 10
cylindriques 10
polaires 11
sphériques 11
Décrément logarithmique 87
Dérivation
d'une fonction vectorielle 13
d'un vecteur 175
Déterminisme mécanique 41
Deuxième loi de Newton 37
Deuxième vitesse cosmique 155
Déviation vers l'Est 219
Dynamique en référentiel non galiléen 183

E

Éléments cinétiques 228
Énergie
cinétique 231
mécanique 56, 58, 239
potentielle 56, 57, 239
potentielle effective 148
Équation
caractéristique 81
d'évolution 38
Équipartition 78
Espace
de phase 19
de vitesse 19
Excitation sinusoïdale 100

F

Facteur d'amortissement 80
Facteur de qualité 81
Fil idéal 36
Force
de Coriolis 183
d'entraînement 183
d'inertie
non conservative 189
de liaison 35
de pesanteur 34
de rappel élastique 36

H-I-J-K

Hodographe 19
Impédance mécanique 110
Impulsion 33
Inertie mécanique 33
Interaction
coulombienne 144
gravitationnelle 143
Isochronisme des oscillations 75
Jour
sidéral 206
solaire moyen 206

L

Loi

- des aires 128
- de conservation 147
- de gravitation 143

Lois

- de Kepler 152, 154
- de Newton 37
 - Première loi de Newton 33

Lunaison 219

M-N

Machine d'Atwood 235

Marées

- de mortes eaux 211
- de vives eaux 211

Masse inertielle 33

Mécanique quantique 9

Mobile fictif 230

Modèle du point matériel 32

Moment

- cinétique 124, 228
 - en un point 124
 - par rapport à un axe 124
- d'une force 123
 - en un point 123
 - par rapport à un axe 123

Mouvement

- à force centrale 128
- oscillant 20
- relatif de deux référentiels 173
- uniformément accéléré 20

O

Oscillateur

- amorti 80
- excité 96
- harmonique 74, 75
- harmonique spatial 78
- libre 80

P-Q

Pendule

- de Foucault 205, 215
- simple 76
- sphérique 79

Pesanteur terrestre 144

Poids d'un corps 212

Point

- coincident 177
- matériel pseudo-isolé 34

Portrait de phase 76

Positions

- absolues 226
- relatives 226

Poulie idéale 36

Première vitesse cosmique 154

Principe

- des actions réciproques 37
- d'inertie 33

Problème de Képler 152

Puissance d'une force 53

Quantité de mouvement 33, 228

R

Raideur du ressort 36

Référentiel

- barycentrique 229
- de Copernic 205
- galiléen 33, 181
- non galiléen 181, 236
- géocentrique 207
- de Kepler 206
- d'observation 7
- terrestre 34, 212

Régime

- apériodique 84
- critique 83
- d'évolution 81
- forcé 97, 100
- libre 97
- permanent 99
- permanent sinusoïdal 101
- pseudo-périodique 81
- transitoire 97, 99, 100

Relation de de Broglie 9

Relativité 8

Repérage d'un point 9

Repère 10

Réponse

- à un échelon 97
- harmonique en élongation 102
- harmonique en vitesse 105

Représentation complexe d'une grandeur sinusoïdale 101

Résultante cinétique 228

Rotation 174

S

Satellite géostationnaire 155

Stabilité de l'équilibre 61

Système

forcé 43

libre 43

T

Temps de relaxation de l'énergie 80

Terme

axifuge 213

de Coriolis 214

différentiel 208, 209

de marée 208

Théorème

de l'énergie cinétique 55, 189

de Kœnig 230

du moment cinétique 125, 234

barycentrique 235

dans \mathcal{R} non galiléen 187

de la puissance cinétique 54

de la quantité de mouvement 37

scalaire du moment cinétique 235

Trajectoire 19

de phase 19

d'un référentiel 7

Translation 174

Travail d'une force 53

V

Vecteur

de Runge-Lenz 156

position 10

Vitesse

absolue 177

relative 177

Vitesse d'un point 14



*La collection de référence
des classes préparatoires scientifiques*

Mécanique 1^{re} année MPSI-PCSI-PTSI

1. Cinématique
2. Dynamique du point matériel
3. Puissance et énergie en référentiel galiléen
4. Mouvement libre d'un oscillateur harmonique
5. Réponse d'un oscillateur à une excitation
6. Théorème du moment cinétique
7. Force centrale conservative. Mouvement newtonien
8. Changements de référentiels. Mécanique non galiléenne
9. Mécanique terrestre
10. Système de deux points matériels

H Prépa *le savoir-faire Hachette au service des prépas*

MATHÉMATIQUES

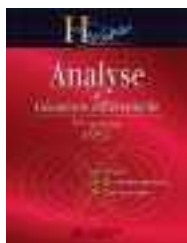
Algèbre et géométrie euclidienne MPSI
Analyse et géométrie différentielle MPSI
Algèbre et géométrie euclidienne PCSI PTSI
Analyse et géométrie différentielle PCSI PTSI

PHYSIQUE

Optique MPSI PCSI PTSI
Mécanique MPSI PCSI PTSI
Électromagnétisme MPSI PCSI PTSI
Électronique-Électrocinétique MPSI PCSI PTSI
Thermodynamique MPSI PCSI PTSI

CHIMIE

Chimie 1 PCSI 1^{re} période
Chimie 2 PCSI 2^e période (option PC)
Chimie MPSI PTSI
(+ PCSI option SI 2^e période)



H Prépa EXERCICES & PROBLÈMES

Des rappels de cours et de nombreux exercices corrigés pour s'entraîner toute l'année et pour préparer les concours

**TOUT LE PROGRAMME
EN UN SEUL VOLUME**



www.hachette-education.com

ISBN : 978-2-0118-1754-9



HACHETTE
Supérieur