A. Martin

Exercices résolus

Equations aux dérivées partielles

Dunod Université

Equations aux dérivées partielles

Chez le même éditeur

Saint-Martin — *Problème résolus de mathématiques. Tome 1. Examens de mathématiques générales A du C.N.A.M., 256 pages.*

Saint-Martin — *Problèmes résolus de mathématiques. Tome 2. Examens de Mathématiques Générales A du C.N.A.M., 288 pages.*

H. Reinhard — *Cours de mathématiques du signal, 272 pages.*

M. Carbon, P. Marry, N. Point, D. Vial — *Exercices résolus de mathématiques du signal, 160 pages.*

H. Reinhard — *Équations différentielles, 464 pages.*

H. Reinhard — *Équations aux dérivées partielles, 302 pages.*

J. Vélu — *Méthodes mathématiques pour l'informatique, 272 pages.*

J.-. J. Bonnet — *Physique générale, charges, courants, atomes, solides, 224 pages.*

Exercices résolus

Equations aux dérivées partielles

A. Martin
Maître-assistant
Conservatoire National des Arts et Métiers

DUNOD

AVANT-PROPOS

S'il existe fort peu d'ouvrages élémentaires qui exposent les rudiments de la théorie des équations aux dérivées partielles, il y en a encore moins réservés à des exercices.

Ce livre constitue un excellent complément au livre du cours. Leur objectif commun est de permettre à des étudiants dont le bagage mathématique est assez modeste de suivre leurs cours de physique, électronique ou mécanique et, plus tard, d'approfondir leurs connaissances mathématiques au fur et à mesure de leurs besoins.

Ce but ne peut être atteint qu'avec des bases solides acquises par une étude sérieuse du cours et par la résolution d'exercices variés et bien adaptés.

Les qualités pédagogiques de l'auteur, sa grande expérience professionnelle sont garants de la réussite; je le remercie de mettre à la disposition des étudiants un outil de travail précieux.

Professeur Hervé REINHARD
Titulaire de la Chaire de Mathématiques
de l' Ingénieur au C.N.A.M. (Paris)

ISBN 2-10-000084-5

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1

Systèmes différentiels

$$\frac{dx}{A(x,y,z)} = \frac{dy}{B(x,y,z)} = \frac{dz}{C(x,y,z)} .$$

RAPPELS DE COURS

1. ***Méthode pratique .***

a) Pour trouver une intégrale première de $\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}$, notée U, on utilise l'égalité $\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}$ pour déterminer $A(x,y)$ et $B(x,y)$ telles que :

α) il existe U vérifiant : $dU = A(x,y)dx + B(x,y)dy$,

β) avec : $A(x,y)\,P(x,y) + B(x,y)\,Q(x,y) = 0$.

b) On procède de façon analogue pour résoudre $\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$: on cherche deux fonctions U et V indépendantes telles que :

α) on ait : $dU = A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz$,

β) avec : $A(x,y,z)\,P(x,y,z) + B(x,y,z)\,Q(x,y,z) + C(x,y,z)\,R(x,y,z) = 0$,

γ) et deux relations analogues pour V.

2. ***Fonctions indépendantes*** . On a le théorème :

Deux fonctions U et V sont fonctionnellement indépendantes dans un ouvert G de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si : $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix}$ est de rang deux dans G.

EXERCICES

1.1.1. – Résoudre le système différentiel :
$$\frac{dx}{x^3+3xy^2}=\frac{dy}{y^3+3x^2y}=\frac{dz}{2\,(x^2+y^2)\,z}$$

1.1.2. – Résoudre le système différentiel :
$$\frac{dx}{y^n-z^n}=\frac{dy}{z^n-x^n}=\frac{dz}{x^n-y^n},\quad n=C^{te}\in\mathbb{R}^*-\{-1\}.$$

1.1.3. – Résoudre le système différentiel :
$$\frac{dx}{x(cz-by)}=\frac{dy}{y(ax-cz)}=\frac{dz}{z(by-ax)},\quad a,b,c=C^{tes}\in\mathbb{R}^*.$$

1.2.1. – Résoudre le système différentiel :
$$\frac{dx}{x^2-yz}=\frac{dy}{y^2-zx}=\frac{dz}{z^2-xy}.$$

1.3.1. – Résoudre le système différentiel :
$$\frac{dx}{-2y-2z+4}=\frac{dy}{-x-y+z+7}=\frac{dz}{-2x+2y+2}.$$

1.3.2. – Résoudre le système différentiel :
$$\frac{dx}{2y+2z+2}=\frac{dy}{x+y-z+1}=\frac{dz}{2x-2y-8}.$$

1.3.3. – Résoudre le système différentiel :
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{a\,(x^2+y^2)}{y\,(a^2+z^2)},\quad a=C^{te}\in\mathbb{R}_+^*.$$

1.3.4. – Résoudre le système différentiel :
$$\frac{dy}{dx}=-y+\frac{2z}{y^2+z^2},\quad \frac{dz}{dx}=-z-\frac{2y}{y^2+z^2}.$$

1.4.1. – Résoudre le système différentiel :
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+z}{x},\qquad \frac{dz}{dx}=\frac{z-y}{x},$$

1.4.2. – Résoudre le système différentiel :
$$\frac{dx}{x\,(x+y)}=\frac{dy}{-y\,(x+y)}=\frac{dz}{(x-y)\,(2x+2y+z)}.$$

1.4.3. – Résoudre le système différentiel :
$$\frac{dx}{y(x+y)+z}=\frac{dy}{x\,(x+y)-z}=\frac{dz}{z\,(x+y)}.$$

1.4.4. – Résoudre le système différentiel :
$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{2zdz}{z^2-(x^2+y^2)}.$$

1.5.1. – Résoudre le système différentiel :
$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{x}.$$

1.5.2. – Résoudre le système différentiel :
$$\frac{dx}{x-y+z-4}=\frac{dy}{2x+y-z+1}=\frac{dz}{-2x+y+z+1}.$$

1.6.1. – Soit le système différentiel :
$$\frac{dy}{dx}=\frac{x\,(z-y+a)}{y^2+z^2},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{-x\,(y+z-a)}{y^2+z^2},\quad a=C^{te}\in\mathbb{R}.$$

1°) Quelle valeur faut-il imposer à a afin que les courbes intégrales de ce système soient tracées sur des sphères centrées à l'origine ?

2°) En donnant à a cette valeur, déterminer les courbes intégrales de ce système.

SOLUTIONS

1.1.1. – Nous avons le système différentiel :
$$\frac{dx}{x^3+3xy^2}=\frac{dy}{y^3+3x^2y}=\frac{dz}{2\,(x^2+y^2)\,z},$$
multiplions le numérateur et le dénominateur du premier rapport par y, puis, pour le second rapport, par x, formons la somme des numérateurs et des dénominateurs obtenus, on trouve l'égalité :
$$\frac{ydx+xdy}{y\,(x^3+3\,xy^2)+x\,(y^3+3\,x^2y)}=\frac{dz}{2\,(x^2+y^2)\,z},$$
ou : $$\frac{ydx+xdy}{4\,xy\,(x^2+y^2)}=\frac{dz}{2\,(x^2+y^2)\,z},$$
soit aussi : $$\frac{d(xy)}{xy}=\frac{2\,dz}{z},$$
qui donne l'intégrale première :

(1) $$U\,(x,y,z)=\frac{z^2}{xy}.$$

– Multiplions maintenant le numérateur et le dénominateur du premier rapport par x, puis, pour le second rapport, par y, formons la différence des numérateurs et des dénominateurs obtenus, il vient :
$$\frac{x\,dx-y\,dy}{x^4+3\,x^2y^2-y^4-3\,x^2y^2}=\frac{dz}{2\,(x^2+y^2)\,z},$$

ou : $$\frac{x\,dx - y\,dy}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)} = \frac{dz}{2(x^2+y^2)\,z},$$

on a donc : $$\frac{2\,(x\,dx - y\,dy)}{x^2-y^2} = \frac{dz}{z},$$

qui conduit à l'intégrale première :

(2) $$V(x,y,z) = \frac{x^2-y^2}{z}.$$

– On examine alors si les deux intégrales premières U et V données respectivement par (1) et (2) sont indépendantes, on forme, du rappel de cours :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\dfrac{z^2}{x^2y} & -\dfrac{z^2}{xy^2} & \dfrac{2z}{xy} \\ \dfrac{2x}{z} & -\dfrac{2y}{z} & \dfrac{-x^2+y^2}{z^2} \end{vmatrix},$$

en considérant les deux premières colonnes, on trouve :

$$\Delta' = \begin{vmatrix} -\dfrac{z^2}{x^2y} & -\dfrac{z^2}{xy^2} \\ \dfrac{2x}{z} & -\dfrac{2y}{z} \end{vmatrix} = \frac{2z}{x^2} + \frac{2z}{y^2} \neq 0,$$

qui établit que Δ est de rang deux. Par suite, les deux intégrales premières : $U(x,y,z) = \dfrac{z^2}{xy}$ et $V(x,y,z) = \dfrac{x^2-y^2}{z}$ sont indépendantes, on en conclut que les solutions du système différentiel envisagé sont les courbes intersections des deux surfaces:

$$z^2 = axy \quad \text{et} \quad x^2 - y^2 = bz, \quad a, b = C^{tes} \in \mathbb{R}.$$

1.1.2. – On envisage donc le système différentiel :

$$\frac{dx}{y^n - z^n} = \frac{dy}{z^n - x^n} = \frac{dz}{x^n - y^n}, \quad n = C^{te} \in \mathbb{R}^* - \{-1\}$$

en formant la somme des numérateurs et des dénominateurs, on obtient, d'une manière formelle : $$\frac{dx+dy+dz}{y^n - z^n + z^n - x^n + x^n - y^n} = \frac{dx+dy+dz}{0},$$

qui donne l'intégrale première :

(1) $$U(x,y,z) = x + y + z$$

– Multiplions maintenant le numérateur et le dénominateur du premier rapport par x^n, puis, pour le second rapport, par y^n, pour le troisième rapport par z^n, enfin, formons la somme des numérateurs et des dénominateurs obtenus, il apparaît :

$$\frac{x^n\,dx}{x^n(y^n-z^n)} = \frac{y^n\,dy}{y^n(z^n-x^n)} = \frac{z^n\,dz}{z^n(x^n-y^n)} = \frac{x^n\,dx + y^n\,dy + z^n\,dz}{0},$$

on en tire l'intégrale première :

(2) $$V(x,y,z) = x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1}.$$

– On forme alors : $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (n+1)x & (n+1)y & (n+1)z \end{vmatrix},$$

en considérant, par exemple, les deux premières colonnes de Δ, il apparaît, puisque $n \in \mathbb{R}^* - \{-1\}$, que Δ est de rang deux.
Par suite, les deux intégrales premières :
$U(x,y,z) = x+y+z$ et $V(x,y,z) = x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1}$ sont indépendantes, on en déduit que les solutions du système différentiel considéré sont les courbes (planes), intersections des plans d'équations : $x + y + z = a$, $a = C^{te} \in \mathbb{R}$,
et des surfaces d'équations : $x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1} = b$, $b = C^{te} \in \mathbb{R}$.

1.1.3. – Pour le système différentiel :

$$\frac{dx}{x(cz-by)} = \frac{dy}{y(ax-cz)} = \frac{dz}{z(by-ax)}, \quad a, b, c = C^{tes} \in \mathbb{R}^*.$$

on trouve facilement les deux intégrales premières, par exemple :
(1) $U(x,y,z) = xyz$ et (2) $V(x,y,z) = ax + by + cz$;
on montre sans difficulté qu'elles sont indépendantes, on en conclut que les solutions du système différentiel envisagé sont les courbes (planes),
intersections des surfaces d'équations : $xyz = k$, $k = C^{te} \in \mathbb{R}$,
par les plans d'équations : $ax + by + cz = h$, $h = C^{te} \in \mathbb{R}$.

1.2.1. – On envisage maintenant le système différentiel :

$$\frac{dx}{x^2 - yz} = \frac{dy}{y^2 - zx} = \frac{dz}{z^2 - xy}.$$

formons la différence des numérateurs et des dénominateurs des deux premiers rapports, puis du second et du troisième rapport, et enfin des rapports extrêmes, il vient le nouveau système :

$$\frac{d(x-y)}{(x-y)(x+y+z)} = \frac{d(y-z)}{(y-z)(x+y+z)} = \frac{d(z-x)}{(z-x)(x+y+z)},$$

travaillant pour : $x + y + z \neq 0$, on trouve :

(1) $$\frac{x-y}{a} = \frac{y-z}{b} = \frac{z-x}{c}, \quad a, b, c = C^{tes} \in \mathbb{R}^*;$$

on en déduit, par exemple, les deux intégrales premières :

(2) $U(x,y,z) = \dfrac{x-y}{y-z}$ et (3) $V(x,y,z) = \dfrac{x-y}{z-x}$.

– On forme alors :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{y-z} & \dfrac{z-x}{(y-z)^2} & \dfrac{x-y}{(y-z)^2} \\ \dfrac{z-y}{(z-x)^2} & \dfrac{-1}{z-x} & \dfrac{-(x-y)}{(z-x)^2} \end{vmatrix},$$

qui s'écrit aussi :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{y-z}{(y-z)^2} & \dfrac{z-x}{(y-z)^2} & \dfrac{x-y}{(y-z)^2} \\ \dfrac{-(y-z)}{(z-x)^2} & \dfrac{-(z-x)}{(z-x)^2} & \dfrac{-(x-y)}{(z-x)^2} \end{vmatrix},$$

qui montre que les deux lignes de Δ sont proportionnelles, donc Δ n'est pas de rang deux, les deux intégrales premières U et V données respectivement par (2) et (3), ne sont pas fonctionnellement indépendantes.

– On note que, du système initial, on peut multiplier le numérateur et le dénominateur du premier rapport par y, puis le numérateur et le dénominateur du premier rapport par z, travaillant de même pour le second rapport, produits par x, puis z, enfin, pour le dernier rapport, produits par x et y, il apparaît :

$$\Lambda = \frac{y\,dx}{yx^2 - y^2z} = \frac{z\,dx}{zx^2 - yz^2} = \frac{z\,dy}{zy^2 - xz^2} = \frac{x\,dy}{xy^2 - x^2z} = \frac{x\,dz}{xz^2 - x^2y} = \frac{y\,dz}{yz^2 - xy^2},$$

et en formant la somme des numérateurs et des dénominateurs des rapports ci-dessus, on trouve :

$$\Lambda = \frac{y\,dx + z\,dx + z\,dy + x\,dy + x\,dz + y\,dz}{0} = \frac{d\,(xy + yz + zx)}{0},$$

qui donne l'intégrale première :

(4) $\quad W(x,y,z) = xy + yz + zx\,.$

– On examine alors, par exemple, si les intégrales premières U et W, données respectivement par (2) et (4), sont indépendantes, on forme, à cet effet :

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{y-z} & \dfrac{z-x}{(y-z)^2} & \dfrac{x-y}{(y-z)^2} \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix},$$

en considérant, par exemple, les deux premières colonnes de Δ', on obtient :

$$D = \frac{1}{(y-z)^2}\begin{vmatrix} y-z & z-x \\ y+z & z+x \end{vmatrix} = \frac{2\,(xy - z^2)}{(y-z)^2},$$

qui établit que Δ' est de rang deux.
Par conséquence, les deux intégrales premières :

$$U(x,y,z) = \frac{x-y}{y-z} \quad \text{et} \quad V(x,y,z) = xy + yz + zx,$$

sont indépendantes, on en conclut que les solutions du système différentiel envisagé, sont les courbes planes, intersections des surfaces d'équations :

$$xy + yz + zx = a, \quad a = C^{te} \in \mathbb{R},$$

avec les plans d'équations : $\quad x - (1+b)\,y + bz = 0, \quad b = C^{te} \in \mathbb{R}\,.$

1.3.1. – Nous avons, maintenant le système différentiel :

$$\frac{dx}{-2y - 2z + 4} = \frac{dy}{-x - y + z + 7} = \frac{dz}{-2x + 2y + 2},$$

envisageons en premier lieu, le système linéaire :

$$\begin{cases} -2y - 2z + 4 = 0, \\ -x - y + z + 7 = 0, \\ -2x + 2y + 2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11}{3}, \\ y = \dfrac{8}{3}, \\ z = -\dfrac{2}{3}; \end{cases}$$

on effectue alors la translation d'origine :

$$x = \frac{11}{3} + X, \quad y = \frac{8}{3} + Y, \quad z = -\frac{2}{3} + Z;$$

en remplaçant dans le système initial, on obtient le nouveau système différentiel :

(1) $$\frac{dX}{-2Y - 2Z} = \frac{dY}{-X - Y + Z} = \frac{dZ}{-2X + 2Y},$$

en combinant d'une part les deux premiers rapports, puis, d'autre part, les rapports extrêmes, on obtient l'équation :

$$\frac{dX + 2\,dY}{-2Y - 2Z - 2X - 2Y + 2Z} = \frac{dX + dZ}{-2Y - 2Z - 2X + 2Y},$$

ou : $$\frac{d\,(X + 2Y)}{X + 2Y} = \frac{d\,(X + Z)}{X + Z},$$

qui donne l'intégrale première :

(2) $$U_1(X,Y,Z) = \frac{X + 2Y}{X + Z},$$

soit, en revenant aux variables initiales :

(3) $$U(x,y,z) = \frac{x + 2y - 9}{x + z - 3}.$$

– On peut écrire, de (2), l'intégrale première sous la forme :

(4) $$\frac{X + 2Y}{X + Z} = C_1\,, \quad C_1 = C^{te},$$

qui donne par exemple : $\quad 2Y = -X + C_1(X + Z)\,;$
en remplaçant dans les rapports extrêmes du système (1), on obtient :

$$\frac{dX}{X - C_1(X+Z) - 2Z} = \frac{dZ}{-2X - X + C_1(X + Z)},$$

soit, l'équation homogène :

(5) $$\frac{dZ}{dX} = \frac{(-3 + C_1)\,X + C_1Z}{(1 - C_1)\,X - (C_1 + 2)\,Z}\,;$$

afin d'intégrer cette équation différentielle du premier ordre, on effectue le changement de fonction inconnue : $\; Z = tX\,,$ on obtient alors l'équation :

$$5\frac{dX}{X} = \left[-\frac{3}{t+1} - 2\frac{(C_1+2)}{(C_1+2)t+(C_1-3)} \right] dt,$$

dont la solution générale est :

$$X^5(t+1)^3 [(C_1+2)t+(C_1-3)]^2 = C_2', \quad C_2' = C^{te},$$

ou, en revenant à Z, $\quad (Z+X)^3 [(C_1+2)Z+(C_1-3)X]^2 = C_2'$,

et en remplaçant C_1 par sa valeur donnée par (4), il vient une autre intégrale première du système (1) :

(6) $\quad V_1(X,Y,Z) = (Z+X)^2 (Z+Y-X)$,

soit, en revenant aux variables initiales :

(7) $\quad V(x,y,z) = (z+x-3)^2 (z+y-x+\frac{5}{3})$.

– On examine alors si les deux intégrales premières U_1 et V_1 données respectivement par (2) et (6) sont indépendantes, on forme :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{Z-2Y}{(X+Z)^2} & \dfrac{2}{X+Z} & -\dfrac{(X+2Y)}{(X+Z)^2} \\ (Z+X)(Z+2Y-3X) & (Z+X)^2 & (Z+X)(3Z+2Y-X) \end{vmatrix},$$

les deux premières colonnes donnent :

$$\Delta' = Z-2Y-2(Z+2Y-3X) = -Z-6Y+6X \neq 0,$$

qui établit que Δ est de rang deux.
En conséquence, les deux intégrales premières U_1 et V_1 sont indépendantes, et, il en est de même des deux intégrales premières :

$$U(x,y,z) = \frac{x+2y-9}{x+z-3} \quad \text{et} \quad V(x,y,z) = (x+z-3)^2 (z+y-x+\frac{5}{3});$$

on en conclut que les solutions du système différentiel envisagé sont les courbes planes, intersections des surfaces d'équations :

$$(x+z-3)^2 (z+y-x+\frac{5}{3}) = a, \quad a = C^{te} \in \mathbb{R},$$

avec les plans d'équations : $(1-b)x+2y-bz-9+3b = 0, \quad b = C^{te} \in \mathbb{R}$.

1.3.2. – Soit donc le système différentiel :

$$\frac{dx}{2y+2z+2} = \frac{dy}{x+y-z+1} = \frac{dz}{2x-2y-8},$$

en travaillant comme dans l'exercice précédent, on effectue la translation d'origine :

$$x = 2+X, \quad y = -2+Y \quad \text{et} \quad z = 1+Z,$$

qui donne le nouveau système différentiel :

(1) $$\frac{dX}{2Y+2Z} = \frac{dY}{X+Y-Z} = \frac{dZ}{2X-2Y};$$

des deux premiers rapports et des rapports extrêmes, on tire l'équation :

$$\frac{d(X+2Y)}{X+2Y} = \frac{d(X+Z)}{X+Z},$$

qui donne l'intégrale première du système (1) : $\quad U_1(X,Y,Z) = \dfrac{X+2Y}{X+Z}$.

Opérant comme à l'exercice précédent, on peut écrire : $Z = C_1(X+2Y) - X$, qui, remis dans les deux premiers rapports du système (1), conduit à l'équation différentielle du premier ordre, homogène :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(2-C_1)X+(1-2C_1)Y}{(-2+2C_1)X+(2+4C_1)Y},$$

posant encore : $Y = tX$, on obtient l'équation différentielle à variables séparées :

$$\frac{dX}{X} = \left[\frac{(-2+2C_1)+(2+4C_1)t}{(2-C_1)+(3-4C_1)t-(2+4C_1)t^2} \right] dt,$$

qui s'écrit aussi :

$$-5\frac{dX}{X} = \left\{ \frac{3}{t+\frac{1}{2}} + \frac{2}{t+\frac{C_1-2}{1+2C_1}} \right\} dt,$$

qui s'intègre aisément, et, en revenant à X, Y et Z, donne l'intégrale première du système (1) :

$$V_1(X,Y,Z) = (X+2Y)^3 \left(\frac{2Y^2-X^2-XY+XZ+2YZ}{3X+2Y+2Z} \right)^2.$$

– *Remarque :* On a écrit, pour l'intégrale première U_1 : $\quad \dfrac{X+2Y}{X+Z} = \dfrac{1}{C_1}$,

posons : $\quad \dfrac{X+2Y}{X+Z} = -2+C_2, \quad C_2 = C^{te}$,

on en déduit, une autre intégrale première du système (1) :

$$U_2(X,Y,Z) = \frac{X+2Y}{3X+2Y+2Z},$$

qui se vérifie aisément, en formant : $\quad dU_2 = \left(\dfrac{\partial U_2}{\partial X} + \dfrac{\partial U_2}{\partial Y}\dfrac{dY}{dX} + \dfrac{\partial U_2}{\partial Z}\dfrac{dZ}{dX} \right) dX$,

avec, du système (1) : $\quad \dfrac{dY}{dX} = \dfrac{X+Y-Z}{2Y+2Z} \quad \text{et} \quad \dfrac{dZ}{dX} = \dfrac{2X-2Y}{2Y+2Z}$;

qui montre que le système (1) admet aussi, en utilisant V_1 et U_2, l'autre intégrale première :

$$V_2(X,Y,Z) = (X+2Y)(2Y^2-X^2-XY+XZ+2YZ)^2.$$

– On vérifie aisément, par exemple, que U_1 et V_2 sont indépendantes, et en revenant aux variables initiales, il apparaît que les solutions du système différentiel sont les courbes planes, intersections des surfaces d'équations :

$$(x+2y+2)(-x^2+2y^2-xy+xz+2yz+x+8y+2z+6)^2 = a, \quad a = C^{te} \in \mathbb{R},$$

avec les plans d'équations : $\quad (1-b)x+2y-bz+(2+3b) = 0, \quad b = C^{te} \in \mathbb{R}$.

1.3.3. – Soit le système différentiel :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{a(x^2+y^2)}{y(a^2+z^2)}, \quad a = C^{te} \in \mathbb{R}_+^*.$$

la dernière équation s'écrit aussi :

$$\frac{(x^2+y^2)\,dx}{y} = \frac{(a^2+z^2)\,dz}{a},$$

ou encore :

$$\frac{dx}{\dfrac{y}{x^2+y^2}} = \frac{dz}{\dfrac{a}{a^2+z^2}},$$

qui suggère d'écrire la première équation du système initial sous la forme :

$$\frac{dx}{\dfrac{y}{x^2+y^2}} = -\frac{dy}{\dfrac{x}{x^2+y^2}},$$

qui permet d'écrire le système différentiel :

$$\frac{dx}{\dfrac{y}{x^2+y^2}} = -\frac{dy}{\dfrac{x}{x^2+y^2}} = \frac{dz}{\dfrac{a}{a^2+z^2}}.$$

Les deux premiers rapports donnent l'intégrale première :

(1) $\quad U(x,y,z) = x^2+y^2;$

en posant :

(2) $\quad x^2+y^2 = C_1, \quad C_1 = C^{te},$

le système différentiel devient : $\dfrac{C_1\,dx}{y} = -\dfrac{C_1\,dy}{x} = \dfrac{(a^2+z^2)\,dz}{a},$

soit aussi : $\quad a\,C_1\left(\dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}\right) = (a^2+z^2)\,dz,$

ou :

$$a\,C_1\,\frac{d\left(\dfrac{x}{y}\right)}{1+\dfrac{x^2}{y^2}} = (a^2+z^2)\,dz,$$

qui donne l'autre intégrale première :

(3) $\quad V(x,y,z) = a^2 z + \dfrac{z^3}{3} - a(x^2+y^2)\arctan\dfrac{x}{y}.$

On vérifie sans difficulté que les deux intégrales premières U et V données respectivement par (1) et (3) sont indépendantes.

On en conclut que les solutions du système différentiel considéré sont les courbes intersections des surfaces d'équations :

$$a^2 z + \frac{z^3}{3} - a(x^2+y^2)\arctan\frac{x}{y} = b, \quad b = C^{te} \in \mathbb{R},$$

avec les cylindres de révolution d'axe (0,z), et d'équations :

$$x^2+y^2 = C, \quad C = C^{te} \in \mathbb{R}_+.$$

–*Remarque :* Ces résultats suggèrent d'utiliser les coordonnées cylindriques habituelles, on pose : $x = r\cos\theta$, $\quad y = r\sin\theta$, $\quad$ qui donnent :

$$dx = \cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta, \quad dy = \sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta,$$

en remplaçant dans le système différentiel obtenu plus haut, il vient :

(4)
$$\frac{\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta}{\dfrac{\sin\theta}{r}} = \frac{\sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta}{-\dfrac{\cos\theta}{r}} = \frac{dz}{\dfrac{a}{a^2+z^2}};$$

on déduit, des deux premiers rapports, en multipliant le premier haut et bas par $\cos\theta$, le second, haut et bas par $\sin\theta$, et en formant la somme des résultats :

$$\frac{\cos^2\theta\,dr - r\sin\theta\cos\theta\,d\theta + \sin^2\theta\,dr + r\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{r} - \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{r}} = \frac{dr}{0},$$

qui donne l'intégrale première (analogue à (1)) :

(5) $\quad W(r,\theta,z) = r.$

Multiplions maintenant le numérateur et le dénominateur du premier rapport de (4) par $\sin\theta$, puis le numérateur et le dénominateur du second rapport par $\cos\theta$, en formant la somme des résultats, on obtient :

$$-r^2\,d\theta = \frac{a^2+z^2}{a}\,dz,$$

qui, par intégration, donne l'intégrale première : $\quad H(r,\theta,z) = a^2 z + \dfrac{z^3}{3} + r^2 a\theta;$

on a retrouvé le résultat (3).

1.3.4. – Nous avons le système différentiel :

$$\frac{dy}{dx} = -y + \frac{2z}{y^2+z^2}, \quad \frac{dz}{dx} = -z - \frac{2y}{y^2+z^2},$$

en utilisant comme dans l'exercice précédent, les coordonnées cylindriques habituelles, soit ici : $y = r\cos\theta$ $\quad$ et $\quad z = r\sin\theta$, $\quad$ on obtient le système différentiel :

$$\frac{dr}{r} = \frac{r^2 d\theta}{2} = \frac{dx}{-1};$$

on en déduit, sans difficulté, les deux intégrales premières :

$$U_1(x,r,\theta) = \theta + \frac{1}{r^2},$$

$$V_1(x,r,\theta) = x + \ln r,$$

on met en évidence leur indépendance très facilement, on en conclut que les solutions du système différentiel envisagé, sont les courbes, intersections des deux surfaces d'équations :

$$\arctan\frac{z}{y} + \frac{1}{y^2+z^2} = a, \quad a = C^{te} \in \mathbb{R},$$

et $$x + \frac{1}{2}\ln(y^2+z^2) = b, \quad b = C^{te} \in \mathbb{R};$$

(on note que la première famille de surfaces est une famille de cylindres dont les génératrices sont parallèles à l'axe (0,x)).

1.4.1. – Soit donc, le système :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+z}{x}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{z-y}{x},$$

ce système s'écrit aussi :

(1) $$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y+z} = \frac{dz}{z-y};$$

les deux derniers rapports donnant l'équation homogène : $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{z-y}{y+z}$,

en posant : $z = ty$, on obtient l'équation à variables séparées : $\dfrac{(t+1)}{(t^2+1)}\,dt = -\dfrac{dy}{y}$,

dont la solution générale est : $\dfrac{1}{2}\ln(t^2+1) + \arctan t = -\ln|y| + C^{te}$;

revenant à x, y et z, on obtient l'intégrale première du système (1) :

(2) $$U(x,y,z) = \arctan\frac{z}{y} + \frac{1}{2}\ln(y^2+z^2).$$

– D'autre part, on déduit aussi du système (1) :

$$\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{y^2+yz} = \frac{zdz}{z^2-yz} = \frac{ydy+zdz}{y^2+z^2},$$

qui donne l'intégrale première :

(3) $$V(x,y,z) = \frac{y^2+z^2}{x^2}.$$

On contrôle aisément que les deux intégrales premières U et V, données respectivement par (2) et (3) sont indépendantes; par suite, les solutions du système différentiel envisagé sont les courbes, intersections des deux familles de surfaces d'équations :

$$\arctan\frac{z}{y} + \frac{1}{2}\ln(y^2+z^2) = a, \quad a = C^{te} \in \mathbb{R},$$

et : $$y^2+z^2 = b^2x^2, \quad b = C^{te} \in \mathbb{R}.$$

On remarque que les équations des surfaces ci-dessus suggèrent de travailler en coordonnées cylindriques : $y = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$;
on note aussi que la seconde famille de surfaces est une famille de cônes de révolution d'axe (0,x).

1.4.2. – Envisageons le système différentiel :

$$\frac{dx}{x(x+y)} = \frac{dy}{-y(x+y)} = \frac{dz}{(x-y)(2x+2y+z)},$$

on tire aisément des deux premiers rapports l'intégrale première : $U(x,y,z) = xy$;
on note que l'on peut écrire, en additionnant les numérateurs et les dénominateurs des deux premiers rapports :

$$\frac{dx+dy}{(x-y)(x+y)} = \frac{dz}{(x-y)(2x+2y+z)},$$

en posant : $X = x+y$, on obtient l'équation homogène : $\dfrac{dz}{dX} = \dfrac{2X+z}{X}$,

qui s'intègre aisément et donne, en revenant aux variables initiales, l'intégrale première :

$$V(x,y,z) = \ln(x+y)^2 - \frac{z}{x+y}.$$

On vérifie aisément l'indépendance des intégrales premières U et V obtenues et on en déduit que les solutions cherchées sont les courbes intersections des surfaces d'équations:

$$xy = a, \quad a = C^{te} \in \mathbb{R}, \quad \text{et}$$

$$\ln(x+y)^2 - \frac{z}{x+y} = b, \quad b = C^{te} \in \mathbb{R}.$$

1.4.3. – Soit le système différentiel :

$$\frac{dx}{y(x+y)+z} = \frac{dy}{x(x+y)-z} = \frac{dz}{z(x+y)},$$

en formant la somme des numérateurs et des dénominateurs des deux premiers rapports et, en simplifiant par x + y, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{d(x+y)}{x+y} = \frac{dz}{z},$$

qui donne l'intégrale première : $U(x,y,z) = \dfrac{z}{x+y}$;

en écrivant : $\dfrac{z}{x+y} = C_1$, $C_1 = C^{te}$, donc : $z = C_1(x+y)$,

et en remplaçant dans les deux premiers rapports du système envisagé, on obtient l'équation :

$$(x - C_1)\,dx = (y + C_1)\,dy,$$

qui donne l'autre intégrale première :

$$V(x,y,z) = x^2 - y^2 - 2z.$$

On vérifie aisément que U et V sont indépendantes, par suite, les solutions du système différentiel envisagé sont les courbes planes, intersections des surfaces d'équations :

$$x^2 - y^2 - 2z = a, \quad a = C^{te} \in \mathbb{R},$$

avec les plans d'équations :

$$z = b(x+y), \quad b = C^{te} \in \mathbb{R}.$$

1.4.4. – Pour le système différentiel :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{2zdz}{z^2 - (x^2+y^2)},$$

on déduit aisément des deux premiers rapports l'intégrale première :

$$U(x,y,z) = \frac{y}{x};$$

posant alors : $y = C_1 x, \quad C_1 = C^{te}$,

on tire facilement des rapports extrêmes, l'intégrale première :

$$V(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z^2}{x}.$$

On contrôle sans difficulté que U et V sont indépendantes; il en résulte que les solutions du système différentiel considéré sont les cercles, intersections des spères centrées sur l'axe (0,x), contenant l'origine d'équations :

$$x^2+y^2+z^2 = ax, \quad a = C^{te} \in \mathbb{R},$$

avec les plans contenant l'axe (0,z) d'équations : $y = bx, \quad b = C^{te} \in \mathbb{R}$.

1.5.1. – Considérons le système différentiel :

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{x},$$

multiplions le numérateur et le dénominateur du premier rapport par x^2, puis par $-yz$, pour le second rapport, par y^2, puis par $-zx$, enfin pour le troisième rapport par z^2, puis par $-xy$, il apparaît en formant la somme des numérateurs et des dénominateurs obtenus :

$$\frac{x^2\,dx - yz\,dx + y^2\,dy - zx\,dy + z^2\,dz - xy\,dz}{x^2y - y^2z + y^2z - z^2x + xz^2 - x^2y} = \frac{d\left[\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3) - xyz\right]}{0},$$

qui donne l'intégrale première :

(1) $\quad U(x,y,z) = x^3+y^3+z^3 - 3\,xyz.$

Ne voyant pas de combinaison évidente des rapports du système considéré, on envisage l'écriture :

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{x} = dt,$$

soit :

(2) $\quad \dfrac{dx}{dt} = y, \quad \dfrac{dy}{dt} = z, \quad \dfrac{dz}{dt} = x;$

on en tire, par exemple, par dérivation : $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dy}{dt} = z$, et en dérivant à nouveau :

$\dfrac{d^3x}{dt^3} = \dfrac{dz}{dt} = x$; l'équation caractéristique associée à cette équation est : $r^3 - 1 = 0$;

elle admet les trois racines : $r_1 = 1, \quad r_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad r_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

on en déduit :

$$x = Ae^t + Be^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} + Ce^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}, \quad A, B, C = C^{tes},$$

qui entraîne par dérivation :

$$y = Ae^t + \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Be^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} + \left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Ce^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t};$$

et, en dérivant à nouveau :

$$z = Ae^t + \left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Be^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} + \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Ce^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t};$$

posons alors, pour la commodité des écritures :

(3) $\quad X = Ae^t, \quad Y = Be^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}, \quad Z = Ce^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t};$

en remplaçant dans x, y et z, il vient le système linéaire :

$$X + Y + Z = x,$$
$$X + \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Y + \left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z = y,$$
$$X + \left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Y + \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z = z.$$

La solution de ce système se détermine sans difficulté, on trouve :

$$X = \frac{1}{3}(x+y+z),$$
$$Y = \frac{i}{2\sqrt{3}}(z-y) - \frac{1}{6}(-2x+y+z),$$
$$Z = \frac{-i}{2\sqrt{3}}(z-y) - \frac{1}{6}(-2x+y+z);$$

on déduit alors de (3) :

(4) $\quad t = \ln X + C_1, \quad C_1 = C^{te},$ puis :

(5) $\quad -t = \ln YZ + C_2, \quad C_2 = C^{te},$ enfin :

(6) $\quad i\sqrt{3}\,t = \ln\left(\dfrac{Y}{Z}\right) + C_3, \quad C_3 = C^{te},$

les logarithmes intervenant étant dans le corps des complexes $\mathbb{C}$.

En formant la somme membre à membre, des deux équations (4) et (5), on obtient :

$$\ln(XYZ) = C^{te}, \quad \text{ou} \quad XYZ = C^{te};$$

or, en formant le produit XYZ, on obtient :

$$XYZ = \frac{1}{27}(x^3 + y^3 + z^3 - 3\,xyz) = C^{te},$$

on a retrouvé l'intégrale première U donnée par (1).

– On remarque que Z est le conjugué de Y, on pose alors :

$$Y = |Y|e^{i\theta_Y} \quad \text{et} \quad Z = |Z|e^{i\theta_Z}, \quad \text{avec :} \quad |Y| = |Z| \quad \text{et} \quad \theta_Z = -\theta_Y,$$

et on a aussi : $\theta_Y = -\arctan\dfrac{\sqrt{3}(z-y)}{(-2x+y+z)}$;

utilisant ces résultats, on tire de (6) : $i\sqrt{3}t = \ln\left(\dfrac{|Y|}{|Z|}e^{i\theta_Y - i\theta_Z}\right) + C_3$,

donc : $i\sqrt{3}t = 2i\theta_Y + C_3$, d'où : $\sqrt{3}t = -2\arctan\dfrac{\sqrt{3}(z-y)}{(-2x+y+z)} + C^{te}$;

remplaçant t par sa valeur donnée par (4), on obtient une autre intégrale première du système envisagé :

$$(7) \qquad V(x,y,z) = \sqrt{3}\ln|x+y+z| + 2\arctan\frac{\sqrt{3}(z-y)}{(-2x+y+z)}.$$

– On vérifie aisément que V est bien une intégrale première du système différentiel considéré, en travaillant comme dans la remarque de l'exercice 1.3.2 ; et que U et V données respectivemetn par (1) et (7) sont indépendantes.

En définitive, les solutions du système différentiel sont les courbes, intersections des surfaces :

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3\,xyz = a, \quad a = C^{te} \in \mathbb{R},$$

et : $\sqrt{3}\ln|x+y+z| + 2\arctan\dfrac{\sqrt{3}(z-y)}{(-2x+y+z)} = b, \qquad b = C^{te} \in \mathbb{R}.$

1.5.2. – Soit donc le système différentiel :

$$\frac{dx}{x-y+z-4} = \frac{dy}{2x+y-z+1} = \frac{dz}{-2x+y+z+1},$$

en travaillant comme dans les exercices 1.3.1 et 1.3.2 , on effectue la translation d'origine : $x = 1+X$, $y = -1+Y$ et $z = 2+Z$,
on obtient le nouveau système :

$$\frac{dX}{X-Y+Z} = \frac{dY}{2X+Y-Z} = \frac{dZ}{-2X+Y+Z};$$

travaillant comme dans l'exercice précédent, on envisage le système différentiel :

$$\frac{dX}{dt} = X - Y + Z, \quad \frac{dY}{dt} = 2X + Y - Z, \quad \frac{dZ}{dt} = -2X + Y + Z.$$

En posant : ${}^tW = [X\ Y\ Z]$, le système précédent s'écrit, sous forme matricielle :

$$(1) \qquad \frac{dW}{dt} = MW,$$

où : $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

ses valeurs propres sont : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + i\sqrt{5}$, $\lambda_3 = 1 - i\sqrt{5}$,

et des calculs simples donnent la matrice de passage P :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1-i\sqrt{5} & -1+i\sqrt{5} \\ 2 & -2+i\sqrt{5} & -2-i\sqrt{5} \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

on écrit alors : $M = PDP^{-1}$, et l'équation (1) s'écrit, en posant : $P^{-1}W = H$,

$$(2) \qquad \frac{dH}{dt} = DH,$$

où D est la matrice diagonale :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1-i\sqrt{5} \end{bmatrix};$$

en posant : ${}^tH = [h_1\ \ h_2\ \ h_3]$, on trouve facilement :

$$(3) \qquad \begin{cases} h_1 = Ae^t, \quad h_2 = Be^{(1+i\sqrt{5})t}, \quad h_3 = Ce^{(1-i\sqrt{5})t}, \\ \qquad A, B, C = C^{tes}. \end{cases}$$

En revenant à W, il vient :

$$X = Ae^t + (-1-i\sqrt{5})\,Be^{(1+i\sqrt{5})t} + (-1+i\sqrt{5})\,Ce^{(1-i\sqrt{5})t},$$

$$Y = 2Ae^t + (-2+i\sqrt{5})\,Be^{(1+i\sqrt{5})t} + (-2-i\sqrt{5})\,Ce^{(1-i\sqrt{5})t},$$

$$Z = 2Ae^t + 3Be^{(1+i\sqrt{5})t} + 3Ce^{(1-i\sqrt{5})t};$$

travaillant comme dans l'exercice précédent, on obtient :

$$h_1 = \frac{1}{5}(X+Y+Z),$$

$$h_2 = -\frac{i}{6\sqrt{5}}(Y-2X) - \frac{1}{30}(2X+2Y-3Z),$$

$$h_3 = \frac{i}{6\sqrt{5}}(Y-2X) - \frac{1}{30}(2X+2Y-3Z):$$

travaillant dans $\mathbb{C}$, on a de (3) et des résultats ci-dessus :

$$t = \ln h_1 + C_1, \qquad C_1 = C^{te},$$

$$t + i\sqrt{5}t = \ln h_2 + C_2, \qquad C_2 = C^{te},$$

$$t - i\sqrt{5}t = \ln h_3 + C_3, \qquad C_3 = C^{te},$$

on en déduit :

$$U_1(X,Y,Z) = \frac{8X^2 + 3Y^2 + 3Z^2 - 4XY - 4YZ - 4ZX}{(X+Y+Z)^2} = C^{te},$$

et, en remarquant encore que h_3 est le conjugué de h_2 :

$$V_1(X,Y,Z) = \sqrt{5}\ln|X+Y+Z| + \arctan\frac{\sqrt{5}(2X-Y)}{(2X+2Y-3Z)} = C^{te}.$$

– En définitive, on obtient les deux intégrales premières du système différentiel initial :

$$U(x,y,z) = \frac{1}{(x+y+z-2)^2}\{8x^2+3y^2+3z^2-4xy-4yz-4zx-12x+18y-12z+27\},$$

et :

$$V(x,y,z) = \sqrt{5}\ln|x+y+z-2| + \arctan\frac{\sqrt{5}(2x-y-3)}{(2x+2y-3z+6)}.$$

On contrôle que U et V sont bien deux intégrales premières indépendantes du système différentiel envisagé; il en résulte que les solutions de ce système sont les courbes intersections des surfaces :

$$U(x,y,z) = a \quad \text{et} \quad V(x,y,z) = b, \quad a,b = C^{tes} \in \mathbb{R}.$$

1.6.1. – 1°) On a le système différentiel :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(z-y+a)}{y^2+z^2}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{-x(y+z-a)}{y^2+z^2},$$

on peut l'écrire sous la forme :

(1) $$\frac{x\,dx}{y^2+z^2} = \frac{dy}{z-y+a} = \frac{dz}{-(y+z-a)};$$

multiplions le numérateur et le dénominateur du second rapport par y, puis le numérateur et le dénominateur du troisième rapport par z, ce qui entraîne :

(2) $$\frac{x\,dx}{y^2+z^2} = \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{y^2+z^2+yz-y^2+ay-yz-z^2+az} = \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{a(y+z)},$$

mais si les courbes intégrales sont tracées sur des sphères centrées à l'origine, on doit avoir :

$$x^2+y^2+z^2 = R^2 = C^{te} \Rightarrow x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

le dernier numérateur de l'équation (2) étant nul, il en résulte que :

$$a(y+z) = 0, \quad \forall (y,z) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2, \quad \text{ce qui veut :} \quad a = 0.$$

2°) Le système (1) devient alors :

(3) $$\frac{x\,dx}{y^2+z^2} = \frac{dy}{z-y} = \frac{dz}{-(y+z)};$$

afin de déterminer les solutions cherchées de ce système, satisfaisant la condition imposée, il suffit de déterminer une intégrale première du système (3), distincte de celle imposée :

(4) $$U(x,y,z) = x^2+y^2+z^2;$$

en travaillant avec les deux derniers rapports, on obtient aisément l'intégrale première :

(5) $$V(x,y,z) = \arctan\frac{z}{y} - \frac{1}{2}\ln(y^2+z^2).$$

On vérifie aisément que les deux intégrales premières U et V données respectivement par (4) et (5) sont indépendantes; par suite, les solutions du système (4) sont les courbes intersections des sphères centrées à l'origine d'équations :

$$x^2+y^2+z^2 = b^2, \qquad b = C^{te} \in \mathbb{R}^*,$$

avec les cylindres dont les génératrices sont parallèles à l'axe (0,x) et d'équations :

$$\arctan\frac{z}{y} - \frac{1}{2}\ln(y^2+z^2) = C, \qquad C = C^{te} \in \mathbb{R}.$$

CHAPITRE 2

Equations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre

RAPPELS DE COURS

1. Méthode pratique, théorème .

Pour résoudre l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

(E) $$f(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = h(x,y,z),$$

où h (x,y,z) est non identiquement nulle, on opère de la façon suivante :

a) On examine si : $h(x,y,z) = 0$, définit une solution.

b) Dans le domaine où h (x,y,z) est non nulle, on cherche deux intégrales premières U et V du système caractéristique :

(S) $$\frac{dx}{f(x,y,z)} = \frac{dy}{g(x,y,z)} = \frac{dz}{h(x,y,z)}.$$

Toute solution du problème posé est alors définie par :

$$F[U(x,y,z), V(x,y,z)] = 0;$$

on note qu'il faut au moins qu' une des deux fonctions U et V dépende de z, F étant une fonction arbitraire.

2. Problème de CAUCHY. On a, du cours :

a) ***Définition*** : On appelle courbes caractéristiques de l'équation (E), les solutions de son système caractéristique (S).

b) ***Définition*** : On dit qu'une courbe (γ) n'est caractéristique en aucun point pour l'équation (E) s'il n'existe aucun point de (γ) où la tangente est parallèle au vecteur

$$\vec{V}(x,y,z) = f(x,y,z)\,\vec{e_1} + g(x,y,z)\,\vec{e_2} + h(x,y,z)\,\vec{e_3}.$$

c) ***Théorème :*** Par toute courbe(γ) n'étant caractéristique en aucun point il passe une solution unique de (E), cette solution est dite "solution au problème de CAUCHY relatif à la courbe (γ)".

d) ***Théorème, méthode pratique de résolution du problème de CAUCHY :***
Soit l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

(E) $$f(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} = h(x,y,z),$$

et son système caractéristique :

(S) $$\frac{dx}{f(x,y,z)} = \frac{dy}{g(x,y,z)} = \frac{dz}{h(x,y,z)};$$

pour trouver la solution de (E) qui contient une courbe (γ) non caractéristique d'équations : $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \eta(t)$,
on élimine t entre les équations :

$$U[\varphi(t), \psi(t), \eta(t)] = a,$$
$$V[\varphi(t), \psi(t), \eta(t)] = b,$$

obtenues au moyen de deux intégrales premières U et V du système (S). Ceci définit une fonction $H(a,b) = 0$.
L'équation de la solution est : $H[U(x,y,z), V(x,y,z)] = 0$. Si $h(x,y,z) = 0$, on n'oubliera pas que z déduit de cette équation est une intégrale première.

EXERCICES

2.1.1. – Donner la solution générale de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :
$$\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} + z = 0.$$

2.1.2. – Donner la solution générale de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :
$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0.$$

2.1.3. – Donner la solution générale de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :
$$\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0.$$

2.2.1. – Donner la solution générale de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :
$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 1.$$

2.2.2. – Donner la solution générale de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :
$$(x+1)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + x + y + z = 0.$$

2.3.1. – Déterminer les fonctions f pour lesquelles l'équation aux dérivées partielles linéaires du premier ordre :
$$\frac{\partial z}{\partial x} - 2z = 0,$$
avec la condition : $z(x,0) = f(x)$, a une solution, puis préciser pour ces fonctions f toutes les solutions du problème.

2.3.2. – Déterminer la solution z(x,y) de l'équation aux dérivées partielles linéaire, du premier ordre :

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

où a, b et c sont des constantes réelles, toutes non nulles, qui vérifie la condition : $z(x,0) = f(x)$, où f est une fonction de classe C_1 donnée.

2.3.3. – Déterminer la solution z(x,y) de l'équation aux dérivées partielles linéaires du premier ordre :

$$\frac{\partial z}{\partial x} - 3\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

qui satisfait la condition : $z(x,x) = x^2$.

2.3.4. – Soit l'équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre :

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)\,z,$$

en donner la solution générale. Déterminer la surface intégrale de cette équation qui contient l'hyperbole (H) d'équations :
(H) : $\{ (x-1)(y-1) = 1; \quad z = 1 \}$.

2.3.5 – Soit l'équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre :

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} - xz = 0,$$

en donner la solution générale. Déterminer la surface intégrale de cette équation qui contient la courbe (C) d'équations :
(C) : $\{ x = z; \quad yz = 1 \}$.

2.3.6 – Soit l'équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre :

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0,$$

en donner la solution générale. Déterminer la surface intégrale de cette équation qui contient le cercle (C) d'équations :
(C) : $\{ x^2+y^2 = 1; \; z = 1 \}$.

2.4.1 – Soit l'équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre :

$$(x+1)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + x + y + z = 0,$$

en déterminer la surface intégrale qui contient la droite (D) d'équations :
(D) : $\{ x = y; \; z = 1 \}$.

2.4.2. – Reprendre le problème précédent, en cherchant la surface intégrale qui contient la droite (D_1) d'équations :
(D_1) : $\{ y = x + 1; \quad z = 1 \}$.

2.4.3. – Donner la solution générale de l'équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre :

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 3y\frac{\partial z}{\partial y} - 4\frac{y^2}{x^2} = 0;$$

préciser la surface intégrale de cette équation, qui contient la courbe (C), d'équations :
(C) : $\{ x = 1; \quad y + z = y^2 \}$.

2.4.4. – Soit l'équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre :

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 1 + y^2.$$

1) Donner la solution générale de cette équation, puis déterminer la surface intégrale de cette équation, qui contient la droite (D) d'équations :
(D) : $\{ z = x + 1; \quad y = 1 \}$.
2) Retrouver la surface particulière demandée au 1), en travaillant avec la méthode paramétrique.

2.5.1. – Soit l'équation aux dérivées partielles :

$$(x+y+z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z - x - y)\frac{\partial z}{\partial y} = z,$$

en déterminer la surface intégrale qui contient la droite (D) d'équations :
(D) : $\{ x = 0; \quad z = 1 \}$.

2.5.2. – Déterminer la surface intégrale de l'équation aux dérivées partielles :

$$(2xy - 1)\frac{\partial z}{\partial x} + (z - 2x^2)\frac{\partial z}{\partial y} = 2(x - yz),$$

qui contient la droite (D) d'équations :
(D) : $\{ x = 1; \quad y = 0 \}$.

2.5.3. – Déterminer la surface intégrale de l'équation aux dérivées partielles :

$$yz\frac{z}{\partial x} - xz\frac{z}{\partial y} + 2x = 0,$$

qui contient le cercle (C) d'équations :
(C) : $\{ y = 1; \quad x^2 + z^2 = 3 \}$.

2.5.4. – Déterminer la surface intégrale de l'équation aux dérivées partielles :

$$(x+z)\frac{\partial z}{\partial x} - (y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

qui contient la droite (D) d'équations :
(D) : $\{ x = z; \quad y = z + 1 \}$.

2.5.5. – Déterminer la solution générale de l'équation aux dérivées partielles :

$$z\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Préciser la surface intégrale de cette équation qui contient la parabole d'équations
(P) : $\{ z = 0; \quad y^2 = 2x \}$.
Soit (C) la courbe d'équations :
(C) : $\{ z = y + 2; \quad z^2 = 2x - 1 \}$,
déterminer les surfaces intégrales, solutions de l'équation envisagée, qui contiennent la courbe (C).

SOLUTIONS

2.1.1. – On réécrit, en premier lieu, l'équation envisagée sous la forme :

$$\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = -z,$$

on en tire le système différentiel : $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{dz}{-z}$;
des deux premiers rapports on déduit l'intégrale première :

$$U(x,y,z) = 2x - y\,;$$

puis, par exemple, des rapports extrêmes l'intégrale première :

$$V(x,y,z) = ze^{x}.$$

– On vérifie aisément que U et V sont indépendantes, par suite, la solution générale de l'équation envisagée s'écrit :

$F[(2x - y), ze^{x}] = 0$, F fonction arbitraire, ou aussi :

$ze^{x} = H(2x - y)$, H fonction arbitraire, que l'on écrit encore :

$z = e^{-x} H(2x - y)$, H fonction arbitraire.

2.1.2. – On réécrit l'équation proposée :

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0,$$

sous la forme : $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = -z$;

on en déduit le système différentiel : $\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-1} = \frac{dz}{-z}$,
des deux premiers rapports on déduit l'intégrale première :

$$U(x,y,z) = \frac{1}{x} - y\,;$$

puis, des deux derniers rapports, on tire l'autre intégrale première :

$$V(x,y,z) = ze^{-y}.$$

– On contrôle aisément que U et V sont indépendantes, on en conclut que la solution générale de l'équation envisagée s'écrit, soit :

$F\left[\left(\frac{1}{x} - y\right), ze^{-y}\right] = 0$, F fonction arbitraire,

ou : $z = e^{y} H\left(\frac{1}{x} - y\right)$, H fonction arbitraire.

2.1.3. – En comparant l'équation envisagée :

(1) $\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0,$

à l'équation considérée dans l'exercice 2.1.1, on remarque que si on change x en - x et y en - y, on obtient l'équation de l'exercice 2.1.1.
Il en résulte que la solution générale de l'équation considérée (1), est :

$F[(2x - y), ze^{-x}] = 0$, F fonction arbitraire,

ou : $z = e^{x} H(2x - y)$, H fonction arbitraire.

2.2.1. – Soit donc l'équation considérée :

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 1,$$

que l'on réécrit sous la forme : $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 1 - z$,

qui donne le système différentiel : $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{dz}{1-z}$,
les deux premiers rapports donnent facilement l'intégrale première :

$$U(x,y,z) = x + y,$$

et, des deux derniers rapports on tire aisément l'intégrale première :

$$V(x,y,z) = (z - 1)\, e^{-y}.$$

– On vérifie sans difficulté que U et V sont indépendantes, par suite, la solution générale de l'équation aux dérivées partielles envisagée, est :

$F[(x + y), (z - 1)\, e^{-y}] = 0$, F fonction arbitraire, soit aussi :

$z = 1 + e^{y} H(x + y)$, H fonction arbitraire.

On note que $z = 1$ est une solution particulière de l'équation.

2.2.2. – Nous considérons, maintenant, l'équation :

$$(x + 1)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + x + y + z = 0,$$

que l'on réécrit, en premier lieu, sous la forme : $(x + 1)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = -(x + y + z)$,

on lui associe le système différentiel :

(1) $\frac{dx}{x+1} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{-(x + y + z)}$;

on tire facilement, des deux premiers rapports, l'intégrale première :

(2) $U(x,y,z) = \frac{y}{x+1}$;

en formant la somme des numérateurs et des dénominateurs des deux premiers rapport du système (1), il vient : $\frac{dx + dy}{x + y + 1} = \frac{dz}{-(x + y + z)}$,

cette équation suggère de poser :

(3) $x + y = X$,

qui conduit à la nouvelle équation : $\frac{dX}{X+1} = \frac{dz}{-X - z}$,

soit aussi : $\frac{dz}{dX} = -\frac{z}{X+1} - \frac{X}{X+1}$;

on reconnait une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre l'équation homogène s'écrit : $\frac{dz}{dX} = -\frac{z}{X+1}$,
dont la solution générale est :

(4) $z = \frac{K}{X+1}$,

la méthode de variation de la constante impose : $\frac{dK}{dX} = -X$,

qui s'intègre à vue et donne : $K = -\frac{X^2}{2} + C$, $C = C^{te}$;

en revenant à z donné par (4), on trouve : $2z(X+1) + X^2 = 2C$,
et en remplaçant X par son expression en fonction de x et y par (3), on obtient une autre intégrale première du système différentiel (1) :

(5) $V(x,y,z) = 2z(x+y+1) + (x+y)^2$.

– On vérifie facilement que U et V données respectivement par (2) et (5) sont indépendantes, il en résulte que la solution générale de l'équation aux dérivées partielles envisagée, s'écrit :

(6) $F\left[\frac{y}{x+1};\ 2z(x+y+1) + (x+y)^2\right] = 0$, F fonction arbitraire;

ou encore :

(7) $2z(x+y+1) + (x+y)^2 + H\left(\frac{y}{x+1}\right) = 0$, H fonction arbitraire.

– On examine alors si :

$$x + y + z = 0 \Leftrightarrow z = -x-y,$$

est une solution particulière du problème, on a : $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$ et $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$,

en remplaçant dans l'équation aux dérivées partielles considérée, il vient :

$$-x-1-y = 0,$$

qui n'a pas lieu quels que soient x et y; on en conclut que l'ensemble des solutions est donné par (6) ou (7).

2.3.1. – On a donc l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial z}{\partial x} - 2z = 0,$$

puisqu'une seule des variables x, y intervient, on envisage l'équation différentielle associée : $\frac{dz}{dx} - 2z = 0$,

dont la solution générale est : $z = C\,e^{2x}$, C étant une constante par rapport à x, mais une fonction de y a priori, on pose : $C = g(y)$, la solution générale de l'équation envisagée s'écrit :

(1) $z = e^{2x} g(y)$, g fonction arbitraire.

– La condition du texte : $z(x,0) = f(x)$, montre, de (1), que f est déterminée par :

$$f : \alpha \rightarrow f(\alpha) = K\,e^{2\alpha}, \quad K = C^{te};$$

il apparaît alors :

$$z(x,0) = e^{2x} g(0) = K\,e^{2x}, \quad K = C^{te},$$

on en conclut que la solution est :

– si $f(x) = K\,e^{2x}$, $K = C^{te}$,

$$z(x,y) = e^{2x} g(y),$$

g étant une fonction telle que : $g(0) = K$.

2.3.2. – L'équation aux dérivées partielles envisagée, s'écrit aussi :

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = -cz,$$

qui donne le système différentiel associé :

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{-cz},$$

les deux premiers rapports donnent l'intégrale première :

(1) $U(x,y,z) = bx - ay$,

et, les deux derniers rapports conduisent à l'intégrale première :

(2) $V(x,y,z) = z\,e^{\frac{c}{b}y}$.

– Il est aisé de contrôler que U et V données respectivement par (1) et (2) sont indépendantes; on écrit alors la solution générale de l'équation aux dérivées partielles considérée, sous la forme :

$$z\,e^{\frac{c}{b}y} = g(bx - ay), \quad \text{g fonction arbitraire,} \quad \text{soit aussi :}$$

(3) $z = e^{-\frac{c}{b}y} g(bx - ay)$, g fonction arbitraire.

– Afin de déterminer la solution particulière qui vérifie la condition imposée :

(4) $z(x,0) = f(x)$,

on marque, dans la solution obtenue par (3), $y = 0$, ce qui fixe : $g(bx) = f(x)$, qui suggère d'écrire la solution (3) sous la forme :

$$z = e^{-\frac{c}{b}y} h\left(x - \frac{a}{b}y\right), \quad \text{h fonction arbitraire,}$$

la condition (4) impose : $h(x) = f(x)$, d'où la solution cherchée :

(5) $z(x,y) = e^{-\frac{c}{b}y} f\left(x - \frac{a}{b}y\right)$, f fonction donnée de classe C_1.

– Vérifions cette conclusion; on déduit de (5) :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-\frac{c}{b}y} f'\left(x - \frac{a}{b}y\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-\frac{c}{b}y} \left\{-\frac{c}{b} f\left(x - \frac{a}{b}y\right) - \frac{a}{b} f'\left(x - \frac{a}{b}y\right)\right\},$$

en remplaçant dans l'équation aux dérivées partielles initiale, on trouve :

$$e^{-\frac{c}{b}y}\left\{af'\left(x - \frac{a}{b}y\right) - cf\left(x - \frac{a}{b}y\right) - af'\left(x - \frac{a}{b}y\right) + cf\left(x - \frac{a}{b}y\right)\right\} = 0$$

qui est satisfait quels que soient x et y, ce qui établit que z donné par (5) est solution de l'équation, et on a évidemment :

$$z(x,0) = f(x).$$

2.3.3. – On a donc l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial z}{\partial x} - 3\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

on écrit d'une manière formelle le système différentiel associé : $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-3} = \frac{dz}{0}$,

le dernier rapport impose : $z = C_1$, $C_1 = C^{te}$,

et des deux premiers rapports on déduit : $3x + y = C_2$, $C_2 = C^{te}$;
il résulte de ces calculs que la solution générale de l'équation aux dérivées partielles envisagée, s'écrit par exemple :

$z = f(3x + y)$, f fonction arbitraire.

– Afin d'obtenir la solution particulière qui satisfait la condition imposée : $z(x,x) = x^2$, on remplace dans la solution obtenue y par x, ce qui entraîne : $z(x,x) = f(4x) = x^2$,

en posant : $4x = \alpha \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{4}$, il apparaît que : $f(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{4}\right)^2$,

d'où la solution particulière cherchée :

(1) $$z(x,y) = \left(\frac{3x+y}{4}\right)^2.$$

– Vérifions cette conclusion :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{2}\left(\frac{3x+y}{4}\right), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{3x+y}{4}\right),$$

en remplaçant dans l'équation aux dérivées partielles initiale, on obtient :

$$\frac{3}{2}\left(\frac{3x+y}{4}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{3x+y}{4}\right) = 0,$$

qui est satisfait quels que soient x et y, ce qui établit que z donné par (1) est solution de l'équation envisagée; on a de suite : $z(x,x) = x^2$.

2.3.4. – On a donc l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)\,z,$$

son système différentiel associé s'écrit : $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{(y-x)\,z}$;
on déduit des deux premiers rapports l'intégrale première :

(1) $U(x,y,z) = xy$,

puis, en additionnant les numérateurs des deux premiers rapports, puis en additionnant leurs dénominateurs, on trouve l'équation : $dx + dy = -\frac{dz}{z}$,

qui donne une autre intégrale première du système différentiel :

(2) $V(x,y,z) = z e^{x+y}$.

– Un calcul simple montre que U et V données respectivement par (1) et (2) sont indépendantes, on écrit alors, par exemple, la solution générale de l'équation aux dérivées partielles envisagée, sous la forme :

(3) $z = e^{-(x+y)} f(xy)$, f fonction arbitraire.

– La surface intégrale de l'équation aux dérivées partielles considérée qui contient l'hyperbole (H) donnée dans le texte, est définie par les relations :

$$\begin{cases} xy = C_1, & C_1 = C^{te}, \\ z\,e^{x+y} = C_2, & C_2 = C^{te}, \\ z = 1, & \\ (x-1)(y-1) = 1; & \end{cases}$$

la dernière équation donne : $xy = x + y$, et puisque pour (H), $z = 1$, on a :
$1 \,.\, e^{x+y} = C_2$, or, on a aussi : $x + y = xy = C_1$, d'où l'équation liant C_1 et C_2 :

$e^{C_1} = C_2$ revenant aux variables x, y et z, cette relation s'écrit : $e^{xy} = z\,e^{x+y}$, ou :

(4) $$z = e^{xy-(x+y)} = e^{(x-1)(y-1)-1},$$

d'où la solution cherchée :

(5) $$z = e^{(x-1)(y-1)-1}.$$

On note, en comparant (4) et (3), que l'on a : $f(xy) = e^{xy}$,
ce qui définit la fonction f :

$$f \;;\; \alpha \longmapsto f(\alpha) = e^{\alpha}.$$

La vérification de la solution (5) est immédiate.

2.3.5. – On considère maintenant l'équation aux dérivées partielles :

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} - xz = 0,$$

que l'on réécrit sous la forme : $y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xz$,

elle a pour système différentiel associé : $\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{dz}{xz}$,

on tire, sans difficulté, des deux premiers rapports l'intégrale première :

$U(x,y,z) = x^2 - y^2$,

et des deux derniers rapports une autre intégrale première :

$$V(x,y,z) = \frac{z}{y}.$$

– Un calcul simple montre que U et V sont indépendantes, on peut donner alors la solution générale de l'équation aux dérivées partielles envisagée :

(1) $$F\left(\frac{z}{y},\, x^2 - y^2\right) = 0,$$ F fonction arbitraire.

– La surface intégrale de l'équation aux dérivées partielles considérée, qui contient la courbe (C) donnée dans le texte, est définie par les relations :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1\,, & C_1 = C^{te}, \\ \dfrac{z}{y} = C_2\,, & C_2 = C^{te}, \\ x = z\,, & \\ yz = 1\,; & \end{cases}$$

la dernière équation donne : $y = \dfrac{1}{z}$,

les deux premières équations du système précédent deviennent :

$z^2 - \dfrac{1}{z^2} = C_1$, $\quad z^2 = C_2$, $\quad$ d'où l'équation liant C_1 à C_2 : $\quad C_2 - \dfrac{1}{C_2} = C_1$,

remplaçant C_1 et C_2 par leurs expressions en fonction de x, y et z, on obtient :

(2) $\quad \dfrac{z}{y} - \dfrac{y}{z} = x^2 - y^2$,

c'est l'équation de la surface cherchée.

– On note qu'en écrivant ce résultat sous la forme : $\dfrac{z}{y} - \dfrac{y}{z} - (x^2 - y^2) = 0$,

il apparaît de (1) que F est définie par : $F(\alpha, \beta) = \alpha - \dfrac{1}{\alpha} - \beta$.

– Remarquons qu'il est facile de contrôler directement que la fonction z définie par (2) est solution de l'équation aux dérivées partielles initiale. On tire de (2) :

$$\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x} = 2x,$$

soit :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xyz^2}{y^2 + z^2},$$

puis :

$$-\frac{z}{y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{1}{z} + \frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y} = -2y\,,$$

que l'on écrit aussi :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{yz^2}{(y^2 + z^2)}\left\{-2y + \frac{y^2 + z^2}{y^2 z}\right\},$$

donc :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y^2z^2}{y^2 + z^2} + \frac{z}{y}\,;$$

en remplaçant dans l'équation aux dérivées partielles considérée, il apparaît :

$$\frac{2xy^3z^2}{y^2 + z^2} - \frac{2xy^3z^2}{y^2 + z^2} + xz - xz = 0\,,$$

qui est vérifié quels que soient x, y et z; z donné par (2) est solution du problème envisagé.

2.3.6. – Nous avons l'équation aux dérivées partielles :

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0\,,$$

que l'on réécrit : $\quad y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$,

elle a pour système différentiel associé : $\quad \dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{z}$;

les deux premiers rapports donnent l'intégrale première :

(1) $\quad U(x,y,z) = x^2 - y^2$,

puis, en additionnant les numérateurs puis les dénominateurs des deux premiers rapports, on obtient l'équation :

$$\frac{dx + dy}{x + y} = \frac{dz}{z},$$

d'où on déduit une autre intégrale première :

(2) $\quad V(x,y,z) = \dfrac{z}{x + y}$.

– Un calcul simple montre que U et V données respectivement par (1) et (2) sont indépendantes; la solution générale de l'équation aux dérivées partielles envisagée s'écrit par exemple :

(3) $\quad x^2 - y^2 = f\left(\dfrac{z}{x + y}\right)$, $\qquad$ f fonction arbitraire.

– La surface intégrale de l'équation aux dérivées partielles considérée, qui contient la courbe (C) donnée dans le texte, est définie par les relations :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1\,, & C_1 = C^{te}\,, \\ \dfrac{z}{x + y} = C_2\,, & C_2 = C^{te}\,, \\ x^2 + y^2 = 1\,, & \\ z = 1\,; & \end{cases}$$

fixant $z = 1$ dans la seconde opération, on obtient :

(4) $\quad x + y = \dfrac{1}{C_2}$,

et la première équation donne : $(x - y)(x + y) = C_1$, $\quad$ qui donne :

(5) $\quad x - y = C_1 C_2$;

on déduit de (4) et (5), x et y en fonction de C_1 et de C_2 qui, remis dans la troisième équation du système donne l'équation liant C_1 et C_2 :

$$\frac{1}{C_2^{\,2}} + C_1^{\,2}\, C_2^{\,2} = 2\,;$$

remplaçant C_1 et C_2 par leurs expressions en fonction de x, y et z, il vient l'équation de la surface cherchée :

(6) $\quad \dfrac{(x + y)^2}{z^2} + \dfrac{z^2 (x^2 - y^2)^2}{(x + y)^2} = 2\,.$

On note que l'on peut écrire aussi : $C_1^{\,2} = \dfrac{1}{C_2^{\,2}}\left(2 - \dfrac{1}{C_2^{\,2}}\right)$,

ou : $C_1 = \pm \dfrac{1}{C_2}\sqrt{2 - \dfrac{1}{C_2^{\,2}}}$,

qui, rapproché de (3), montre que :

$$f : \alpha \mapsto f(\alpha) = \pm \frac{1}{\alpha}\sqrt{2 - \frac{1}{\alpha^2}}.$$

2.4.1. – Considérons l'équation aux dérivées partielles :

$$(x+1)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + x + y + z = 0,$$

c'est l'équation de l'exercice 2.2.2. On a vu que les deux intégrales premières :

(1) $U = \dfrac{y}{x+1}$ et $V = 2z(x+y+1) + (x+y)^2$,

étaient indépendantes; la surface intégrale de l'équation aux dérivées partielles considérée, qui contient la droite (D) donnée dans le texte, est définie par les relations :

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x+1} = C_1, & C_1 = C^{te}, \\ 2z(x+y+1) + (x+y)^2 = C_2, & C_2 = C^{te}, \\ x = y, & \\ z = 1; & \end{cases}$$

utilisant la troisième équation et la première, on obtient : $x(1 - C_1) = C_1$,

puis la seconde s'écrit : $2(2x+1) + 4x^2 = C_2$, remplaçant x par son expression en fonction de C_1, il apparaît la relation existant entre C_1 et C_2, soit :

$$C_2 = \frac{2(1 + C_1^{\,2})}{(1 - C_1)^2};$$

d'où l'équation de la surface cherchée :

(2) $$2z(x+y+1) + (x+y)^2 = \frac{2\left[1 + \left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\dfrac{y}{x+1}\right)\right]^2}.$$

– On sait que la solution générale de l'équation aux dérivées partielles envisagée s'écrit de (1) :

$$2z(x+y+1) + (x+y)^2 = f\left(\frac{y}{x+1}\right);$$

rapprochant ce résultat de (2), il apparaît que la surface intégrale qui contient la droite (D) est définie par f telle que :

(3) $$f : \alpha \mapsto f(\alpha) = \frac{2(1+\alpha^2)}{(1-\alpha)^2}.$$

– ***Remarque :*** Le système différentiel associé à l'équation aux dérivées partielles initiale s'écrit aussi :

(4) $$\frac{dx}{x+1} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{-(x+y+z)} = ds,$$

on en tire : $\dfrac{dx}{x+1} = ds$, qui donne :

(5) $x = -1 + (x_0 + 1)e^s$, en fixant $x = x_0$ si $s = 0$;

on a aussi : $\dfrac{dy}{y} = ds$, qui fixe :

(6) $y = y_0 e^s$, si $y = y_0$ quand $s = 0$;

enfin : $\dfrac{dz}{ds} = -z - x - y$, soit, en utilisant (5) et (6) :

$$\frac{dz}{ds} = -z + 1 - (x_0+1)e^s - y_0 e^s,$$

dont la solution qui prend la valeur z_0 pour $s = 0$, s'écrit :

(7) $$z = 1 - \frac{1}{2}(x_0 + y_0 + 1)e^s + \left[z_0 + \frac{1}{2}(x_0 + y_0 - 1)\right]e^{-s}.$$

On écrit alors que si $s = 0$, on obtient la droite (D) que l'on paramètre :

$x = t$, $y = t$, $z = 1$;

il vient alors les trois équations :

(8) $$\begin{cases} x = -1 + (1+t)e^s, \\ y = t e^s \\ z = -\dfrac{1}{2}(2t+1)e^s + \dfrac{1}{2}(2t+1)e^{-s} + 1; \end{cases}$$

si on peut éliminer s et t entre x, y et z dans le système ci-dessus, on obtiendra alors une équation de la surface cherchée.

On tire des deux premières équations du système (8) :

$$x - y + 1 = e^s \quad \text{et} \quad t = \frac{y}{x-y+1},$$

en remplaçant dans la troisième équation, il apparaît :

$$2z = 2 - 2y - (x - y + 1) + \frac{2y}{(x-y+1)^2} + \frac{1}{x-y+1},$$

ou :

(9) $$2z = 2 - (x+y+1) + \frac{(x+y-1)}{(x-y+1)^2}.$$

– En multipliant les deux membres de (9) par $x+y+1$, on retrouve la solution donnée par (2).

2.4.2. – On sait que la solution générale de l'équation aux dérivées partielles envisagée

$$(x+1)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + x + y + z = 0,$$

s'explicite en utilisant les deux intégrales premières :

(1) $\quad U(x,y,z) = \dfrac{y}{x+1} \quad$ et $\quad V(x,y,z) = 2z(x+y+1) + (x+y)^2$;

on sait que les caractéristiques sont les courbes d'équations :

$$U(x,y,z) = C_1, \quad V(x,y,z) = C_2, \quad C_1, C_2 = C^{tes} \in \mathbb{R} ;$$

or, ici, la droite (D_1) donnée du texte, est définie par : $y = x + 1$ et $z = 1$;

la première équation s'écrit : $\dfrac{y}{x+1} = 1$, qui montre de (1) que l'on a pour U : $C_1 = 1$,

mais pour V il apparaît : $V(x,y,z) = 2(2x+2) + (2x+1)^2$,

qui n'est pas constant quand x décrit un intervalle non nul de $\mathbb{R}$, donc la droite (D_1) n'est pas une caractéristique de l'équation aux dérivées partielles envisagée.

La surface intégrale cherchée qui contient (D_1) est alors définie par les relations :

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x+1} = C_1, & C_1 = C^{te}, \\ 2z(x+y+1) + (x+y)^2 = C_2, & C_2 = C^{te}, \\ y = x+1, \\ z = 1. \end{cases}$$

En écrivant la solution générale de l'équation aux dérivées partielles sous la forme :

$$U(x,y,z) = f[V(x,y,z)],$$

on voit apparaître : $\dfrac{y}{x+1} = C_1 = 1$,

et : $\quad \dfrac{y}{x+1} = f[2(2x+2) + (2x+1)^2] = 1$,

ou : $\quad f(4x^2 + 8x + 4) = 1 = f(4(x+1)^2) = 1$,

en posant : $\quad \alpha = 4(x+1)^2$,

il apparaît que f est définie par : $\quad f : \alpha \longmapsto f(\alpha) = 1 \quad$ (c'est l'application constante).

En conclusion, la surface cherchée est le plan d'équation : $y = x + 1$, ne contient pas z, on est en présence d'un problème singulier.

2.4.3. – On envisage donc l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 3y\frac{\partial z}{\partial y} - 4\frac{y^2}{x^2} = 0,$$

que l'on écrit : $\quad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + 3y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 4\dfrac{y^2}{x^2}$;

elle a pour système différentiel associé : $\quad \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{3y} = \dfrac{dz}{4\dfrac{y^2}{x^2}}$;

on déduit des deux premiers rapports l'intégrale première :

(1) $\quad U(x,y,z) = \dfrac{y}{x^3}$,

utilisant cette intégrale première, les rapports extrêmes donnent une autre intégrale première :

(2) $\quad V(x,y,z) = z - \dfrac{y^2}{x^2}$.

– On vérifie aisément que U et V données respectivement par (1) et (2) sont indépendantes, on écrit alors la solution générale de l'équation aux dérivées partielles envisagée, sous la forme :

$$z - \frac{y^2}{x^2} = f\left(\frac{y}{x^3}\right), \qquad \text{f fonction arbitraire,} \qquad \text{ou :}$$

(3) $$z = \frac{y^2}{x^2} + f\left(\frac{y}{x^3}\right), \qquad \text{f fonction arbitraire.}$$

On sait alors que la surface intégrale de notre équation aux dérivées partielles, qui contient la courbe (C) du texte, est déterminée par les relations :

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x^3} = C_1, & C_1 = C^{te}, \\ z - \dfrac{y^2}{x^2} = C_2, & C_2 = C^{te}, \\ x = 1, \\ y + z = y^2 ; \end{cases}$$

on en tire, pour $x = 1$: $\quad y = C_1, \quad z - y^2 = C_2 = -y$,

d'où la relation cherchée entre C_1 et C_2 : $C_2 = -C_1$, qui donne la surface solution du problème :

$$z - \frac{y^2}{x^2} = -\frac{y}{x^3},$$

soit :

(4) $$z = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x^3} ;$$

en rapprochant ce résultat de la solution générale, il vient la fonction particulière f correspondant au problème :

$$f : \alpha \longmapsto f(\alpha) = -\alpha.$$

– ***Remarque :*** En travaillant avec la méthode paramétrique, on écrit le système différentiel sous la forme :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{3y} = \frac{dz}{4\dfrac{y^2}{x^2}} = ds ;$$

travaillant comme dans l'exercice 2.4.1, on trouve aisément :

$$x = x_0 e^s,$$
$$y = y_0 e^{3s},$$
$$z = \frac{y_0^{\,2}}{2 x_0^{\,2}}(e^{4s} - 1) + z_0 ;$$

on paramètre la courbe (C) : $x = 1$, $y = t$, $z = t^2 - t$, d'où les surfaces :

$$(5) \qquad \begin{cases} x = e^s, \\ y = t e^{3s}, \\ z = t^2 e^{4s} - t; \end{cases}$$

on note que :

$$D(s,t) = \begin{vmatrix} e^s & 3te^{3s} & 4te^{4s} \\ 0 & e^{3s} & 2te^{4s} - 1 \end{vmatrix},$$

par exemple, les deux premières colonnes établissent qu'il est de rang deux, on peut donc éliminer s et t entre x, y et z au système (5).
On trouve, de suite, des deux premières équations :

$$e^s = x \quad \text{et} \quad t = \frac{y}{x^3},$$

qui remis dans la troisième entraînent :

$$z = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x^3},$$

c'est bien le résultat obtenu par (4).

2.4.4. – 1) Nous avons l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 1 + y^2,$$

son système différentiel s'écrit : $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{1+y^2}$;

les deux premiers rapports donnent l'intégrale première :

(1) $\qquad U(x,y,z) = \dfrac{y}{x},$

les deux derniers rapports conduisent à l'intégrale première :

(2) $\qquad V(x,y,z) = z - \dfrac{y^2}{x^2} - \ln|y|.$

– Un calcul simple montre que U et V données respectivement par (1) et (2) sont indépendantes; on écrit la solution générale de l'équation considérée sous la forme :

$$z - \frac{y^2}{2} - \ln|y| = f\left(\frac{y}{x}\right), \qquad \text{f fonction arbitraire, ou :}$$

(3) $\qquad z = \dfrac{y^2}{2} + \ln|y| + f\left(\dfrac{y}{x}\right), \qquad$ f fonction arbitraire.

La surface intégrale de l'équation aux dérivées partielles considérée et qui contient la droite (D) donnée dans le texte, est définie par les relations :

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = C_1, & C_1 = C^{te}, \\ z - \dfrac{y^2}{2} - \ln|y| = C_2, & C_2 = C^{te}, \\ z = x + 1, & \\ y = 1; & \end{cases}$$

il vient : $x = \dfrac{1}{C_1}, \qquad x + 1 - \dfrac{1}{2} = C_2 = \dfrac{1}{C_1} + 1 - \dfrac{1}{2},$

d'où la relation existant entre C_1 et C_2 : $C_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{C_1},$

soit en remplaçant C_1 et C_2 par leurs expressions en fonction de x, y et z :

$$z - \frac{y^2}{2} - \ln|y| = \frac{1}{2} + \frac{x}{y}, \qquad \text{ou :}$$

(4) $\qquad z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{y} + \ln|y| + \dfrac{y^2}{2}.$

2) En écrivant l'équation aux dérivées partielles initiale, sous la forme :

$$a(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = c(x,y,z),$$

on pose : $\dfrac{dx}{dt} = a(x,y,z), \qquad \dfrac{dy}{dt} = b(x,y,z),$

et : $\qquad \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} = c(x,y,z)$:

qui donnent :

$$\frac{dx}{dt} = x \Rightarrow x = C_1 e^t, \qquad C_1 = C^{te},$$
$$\frac{dy}{dt} = y \Rightarrow y = C_2 e^t, \qquad C_2 = C^{te},$$
$$\frac{dz}{dt} = 1 + C_2^{\,2} e^{2t} \Rightarrow z = t + \frac{1}{2}C_2^{\,2} e^{2t} + C_3, \qquad C_3 = C^{te};$$

afin de déterminer la surface intégrale de l'équation aux dérivées partielles considérée, qui contient la droite (D) donnée dans le texte, on fixe arbitrairement t = 0, ce qui entraîne :

$$y = 1 = C_2, \quad x = C_1, \quad \text{puis : } z = \frac{1}{2}C_2^{\,2} + C_3 = x + 1 = C_1 + 1,$$

donc : $\quad C_3 = C_1 + \dfrac{1}{2};$

on en conclut : $\quad x = C_1 e^t, \qquad y = e^t \Rightarrow t = \ln y, \qquad C_1 = \dfrac{x}{y},$

on a de suite : $z + 1 = C_1$ et $z = C_2$, on en déduit la relation existant entre C_1 et C_2 :

$$C_1 = C_2 + 1,$$

d'où l'équation de la surface cherchée : $z + x^2 + y^2 - y - xz - 1 = 0.$

2.5.3. – L'équation proposée s'écrit :

$$yz \frac{\partial z}{\partial x} - xz \frac{\partial z}{\partial y} = -2x,$$

elle a pour système différentiel associé : $\dfrac{dx}{yz} = \dfrac{dy}{-xz} = \dfrac{dz}{-2x}$;

on déduit, sans difficulté, des deux premiers rapports, l'intégrale première :

$$U(x,y,z) = x^2 + y^2,$$

et des deux derniers rapports l'intégrale première :

$$V(x,y,z) = z^2 - 4y.$$

On vérifie qu'elles sont indépendantes et, en travaillant comme dans les deux exercices précédents, on obtient la surface contenant le cercle (C) donné dans le texte :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4y = 0,$$

en écrivant ce résultat sous la forme : $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$,
il apparaît que la surface cherchée est la sphère de rayon 2, centrée sur l'axe des y (en $y=2$) et contenant l'origine.

2.5.4. – L'équation aux dérivées partielles envisagée :

$$(x+z)\frac{\partial z}{\partial x} - (y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

a pour système différentiel associé : $\dfrac{dx}{x+z} = \dfrac{dy}{-(y+z)} = \dfrac{dz}{0}$,

on en déduit l'intégrale première :

(1) $U(x,y,z) = z$;

posant : $U(x,y,z) = z = C_1$, $C_1 = C^{te}$, les deux premiers rapports donnent alors :

$$\frac{dx}{x+C_1} = -\frac{dy}{y+C_1},$$

qui donne l'intégrale première :

(2) $V(x,y,z) = (x+z)(y+z)$.

Il est facile de montrer que U et V sont indépendantes; la surface intégrale de l'équation aux dérivées partielles considérée, qui contient la droite (D) donnée dans le texte, est définie par les relations :

$$\begin{cases} z = C_1, & C_1 = C^{te}, \\ (x+z)(y+z) = C_2, & C_2 = C^{te}, \\ x = z, & \\ y = z+1 ; & \end{cases}$$

on trouve : $2z(2z+1) = C_2$, $z = C_1$, donc : $2C_1(2C_1+1) = C_2$,
d'où la surface cherchée : $2z(2z+1) = (x+z)(y+z)$.

2.5.5. – L'équation aux dérivées partielles proposée :

$$z\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1,$$

a pour système différentiel associé : $\dfrac{dx}{z} = \dfrac{dy}{1} = \dfrac{dz}{1}$;

on a de suite les deux intégrales premières :

(1) $U(x,y,z) = 2x - z^2$, et :

(2) $V(x,y,z) = y - z$.

– Afin de vérifier que U et V sont indépendantes, on envisage :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2z \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

les deux premières colonnes (par exemple) établissent qu'il est de rang deux, U et V sont indépendantes.
La solution générale de l'équation aux dérivées partielles envisagée s'écrit, par exemple

(3) $x = \dfrac{z^2}{2} + F(y-z)$, F fonction arbitraire.

– La surface intégrale de l'équation aux dérivées partielles considérée qui contient la parabole (P) donnée dans le texte, est définie par les relations :

$$\begin{cases} 2x - z^2 = C_1, & C_1 = C^{te}, \\ y - z = C_2, & C_2 = C^{te}, \\ z = 0, & \\ y^2 = 2x ; & \end{cases}$$

fixant $z=0$ dans les deux premières équations et, remplaçant dans la première $2x$ par y^2, il vient la relation existant entre C_1 et C_2 : $C_1 = C_2^2$,

qui montre que la surface cherchée a pour équations : $2x - z^2 = (y-z)^2$, ou :

(4) $x = \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{1}{2}(y-z)^2$;

en comparant (4) à (3), il apparaît que F est donnée par :

$$F : \alpha \mapsto F(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^2.$$

– La surface intégrale de l'équation aux dérivées partielles considérée qui contient la courbe (C) donnée dans le texte, est déterminée par les relations :

$$\begin{cases} 2x - z^2 = C_1, & C_1 = C^{te}, \\ y - z = C_2, & C_2 = C^{te}, \\ z = y+2, & \\ z^2 = 2x - 1 ; & \end{cases}$$

on remarque que la première et quatrième équation fixent : $C_1 = 1$, la seconde et la troisième imposent : $C_2 = -2$, ces résultats montrent que la courbe (C) est une courbe caractéristique de l'équation aux dérivées partielles envisagée; on sait alors que, quelle que soit la fonction F envisagée satisfaisant la condition (ou G) :

$$-2 = G(1), \quad \text{ou} \quad 1 = F(-2),$$

la surface d'équation:

$$V(x,y,z) = G[U(x,y,z)] \quad \text{ou :} \quad U(x,y,z) = F[V(x,y,z)],$$

est solution de l'équation aux dérivées partielles considérée, et contient la courbe (C) donnée dans le texte (qui est ici une courbe caractéristique). Par exemple, si on se fixe :

$$F: \alpha \mapsto F(\alpha) = \frac{\alpha^2}{4},$$

on obtient la surface intégrale :

$$(5) \qquad 2x - z^2 = \frac{1}{4}(y-z)^2,$$

il est facile de vérifier qu'elle est solution de l'équation aux dérivées partielles envisagée, en effet, en dérivant les deux membres de (5) par rapport à x, puis par rapport à y, il apparaît

$$2 - 2z\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2}(y-z)\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$-2z\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}(y-z)\left(1 - \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

soit par un calcul formel :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4}{-y+5z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{(y-z)}{-y+5z};$$

en remplaçant dans l'équation aux dérivées partielles, on trouve :

$$\frac{4z}{-y+5z} + \frac{-y+z}{-y+5z} = 1,$$

qui montre que la surface définie par (5) est solution; et la courbe (C) donnée dans le texte impose :

$$y - z = -2 \Rightarrow 2x - z^2 = \frac{1}{4}(-2)^2 = 1,$$

c'est l'autre équation définissant (C) .

– ***Remarque :*** Si on utilise la méthode paramétrique, le système différentiel associé à l'équation aux dérivées partielles considérée donne :

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{1} = dt,$$

on en déduit, sans difficulté :

$$(6) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2} + C_3 t + C_1, \\ y = t + C_2, \\ z = t + C_3, \end{cases} \qquad C_1, C_2, C_3 = C^{tes};$$

si on fixe : la courbe (C) donnée du texte est obtenue pour $t = t_0$, on paramètre (C) :

$$(7) \qquad z = u, \quad y = u - 2, \quad x = \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2},$$

éliminant les constantes inconnues C_1, C_2 et C_3 entre (6) et (7), il vient :

$$x = \frac{1}{2}(t-t_0)^2 + u(t-t_0) + \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2},$$

$$y = t - t_0 + u - 2,$$

$$z = t - t_0 + u;$$

afin de savoir si on peut éliminer $(t - t_0)$ et u entre x,y et z définis ci-dessus, on forme :

$$D(u,t) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix},$$

qui s'explicite ici :

$$D(u,t) = \begin{vmatrix} t - t_0 + u & 1 & 1 \\ t - t_0 + u & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

il est évident qu'on ne peut pas en extraire un mineur de rang deux; on ne peut pas éliminer u et $(t - t_0)$ entre x,y et z, on est donc sur une caractéristique de l'équation aux dérivées partielles envisagée, résultat mis en évidence par une autre voie.

– Enfin, on sait que si on écrit l'équation aux dérivées partielles initiale sous la forme :

$$f(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = h(x,y,z),$$

une courbe (γ) n'est caractéristique en aucun point pour cette équation, s'il n'existe aucun point de (γ) où la tangente est parallèle au vecteur :

$$\vec{V}(x,y,z) = f(x,y,z)\vec{e_1} + g(x,y,z)\vec{e_2} + h(x,y,z)\vec{e_3};$$

ici, la courbe (C) est paramétrée par :

$$x = \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2}, \qquad y = z - 2;$$

un vecteur tangent à (C) en un point quelconque est défini par : $\vec{T} = z\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$,

et du texte, on a :

$$f(x,y,z) = z, \quad g(x,y,z) = 1 \quad \text{et} \quad h(x,y,z) = 1,$$

qui confirme que (C) est une courbe caractéristique de l'équation aux dérivées partielles considérée.

CHAPITRE 3

Résolution de $A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0$, facteur intégrant. Résolution de $A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz = 0$.

RAPPELS DE COURS

1. Sur la résolution de $A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0$.

a) ***Définition :*** Une solution de l'équation envisagée est une courbe (γ) de $\mathbb{R}^2$ dont la tangente est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{V}$ de coordonnées $A(x,y)$ et $B(x,y)$.

b) ***Théorème :*** La relation $H(x,y) = K, K = C^{te}$, définit une solution de l'équation considérée si :

$$A(x,y)\,\frac{\partial H(x,y)}{\partial y} - B(x,y)\,\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} = 0.$$

c) On appelle facteur intégrant de l'équation une fonction $\mu(x,y)$ telle que :

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x,y) \,.\, A(x,y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x,y) \,.\, B(x,y)].$$

d) Si : $\dfrac{\partial A(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial B(x,y)}{\partial x}$, alors : $H(x,y) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} A(u,y)\,du + \int_{y_0}^{y} B(x_0,v)\,dv$;

$H(x,y) = 0$ définit une solution de notre équation passant par le point de coordonnées (x_0,y_0).

e) Dans le cas général où : $\dfrac{\partial A(x,y)}{\partial y} \neq \dfrac{\partial B(x,y)}{\partial x}$, on sait que :

α) Toute solution $\mu(x,y)$ de l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre : $\dfrac{\partial}{\partial y}[\mu(x,y)\,A(x,y)] = \dfrac{\partial}{\partial x}[\mu(x,y)\,B(x,y)]$, est un facteur intégrant de notre équation.

β) Si $\mu_0(x,y)$ est un facteur intégrant, à tout autre facteur intégrant $\mu(x,y)$ est associée une fonction $H(x,y)$ qui définit implicitement une solution de l'équation $A(x,y)\,dx + B(x,y)dy = 0$, telle que :

$$\mu(x,y) = \mu_0(x,y)\,H(x,y).$$

γ) Soit $\mu(x,y)$ un facteur intégrant, alors :

$$H(x,y) = \int_{x_0}^{x} \mu(u,y)\,A(u,y)\,du + \int_{y_0}^{y} \mu(x_0,v)\,B(x_0,v)\,dv,$$

définit une solution de notre équation, passant par le point de coordonnées (x_0,y_0).

2. Sur la résolution de $A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz = 0$.

Nous avons la définition : On appelle solution de cette équation, une surface définie par : $H(x,y,z) = K, K = C^{te}$, dont le plan tangent au point $M(x,y,z)$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{V}$ de coordonnées $A(x,y,z)$, $B(x,y,z)$ et $C(x,y,z)$.

– On sait que si : $\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{0}$, alors $A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz$ est une différentielle totale exacte, dans ce cas, la fonction :

$$H(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} A(u,y,z)\,du + \int_{y_0}^{y} B(x_0,v,z)\,dv + \int_{z_0}^{z} C(x_0,y_0,w)\,dw,$$

est une solution de l'équation envisagée, contenant le point de coordonnées (x_0,y_0,z_0) si on fixe $H(x_0,y_0,z_0) = 0$.

– Enfin, $A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz$, est intégrable, si et seulement si $\overrightarrow{V}.\,\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{V}) = 0$, et on a la ***méthode pratique.***

a) On fixe z et on résout $A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy = 0$, dont les solutions sont du type $U(x,y,z) = \varphi(z)$;

b) On pose $x = x_0$ et on résout $B(x_0,y,z)\,dy + C(x_0,y,z)\,dz = 0$, on écrit que : $U(x_0,y,z) = \varphi(z)$ est solution de cette équation; ce qui permet de déterminer $\varphi(z)$.

Les solutions de l'équation : $A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz = 0$, sont définies par : $U(x,y,z) = \varphi(z)$.

Evidemment, les rôles de x,y et z sont permutables pour l'application de la méthode.

EXERCICES

3.1.1. – Vérifier que la forme différentielle :

$$\omega = \arctan \frac{y}{x}\, dx + \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2)\, dy ,$$

est une différentielle totale exacte, puis donner la solution de l'équation: $\omega = 0$.

3.1.2. – Vérifier que la forme différentielle :

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx + \left\{ \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}} \right\} dy,$$

est une différentielle totale exacte, puis résoudre l'équation : $\omega = 0$.

3.1.3. – On envisage la forme différentielle :

$$\omega = \frac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{(x^2+y^2)^{\alpha}}, \qquad \alpha = C^{te} > 0 ;$$

déterminer α afin que ω soit une différentielle totale exacte; imposant à α la valeur obtenue, donner la solution de l'équation : $\omega = 0$.

3.2.1. – Soit la forme différentielle :

$$\omega = \left(\frac{y^2}{2} - 2\, y e^x \right) dx + (y - e^x)\, dy.$$

1) Ecrire l'équation aux dérivées partielles permettant de déterminer les facteurs intégrants de l'équation : $\omega = 0$. Donner un facteur intégrant de cette équation.
2) En utilisant le facteur intégrant obtenu au 1°), écrire la solution générale de l'équation $\omega = 0$, et préciser l'expression générale de tous les facteurs intégrants de cette équation.

3.2.2. – Soit la forme différentielle :

$$\omega = (x^2 + y^2 + 1)\, dx - 2\, xy\, dy .$$

1) Donner la solution générale de l'équation : $\omega = 0$.
2) Déterminer tous les facteurs intégrants de cette équation; montrer que cette équation possède un facteur intégrant du type : $\mu(x^2 - y^2)$.

3.2.3. – Soit la forme différentielle :

$$\omega = (yx^2 + y^3 - xy)\, dx + x^2 dy.$$

1) Donner la solution générale de l'équation : $\omega = 0$.
2) Déterminer tous les facteurs intégrants de cette équation; montrer qu'elle possède un facteur intégrant homogène de degré - 3, préciser ce facteur intégrant.

3.3.1. – 1) Vérifier que la forme différentielle ω définie par :

$$\omega = \frac{(ay - bz)\, dx + (cz - ax)\, dy + (bx - cy)\, dz}{(cz - ax)^2},$$

où a, b et c sont trois constantes réelles non nulles toutes les trois est intégrable
2) Déterminer les solutions de l'équation : $\omega = 0$.

3.3.2. – 1) Vérifier que la forme différentielle ω définie par :

$$\omega = (y + z)\, dx + (z + x)\, dy + (x + y)\, dz,$$

est une différentielle totale exacte, donc intégrable.
2) Déterminer les solutions de l'équation : $\omega = 0$.

3.3.3. – 1) Vérifier que la forme différentielle ω définie par :

$$\omega = \frac{1}{x^2 y^2 z} \{[z \ln |z|]\, (y\, dx + x\, dy) - xy\, dz\} ,$$

est une différentielle totale exacte, donc intégrable.
2) Déterminer les solutions de l'équation : $\omega = 0$.

3.4.1. – 1) Vérifier que la forme différentielle ω définie par :
$\omega = 2\, xz\, dx - 2\, yz\, dy - (x^2 - y^2)\, dz$, est intégrable;
2) Déterminer les solutions de l'équation : $\omega = 0$.

3.4.2. – 1) Vérifier que la forme différentielle ω définie par :

$$\omega = \frac{dx}{yz} + \frac{dy}{zx} + \frac{dz}{xy}, \quad \text{est intégrable;}$$

2) Déterminer les solutions de l'équation : $\omega = 0$.

3.4.3. – 1) Déterminer une fonction f(x,y) afin que la forme différentielle ω définie par $\omega = (yz - y^3)\, dx + (xy^2 + xz)\, dy + f(x,y)\, dz$, soit intégrable.
2) Donner les solutions de l'équation : $\omega = 0$ lorsque ω est intégrable.

3.4.4. – 1) Vérifier que la forme différentielle ω définie par :

$$\omega = \frac{z}{x}\, dx + \frac{z - x}{y}\, dy - dz, \quad \text{est intégrable.}$$

2) Déterminer les solutions de l'équation : $\omega = 0$.

3.4.5. – 1) Déterminer les fonctions u(x) et v(y) afin que la forme différentielle ω définie par : $\omega = dx + x\, dy + u(x) . v(y)\, dz$, soit intégrable.
2) Donner les solutions de l'équation : $\omega = 0$, lorsque ω est intégrable.

3.4.6. – 1) Déterminer la fonction f(x,y) afin que la forme différentielle ω définie par $\omega = dx + x\, dy + f(x,y)\, dz$, soit intégrable.
2) Donner les solutions de l'équation : $\omega = 0$, lorsque ω est intégrable.

3.4.7. – 1) Déterminer une fonction $f(x + y + z)$, afin que f soit un facteur intégrant de l'équation : $\omega = 0$, ω étant la forme différentielle définie par :
$\omega = (y + z)\, yz\, dx + (z + x)\, zx\, dy + (x + y)\, xy\, dz$.
2) Déterminer les solutions de l'équation : $\omega = 0$.

SOLUTIONS

3.1.1. – En écrivant la forme différentielle proposée ω, avec la notation :

$$\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy,$$

on a : $A(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$ et $B(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$;

un calcul simple donne : $\frac{\partial A(x,y)}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$ et $\frac{\partial B(x,y)}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}$,

donc : $\frac{\partial A(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial B(x,y)}{\partial x}$, qui montre que ω est une différentielle totale exacte.

On écrit alors : $A(x,y) = \arctan\frac{y}{x} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial x}$,

qui entraîne : $H(x,y) = \int \arctan\frac{y}{x}\,dx + K(y)$,

K étant une fonction inconnue actuellement; une intégration par parties entraîne :

(1) $\qquad H(x,y) = x\arctan\frac{y}{x} + \frac{y}{2}\ln(x^2+y^2) + K(y)$.

On a aussi : $B(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y)$,

utilisant le résultat (1), on trouve : $\frac{dK(y)}{dy} = -1$,

dont l'intégrale générale est : $K(y) = -y + C^{te}$.

On en conclut que l'ensemble des solutions de l'équation : $\omega = 0$, est la famille de courbes donnée par :

$$x\arctan\frac{y}{x} + \frac{y}{2}\ln(x^2+y^2) - y = C, \qquad C = C^{te}.$$

3.1.2. – En posant encore :

$$A(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{et} \quad B(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}},$$

un calcul simple donne : $\frac{\partial A(x,y)}{\partial y} = \frac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\partial B(x,y)}{\partial x}$,

qui établit que ω est une différentielle totale exacte.

On écrit alors : $A(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial x}$,

on en tire : $\qquad H(x,y) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + K(y)$,

K étant une fonction arbitraire actuellement. En posant, dans l'intégrale : $x = y\,\mathrm{sh}\,\varphi$, des calculs classiques donnent :

(1) $\qquad H(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2}) - \ln|y| + K(y)$.

En écrivant : $B(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}$,

on trouve, en utilisant (1) : $\frac{dK(y)}{dy} = \frac{1}{y}$, dont l'intégrale générale s'écrit :

$$K(y) = \ln|y| + C^{te}.$$

Il résulte de ces calculs que l'ensemble des solutions de l'équation : $\omega = 0$, est la famille de courbes donnée par :

$$\ln(x + \sqrt{x^2+y^2}) + C, \qquad C = C^{te};$$

en utilisant les coordonnées polaires classiques, on note que ces courbes sont les paraboles d'équations :

$$\rho = \frac{a}{1+\cos\theta}, \qquad a = C^{te}.$$

3.1.3. – Nous avons maintenant :

$$A(x,y) = \frac{x-y}{(x^2+y^2)^\alpha} \quad \text{et} \quad B(x,y) = \frac{x+y}{(x^2+y^2)^\alpha},$$

on sait que ω sera une différentielle totale exacte si et seulement si :

$$\frac{\partial A(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial B(x,y)}{\partial x},$$

qui donne la condition : $2(x^2+y^2)(1-\alpha) = 0$, ce qui veut : $\alpha = 1$.

On pose alors : $A(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial x}$,

qui entraîne : $H(x,y) = \int \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx + K(y)$,

K étant une fonction arbitraire actuellement. Des calculs simples donnent :

$$\int \frac{x}{x^2+y^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2),$$

et, en posant : $x = uy$, on trouve : $\int \frac{y}{x^2+y^2}\,dx = \arctan\frac{x}{y}$;

on obtient alors :

(1) $\quad H(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \arctan\frac{x}{y} + K(y).$

En marquant : $\quad B(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}$,

en utilisant $H(x,y)$ donnée par (1), il apparaît : $\frac{dK(y)}{dy} = 0$, dont la solution générale s'écrit : $K(y) = C^{te}$.

En conclusion, la solution générale de l'équation : $\omega = 0$, quand $\alpha = 1$, est la famille de courbes donnée par :

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \arctan\frac{x}{y} = C, \quad C = C^{te};$$

ici encore, en utilisant les coordonnées polaires habituelles, on reconnaît une famille de spirales logarithmiques d'équations polaires :

$$\rho = a\,e^{-\theta}, \quad a = C^{te}.$$

3.2.1. – 1) Soit $\mu(x,y)$ un facteur intégrant de l'équation :

(1) $\quad \left(\frac{y^2}{2} - 2ye^x\right)dx + (y - e^x)\,dy = 0,$

on écrit : $\left(\frac{y^2}{2} - 2ye^x\right)\mu(x,y)\,dx + (y-e^x)\,\mu(x,y)\,dy = 0;$

nous aurons une différentielle totale exacte si et seulement si :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(\frac{y^2}{2} - 2ye^x\right)\mu(x,y)\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\{(y-e^x)\,\mu(x,y)\},$$

qui se développe et s'ordonne :

$$(y-e^x)\frac{\partial\mu}{\partial x} - \left(\frac{y^2}{2} - 2ye^x\right)\frac{\partial\mu}{\partial y} = (y-e^x)\,\mu.$$

On est en présence d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, elle a pour système différentiel associé :

$$\frac{dx}{y-e^x} = \frac{dy}{-\left(\frac{y^2}{2} - 2ye^x\right)} = \frac{d\mu}{(y-e^x)\,\mu},$$

on déduit des rapports extrêmes l'équation différentielle $\frac{d\mu}{\mu} = dx$, dont la solution générale est : $\mu = K\,e^x$, $K = C^{te}$, c'est un facteur intégrant de l'équation (1).

2) On envisage alors, l'équation (en fixant $K = 1$) :

(2) $\quad \left(\frac{y^2}{2}e^x - 2ye^{2x}\right)dx + (ye^x - e^{2x})\,dy = 0,$

et on pose : $\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = ye^x - e^{2x}$; qui donne : $H(x,y) = \int (y\,e^x - e^{2x})\,dy + w(x),$

$w(x)$ étant une fonction inconnue actuellement; on a, en intégrant :

$$H(x,y) = \frac{y^2}{2}e^x - y\,e^{2x} + w(x),$$

en marquant : $\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2}{2}e^x - 2ye^{2x} + \frac{dW(x)}{dx} = \frac{y^2}{2}e^x - 2ye^{2x}$,

il apparaît : $\frac{dW(x)}{dx} = 0$, ce qui impose : $W(x) = C$, $C = C^{te}$.

On en conclut que la solution générale de (2) s'écrit :

$$\frac{y^2}{2}e^x - 2y\,e^{2x} = C, \quad C = C^{te},$$

par suite, l'expression générale de tous les facteurs intégrants de l'équation initiale (1) est :

$$\mu(x,y) = e^x F\left(\frac{y^2}{2}e^x - 2ye^{2x}\right),$$

F étant une fonction arbitraire.

3.2.2. – 1) Nous avons l'équation :

(1) $\quad (x^2+y^2+1)\,dx - 2xy\,dy = 0,$

que l'on réécrit sous la forme, par exemple : $2xy\frac{dy}{dx} = x^2+y^2+1$,

qui suggère de poser : $u = y^2$, on obtient alors :

(2) $\quad x\frac{du}{dx} = u + x^2 + 1,$

on reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre; l'équation homogène associée est :

$x\frac{du}{dx} = u\cdot$ dont la solution générale s'écrit : $u = Kx$, $K = C^{te}$;

la méthode de variation de la constante conduit à l'équation à variables séparées :

$$\frac{dK}{dx} = 1 + \frac{1}{x^2},$$

sa solution générale est : $K(x) = x - \frac{1}{x} + C$, $C = C^{te}$;

par suite, la solution générale de l'équation (2) s'explicite :

$$u = x\left(x - \frac{1}{x} + C\right), \quad C = C^{te},$$

et, en revenant à y, il apparaît que la solution de l'équation envisagée (1), s'écrit :

(3) $\quad \frac{y^2 - x^2 + 1}{x} = C, \quad C = C^{te}.$

2) Si $\mu(x,y)$ est un facteur intégrant de l'équation (1), on écrit comme dans l'exercice précédent :

(4) $\quad (x^2+y^2+1)\,\mu(x,y)\,dx - 2xy\,\mu(x,y)\,dy = 0,$

et nous aurons une différentielle totale exacte si, et seulement si :

$$2xy\frac{\partial\mu}{\partial x} + (x^2+y^2+1)\frac{\partial\mu}{\partial y} = -4y\mu\,;$$

cette équation aux dérivées partielles du premier ordre a pour système différentiel associé :

$$\frac{dx}{2xy} = \frac{dy}{x^2+y^2+1} = \frac{d\mu}{-4y\mu}\,;$$

les rapports extrêmes fixent : $\dfrac{d\mu}{\mu} = -\dfrac{2\,dx}{x}$, on en déduit : $\mu = \dfrac{K}{x^2}$, $\quad K = C^{te}$.

On sait alors qu'en utilisant (3) l'ensemble des facteurs intégrants de l'équation envisagée (1) est :

$$\mu(x,y) = \frac{1}{x^2}\,F\left(\frac{y^2-x^2+1}{x}\right),$$

F étant une fonction arbitraire.

– Si on choisit F telle que : $\quad F: \alpha \longmapsto F(\alpha) = \dfrac{H}{\alpha^2}$, $\quad H = C^{te}$,

on obtient les facteurs intégrants :

(5) $\quad \mu(x,y) = \dfrac{H}{(y^2-x^2+1)^2},$

qui sont bien du type donné dans le texte.

– Retrouvons directement ce résultat; nous avons de (4) en posant : $\mu(v) = \mu(x^2-y^2)$, $v = x^2-y^2$,

$$(x^2+y^2+1)\,\mu(v)\,dx - 2xy\,\mu(v)\,dy = 0,$$

et nous aurons une différentielle totale exacte si :

$$2y\mu(v) - 2y(x^2+y^2+1)\frac{d\mu}{dv} = -2y\mu(v) - 4x^2y\frac{d\mu}{dv},$$

qui s'écrit aussi : $\quad (1-v)\dfrac{d\mu}{dv} = 2\mu,$

dont la solution générale est : $\quad \mu(v) = \dfrac{H}{(1-v)^2}$, $\quad H = C^{te}$, $\quad$ c'est le résultat (5).

3.2.3. – 1) L'équation envisagée s'écrit :

(1) $\quad (yx^2+y^3-xy)\,dx + x^2dy = 0,\quad$ soit aussi :

(2) $\quad x^2\dfrac{dy}{dx} + yx^2+y^3-xy = 0,$

en multipliant les deux membres de cette équation par y, puis en posant $u = y^2$, on obtient l'équation de BERNOULLI :

$$\frac{x^2}{2}\frac{du}{dx} + (x^2-x)\,u + u^2 = 0\,;$$

en posant : $z = \dfrac{1}{u}$, $\quad$ on obtient l'équation différentielle linéaire du premier ordre

avec second membre : $\dfrac{x^2}{2}\dfrac{dz}{dx} - (x^2-x)\,z = 1,$

dont la solution générale est : $z = \dfrac{Ce^{2x}-1}{x^2}$, $\quad C = C^{te}$;

on en conclut que la solution générale de l'équation (2) s'écrit :

(3) $\quad y^2 = \dfrac{x^2}{Ce^{2x}-1}.$

2) En travaillant comme dans les deux exercices précédents, on obtient l'équation aux dérivées partielles satisfaite par μ, facteur intégrant de l'équation initiale (1):

$$x^2\frac{\partial\mu}{\partial x} + (xy-yx^2-y^3)\frac{\partial\mu}{\partial y} = (x^2+3y^2-3x)\,\mu,$$

son système différentiel associé est : $\dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{dy}{xy-yx^2-y^3} = \dfrac{d\mu}{(x^2+3y^2-3x)\,\mu}$;

les rapports extrêmes donnent : $\dfrac{d\mu}{\mu} = \dfrac{x^2+3y^2-3x}{x^2}\,dx,$

en utilisant y^2 donné par (3), des calculs simples établissent que :

$$\mu^2 = \frac{Ke^{2x}(C-e^{-2x})^3}{x^6}, \qquad K = C^{te}\,;$$

en posant : $KC = H^2$, $\quad$ et en utilisant (3), il apparaît :

(4) $\quad \mu(x,y) = \dfrac{H}{y(x^2+y^2)}$, $\quad H = C^{te}$.

On sait alors que tous les facteurs intégrants de l'équation initiale (1) sont donnés par :

$$\mu(x,y) = \frac{1}{y(x^2+y^2)}\,F\left\{e^{-2x}\left(\frac{x^2+y^2}{y^2}\right)\right\},$$ F étant une fonction arbitraire.

Il est évident que si on choisit F telle que :

$$F: \alpha \longmapsto F(\alpha) = H, \qquad H = C^{te},$$

on retrouve les facteurs intégrants définis par (4) qui est bien du type demandé dans le texte.

– ***Remarque :*** Si on multiplie les deux membres de l'équation (1) par μ défini par (4), il vient :

$$\left(\frac{x^2+y^2-x}{x^2+y^2}\right)dx + \frac{x^2}{y(x^2+y^2)}\,dy = 0,$$

on écrit : $\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-x}{x^2+y^2} = 1 - \dfrac{x}{x^2+y^2}$,

qui s'intègre et donne : $H(x,y) = x - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + V(y)$,

V étant une fonction inconnue actuellement; en formant :

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{dV(y)}{dy} = \frac{x^2}{y(x^2+y^2)},$$

il apparaît : $\dfrac{dV(y)}{dy} = \dfrac{1}{y}$, donc : $V(y) = \ln|y| + C^{te}$, qui établit que l'intégrale générale de l'équation (1), est :

$$H(x,y) = x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) = C^{te},$$

on a évidemment retrouvé le résultat (3).

3.3.1. – 1) En posant :

$$\vec{V} = \frac{ay-bz}{(cz-ax)^2}\vec{e_1} + \frac{1}{cz-ax}\vec{e_2} + \frac{bx-cy}{(cz-ax)^2}\vec{e_3},$$

la base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ étant orthonormée directe, un calcul élémentaire montre que : $\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$, qui établit que la forme différentielle envisagée :

$$(1) \qquad \omega = \frac{ay-bz}{(cz-ax)^2}dx + \frac{1}{cz-ax}dy + \frac{bx-cy}{(cz-ax)^2}dz,$$

est une différentielle totale exacte, donc intégrable .

2) On pose, conformément au rappel de cours :

$$\omega = A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz,$$

on écrit alors : $\dfrac{\partial H(x,y,z)}{\partial x} = A(x,y,z) = \dfrac{ay-bz}{(Cz-ax)^2}$, qui s'intègre à vue et donne :

$$(2) \qquad H(x,y,z) = \frac{1}{a}\left(\frac{ay-bz}{cz-ax}\right) + K(y,z),$$

K étant indéterminée actuellement; puis, on pose :

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x,y,z) = \frac{1}{cz-ax} + \frac{\partial K(y,z)}{\partial y} = B(x,y,z) = \frac{1}{cz-ax},$$

qui impose : $\dfrac{\partial K}{\partial y}(y,z) = 0$, on écrit donc : $K(z)$; enfin, on marque :

$$\frac{\partial H}{\partial z}(x,y,z) = \frac{bx-cy}{(cz-ax)^2} + \frac{dK(z)}{dz} = C(x,y,z) = \frac{bx-cy}{(cz-ax)^2},$$

qui fixe : $\dfrac{dK(z)}{dz} = 0$, soit : $K(z) = C^{te}$.

En conclusion, la solution au problème posé est la famille de plans d'équations :

$$ay - bz = K(cz - ax), \qquad K = C^{te}.$$

3.3.2. – 1) Travaillant comme dans l'exercice précédent, on pose :

$$\vec{V} = (y+z)\vec{e_1} + (z+x)\vec{e_2} + (x+y)\vec{e_3},$$

et un calcul élémentaire donne : $\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$,

on a encore une différentielle totale exacte.

2) En utilisant, par exemple, la formule rappelée dans le texte, on trouve :

$$\int_{x_0}^{x} A(u,y,z)\,du = (y+z)(x-x_0),$$

puis :

$$\int_{y_0}^{y} B(x_0,v,z)\,dv = (x_0+z)(y-y_0),$$

enfin :

$$\int_{z_0}^{z} C(x_0,y_0,w)\,dw = (x_0+y_0)(z-z_0);$$

additionnant ces résultats, il apparaît après simplification, que la famille de surfaces, solution de l'équation :

$$(y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz = 0,$$

est déterminée par :

$$H(x,y,z) = xy + yz + zx = C, \quad C = C^{te}.$$

3.3.3. – 1) En opérant comme pour les exercices précédents, on pose :

$$\vec{V}(x,y,z) = \frac{\ln|z|}{x^2y}\vec{e_1} + \frac{\ln|z|}{xy^2}\vec{e_2} - \frac{1}{xyz}\vec{e_3},$$

et ici encore, on retrouve : $\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$,

on a aussi une différentielle totale exacte.

2) En utilisant encore la formule rappelée dans le texte, il vient :

$$\int_{x_0}^{x} A(u,y,z)\,du = -\frac{\ln|z|}{xy} + \frac{\ln|z|}{x_0y},$$

puis :
$$\int_{y_0}^{y} B(x_0,v,z)\,dv = -\frac{\ln|z|}{x_0\,y} + \frac{\ln|z_0|}{x_0\,y_0};$$
enfin :
$$\int_{z_0}^{z} C(x_0,y_0,w)\,dw = -\frac{\ln|z|}{x_0\,z_0} + \frac{\ln|z_0|}{x_0\,y_0};$$
additionnant ces résultats, il apparaît que la famille de surfaces cherchée est définie par :
$$H(x,y,z) = -\frac{\ln|z|}{xy} = C, \qquad C = C^{te}.$$

3.4.1. – 1) On pose aussi : $\vec{V} = 2xz\,\vec{e_1} - 2yz\,\vec{e_2} - (x^2-y^2)\,\vec{e_3}$,
un calcul élémentaire donne : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = 4(y\,\vec{e_1} + x\,\vec{e_2})$,

on a donc : $\vec{V}\,.\,\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = 0$, on sait alors que la forme envisagée est intégrable.

2) Pour résoudre l'équation :

(1) $\omega = 2xz\,dx - 2yz\,dy - (x^2-y^2)\,dz = 0$,

on opère par exemple de la manière suivante :

a) En ayant posé :
$$\omega = A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz,$$
on fixe z, et on résout l'équation : $A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy = 0$,
z jouant le rôle d'un paramètre, soit ici :

(2) $2xz\,dx - 2yz\,dy = 0$,

qui s'intègre à vue et donne : $z(x^2-y^2) = C^{te}$;
par suite, l'ensemble des solutions de l'équation (2), s'écrit :

(3) $U(x,y,z) = z(x^2-y^2) = \varphi(z)$,

φ étant une fonction inconnue actuellement.

b) Arbitrairement, on se fixe une valeur y_0 de y, soit : $y_0 = 0$, et on résout :
$$A(x,y_0,z)\,dx + C(x,y_0,z)\,dz = 0,$$
soit ici : $2xz\,dx - x^2\,dz = 0$, dont la solution générale évidente est :

(4) $x^2 = Kz, \qquad K = C^{te}$.

On écrit alors de (3) : $U(x,y_0,z) = U(x,0,z) = zx^2 = \varphi(z)$, donc en utilisant (4) :
$Kz^2 = \varphi(z)$; revenant à (3), il vient la solution cherchée : $z(x^2-y^2) = Kz^2$, soit :
$$z = H(x^2-y^2), \quad H = C^{te}.$$
– On note que la vérification est immédiate, on a du dernier résultat : $dz = 2H(x\,dx - y\,dy)$
en revenant à (1), on obtient :
$$2xH(x^2-y^2)\,dx - 2yH(x^2-y^2)\,dy - 2H(x^2-y^2)(x\,dx - y\,dy) = 0.$$

3.4.2. – 1°) On pose de même :
$$\vec{V} = \frac{1}{yz}\vec{e_1} + \frac{1}{zx}\vec{e_2} + \frac{1}{xy}\vec{e_3},$$
un calcul classique montre que :
$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{y^2}\right)\vec{e_1} + \frac{1}{y}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2}\right)\vec{e_2} + \frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right)\vec{e_3},$$
qui donne : $\vec{V}\,.\,\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = 0$, la forme différentielle envisagée est intégrable.

2°) Pour résoudre l'équation :

(1) $\omega = \frac{1}{yz}dx + \frac{1}{zx}dy + \frac{1}{xy}dz = 0$,

on opère de la manière suivante :

a) En ayant posé :

(1) $\omega = A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz$,

on fixe z, et on résout l'équation : $A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy = 0$,
z jouant le rôle d'un paramètre, soit ici :

(2) $\frac{1}{yz}dx + \frac{1}{zx}dy = 0$,

qui s'écrit : $\frac{1}{xyz}(x\,dx + y\,dy) = 0$,
l'ensemble des solutions de l' équation (2) s'écrit, par exemple :

(3) $U(x,y,z) = x^2 + y^2 = \varphi(z)$,

φ étant une fonction inconnue actuellement.

b) Arbitrairement, on se fixe une valeur x_0 de x, soit : $x_0 = 1$, et on résout :
$$B(x_0,y,z)\,dy + C(x_0,y,z)\,dz = 0,$$
soit ici : $\frac{dy}{z} + \frac{dz}{y} = 0$, ou : $\frac{1}{yz}(y\,dy + z\,dz) = 0$, dont la solution générale est :

(4) $y^2 + z^2 = K, \qquad K = C^{te} \geq 0$.

On écrit alors de (3) : $U(x_0,y,z) = U(1,y,z) = 1 + y^2 = 1 + K - z^2 = \varphi(z)$,
ou : $\varphi(z) = H - z^2, \qquad H = C^{te} \geq 1$;
retournant à (3) il apparait que la famille de surfaces cherchée est la famille de sphères centrées à l'origine et d'équations :
$$x^2 + y^2 + z^2 = H, \qquad H = C^{te} \geq 1.$$

3.4.3. – 1°) On pose aussi : $\vec{V} = (yz - y^3)\,\vec{e_1} + (xy^2 + xz)\,\vec{e_2} + f(x,y)\,\vec{e_3}$,
un calcul simple donne :
$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - x\right]\vec{e_1} + \left[y - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]\vec{e_2} + 4y^2\,\vec{e_3},$$

et on sait que ω donnée dans le texte sera intégrable si et seulement si :

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}) = 0\,,$$

en formant ce produit scalaire, et en ordonnant, on obtient l'équation aux dérivées partielles :

$$(xy^2 + xz)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - (yz - y^3)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4\,y^2 f(x,y) + 2\,xy^3 .$$

Cette équation admet le système différentiel associé :

$$\frac{dx}{xy^2 + xz} = \frac{dy}{y^3 - yz} = \frac{df}{2\,xy^3 + 4\,y^2 f(x,y)},$$

qui s'écrit aussi :

$$\frac{y\,dx}{xy^3 + xyz} = \frac{x\,dy}{xy^3 - xyz} = \frac{d(xy)}{2\,xy^3} = \frac{df}{2\,xy^3 + 4\,y^2 f(x,y)},$$

on en tire l'équation : $\dfrac{d(xy)}{2\,xy^3} = \dfrac{df - d(xy)}{4\,y^2 f(x,y)}$; en posant : $xy = u$,

il vient l'équation différentielle : $\dfrac{du}{u} = \dfrac{df - du}{2f}$, soit : $\dfrac{df}{du} = 2\,\dfrac{f}{u} + 1$,

dont la solution générale est : $f(u) = u^2\left(C - \dfrac{1}{u}\right)$, $C = C^{te}$,

en revenant à x et y, on obtient une fonction f : $f(x,y) = C\,x^2y^2 - xy$, $C = C^{te}$.

– La forme différentielle :

(1) $\Omega = (yz - y^3)\,dx + (xy^2 + xz)\,dy + (C\,x^2 y^2 - xy)\,dz$, $C = C^{te}$,

en posant :

$$\vec{W} = (yz - y^3)\,\vec{e_1} + (xy^2 + xz)\,\vec{e_2} + (C\,x^2y^2 - xy)\,\vec{e_3}, \qquad C = C^{te},$$

donne :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{W}) = 2\,\{ (C\,x^2y - x)\,\vec{e_1} + (y - C\,xy^2)\,\vec{e_2} + 2y^2\,\vec{e_3} \},$$

et on vérifie aisément : $\vec{W} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{W}) = 0$, qui montre que la forme différentielle Ω donnée par (1) est intégrable.

2°) Pour résoudre l'équation :

$$\Omega = (yz - y^3)\,dx + (xy^2 + xz)\,dy + (C\,x^2 y^2 - xy)\,dz = 0,$$

on utilise la méthode classique.

a) On pose :

(2) $\Omega = A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + D(x,y,z)\,dz$,

on fixe x et on résout l'équation : $B(x,y,z)\,dy + D(x,y,z)\,dz = 0$,

x jouant le rôle d'un paramètre, soit ici : $(xy^2 + xz)\,dy + (Cx^2y^2 - xy)\,dz = 0$,

cette équation s'écrit :

$$\frac{dz}{dy} = \frac{z}{y - Cxy^2} + \frac{y}{1 - Cxy},$$

c'est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre, des calculs simples montrent que la solution générale de cette équation s'écrit, par exemple :

(3) $U(x,y,z) = \dfrac{z(1 - Cxy)}{y} - y = \varphi(x)$,

φ étant une fonction inconnue actuellement.

b) Arbitrairement, on se fixe une valeur y_0 de y, soit : $y_0 = 1$, et on résout :

$$A(x, y_0, z)\,dx + D(x, y_0, z)\,dz = 0,$$

soit, dans notre cas : $(z - 1)\,dx + (Cx^2 - x)\,dz = 0$, ou : $\dfrac{dx}{x(1 - Cx)} = \dfrac{dz}{z - 1}$,

dont l'intégrale générale est :

(4) $\dfrac{(z - 1)(1 - Cx)}{x} = H$, $H = C^{te}$.

– On déduit alors de (3) :

$$U(x, y_0, z) = U(x,1,z) = z(1 - Cx) - 1 = \varphi(x),$$

or on tire de (4) : $z(1 - Cx) = Hx + 1 - Cx$,

donc : $z(1 - Cx) - 1 = (H - C)\,x = \varphi(x)$, $H, C = C^{tes}$,

on écrit alors : $\varphi(x) = ax$, $a = C^{te}$;

retournant à (3), il apparaît que la famille de surfaces cherchée, lorsqu'on choisit :

$$f(x,y) = C\,x^2 y^2 - xy, \qquad C = C^{te},$$

est déterminée par :

$$z = \frac{axy + y^2}{1 - Cxy}, \qquad a, C = C^{tes}.$$

–***Remarque :*** On note que dans l'équation aux dérivées partielles du premier ordre satisfaite par f, z joue le rôle d'un paramètre, des deux premiers rapports du système différentiel associé, on tire :

$$\frac{dx}{x} = \frac{y^2 + z}{y^3 - yz}\,dy,$$

dont l'intégrale générale est : $\dfrac{y^2 - z}{xy} = K$, $K = C^{te}$;

on en déduit que l'ensemble des fonctions f* assurant que ω est intégrable, est défini par :

$$f^*(x,y,z) = x^2y^2\,g\left(\frac{y^2 - z}{xy}\right) - xy,$$

g étant une fonction arbitraire ; dans notre exercice, on a choisi puisque l'on demandait f (x,y) :

$$g : \alpha \longmapsto g(\alpha) = C, \qquad C = C^{te}.$$

3.4.4. – 1°) On pose : $\vec{V} = \dfrac{z}{x}\,\vec{e_1} + \dfrac{z - x}{y}\,\vec{e_2} - \vec{e_3}$,

et on a : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}) = -\dfrac{1}{y}\,\vec{e_1} + \dfrac{1}{x}\,\vec{e_2} - \dfrac{1}{y}\,\vec{e_3}$, qui entraîne : $\vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}) = 0$, donc la forme différentielle ω donnée est intégrable.

2°) Pour résoudre l'équation : $\omega = \frac{z}{x}dx + \frac{z-x}{y}dy - dz = 0$,
on utilise la méthode classique.

a) On pose : $\omega = A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz$,
on fixe z, et on résout l'équation : $A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy = 0$, z jouant le rôle d'un paramètre, soit ici :

(1) $\frac{z}{x}dx + \frac{z-x}{y}dy = 0$,

on a l'équation à variables séparées : $\frac{dy}{y} = \frac{-z\,dx}{x(z-x)}$

un calcul simple montre que l'ensemble des solutions de cette équation est donnée par :

(2) $U(x,y,z) = \frac{xy}{x-z} = \varphi(z)$,

φ étant une fonction inconnue à cet endroit de l'exercice.

b) Arbitrairement, on se fixe une valeur x_0 de x, soit : $x_0 = 1$, et on résout :

$B(x_0,y,z)\,dy + C(x_0,y,z)\,dz = 0$,

soit ici : $\frac{z-1}{y}dy = dz$, dont la solution générale s'écrit :

(3) $\frac{y}{z-1} = C$, $C = C^{te}$.

On tire alors de (2) : $U(x_0,y,z) = U(1,y,z) = \frac{y}{1-z} = \varphi(z)$,

soit compte tenu de (3) : $\varphi(z) = -C$, $C = C^{te}$.

Retournant à (2), il apparaît que la solution de l'équation $\omega = 0$, est la famille de surfaces définie par : $z = x(1+Ky)$, $K = C^{te}$.

– *Remarque 1 :* On note qu'au lieu de fixer z, si on fixe y en premier lieu, les calculs sont encore plus simples.

– *Remarque 2 :* On peut écrire de l'équation $\omega = 0$, $dz = \frac{z}{x}dx + \frac{z-x}{y}dy$,

en posant : $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, on obtient le système de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre :

(4) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x}$,

(5) $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z-x}{y}$;

on écrit d'une manière formelle le système différentiel associé à l'équation (4) :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{\frac{z}{x}},$$

qui montre que la solution générale de (4) s'écrit : $z = x\,\varphi(y)$, φ étant une fonction arbitraire.

Il vient alors : $\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{d\varphi(y)}{dy}$,

qui remis dans l'équation (5) impose : $x\frac{d\varphi(y)}{dy} = \frac{x}{y}\{\varphi(y) - 1\}$,

on en déduit la relation définissant φ : $\frac{d\varphi(y)}{dy} = \frac{\varphi(y)-1}{y}$,

dont la solution générale est : $\varphi(y) = 1 + Ky$, $K = C^{te}$;

en remplaçant φ par son expression, on retrouve le résultat obtenu par la méthode classique.

3.4.5. – 1°) On pose : $\vec{V} = \vec{e_1} + x\,\vec{e_2} + u(x)\,v(y)\,\vec{e_3}$, qui donne :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}) = u(x)\frac{dv(y)}{dy}\vec{e_1} - v(y)\frac{du(x)}{dx}\vec{e_2} + \vec{e_3},$$

et ω donnée dans le texte, sera intégrable si et seulement si : $\vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}) = 0$,

ce qui impose ici : $u(x)\frac{dv(y)}{dy} - x\,v(y)\frac{du(x)}{dx} + u(x)\,v(y) = 0$,

que l'on écrit :

$$\frac{v(y) + \frac{dv(y)}{dy}}{v(y)} = \frac{x\frac{du(x)}{dx}}{u(x)} = K, \quad K = C^{te}.$$

On en déduit, d'une part : $x\frac{du(x)}{dx} = K\,u(x)$, d'où : $u(x) = a\,x^K$, $a = C^{te}$;

et d'autre part : $v(y) + \frac{dv(y)}{dy} = K\,v(y)$,

dont la solution générale est : $v(y) = b\,e^{(K-1)y}$, $b = C^{te}$.
On obtient par suite : $u(x)\,v(y) = a\,b\,x^K e^{(K-1)y}$,
que l'on écrit :

(1) $u(x)\,v(y) = h\,x^K e^{(K-1)y}$, $K, h = C^{tes}$.

2°) Si, afin de résoudre l'équation : $\omega = 0$, on utilise la méthode classique, il apparaît :
a) En fixant y :

$$U(x,y,z) = \frac{1}{K-1}x^{-(K-1)} - C\,e^{(K-1)y}z = \varphi(y),$$

φ étant une fonction inconnue actuellement.

b) En choisissant, par exemple, $x_0 = 1$, des calculs analogues à ceux conduits dans les exercices antérieurs donnent :

$\varphi(y) = W\,e^{(K-1)y}$, $W = C^{te}$, d'où la solution du problème posé :

(2) $$hz - \frac{e^{-(K-1)y}}{(K-1)\,x^{k-1}} = n, \qquad n = C^{te}, \quad K \neq 1.$$

– *Remarque :* Travaillons comme à la fin de l'exercice précédent, on écrit :

$$dz = -\frac{1}{h}x^{-K}e^{-(K-1)y}dx - \frac{1}{h}x^{-(K-1)}e^{-(K-1)y}dy,$$

en posant : $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$,

on obtient le système constitué de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre :

(3) $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{h}x^{-K}e^{-(K-1)y},$$

(4) $$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{h}x^{-(K-1)}e^{-(K-1)y};$$

des calculs classiques montrent que la solution générale de l'équation (3) est :

(5) $$z = \frac{1}{h(K-1)x^{K-1}}e^{-(K-1)y} + g(y),$$

g étant une fonction arbitraire.

On tire alors de (5) : $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{1}{h}x^{-(K-1)}e^{-(K-1)y} + \dfrac{d\,g(y)}{dy}$,

qui, remis dans (4), montre que : $\dfrac{d\,g(y)}{dy} = 0$,

il en découle : $g(y) = C$, $C = C^{te}$; revenant à z donné par (5), on obtient :

$$z = \frac{1}{h(K-1)x^{K-1}}e^{-(K-1)y} + C, \qquad C = C^{te},$$

on a retrouvé le résultat (2).

3.4.6. – 1°) On écrit de même que dans les exercices précédents :

$$\vec V = \vec e_1 + x\vec e_2 + f(x,y)\,\vec e_3,$$

il vient :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec V) = \frac{\partial f}{\partial y}\vec e_1 - \frac{\partial f}{\partial x}\vec e_2 + \vec e_3,$$

la forme différentielle ω sera intégrable si et seulement si : $\vec V \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec V) = 0$,
qui impose :

$$\frac{\partial f}{\partial y} - x\frac{\partial f}{\partial x} + f(x,y) = 0;$$

des calculs simples montrent que la solution générale de cette équation s'écrit :

(1) $f(x,y) = x\,\varphi(x\,e^y)$, φ étant une équation arbitraire.

2°) Par suite, si on choisit f donnée par (1), on sait que ω définie dans le texte est intégrable. On écrit alors :

$$dz = -\frac{1}{x\varphi(xe^y)}dx - \frac{1}{\varphi(xe^y)}dy,$$

posant encore : $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$,

on obtient un système de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre :

(2) $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x\varphi(xe^y)},$$

(3) $$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{\varphi(xe^y)};$$

le système différentiel associé à (2) s'écrit : $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{0} = -\dfrac{dz}{[x\varphi(xe^y)]^{-1}}$,

le second rapport impose : $dy = 0 \Rightarrow y = C_1$, $C_1 = C^{te}$, et les rapports extrêmes fixent : $dz = -[x\varphi(x\,e^{C_1})]^{-1}dx$, en posant : $x\,e^{C_1} = w$, on obtient l'équation :

(4) $$dz = -\frac{dw}{w\,\varphi(w)};$$

soit F la fonction déterminée par :

(5) $$F(w) = \int_{w_0}^{w} -\frac{d\theta}{\theta\,\varphi(\theta)}, \qquad w_0 = C^{te},$$

il apparaît que la solution de l'équation (4) est :

(6) $$\begin{cases} z(x,y) = F(xe^y) + G(y), \\ G \text{ étant une fonction arbitraire.} \end{cases}$$

- *Remarque :* On retrouve aisément ce résultat en envisageant l'équation différentielle associée à (2) :

$\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{1}{x\varphi(xe^y)}$, y jouant le rôle d'un paramètre, en multipliant au membre de droite, le numérateur et le dénominateur par e^y, et en posant : $xe^y = \theta$, on obtient :

$$dz = -\frac{d\theta}{\theta\varphi(\theta)}, \qquad \text{c'est l'équation (4).}$$

– En revenant à (3), il apparaît de (6) : $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{1}{xe^y\varphi(xe^y)}xe^y + \dfrac{dG}{dy}$,

qui montre que : $\dfrac{dG}{dy} = 0$; on écrit finalement la solution cherchée :

$$(7)\quad \begin{cases} z(x,y) = \displaystyle\int_{w_1}^{xe^y} \frac{-d\theta}{\theta\ \varphi(\theta)}, \quad w_1 = C^{te}, \\ \varphi \text{ étant une fonction arbitraire choisie dans (1).} \end{cases}$$

3.4.7. – 1°) En écrivant :

$$\vec{V} = (y+z)\,yz\,\vec{e_1} + (z+x)\,xz\,\vec{e_2} + (x+y)\,xy\,\vec{e_3},$$

des calculs simples donnent :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = 2x(y-z)\,\vec{e_1} + 2y(z-x)\,\vec{e_2} + 2z(x-y)\,\vec{e_3},$$

qui entraîne : $\vec{V} \cdot \overrightarrow{rot}(\vec{V}) = 0$, donc ω est intégrable.

Déterminons donc f afin que :

(1) $\quad \overrightarrow{rot}(f\vec{V}) = \vec{0}$;

on trouve facilement : $\vec{e_1} \cdot \overrightarrow{rot}(f\vec{V}) = 2(y-z)f + [y(x+y) - z(z+x)f'$,

or : $\quad y(x+y) - z(z+x) = (y-z)(x+y+z)$,
en posant : $\quad x+y+z = u$, la condition (1) conduit à l'équation différentielle

$$2f(u) + u\frac{df(u)}{du} = 0, \text{ dont la solution générale est : } f(u) = \frac{a}{u^2}, \qquad a = C^{te};$$

en revenant aux variables initiales, on obtient :

(2) $$f(x+y+z) = \frac{a}{(x+y+z)^2}, \qquad a = C^{te}.$$

On a évidemment la même conclusion en formant :

$$\vec{e_2} \cdot \overrightarrow{rot}(f\vec{V}) \qquad \text{et} \qquad \vec{e_3} \cdot \overrightarrow{rot}(f\vec{V}).$$

2°) On écrit par suite :

$$\omega f = \frac{a}{(x+y+z)^2}\{(y+z)\,yz\ dx + (z+x)\,zx\ dy + (x+y)\,xy\ dz\},$$

avec : $$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{a(y+z)\,yz}{(x+y+z)^2},$$

qui s'intègre et donne : $\quad H(x,y,z) = -\dfrac{a(y+z)\,yz}{x+y+z} + F(y,z)$,

F étant une fonction inconnue actuellement, puis : $\quad \dfrac{\partial H}{\partial y} = \dfrac{a(z+x)\,zx}{(x+y+z)^2}$,

impose : $\dfrac{\partial F}{\partial y}(yz) = az$, $\quad$ donc : $F(y,z) = ayz + G(z)$, $\;$ G fonction arbitraire,

il en résulte : $\quad H(x,y,z) = \dfrac{axyz}{x+y+z} + G(z)$, $\qquad$ G étant une fonction arbitraire;
enfin, en calculant :

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{a(x+y)\,xy}{(x+y+z)^2},$$

on obtient : $\quad \dfrac{dG(z)}{dz} = 0$.

En conclusion la solution de l'équation :

$$\omega = (y+z)\,yz\,dx + (z+x)\,zx\,dy + (x+y)\,xy\,dz = 0,$$

est la famille de surfaces déterminée par :

$$H(x,y,z) = \frac{axyz}{x+y+z} = b, \qquad a, b = C^{tes},$$

qui s'écrit aussi :

$$xyz = C(x+y+z), \qquad C = C^{te}.$$

CHAPITRE 4

Equations aux dérivées partielles non linéaires du premier ordre

RAPPELS DE COURS

1. Notation .

L'équation envisagée est écrite sous la forme :

(1) $\quad G(x,y,z,p,q) = 0 ,$

on a posé : $\quad p = \dfrac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \dfrac{\partial z}{\partial y};$

on utilise aussi les notations :

$$X = \frac{\partial G}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial G}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial G}{\partial z}, \quad P = \frac{\partial G}{\partial p} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\partial G}{\partial q}.$$

2. Résolution de l'équation (1) .

On sait que si on en connaît une intégrale complète, les solutions de cette équation sont :

a) les surfaces de l'intégrale complète,
b) l'enveloppe à deux paramètres, si elle existe,
c) les enveloppes de familles à un paramètre.

3. Méthode pratique pour trouver une intégrale complète de l'équation (1) .

a) On cherche une intégrale première (H) du système différentiel (2) suivant :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{pP+qQ} = -\frac{dp}{X+pZ} = -\frac{dq}{Y+qZ},$$

telle que l'on ait : $\dfrac{D(G,H)}{D(p,q)} \neq 0.$

b) On calcule p et q solution du système :

$$\begin{cases} G(x,y,z,p,q) = 0 , \\ H(x,y,z,p,q) = \lambda , \qquad \lambda = C^{te} . \end{cases}$$

c) On écrit alors :

$$\omega_\lambda = P(x,y,z,\lambda)\,dx + q(x,y,z,\lambda)\,dy - dz ,$$

et ω_λ est intégrable, on résout : $\omega_\lambda = 0$, on obtient : $F(x,y,z,\lambda,\mu)$ qui est une intégrale complète de l'équation (1).

d) Dans le cas particulier où x et y n'interviennent pas explicitement dans (1), on a donc :

(3) $\quad G(z,p,q) = 0 ,$

on cherche une solution particulière du type $z = f(x+\lambda y)$.

4. Problème de CAUCHY.

Soit $F(x,y,z,\lambda,\mu) = 0$ une intégrale complète de l'équation (1), on appelle courbe caractéristique toute courbe $C,(\lambda,\mu,\nu)$ définie par les relations :

$$(4) \quad \begin{cases} F(x,y,z,\lambda,\mu) = 0 , \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda,\mu) + \nu\,\dfrac{\partial F}{\partial \mu}(x,y,z,\lambda,\mu) = 0 , \qquad \nu = C^{te}. \end{cases}$$

– Soit (γ) une courbe qui n'est caractéristique en aucun point, et définie paramétriquement par : $\quad x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t);$

pour trouver les enveloppes à un paramètre qui contiennent (γ), on opère de la façon suivante :

a) On résout le système en λ et μ :

$$(5) \quad \begin{cases} F[f(t),\ g(t),\ h(t),\ \lambda,\ \mu] = 0 , \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}[f(t),\ g(t),\ h(t),\ \lambda,\ \mu] = 0 , \end{cases}$$

on en déduit par exemple : $\mu = \psi(\lambda)$; l'enveloppe de la famille à un paramètre $F(x,y,z,\lambda,\psi(\lambda)) = 0$ est une surface contenant (γ).

EXERCICES

4.1.1. – Déterminer la solution de l'équation :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 1 ,$$

qui contient la droite définie par : $y = 0, \quad z = x$.

4.1.2. – Déterminer la solution de l'équation :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 1 ,$$

qui contient la droite définie par : $y = 0, \quad z = x$.

4.1.3. – Déterminer la solution de l'équation :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial y} = y,$$

qui contient la droite définie par : $y = 0, \quad z = 0$.

4.1.4. – Déterminer la solution de l'équation :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y},$$

qui contient la droite définie par : $x = z, \quad y = 4x$.

4.2.1. – Donner la solution de l'équation :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial y},$$

qui contient la parabole définie par : $y = 0, \quad z = x^2$.

4.2.2. – Donner la solution de l'équation :

$$xy\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 1,$$

qui contient la courbe définie par : $y = 1, \quad x = e^{z^2}$.

4.2.3. – Donner la solution de l'équation :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z,$$

qui contient la parabole d'équations : $x = 0, \quad z = y^2$.

4.3.1. – Déterminer la solution de l'équation :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y},$$

qui contient la droite d'équations : $x + y = 0, \quad z = 1$.

4.3.2. – Déterminer la solution de l'équation :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = x + y,$$

qui contient la droite définie par : $x = y, \quad z = 0$.

4.4.1. – Donner la solution de l'équation :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1,$$

qui contient le cercle situé dans le plan d'équation $z = 0$, de centre A de coordonnées (1,0,0) et de rayon 1.

4.4.2. – Donner les solutions de l'équation :

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

qui contient la droite définie par : $y = x + 1, \quad z = 2x + 1$.

4.5. – L'espace affine euclidien de dimension trois est rapporté au repère cartésien orthonormé direct $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Soit M (x,y,z) un point d'une surface (S), P la projection orthogonale de M sur l'axe de repère $(0, \vec{e}_3)$, N la projection orthogonale de P sur la normale en M à (S). Déterminer les surfaces (S) telles que:

$$\|\overrightarrow{NM}\| = a, \quad a = C^{te} > 0.$$

SOLUTIONS

4.1.1. – Nous avons donc l'équation :

$$(1) \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - 1 = 0,$$

soit avec la notation rappelée :

$$G(x,y,z,p,q) = pq - 1 = 0,$$

elle ne contient pas explicitement x, ni y, on sait alors que, dans ce cas particulier, pour déterminer une intégrale complète de (1), on cherche de cette équation une solution du type :

$$(2) \qquad z = f(\lambda x + y),$$

λ étant un paramètre; en remplaçant dans l'équation initiale, on obtient l'équation différentielle : $\lambda f'^2(\lambda x + y) = 1$, qui montre que λ est strictement positif, par suite, on écrit

$$f'(\lambda x + y) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}, \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

dont l'intégrale générale est : $f(\lambda x + y) = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}(\lambda x + y) + C^{te}$,

en posant : $\varepsilon\sqrt{\lambda} = \eta$, il vient l'intégrale complète de (1), compte-tenu de (2) :

$$z - \eta x - \frac{1}{\eta}y = C^{te}.$$

– En utilisant la notation rappelée, on a l'intégrale complète :

$$(3) \qquad F(x,y,\eta,\mu) = 0, \qquad z - \eta x - \frac{1}{\eta}y + \mu = 0;$$

afin de déterminer la surface (S) qui contient la droite d'équations : $y = 0, \quad z = x$, on paramètre cette droite, en posant : $x = t, \quad y = 0, \quad z = t$, et on cherche les fonctions η et μ solutions du système :

$$\begin{cases} F\,[\,x(t),\ \ y(t),\ \ z(t),\ \ \eta\,,\ \ \mu\,] = 0\,, \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}\,[\,x(t),\ \ y(t),\ \ z(t),\ \ \eta,\ \ \mu\,] = 0\,, \end{cases}$$

qui s'écrit ici : $\begin{cases} t - \eta\, t + \mu = 0\,, \\ 1 - \eta = 0\,, \end{cases}$

dont la solution est : $\eta = 1, \quad \mu = 0\,;$

revenant à $F(x,y,z,\eta,\mu)$ donnée par (3), en remplaçant η et μ par leurs valeurs, il apparaît que F définit une surface unique, c'est le plan d'équation : $z = x + y$.

– On vérifie sans difficulté que $z = x + y$ satisfait l'équation aux dérivées partielles considérée et que ce plan contient la droite d'équations : $y = 0, \quad z = x$.

4.1.2. – En utilisant la notation habituelle l'équation considérée s'écrit :

(1) $\quad p^2 q = 1\,,$

elle ne contient pas x, ni y, on en cherche une solution du type :

(2) $\quad z = f\,(\lambda x + y)\,,$

λ étant un paramètre; en remplaçant dans l'équation initiale, on obtient l'équation différentielle : $\lambda^2\, f'^3\,(\lambda x + y) = 1,$ qui entraîne :

$$f'\,(\lambda x + y) = \frac{1}{\lambda^{2/3}}\,,$$

son intégrale générale est :

$$f\,(\lambda\, x + y) = \frac{1}{\lambda^{2/3}}\,(\lambda x + y) + C^{te}\,,$$

en posant pour simplifier les écritures : $\eta = \lambda^{1/3}$, on obtient une intégrale complète de l'équation (1), compte-tenu de (2) : $z - \eta x - \dfrac{1}{\eta^2}\, y = C^{te}$.

– On écrit alors cette intégrale complète sous la forme :

(3) $\quad F\,(x,y,z,\eta,\mu) = z - \eta\, x - \dfrac{1}{\eta^2}\, y + \mu = 0\,;$

on paramètre la droite envisagée : $x = t, \quad y = 0, \quad z = t$, qui conduit au système :

$$\begin{cases} F\,[\,x(t),\ \ y(t),\ \ z(t),\ \ \eta,\ \ \mu\,] = t - \eta t + \mu = 0\,, \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}\,[\,x(t),\ \ y(t),\ \ z(t),\ \ \eta,\ \ \mu\,] = 1 - \eta = 0\,, \end{cases}$$

on en déduit : $\eta = 1, \quad \mu = 0\,;$
on obtient donc une surface unique, c'est le plan d'équation : $z = x + y$.
La vérification est immédiate.

4.1.3. – En utilisant la notation habituelle, l'équation considérée s'écrit :

(1) $\quad p^2 + q - y = 0\,,$

on lui associe le système différentiel :

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2\,p^2 + q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{1}\,;$$

on en tire, par exemple, l'intégrale première :

$$H\,(x,y,z,p,q) = p = \lambda\,, \qquad \lambda = C^{te}.$$

On note que : $\dfrac{D\,(G,H)}{D\,(p,q)} = \begin{vmatrix} 2p & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1\,,$ n'est pas identiquement nul.

Le système : $\begin{cases} p^2 + q - y = 0\,, \\ \lambda = p\,, \end{cases}$ admet la solution :

(2) $\quad \begin{cases} p = \lambda\,, \\ q = y - \lambda^2\,; \end{cases}$

on résout, à z fixé, l'équation : $p dx + q dy = 0$, soit : $\lambda\, dx + (y - \lambda^2)\, dy = 0,$
dont l'intégrale générale est :

$$\Phi\,(x,y,z,\lambda) = \lambda x + \frac{y^2}{2} - \lambda^2 y = C^{te}.$$

Il semble ici préférable de se fixer arbitrairement une valeur y_0 de y, soit : $y_0 = 0$, et on cherche une fonction $\varphi(z)$ telle que la fonction W donnée par :

$$W\,(x,z,\lambda) = \Phi\,(x,0,y,\lambda) - \varphi(z)\,,$$

soit solution de l'équation : $p dx - dz = 0,$ qui s'explicite en utilisant (2) :

(3) $\quad \lambda\, dx - dz = 0\,,$

or, ici : $W\,(x,z,\lambda) = \lambda x - \varphi(z)\,,$ et il vient :

$$dW\,(x,z,\lambda) = \frac{\partial W}{\partial x}\,(x,z,\lambda)\, dx + \frac{\partial W}{\partial z}\,(x,z,\lambda)\, dz\,,$$

soit : $\quad dW\,(x,z,\lambda) = \lambda\, dx - \dfrac{d\varphi}{dz}(z)\, dz\,,$

qui, identifié à (3) impose : $\dfrac{d\varphi}{dz}(z) = 1\,,$ on en déduit : $\varphi(z) = z + C^{te}.$

On a, par suite, une intégrale complète de l'équation (1) :

$$\Phi\,(x,y,z,\lambda) - \varphi(z) = C^{te}\,,$$

c'est à dire : $\quad \lambda x + \dfrac{y^2}{2} - \lambda^2 y - z = C^{te}.$

– On écrit donc l'intégrale complète de l'équation (1) sous la forme :

(4) $\quad F\,(x,y,z,\lambda,\mu) = z - \lambda x - \dfrac{y^2}{2} + \lambda^2 y + \mu = 0\,;$

on paramètre la droite envisagée : $x = t, \quad y = 0, \quad z = 0\,,$
on a donc le système :

$$\begin{cases} F[x(t),\ y(t),\ z(t),\ \lambda,\ \mu] = -\lambda t + \mu = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}[x(t),\ y(t),\ z(t),\ \lambda,\ \mu] = -\lambda = 0, \end{cases}$$

on en tire : $\lambda = 0$, $\mu = 0$; on obtient donc une surface unique, c'est le cylindre parabolique dont les génératrices sont parallèles à l'axe (0,x) et d'équation :

$$z = \frac{y^2}{2}.$$

La vérification de ce résultat est immédiate.

4.1.4. – En utilisant la notation habituelle, l'équation considérée s'écrit :

(1) $p + q - pq = 0$,

elle ne contient ni x, ni y, on en cherche une soluton du type :

(2) $z = f(\lambda x + y)$,

λ étant un paramètre; en remplaçant dans l'équation initiale, on obtient l'équation différentielle : $[1 + \lambda - \lambda f'(\lambda x + y)]\ f'(\lambda x + y) = 0$, on a la solution : $f(\lambda x + y) = C^{te}$, que l'on ne retient pas car elle entraîne $z = C^{te}$, ce plan ne peut pas contenir la droite donnée dans le texte; on résout donc :

$$f'(\lambda x + y) = \frac{1+\lambda}{\lambda},$$

son intégrale générale est :

$$f(\lambda x + y) = \frac{(1+\lambda)}{\lambda}(\lambda x + y) + C^{te},$$

en posant pour simplifier les écritures : $\eta = 1 + \lambda$, on obtient une intégrale complète de l'équation (1), compte-tenu de (2) :

$$z - \eta x - \frac{\eta}{\eta - 1} y = C^{te}.$$

– On écrit alors cette intégrale complète sous la forme :

(3) $F(x,y,z,\eta,\mu) = z - \eta x - \dfrac{\eta}{\eta - 1} y + \mu = 0$;

on paramètre la droite envisagée : $x = t$, $y = 4t$, $z = t$, on obtient le système :

$$\begin{cases} F[x(t),\ y(t),\ z(t),\ \eta,\ \mu] = t - \eta t - \dfrac{4\eta t}{\tau - 1} + \mu = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}[x(t),\ y(t),\ z(t),\ \eta,\ \mu] = 1 - \eta - \dfrac{4\eta}{\eta - 1} = 0, \end{cases}$$

on en déduit : $\eta = -1$, $\mu = 0$; on obtient une surface unique, c'est le plan d'équation :

$$z = -x + \frac{y}{2}.$$

Ici, encore, la vérification est immédiate.

4.2.1. – Avec la notation habituelle, l'équation envisagée s'écrit :

(1) $p^2 - q = 0$,

elle ne contient ni x, ni y, on en cherche une solution du type :

(2) $z = f(\lambda x + y)$,

λ étant un paramètre; en remplaçant dans l'équation initiale, on obtient l'équation différentielle : $[1 - \lambda^2 f'(\lambda x + y)]\ f'(\lambda x + y) = 0$, on a la solution : $f(\lambda x + y) = C^{te}$, que l'on ne retient pas car elle entraîne $z = C^{te}$, ce plan ne peut pas contenir la parabole donnée dans le texte; on résout alors :

$$f'(\lambda x + y) = \frac{1}{\lambda^2},$$

son intégrale générale est :

$$f(\lambda x + y) = \frac{1}{\lambda^2}(\lambda x + y) + C^{te},$$

en posant, pour simplifier les écritures : $\lambda = \dfrac{1}{\eta}$,

on obtient une intégrale complète de l'équation (1), en utilisant (2) :

$$z - \eta x - \eta^2 y = C^{te}.$$

– On écrit cette intégrale complète sous la forme :

(3) $F(x,y,z,\eta,\mu) = z - \eta x - \eta^2 y + \mu = 0$;

on paramètre la parabole envisagée : $x = t$, $y = 0$, $z = t^2$, il apparaît le système :

$$\begin{cases} F[x(t),\ y(t),\ z(t),\ \eta,\ \mu] = t^2 - \eta t + \mu = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}[x(t),\ y(t),\ z(t),\ \eta,\ \mu] = 2t - \eta = 0, \end{cases}$$

on en déduit : $\eta = 2t$, $\mu = t^2$, en éliminant t entre η et μ on obtient l'équation liant ces deux paramètres : $\mu = \dfrac{\eta^2}{4}$;

on a donc trouvé une famille de surfaces à un paramètre (η) :

(4) $F(x,y,z,\eta) = z - \eta x - \eta^2 y + \dfrac{\eta^2}{4} = 0$,

afin d'en déterminer l'enveloppe, on forme :

$$\frac{\partial F}{\partial \eta}(x,y,z,\eta) = -x - 2\eta y + \frac{\eta}{2} = 0,$$

qui donne : $\eta(1 - 4y) = 2x$, en remplaçant dans (4), on trouve, après simplifications, la surface enveloppe :

(5) $z = \dfrac{x^2}{1 - 4y}$.

– ***Vérification :*** On déduit de (5) :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{1-4y}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4x^2}{(1-4y)^2},$$

ces résultats montrent que l'équation (1) est satisfaite; par ailleurs, si dans (5), on fixe $y = 0$, on obtient la parabole donnée dans le texte.

4.2.2. – Nous avons donc l'équation :

(1) $\quad G(x,y,z,p,q) = xypq - 1 = 0,$

on lui associe le système différentiel :

$$\frac{dx}{xyq} = \frac{dy}{xyp} = \frac{dz}{2xypq} = -\frac{dp}{ypq} = -\frac{dq}{xpq},$$

que l'on réécrit sous la forme :

$$\frac{\frac{dx}{x}}{yq} = \frac{-\frac{dy}{y}}{-xp} = \frac{dz}{2xypq} = \frac{\frac{dp}{p}}{-yq} = \frac{-\frac{dq}{q}}{xp} = \frac{\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} - \frac{dq}{q}}{0},$$

qui conduit à l'intégrale première :

$$H(x,y,z,p,q) = \frac{xp}{yq} = \lambda, \qquad \lambda = C^{te}.$$

On note que :

$$\frac{D(G,H)}{D(p,q)} = \begin{vmatrix} xyq & xyp \\ \frac{x}{yq} & -\frac{xp}{yq^2} \end{vmatrix} = -2x^2\frac{p}{q},$$

qui n'est pas identiquement nul.

Le système $\begin{cases} xypq - 1 = 0, \\ \frac{xp}{yq} = \lambda, \end{cases}$ admet les solutions :

(2) $$\begin{cases} p = \dfrac{\varepsilon\sqrt{\lambda}}{x}, \\ q = \dfrac{\varepsilon}{y\sqrt{\lambda}}, \end{cases} \qquad \varepsilon = \pm 1, \quad \lambda > 0.$$

On résout, à z fixé, l'équation : $\quad pdx + qdy = 0,$

c'est-à-dire : $\sqrt{\lambda}\,\frac{dx}{x} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{dy}{y} = 0,$

son intégrale générale est :

$$\Phi(x,y,z,\lambda) = \sqrt{\lambda}\,\ln|x| + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\ln|y| = C^{te}.$$

On se fixe arbitrairement $y = y_0 = 1$, et on cherche une fonction $\varphi(z)$ telle que la fonction

W donnée par : $W(x,z,\lambda) = \Phi(x,1,z,\lambda) - \varphi(z)$, soit solution de l'équation $pdx - dz = 0$, qui s'écrit, compte-tenu de (2) :

$$\frac{\varepsilon\sqrt{\lambda}}{x}\,dx - dz = 0,$$

ici, nous avons : $\quad W(x,z,\lambda) = \sqrt{\lambda}\,\ln|x| - \varphi(z),$

qui conduit à la conclusion : $\varphi(z) = \varepsilon z + C^{te}, \quad \varepsilon = \pm 1$ (de (2)).

On obtient donc une intégrale complète de l'équation (1) :

$$\Phi(x,y,z,\lambda) - \varphi(z) = \sqrt{\lambda}\,\ln|x| + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\ln|y| - \varepsilon z = C^{te}.$$

– On écrit cette intégrale complète sous la forme :

(3) $$F(x,y,z,\lambda,\mu) = \sqrt{\lambda}\,\ln|x| + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\ln|y| - \varepsilon z + \mu = 0, \qquad \varepsilon = \pm 1;$$

on paramètre la courbe envisagée : $x = e^{t^2}, \quad y = 1, \quad z = t,$
on obtient alors le système :

$$\begin{cases} F[x(t),\ y(t),\ z(t),\ \lambda,\ \mu] = \sqrt{\lambda}\,t^2 - \varepsilon t + \mu = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}[x(t),\ y(t),\ z(t),\ \lambda,\ \mu] = 2t\sqrt{\lambda} - \varepsilon = 0, \end{cases}$$

la dernière équation donne : $\quad t = \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{\lambda}},$

qui, remis dans la première, impose : $\quad \mu = \dfrac{1}{4\sqrt{\lambda}};$

on a donc trouvé une famille de surfaces à un paramètre (λ) :

$$F(x,y,z,\lambda) = \sqrt{\lambda}\,\ln|x| + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\ln|y| - \varepsilon z + \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} = 0,$$

que l'on préfère réécrire sous la forme :

(4) $$K(x,y,z,\lambda) = \lambda\ln|x| + \ln|y| - \varepsilon\sqrt{\lambda}\,z + \frac{1}{4} = 0;$$

afin d'en déterminer l'enveloppe, on forme :

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) = \ln|x| - \frac{\varepsilon z}{2\sqrt{\lambda}} = 0,$$

qui donne : $\sqrt{\lambda} = \dfrac{\varepsilon z}{2\ln|x|};$

en remplaçant dans (4), on obtient la surface cherchée :

(5) $\quad z^2 = [1 + 4\ln|y|]\ln|x|.$

– ***Vérification :*** On déduit de (5) :

$$z\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2x}[1 + 4\ln|y|],$$

$$z\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{y}\ln|x|,$$

on en tire : $x\dfrac{\partial z}{\partial x}\, y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{z^2}[1+4\ln|y|]\ln|x|,$

ou en utilisant (5) : $xy\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1,$

c'est l'équation initiale; par ailleurs, si dans (5) on marque $y = 1$, on trouve :

$z^2 = \ln|x|,$ qui contient la courbe donnée.

4.2.3. – Nous envisageons donc l'équation :

(1) $G(x,y,z,p,q) = pq - z = 0,$

elle ne contient ni x, ni y, on en cherche une solution du type :

(2) $z = f(\lambda x + y),$

λ étant un paramètre; en remplaçant dans l'équation initiale, on obtient l'équation différentielle : $\lambda f'^2(\lambda x + y) = f(\lambda x + y),$

ou :

$$f'(\lambda x + y) = \varepsilon\sqrt{\frac{f}{\lambda}}, \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

dont la solution générale est :

$$2\sqrt{\lambda f(\lambda x + y)} = \varepsilon(\lambda x + y) + C^{te},$$

on obtient une intégrale complète de l'équation (1), en utilisant (2) :

$$2\sqrt{\lambda z} - \varepsilon(\lambda x + y) = C^{te}.$$

– On écrit cette intégrale complète sous la forme :

(3) $F(x,y,z,\lambda,\mu) = 2\sqrt{\lambda z} - \varepsilon(\lambda x + y) + \mu = 0;$

on paramètre la parabole envisagée : $x = 0,\quad y = t,\quad z = t^2,$

on note que, puisque z est positif, λ l'est aussi, on pose : $\sqrt{\lambda} = \eta,$

et on écrit le système :

$$\begin{cases} F[x(t),\ y(t),\ z(t),\ \eta,\ \mu] = 2\eta\sqrt{t^2} - \varepsilon t + \mu = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}[x(t),\ y(t),\ z(t),\ \eta,\ \mu] = \dfrac{2\eta t}{\sqrt{t^2}} - \varepsilon = 0, \end{cases}$$

on en déduit, si $t < 0$, $2\eta = -\varepsilon$, $\mu = 0$,

si $t > 0$, $2\eta = \varepsilon$, $\mu = 0$;

en revenant à (3), il apparaît : $\pm\sqrt{z} = \left(y + \dfrac{x}{4}\right),$

que l'on écrit : $z = \left(\dfrac{x}{4} + y\right)^2;$

la vérification de ce résultat est immédiate.

4.3.1. – Nous considérons maintenant l'équation :

(1) $G(x,y,z,p,q) = pq - p - q = 0,$

on a vu dans l'exercice 4.1.4, qu'une intégrale complète de cette équation est, par exemple :

(2) $F(x,y,z,\eta,\mu) = z - \eta x - \dfrac{\eta}{\eta - 1}y + \mu = 0;$

on paramètre la droite envisagée : $x = -t,\quad y = t,\quad z = 1,$

on obtient alors le système :

$$\begin{cases} F[x(t),\ y(t),\ z(t),\ \eta,\ \mu] = 1 + \eta t - \dfrac{\eta t}{\eta - 1} + \mu = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}[x(t),\ y(t),\ z(t),\ \eta,\ \mu] = \eta - \dfrac{\eta}{\eta - 1} = \dfrac{\eta}{\eta - 1}(\eta - 2), \end{cases}$$

on tire, d'une part, de la dernière relation :

(3) $\eta = 0,$

qui entraîne, de la première : $\mu = -1,$

on obtient une première surface, c'est le plan d'équation :

(4) $z = 1,$

(on note que c'est la solution $f(\lambda x + y) = C^{te}$ dans l'exercice 4.1.4); puis il vient, d'autre part, du système :

(5) $\eta = 2,$

qui redonne : $\mu = -1,$

on obtient une seconde surface, c'est le plan d'équation :

(6) $z - 2x - 2y - 1 = 0.$

Ici, on a trouvé deux surfaces, solutions de l'équation (1) et contenant la droite donnée dans le texte.

4.3.2. – Soit donc l'équation :

(1) $G(x,y,z,p,q) = p^2 + p^2 - x - y = 0,$

elle a pour système différentiel associé :

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2p^2 + 2q^2} = \frac{dp}{1} = \frac{dq}{1},$$

on en déduit, par exemple, l'intégrale première :

$$H(x,y,z,p,q) = p^2 - x = \lambda, \quad \lambda = C^{te}.$$

On vérifie que :

$$\frac{D(G,H)}{D(p,q)} = \begin{vmatrix} 2p & 2q \\ 2p & 0 \end{vmatrix} = -4pq,$$

n'est pas identiquement nul.

Le système $\begin{cases} p^2 + q^2 - x - y = 0, \\ p^2 - x = \lambda, \end{cases}$ admet la solution :

$$(2) \qquad \begin{cases} p = \varepsilon_1 \sqrt{x+\lambda}, & \varepsilon_1 = \pm 1, \\ q = \varepsilon_2 \sqrt{y-\lambda}, & \varepsilon_2 = \pm 1. \end{cases}$$

On résout, à z fixé, l'équation : $p\,dx + q\,dy = 0$, elle s'écrit :

$$\varepsilon_1 \sqrt{x+\lambda}\, dx + \varepsilon_2 \sqrt{y-\lambda}\, dy = 0,$$

son intégrale générale est :

$$\Phi(x,y,z,\lambda) = \varepsilon_1 (x+\lambda)^{3/2} + \varepsilon_2 (y-\lambda)^{3/2} = C^{te}.$$

On se fixe, arbitrairement, $x = x_0 = 0$, et on cherche une fonction $\varphi(z)$ afin que la fonction W donnée par : $W(y,z,\lambda) = \Phi(0,y,z,\lambda) - \varphi(z)$, soit solution de l'équation : $q\,dy - dz = 0$, qui s'écrit en utilisant (2) :

$$\varepsilon_2 \sqrt{y-\lambda}\, dy - dz = 0;$$

ici, nous avons : $W(y,z,\lambda) = \varepsilon_1 \lambda^{3/2} + \varepsilon_2 (y-\lambda)^{3/2} - \varphi(z)$,

soit $\mu(y,z)$ un facteur intégrant de cette équation, en imposant à W d'être solution de l'équation :

$$\varepsilon_2 \sqrt{y-\lambda}\, \mu(y,z)\, dy - \mu(y,z)\, dz = 0,$$

nous obtenons : $dW(y,z,\lambda) = \frac{3}{2} \varepsilon_2 (y-\lambda)^{1/2} dy - \frac{d\varphi(z)}{dz} dz$,

on trouve alors : $\mu(y,z) = \frac{3}{2}$, qui fixe : $\varphi(z) = \frac{3}{2} z + C^{te}$.

On a donc une intégrale complète de l'équation (1) :

$$\Phi(x,y,z,\lambda) - \varphi(z) = \varepsilon_1 (x+\lambda)^{3/2} + \varepsilon_2 (y-\lambda)^{3/2} - \frac{3}{2} z = C^{te}.$$

– On écrit cette intégrale complète sous la forme :

$$(3) \qquad \begin{cases} F(x,y,z,\lambda,\mu) = \varepsilon_1 (x+\lambda)^{3/2} + \varepsilon_2 (y-\lambda)^{3/2} - \frac{3}{2} z + \mu = 0, \\ \varepsilon_1 = \pm 1, \qquad \varepsilon_2 = \pm 1; \end{cases}$$

afin de déterminer la relation existant entre λ et μ, on paramètre la droite donnée dans le texte, on pose : $x = t$, $y = t$, $z = 0$, on obtient le système :

$$\begin{cases} F[x(t), y(t), z(t), \lambda, \mu] = \varepsilon_1 (t+\lambda)^{3/2} + \varepsilon_2 (t-\lambda)^{3/2} + \mu = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t}[x(t), y(t), z(t), \lambda, \mu] = \frac{3}{2} \varepsilon_1 (t+\lambda)^{1/2} + \frac{3}{2} \varepsilon_2 (t-\lambda)^{1/2} = 0, \end{cases}$$

de la seconde équation, on déduit :

$$(4) \qquad \varepsilon_1 (t+\lambda)^{1/2} = -\varepsilon_2 (t-\lambda)^{1/2},$$

qui, élevé au cube, entraîne :

$$\varepsilon_1 (t+\lambda)^{3/2} = -\varepsilon_2 (t-\lambda)^{3/2},$$

en revenant à la première équation du système précédent, on obtient : $\mu = 0$, en élevant au carré les deux membres de la relation (4), il vient : $\lambda = 0$;
on obtient en utilisant ces résultats de (3) :

$$\varepsilon_1 (x)^{3/2} + \varepsilon_2 (y)^{3/2} = \frac{3}{2} z,$$

soit :

$$z = \frac{2}{3} (\varepsilon_1 x^{3/2} + \varepsilon_2 y^{3/2}), \quad \varepsilon_1 = \pm 1, \quad \varepsilon_2 = \pm 1;$$

or, la droite donnée dans le texte doit être tracée sur la surface solution, ce qui impose: $\varepsilon_1 . \varepsilon_2 = -1$, on écrit alors :

$$(5) \qquad z = 2 \frac{\varepsilon}{3} (x^{3/2} - y^{3/2}), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

On vérifie aisément que z défini par (5) est solution du problème posé.

4.4.1. – L'équation envisagée s'écrit aussi :

$$(1) \qquad G(x,y,z,p,q) = p^2 + q^2 - 1 = 0,$$

elle ne contient ni x, ni y, on en cherche une solution du type :

$$(2) \qquad z = f(\lambda x + y),$$

λ étant un paramètre; en remplaçant dans l'équation initiale, on obtient l'équation différentielle : $(1+\lambda^2) f'^2(\lambda x + y) = 1$,

ou : $f'(\lambda x + y) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\lambda^2}}$, $\varepsilon = \pm 1$,

dont la solution générale est :

$$f(\lambda x + y) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\lambda^2}} (\lambda x + y) + C^{te},$$

on obtient une intégrale complète de l'équation (1), en utilisant (2) :

$$z - \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\lambda^2}} (\lambda x + y) = C^{te},$$

pour simplifier les écritures, on pose : $\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \eta$,

l'intégrale complète s'écrit alors :

$$z - \varepsilon(\eta x + \sqrt{1-\eta^2}\, y) = C^{te}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

– On écrit cette intégrale première sous la forme :

(3) $\quad F(x,y,z,\eta,\mu) = \eta x + \sqrt{1-\eta^2}\, y + \varepsilon z + \mu = 0, \qquad \varepsilon = \pm 1;$

on paramètre le cercle envisagé, on pose : $z = 0, \quad y = \sin t, \quad x = 1 + \cos t,$
il apparaît le système :

$$\begin{cases} F[x(t),\ y(t),\ z(t),\ \eta,\ \mu] = \eta(1+\cos t) + \sqrt{1-\eta^2}\sin t + \mu = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}[x(t),\ y(t),\ z(t),\ \eta,\ \mu] = -\eta \sin t + \sqrt{1-\eta^2}\cos t = 0; \end{cases}$$

en écrivant ces deux équations sous la forme :

$$\eta \cos t + \sqrt{1-\eta^2}\sin t = -(\eta+\mu),$$
$$-\eta \sin t + \sqrt{1-\eta^2}\cos t = 0,$$

qui donnent : $(\eta+\mu)^2 = 1$, on en déduit : $\mu = -\eta + \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = \pm 1,$

il reste alors les familles de surfaces à un paramètre (η) :

(4) $\quad F(x,y,z,\eta) = \eta x + \sqrt{1-\eta^2}\, y + \varepsilon z - \eta + \varepsilon_1 = 0, \qquad \varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon_1 = \pm 1;$

afin de déterminer les enveloppes éventuelles, on forme :

$$\frac{\partial F}{\partial \eta}(x,y,z,\eta) = x - \frac{\eta y}{\sqrt{1-\eta^2}} - 1 = 0,$$

il en découle, en posant (translation d'origine) :

(5) $\quad x - 1 = X, \quad y = Y, \quad \varepsilon z + \varepsilon_1 = \varepsilon Z,$

$$\eta X + \sqrt{1-\eta^2}\, Y + \varepsilon Z = 0, \qquad X - \frac{\eta Y}{\sqrt{1-\eta^2}} = 0,$$

que l'on écrit encore :

$$\eta X + \sqrt{1-\eta^2}\, Y = -\varepsilon Z, \qquad \sqrt{1-\eta^2}\, X - \eta Y = 0,$$

en élevant les deux membres de chaque équation au carré et en formant la somme des résultats obtenus, on trouve : $\quad X^2 + Y^2 = Z^2,$
on a donc, pour solutions, les deux cônes d'équations :

(6) $\quad (x-1)^2 + y^2 = (z-1)^2, \quad$ et

(7) $\quad (x-1)^2 + y^2 = (z+1)^2.$

– ***Vérification :*** on écrit :

$$(x-1)^2 + y^2 = (z-\varepsilon_2)^2, \qquad \varepsilon_2 = \pm 1,$$

on en déduit :

$$(x-1) = (z-\varepsilon_2)\frac{\partial z}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad y = (z-\varepsilon_2)\frac{\partial z}{\partial y},$$

qui entraînent, par un calcul formel :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{(x-1)^2 + y^2}{(z-\varepsilon_2)^2} = 1,$$

on reconnaît l'équation initiale; l'intersection de ces deux cônes par le plan d'équation $z=0$ est le cercle donné dans le texte et d'équations :

$$z = 0, \qquad (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

4.4.2. – Cette équation s'écrit avec nos notations :

(1) $\quad G(x,y,z,p,q) = xp + yq - zpq = 0,$

le système différentiel qui lui est associé est :

$$\frac{dx}{x-qz} = \frac{dy}{y-pz} = \frac{dz}{px+qy-2pqz} = \frac{dp}{p^2q-p} = \frac{dq}{pq^2-q},$$

on déduit, par exemple, des deux derniers rapports, l'intégrale première :

$$H(x,y,z,p,q) = \frac{p}{q} = \lambda, \qquad \lambda = C^{te}.$$

On vérifie bien que :

$$\frac{D(G,H)}{D(p,q)} = \begin{vmatrix} x-zq & y-zp \\ \dfrac{1}{q} & -\dfrac{p}{q^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{q^2}(2zpq - xp - yq),$$

n'est pas identiquement nul.

Le système $\begin{cases} xp + yq - zpq = 0, \\ \dfrac{p}{q} = \lambda, \end{cases}$ admet la solution :

(2) $$\begin{cases} p = \dfrac{\lambda x + y}{z}, \\ q = \dfrac{\lambda x + y}{\lambda z}. \end{cases}$$

On résout, à z fixé, l'équation : $p\,dx + q\,dy = 0$, elle s'écrit, en utilisant (2) :

$$\frac{\lambda x + y}{\lambda z}(\lambda\,dx + dy) = 0,$$

on a son intégrale générale :

$$\Phi(x,y,z,\lambda) = (\lambda x + y)^2 = C^{te}.$$

On se fixe arbitrairement $x = x_0 = 0$, et on cherche une fonction $\varphi(z)$ afin que la fonction W déterminée par : $W(y,z,\lambda) = \Phi(0,y,z,\lambda) - \varphi(z)$, soit solution de l'équation : $q\,dy - dz = 0$, celle-ci s'écrit, compte-tenu de (2) :

(3) $\quad \dfrac{y}{\lambda z}dy - dz = 0,$

nous avons ici : $W(y,z,\lambda) = y^2 - \varphi(z);$

soit $\mu(y,z)$ un facteur intégrant de l'équation (3) qui devient :

$$\frac{y}{\lambda z}\,\mu(y,z)\,dy - \mu(y,z)\,dz = 0,$$

et, par ailleurs,

$$dW(y,z,\lambda) = 2y\,dy - \frac{d\varphi(z)}{dz}\,dz,$$

impose : $\mu(y,z) = 2\lambda z$, il en résulte alors : $\varphi(z) = \lambda z^2 + C^{te}$.
Nous obtenons ainsi une intégrale complète de l'équation (1) :

$$\Phi(x,y,z,\lambda) - \varphi(z) = (\lambda x + y)^2 - \lambda z^2 = C^{te}.$$

– On écrit cette intégrale complète sous la forme :

(4) $\quad F(x,y,z,\lambda,\mu) = (\lambda x + y)^2 - \lambda z^2 + \mu = 0$;

on paramètre alors la droite envisagée : $x = t$, $y = t+1$, $z = 2t+1$,
on obtient le système :

$$\begin{cases} F[x(t),\ y(t),\ z(t),\ \lambda,\ \mu] = (\lambda t + t + 1)^2 - \lambda(2t+1)^2 + \mu = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}[x(t),\ y(t),\ z(t),\ \lambda,\ \mu] = 2(\lambda+1)(\lambda t + t + 1) - 4\lambda(2t+1) = 0, \end{cases}$$

la dernière équation s'écrit aussi : $2(\lambda - 1)(\lambda t - t - 1) = 0$;
nous avons donc les possibilités :

– si $\lambda = 1$, la première équation donne : $\mu = 0$, en revenant à la relation (4), il apparaît :

$$(x+y)^2 - z^2 = 0, \qquad \text{qui se décompose :} \qquad [(x+y) - z]\,[(x+y) + z] = 0,$$

on obtient deux plans définis respectivement par : $z = x + y$, $z = -(x+y)$, seul le plan d'équation :

(5) $\quad z = x + y$,

est solution, l'autre plan ne contient pas la droite donnée dans le texte.

– Si : $\lambda = \dfrac{t+1}{t}$, on trouve sans difficulté le résultat : $\mu = \lambda$;

on obtient alors une famille de surfaces à un paramètre (λ) :

$$F(x,y,z,\lambda) = (\lambda x + y)^2 - \lambda z^2 + \lambda = 0;$$

afin d'en déterminer l'enveloppe, on forme :

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) = 2x(\lambda x + y) - z^2 + 1 = 0,$$

on en déduit λ en fonction de x, y et z, d'où l'enveloppe cherchée :

(6) $\quad z^2 - 1 = 4xy$.

La vérification est immédiate.

4.5. – En écrivant l'équation cartésienne de la surface cherchée sous la forme :

$$z - z(x,y) = f(x,y,z) = 0,$$

un vecteur $\vec{n}$ normal à la surface en M (x,y,z), est donné par :

$$\vec{n} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f = -\frac{\partial z}{\partial x}\vec{e_1} - \frac{\partial z}{\partial y}\vec{e_2} + \vec{e_3};$$

si Q (X,Y,Z) est un point de la normale en M à la surface, on a : $\overrightarrow{MQ} = \lambda\,\vec{n}$,
λ décrivant $\mathbb{R}$, on a donc une représentation paramétrique de la normale ($\mathbb{N}$) :

$$(1) \qquad \begin{cases} X = x - \lambda\dfrac{\partial z}{\partial x}, \\ Y = y - \lambda\dfrac{\partial z}{\partial y}, \\ Z = z + \lambda \quad ; \end{cases}$$

le point P, projection orthogonale de M sur l'axe des z, est défini par : $\overrightarrow{OP} = z\,\vec{e_3}$;
le plan affine (H) contenant P et orthogonal à ($\mathbb{N}$) est déterminé par :

- si Q appartient à (H) : $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n} = 0$, ce plan a donc pour équation :

$$(2) \qquad -X\frac{\partial z}{\partial x} - Y\frac{\partial z}{\partial y} + Z - z = 0.$$

Le point N est l'intersection de (H) et ($\mathbb{N}$), on déduit de (1) et (2) la valeur de λ correspondante, soit :

$$\lambda = \frac{x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1};$$

La condition imposée s'écrit alors de (1) :

$$\|\overrightarrow{MN}\|^2 = \lambda^2\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right\} = a^2,$$

en remplaçant λ par sa valeur donnée ci-dessus, on obtient l'équation aux dérivées partielles :

$$(3) \qquad (x^2 - a^2)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2xy\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + (y^2 - a^2)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = a^2.$$

Cette équation s'écrit avec nos notations :

$$(4) \qquad G(x,y,z,p,q) = (x^2 - a^2)p^2 + 2xypq + (y^2 - a^2)q^2 - a^2 = 0,$$

on écrit le système différentiel associé dont on tire aisément l'intégrale première :

$$H(x,y,z,p,q) = \frac{p}{q} = \lambda, \qquad \lambda = C^{te};$$

on vérifie que : $\dfrac{D(G,H)}{D(p,q)} \neq 0$,

ce qui permet d'obtenir :

$$(5) \qquad \begin{cases} p = \dfrac{\varepsilon a \lambda}{\sqrt{(x^2 - a^2)\lambda^2 + 2xy\lambda + y^2 - a^2}}, \\[2ex] q = \dfrac{\varepsilon a}{\sqrt{(x^2 - a^2)\lambda^2 + 2xy\lambda + y^2 - a^2}}, \end{cases} \qquad \varepsilon = \pm 1 .$$

On résout à z fixé l'équation :

(6) $\quad p dx + q dy = 0,$

en remarquant que :

$$(x^2 - a^2)\lambda^2 + 2xy\lambda + y^2 - a^2 = (\lambda x + y)^2 - a^2(\lambda^2 + 1),$$

l'intégrale générale de l'équation (6) s'écrit :

$$\Phi(x,y,z,\lambda) = \operatorname{argch}\left(\frac{\lambda x + y}{a\sqrt{\lambda^2 + 1}}\right) = C^{te}.$$

On fixe $x = x_0 = 0$, et des calculs analogues à ceux développés dans les exercices précédents montrent qu'une intégrale complète de l'équation (4) est :

$$(7) \qquad F(x,y,z,\lambda,\mu) = \frac{\lambda x + y}{a\sqrt{\lambda^2 + 1}} - \operatorname{ch}\left(\frac{z+\mu}{a}\right) = 0.$$

On pose alors : $\lambda = \tan\varphi$, il vient par suite de (7) :

$$x \sin\varphi + y\cos\varphi = a \operatorname{ch}\left(\frac{z+\mu}{a}\right),$$

et en considérant μ comme fonction du paramètre φ, l'enveloppe est obtenue en dérivant par rapport à φ, d'où :

$$x\cos\varphi - y\sin\varphi = \operatorname{sh}\left(\frac{z+\mu}{a}\right)\frac{d\mu}{d\varphi};$$

l'enveloppe est définie paramétriquement par φ et z :

$$\begin{cases} x = \cos\varphi \operatorname{sh}\left(\dfrac{z+\mu}{a}\right)\dfrac{d\mu}{d\varphi} + a\sin\varphi \operatorname{ch}\left(\dfrac{z+\mu}{a}\right), \\[2ex] y = -\sin\varphi \operatorname{sh}\left(\dfrac{z+\mu}{a}\right)\dfrac{d\mu}{d\varphi} + a\cos\varphi \operatorname{ch}\left(\dfrac{z+\mu}{a}\right). \end{cases}$$

CHAPITRE 5

Equations aux dérivées partielles quasi-linéaires du second ordre, caractéristiques, classification, formes standard

RAPPELS DE COURS

Une équation aux dérivées partielles quasi-linéaire du second ordre, est du type :

$$(1) \qquad a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

u (x,y) est la fonction inconnue a, b, c et F sont quatre fonctions données dans un domaine (D).

Courbes caractéristiques :

Si $a \neq 0$, elles sont solutions de l'équation différentielle :

$$a(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b(x,y)\frac{dy}{dx} + c(x,y) = 0;$$

si $c \neq 0$, elles sont solutions de l'équation différentielle :

$$c(x,y)\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - 2b(x,y)\frac{dx}{dy} + a(x,y) = 0;$$

si $a = 0$ et $c = 0$, ce sont les droites d'équations : $x = C^{te}$ et $y = C^{te}$.

Problème de CAUCHY .

La recherche d'une solution u de l'équation (1), connaissant u et $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ sur une courbe (γ), est appelée problème de CAUCHY relatif à (γ).

Classification des équations .

Si : $b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) > 0$ dans un domaine (H), l'équation est dite hyperbolique dans ce domaine, et elle y admet deux familles de courbes caractéristiques.

Si : $b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) = 0$ dans un domaine (h), l'équation est dite parabolique dans ce domaine, et elle y admet une famille de courbes caractéristiques.

Si : $b^2(x,y) - a(x,y)\,c(x,y) < 0$ dans un domaine (H), l'équation est dite elliptique dans ce domaine, elle n'admet pas de courbes caractéristiques réelles.

Réduction à la forme standard.

Soient $X = f(x,y)$ et $Y = g(x,y)$, deux nouvelles variables, on suppose que :

$$J(x,y) = \frac{D(f,g)}{D(x,y)} \neq 0 \quad \forall\ x, y \text{ dans un ouvert (D), on convient de noter :}$$

$u(x,y) = u(X,Y) = u(X(x,y), Y(x,y))$.

Nous avons les formes standard des équations aux dérivées partielles quasi-linéaires du second ordre :

1) Equations hyperboliques :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X\,\partial Y} = G\left(X,Y,u,\frac{\partial u}{\partial X},\frac{\partial u}{\partial Y}\right), \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = H\left(X,Y,u,\frac{\partial u}{\partial X},\frac{\partial u}{\partial Y}\right);$$

2) Equations paraboliques :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = G\left(X,Y,u,\frac{\partial u}{\partial X},\frac{\partial u}{\partial Y}\right);$$

3) Equations elliptiques :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = G\left(X,Y,u,\frac{\partial u}{\partial X},\frac{\partial u}{\partial Y}\right).$$

EXERCICES

5.1.1. – Déterminer les régions du plan où l'équation :

$$(2x+\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \lambda = C^{te} \in \mathbb{R}.$$

est du type hyperbolique, parabolique ou elliptique.

5.1.2. – Déterminer suivant les régions du plan le type de l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

et en donner la forme standard.

5.1.3. – Déterminer suivant les régions du plan le type de l'équation :

$$\sin^2 x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y\sin x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

et en donner la forme standard.

5.2.1. – Donner la solution générale de l'équation :

$$y^3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

5.2.2. – Donner la solution générale de l'équation :

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

5.2.3. – Donner la solution générale de l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

5.3.1. – Donner la solution générale de l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

5.3.2. – Donner la solution générale de l'équation :

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2y^2.$$

5.3.3. – Donner la solution générale de l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

5.4.1. – Donner la forme standard de l'équation :

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

5.4.2. – Donner la forme standard de l'équation :

$$4x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

5.4.3. – Donner la forme standard de l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4x\frac{\partial u}{\partial x} + 4y\frac{\partial u}{\partial y} + 4\left[(x-y)^2 + x^2 + 1\right]u = 0.$$

5.5.1. – Déterminer la solution générale de l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

5.5.2. – Déterminer la solution générale de l'équation :

$$\frac{y}{|y|}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

5.6. – Déterminer le type et la forme standard de l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

SOLUTIONS

5.1.1. – Avec la notation rappelée, il vient :

$$a(x,y) = 2x+\lambda, \qquad b(x,y) = xy \quad \text{et} \quad c(x,y) = -y^2 ;$$

et on forme : $D(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)\,c(x,y) = x^2y^2 + y^2(2x+\lambda)$, donc :

(1) $\quad D(x,y) = y^2(x^2+2x+\lambda)$;

envisageons l'équation :

(2) $\quad x^2 + 2x + \lambda = 0,$

un calcul formel donne ses racines : $x = -1 \pm \sqrt{1-\lambda}$.

On en conclut :

- si $\lambda < 1$, nous avons $1-\lambda > 0$, par suite il existe deux valeurs réelles x_1 et x_2 racines de l'équation (2), et nous en concluons :

  si $x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$, $D(x,y) > 0$, $y \neq 0$,

  l'équation est du type hyperbolique,

  si $x \in]x_1, x_2[$, $D(x,y) < 0$, $y \neq 0$,

  l'équation est du type elliptique ;
- si $\lambda = 1$, alors :

  $D(x,y) = y^2(x+1)^2 > 0$, $x \neq -1$ et $y \neq 0$,

  l'équation est du type hyperbolique;
- si $\lambda > 1$, l'équation (2) n'a pas de racine réelle, il en résulte que :

  $D(x,y) > 0$, $y \neq 0$,

  l'équation est du type hyperbolique.

5.1.2. – Nous avons ici : $a(x,y) = 1$, $b(x,y) = 0$ et $c(x,y) = y$, qui entraîne :

$$D(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)\,c(x,y) = -y ;$$

on en conclut :

- si $y < 0$, l'équation est du type hyperbolique,
- si $y > 0$, l'équation est du type elliptique.

1°) Envisageons en premier lieu le cas où $y < 0$. Puisque $a(x,y) = 1$, les courbes caractéristiques sont déterminées par :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = 0,$$

soit : $\dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-y}$, qui s'intègre et donne : $2\sqrt{-y} \pm x = C^{te}$,

on reconnaît des paraboles.

On utilise le changement de variables :

$$X = x + 2\sqrt{-y}, \qquad Y = x - 2\sqrt{-y},$$

on vérifie aisément que le jacobien :

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial X}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{-1}{\sqrt{-y}} \\ 1 & \dfrac{1}{\sqrt{-y}} \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{-y}} \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ y < 0 ;$$

il vient alors puisque :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{-y}}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial x} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{-y}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y},$$

puis :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2},$$

d'autre part :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{-y}}\left(-\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y}\right),$$

enfin :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2(-y)^{3/2}}\left(-\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y}\right) + \frac{1}{\sqrt{-y}}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\frac{\partial Y}{\partial y}\right),$$

soit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2(-y)^{3/2}}\left(-\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y}\right) - \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right),$$

En remplaçant dans l'équation initiale, on trouve :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \frac{y}{2(-y)^{3/2}}\left(-\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0,$$

or, on note que : $\dfrac{y}{2(-y)^{3/2}} = \dfrac{y}{2|-y|\sqrt{-y}} = \dfrac{-1}{2\sqrt{-y}}$,

puisque : $|-y| = -y$, car $y < 0$; il reste donc :

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} - \frac{1}{2\sqrt{-y}}\left(-\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y}\right) = 0,$$

mais on déduit aussi du changement de variables : $X - Y = 4\sqrt{-y}$, on en conclut que la forme standard pour $y < 0$, de l'équation proposée est :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} = \frac{1}{2(X-Y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y}\right),$$

qui est bien du type donné dans le rappel de cours.

2°) Travaillons maintenant pour $y > 0$. Puisque $a(x,y) = 1$, les courbes caractéristiques sont encore déterminées par :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = 0; \qquad \text{ou :} \quad \frac{dy}{dx} = \pm i\sqrt{y},$$

qui s'intègre et donne : $x \pm 2i\sqrt{y} = C^{te}$; on utilise donc le changement de variables $x + 2i\sqrt{y} = X + iY$, $x - 2i\sqrt{y} = X - iY$, donc : $X = x$, $Y = 2\sqrt{y}$, on vérifie que :

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{y}} \neq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ y > 0;$$

puisque :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}},$$

on trouve sans difficulté :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial u}{\partial Y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{2y^{3/2}}\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}$$

on en conclut que la forme standard, pour $y > 0$, de l'équation proposée est :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\partial u}{\partial Y}, \qquad \text{soit enfin} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = \frac{1}{Y}\frac{\partial u}{\partial Y},$$

qui est bien du type donné dans le rappel de cours.

5.1.3. – Nous avons maintenant :

$$a(x,y) = \sin^2 x, \quad b(x,y) = -y\sin x \quad \text{et} \quad c(x,y) = y^2,$$

ce qui donne : $D(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)\,c(x,y) = 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'équation est du type parabolique.

Puisque $a(x,y) = \sin^2 x$, les courbes caractéristiques sont déterminées par :

$$\sin^2 x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y\sin x\frac{dy}{dx} + y^2 = 0, \qquad \text{ou :} \quad \left(\sin x\frac{dy}{dx} + y\right)^2 = 0,$$

que l'on écrit aussi : $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{\sin x}$,

qui s'intègre aisément et donne : $y\tan\dfrac{x}{2} = C^{te}$.

On utilise, par exemple, le changement de variables : $X = x$, $Y = y\tan\dfrac{x}{2}$, on vérifie que le jacobien :

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{y}{2\cos^2\frac{x}{2}} & \tan\dfrac{x}{2} \end{vmatrix} = \tan\frac{x}{2},$$

n'est pas identiquement nul; il vient alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{y}{2}\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial Y},$$

puis :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + y\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} + \frac{y^2}{4}\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \frac{y}{2}\tan\frac{x}{2}\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial Y},$$

d'autre part : $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \tan\dfrac{x}{2}\dfrac{\partial u}{\partial Y}$,

qui donne :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \tan\frac{x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} + \frac{y}{2}\tan\frac{x}{2}\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial Y},$$

enfin : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \tan^2\dfrac{x}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial Y^2}$.

En remplaçant dans l'équation initiale, on trouve :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = \frac{y}{\sin x}\frac{\partial u}{\partial Y}, \qquad \text{soit :} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = \frac{Y}{1 - \cos X}\frac{\partial u}{\partial Y},$$

qui est bien du type donné dans le rappel de cours.

– ***Remarque :*** Des calculs analogues à ceux conduits ci-dessus montrent que si on choisit le changement de variables : $X = y\tan\dfrac{x}{2}$, $Y = y$,

l'équation initiale devient : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = \dfrac{2X}{X^2 + Y^2}\dfrac{\partial u}{\partial X}$.

5.2.1. – Ici, il vient : $a(x,y) = y^3$, $b(x,y) = 0$ et $c(x,y) = -y$, on trouve alors :

$$D(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)\,c(x,y) = y^4,$$

l'équation est du type hyperbolique.

Puisque $a(x,y)$ n'est pas identiquement nul, les courbes caractéristiques sont déterminées par :

$$y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y = 0, \qquad \text{ou :} \quad y\frac{dy}{dx} = \pm 1,$$

qui s'intègre et donne : $\dfrac{1}{2}y^2 \pm x = C^{te}$, les caractéristiques sont des paraboles.

On choisit le changement de variables : $X = \dfrac{1}{2}y^2 - x$, $Y = \dfrac{1}{2}y^2 + x$,

On vérifie que le jacobien : $J(x,y) = -2y$ n'est pas identiquement nul. Il apparaît alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = y\left(\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y}\right),$$

et : $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y} + y^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right);$$

en remplaçant dans l'équation initiale, il vient la forme standard : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} = 0$, dont l'intégrale générale est $u = f(X) + g(Y)$, f et g étant deux fonctions arbitraires.
En revenant aux variables initiales, on obtient la solution générale de l'équation envisagée

$$u(x,y) = f\left(\frac{1}{2}y^2 - x\right) + g\left(\frac{1}{2}y^2 + x\right),$$

f et g étant deux fonctions arbitraires.

5.2.2. – Dans cet exercice, il apparaît :

$$a(x,y) = x^2, \quad b(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad c(x,y) = -y^2,$$

on obtient alors : $D(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)\,c(x,y) = x^2y^2$,
l'équation est du type hyperbolique.
Puisque $a(x,y) = x^2$, les courbes caractéristiques sont définies par :

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y^2 = 0, \qquad \text{soit aussi : } \frac{dy}{y} = \pm\frac{dx}{x},$$

dont l'intégration donne : $\dfrac{y}{x} = C_1$, $xy = C_2$, $C_1, C_2 = C^{tes}$.

On choisit le changement de variables : $X = \dfrac{y}{x}$, $Y = xy$,

on constate facilement que le jacobien : $J(x,y) = -2\dfrac{y}{x}$, n'est pas identiquement nul .

Des calculs simples donnent : $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial u}{\partial X} + y\dfrac{\partial u}{\partial Y}$,

puis : $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - 2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2},$$

d'autre part : $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial X} + x\frac{\partial u}{\partial Y},$$

enfin : $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2};$$

en remplaçant dans l'équation initiale, il vient la forme standard :

$$2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} - \frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial X} = 0,$$

on note que du changement de variables utilisé, on a : $y^2 = XY$, qui donne la forme standard :

$$2Y\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} - \frac{\partial u}{\partial X} = 0.$$

Posons : $\dfrac{\partial u}{\partial X} = Z$, l'équation précédente devient : $2Y\dfrac{\partial Z}{\partial Y} - Z = 0$,

on lui associe l'équation différentielle : $2Y\dfrac{dZ}{dY} - Z = 0$, qui s'écrit aussi : $\dfrac{dZ}{Z} = \dfrac{1}{2}\dfrac{dY}{Y}$,

on en déduit : $Z = C\sqrt{|Y|}$, C étant une constante par rapport à Y, on écrit alors :
$Z = \sqrt{|Y|}\,h(X)$, h étant une fonction arbitraire.

Il apparaît alors : $\dfrac{\partial u}{\partial X} = \sqrt{|Y|}\,h(X)$, dont la solution générale est :

$u = \sqrt{|Y|}\,f(X) + g(Y)$, f et g étant deux fonctions arbitraires.

Revenant aux variables x et y, on obtient la solution générale de l'équation considérée :

$$u(x,y) = \sqrt{|xy|}\,f\left(\frac{y}{x}\right) + g(xy),$$

f et g étant deux fonctions arbitraires .

5.2.3. – Maintenant, on obtient : $a(x,y) = 1$, $b(x,y) = 0$ et $c(x,y) = -4x^2$,
il en découle :

$$D(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)\,c(x,y) = 4x^2,$$

l'équation est du type hyperbolique.
Puisque $a(x,y) = 1$, les courbes caractéristiques sont définies par :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4x^2 = 0, \qquad \text{c'est-à-dire : } \frac{dy}{dx} = \pm 2x,$$

on en déduit que les caractéristiques sont les paraboles d'équations :

$$y + x^2 = C_1 \quad \text{et} \quad y - x^2 = C_2, \quad C_1, C_2 = C^{tes}.$$

On choisit le changement de variables : $X = x^2 + y$, $Y = x^2 - y$, on vérifie aisément que le jacobien : $J(x,y) = -4x$, n'est pas identiquement nul.
Des calculs classiques donnent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\left(\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y}\right), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y}\right) + 4x^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Y}, \qquad \text{enfin : } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2};$$

en remplaçant dans l'équation initiale, on obtient la forme standard : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} = 0$,

dont la solution générale s'écrit : $u = f5x) + g(Y)$, f et g fonctions arbitraires.

En conclusion, la solution générale de l'équation envisagée est en utilisant le changement de variables :

$$u(x,y) = f(x^2 + y) + g(x^2 - y),$$

f et g étant deux fonctions arbitraires.

5.3.1. – Ici, nous avons : $a(x,y) = 1$, $b(x,y) = 1$ et $c(x,y) = 1$, on en déduit :

$$D(x,y) = b^2(x,y) - \alpha(x,y)\,c(x,y) = 0,$$

l'équation est du type parabolique.
Puisque $a(x,y) = 1$, les courbes caractéristiques sont définies par :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0,$$

soit : $\left(\frac{dy}{dx} - 1\right)^2 = 0$, ou : $\frac{dy}{dx} = 1$;

nous n'avons qu'une seule famille de caractéristiques ici, ce sont les droites d'équations:

$$y - x = C_1, \quad C_1 = C^{te}.$$

On choisit arbitrairement le changement de variables : $X = x$ et $Y = x - y$.
On constate bien que le jacobien : $J(x,y) = -1$, n'est pas identiquement nul.
Des calculs simples donnent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial Y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2};$$

en remplaçant dans l'équation initiale, il apparaît la forme réduite : $\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = 0$.

On en tire :

$$\frac{\partial u}{\partial X} = f(Y), \quad f \text{ fonction arbitraire,} \quad \text{et :}$$

$$u = X f(Y) + g(Y), \quad f \text{ et } g \text{ étant deux fonctions arbitraires.}$$

En revenant aux variables initiales, il apparaît que la solution générale de l' équation envisagée est :

$$(1) \quad \begin{cases} u(x,y) = x f(x-y) + g(x-y), \\ f \text{ et } g \text{ étant deux fonctions arbitraires.} \end{cases}$$

– ***Remarque :*** Si on avait choisi le changement de variables : $X = x - y$ et $Y = y$, par exemple, on aurait obtenu l'équation réduite :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0, \quad \text{dont la solution générale est :} \quad u = y\,h(X) + k(X),$$

h et k étant deux fonctions arbitraires; la solution générale de l'équation initiale s'écrit alors : $u(x,y) = y\,h(x-y) + k(x-y)$,
h et k étant deux fonctions arbitraires.
Afin de retrouver le résultat (1), il faut poser :

$$k(X) = X f(X) + g(X) \quad \text{et} \quad h(X) = f(X),$$

il en résulte :

$$u(x,y) = y f(x-y) + (x-y) f(x-y) + g(x-y), \quad \text{soit :}$$
$$u(x,y) = x f(x-y) + g(x-y).$$

5.3.2. – Ici, nous avons : $a(x,y) = x^2$, $b(x,y) = xy$ et $c(x,y) = y^2$, il en résulte :

$$D(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)\,c(x,y) = x^2y^2 - x^2y^2 = 0,$$

l'équation est du type parabolique.
Puisque $a(x,y) = x^2$, les courbes caractéristiques sont données par :

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0,$$

soit aussi : $\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^2 = 0$, c'est-à-dire : $x\frac{dy}{dx} - y = 0$,

on en conclut que les caractéristiques sont les droites d'équation : $y = Cx$, $C = C^{te}$.

On choisit, arbitrairement, le changement de variables : $X = x$ et $Y = \frac{y}{x}$,

le jacobien : $J(x,y) = \frac{1}{x}$, n'est pas identiquement nul.

Sans difficulté, on obtient par des calculs classiques :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial Y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \frac{2y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} = \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial Y} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial Y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2};$$

en remplaçant dans l'équation initiale, on trouve : $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = x^2y^2$,

soit la forme standard : $\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = X^2Y^2$.

On en déduit : $\frac{\partial u}{\partial X} = \frac{X^3}{3}Y^2 + f(Y)$, f fonction arbitraire, qui s'intègre et donne :

$$u = \frac{X^4}{12}Y^2 + X f(Y) + g(Y), \quad f \text{ et } g \text{ étant deux fonctions arbitraires.}$$

En revenant aux variables initiales, on obtient la solution générale de l'équation considérée

$$u(x,y) = \frac{1}{12}x^2y^2 + x f\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right),$$

f et g étant deux fonctions arbitraires.

5.3.3. – Maintenant, on note que : $a(x,y) = 1$, $b(x,y) = -y$ et $c(x,y) = y^2$, ce qui entraîne :

$$D(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)\,c(x,y) = y^2 - y^2 = 0,$$

l'équation est du type parabolique.

Par exemple, puisque a (x,y) = 1, les courbes caractéristiques sont déterminées par l'équation :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y\,\frac{dy}{dx} + y^2 = 0,$$

ou : $\left(\frac{dy}{dx} + y\right)^2 = 0$, donc : $\frac{dy}{y} = -dx$,

il en découle que les courbes caractéristiques appartiennent à la famille d'exponentielles

$$y = C\,e^{-x}, \qquad C = C^{te}.$$

Arbitrairement, on choisit le changement de variables : $X = ye^x$ et $Y = y$, on vérifie que le jacobien : $J(x,y) = ye^x$, n'est pas identiquement nul.
Par des calculs simples, on trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ye^x\,\frac{\partial u}{\partial X}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = ye^x\,\frac{\partial u}{\partial X} + y^2 e^{2x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial X^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^x\,\frac{\partial u}{\partial X} + ye^{2x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + ye^x\,\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = e^x\,\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y},$$

enfin :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{2x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2\,e^x\,\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2};$$

en remplaçant dans l'équation initiale, on trouve : $y\,\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \frac{\partial u}{\partial Y} = 0$,

on a donc la forme standard : $Y\,\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \frac{\partial u}{\partial Y} = 0$.

Afin d'intégrer cette équation, on remarque qu'elle s'écrit aussi : $\frac{\partial}{\partial Y}\left(Y\,\frac{\partial u}{\partial Y}\right) = 0$,

qui entraîne : $Y\,\frac{\partial u}{\partial Y} = f(X)$, f étant une fonction arbitraire ;

soit encore : $\frac{\partial u}{\partial Y} = \frac{1}{Y}\,f(X)$, qui s'intègre aisément et donne :

$$u = (\ln|Y|)\,f(X) + g(X), \quad f \text{ et } g \text{ étant deux fonctions arbitraires.}$$

En revenant aux variables x et y, il apparaît que la solution générale de l'équation considérée est :

$$u(x,y) = (\ln|y|)\,f(ye^x) + g(ye^x),$$

f et g étant deux fonctions arbitraires.

5.4.1. – Dans cet exercice, on a : $a(x,y) = 1 + x^2$, $b(x,y) = 0$ et $c(x,y) = 1 + y^2$, il en résulte :

$$D(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)\,c(x,y) = -(1+x^2)(1+y^2) < 0,$$

l'équation envisagée est du type elliptique.
Puisque $a(x,y) = 1 + x^2$, les courbes caractéristiques sont définies par l'équation :

$$(1+x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 + y^2 = 0, \qquad \text{ou :} \quad \frac{i\,dy}{\sqrt{1+y^2}} = \pm\,\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

dont l'intégrale générale est :

$$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \pm i\ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) = C, \qquad C = C^{te}.$$

Compte-tenu du rappel de cours, on pose :

$$X = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \text{ et } Y = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right),$$

le jacobien : $J(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+y^2}}$, n'est pas identiquement nul.

On obtient alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\frac{\partial u}{\partial X}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-x}{(1+x^2)^{3/2}}\,\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{1+x^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial X^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,\frac{\partial u}{\partial Y}, \qquad \text{enfin :} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-y}{(1+y^2)^{3/2}}\,\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{1}{1+y^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2};$$

en remplaçant dans l'équation initiale, on trouve : $\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0$,

on reconnaît l'équation de LAPLACE dans $\mathbb{R}^2$.

– *Remarque :* Utilisons le changement de variables :

$$X_1 = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + i\ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) = X + iY,$$

$$Y_1 = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - i\ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) = X - iY,$$

on en déduit :

$$\frac{\partial X_1}{\partial X} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{\partial X_1}{\partial y} = \frac{i}{\sqrt{1+y^2}}, \quad \frac{\partial Y_1}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Y_1}{\partial y} = \frac{-i}{\sqrt{1+y^2}},$$

ce qui entraîne : $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial Y_1}\right)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-x}{(1+x^2)^{3/2}}\left(\frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial Y_1}\right) + \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial Y_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{i}{\sqrt{1+y^2}}\left(\frac{\partial u}{\partial X_1} - \frac{\partial u}{\partial Y_1}\right),$$

enfin :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-iy}{(1+y^2)^{3/2}}\left(\frac{\partial u}{\partial X_1} - \frac{\partial u}{\partial Y_1}\right) - \frac{1}{1+y^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} - 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial Y_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2}\right);$$

en remplaçant dans l'équation initiale, il reste : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial Y_1} = 0$, dont la solution générale est : $u = f(X_1) + g(Y_1)$, f et g étant deux fonctions arbitraires. En revenant aux variables initiales, il apparaît que la solution générale de l'équation envisagée est :

$$u(x,y) = f\{\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + i\ln(y+\sqrt{1+y^2})\} + g\{\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - i\ln(y+\sqrt{1+y^2})\}$$

f et g étant deux fonctions arbitraires.

5.4.2. – Ici, il vient : $a(x,y) = 4x$, $b(x,y) = 0$ et $c(x,y) = x$, qui entraîne :

$$D(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)\,c(x,y) = -4x^2,$$

l'équation envisagée est du type elliptique.
Etant donné que $a(x,y) = 4x$, les courbes caractéristiques sont définies par :

$$4x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x = 0, \qquad \text{ou : } \frac{dy}{dx} = \pm\frac{i}{2},$$

dont l'intégrale générale est : $x \pm 2iy = C$, $C = C^{te}$.
On envisage donc en premier lieu le changement de variables : $X = x$ et $Y = 2y$, le jacobien : $J(x,y) = 2$ n'est pas identiquement nul. On trouve facilement :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2\frac{\partial u}{\partial Y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2};$$

en remplaçant dans l'équation envisagée, on obtient la forme standard de cette équation:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = -\frac{2}{X}\frac{\partial u}{\partial X}.$$

– ***Remarque :*** utilisons le changement de variables : $X_1 = x + 2iy$ et $Y_1 = x - 2iy$, on en tire :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial Y_1}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial Y_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2i\left(\frac{\partial u}{\partial X_1} - \frac{\partial u}{\partial Y_1}\right), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial Y_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2}\right);$$

en remplaçant dans l'équation initiale, il apparaît :

$$16x\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial Y_1} + 8\left(\frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial Y_1}\right) = 0,$$

soit, enfin :

$$(1) \qquad (X_1 + Y_1)\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial Y_1} + \frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial Y_1} = 0;$$

on remarque que :

$$X_1\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial Y_1} + \frac{\partial u}{\partial Y_1} = \frac{\partial}{\partial X_1}\left(X_1\frac{\partial u}{\partial Y_1}\right) = \frac{\partial}{\partial X_1}\left\{\frac{\partial}{\partial Y_1}(X_1 u)\right\},$$

$$\text{et :} \qquad Y_1\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial Y_1} + \frac{\partial u}{\partial X_1} = \frac{\partial}{\partial Y_1}\left(Y_1\frac{\partial u}{\partial X_1}\right) = \frac{\partial}{\partial Y_1}\left\{\frac{\partial}{\partial X_1}(Y_1 u)\right\},$$

l'équation réduite (1) s'écrit aussi : $\dfrac{\partial^2}{\partial X_1 \partial Y_1}\{(X_1 + Y_1)u\} = 0$,
dont la solution générale est :

$$(X_1 + Y_1)u = f(X_1) + g(Y_1), \quad \text{f et g étant deux fonctions arbitraires.}$$

En revenant aux variables initiales x et y, il apparaît que la solution générale de l'équation envisagée est : $u(x,y) = \dfrac{1}{2x}\{f(x+2iy) + g(x-2iy)\}$,
f et g étant deux fonctions arbitraires.

5.4.3. – Nous avons dans cet exercice : $a(x,y) = 1$, $b(x,y) = 1$ et $c(x,y) = 2$, qui entraîne :

$$D(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)\,c(x,y) = 1 - 2 = -1 < 0,$$

l'équation envisagée est du type elliptique.
Puisque $a(x,y) = 1$, les courbes caractéristiques sont déterminées par :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} + 2 = 0, \qquad \text{ou : } \frac{dy}{dx} = 1 \pm i,$$

qui s'intègre et donne : $(1+i)x - y = C_1$, $(1-i)x - y = C_2$, $C_1, C_2 = C^{tes}$.
Travaillons en premier lieu avec le changement de variables : $X = x - y$ et $Y = x$, le jacobien : $J(x,y) = 1$ n'est pas identiquement nul. On obtient sans difficulté :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial X} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2};$$

en remplaçant dans l'équation envisagée, on obtient la forme standard :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = -4X\frac{\partial u}{\partial X} - 4Y\frac{\partial u}{\partial Y} - 4(X^2 + Y^2 + 1)u.$$

– ***Remarque :*** utilisons le changement de variables :

$$X_1 = (1+i)x - y \quad \text{et} \quad Y_1 = (1-i)x - y,$$

on en déduit :

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} = (1+i), \quad \frac{\partial X_1}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial Y_1}{\partial x} = (1-i) \quad \text{et} \quad \frac{\partial Y_1}{\partial y} = -1,$$

ce qui veut :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (1+i)\frac{\partial u}{\partial X_1} + (1-i)\frac{\partial u}{\partial Y_1}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2i\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial Y_1} - 2i\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = -(1+i)\frac{\partial^2 u}{\partial X_1{}^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial Y_1} - (1-i)\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1{}^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial X_1} - \frac{\partial u}{\partial Y_1},$$

enfin :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X_1{}^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial Y_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1{}^2};$$

en remplaçant dans l'équation initiale des calculs simples donnent :

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial Y_1} + X_1 \frac{\partial u}{\partial X_1} + Y_1 \frac{\partial u}{\partial Y_1} + (X_1 Y_1 + 1) u = 0.$$

On sait que si on envisage la fonction : $Z = e^{X_1 Y_1} u$, on a :

$$\frac{\partial Z}{\partial X_1} = e^{X_1 Y_1}\left(Y_1 u + \frac{\partial u}{\partial X_1}\right),$$

puis :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X_1 \partial Y_1} = e^{X_1 Y_1}\left(X_1 Y_1 u + X_1 \frac{\partial u}{\partial X_1} + u + Y_1 \frac{\partial u}{\partial Y_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial Y_1}\right),$$

en utilisant l'équation (1), il apparaît que : $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X_1 \partial Y_1} = 0$,

on en déduit : $Z = f(X_1) + g(Y_1)$, f et g étant deux fonctions arbitraires; il en résulte que la solution générale de l'équation (1) est :

$$u = e^{-X_1 Y_1}\{ f(X_1) + g(Y_1) \},$$

en revenant aux variables initiales x et y, ces calculs montrent que la solution générale de l'équation donnée dans le texte est :

$$u(x,y) = e^{-[(x-y)^2 + x^2]}\{ f[(1+i)x - y] + g[(1-i)x - y] \},$$

f et g étant deux fonctions arbitraires.

– On note aussi que les nouvelles variables introduites X, Y et X_1, Y_1 sont liées entre elles par les relations : $X_1 = X + iY$ et $Y_1 = X - iY$,
on en conclut que l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = -4X\frac{\partial u}{\partial X} - 4Y\frac{\partial u}{\partial Y} - 4(X^2 + Y^2 + 1)u,$$

a pour solution générale :

$$u = e^{-(X^2+Y^2)}\{ f(X+iY) + g(X-iY) \},$$

f et g étant deux fonctions arbitraires.

Evidemment, on a des conclusions analogues pour les deux exercices précédents.

5.5.1. – Nous avons ici : $a(x,y) = 1$, $b(x,y) = 0$ et $c(x,y) = y$, ce qui donne :

$$D(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)\,c(x,y) = -y;$$

on en conclut que l'équation aux dérivées partielles envisagée est du type hyperbolique si $y < 0$ et du type elliptique si $y > 0$.

1°) Travaillons en premier lieu pour $y < 0$. Puisque $a(x,y) = 1$, les courbes caractéristiques sont données par l'équation :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = 0, \qquad \text{ou :} \quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-y}, \qquad (y<0),$$

qui s'intègre et donne : $2\sqrt{-y} \pm x = C^{te}$.

On choisit le changement de variables : $X = x + 2\sqrt{-y}$ et $Y = x - 2\sqrt{-y}$,

le jacobien : $J(x,y) = \dfrac{2}{\sqrt{-y}}$, n'est pas identiquement nul.

On trouve facilement les résultats

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{\sqrt{-y}}\left(\frac{\partial u}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Y}\right),$$

et :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-1}{2(-y)^{3/2}}\left(\frac{\partial u}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Y}\right) - \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right);$$

en remplaçant dans l'équation initiale, on obtient la forme standard : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = 0$,

dont la solution générale s'écrit : $u = f(X) + g(Y)$, f et g étant deux fonctions arbitraires; par suite, la solution générale de l'équation envisagée, pour $y < 0$, est :

$$u(x,y) = f(x + 2\sqrt{-y}) + g(x - 2\sqrt{-y}), \qquad y < 0,$$

f et g étant deux fonctions arbitraires.

2°) Envisageons maintenant $y > 0$; l'équation définissant les caractéristiques est encore:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = 0, \qquad \text{ou :} \quad \frac{dy}{dx} = \pm i\sqrt{y}, \quad (y > 0),$$

qui s'intègre et donne : $x \pm 2i\sqrt{y} = C^{te}$.

– On choisit le changement de variables : $X = x$ et $Y = 2\sqrt{y}$,

le jacobien : $J(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$, n'est pas identiquement nul.

On trouve facilement :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial u}{\partial Y} \qquad \text{et}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{2y^{3/2}}\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2};$$

l'équation prend la forme standard : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0$,

sa solution générale est, ainsi que nous l'avons vu : $u = f(X+iY) + g(X-iY)$,
f et g étant deux fonctions arbitraires.
En revenant aux variables initiales, il apparaît que, pour $y > 0$, la solution générale de l'équation envisagée s'écrit :

$$u(x,y) = f(x + 2i\sqrt{y}) + g(x - 2i\sqrt{y}),$$

f et g étant deux fonctions arbitraires.

– ***Remarque :***

si on envisage le changement de variables : $X_1 = x + 2i\sqrt{y}$, $Y_1 = x - 2i\sqrt{y}$, des calculs simples, analogues à ceux conduits au 1°) conduisent à la forme standard :

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial Y_1} = 0$, c'est le même résultat que celui obtenu au 1°).

La solution générale de cette équation est : $u = f(X_1) + g(Y_1)$,
f et g étant deux fonctions arbitraires; ce qui redonne le résultat obtenu au 2°).

5.5.2. – Dans cet exercice, on a : $a(x,y) = \dfrac{y}{|y|}$, $b(x,y) = 1$ et $c(x,y) = 1$, ce qui fixe :

$$D(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)\,c(x,y) = 1 - \frac{y}{|y|};$$

il en résulte que l'équation aux dérivées partielles envisagée est du type hyperbolique si $y < 0$ et du type parabolique si $y > 0$.

1°) Travaillons d'abord pour $y < 0$. Il en découle que $a(x,y) = -1$
les courbes caractéristiques sont déterminées par l'équation :

$$-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} + 1 = 0, \qquad \text{soit aussi :} \quad \frac{dy}{dx} = -(1 \pm \sqrt{2}),$$

qui s'intègrent et donnent :

$$x + (\sqrt{2} - 1)\,y = C_1, \quad x - (\sqrt{2} + 1)\,y = C_2, \quad C_1, C_2 = C^{tes}.$$

On se fixe le changement de variables : $X = x + (\sqrt{2} - 1)\,y$ et $Y = x - (\sqrt{2} + 1)\,y$,

le jacobien : $J(x,y) = -2\sqrt{2}$, n'est pas identiquement nul.

On trouve aisément les résultats :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = (\sqrt{2} - 1)\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} - (\sqrt{2} + 1)\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (\sqrt{2} - 1)\frac{\partial u}{\partial X} - (\sqrt{2} + 1)\frac{\partial u}{\partial Y},$$

et : $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\sqrt{2} - 1)^2\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + (\sqrt{2} + 1)^2\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2};$$

en remplaçant dans l'équation initiale, on obtient l'équation sous forme standard :

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = 0$, dont la solution générale s'écrit : $u = f(X) + g(Y)$, f et g étant deux fonctions arbitraires ; il en découle que la solution générale de l'équation envisagée, pour $y < 0$, est : $u(x,y) = f[x + (\sqrt{2} - 1)\,y] + g[x - (\sqrt{2} + 1)\,y]$, f et g étant deux fonctions arbitraires.

2°) Envisageons maintenant le cas $y > 0$, l'équation définissant les caractéristiques s'écrit dans cette situation :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} + 1 = 0, \qquad \text{ou :} \quad \left(\frac{dy}{dx} - 1\right)^2 = 0,$$

nous n'avons, comme prévu, qu'une seule famille de caractéristiques, ce sont les droites d'équations : $y - x = C^{te}$.
On choisit, arbitrairement le changement de variables : $X = x$ et $Y = x - y$,
le jacobien : $J(x,y) = -1$, n'est pas identiquement nul. On obtient sans difficulté :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial Y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}.$$

l'équation prend la forme standard : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial X^2} = 0$, dont l'intégrale générale est :

$u = X f(Y) + g(Y)$, f et g étant deux fonctions arbitraires.
En revenant aux variables initiales, il apparaît que pour $y > 0$, l'équation aux dérivées partielles envisagée a pour solution générale :

$U(x,y) = x f(x - y) + g(x - y)$, f et g étant deux fonctions arbitraires.

5.6. – Rappelons la classification des équations aux dérivées partielles à n variables ($n \in \mathbb{N}^*$) indépendantes x_j ($j = 1$ à n) ; les équations étant ramenées sous la forme standard, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^{\,2}} = F\left(u, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right), \qquad \text{type elliptique ;}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\,2}} = \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^{\,2}} + F\left(x_1, \ldots x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial u}{\partial x_n}\right), \qquad \text{type hyperbolique ;}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

type "ultra" hyperbolique, $1 < m < n$;

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\pm \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) = F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

type parabolique, $0 < m < n$;

L'équation aux dérivées partielles envisagée :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

étant à coefficients constants, on lui associe la forme quadratique :

$$\Phi(X, Y, Z) = X^2 - 4XY + 2XZ + 4Y^2 + Z^2,$$

à laquelle est liée la matrice symétrique à éléments réels :

$$(1) \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ étant rapporté à la base $(\vec{e}) = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, on va déterminer une autre base $(\vec{w}) = (\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3})$, de $\mathbb{R}^3$, formée par les vecteurs $\vec{w_1}$, $\vec{w_2}$ et $\vec{w_3}$, "conjugués deux à deux pour la forme quadratique Φ" introduite ci-dessus, c'est-à-dire satisfaisant les relations, φ étant la forme polaire associée à Φ:

$\Phi(\vec{w_j}) \neq 0$, $\varphi(\vec{w_1}, \vec{w_2}) = 0$, $\varphi(\vec{w_1}, \vec{w_3}) = 0$, $\varphi(\vec{w_2}, \vec{w_3}) = 0$.

On se fixe arbitrairement : $\vec{w_1} = \vec{e_1}$, puis on pose : $\vec{w_2} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$, ce qui entraîne :

$$\varphi(\vec{w_1}, \vec{w_2}) = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1 - 2a_2 + a_3 = Q,$$

on choisit, par exemple, arbitrairement : $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 1$;
on contrôle que :

$$\Phi(\vec{w_2}) = \varphi(\vec{w_2}, \vec{w_2}) = [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \neq 0,$$

et on pose : $\vec{w_3} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3}$, on forme :

$$\varphi(\vec{w_1}, \vec{w_3}) = b_1 - 2b_2 + b_3 = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(\vec{w_2}, \vec{w_3}) = 2(b_2 + b_3) = 0,$$

on choisit arbitrairement : $b_2 = 1$, $b_3 = -1$, donc : $b_1 = 3$,

il en résulte : $\vec{w_3} = 3\vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3}$,

on contrôle que : $\Phi(\vec{w_3}) = \varphi(\vec{w_3}, \vec{w_3}) = -4 \neq 0$.

Il vient donc la matrice de passage : $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,

qui donne le changement de variables : $V_1 = {}^tPV$, soit : $\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = x + y + z, \\ z_1 = 3x + y - z; \end{cases}$

on en déduit :

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial x_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y_1}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial y_1}{\partial z} = 1,$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = 3, \quad \frac{\partial z_1}{\partial y} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial z_1}{\partial z} = 1.$$

Il en résulte : $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u}{\partial y_1} + 3\dfrac{\partial u}{\partial z_1}$, et par des calculs simples :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_1} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial z_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial z_1} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial z_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial z_1} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_1} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial z_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial z_1} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial z_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial z_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2};$$

en remplaçant dans l'équation initiale, on obtient la forme standard :

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} = 0,$$

effectuant encore le changement de variables : $x_1 = x_2$, $y_1 = 2y_2$ et $z_1 = 2z_2$, il apparaît :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z_2^2} = 0,$$

l'équation est du type hyperbolique.

– ***Remarque 1 :***
En écrivant sous forme matricielle (puisque l'équation initiale est à coefficents constants) :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z_1} \end{bmatrix},$$

soit, sous forme condensée : $\dfrac{\partial u}{\partial V} = P \dfrac{\partial u}{\partial V_1}$ qui permet d'écrire : $\dfrac{\partial}{\partial V} = P \dfrac{\partial}{\partial V_1}$;

on note que l'équation initiale s'écrit aussi : $\left({}^t\left(\dfrac{\partial}{\partial V}\right) A \left(\dfrac{\partial}{\partial V}\right)\right)(u) = 0,$

soit sous forme matricielle : $\left({}^t\left(\dfrac{\partial}{\partial V_1}\right) {}^tPAP\left(\dfrac{\partial}{\partial V_1}\right)\right)(u) = 0,$

et on sait que :

$${}^tPAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

on retrouve l'équation (2) .

– Remarque 2 :
La classification de l'équation envisagée se fait aussi en travaillant avec les valeurs propres de la matrice A donnée par (1). On sait que A étant symétrique et à éléments réels, ses valeurs propres sont toutes réelles, et on a la classification :

– si $\lambda j > 0 \ \forall j$ ou $\lambda j < 0 \ \forall j$, on est du type elliptique,
– si au moins une valeur propre est de signe opposé au signe d'au moins une autre valeur propre, l'équation est du type hyperbolique ,
– si une valeur propre au moins est nulle, l'équation est du type parabolique.

Dans notre cas, on a de (1) :

$$\text{dét}(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda - 4 = 0;$$

un calcul machine simple, par exemple, donne les valeurs propres :

$$\lambda_1 = -0{,}5341, \quad \lambda_2 = 1{,}4827 \quad \text{et} \quad \lambda_3 = 5{,}0514,$$

l'équation est du type hyperbolique, ainsi qu'il a été vu antérieurement.

CHAPITRE 6

Méthode de séparation des variables

RAPPELS DE COURS

1. Problème régulier de STURM-LIOUVILLE .

Définition : Soit un intervalle fermé, borné [a,b] et sur celui-ci trois fonctions continues p, q et s, vérifiant $p > 0$, $s > 0$ et p de classe C^1.
Soit l'équation :

$$(1) \qquad \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{df}{dx}\right] + q(x)f(x) - \lambda s(x)f(x) = 0,$$

et les conditions aux frontières :

$$(2) \qquad \begin{cases} a_0 f(a) + a_1 f'(a) = 0, & |a_0| + |a_1| > 0, \\ b_0 f(b) + b_1 f'(b) = 0, & |b_0| + |b_1| > 0, \end{cases}$$

a_0, a_1, b_0 et b_1 étant des constantes réelles.

La recherche des nombres λ et des fonctions f non identiquement nulles solutions de (1) et vérifiant les conditions (2), s'appelle un problème régulier de STURM-LIOUVILLE.

Théorème : 1) Il existe une famille dénombrable de valeurs propres réelles et simples de λ : $|\lambda_0| < |\lambda_1| < \ldots < |\lambda_n| < \ldots$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} |\lambda_n| = \infty$, une fonction propre φ_n associée à λ_n vérifie :

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_n}{dx}\right] + q(x)\varphi_n(x) - \lambda_n s(x)\varphi_n(x) = 0,$$

2) La suite φ_n, $n \in \mathbb{N}$ est une base $L^2_S[a,b]$, φ_n a exactement n zéros sur]a,b[, $\varphi_n - 1$ a un zéro entre deux zéros consécutifs de φ_n.

3) Si la fonction φ satisfait les conditions aux limites (2) et est continue et si sa dérivée $\dfrac{d\varphi}{dx}$ est continue par morceaux alors :

$$\sum_{n=0}^{p} < \varphi , \varphi_n >_{L^2_S[a,b]} \varphi_n ,$$

converge dans $L^2_S\,[a,b]$, et aussi uniformément et absolument sur $[a,b]$:

$$\forall x \in [a,b] , \qquad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} < \varphi , \varphi_n >_{L^2_S[a,b]} \varphi_n(x) .$$

2. Problème périodique de STURM-LIOUVILLE .

Définition : Un problème de STURM-LIOUVILLE sur [a,b] est dit périodique si les coefficients de l'équation (1) vérifient en plus des conditions du théorème précédent, $p(a) = p(b)$ et si les conditions aux frontières sont du type :

$$(3) \quad \begin{cases} f(a) = f(b) , \\ \dfrac{df}{dx}(a) = \dfrac{df}{dx}(b) , \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} q(a) = q(b) , \\ s(a) = s(b) . \end{cases}$$

Le 1) du théorème précédent est modifié de la façon suivante : λ_0 est une valeur propre simple, mais λ_n, $n > 0$ peut être double.

3. Méthode de séparation des variables. Méthode pratique .

1) On cherche d'abord les solutions de (1) vérifiant (2), qui sont de la forme : $u(x,t) = X(x)\,T(t)$. Cela conduit à un problème de STURM-LIOUVILLE dont les solutions sont constituées par une suite $u_n(x,t) = X_n(x)\,T_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$ de fonctions vérifiant (1) et (2). En général X_n est complètement déterminée, mais T_n ne l'est pas.

2) Pour réaliser la condition initiale (si t désigne le temps), on utilise le fait que la suite X_n, $n \in \mathbb{N}$ est une base dans un espace L^2_S convenable. On suppose que f appartient à cet espace, et on développe cette fonction par rapport à cette base :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} C_n X_n(x) ,$$

par suite, T_n est déterminé par la relation : $T_n(0) = C_n$; la solution s'écrit alors :

$$u(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n(x)\,T_n(t) .$$

EXERCICES

6.1.1. – Résoudre le problème de STURM-LIOUVILLE :

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) + \lambda f(x) = 0 , \qquad \text{avec : } f(0) = 0 \ \text{ et } \ f(\pi) = 0 .$$

6.1.2. – Résoudre le problème de STURM-LIOUVILLE :

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) + \lambda f(x) = 0 , \qquad \text{avec : } f(0) = 0 \ \text{ et } \ \frac{df}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 .$$

6.1.3. – Résoudre le problème de STURM-LIOUVILLE :

$$\frac{d}{dx}\left(x^3 \frac{df}{dx}(x)\right) + \lambda x f(x) = 0 , \qquad \text{avec : } f(1) = 0 \ \text{ et } \ f(e) = 0 .$$

6.1.4. – Résoudre le problème de STURM-LIOUVILLE :

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) + \lambda f(x) = 0, \qquad \text{avec : } f(0) + \frac{df}{dx}(0) = 0 \ \text{ et } \ f(1) = 0 .$$

6.1.5. – Soit l'équation :

$$(1) \qquad x^4 \frac{d^2f}{dx^2}(x) + \lambda f(x) = 0 , \quad \text{avec } f(1) = 0 \ \text{ et } \ f(2) = 0.$$

1°) En effectuant le changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$ et le changement de fonction inconnue, $z = tf$, donner l'équation satisfaite par z et $\dfrac{d^2z}{dt^2}$ en déduire une base de $L^2_{\left[\frac{1}{2},1\right]}$.

2°) Vérifier que, $\forall\, n, m \in \mathbb{N}^*$, en posant : $f_n(x) = x\, z_n\left(\dfrac{1}{x}\right)$, on a :

$$< z_n(t) , z_m(t) >_{L^2_{\left[\frac{1}{2},1\right]}} = < f_n(x) , f_m(x) >_{L^2_{\left[\frac{1}{x^4};[1,2]\right]}} , \quad \text{et, si h vérifie :}$$

$$< h(x) , f_n(x) >_{L^2_{\left[\frac{1}{x^4},[1,2]\right]}} = 0 , \quad \text{cela entraîne } h = 0 \text{, presque partout.}$$

3°) Donner alors la solution de l'équation :

$$(2) \qquad x^4 \frac{d^2f}{dx^2}(x) + \lambda f(x) = \frac{1}{x} ,$$

qui satisfait les conditions aux limites : $f(1) = 0$ et $f(2) = 0$.

6.2.1. – Résoudre le problème périodique de STURM-LIOUVILLE :

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) + \lambda f(x) = 0, \qquad \text{avec : } f(0) = f(2\pi) \ \text{ et } \ \frac{df}{dx}(0) = \frac{df}{dx}(2\pi) .$$

6.2.2. – 1°) Résoudre le problème périodique de STURM-LIOUVILLE :

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) + \lambda f(x) = 0, \quad \text{avec : } f(-a) + f(a) = 0 \ \text{ et } \ \frac{df}{dx}(-a) + \frac{df}{dx}(a) = 0 ,$$

$a = C^{te} > 0$; donner une base orthonormée de $L^2[-a, a]$.

2°) Soit g une fonction donnée, n'appartenant pas à la base obtenue ci-dessus, donner le développement de g en série des fonctions propres.

6.2.3. – 1°) Résoudre le problème de STURM-LIOUVILLE :

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) + \lambda f(x) = 0 , \qquad \text{avec : } f(0) = 0 \ \text{ et } \ \frac{df}{dx}(\pi) = 0 ;$$

donner une base orthonormée de $L^2[0, \pi]$.

2°) Soient g_0 et g_1 les deux premiers éléments de la base orthonormée obtenue au 1°); donner la meilleure approximation en moyenne quadratique dans $L^2[0,\pi]$ de la fonction h définie par $h(x) = x^2$, par une fonction du type :
$w(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x)$, $a_0, a_1 = C^{tes}$.

6.3.1. – Soit l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \lambda u = 0,$$

$\lambda = C^{te} \in \mathbb{R}$, $0 < x < a$, $0 < t < b$, $a, b = C^{tes} \in \mathbb{R}$;
on impose : $u(0,t) = 0$, $u(a,t) = 0$, $0 \le t \le b$,
$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,b) = 0$, $0 \le x \le a$;
déterminer une solution élémentaire du problème en utilisant la méthode de séparation des variables.

6.3.2. – Soit l'équation aux dérivées partielles :

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu + \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

$a = C^{te} > 0$, $b = C^{te} > 0$, $0 < x < l$, l fini, $0 < t$,
avec les conditions aux limites non homogènes :

$u(0,t) = u_0 e^{-\alpha t}$, $u_0 = C^{te} > 0$, $\alpha = C^{te} > 0$, $t > 0$, et

$u(l,t) = u_0 e^{-\beta t}$, $\beta = C^{te} > 0$, $t > 0$;

puis satisfaisant la condition : $0 < x < l$, $\lim_{t \to +\infty} u(x,t) = 0$ si $a\pi^2 > bl^2$.

En donner une solution par la méthode de séparation des variables.

6.3.3. – 1°) Résoudre le problème de STURM-LIOUVILLE :

$$x^2 \frac{d^2X}{dx^2}(x) + 3x\frac{dX}{dx}(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad \lambda = C^{te},$$

avec : $X(1) = 0$ et $X(e) = 0$; donner une base orthonormée de $L_x^2[1,e]$.

2°) Résoudre par la méthode de séparation des variables l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3x\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad 1 < x < e, \quad t > 0.$$

avec les conditions aux limites : $u(1,t) = 0$, $u(e,t) = 0$, $t > 0$,
et les conditions initiales :

$u(x,0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f(x)$, f étant continue, $1 < x < e$.

On donnera des solutions élémentaires $u(x,t)$ bornées sur $\{1 < x < e,\ t > 0\}$.

SOLUTIONS

6.1.1. – Nous sommes en présence d'un problème régulier de STURM-LIOUVILLE, nous savons que les valeurs propres sont réelles.

– Déterminons, si cela est possible, le signe de λ ; multiplions les deux membres de l'équation initiale par f(x), et intégrons sur $[0,\pi]$, il vient :

$$\int_0^\pi f''(x) f(x)\,dx = -\lambda \int_0^\pi f^2(x)\,dx,$$

une intégration par parties du membre de gauche donne :

$$f'(x) f(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi f'^2(x)\,dx = -\lambda \int_0^\pi f^2(x)\,dx,$$

utilisant les conditions aux limites, il reste : $\lambda \int_0^\pi f^2(x)\,dx = \int_0^\pi f'^2(x)\,dx$.

On note qu'ici $f'(x)$ n'est pas identiquement nulle sur $]0,\pi[$, car s'il en était ainsi, f(x) serait constante sur cet intervalle et vaudrait par exemple f(0), donc serait identiquement nulle sur cet intervalle et par suite ne serait pas une fonction propre.

On en conclut que : $\lambda > 0$.

– On pose alors : $\lambda = a^2$, $a \in \mathbb{R}^*$;
l'équation envisagée s'écrit : $f''(x) + a^2 f(x) = 0$, sa solution générale est :
$f(x) = A\cos ax + B\sin ax$, $A, B = C^{tes}$;
marquons les conditions aux limites imposées : $f(0) = 0$ entraîne $A = 0$, et
$f(\pi) = 0$ donne $B\sin a\pi = 0$, f n'étant pas identiquement nulle, on a : $B \neq 0$,
on en tire : $a \in \mathbb{Z}^*$; il reste alors : $f_a(x) = B_a \sin ax$, $a \in \mathbb{Z}^*$.
On note que si on change a en $-a$, f_{-a} appartient à la même droite vectorielle que f_a, il en résulte que sans nuire à la généralité, on peut se limiter à : $a \in \mathbb{N}^*$.
En définitive, les valeurs propres $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, et les fonctions propres $f_n(x) = B_n \sin nx$, $n \in \mathbb{N}^*$, constituent la solution au problème envisagé.

6.1.2. – Ici encore, nous sommes en présence d'un problème régulier de STURM-LIOUVILLE, nous savons que les valeurs propres sont réelles, en opérant comme dans l'exercice précédent, il est aisé d'établir que l'on a : $\lambda > 0$.

– On pose alors : $\lambda = a^2$, $a \in \mathbb{R}^*$;
l'équation envisagée s'écrit : $f''(x) + a^2 f(x) = 0$, elle a pour solution générale :

$$f(x) = A\cos ax + B\sin ax, \quad A, B = C^{tes};$$

la condition aux limites : $f(0) = 0$ impose $A = 0$;

il en résulte : $\dfrac{df}{dx}(x) = aB\cos ax$,

l'autre condition aux limites $\dfrac{df}{dx}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, puisque $a \neq 0$, entraîne : $\cos a\dfrac{\pi}{2} = 0$,

ce qui veut : $a\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; on en déduit : $a = 2n+1$, $n \in \mathbb{Z}$,

ce qui impose : $f_n(x) = B_n \sin(2n+1)x$, $n \in \mathbb{Z}$, $B_n = C^{te}$.

En définitive, les valeurs propres du problème sont données par : $\lambda_n = (2n+1)^2, n \in \mathbb{Z}$,

et les fonctions propres : $f_n(x) = B_n \sin(2n+1)x$, $n \in \mathbb{N}$,

car on remarque que : $f_{-K}(x) = -B_{-K}\sin(2K-1)x$, $K \in \mathbb{N}^*$,

qui montre que f_{-K} appartient à la même droite vectorielle que : f_{2K-1}, $K \in \mathbb{N}^*$.

– On note que si on veut une base orthonormée de $L^2\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, il suffit d'écrire :

$$\int_0^{\pi/2} f_n^2(x)\,dx = 1, \quad \text{qui s'écrit en utilisant } f_n : \quad \int_0^{\pi/2} B_n^2 \sin^2(2n+1)x\,dx = 1,$$

ou : $\dfrac{B_n^2}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/2}[1 - \cos 2(2n+1)x]\,dx = 1$, qui donne $B_n^2 = \dfrac{4}{\pi}$,

on choisit par exemple : $f_n(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sin(2n+1)x$, $n \in \mathbb{N}$.

6.1.3. – Pour ce problème régulier de STURM-LIOUVILLE, il est facile de vérifier que les valeurs propres sont réelles et strictement positives.

– On écrit alors l'équation envisagée, sous la forme développée :

(1) $\quad x^2 f''(x) + 3x f'(x) + \lambda f(x) = 0$,

on reconnaît une équation d'EULER, effectuons le changement de variable :

$$x = e^t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x},$$

par suite, avec la convention de notation signalée du chapitre 5 :

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{x}\frac{df}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\frac{d^2f}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{df}{dt};$$

en remplaçant dans l'équation (1), on obtient l'équation à coefficients constants :

(2) $\quad \dfrac{d^2f}{dt^2} + 2\dfrac{df}{dt} + \lambda f = 0$.

On cherche de cette équation des solutions du type : $f(t) = e^{rt}$, il vient l'équation caractéristique :

(3) $\quad r^2 + 2r + \lambda = 0$.

Trois situations se présentent :

1°) Si $0 < \lambda < 1$, l'équation (3) admet les deux racines réelles :

$$r_1 = -1 - \sqrt{1-\lambda} \quad \text{et} \quad r_2 = -1 + \sqrt{1-\lambda},$$

la solution générale de l'équation (2) est alors :

$$f(t) = e^{-t}(A\,\mathrm{ch}\sqrt{1-\lambda}\,t + B\,\mathrm{sh}\sqrt{1-\lambda}\,t), \qquad A, B = C^{tes};$$

les conditions aux limites :

$$x = 1 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow f(t=0) = 0 \text{ donne } A = 0,$$

$$x = e \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow f(t=1) = 0 \text{ impose } \frac{1}{e}B\,\mathrm{sh}\sqrt{1-\lambda} = 0,$$

donc : $B = 0$; en conséquence, il reste : $f(t) = 0$, $\forall t$ qui n'est pas une fonction propre donc on ne peut pas avoir $0 < \lambda < 1$.

2°) Si $\lambda = 1$, l'équation caractéristique (3) a une racine double : $r = -1$,

la solution générale de l'équation (2) est : $f(t) = e^{-t}(A + Bt)$, $A, B = C^{tes}$;

les conditions aux limites imposent :

$f(t=0) = 0$ donc $A = 0$,

$f(t=1) = 0$ donc $B = 0$,

il reste alors : $f(t) = 0$, $\forall t$ qui n'est pas une fonction propre donc on ne peut pas avoir $\lambda = 1$.

3°) Si $\lambda > 1$, l'équation caractéristique (3) admet les deux racines complexes conjuguées

$$r_1 = -1 - i\sqrt{\lambda-1} \quad \text{et} \quad r_2 = -1 + i\sqrt{\lambda-1},$$

la solution générale de l'équation (2) s'écrit :

$$f(t) = e^{-t}(A\cos\sqrt{\lambda-1}\,t + B\sin\sqrt{\lambda-1}\,t), \qquad A, B = C^{tes};$$

les conditions aux limites entraînent :

$f(t=0) = 0$ donc $a = 0$,

$f(t=1) = 0$ fixe $\sin\sqrt{\lambda-1} = 0$,

soit : $\lambda_n = 1 + n^2\pi^2$, $n \in \mathbb{N}^*$;

et les fonctions propres : $f_n(t) = B_n\, e^{-t}\sin n\pi t$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Revenant à la variable x, il apparaît que la solution au problème régulier de STURM-LIOUVILLE considéré est :

$$(4) \quad \begin{cases} f_n(x) = \dfrac{B_n}{x}\sin(n\pi \ln x), & n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n = C^{te}, \\ \lambda_n = 1 + n^2\pi^2, & n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

–***Remarque :*** On sait, conformément au rappel de cours, que les fonctions propres f_n données par (4) sont orthogonales entre elles relativement à la fonction poids $s(x) = x$ sur $[1,e]$.

– Si on veut une base orthonormée de $L^2_{s(x)}[1,e]$, il suffit d'écrire : $\displaystyle\int_1^e x\, f_n^2(x)\,dx = 1$,

qui s'explicite en utilisant (4) : $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x} B_n^2 \sin^2(n\pi \ln x)\,dx = 1, \quad n \in \mathbb{N}^*$,

ou : $\displaystyle\frac{B_n^2}{2}\int_1^e \frac{1}{x}\{1 - \cos(2n\pi \ln x)\}\,dx = 1$,

le changement de variable (évident) $\ln x = t$ établit que :

$$\int_1^e \frac{1}{x}\{1 - \cos(2n\pi \ln x)\}\,dx = 1 ;$$

on choisit alors arbitrairement : $B_n = \sqrt{2}$, d'où les fonctions cherchées :

$$f_n^*(x) = \frac{\sqrt{2}}{x}\sin(n\pi \ln x), \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

6.1.4. – Nous sommes encore en présence d'un problème régulier de STURM-LIOUVILLE, nous savons que les valeurs propres sont réelles, examinons s'il est possible de déterminer leur signe.

On forme de l'équation envisagée : $\displaystyle\int_0^1 f''(x) f(x)\,dx = -\lambda \int_0^1 f^2(x)\,dx$,

une intégration par parties donne :

$$f'(x) f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'^2(x)\,dx = -\lambda \int_0^1 f^2(x)\,dx,$$

compte-tenu des conditions aux limites, il reste :

$$f^2(0) - \int_0^1 f'^2(x)\,dx = -\lambda \int_0^1 f^2(x)\,dx,$$

et nous ne pouvons rien affirmer sur le signe de λ.

On opère alors de la manière suivante :

– si $\lambda < 0$, on pose : $\lambda = -a^2$, $a \in \mathbb{R}^*$,
l'équation différentielle s'écrit : $f''(x) - a^2 f(x) = 0$,
sa solution générale s'écrit : $f(x) = A \operatorname{ch} ax + B \operatorname{sh} ax$, $A, B = C^{tes}$;
les conditions aux frontières donnent le système d'inconnues A et B :
$A + aB = 0$, $\quad A \operatorname{ch} a + B \operatorname{sh} a = 0$,

nous aurons une solution non triviale si le déterminant principal de ce système est nul, ce qui entraîne : $\operatorname{sh} a - a \operatorname{ch} a = 0$, ou $\operatorname{th} a = a$; on sait que cette équation admet la racine unique $a = 0$, que l'on ne peut admettre ici puisque, par hypothèse, $a \in \mathbb{R}^*$;
on en conlut qu'on ne peut pas avoir $\lambda < 0$.

– Si $\lambda = 0$, l'équation différentielle s'écrit : $f''(x) = 0$,
sa solution générale est : $f(x) = A + Bx$, $\quad A, B = C^{tes}$;
les conditions aux frontières imposent :

$$f(0) + f'(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0, \qquad f(1) = 0 \Rightarrow A + B = 0 ;$$

on en conclut que : $\lambda_0 = 0$, est valeur propre simple et on a, par exemple, la fonction propre : $f_0(x) = (-x + 1) H_0$, $\quad H_0 = C^{te}$.

– Si $\lambda > 0$, on pose : $\lambda = b^2$, $b \in \mathbb{R}^*$,
l'équation différentielle s'écrit : $f''(x) + b^2 f(x) = 0$,
sa solution générale s'écrit : $f(x) = A \cos bx + B \sin bx$, $\quad A, B = C^{tes}$;
les conditions aux frontières donnent le système d'inconnues A et B :

(1) $\quad f(0) + f'(0) = 0 \Rightarrow A + bB = 0$,

(2) $\quad f(1) = 0 \Rightarrow A \cos b + B \sin b = 0$,

nous aurons une solution non triviale si le déterminant principal de ce système est nul, ce qui entraîne : $\sin b - b \cos b = 0$, il est évident que $\cos b \neq 0$, car s'il en était ainsi, nous aurions f identiquement nulle. On écrit par suite :

(3) $\quad \tan b = b, \quad b \neq 0$.

Nous avons donc une infinité de valeurs propres, elles sont racines de l'équation ci-dessus; on a alors pour chaque valeur de b que l'on note b_n, $n \in \mathbb{Z}^*$:

$$f_n(x) = B_n(-b_n \cos b_n x + \sin b_n x),$$

ou : $\displaystyle f_n(x) = \frac{B_n}{\cos b_n}(\sin b_n x \cos b_n - \sin b_n \cos b_n x)$,

soit : $f_n(x) = H_n \sin b_n(1 - x)$, $\quad H_n = C^{te}$, $\quad n \in \mathbb{Z}^*$;

on note que de (3), on a : $b_{-K} = b_K$, $K \in \mathbb{N}^*$, par suite f_{-n} appartient à la même droite vectorielle que f_n, $n \in \mathbb{N}^*$.

En définitive, les valeurs propres postives λ_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont simples, elles sont données par : $\lambda_0 = 0$ et $\lambda_n = b_n^2$, $\tan b_n = b_n$, $\quad b_n > 0$,
et les fonctions associées ont pour expressions :

$$f_0(x) = H_0(1 - x), \quad H_0 = C^{te} ;$$

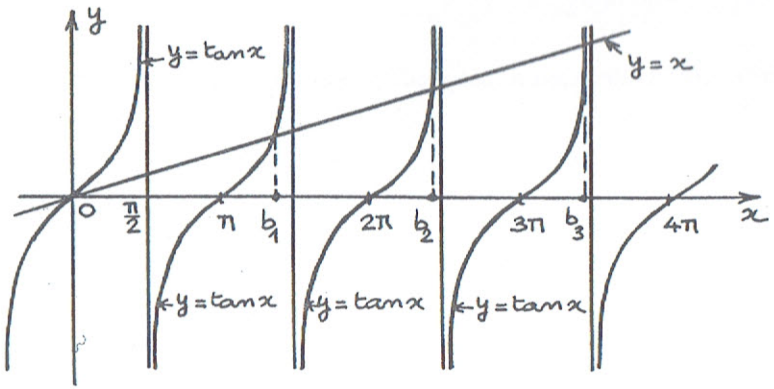
$$f_n(x) = H_n \sin b_n(1 - x), \quad H_n = C^{te}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Des calculs simples, analogues à ceux conduits dans les exercices précédents montrent que la famille de fonctions :

$$g_0(x) = \sqrt{3}(1 - x), \quad g_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sin b_n}\sin b_n(1 - x), \quad b_n = \tan b_n, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

constitue une base orthonormée de $L^2[0,1]$.

– Pour déterminer les b_n, on a la figure page suivante :



un calcul machine élémentaire donne : $b_1 = 4{,}493\,409$ rd, $b_2 = 7{,}725\,252$ rd, $b_3 = 10{,}904\,122$ rd, ... et pour $n > 3$, une "bonne" approximation de b_n est donnée par

$$b_n \sim \frac{1}{2}\sqrt{(2n+1)^2\pi^2 - 8}\,, \qquad n > 3, \quad n \in \mathbb{N}$$, ainsi qu'il est facile de le montrer.

6.1.5. – 1°) Le changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$ donne :

$$t = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2} \quad \text{d'où :} \quad \frac{df}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{df}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{2}{x^3}\frac{df}{dt} + \frac{1}{x^4}\frac{d^2f}{dt^2}$$

en remplaçant dans (1), on obtient : $t\dfrac{d^2f}{dt^2} + 2\dfrac{df}{dt} + \lambda tf = 0,$

en remarquant que : $\dfrac{d^2}{dt^2}(tf) = t\dfrac{d^2f}{dt^2} + 2\dfrac{df}{dt},$

l'équation précédente s'écrit : $\dfrac{d^2}{dt^2}(tf) + \lambda(tf) = 0,$

le changement de fonction inconnue $z = tf$, donne :

(3) $$\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda z = 0,$$

et les conditions aux limites deviennent, pour $z(t)$:

(4) $$z\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{et} \quad z(1) = 0.$$

– Il est aisé de montrer que λ est réel et strictement positif, on pose alors : $\lambda = a^2$, $a \in \mathbb{R}^*$;

l'équation (3) devient : $\dfrac{d^2z}{dt^2} + a^2z = 0,$

elle a pour solution générale : $z(t) = A\cos at + B\sin at$, $A, B = C^{tes}$;
les conditions aux limites (4) entraînent :

$$z\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow A\cos\frac{a}{2} + B\sin\frac{a}{2} = 0,$$
$$z(1) = 0 \Rightarrow A\cos a + B\sin a = 0;$$

afin de ne pas avoir la solution triviale $A = 0$ et $B = 0$, il faut satisfaire :

$$\begin{vmatrix} \cos\frac{a}{2} & \sin\frac{a}{2} \\ \cos a & \sin a \end{vmatrix} = \sin\frac{a}{2} = 0,$$

donc : $a = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}^*$, ce qui impose $A = 0$, il vient alors :

$$z_n(t) = B_n \sin 2n\pi t, \text{ avec : } n \in \mathbb{N}^*, B_n = C^{te}.$$

On norme les fonctions z_n, soit : $\langle z_n, z_n\rangle_{L^2_{[\frac{1}{2},1]}} = 1,$

il en résulte : $B_n = 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

2°) On a donc :

(5) $$f_n(x) = 2x\sin\frac{2n\pi}{x}, \qquad z_n(t) = 2\sin 2n\pi t, \qquad n \in \mathbb{N}^*;$$

on forme alors, pour $n \neq m$, $n, m \in \mathbb{N}^*$,

$$\langle z_n, z_m\rangle_{L^2_{[\frac{1}{2},1]}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 4\sin 2n\pi t \sin 2m\pi t\, dt = 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} \{\cos 2(n-m)\pi t - \cos 2(n+m)\pi t\}\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\sin 2(n-m)\pi t}{n-m} - \frac{\sin 2(n+m)\pi t}{n+m}\right\}\Bigg|_0^1 = 0,$$

puis, pour $n \neq m$, $n, m \in \mathbb{N}^*$,

$$\langle f_n(x), f_m(x)\rangle_{L^2_{[\frac{1}{x^4},[1,2]]}} = \int_1^2 \frac{4}{x^2}\sin\frac{2n\pi}{x}\sin\frac{2m\pi}{x}\, dx$$

$$= 2\int_1^2 \frac{1}{x^2}\left\{\cos 2(n-m)\frac{\pi}{x} - \cos 2(n+m)\frac{\pi}{x}\right\}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\sin 2(n-m)\frac{\pi}{x}}{n-m} + \frac{\sin 2(n+m)\frac{\pi}{x}}{n+m}\right\}\Bigg|_1^2 = 0,$$

puis, pour $n = m$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$< f_n(x), f_n(x) >_{L^2_{\left[\frac{1}{x^4}, [1,2]\right]}} = \int_1^2 \frac{4}{x^2} \sin^2 \frac{2n\pi}{x} \, dx$$

$$= 2 \int_1^2 \frac{1}{x^2} \left[1 - \cos \frac{4n\pi}{x}\right] dx = 2 \left\{ -\frac{1}{x} - \frac{\sin \frac{4n\pi}{x}}{4n\pi} \right\} \Bigg|_1^2 = 1 ;$$

enfin, $\{z_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, étant une base de $L^2_{\left[\frac{1}{2},1\right]}$, si $k(t)$ appartient à cet espace,

on peut écrire : $k(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k z_k(t)$,

si on impose : $< k(t), z_n >_{L^2_{\left[\frac{1}{2},1\right]}} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

alors $b_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il en résulte que $k(t)$ est nulle presque partout.

En posant : $k(t) = h(x)$, on a de suite :

$$<h(x), f_n(x)>_{L^2_{\left[\frac{1}{x^4}, [1,2]\right]}} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

on en conclut que $\{f_n\}$ est une base orthonormée de $L^2_{\left[\frac{1}{x^4}, [1,2]\right]}$.

3°) On pose donc a priori : $\frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n f_n(x)$, en formant le produit des deux membres $\frac{1}{x^4} f_m(x)$ et en intègrant sur $[1,2]$, on obtient :

$$c_m = \int_1^2 \frac{1}{x^4} \cdot \frac{1}{x} 2x \sin \frac{2m\pi}{x} dx = 2 \int_1^2 \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \sin \frac{2m\pi}{x} dx ,$$

$$c_m = -\frac{1}{m\pi} + \frac{(-1)^m}{4m\pi} + \frac{1}{2m^3\pi^3} [1 - (-1)^m] .$$

En posant : $\lambda_n = 4n^2\pi^2$, on sait que la solution cherchée s'écrit, si $\lambda \neq \lambda_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{\lambda - \lambda_n} f_n(x) ;$$

et si λ est égal à un des λ_n, le problème n'a pas de solution car ceci imposerait au c_n correspondant d'être nul, ce qui est impossible.

6.2.1. – Il est facile de vérifier que les valeurs propres sont réelles, examinons s'il est possible de déterminer leur signe.

On forme de l'équation envisagée : $\int_0^{2\pi} f''(x) f(x) \, dx = -\lambda \int_0^{2\pi} f^2(x) \, dx$,

une intégration par parties fixe : $f'(x) f(x) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'^2(x) \, dx = -\lambda \int_0^{2\pi} f^2(x) \, dx$,

les conditions aux limites donnent : $\lambda \int_0^{2\pi} f^2(x) \, dx = \int_0^{2\pi} f'^2(x) \, dx$;

on note, en premier lieu, que l'on peut avoir f' identiquement nulle sur $[0,2\pi]$, ce qui entraîne que $\lambda = 0$ est une valeur propre simple, à laquelle on peut associer la fonction propre $f_0(x) = 1$.

Si maintenant, on suppose f' non identiquement nulle sur $[0,2\pi]$, il en résulte : $\lambda > 0$;

on pose : $\lambda = a^2$, $a \in \mathbb{R}^*$,

l'équation différentielle considérée s'écrit : $f''(x) + a^2 f(x) = 0$,

sa solution générale s'écrit : $f(x) = A \cos ax + B \sin ax$, $A, B = C^{tes}$;

les conditions aux limites entraînent :

$$f(0) = f(2\pi) \Rightarrow A(\cos 2a\pi - 1) + B \sin 2a\pi = 0 ,$$

$$f'(0) = f'(2\pi) \Rightarrow aA \sin 2a\pi - aB(\cos 2a\pi - 1) = 0 ;$$

afin d'obtenir de ce système linéaire d'inconnues A et B une solution non triviale, il faut réaliser :

$$D = \begin{vmatrix} \cos 2a\pi - 1 & \sin 2a\pi \\ a \sin 2a\pi & -a(\cos 2a\pi - 1) \end{vmatrix} = -4a \sin^2 a\pi = 0 ,$$

et puisque $a \in \mathbb{R}^*$, il faut donc choisir : $a \in \mathbb{Z}^*$.

Si donc, on fixe $a \in \mathbb{Z}^*$, les deux conditions aux limites se traduisent par :

$0A = 0B = 0$, il en résulte que A et B sont arbitraires, on en conclut que $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$ est valeur propre double, les fonctions propres associées étant :

$$f_{n1}(x) = \cos nx \quad \text{et} \quad f_{n2}(x) = \sin nx , \quad n \in \mathbb{N}^* .$$

– On a retrouvé le rappel de cours sur le problème périodique de STURM-LIOUVILLE.

6.2.2. – 1°) Nous sommes encore en présence d'un problème périodique de STURM-LIOUVILLE, on montre sans difficulté que les valeurs propres sont réelles, examinons s'il est possible de déterminer leur signe.

Travaillant comme dans l'exercice précédent, on obtient :

$$\lambda \int_{-a}^{a} f^2(x)\,dx = \int_{-a}^{a} f'^2(x)\,dx ,$$

on remarque, en premier lieu, que si f' est identiquement nulle sur $[-a, a]$, alors $f(x) = C^{te}$, on écrirait par exemple : $f(x) = f(a), \quad \forall x \in [-a, a]$;
ce qui donnerait : $f(-a) = f(a)$, or on a la condition aux limites : $f(-a) = -f(a)$, ce qui imposerait : $f(a) = 0$, c'est-à-dire, $f(x)$ identiquement nulle sur $[-a, a]$, donc f' ne peut pas être identiquement nulle sur cet intervalle, ce qui impose : $\lambda > 0$.
On pose alors : $\lambda = b^2, \quad b \in \mathbb{R}^*$, l'équation différentielle considérée s'écrit :
$f''(x) + b^2 f(x) = 0$, elle a pour solution générale :

$$f(x) = A\cos bx + B\sin bx, \quad A, B = C^{tes};$$

les conditions aux limites entraînent :

$$(1) \quad \begin{cases} f(-a) + f(a) = 0 & \Rightarrow \quad 2A\cos ba = 0, \\ f'(-a) + f'(a) = 0 & \Rightarrow \quad 2bB\cos ba = 0, \end{cases}$$

afin d'obtenir de ce système linéaire d'inconnues A et B une solution non triviale, il faut satisfaire :

$$D = \begin{vmatrix} 2\cos ba & 0 \\ 0 & 2b\cos ba \end{vmatrix} = 4b\cos^2 ba = 0, \qquad b \neq 0,$$

ce qui impose : $\cos ba = 0$, donc : $b_n a = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$;
on note alors que des conditions aux limites, nous n'avons aucune condition sur A et B; il en résulte que les valeurs propres λ_n sont définies par :

$$\lambda_n = (2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4a^2}, \qquad n \in \mathbb{Z}, \text{ a priori},$$

elles sont doubles et elles ont pour fonctions propres associées par exemple :

$$f_{n1}(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2a}, \quad f_{n2}(x) = \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2a}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

– Or on remarque que :

$$f_{-(K+1),1}(x) = \frac{\cos(-2K-1)\pi x}{2a} = f_{K,1}(x),$$

c'est-à-dire que $f_{-(K+1),1}$ appartient à la même droite vectorielle que $f_{K,1}$, par suite, pour $f_{n,1}$, on se limite à $n \in \mathbb{N}$; de semblable façon :

$$f_{-(K+1),2}(x) = \sin\frac{(-2K-1)\pi x}{2a} = -f_{K,2}(x),$$

qui montre que pour $f_{n,2}$, on se limite à $n \in \mathbb{N}$.
En définitive, les valeurs propres λ_n sont doubles, données par :

$$\lambda_n = (2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4a^2}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

et elles ont pour fonctions propres associées :

$$f_{n1}(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2a}, \quad f_{n2}(x) = \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2a}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

– Un calcul simple montre que, pour n fixé, on a : $\int_{-a}^{a} f_{n1}(x)\, f_{n2}(x)\,dx = 0$,

puis, en travaillant pour $n \neq p$, $n, p \in \mathbb{N}$, on a :

$$f''_{nj}(x) = -\lambda n\, f_{nj}(x), \qquad j \in \{1,2\},$$

$$f''_{pK}(x) = -\lambda_p\, f_{pK}(x), \qquad K \in \{1,2\},$$

multiplions les deux membres de la première équation par $f_{pK}(x)$, les deux membres de la seconde équation par $f_{nj}(x)$, formons la différence des résultats obtenus et intégrons sur $[-a, a]$, on trouve :

$$\int_{-a}^{a} \{f''_{nj}(x) f_{pK}(x) - f''_{pK}(x) f_{nj}(x)\}\,dx = -(\lambda_n - \lambda_p)\int_{-a}^{a} f_{nj}(x) f_{pK}(x)\,dx,$$

en intégrant par parties le membre de gauche, on obtient :

$$[f'_{nj}(x) f_{pK}(x) - f'_{pK}(x) f_{nj}(x)]\Big|_{-a}^{a} = -(\lambda_n - \lambda_p)\int_{-a}^{a} f_{nj}(x) f_{pK}(x)\,dx,$$

compte-tenu des conditions aux limites, il reste :

$$(\lambda_n - \lambda_p)\int_{-a}^{a} f_{nj}(x) f_{pK}(x)\,dx = 0;$$

et, si $n \neq p$, on a : $\lambda_n \neq \lambda$, on en conlut que les fonctions propres sont orthogonales sur $[-a, a]$ relativement à la fonction poids $\rho(x) = 1$.
– On norme alors les fonctions propres et l'on pose : $g_{n1}(x) = A_n f_{n1}(x)$,

donc : $\quad g_{n1}(x) = A_n \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2a}$,

et on pose : $\quad \int_{-a}^{a} [g_{n1}(x)]^2\,dx = 1 = A_n^2 \int_{-a}^{a} \cos^2\frac{(2n+1)\pi x}{2a}\,dx$,

soit : $\quad aA_n^2 = 1$, on choisit arbitrairement : $\quad g_{n1}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2a}$;

des calculs analogues permettent de choisir :

$$g_{n2}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2a}.$$

On en déduit que les fonctions $g_{n1}(x)$ et $g_{n2}(x)$ constituent une base orthonormée de $L^2[-a, a]$.

2°) Soit g une application appartenant à $L^2[-a, a]$, donc telle que :

$$\int_{-a}^{a} g^2(x)\,dx < +\infty,$$

g n'appartenant pas à la base obtenue au 1°), on pose :

$$(2) \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} \left(c_n \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2a} + d_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a} \right),$$

multiplions les deux membres de cette équation par $\dfrac{1}{\sqrt{a}} \cos \dfrac{(2p+1)\pi x}{2a}$ et sommons sur $[-a, a]$, compte-tenu des résultats du 1°), on trouve le produit scalaire $< g, g_n >$:

$$c_p = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-a}^{a} g(x) \cos \frac{(2p+1)\pi x}{2a}\,dx,$$

et de même :

$$d_p = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-a}^{a} g(x) \sin \frac{(2p+1)\pi x}{2a}\,dx;$$

si ces intégrales convergent, on obtient le développement de g en série des fonctions propres donné par (2).

6.2.3.– 1°) On vérifie sans difficulté que les valeurs propres sont réelles et strictement positives; des calculs analogues à ceux développés dans les exercices antérieurs permettent d'établir que les valeurs propres sont définies par :

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

et que les fonctions propres associées sont données par :

$$f_n(x) = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Les valeurs propres sont simples et on leur associe les fonctions propres orthonormales sur $[0,\pi]$:

$$g_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ces fonctions constituent donc une base orthonormée de $L^2[0,\pi]$.

2°) On a : $g_0(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sin \dfrac{x}{2}$, $\quad g_1(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sin \dfrac{3x}{2}$;

et on écrit du texte : $w(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x)$,

soit donc : $w(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \left[a_0 \sin \dfrac{x}{2} + a_1 \sin \dfrac{3x}{2} \right]$,

puis, on forme (approximation en moyenne quadratique) :

$$H = \int_0^{\pi} [h(x) - w(x)]^2\,dx,$$

ou :

$$H = \int_0^{\pi} \left\{ x^2 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[a_0 \sin \frac{x}{2} + a_1 \sin \frac{3x}{2} \right] \right\}^2 dx;$$

H devant être extremum, il faut réaliser en premier lieu : $\dfrac{\partial H}{\partial a_0} = 0$ et $\dfrac{\partial H}{\partial a_1} = 0$, ce qui donne les deux équations définissant a_0 et a_1 :

$$\int_0^{\pi} \left[x^2 \sin \frac{x}{2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(a_0 \sin^2 \frac{x}{2} + a_1 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} \right) \right] dx = 0,$$

$$\int_0^{\pi} \left[x^2 \sin \frac{3x}{2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(a_0 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} + a_1 \sin^2 \frac{3x}{2} \right) \right] dx = 0,$$

on en tire :

$$a_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (8\pi - 16) \qquad \text{et} \qquad a_1 = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{8\pi}{9} + \frac{16}{27} \right).$$

H devant être minimum, on sait qu'il faut réaliser en plus :

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial a_0\, \partial a_1} \right)^2 - \frac{\partial^2 H}{\partial a_0^2} \frac{\partial^2 H}{\partial a_1^2} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial a_0^2} > 0 \quad \left(\text{ou } \frac{\partial^2 H}{\partial a_1^2} > 0 \right),$$

des calculs simples donnent :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial a_0\, \partial a_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial a_0^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial a_1^2} = 2;$$

il en résulte que la meilleure approximation en moyenne quadratique de $h(x) = x^2$ par $w(x)$ est obtenue en donnant à a_0 et a_1 les valeurs déterminées ci-dessus.

– ***Remarque :*** Posons : $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g_n(x)$, afin de déterminer a_0, on écrit :

$$\int_0^\pi h(x)\, g_0(x)\, dx = \int_0^\pi \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, g_n(x) \right) g_0(x)\, dx ,$$

les fonctions propres étant orthogonales sur $[0, \pi]$, il reste comme produit $< g, g_n >$:

$$a_0 = \int_0^\pi h(x)\, g_0(x)\, dx = \int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^2 \sin\frac{x}{2}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, (8\pi - 16) ,$$

c'est le résultat obtenu ci-dessus par une autre voie; puis formons :

$$\int_0^\pi h(x)\, g_1(x)\, dx = \int_0^\pi \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, g_n(x) \right) g_1(x)\, dx ,$$

qui redonne : $a_1 = - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{8\pi}{9} + \frac{16}{27} \right)$.

– Etablisssons que ces résultats sont naturels. Supposons n fixé, posons :

$$w(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, g_k(x) ,$$

et envisageons l'intégrale : $I = \int_0^\pi \left[h(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k\, g_k(x) \right]^2 dx$,

qui s'écrit aussi :

(1) $$I = \int_0^\pi h^2(x)\, dx - 2 \int_0^\pi h(x) \left[\sum_{k=0}^{n} a_k\, g_k(x) \right] dx + \int_0^\pi \left[\sum_{k=0}^{n} a_k\, g_k(x) \right]^2 dx .$$

or, h peut s'exprimer comme combinaison linéaire des fonctions g_p constituant une bas (orthonormée) de $L^2[0,\pi]$, soit : $h(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p\, g_p(x)$, il vient alors :

$$\int_0^\pi h(x)\, g_k(x)\, dx = \int_0^\pi \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_p\, g_p(x) \right) g_k(x)\, dx = b_k ,$$

en retournant à (1), on obtient :

$$I = \int_0^\pi h^2(x)\, dx - 2 \sum_{k=0}^{n} a_k b_k + \sum_{k=0}^{n} a_k^2 , \quad n \text{ fixé} ,$$

soit aussi :

$$I = \int_0^\pi h^2(x)\, dx + \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k)^2 - \sum_{k=0}^{n} b_k^2 , \quad n \text{ fixé} ;$$

il est évident que I sera minimum si et seulement si : $a_k = b_k$, $k = 0$ à n, n fixé, ce qui confirme les résultats antérieurs.

6.3.1. – Posons : $u(x,t) = X(x)\, T(t)$, en remplaçant dans l'équation aux dérivées partielles envisagée, on obtient : $X''T + XT'' + \lambda XT = 0$, et on choisit arbitrairement :

$$\frac{X''}{X} = - \frac{T'' + \lambda T}{T} = C , \quad C = C^{te} .$$

– Travaillons sur l'équation en X, donc :

(1) $X'' = CX$,

son équation conjuguée est :

(2) $\overline{X''} = \overline{C}\, \overline{X}$,

on multiplie les deux membres de (1) par $\overline{X}$, les deux membres de (2) par X, on forme la différence des résultats obtenus et on intègre sur $[0,a]$, il apparaît :

$$\int_0^a (X''\overline{X} - \overline{X''}X)\, dx = (C - \overline{C}) \int_0^a X\overline{X}\, dx ,$$

en intégrant le membre de gauche par parties on obtient :

$$(X'\overline{X} - \overline{X'}X) \Big|_0^a = (C - \overline{C}) \int_0^a X\overline{X}\, dx ;$$

or les conditions aux limites donnent :

(3) $X(0) = 0$, $X(a) = 0$ et $\overline{X}(0) = 0$, $\overline{X}(a) = 0$,

il en résulte : $(C - \overline{C}) \int_0^a X\overline{X}\, dx = 0$, et X n'étant pas identiquement nulle sur $[0,a]$,

il vient : $C - \overline{C} = 0 \iff C \in \mathbb{R}$.

– Examinons s'il est possible de déterminer le signe de C, on forme de (1) :

$$\int_0^a X''X\, dx = C \int_0^a X^2\, dx ,$$

on intègre le membre de gauche par parties, ce qui donne :

$$X'X \Big|_0^a - \int_0^a X'^2\, dx = C \int_0^a X^2\, dx ,$$

soit en utilisant les conditions (3) :

$$C\int_0^a X^2\,dx = -\int_0^a X'^2\,dx\ ;$$

on ne peut supposer que X' est identiquement nulle sur [0,a], car, s'il en était ainsi, X serait constante sur cet intervalle et vaudrait notamment X (0) qui est nul, donc X serait identiquemetn nulle sur [0,a] et ne serait donc pas une fonction propre.
On en déduit : $C < 0$.

On pose alors : $C = -k^2$, $k \in \mathbb{R}^*$, l'équation (1) devient : $x'' = -k^2 X$,
sa solution générale s'écrit : $X'' = -k^2 X$, sa solution générale s'écrit :
$X(x) = A\cos kx + B\sin kx$, les conditions (3) imposent :

$$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0, \qquad X(a) = 0 \Rightarrow B\sin ka = 0,$$

on ne peut fixer $B = 0$, il reste alors : $k_n a = n\pi$, $n \in Z^*$;
d'où les fonctions propres :

(4) $$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{a}x, \qquad n \in \mathbb{N}^*,$$

car on note que X_{-n} appartenant à la même droite vectorielle que X_n.

– On a donc : $C_n = -K_n^2 = -\dfrac{n^2\pi^2}{a^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

l'équation en T s'écrit : $T''_n + \lambda T_n = -C_n T_n$, soit :

(5) $$T''_n = \left(\frac{n^2\pi^2}{a^2} - \lambda\right)T_n, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

Plusieurs situations se présentent :

- si : $\dfrac{n^2\pi^2}{a^2} - \lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors : $\dfrac{n^2\pi^2}{a^2} - \lambda = h^2$, $h \in \mathbb{R}^*$,

l'équation (5) devient : $T''_n = h^2 T_n$,
elle a pour solution générale : $T_n = A\,\mathrm{ch}\,ht + B\,\mathrm{sh}\,ht$, $A, B = C^{tes}$;
les conditions "initiales" imposent :
(6) $T'(0) = 0$ et $T'(b) = 0$,
ce qui entraîne, puisque : $T'_n = hA\,\mathrm{sh}\,ht + hB\,\mathrm{ch}\,ht$, d'une part : $B = 0$,
et d'autre part : $hA\,\mathrm{sh}\,hb = 0$, puisque $h \neq 0$ (et b aussi), il reste : $A = 0$,
ce qui donne : $T_n(t) = 0$, $\forall t \in [0,b]$,

donc on ne peut supposer que : $\dfrac{n^2\pi^2}{a^2} - \lambda > 0$.

– Si on suppose maintenant : $\dfrac{n^2\pi^2}{a^2} - \lambda = 0 \iff \lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{a^2}$,

l'équation (5) devient : $T'' = 0$, sa solution générale est : $T_n(t) = A + Bt$, $A, B = C^{tes}$
les conditions "initiales" imposent : $B = 0$, on peut choisir : $T_n(t) = 1$, $\forall t \in [0,b]$.
On en conlut qu'une solution élémentaire du problème envisagé si :

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{est :} \quad u(x,t) = \sin\frac{n\pi}{a}x, \quad \text{qui se vérifie aisément.}$$

– Enfin, si : $\dfrac{n^2\pi^2}{a^2} - \lambda < 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

(7) $$\frac{n^2\pi^2}{a^2} - \lambda = -h^2, \qquad h \in \mathbb{R}^*;$$

l'équation (5) devient : $T''_n = -h^2 T_n$, elle a pour solution générale :

$T_n(t) = A\cos ht + B\sin ht$, $A, B = C^{tes}$; on en déduit :
$T'_n(t) = -hA\sin ht + Bh\cos ht$,

les conditions "initiales" entraînent : $B = 0$ et $hA\sin hb = 0$.
On aura $T_n(t)$ non identiquement nulle sur [0,b] si et seulement si : $hb = p\pi$,
$p \in \mathbb{Z}^*$, donc : $h = \dfrac{p\pi}{b}$, $p \in \mathbb{Z}^*$, qui entraîne de (7) la condition :

(8) $$\lambda = \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2}\right)\pi^2, \qquad n, p \in \mathbb{N}^*,$$

(si on change p en -p, T_n change seulement de signe).

– En conclusion : $\lambda = \left(\dfrac{n^2}{a^2} + \dfrac{p^2}{b^2}\right)\pi^2$, $n, p \in \mathbb{N}^*$, on obtient une solution

élémentaire du problème : $u(x,t) = \sin\left(\dfrac{n\pi}{a}x\right).\cos\left(\dfrac{p\pi}{b}t\right)$, $n, p \in \mathbb{N}^*$;

si λ ne satisfait pas la condition (8), on n'obtient pas de solution élémentaire par la méthode de séparation des variables.

6.3.2. – On rend en premier lieu les conditions aux limites homogènes et on pose à cet effet :

$$u(x,t) = U(x,t) + (a_1x + b_1)u_0e^{-\alpha t} + (a_2x + b_2)u_0e^{-\beta t},$$

$a_1, a_2, b_1, b_2 = C^{tes}$, et on impose : $U(0,t) = 0$ et $U(l,t) = 0$;
en marquant les conditions aux limites du texte, on obtient aisément :

$$a_1 = -\frac{1}{\ell}, \quad a_2 = \frac{1}{\ell}, \quad b_1 = 1 \quad \text{et} \quad b_2 = 0.$$

Il vient alors le nouveau problème :

$$(1)\quad \begin{cases} a\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + bU + \dfrac{\partial U}{\partial t} = (\alpha - b)\, u_0\, e^{-\alpha t} + \dfrac{x}{\ell}\left[(b-\alpha)\, u_0\, e^{-\alpha t} + (\beta - b)\, u_0\, e^{-\beta t} \right], \\ 0 < x < \ell, \quad t > 0, \quad a, b, u_0, \alpha, \beta = C^{tes} > 0, \\ U(0,t) = 0, \quad t > 0, \qquad U(\ell,t) = 0, \quad t > 0, \\ \lim\limits_{t \to +\infty} U(x,t) = 0, \quad 0 < x < \ell, \quad a\pi^2 > b\ell^2. \end{cases}$$

Cherchons de l'équation homogène associée : $a\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + bU + \dfrac{\partial U}{\partial t} = 0$,

par la méthode de séparation des variables des solutions élémentaires satisfaisant les conditions aux limites, on pose : $U(x,t) = X(x)\, T(t)$,
on obtient alors l'équation : $a X'' T + bX T + X T' = 0$,
et on choisit arbitrairement : $\dfrac{X''}{X} = -\dfrac{(T' + bT)}{aT} = C, \quad C = C^{te}$.

– Travaillons sur l'équation en X : $X'' = CX$, les conditions aux limites imposent : $X(0) = 0$ et $X(\ell) = 0$, en opérant comme dans l' exercice précédent, il apparaît :

$$C \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad C < 0.$$

Des calculs classiques, analogues à ceux conduits antérieurement montrent que les fonctions propres sont :

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{\ell}x, \quad n \in \mathbb{N}^*, \qquad \text{et} \qquad C_n = -\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*;$$

on vérifie aisément que : $\displaystyle\int_0^\ell X_n(x)\, X_p(x)\, dx = 0$, si $n \neq p$, $n, p \in \mathbb{N}^*$.

– On développe alors en série des fonctions propres X_n, la fonction f_1 définie par : $f_1(x) = 1$, $\forall x \in [0, \ell]$, on pose à cet effet :

$$f_1(x) = 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n X_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x, \qquad \alpha_n = C^{te};$$

des calculs simples donnent : $\alpha_n = \dfrac{2}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

De même, on développe en série des fonctions propres X_n, la fonction f_2 définie par :

$$f_2(x) = \frac{x}{\ell}, \quad \forall x \in [0, \ell], \qquad \text{on écrit :}$$

$$f_2(x) = \frac{x}{\ell} = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n X_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x, \qquad \beta_n = C^{te};$$

on en déduit aisément : $\beta_n = -\dfrac{2}{n\pi}(-1)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

– En revenant à l'équation aux dérivées partielles de (1) et en utilisant les résultats ci-dessus, on trouve :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ -a\frac{n^2\pi^2}{\ell^2} T_n + b\, T_n + T'_n \right\} X_n =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \frac{2}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right](\alpha - b)\, u_0\, e^{-\alpha t} - \frac{2}{n\pi}(-1)^n \left[(b - \alpha)\, u_0\, e^{-\alpha t} + (\beta - b)\, u_0\, e^{-\beta t}\right] \right\} X_n,$$

qui se simplifie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ T'_n + \left(b - a\frac{n^2\pi^2}{\ell^2} \right) T_n - \frac{2}{n\pi}\left[(\alpha - b)\, u_0\, e^{-\alpha t} + (-1)^{n+1}(\beta - b)\, u_0\, e^{-\beta t}\right] \right\} X_n = 0;$$

les X_n constituant une base orthogonale de $L^2[0,\ell]$, on obtient l'équation différentielle définissant T_n :

$$(2) \qquad T'_n - \left(a\frac{n^2\pi^2}{\ell^2} - b \right) T_n = \frac{2u_0}{n\pi}\left[(\alpha - b)\, e^{-\alpha t} + (-1)^n (b - \beta)\, e^{-\beta t} \right].$$

En supposant, pour ne pas alourdir cet exercice, qu'il n' existe pas de valeur de $n \in \mathbb{N}^*$ telle que : $\alpha + \dfrac{an^2\pi^2}{\ell^2} - b = 0$, (condition vérifiée puisque $a\pi^2 > b\ell^2$ et $\alpha > 0$),

des calculs élémentaires montrent que la solution générale de l'équation (2) s'écrit :

$$T_n(t) = H_n\, e^{\left(-\frac{an^2\pi^2}{\ell^2} - b\right)t} + \frac{2u_0}{n\pi}\left\{ \frac{(b - \alpha)\, e^{-\alpha t}}{\alpha + a^2\dfrac{n^2\pi^2}{\ell^2} - b} + \frac{(-1)^n\ (\beta - b)\, e^{-\beta t}}{\beta + a\dfrac{n^2\pi^2}{\ell^2} - b} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n = C^{te}.$$

D'où une solution particulière du problème posé en (1) :

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ H_n\, e^{\left(a\frac{n^2\pi^2}{\ell^2} - b\right)t} + \frac{2u_0}{n\pi}\left[\frac{(b - \alpha)\, e^{-\alpha t}}{\alpha + a\dfrac{n^2\pi^2}{\ell^2} - b} + \frac{(-1)^n\ (\beta - b)\, e^{-\beta t}}{\beta + a\dfrac{n^2\pi^2}{\ell^2} - b} \right] \right\} \sin\frac{n\pi}{\ell}x,$$

$$H_n = C^{te}, \qquad \alpha + a\frac{n^2\pi^2}{\ell^2} - b \neq 0 \quad \text{et} \quad \beta + a\frac{n^2\pi^2}{\ell^2} - b \neq 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*;$$

la condition : $\lim\limits_{t \to +\infty} U(x,t) = 0$, $\forall x \in\,]0, \ell[$, entraîne : $H_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Finalement, une solution particulière du problème considéré, obtenue par la méthode de séparation des variables, s'écrit :

$$u(x,t) = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) u_0 e^{-\alpha t} + \frac{x}{\ell} u_0 e^{-\beta t}$$
$$+ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2u_0}{n\pi} \left\{ \frac{(b-\alpha)\, e^{-\alpha t}}{\alpha + a\frac{n^2\pi^2}{\ell^2} - b} + (-1)^n \frac{(\beta - b)\, e^{-\beta t}}{\beta + a\frac{n^2\pi^2}{\ell^2} - b} \right\} \sin \frac{n\pi}{\ell} x,$$

avec $a\pi^2 > b\ell^2$.

6.3.3. – 1°) On sait, en premier lieu, que pour l'équation proposée, que l'on note :

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + p(x)\frac{dX(x)}{dx} + q(x)\,X(x) = 0,$$

avec $p(x)$ et $q(x)$ réelles et continues sur le segment fini $[a,b]$, avec $a < b$, en calculant : $K(x) = e^{\int_a^x p(u)du}$, et en multipliant les deux membres de l'équation précédente par $K(x)$, on obtient la forme auto-adjointe : $\frac{d}{dx}\left[K(x)\frac{dX(x)}{dx}\right] + q(x)\,K(x)\,X(x) = 0$;

nous avons, dans notre exercice : $p(x) = \frac{3}{x}$ et $q(x) = \frac{\lambda}{x^2}$, on en tire : $K(x) = x^3$,

il apparaît alors la forme auto-adjointe : $\frac{d}{dx}\left[x^3 \frac{dX(x)}{dx}\right] = -\lambda x\, X(x)$,

que l'on écrit aussi : $(x^3 X')' = -\lambda x X$.

– Des calculs analogues à ceux développés dans les exercices précédents permettent de vérifier que λ est réelle et montrent que λ est strictement positive.

On pose : $\lambda = a^2$, $a \in \mathbb{R}^*$; l'équation différentielle envisagée s'écrit par suite :

(1) $\quad x^2X'' + 3\,xa + a^2X = 0,$

on reconnaît une équation d'EULER; afin d'en déterminer la solution générale, on effectue par exemple le changement de variable : $x = e^z$, $1 \le x \le e \Leftrightarrow 0 \le z \le 1$, on en déduit :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \text{et} \quad \frac{dX}{dx} = \frac{dX}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dX}{dz}, \quad \frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}\frac{dX}{dz} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2X}{dz^2},$$

l'équation devient :

(2) $\quad \frac{d^2X}{dz^2} + 2\frac{dX}{dz} + a^2X = 0,$

avec : si $z = 0$, $X = 0$ et si $z = 1$, $X = 0$.

L'équation précédente a pour équation caractéristique : $\quad r^2 + 2r + a^2 = 0$,

celle-ci a pour racines d'une manière formelle : $r = -1 \pm \sqrt{1-a^2}$.

Examinons les situations possibles :

- si $1 - a^2 > 0$, on pose : $b = \sqrt{1-a^2} > 0$,

la solution générale de l'équation (2) est alors :

$$X = e^{-z}(A\,e^{bz} + B\,e^{-bz}), \qquad b > 0, \qquad A, B = C^{tes};$$

les conditions aux limites fixent :

$X = 0$ si $z = 0 \Rightarrow A + B = 0$,

$X = 0$ si $z = 1 \Rightarrow e^{-1}(A\,e^b + B\,e^{-b}) = 0$,

ce système de deux équations linéaires aux deux inconnues A et B, aura une solution non triviale si et seulement si :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^b & e^{-b} \end{vmatrix} = -2\,\mathrm{sh}\,b = 0,$$

ce qui est impossible puisque $b > 0$. On ne peut donc pas supposer $1 - a^2 > 0$.

- si $1 - a^2 = 0$, alors $r = -1$ est racine double de l'équation caractéristique,

la solution générale de l'équation (2) est : $X = e^{-z}(A + Bz)$, $\qquad A, B = C^{tes}$;

les conditions aux limites imposent :

$X = 0$ si $z = 0 \Rightarrow A = 0$,

$X = 0$ si $z = 1 \Rightarrow e^{-1}(A + B) = 0 \Rightarrow B = 0$,

il en découle : $X = 0$, $\forall z \in [0,1]$, par suite X n'est pas une fonction propre, il en résulte que l'on n'a pas $1 - a^2 = 0$.

- Enfin si $1 - a^2 < 0$, on pose : $b = \sqrt{a^2 - 1} > 0$,

la solution générale de l'équation (2) est alors :

$$X = e^{-z}(A\cos bz + B\sin bz), \qquad A, B = C^{tes};$$

les conditions aux limites fixent :

$X = 0$ si $z = 0 \Rightarrow A = 0$,

$X = 0$ si $z = 1 \Rightarrow e^{-1}B\sin b = 0$,

qui veut : $\sin b = 0$, ou : $b_n = n\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$;

la fonction propre étant associée à b_n s'écrit : $X_n = e^{-z}\sin b_n z$.

En conclusion, les valeurs propres simples du problème : $\lambda_n = a_n^2 = 1 + n^2\pi^2$,

$n \in \mathbb{N}^*$, sont associées aux fonctions propres :

$$X_n(x) = \frac{1}{x}\sin(n\pi \ln x), \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

– Vérifions l'othogonalité des fonctions propres, nous avons :

$$(x^3 X'_n)' = -(1+n^2\pi^2)\, x X_n, \qquad n, p \in \mathbb{N}^*,$$
$$(x^3 X'_p)' = -(1+p^2\pi^2)\, x X_p, \qquad n \neq p,$$

on déduit de ces relations :

$$\int_1^e [(x^3 X'_n)' X_p - (x^3 X'_p)' X_n]\, dx = (p^2 - n^2)\pi^2 \int_1^e x X_n X_p\, dx,$$

une intégration par parties du membre de gauche donne :

$$x^3 X'_n X_p \Big|_1^e - x^3 X'_p X_n \Big|_1^e = (p^2 - n^2)\pi^2 \int_1^e x X_n X_p\, dx,$$

les conditions aux limites entraînent : $\displaystyle\int_1^e x X_n X_p\, dx = 0$, si $n \neq p$.

Ce résultat établit que les fonctions propres sont orthogonales relativement à la fonction poids $\rho(x) = x$ sur le segment $[1,e]$.

– Normons les fonctions propres et posons :

$$\varphi_n(x) = \alpha_n X_n(x), \qquad \alpha_n = C^{te}, \qquad n \in \mathbb{N}^*,$$

et fixons : $\displaystyle\int_1^e x \varphi_n^2(x)\, dx = 1$;

on a donc : $\displaystyle\int_1^e \alpha_n^2 \frac{1}{x} \sin^2(n\pi \ln x)\, dx = 1$,

le changement de variable $y = \ln x$, montre que l'on peut choisir : $\alpha_n = \sqrt{2}$.

D'où la base orthonormée de $L_x^2[1,e]$:

$$\varphi_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{x} \sin(n\pi \ln x), \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

2°) Les conditions aux limites étant homogènes, on pose : $u(x,t) = X(x)\,T(t)$; en remplaçant dans l'équation aux dérivées partielles envisagée, on obtient :

$$X T'' = x^2 X'' T + 3x X' T,$$

que l'on écrit : $\displaystyle\frac{x^2 X'' + 3x X'}{X} = \frac{T''}{T} = -\lambda, \qquad \lambda = C^{te}$;

l'équation en X s'écrit : $x^2 X'' + 3x X' + \lambda X = 0$,
on reconnaît l'équation différentielle du 1°); les conditions aux limites imposent :
$X(1) = 0$ et $X(e) = 0$, qui sont aussi celles du 1°).

En conséquence, les fonctions propres du problème considéré sont les φ_n, $n \in \mathbb{N}^*$, obtenues à la fin du 1°).

L'équation en T_n s'écrit alors : $T''_n + (1 + n^2\pi^2)\, T_n = 0$, sa solution générale est :

$$T_n(t) = A_n \cos\sqrt{1+n^2\pi^2}\, t + B_n \sin\sqrt{1+n^2\pi^2}\, t, \qquad A_n, B_n = C^{tes}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

– Une solution élémentaire s'écrit :

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\sqrt{1+n^2\pi^2}\, t + B_n \sin\sqrt{1+n^2\pi^2}\, t\right) \frac{\sqrt{2}}{x} \sin(n\pi \ln x), \quad n \in \mathbb{N}^*;$$

puis une solution particulière est :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \cos\sqrt{1+n^2\pi^2}\, t + B_n \sin\sqrt{1+n^2\pi^2}\, t\right) \frac{\sqrt{2}}{x} \sin(n\pi \ln x),$$

un calcul formel donne, par suite :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{1+n^2\pi^2} \left(-A_n \sin\sqrt{1+n^2\pi^2}\, t + B_n \cos\sqrt{1+n^2\pi^2}\, t\right) \frac{\sqrt{2}}{x} \sin(n\pi \ln x).$$

La première condition initiale impose : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \varphi_n(x) = 0$, les φ_n constituant une base de $L_x^2[1,e]$, il en résulte : $A_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

utilisant ce résultat, la seconde condition initiale donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{1+n^2\pi^2}\, B_n \varphi_n(x) = f(x),$$

supposons que f soit développable en série des fonctions propres, on écrit :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n \varphi_n(x), \qquad h_n = C^{te};$$

en multipliant les deux membres de cette relation par : $\rho(x)\varphi_p(x)$, et en intégrant sur $[1,e]$, il vient :

$$\int_1^e x f(x) \frac{\sqrt{2}}{x} \sin(p\pi \ln x)\, dx = \int_1^e \left(\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \varphi_n(x)\right) x \varphi_p(x)\, dx,$$

compte-tenu que les fonctions propres sont orthonormées, relativement à $\rho(x) = x$, il reste (sous réserve de convergence) :

$$h_p = \int_1^e f(x) \sqrt{2} \sin(p\pi \ln x)\, dx.$$

On en tire : $B_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+n^2+\pi^2}} \displaystyle\int_1^e \sqrt{2}\, f(x) \sin(p\pi \ln x)\, dx$,

on en conclut qu'une solution particulière du problème posé est donnée par :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^2+\pi^2}} \left(\int_1^e \sqrt{2}\, f(x) \sin(n\pi \ln x)\, dx \right) \frac{\sqrt{2}}{x}$$

$$\sin \sqrt{1+n^2\pi^2}\, t \,.\, \sin(n\pi \ln x)\, dx .$$

CHAPITRE 7

Opérateurs décomposables, Equation des ondes, Méthode de d' ALEMBERT

RAPPELS DE COURS

Définition : Une solution faible de l'équation des ondes $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ est une fonction u telle que :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} u \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right] dx\, dt = 0, \qquad \forall \varphi \in H,$$

où H est l'espace vectoriel des fonctions φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2.

Théorème : Soient F_n, $n \in \mathbb{N}$ et G_n, $n \in \mathbb{N}$ deux suites de fonctions de classe C^2 qui convergent en moyenne quadratique respectivement vers F et G.
Soit $u_n(x,t) = F_n(x+ct) + G_n(x-ct)$; la suite u_n, $n \in \mathbb{N}$ est une suite de solutions ordinaires (ou fortes) de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, et
$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$ est une solution faible de cette équation.

Formule de d'ALEMBERT : On a le théorème : la solution de l'équation $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, telle que $u(x,0) = f(x)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ est :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2C} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\, dy,$$

(c'est la formule de d'ALEMBERT).

EXERCICES

7.1.1. – Soit l'équation aux dérivées partielles du second ordre :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 ;$$

montrer en utilisant la méthode des opérateurs qu'on peut ramener son intégration à celle de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre. Donner l'intégrale générale de l'équation envisagée.

7.1.2. – Soit l'équation aux dérivées partielles du second ordre :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 ;$$

en donner la solution générale en utilisant la méthode des opérateurs.

7.1.3. – Déterminer, en travaillant avec la méthode des opérateurs, la solution générale de l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2}{y} .$$

7.1.4. – Donner la solution générale de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + 4u = 0.$$

7.1.5. – Montrer en utilisant la méthode des opérateurs, qu'on peut ramener l'intégration de l'équation aux dérivées partielles :

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 y^2,$$

à celle de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre. Donner l'intégrale générale de l'équation ci-dessus.

7.1.6. – Donner la solution générale de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+xy)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} = 0 .$$

7.1.7. – Soit l'équation aux dérivées partielles du second ordre :

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 , \quad x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 .$$

1) En déterminer une solution particulière notée $u_0(x,y)$ telle que :

$u_0(x,y) = f_1(x)$ sur la droite $y = 2x$, $x \geq 0$, $f_1(0) = 0$, et

$u_0(x,y) = g_1(x)$ sur la courbe (C) d'équation : $y = \varphi(x)$, $g_1(0) = 0$, $\varphi(0), = 0$,

cette courbe (C) n'étant pas une caractéristique de l'équation aux dérivées partielles considérée avec $\varphi'(x) > 2$, $\forall x \geq 0$.

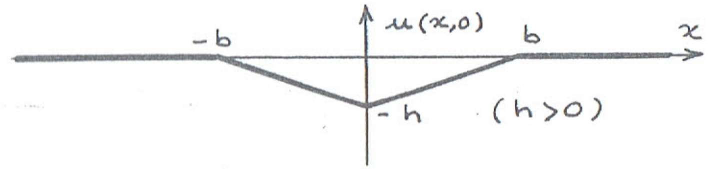
2) Examiner le cas particulier où : $\varphi(x) = 2x + x^3$.

7.2.1. – Soit l'équation des ondes :

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 , \quad a = C^{te} > 0 , \quad -\infty < x < +\infty , \quad 0 < t < +\infty ,$$

avec les conditions initiales : $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, $-\infty < x < +\infty$,

et $u(x,0)$ donné par le graphe ci-dessous :



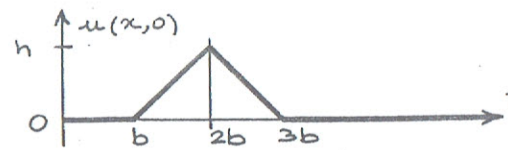
En travaillant avec la méthode de d'ALEMBERT, préciser les formules permettant de connaître $u(x,t)$ suivant les valeurs de x et de t.

7.2.2. – Soit l'équation des ondes :

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 , \quad a = C^{te} > 0, \quad 0 < x < +\infty , \quad 0 < t < +\infty ,$$

avec les conditions initiales : $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, $0 < x < +\infty$,

et $u(x,0)$ donné par le graphe ci-dessous :



avec la condition frontière : $u(0,t) = 0$, $0 < t < +\infty$.
En travaillant avec la méthode de d'ALEMBERT, préciser les formules permettant de connaître $u(x,t)$ suivant les valeurs de x et de t.

7.2.3. – Soit l'équation des ondes :

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 , \quad a = C^{te} > 0, \quad 0 < x < b , \quad b = C^{te} > 0 , \quad 0 < t < +\infty ,$$

avec les conditions initiales :

$$u(x,0) = \lambda x , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 , \quad \lambda = C^{te} > 0 , \quad 0 < x < b ,$$

et les conditions aux limites : $u(0,t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(b,t) = 0$, $0 < t < +\infty$.

SOLUTIONS

7.1.1. – L'équation considérée étant à coefficients constants, on envisage les deux opérateurs :

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}, \qquad a, b = C^{tes},$$

formons : $(D_1 \,.\, D_2)(u)(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)(u)(x,y)$,

soit : $$(D_1 \,.\, D_2)(u)(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + ab\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

en identifiant à l'équation envisagée, il apparaît : $a + b = -2$ et $ab = -3$, ce système admet la solution (on note que a et b jouent des rôles permutables) : $a = 1$ et $b = -3$.
On a donc les deux opérateurs :

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial x} - 3\frac{\partial}{\partial y};$$

par ailleurs, l'équation aux dérivées partielles considérée étant à coefficients constants, les deux opérateurs D_1 et D_2 commutent, c'est-à-dire :

$$(D_1 \,.\, D_2)(u)(x,y) = (D_2 \,.\, D_1)(u)(x,y),$$

par suite, la solution générale de l'équation du second ordre envisagée est une combinaison linéaire des solutions générales des deux équations aux dérivées partielles du premier ordre : $D_1(u)(x,y) = 0$ et $D_2(u)(x,y) = 0$.

Soit, pour la première équation : $D_1(u)(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$,

son système différentiel associé est : $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{0}$,

qui donne : $u(x,y) = f(x - y)$, f étant une fonction arbitraire;

de semblable façon, pour la seconde équation : $D_2(u)(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} - 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$,

elle a pour système différentiel associé : $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-3} = \frac{du}{0}$,

on en déduit : $u(x,y) = g(3x + y)$, g étant une fonction arbitraire.

On en conclut que la solution générale de l'équation aux dérivées partielles du second ordre considérée s'écrit :

$$u(x,y) = f(x - y) + g(3x + y), \quad f \text{ et } g \text{ étant deux fonctions arbitraires.}$$

7.1.2. – En opérant comme dans l'exercice précédent, on pose aussi :

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}, \qquad a, b = C^{tes},$$

on forme $(D_1 . D_2)(u)(x,y)$, en identifiant avec l'équation aux dérivées partielles du texte, on obient le système : $a + b = 4$ et $ab = 4$, dont la solution est : $a = 2$ et $b = 2$,

il en résulte : $D_1 = D_2 = \frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y}$,

et l'équation proposée s'écrit : $\left(\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y}\right)(u)(x,y) = 0$.

Posons :

(1) $$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = Z,$$

l'équation envisagée devient :

(2) $$\frac{\partial Z}{\partial x} + 2\frac{\partial Z}{\partial y} = 0,$$

elle a pour système différentiel associé : $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{dZ}{0}$, on en déduit la solution générale de l'équation (2) : $Z = f(y - 2x)$, f étant une fonction arbitraire.

– En revenant à l'équation (1), on obtient : $\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = f(y - 2x)$,

son système différentiel associé est : $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{du}{f(y - 2x)}$,

les deux premiers rapports donnent : $y - 2x = C_1$, $C_1 = C^{te}$, les rapports extrêmes imposent : $du = f(y - 2x)\,dx = f(C_1)\,dx = C_2 dx$, $C_2 = C^{te}$, on en tire : $u = C_2 x + C_3$,
c'est-à-dire : $u(x,y) = x\,f(y - 2x) + g(y - 2x)$, f et g étant deux fonctions arbitraires;
c'est la solution générale de l'équation aux dérivées partielles considérée.

7.1.3. – En travaillant comme dans l'exercice précédent, on pose :

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}, \qquad a, b = C^{tes},$$

des calculs simples donnent, en travaillant avec l'équation sans second membre : $a = b = 3$;
en posant :

(1) $$\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = Z,$$

l'équation complète s'écrit : $\frac{\partial Z}{\partial x} + 3\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{x^2}{y}$,

elle a pour système différentiel associé :

(2) $$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{3} = \frac{dZ}{\frac{x^2}{y}},$$

on en déduit : $3x - y = C_1$, $C_1 = C^{te}$, on a par suite : $x = \frac{1}{3}(y + C_1)$,
on tire des deux derniers rapports de (2), par exemple :

$$dZ = \frac{x^2}{3y}\,dy = \frac{1}{27}\left(y + 2C_1 + \frac{C_1^2}{y}\right)dy,$$

qui s'intègre et donne :

$$Z = \frac{1}{27}\left(\frac{y^2}{2} + 2C_1 y + C_1{}^2 \ln|y|\right) + C_2, \qquad C_2 = C^{te},$$

on en déduit :

$$Z = \frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{27}\left(\frac{y^2}{2} + 2y(3x-y) + (3x-y)^2 \ln|y|\right) + f_1(3x-y),$$

f_1 étant une fonction arbitraire.

– Le système différentiel associé à cette équation aux dérivées partielles du premier ordre s'écrit :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{3} = \frac{du}{\frac{1}{27}\left(\frac{y^2}{2} + 2y(3x-y) + (3x-y)^2\ln|y|\right) + f_1(3x-y)},$$

les deux premiers rapports fixent : $3x - y = C_3$, $C_3 = C^{te}$,
les deux derniers rapports de ce système imposent alors :

$$du = \left[\frac{1}{81}\left(\frac{y^2}{2} + 2C_3 y + C_3{}^2 \ln|y|\right) + \frac{1}{3} f_1(C_3)\right] dy,$$

dont l'intégrale générale est :

$$u = \frac{1}{81}\left(\frac{y^3}{6} + C_3 y^2 + C_3{}^2(y\ln|y| - y)\right) + \frac{y}{3} f_1(C_3) + C_4, \quad C_4 = C^{te};$$

il en résulte que la solution générale de l'équation aux dérivées partielles considérée s'écrit

$$u(x,y) = y\,f(3x-y) + g(3x-y) + \frac{1}{81}\left[\frac{y^3}{6} + y^2(3x-y) + (3x-y)^2(y\ln|y| - y)\right],$$

f et g étant deux fonctions arbitraires.

7.1.4. – On reconnaît une équation du type d'EULER, afin de la ramener à une équation à coefficients constants, on effectue le changement de variables : si $x > 0$ et $y > 0$, $x = e^X$ et $y = e^Y$, il en résulte :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{1}{y}$$

puis :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial X}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial X^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial Y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2};$$

en remplaçant dans l'équation aux dérivées partielles envisagée, il vient la nouvelle équation :

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + 4\frac{\partial u}{\partial X} + 4u = 0.$$

– Examinons s'il est possible de trouver deux opérateurs D_1 et D_2, posons :

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial X} + a\frac{\partial}{\partial Y} + b\,I \quad \text{et} \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial X} + c\frac{\partial}{\partial Y} + h\,I,$$

a, b, c, h = C^{tes} et I est l'application identique définie par : $\forall z$, $I(z) = z$.
Formons alors :

$$(D_1 . D_2)(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + 4\frac{\partial u}{\partial X} + 4u = 0,$$

soit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + (c+a)\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + ac\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + (h+b)\frac{\partial u}{\partial X} + (ah+bc)\frac{\partial u}{\partial Y} + bhu$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + 4\frac{\partial u}{\partial X} + 4u = 0;$$

en identifiant les deux membres, il vient les conditions :
$a + c = 0$, $ac = -1$, $b + h = 4$, $ah + bc = 0$ et $bh = 4$,
une solution de ce système est : $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$ et $h = 2$.
D'où les deux opérateurs :

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} + 2I \quad \text{et} \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial Y} + 2I,$$

on note qu'ils communtent, c'est-à-dire : $(D_1 . D_2)(u) = (D_2 . D_1)(u)$, $\forall u$.

– En conséquence, on envisage les deux équations aux dérivées partielles du premier ordre :

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y} + 2u = 0,$$

et

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Y} + 2u = 0;$$

des calculs classiques montrent que la solution générale de l'équation (2) est :
$u = e^{-2X} f_1(Y - X)$, f_1 fonction arbitraire,
et que la solution générale de l'équation (3) s'écrit :
$u = e^{-2X} g_1(Y + X)$, g_1 fonction arbitraire.
En revenant aux variables initiales, on en conclut que la solution générale de l'équation aux dérivées partielles du second ordre envisagée est :

$$(4) \qquad \begin{cases} u(x,y) = \dfrac{1}{x^2}\left\{ f\left(\dfrac{y}{x}\right) + g(xy)\right\}, \\ f \text{ et } g \text{ étant deux fonctions arbitraires.} \end{cases}$$

– La solution donnée par (4) est valable quels que soient x et y non nuls, par exemple si $x < 0$ et $y > 0$, on utilise le changement de variables : $x = -e^X$ et $y = e^Y$, des calculs analogues à ceux conduits ci-dessous montrent que la nouvelle équation aux dérivées partielles est identique à (1).

7.1.5. – On a encore une équation du type d'EULER avec second membre en travaillant comme dans l'exercice précédent, en premier lieu pour : $x > 0$ et $y > 0$, on pose : $x = e^X$ et $y = e^Y$, des calculs simples montrent que l'équation transformée est :

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} - \frac{\partial u}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Y} = e^{2(X+Y)};$$

en introduisant les deux opérateurs :

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial X} + a\frac{\partial}{\partial Y} + b\,I \quad \text{et} \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial X} + c\frac{\partial}{\partial Y} + h\,I,$$

avec : $a, b, c, h = C^{tes}$ et I étant l'application identique. On trouve aisément, par exemple : $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$ et $h = 0$, on obtient donc les deux opérateurs communtatifs :

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} - I \quad \text{et} \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y};$$

l'équation (1) s'écrit, par exemple :

$$\left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} - I\right)\left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}\right)(u)(X,Y) = e^{2(X+Y)},$$

posons :

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y} = Z,$$

nous obtenons l'équation aux dérivées partielles du premier ordre avec second membre

$$(3) \qquad \frac{\partial Z}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial Y} - Z = e^{2(X+Y)};$$

elle admet le système différentiel : $\dfrac{dX}{1} = \dfrac{dY}{1} = \dfrac{dZ}{Z + e^{2(X+Y)}}$,

on en déduit la solution générale de l'équation (3) :

$$Z = \frac{1}{3}e^{2(X+Y)} + e^Y f_1(X-Y), \quad f_1 \text{ étant une fonction arbitraire.}$$

En utilisant ce résultat, l'équation (2) devient :

$$(4) \qquad \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y} = \frac{1}{3}e^{2(X+Y)} + e^Y f_1(X-Y),$$

son système différentiel associé s'écrit : $\dfrac{dX}{1} = \dfrac{dY}{1} = \dfrac{du}{\frac{1}{3}e^{2(X+Y)} + e^Y f_1(X-Y)}$,

des calculs simples montrent alors que la solution générale de l'équation (4) est :

$$u = \frac{1}{12}e^{2(X+Y)} + e^Y f_1(X-Y) + g_1(X-Y),$$

f_1 et g_1 étant deux fonctions arbitraires, c'est donc la solution générale de l'équation (1). En revenant aux variables initiales, il apparaît que la solution générale de l'équation aux dérivées partielles du second ordre envisagée s'écrit :

$$\begin{cases} u(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{12} + y\,f\left(\dfrac{x}{y}\right) + g\left(\dfrac{x}{y}\right), \\ f \text{ et } g \text{ étant deux fonctions arbitraires.} \end{cases}$$

Tout comme dans l'exercice précédent, on établit sans difficulté que la solution obtenue ci-dessous, est valable quels que soient x et y non nuls.

7.1.6. – On pose donc, a priori, les deux opérateurs :

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x} + a(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + b(x,y)\,I, \qquad D_2 = y\frac{\partial}{\partial x} + c(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + h(x,y)\,I,$$

I étant l'application identique; on forme alors :

$$(D_1 \cdot D_2)(u)(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y} + b\,I\right)\left(y\frac{\partial}{\partial x} + c\frac{\partial}{\partial y} + h\,I\right)(u)(x,y),$$

qui s'explicite :

$$(D_1 \cdot D_2)(u)(x,y) = y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (c + ay)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + ac\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (h + a + by)\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$+ \left(\frac{\partial c}{\partial x} + a\frac{\partial c}{\partial y} + ah + bc\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial h}{\partial x} + a\frac{\partial h}{\partial y} + bh\right)u,$$

en identifiant avec l'équation aux dérivées partielles du texte, on obtient les relations :

$$(1) \qquad \begin{cases} c + ay = 1 + xy, \quad ac = x, \quad \dfrac{\partial c}{\partial x} + a\dfrac{\partial c}{\partial y} + ah + bc = 0, \\ h + a + by = x \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial h}{\partial x} + a\dfrac{\partial h}{\partial y} + bh = 0. \end{cases}$$

On déduit des deux premières équations : $c = 1 + xy - ay$, qui remis dans la seconde entraîne : $a + axy - a^2y = x$, elle s'écrit aussi :

$$(2) \qquad (a - x)(1 - ay) = 0;$$

une première solution est : $a(x,y) = x$, qui entraîne : $c(x,y) = 1$, les trois dernières relations du système (1) deviennent : $hx + b = 0$, $h + by = 0$, $\dfrac{\partial h}{\partial x} + \dfrac{\partial h}{\partial y}x + bh = 0$,

or les deux premières équations donnent : $h = -by$ et $b(1 - xy) = 0$, qui impose $b = 0$ et $h = 0$.

– On a donc les deux opérateurs :

$$(3) \qquad D_1 = \frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad D_2 = y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y};$$

l'équation aux dérivées partielles envisagée s'écrit donc :

$$(4) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)(u)(x,y) = 0;$$

examinons si les opérateurs obtenus D_1 et D_2 commutent, on forme à cet effet :

$$(D_2 \cdot D_1)(u)(x,y) = \left(y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)(u)(x,y),$$

un calcul simple donne :

$$(D_2 . D_1)(u)(x,y) = y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+xy)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y\frac{\partial u}{\partial y},$$

le membre de droite est différent de l'équation proposée, on en conclut que les deux opérateurs obtenus ne commutent pas.
En revenant à (4), on pose :

(5) $\quad Z = y\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y},$

l'équation du texte devient :

(6) $\quad \dfrac{\partial Z}{\partial x} + x\dfrac{\partial Z}{\partial y} = 0;$

le système différentiel associé à cette équation est : $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dZ}{0},$

il en résulte que la solution générale de l'équation (6) s'écrit : $Z = f\left(y - \dfrac{x^2}{2}\right)$
f étant une fonction arbitraire.
En revenant à (5), on obtient l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

(7) $\quad y\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = f\left(y - \dfrac{x^2}{2}\right),$

elle a pour système différentiel associé : $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{1} = \dfrac{du}{f\left(y - \frac{x^2}{2}\right)},$

les deux premiers rapports donnent : $x - \dfrac{y^2}{2} = C_1, \quad C_1 = C^{te},$

et, les deux derniers rapports imposent : $du = f\left[y - \dfrac{1}{2}\left(C_1 + \dfrac{y^2}{2}\right)^2\right]dy,$

on en conclut que la solution générale de l'équation envisagée s'écrit :

$$u(x,y) = \int_{y_0}^{y} f\left[\alpha - \frac{1}{2}\left(x - \frac{y^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\right)^2\right]d\alpha + g\left(x - \frac{y^2}{2}\right),$$

$y_0 = C^{te}$, f et g étant deux fonctions arbitraires.

– On note que de la relation (2), la seconde solution $a(x,y) = \dfrac{1}{y}$, ne conduit pas à deux opérateurs.

7.1.7. – L'équation proposée étant à coefficients constants, déterminons deux opérateurs D_1 et D_2, tels que :

$$D_1 = 2\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}, \quad a, b = C^{tes},$$

puis, formons : $(D_1 . D_2)(u)(x,y)$, en identifiant le résultat obtenu avec l'équation envisagée, on obtient le système : $2b + a = 3$ et $ab = -2$,

on utilise arbitrairement la solution $a = -1$ et $b = 2$, il en résulte :

$$D_1 = 2\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y};$$

on note que ces deux opérateurs commutent, on obtient donc les deux équations aux dérivées partielles du premier ordre :

$$2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

on en conclut que la solution générale de l'équation aux dérivées partielles du second ordre considérée s'écrit :

(1) $\quad u(x,y) = f(x+2y) + g(2x-y)$, f et g étant deux fonctions arbitraires.

– En posant, conformément à la coutume, l'écriture générale de l'équation envisagée :

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

qui impose : $a(x,y) = 2, \quad b(x,y) = \dfrac{3}{2}$ et $c(x,y) = -2,$

en formant : $D(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)\,c(x,y) = \dfrac{25}{4} > 0,$

il apparaît que l'équation considérée est du type hyperbolique; les caractéristiques sont déterminées par : $2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 3\dfrac{dy}{dx} - 2 = 0$, qui donne : $\dfrac{dy}{dx} = 2$ et $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2},$

on en conclut que les caractéristiques sont les familles de droite :

(2) $\quad 2x - y = C_1$ et $x + 2y = C_2, \quad C_1, C_2 = C^{tes}.$

1°) On note que la première condition :
$u_0(x,y) = f_1(x)$ sur la droite $y = 2x$, $x \geq 0$ est une donnée sur une caractéristique, on a donc de (1) : $u_0(x,2x) = f_1(x) = f(5x) + g(0), \quad x \geq 0,$

on en déduit : $f(\alpha) = f_1\left(\dfrac{\alpha}{5}\right) - g(0), \quad \alpha \geq 0,$ ce qui entraîne :

(3) $\quad f(x+2y) = f_1\left(\dfrac{x+2y}{5}\right) - g(0), \quad x + 2y \geq 0.$

Par ailleurs, la condition $u_0(x,y) = g_1(x)$ sur la courbe (C) d'équation $y = \varphi(x)$, $\varphi'(x) > 2$, $\forall x \geq 0$, montre que nous avons une donnée sur une courbe (C) qui n'est pas une caractéristique, elle implique de (1) :

$$u(x,\varphi(x)) = g_1(x) = f(x + 2\varphi(x)) = g(2x - \varphi(x)),$$

soit, en utilisant (3) : $g_1(x) = f_1\left(\dfrac{x+2\varphi(x)}{5}\right) - g(0) + g(2x - \varphi(x))$, qui donne :

(4) $\quad g(2x - \varphi(x)) = g_1(x) - f_1\left(\dfrac{x+2\varphi(x)}{5}\right) + g(0),$

et il faut préciser g.

Posons : $t(x) = 2x - \varphi(x)$, qui donne : $\dfrac{dt}{dx} = 2 - \varphi'(x)$, qui conserve un signe constant pour $x \geq 0$, par suite, il existe une fonction réciproque $x = \psi(t)$.

Il vient alors de (4) : $g(t) = g_1[\psi(t)] - f_1\left[\dfrac{\psi(t) + 2\varphi(\psi(t))}{5}\right] + g(0)$,

qui entraîne en revenant à (1) :

$$u_0(x,y) = f_1\left(\frac{x+2y}{5}\right) + g_1[\psi(2x-y)] - f_1\left[\frac{\psi(2x-y) + 2\varphi\{\psi(2x-y)\}}{5}\right].$$

2°) Si on impose : $\varphi(x) = 2x + x^3$, $x \geq 0$, alors, $t(x)$ est définie par : $t(x) = -x^3$, $x \geq 0$, d'où la fonction réciproque : $x = \psi(t) = (-t)^{1/3}$, la solution cherchée, dans ce cas, s'écrit :

$$u_0(x,y) = f_1\left(\frac{x+2y}{5}\right) + g_1[(y-2x)^{1/3}] - f_1\left[\frac{(y-2x)^{1/3} + 2\{2(y-2x)^{1/3} + (y-2x)\}}{5}\right],$$

dont la vérification est immédiate.

7.2.1. – Nous savons que la solution générale de l'équation des ondes :

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

s'écrit : $u(x,t) = f(x-at) + g(x+at)$, f et g étant deux fonctions arbitraires;

en posant : $u(x,0) = \Phi(x)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$,

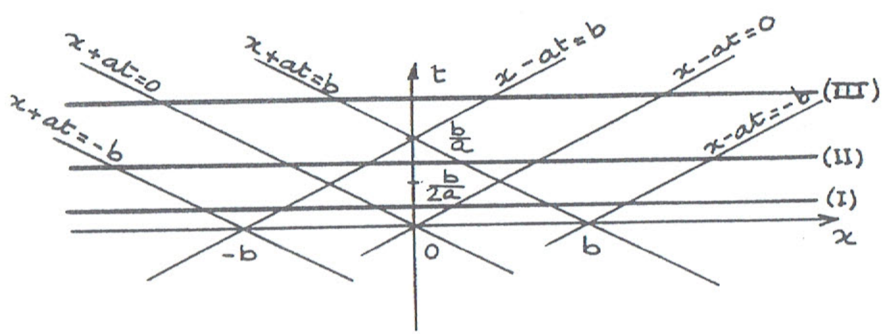
on a la formule de d' ALEMBERT :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x+at) + \Phi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha.$$

– Dans notre exercice, nous avons : $\psi(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
et la fonction Φ est déterminée par :

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha \leq -b, & \Phi(\alpha) = 0 \\ -b \leq \alpha \leq 0, & \Phi(\alpha) = -\dfrac{h}{b}(\alpha + b), \\ 0 \leq \alpha \leq b, & \Phi(\alpha) = \dfrac{h}{b}(\alpha - b), \\ \alpha \geq b, & \Phi(\alpha) = 0; \end{cases}$$

on construit alors la figure :



1°) On envisage alors, <u>à t fixé</u>, les diverses situations, schématisées sur la figure précédente par les droites horizontales repérées par (I), (II) et (III).

– Cas (I), défini par : $0 < t < \dfrac{b}{2a}$, et en parcourant la droite de repère (I) de gauche à droite, on obtient :

· $x + at < -b$ et $x - at < -b \Rightarrow \Phi(x+at) = 0$ et $\Phi(x-at) = 0$,

donc : $-\infty < x < -b - at$, $u(x,t) = 0$;

· $-b < x + at < 0$ et $x - at < -b \Rightarrow \Phi(x+at) = -\dfrac{h}{b}(x+at+b)$
et $\Phi(x-at) = 0$,

donc : $-b - at < x < -b + at$, $u(x,t) = -\dfrac{h}{2b}(x+at+b)$;

· $-b < x + at < 0$ et $-b < x - at < 0 \Rightarrow \Phi(x+at) = -\dfrac{h}{b}(x+at+b)$

et $\Phi(x-at) = -\dfrac{h}{b}(x-at+b)$,

donc : $-b + at < x < -at$, $u(x,t) = -\dfrac{h}{b}(x+b)$;

· $0 < x + at < b$ et $-b < x - at < 0 \Rightarrow \Phi(x+at) = \dfrac{h}{b}(x+at-b)$

et $\Phi(x-at) = -\dfrac{h}{b}(x-at+b)$,

donc : $-at < x < at$, $u(x,t) = \dfrac{h}{b}(at-b)$;

· $0 < x + at < b$ et $0 < x - at < b \Rightarrow \Phi(x+at) = \dfrac{h}{b}(x+at-b)$

et $\Phi(x-at) = \dfrac{h}{b}(x-at-b)$,

donc : $at < x < b - at$, $u(x,t) = \dfrac{h}{b}(x-b)$;

- $x + at > b$ et $0 < x - at < b \Rightarrow \Phi(x+at) = 0$

$$\text{et} \quad \Phi(x - at) = \frac{h}{b}(x - at - b),$$

donc : $b - at < x < b + at, \quad u(x,t) = \frac{h}{2b}(x - at - b);$

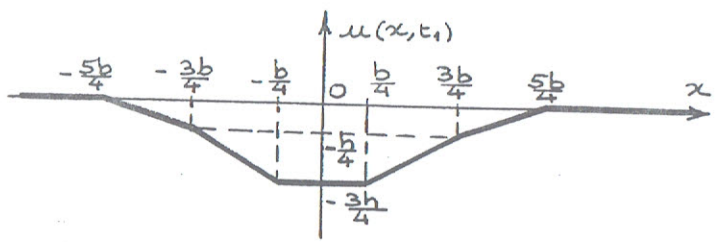
- $b < x + at$ et $x - at > 0 \Rightarrow \Phi(x+at) = 0$ et $\Phi(x - at) = 0$,

donc : $+\infty > x > b + at, \quad u(x,t) = 0.$

– A titre d' exemple d'application, fixons : $t_1 = \frac{b}{4a}$, les formules précédentes donnent :

$$x < -\frac{5b}{4}, \qquad u(x,t_1) = 0,$$
$$-\frac{5b}{4} < x < -\frac{3b}{4}, \qquad u(x,t_1) = -\frac{h}{2b}\left(x + \frac{5b}{4}\right),$$
$$-\frac{3b}{4} < x < -\frac{b}{4}, \qquad u(x,t_1) = -\frac{h}{b}(x+b),$$
$$-\frac{b}{4} < x < \frac{b}{4}, \qquad u(x,t_1) = -\frac{3h}{4},$$
$$\frac{b}{4} < x < \frac{3b}{4}, \qquad u(x,t_1) = \frac{h}{b}(x-b),$$
$$\frac{3b}{4} < x < \frac{5b}{4}, \qquad u(x,t_1) = \frac{h}{2b}\left(x - \frac{5b}{4}\right),$$
$$\frac{5b}{4} < x, \qquad u(x,t_1) = 0;$$

d'où le graphe correspondant :

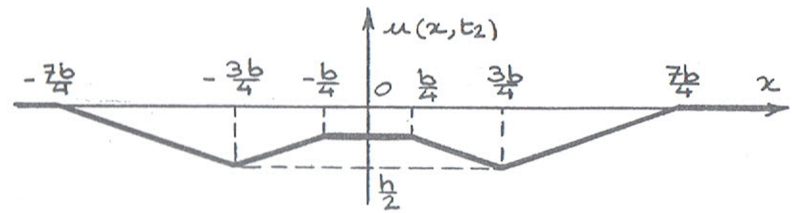


– Cas (II), défini par : $\frac{b}{2a} < t < \frac{b}{a}$, des calculs analogues à ceux conduits pour le cas (I) donnent :

$$-\infty < x < -b - at, \qquad u(x,t) = 0,$$
$$-b - at < x < -at, \qquad u(x,t) = -\frac{h}{2b}(x + at + b),$$
$$-at < x < at - b, \qquad u(x,t) = \frac{h}{2b}(x + at - b),$$

$$at - b < x < b - at, \qquad u(x,t) = \frac{h}{b}(at - b),$$
$$b - at < x < at, \qquad u(x,t) = -\frac{h}{2b}(x - at + b),$$
$$at < x < at + b, \qquad u(x,t) = \frac{h}{2b}(x - at - b),$$
$$at + b < x < +\infty, \qquad u(x,t) = 0;$$

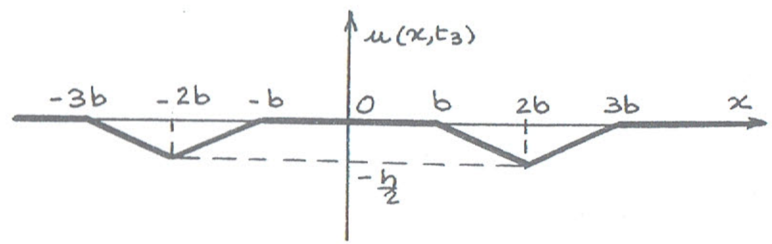
à titre d'exemple, si on fixe : $t_2 = \frac{3b}{4a}$, on obtient le graphe :



– Cas (III) défini par : $t > \frac{b}{a}$, en travaillant comme ci-dessus, des calculs simples donnent :

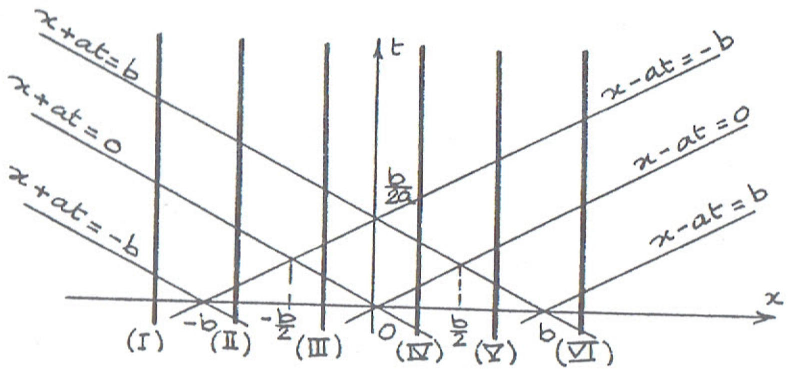
$$-\infty < x < -b - at, \qquad u(x,t) = 0,$$
$$-b - at < x < -at, \qquad u(x,t) = -\frac{h}{2b}(x + at + b),$$
$$-at < x < b - at, \qquad u(x,t) = \frac{h}{2b}(x + at - b),$$
$$b - at < x < at - b, \qquad u(x,t) = 0,$$
$$at - b < x < at, \qquad u(x,t) = -\frac{h}{2b}(x - at + b),$$
$$at < x < b + at, \qquad u(x,t) = \frac{h}{2b}(x - at - b),$$
$$b + at < x < +\infty, \qquad u(x,t) = 0;$$

à titre d'exemple, si on impose : $t_3 = 2\frac{b}{a}$, on obtient le graphe :



2°) On considère maintenant, à x fixé, les diverses situations schématisées sur la figure suivante, par les droites verticales repérées par (I) à (VI).

– Cas (I) défini par : $x < -b$, en parcourant la droite de repère (I) de bas en haut, on trouve :



- $at + x < -b$ et $x - at < -b \Rightarrow \Phi(x+at) = 0$ et $\Phi(x-at) = 0$,

donc : $0 < t < -\frac{b}{a} - \frac{x}{a}$, $u(x,t) = 0$;

- $-b < x + at < 0$ et $x - at < -b \Rightarrow \Phi(x+at) = -\frac{h}{b}(x+at+b)$ et $\Phi(x-at) = 0$,

donc : $-\frac{b}{a} - \frac{x}{a} < t < -\frac{x}{a}$, $u(x,t) = -\frac{h}{2b}(x+at+b)$;

- $0 < x + at < b$ et $x - at < -b \Rightarrow \Phi(x+at) = \frac{h}{b}(x+at-b)$ et $\Phi(x-at) = 0$

donc : $-\frac{x}{a} < t < \frac{b}{a} - \frac{x}{a}$, $u(x,t) = \frac{h}{2b}(x+at-b)$;

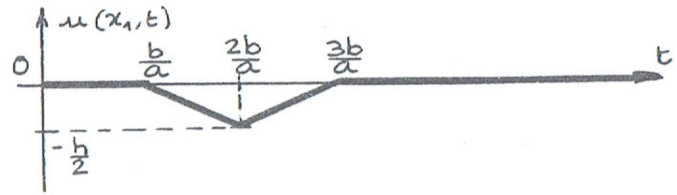
- $x + at > b$ et $x - at < -b \Rightarrow \Phi(x+at) = 0$ et $\Phi(x-at) = 0$,

donc : $\frac{b}{a} - \frac{x}{a} < t < +\infty$, $u(x,t) = 0$.

– A titre d'exemple d'application, fixons : $x_1 = -2b$, les formules ci-dessus donnent :

$$
\begin{array}{ll}
0 < t < \frac{b}{a}, & u(x_1,t) = 0, \\
\frac{b}{a} < t < \frac{2b}{a}, & u(x_1,t) = -\frac{h}{2b}(at-b), \\
\frac{2b}{a} < t < \frac{3b}{a}, & u(x_1,t) = \frac{h}{2b}(at-3b), \\
\frac{3b}{a} < t < +\infty, & u(x_1,t) = 0 ;
\end{array}
$$

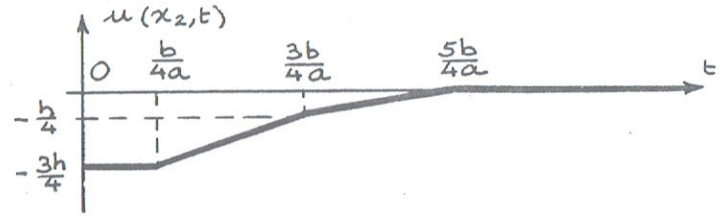
d'où le graphe correspondant :



– Afin de ne pas allonger le corrigé de cet exercice, envisageons pour terminer le cas (III) défini par : $-\frac{b}{2} < x < 0$, des calculs analogues à ceux conduits dans le cas précédent donnent :

$$
\begin{array}{ll}
0 < t < -\frac{x}{a}, & u(x,t) = -\frac{h}{b}(x+b), \\
\frac{x}{a} < t < \frac{x+b}{a}, & u(x,t) = \frac{h}{b}(at-b), \\
\frac{x+b}{a} < t < \frac{b-x}{a}, & u(x,t) = +\frac{h}{2b}(x+at-b), \\
\frac{b-x}{a} < t < +\infty, & u(x,t) = 0 ;
\end{array}
$$

si, à titre d'exemple d'application, on impose : $x_2 = -\frac{b}{4}$, on obtient le graphe :

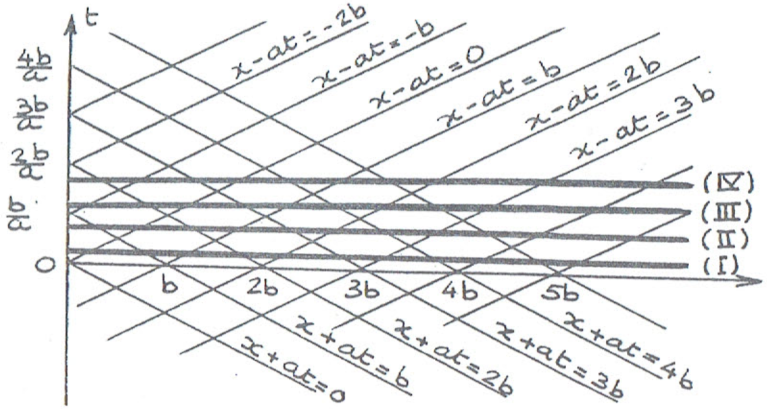


7.2.2. – En travaillant comme dans l'exercice précédent, on pose :

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) = 0$, et $u(x,0) = \Phi(x)$, $x \geq 0$, avec :

$$
(1) \quad \begin{cases}
0 \leq \alpha \leq b, & \Phi(\alpha) = 0, \\
b \leq \alpha \leq 2b, & \Phi(\alpha) = \frac{h}{b}(\alpha - b), \\
2b \leq \alpha \leq 3b, & \Phi(\alpha) = \frac{h}{b}(3b - \alpha), \\
3b \leq \alpha \leq +\infty, & \Phi(\alpha) = 0 ;
\end{cases}
$$

et on construit la figure :



– Or, on note que $\Phi(\alpha)$ est définie pour $\alpha \geq 0$, or $t \in [0, +\infty[$, il en résulte que $x - at$ peut être négatif, il faut donc prolonger la fonction Φ (définie par (1) pour $\alpha \geq 0$) pour $\alpha \leq 0$. C'est l'intervention de la condition frontière : $u(0,t) = 0, \quad t > 0$, qui permet de résoudre cette question.

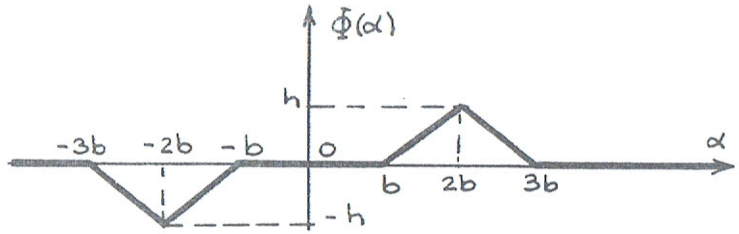
En effet, nous avons : $u(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x+at) + \Phi(x-at)]$, la condition $u(0,t) = 0$, montre que $\forall t > 0$, $\Phi(at) + \Phi(-at) = 0$, on en conclut que : $\Phi(-\beta) = -\Phi(\beta)$, $\beta > 0$; on a donc les formules :

$$(2) \quad \begin{cases} -\infty < \alpha \leq -3b, & \Phi(\alpha) = 0, \\ -3b \leq \alpha \leq -2b, & \Phi(\alpha) = -\frac{h}{b}(3b+\alpha), \\ -2b \leq \alpha \leq -b, & \Phi(\alpha) = -\frac{h}{b}(-\alpha - b), \\ -b \leq \alpha \leq b, & \Phi(\alpha) = 0, \\ b \leq \alpha \leq 2b, & \Phi(\alpha) = \frac{h}{b}(\alpha - b), \\ 2b \leq \alpha \leq 3b, & \Phi(\alpha) = \frac{h}{b}(3b - \alpha), \\ 3b \leq \alpha < +\infty, & \Phi(\alpha) = 0; \end{cases}$$

d'où le graphe de <u>$\Phi(\alpha)$ prolongée</u>, page ci-contre.

1°) On envisage alors, <u>à t fixé</u>, les diverses situations, schématisées sur la figure précédente par les droites horizontales repérées par (I), (II), (III), ...

– Cas (I) défini par : $0 < t < \frac{b}{2a}$, en parcourant la droite de repère (I) de gauche à droite, on voit apparaître, compte-tenu de $\Phi(\alpha)$ donnée par (2) :



• $0 < x < at$, $0 < x + at < b \Rightarrow \Phi(x+at) = 0$, $-b < x - at < 0 \Rightarrow \Phi(x-at) = 0$,
donc : $0 < x < at$, $u(x,t) = 0$;

• $at < x < b - at$, $0 < x + at < b \Rightarrow \Phi(x+at) = 0$, $0 < x - at < b \Rightarrow \Phi(x-at) = 0$,
donc : $at < x < b - at$, $u(x,t) = 0$;

• $b - at < x < b + at$, $b < x + at < 2b \Rightarrow \Phi(x+at) = \frac{h}{b}(x + at - b)$,
$0 < x - at < b \Rightarrow \Phi(x-at) = 0$,
donc : $b - at < x < b + at$, $u(x,t) = \frac{h}{2b}(x + at - b)$;

• $b + at < x < 2b - at$, $b < x + at < 2b \Rightarrow \Phi(x+at) = \frac{h}{b}(x + at - b)$,
$b < x - at < 2b \Rightarrow \Phi(x-at) = \frac{h}{b}(x - at - b)$,
donc : $b + at < x < 2b - at$, $u(x,t) = \frac{h}{b}(x - b)$;

• $2b - at < x < 2b + at$, $2b < x + at < 3b \Rightarrow \Phi(x+at) = \frac{h}{b}(3b - x - at)$,
$b < x - at < 2b \Rightarrow \Phi(x-at) = \frac{h}{b}(x - at - b)$,
donc : $2b - at < x < 2b + at$, $u(x,t) = \frac{h}{b}(b - at)$;

• $2b + at < x < 3b - at$, $2b < x + at < 3b \Rightarrow \Phi(x+at) = \frac{h}{b}(3b - x - at)$,
$2b < x - at < 3b \Rightarrow \Phi(x-at) = \frac{h}{b}(3b - x + at)$,
donc : $2b + at < x < 3b - at$, $u(x,t) = \frac{h}{b}(3b - x)$;

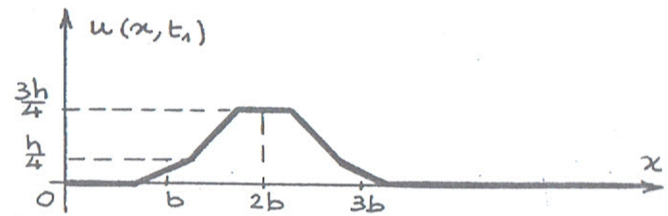
• $3b - at < x < 3b + at$, $3b < x + at < 4b \Rightarrow \Phi(x+at) = 0$,
$2b < x - at < 3b \Rightarrow \Phi(x-at) = \frac{h}{b}(3b - x + at)$,
donc : $3b - at < x < 3b + at$, $u(x,t) = \frac{h}{2b}(3b - x + at)$;

• $3b + at < x < 4b - at$, $3b < x + at < 4b \Rightarrow \Phi(x+at) = 0$,
$3b < x - at < 4b \Rightarrow \Phi(x-at) = 0$,
donc : $3b + at < x < 4b - at$, $u(x,t) = 0$; on a alors : $3b + at < x$, $u(x,t) = 0$.

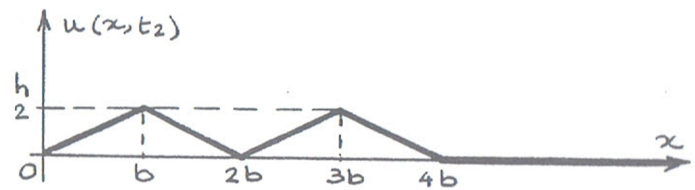
– A titre d'exemple d'application fixons : $t_1 = \frac{b}{4a}$, les formules ci-dessus permettent d'écrire :

$$0 < x < \frac{3b}{4}, \qquad u(x,t_1) = 0,$$
$$\frac{3b}{4} < x < \frac{5b}{4}, \qquad u(x,t_1) = \frac{h}{2b}\left(x - \frac{3b}{4}\right),$$
$$\frac{5b}{4} < x < \frac{7b}{4}, \qquad u(x,t_1) = \frac{h}{b}(x-b),$$
$$\frac{7b}{4} < x < \frac{9b}{4}, \qquad u(x,t_1) = \frac{3h}{4},$$
$$\frac{9b}{4} < x < \frac{11b}{4}, \qquad u(x,t_1) = \frac{h}{b}(3b-x),$$
$$\frac{11b}{4} < x < \frac{13b}{4}, \qquad u(x,t_1) = \frac{h}{2b}\left(\frac{13b}{4} - x\right),$$
$$\frac{13b}{4} < x < +\infty, \qquad u(x,t_1) = 0;$$

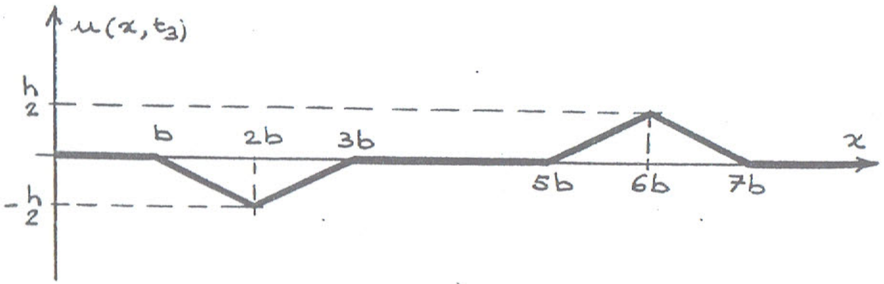
ce qui donne le graphe :



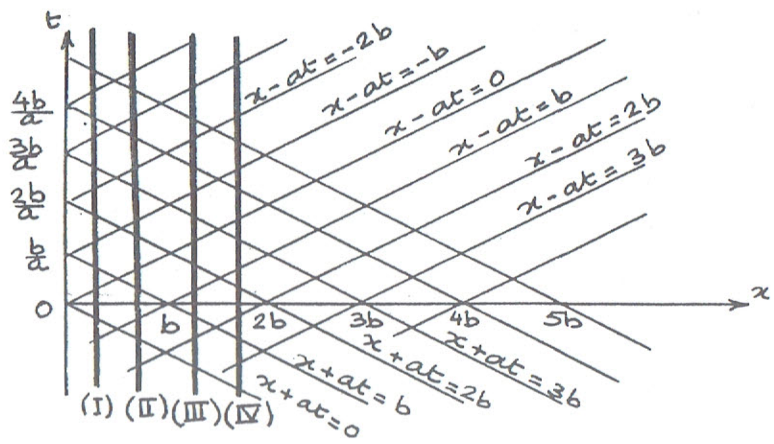
– Des calculs similaires montrent que, si on fixe : $t_2 = \frac{b}{a}$, on obtient le graphe :



et si on impose : $t_3 = \frac{4b}{a}$, on obtient le graphe :



2°) On considère maintenant à x fixé les diverses possibilités schématisées sur la figure suivante, par des droites vericales repérées par (I), (II), (III), ...



– Cas (I) défini par : $0 < x < \frac{b}{2}$, en parcourant la droite de repère (I) de bas en haut, on trouve :

· $0 < t < \frac{x}{a}$, $0 < x + at < b \Rightarrow \Phi(x+at) = 0$ et $0 < x - at < b \Rightarrow \Phi(x-at) = 0$,

donc : $0 < t < \frac{x}{a}$, $u(x,t) = 0$;

· $\frac{x}{a} < t < \frac{b-x}{a}$, $0 < x + at < b \Rightarrow \Phi(x+at) = 0$ et $-b < x - at < 0 \Rightarrow \Phi(x-at) = 0$,

donc : $\frac{x}{a} < t < \frac{b-x}{a}$, $u(x,t) = 0$;

· $\frac{b-x}{a} < t < \frac{b+x}{a}$, $b < x + at < 2b \Rightarrow \Phi(x+at) = \frac{h}{b}(x+at-b)$

et $-b < x - at < 0 \Rightarrow \Phi(x-at) = 0$,

donc : $\frac{b-x}{a} < t < \frac{b+x}{a}$, $u(x,t) = \frac{h}{2b}(x+at-b)$;

· $\frac{b+x}{a} < t < \frac{2b-x}{a}$, $b < x + at < 2b \Rightarrow \Phi(x+at) = \frac{h}{b}(x+at-b)$

et $-2b < x - at < -b \Rightarrow \Phi(x-at) = -\frac{h}{b}(-x+at-b)$,

donc : $\frac{b+x}{a} < t < \frac{2b-x}{a}$, $u(x,t) = \frac{h}{b}x$;

$\cdot \ \frac{2b-x}{a} < t < \frac{2b+x}{a}$, $\quad 2b < x + at < 3b \Rightarrow \Phi(x+at) = \frac{h}{b}(3b - x - at)$

et $-2b < x - at < -b \Rightarrow \Phi(x-at) = -\frac{h}{b}(-x + at - b)$,

donc : $\frac{2b-x}{a} < t < \frac{2b+x}{a}$, $\quad u(x,t) = \frac{h}{b}(2b - at)$;

$\cdot \ \frac{2b+x}{a} < t < \frac{3b-x}{a}$, $\quad 2b < x + at < 3b \Rightarrow \Phi(x+at) = \frac{h}{b}(3b - x - at)$

et $-3b < x - at < -2b \Rightarrow \Phi(x-at) = -\frac{h}{b}(3b + x - at)$,

donc : $\frac{2b+x}{a} < t < \frac{3b-x}{a}$, $\quad u(x,t) = -\frac{h}{b}\,x$;

$\cdot \ \frac{3b-x}{a} < t < \frac{3b+x}{a}$, $\quad 3b < x + at < 4b \Rightarrow \Phi(x+at) = 0$

et $-3b < x - at < -2b \Rightarrow \Phi(x-at) = -\frac{h}{b}(3b + x - at)$,

donc : $\frac{3b-x}{a} < t < \frac{3b+x}{a}$, $\quad u(x,t) = -\frac{h}{2b}(3b + x - at)$;

$\cdot \ \frac{3b+x}{a} < t < \frac{4b-x}{a}$, $\quad 3b < x + at < 4b \Rightarrow \Phi(x+at) = 0$

et $-4b < x - at < -3b \Rightarrow \Phi(x-at) = 0$,

donc : $\frac{3b+x}{a} < t < \frac{4b-x}{a}$, $\quad u(x,t) = 0$.

Finalement, on obtient : $\frac{3b+x}{a} < t$, $\quad u(x,t) = 0$.

– A titre d'exemple d'application, choisissons : $x_1 = \frac{b}{4}$, les formules précédentes donnent :

$0 < t < \frac{3b}{4a}$, $\quad u(x_1,t) = 0$,

$\frac{3b}{4a} < t < \frac{5b}{4a}$, $\quad u(x_1,t) = \frac{h}{2b}\left(at - \frac{3b}{4}\right)$,

$\frac{5b}{4a} < t < \frac{7b}{4a}$, $\quad u(x_1,t) = \frac{h}{4}$,

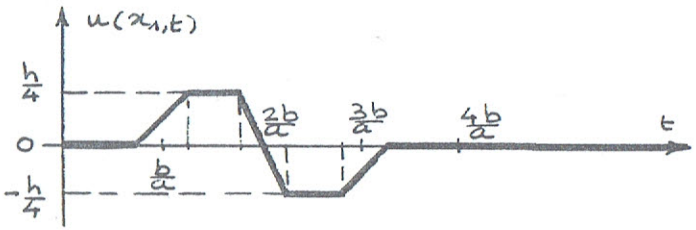
$\frac{7b}{4a} < t < \frac{9b}{4a}$, $\quad u(x_1,t) = \frac{h}{b}(2b - at)$,

$\frac{9b}{4a} < t < \frac{11b}{4a}$, $\quad u(x_1,t) = -\frac{h}{4}$,

$\frac{11b}{4a} < t < \frac{13b}{4a}$, $\quad u(x_1,t) = -\frac{h}{2b}\left(\frac{13b}{4} - at\right)$,

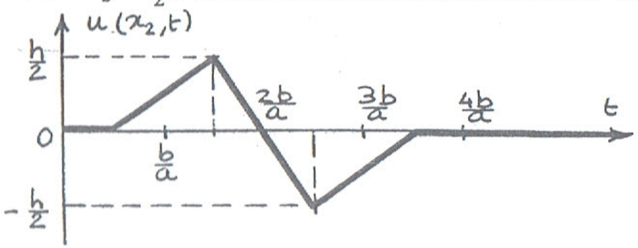
$\frac{13b}{4a} < t < +\infty$, $\quad u(x_1,t) = 0$;

d'où le graphe correspondant :

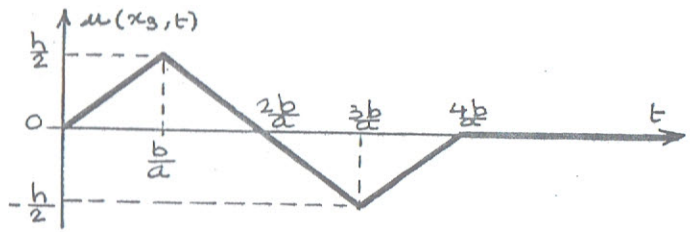


– Ici encore, pour ne pas allonger le corrigé de cet exercice, nous donnons les graphes obtenus pour diverses valeurs de x :

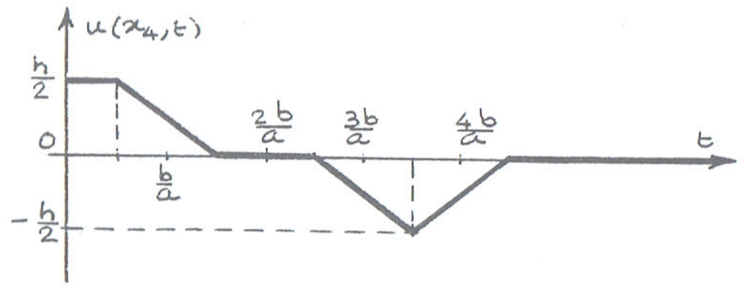
– si on choisit : $x_2 = \frac{b}{2}$, des calculs semblables à ceux conduits ci-dessus donnent :



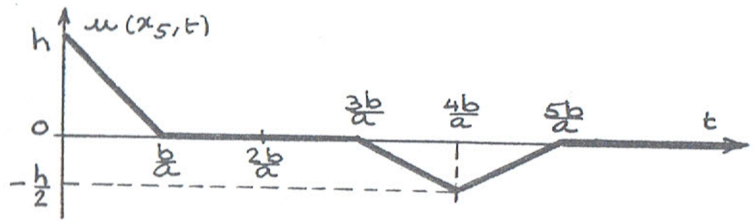
– si on fixe : $x_3 = b$, on obtient la figure :



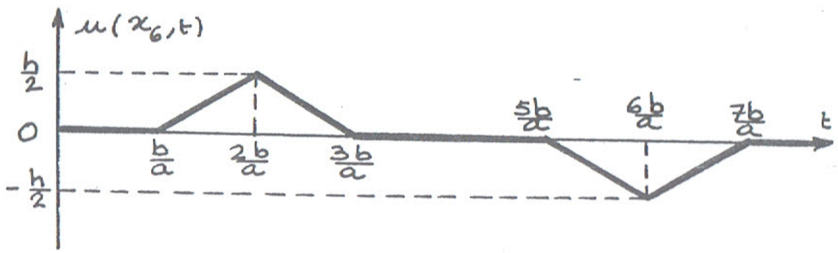
– lorsque : $x_4 = \frac{3b}{2}$, il apparaît :



– pour $x_5 = 2b$, il vient le graphe :



– enfin si : $x_6 = 4b$, on trouve la figure :



7.2.3. – Dans cet exercice, nous avons encore : $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) = 0$,

et $u(x,0) = \Phi(x) = \lambda x$, $0 \le x \le b$, $\lambda = C^{te} > 0$; la solution générale de l'équation des ondes étant : $u(x,t) = f(x-at) + g(x+at)$, f et g étant arbitraires, marquons les conditions initiales données dans le texte, nous obtenons :

$$u(x,0) = \lambda x \Rightarrow f(x) + g(x) = \lambda x, \quad 0 \le x \le b;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \Rightarrow -a f'(x) + a g'(x) = 0,$$

qui donne par intégration : $f(x) - g(x) = K$, $K = C^{te}$, $0 \le x \le b$; on en conclut

$$(1) \quad \begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}(\lambda x + K), \\ g(x) = \frac{1}{2}(\lambda x - K), \end{cases} \quad 0 \le x \le b;$$

par suite, la solution s'écrit :

(2) $\quad u(x,t) = \lambda x, \quad 0 \le x - at \le b \quad$ et $\quad 0 \le x + at \le b$.

– Or, $t \ge 0$ montre qu'il faut prolonger f et g définies par (1) sur l'intervalle [0,b] seulement, les deux conditions aux limites imposées permettent de traiter cette question.

En effet, nous avons : $u(0,t) = 0, \ \forall t \ge 0 \Rightarrow f(-at) + g(at) = 0, \ \forall t \ge 0$,

en posant : $at = \alpha$, nous obtenons :

(3) $\quad f(-\alpha) = -g(\alpha), \quad \forall \alpha \ge 0$;

puisqu'actuellement g, par (1) est définie pour $0 \le \alpha \le b$, on en conclut que :

$$f(-\alpha) = -\frac{1}{2}(\lambda \alpha - K), \quad 0 \le \alpha \le b,$$

posons : $-\alpha = \theta$, il en résulte compte-tenu de (1) :

(4) $\quad f(\theta) = \frac{1}{2}(\lambda\theta + K), \quad -b \le \theta \le b.$

De semblable façon, il apparaît :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(b,t) = 0, \quad \forall t \ge 0 \Rightarrow f'(b-at) + g'(b+at) = 0, \quad \forall t \ge 0,$$

donc :

(5) $\quad g'(b+at) = -f'(b-at), \quad -b \le b - at \le b,$

or : $f'(\theta) = \frac{\lambda}{2}$, il vient : $g'(b+at) = -\frac{\lambda}{2}$, $\quad 0 \le at \le 2b$;

posons : $b + at = v$, $b \le v \le 3b$, alors : $g'(v) = -\frac{\lambda}{2}$, $\quad b \le v \le 3b$,

donne par intégration : $g(v) = -\frac{\lambda v}{2} + C$, $\quad C = C^{te}$, $\quad b \le v \le 3b$,

marquons que g est continue en $v = b$, en utilisant (1), il apparaît :

$$-\frac{\lambda b}{2} + C = \frac{1}{2}(\lambda b - K), \quad \text{donc : } C = \lambda b - \frac{K}{2};$$ finalement, on trouve :

(6) $\quad g(\theta) = \frac{1}{2}[\lambda(2b - \theta) - K], \quad b \le \theta \le 3b.$

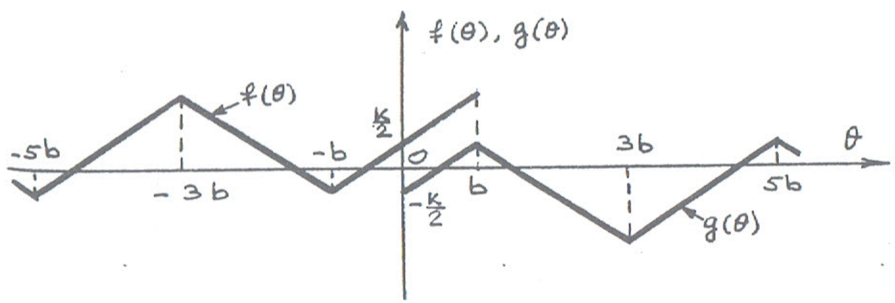
– On retourne alors à la relation (3), des calculs identiques aux précédents donnent :

(7) $\quad f(\theta) = -\frac{1}{2}[\lambda(2b + \theta) - K], \quad -3b \le \theta \le -b;$

puis, on retourne à la relation (5), qui en utilisant (7) montre que : $g'(b+at) = \frac{\lambda}{2}$, $2b \le at \le 4b$, posant encore : $b + at = v$, $3b \le v \le 5b$, en intégrant g' et en marquant que g est continue pour $v = 3b$, on obtient :

(8) $\quad g(\theta) = \frac{1}{2}[\lambda(\theta - 4b) - K], \quad 3b \le \theta \le 5b.$

– En opérant de même, plusieurs fois, on obtient f pour $\theta \le b$ et g pour $\theta \ge 0$; représentons ces fonctions sur une figure, on trouve :



La figure ci-dessus suggère la mise en évidence de périodes pour f et g ; intégrons la relation (5), on obtient :

$$- f(b - at) + g(b + at) = A, \quad A = C^{te}, \quad \forall t \geq 0,$$

fixons $t = 0$ dans cette relation, il vient : $- f(b) + g(b) = A$,

soit en utilisant (1) : $f(b) = \frac{1}{2}(\lambda b + K)$, $g(b) = \frac{1}{2}(\lambda b - K)$,

on en conclut : $A = - K$, qui entraîne :

(9) $f(b - at) - g(b + at) = K, \quad \forall t \geq 0.$

Posons alors dans (3) : $\alpha = at - b$, $\alpha \geq 0$, on obtient : $f(b - at) = - g(at - b)$,
en remplaçant dans (9), il reste : $g(at - b) + g(at + b) = - K$,
le changement de variable : $at - b = u$ montre que : $g(u) + g(u + 2b) = - K$;
en changeant dans cette relation u en $u + 2b$, on obtient :
$g(u + 2b) + g(u + 4b) = - K$,
la différence des deux équations fixe : $g(u + 4b) = g(u)$, qui établit (évident sur la figure) que g est périodique et de période 4b.
La relation (3) met en évidence qu'il en est de même pour f.

– On regroupe alors les résultats précédents :

$-b \leq x - at \leq b$, $\quad f(x - at) = \frac{1}{2}[\lambda(x - at) + K]$,

$-3b \leq x - at \leq -b$, $\quad f(x - at) = -\frac{1}{2}[\lambda(2b + x - at) - K]$,

$-5b \leq x - at \leq -3b$, $\quad f(x - at) = \frac{1}{2}[\lambda(4b + x - at) + K]$,

....

$0 \leq x + at \leq b$, $\quad g(x + at) = \frac{1}{2}[\lambda(x + at) - K]$,

$b \leq x + at \leq 3b$, $\quad g(x + at) = \frac{1}{2}[\lambda(2b - x - at) - K]$,

$3b \leq x + at \leq 5b$, $\quad g(x + at) = \frac{1}{2}[\lambda(x + at - 4b) - K]$,

$5b \leq x + at \leq 7b$, $\quad g(x + at) = \frac{1}{2}[\lambda(6b - x - at) - K]$,

....

et on construit la figure ci-contre
ce qui détermine des zones, il vient alors :

– Zone (I) : $-b < x - at < b$ et $0 < x + at < b$, donc :

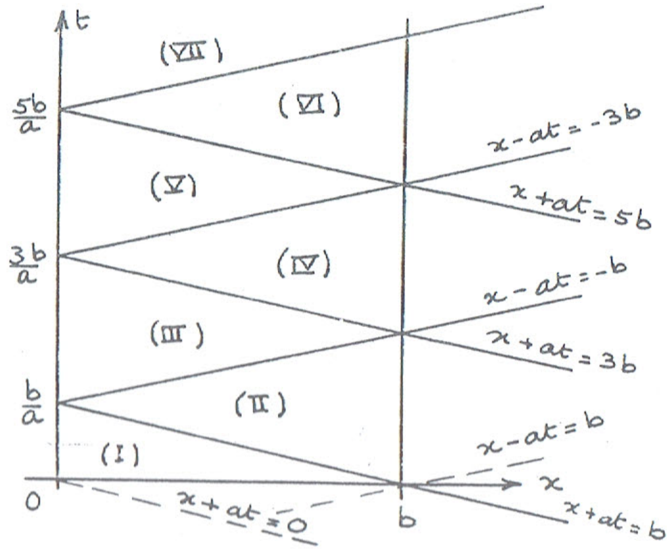
$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\lambda(x - at) + K + \lambda(x + at) - K],$$

soit : $u(x,t) = \lambda x$;

– Zone (II) : $-b < x - at < b$ et $b < x + at < 3b$, donc :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\lambda(x - at) + K + \lambda(2b - x - at) - K],$$

soit : $u(x,t) = \lambda(b - at)$;



– Zone (III) : $-3b < x - at < -b$ et $b < x + at < 3b$, donc :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\lambda(-2b - x + at) + K + \lambda(2b - x - at) - K],$$

soit : $u(x,t) = -\lambda x$;

– Zone (IV) : $-3b < x - at < -b$ et $3b < x + at < 5b$, donc :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\lambda(-2b - x + at) + K + \lambda(x + at - 4b) - K],$$

soit : $u(x,t) = \lambda(at - 3b)$;

– Zone (V) : $-5b < x - ab < -3b$ et $3b < x + at < 5b$, donc :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\lambda(4b + x - at) + K + \lambda(x + at - 4b) - K],$$

soit : $u(x,t) = \lambda x$;
résultat évident puisque f et g sont de même période 4b; par suite, on a :

– Zone (VI) : $u(x,t) = \lambda(5b - at)$;

– Zone (VII) : $u(x,t) = -\lambda x$;

– Zone (VIII) : $u(x,t) = \lambda(at - 7b)$; et ainsi de suite.

– Illustrons ces résultats.
1°) Fixons à titre d'exemple : $x_1 = b$, on voit apparaître :

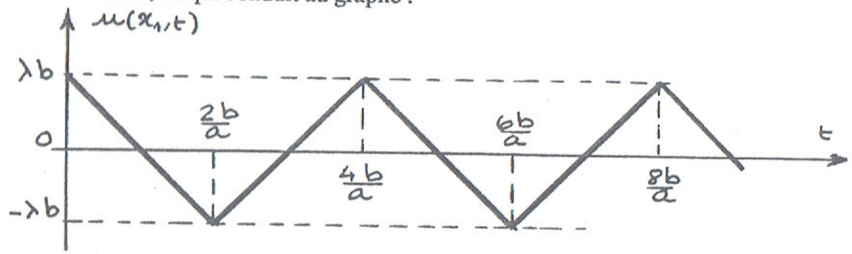
– Zone (II) : $-b < b - at < b$ et $b < b + at < 3b$, donc :
$0 < at < 2b$, $u(x_1,t) = \lambda(b - at)$;

– Zone (IV) : $-3b < b - at < -b$ et $3b < b + at < 5b$, donc :
$2b < at < 4b$, $u(x_1,t) = \lambda(at - 3b)$;

– Zone (VI) : $-5b < b - at < -3b$ et $5b < b + at < 7b$, donc :
$4b < at < 6b$, $u(x_1,t) = \lambda(5b - at)$;

– Zone (VIII) : $-7b < b - at < -5b$ et $7b < b + at < 9b$, donc :
$6b < at < 8b$, $u(x_1,t) = \lambda(at - 7b)$;

et ainsi de suite, ce qui conduit au graphe :



2°) Si on travaille pour : $x_2 = \frac{b}{2}$, on obtient :

– Zone (I) : $-b < \frac{b}{2} - at < b$ et $0 < \frac{b}{2} + at < b$, donc :

$0 < at < \frac{b}{2}$, $u(x_2,t) = \lambda \frac{b}{2}$;

– Zone (II) : $-b < \frac{b}{2} - at < b$ et $b < \frac{b}{2} + at < 3b$, donc :

$\frac{b}{2} < at < \frac{3b}{2}$, $u(x_2,t) = \lambda(b - at)$;

– Zone (III) : $-3b < \frac{b}{2} - at < -b$ et $b < \frac{b}{2} + at < 3b$, donc :

$\frac{3b}{2} < at < \frac{5b}{2}$, $u(x_2,t) = -\lambda \frac{b}{2}$;

– Zone (IV) : $-3b < \frac{b}{2} - at < -b$ et $3b < \frac{b}{2} + at < 5b$, donc :

$\frac{5b}{2} < at < \frac{7b}{2}$, $u(x_2,t) = \lambda(at - 3b)$;

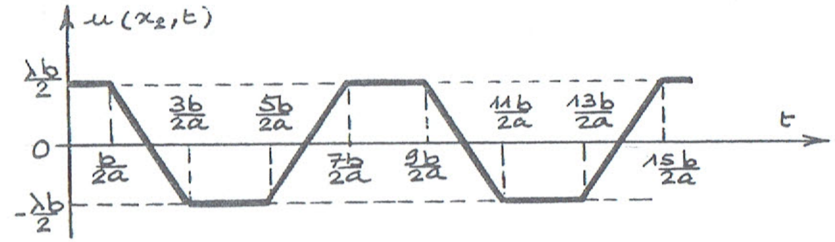
– Zone (V) : $-5b < \frac{b}{2} - at < -3b$ et $3b < \frac{b}{2} + at < 5b$, donc :

$\frac{7b}{2} < at < \frac{9b}{2}$, $u(x_2,t) = \lambda \frac{b}{2}$;

– Zone (VI) : $-5b < \frac{b}{2} - at < -3b$ et $5b < \frac{b}{2} + at < 7b$, donc :

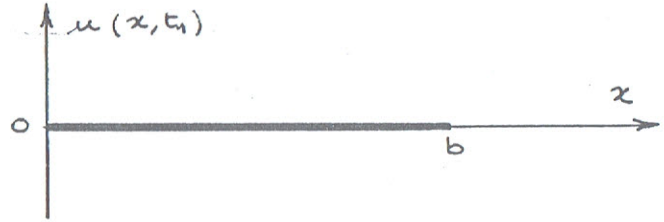
$\frac{9b}{2} < at < \frac{11b}{2}$, $u(x_2,t) = \lambda(5b - at)$;

et ainsi de suite, ce qui donne la figure ci-contre :

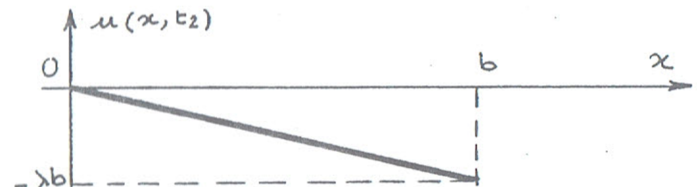


3°) Si maintenant on travaille pour $t = C^{te}$, on a par exemple :

– 3a) en imposant : $t_1 = \frac{b}{a}$, il vient zone (II) : $u(x,t_1) = 0$, $\forall x \in [0,b]$, d'où le graphe :



– 3b) si on fixe : $t_2 = \frac{2b}{a}$, on obtient zone (III) : $u(x,t_2) = -\lambda x$, qui donne la figure :



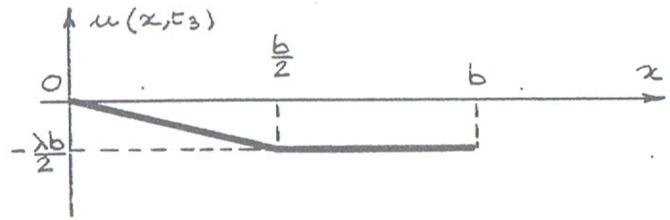
– 3c) enfin, si on suppose que : $t_3 = \frac{5b}{2a}$, on est situé en partie en zone (III) et en partie en zone (IV), on a pour la partie située en zone (III) :

$0 \le x \le \frac{b}{2}$, $u(x,t_3) = -\lambda x$,

et pour la partie située en zone (IV) :

$\frac{b}{2} \le x \le b$, $u(x,t_3) = -\frac{\lambda b}{2}$,

qui donne le graphe :



CHAPITRE 8

Equation de la chaleur - Equation de LAPLACE

EXERCICES

8.1.1. – En utilisant la transformée de FOURIER COSINUS, donner une solution de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad a = C^{te} > 0,$$

satisfaisant la condition aux limites : $\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) = \varnothing(t), \quad 0 < x < +\infty,$

et la condition initiale : $u(x,0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$

8.1.2. – En utilisant la transformée de FOURIER SINUS, donner une solution de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad a = C^{te} > 0,$$

satisfaisant la condition aux limites : $u(0,t) = \varnothing(t), \quad 0 < t < +\infty,$

et la condition initiale : $u(x,0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$

8.1.3. – En utilisant la transformée de FOURIER, donner une solution de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad a = C^{te} > 0,$$

g étant une fonction donnée, u vérifiant la condition initiale :

$u(x,0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty.$

8.2.1. – Soit l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad L \text{ fini}, \quad 0 < t < +\infty, \quad k = C^{te} > 0,$$

en déterminer, en utilisant la méthode de séparation des variables, une solution particulière satisfaisant les conditions :

$$u(0,t) = at, \quad a = C^{te}, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(L,t) = u_0, \quad u_0 = C^{te}, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x,0) = u_1, \quad u_1 = C^{te}, \quad 0 < x < L.$$

8.2.2. – Soit l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < t < +\infty,$$

en déterminer, en utilisant la méthode de séparation des variables, une solution particulière satisfaisant les conditions :

$$u(1,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(r,0) = f(r,t), \quad 0 < r < 1,$$

et on veut $u(r,t)$ bornée pour $0 \le r \le 1, \quad 0 < t < +\infty.$

8.2.3. – Reprendre l'exercice 8.2.1. et le traiter à l'aide de la transformation de LAPLACE.

8.2.4. – En travaillant avec la transformation de LAPLACE, donner une solution de l'équation :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < L, \quad L \text{ fini}, \quad 0 < t < +\infty,$$

$a = C^{te} > 0, \ b = C^{te} > 0,$ satisfaisant les conditions :

$$u(0,t) = u_0 e^{-Kt}, \quad u_0 = C^{te} > 0, \quad K = C^{te} > 0, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(L,t) = u_1, \quad u_1 = C^{te} > 0, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x,0) = u_0, \quad u_0 \text{ donné ci-dessus}, \quad 0 < x < L.$$

8.3.1. – Résoudre en utilisant la méthode de séparation des variables le problème de DIRICHLET intérieur au rectangle : $0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad a, b = C^{tes} > 0,$ avec :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

et les conditions aux limites :

$$\begin{cases} u(0,y) = f(y), \\ u(a,y) = g(y), \end{cases} 0 < y < b; \quad \begin{cases} u(x,0) = h(x), \\ u(x,b) = k(x), \end{cases} 0 < x < a;$$

on donne aussi : $f(0) = h(0), \ f(b) = k(0), \ g(b) = k(a)$ et $g(0) = h(a).$

8.3.2. – Soit l'équation :

$$c^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < t < +\infty,$$

$a, b = C^{tes} > 0$; en déterminer, en utilisant la méthode de séparation des variables, une solution particulière vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} u(0,y,t) = 0, \\ u(a,y,t) = 0, \end{cases} \begin{bmatrix} 0 < y < b \\ 0 < t < +\infty \end{bmatrix} ; \quad \begin{cases} u(x,0,t) = 0, \\ u(x,b,t) = 0, \end{cases} \begin{bmatrix} 0 < x < a \\ 0 < t < +\infty \end{bmatrix} ;$$

$$\text{et :} \begin{cases} u(x,y,0) = f(x,y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = g(x,y), \end{cases} \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b.$$

8.4.1. – En utilisant la transformée de FOURIER SINUS, donner une solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < y < a, \quad a = C^{te} > 0,$$

satisfaisant les conditions : $u(0,y) = 0, \quad 0 < y < a,$

$$\lim_{x \to +\infty} u(x,y) = 0, \text{ uniformément en } y, \quad \begin{cases} u(x,a) = 0, \\ u(x,0) = f(x), \end{cases} \quad 0 < x < +\infty.$$

8.4.2. – En utilisant la transformée de FOURIER, donner une solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad c = C^{te} > 0,$$

satisfaisant les conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x,0) = e^{-\pi x^2}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty.$$

SOLUTIONS

8.1.1. – En utilisant la notation du cours, on pose :

$$(1) \qquad \varphi(\lambda,t) = 2 \int_0^{+\infty} u(x,t) \cos(2\pi\lambda x)\, dx,$$

et on a réciproquement :

$$u(x,t) = 2 \int_0^{+\infty} \varphi(\lambda,t) \cos(2\pi\lambda x)\, d\lambda,$$

en supposant que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u(x,t)|\, dx < +\infty, \quad 0 < t < +\infty.$

Dérivons, partiellement par rapport à t, les deux membres de l'équation (1), il vient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\lambda,t) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \cos(2\pi\lambda x)\, dx,$$

or, on déduit de l'équation aux dérivées partielles donnée dans le texte : $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, qui, remis dans l'équation précédente, impose :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\lambda,t) = 2a^2 \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \cos(2\pi\lambda x)\, dx ;$$

en intégrant par parties, on obtient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\lambda,t) = 2a^2 \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \cos(2\pi\lambda x) \Big|_0^{+\infty} + 2\pi\lambda \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \sin(2\pi\lambda x)\, dx \right\}$$

utilisant la condition aux limites du texte et en supposant que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$, il reste :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\lambda,t) = 2a^2 \left\{ -\varnothing(t) + 2\pi\lambda \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \sin(2\pi\lambda x)\, dx \right\};$$

en intégrant à nouveau par parties, on trouve :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\lambda,t) = 2a^2 \left\{ -\varnothing(t) + 2\pi\lambda \left[u(x,t) \sin(2\pi\lambda x) \Big|_0^{+\infty} - 2\pi\lambda \int_0^{+\infty} u(x,t) \cos(2\pi\lambda x)\, dx \right] \right\};$$

en supposant aussi que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} u(x,t) = 0$, et en utilisant (1), il apparaît :

$$(3) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\lambda,t) + 4a^2\pi^2\lambda^2 \varphi(\lambda,t) = -2a^2 \varnothing(t).$$

– On associe à cette équation, l'équation différentielle :

$$(4) \qquad \frac{d\varphi}{dt}(\lambda,t) + 4a^2\pi^2\lambda^2 \varphi(\lambda,t) = -2a^2 \varnothing(t),$$

la solution générale de l'équation homogène associée à (4) est :

$$\varphi(\lambda,t) = K\, e^{-4a^2\pi^2\lambda^2 t}, \quad K = C^{te};$$

la méthode de variation de la constante entraîne : $dK = -2a^2 e^{4a^2\pi^2\lambda^2 t}\, \emptyset(t)\, dt$,

qui donne : $K = -2a^2 \displaystyle\int_0^t e^{4a^2\pi^2\lambda^2 \tau}\, \emptyset(\tau)\, d\tau + C, \quad C = C^{te};$

or, la condition initiale $u(x,0) = 0$, donne de (1) : $\varphi(\lambda,0) = 0$, remplaçant K par son expression dans φ et en utilisant ce résultat, on obtient : $C = 0$; d'où la conclusion

$$(5) \qquad \varphi(\lambda,t) = -2a^2 \int_0^t e^{-4a^2\pi^2\lambda^2(t-\tau)}\, \emptyset(\tau)\, d\tau.$$

– Utilisant la formule de réciprocité (2), on écrit :

$$u(x,t) = 2\int_0^{+\infty} \left\{ -2a^2 \int_0^t e^{-4a^2\pi^2\lambda^2(t-\tau)}\, \emptyset(\tau)\, d\tau \right\} \cos(2\pi\lambda x)\, d\lambda,$$

en supposant que l'on peut permuter les intégrations, il vient :

$$(6) \qquad u(x,t) = -4a^2 \int_0^t \emptyset(t) \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-4a^2\pi^2\lambda^2(t-\tau)} \cos(2\pi\lambda x)\, d\lambda \right\} d\tau.$$

Envisageons l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-4a^2\pi^2\lambda^2(t-\tau)} \cos(2\pi\lambda x)\, d\lambda$,

posons : $2a\pi\lambda\sqrt{t-\tau} = z \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \dfrac{z}{2a\pi\sqrt{t-\tau}}$, qui donne : $d\lambda = \dfrac{dz}{2a\pi\sqrt{t-\tau}}$,

on trouve : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2a\pi\sqrt{t-\tau}}\, e^{-z^2} \cos\left(\frac{xz}{a\sqrt{t-\tau}}\right) dz$, posons aussi : $\dfrac{x}{a\sqrt{t-\tau}} = y$,

on obtient : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2a\pi\sqrt{t-\tau}}\, e^{-z^2} \cos yz\, dz$,

soit alors l'intégrale : $J(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-z^2} \cos yz\, dz$;

dérivons par rapport à y, il vient : $\dfrac{dJ}{dy}(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -z\, e^{-z^2} \sin yz\, dz$,

intégrons par parties, il apparaît :

$$\frac{dJ}{dy}(y) = \frac{1}{2} e^{-z^2} \sin yz \Big|_0^{+\infty} - \frac{y}{2} \int_0^{+\infty} e^{-z^2} \cos yz\, dz,$$

donc : $\dfrac{dJ}{dy}(y) = -\dfrac{y}{2} J(y)$, qui s'intègre et donne : $J(y) = C_1\, e^{-\frac{y^2}{4}}, \quad C_1 = C^{te}$;

or on sait que : $J(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on en conclut que : $J(y) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-\frac{y^2}{4}}$.

En retournant à I on obtient : $I = \dfrac{1}{4a\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}$,

et enfin de (6) : $u(x,t) = -\dfrac{a}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^t \frac{\emptyset(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\tau$;

c'est l'expression intégrale de la solution cherchée.

8.1.2. – On pose maintenant :

$$(1) \qquad \varphi(\lambda,t) = 2\int_0^{+\infty} u(x,t) \sin(2\pi\lambda x)\, dx,$$

et réciproquement :

$$(2) \qquad u(x,t) = 2\int_0^{+\infty} \varphi(\lambda,t) \sin(2\pi\lambda x)\, d\lambda,$$

en travaillant comme dans l'exercice précédent, et en posant les conditions :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0,$$

on obtient l'équation aux dérivées partielles satisfaite par φ et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$:

$$(3) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t}(\lambda,t) + 4a^2\pi^2\lambda^2\varphi(t) = 4\pi a^2\lambda\, \emptyset(t).$$

L'équation sans second membre donne encore : $\varphi(\lambda,t) = K\, e^{-4a^2\pi^2\lambda^2 t}$, $K(\lambda)$, la méthode de variation de la constante ($K(\lambda,t)$) entraîne :

$$\frac{\partial K}{\partial t} = 4\pi a^2 \lambda\, e^{4a^2\pi^2\lambda^2 t}\, \varnothing(t),$$

utilisant aussi la condition initiale $u(x,0) = 0$, il vient la conclusion :

(4) $$\varphi(\lambda,t) = 4\pi a^2 \lambda \int_0^t e^{-4a^2\pi^2\lambda^2(t-\tau)}\, \varnothing(\tau)\, d\tau.$$

– Utilisant la formule de réciprocité (2), on écrit :

$$u(x,t) = 2\int_0^{+\infty} \left\{ 4\pi a^2 \lambda \int_0^t e^{-4a^2\pi^2\lambda^2(t-\tau)}\, \varnothing(\tau)\, d\tau \right\} \sin(2\pi\lambda x)\, d\lambda,$$

en supposant encore que l'on peut permuter les intégrations, on a :

(5) $$u(x,t) = 8\pi a^2 \int_0^t \varnothing(\tau) \left\{ \int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-4a^2\pi^2\lambda^2(t-\tau)} \sin(2\pi\lambda x)\, d\lambda \right\} d\tau.$$

Envisageons l'intégrale : $W = \int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-4a^2\pi^2\lambda^2(t-\tau)} \sin(2\pi\lambda x)\, d\lambda$,

posons : $2a\pi\lambda\sqrt{t-\tau} = z \;\Leftrightarrow\; \lambda = \dfrac{z}{2a\pi\sqrt{t-\tau}} \;\Rightarrow\; d\lambda = \dfrac{dz}{2a\pi\sqrt{t-\tau}}$,

et posons encore : $\dfrac{x}{a\sqrt{t-\tau}} = y$, on obtient : $W = \dfrac{1}{4a^2\pi^2(t-\tau)} \displaystyle\int_0^{+\infty} z\, e^{-z^2} \sin yz\, dz$;

considérons l'intégrale : $N = \displaystyle\int_0^{+\infty} z\, e^{-z^2} \sin yz\, dz$,

une intégration par parties donne :

$$N = -\frac{1}{2} e^{-z^2} \sin yz \,\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} z\, e^{-z^2} \cos yz\, dz;$$

le terme intégré étant nul, il reste : $N = \dfrac{y}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-z^2} \cos yz\, dz$,

mais l'intégrale qui apparaît dans N est l'intégrale J (y) de l'exercice précédent, on en conclut que :

$$N = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\, y\, e^{-\frac{y^2}{4}};$$

retournant à W, et en remplaçant y par son expression, on obtient :

$$W = \frac{1}{16a^3\pi\sqrt{\pi}\,(t-\tau)^{3/2}}\, x\, e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}},$$

qui entraîne de (5) :

$$u(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varnothing(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\tau;$$

c'est l'expression intégrale de la solution cherchée.

8.1.3. – En utilisant la notation du cours, on pose :

(1) $$\varphi(\lambda,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda x}\, u(x,t)\, dx,$$

et on a réciproquement :

(2) $$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\lambda x}\, \varphi(\lambda,t)\, d\lambda;$$

on déduit de (1) : $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(\lambda,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda x} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, dx$,

utilisant l'équation aux dérivées partielles du texte, il vient :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\lambda,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda x} \left\{ a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + g(x,t) \right\} dx;$$

en admettant que g admette une transformée de FOURIER

(3) $$G(\lambda,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda x}\, g(x,t)\, dx,$$

on trouve : $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(\lambda,t) = a^2 \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\, dx + G(\lambda,t)$;

envisageons l'intégrale du membre de droite, on intègre par parties, ce qui donne :

$$a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,dx = a^2 \left\{ e^{-2i\pi\lambda x} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + 2i\pi\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda x} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dx \right\};$$

en supposant que : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$,

il reste :

$$a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,dx = 2i\pi\lambda\, a^2 \left\{ e^{-2i\pi\lambda x}\, u(x,t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + 2i\pi\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda x}\, u(x,t)\,dx \right\},$$

en supposant aussi que : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} u(x,t) = 0$,
on obtient :

$$a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,dx = -4\,a^2 \pi^2 \lambda^2\, \varphi(\lambda,t).$$

D'où l'équation aux dérivées partielles définissant φ :

(4) $$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\lambda,t) + 4\,a^2 \pi^2 \lambda^2\, \varphi(\lambda,t) = G(\lambda,t).$$

– Envisageons l'équation différentielle associée à (4), λ jouant le rôle d'un paramètre :

$$\frac{d\varphi}{dt}(\lambda,t) = -4\,a^2 \pi^2 \lambda^2\, \varphi(\lambda,t) + G(\lambda,t),$$

l'équation homogène associée admet la solution générale : $\varphi(\lambda,t) = C\, e^{-4a^2\pi^2\lambda^2 t}$,

la méthode de variation de la constante impose : $dC = e^{4a^2\pi^2\lambda^2 t}\, G(\lambda,t)\,dt$,
qui donne par intégration :

$$C(\lambda,t) = \int_0^t e^{4a^2\pi^2\lambda^2\tau}\, G(\lambda,\tau)\,d\tau + K(\lambda),$$

ce qui entraîne :

$$\varphi(\lambda,t) = e^{-4a^2\pi^2\lambda^2 t} \left\{ \int_0^t e^{4a^2\pi^2\lambda^2\tau}\, G(\lambda,\tau)\,d\tau + K(\lambda) \right\};$$

or, la condition initiale : $u(x,0) = 0$, montre que l'on a de (1) : $\varphi(\lambda,0) = 0$,
ce qui impose : $K(\lambda) = 0$; on en conclut que :

$$\varphi(\lambda,t) = \int_0^t e^{-4a^2\pi^2\lambda^2(t-\tau)}\, G(\lambda,\tau)\,d\tau \;;$$

et par la formule de réciprocité, on tire :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_0^t e^{-4a^2\pi^2\lambda^2(t-\tau)}\, G(\lambda,\tau)\,d\tau \right\} e^{2i\pi\lambda x}\,d\lambda\,;$$

ou encore, en supposant que l'on peut permuter les intégrations :

(5) $$u(x,t) = \int_0^t \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4a^2\pi^2\lambda^2(t-\tau)}\, e^{2i\pi\lambda x}\, G(\lambda,\tau)\,d\lambda \right\} d\tau.$$

– Or, on a de (3) :

$$u(x,t) = \int_0^t \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda\alpha}\, g(\alpha,\tau)\,d\alpha \right] e^{-4a^2\pi^2\lambda^2(t-\tau)}\, e^{2i\pi\lambda x}\,d\lambda \right\} d\tau\,;$$

or, on peut permuter les deux ordres d'intégration en λ et α ; ce qui donne :

(6) $$u(x,t) = \int_0^t \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4a^2\pi^2\lambda^2(t-\tau)}\, e^{+2i\pi\lambda(x-\alpha)}\,d\lambda \right] g(\alpha,\tau)\,d\alpha \right\} d\tau.$$

Envisageons l'intégrale :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4a^2\pi^2\lambda^2(t-\tau)}\, e^{2i\pi\lambda(x-a)}\,d\lambda,$$

des calculs classiques et simples montrent que :

$$I = 2\int_0^{+\infty} e^{-4a^2\pi^2\lambda^2(t-\tau)} \cos 2\pi\lambda(x-\alpha)\,d\lambda\,;$$

effectuons le changement de variable :

$$2a\pi\lambda\sqrt{t-\tau} = z \Leftrightarrow \lambda = \frac{z}{2a\pi\sqrt{t-\tau}}, \quad \text{et} \quad d\lambda = \frac{dz}{2a\pi\sqrt{t-\tau}},$$

posons encore : $\dfrac{x-\alpha}{a\sqrt{t-\tau}} = y$, il vient : $I = \dfrac{1}{a\pi\sqrt{t-\tau}}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-z^2}\cos yz\,dz$,

or, on a vu dans l'exercice 8.1.1 que : $J(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-z^2}\cos yz\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-\frac{y^2}{4}}$,

ce qui entraîne : $I = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}}\,e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4a^2(t-\tau)}}$.

En retournant à (6), il apparaît :

$$u(x,t) = \int_0^t \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}}\, e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4a^2(t-\tau)}}\, g(\alpha,\tau)\,d\alpha \right\} d\tau,$$

c'est l'expression intégrale de la solution cherchée.

8.2.1. – Effectuons, en premier lieu, un changement de fonction inconnue afin de rendre homgènes les conditions aux limites; posons à cet effet :

$$u(x,t) = U(x,t) + (a_1 x + a_2)\,at + (a_3 x + a_4)\,u_0,$$

a_1, a_2, a_3, et a_4 étant des constantes ;
on les détermine en imposant à U les conditions aux limites homogènes :
$U(0,t) = 0$ et $U(L,t) = 0$, nous obtenons : $u(0,t) = at = a_2 at + a_4 u_0$,
ce qui veut : $a_2 = 1$ et $a_4 = 0$, puis : $u(L,t) = u_0 = (a_1 L + 1)\,at + a_3 L u_0$, qui fixe :
$a_1 = -\dfrac{1}{L}$ et $a_3 = \dfrac{1}{L}$;
d'où le changement de fonction :

$$(1) \qquad u(x,t) = U(x,t) + \left(1 - \frac{x}{L}\right)at + \frac{x}{L}u_0,$$

on en déduit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t), \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial U}{\partial t}(x,t) + a\left(1 - \frac{x}{L}\right),$$

d'où le nouveau problème :

$$(2) \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial t} - k\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = a\left(\dfrac{x}{L} - 1\right), \quad k = C^{te} > 0, \quad a = C^{te}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < +\infty, \\ \begin{cases} U(0,t) = 0, \\ U(L,t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < +\infty, \\ U(x,0) = u_1 - \dfrac{x}{L}u_0, \quad 0 < x < L. \end{array}\right.$$

– Travaillons en premier lieu avec l'équation homogène : $\dfrac{\partial U}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$

posons : $U(x,t) = X(x)\,T(t)$,
en remplaçant dans l'équation précédente, on obtient :

$$(3) \qquad \frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = C, \qquad C = C^{te} \in \mathbb{C} \quad (\text{a priori}).$$

L'équation en X s'écrit : $X'' = CX$, elle a pour équation conjuguée : $\overline{X}'' = \overline{C}\,\overline{X}$,
on déduit de ces deux équations différentielles :

$$\int_0^L (X''\overline{X} - \overline{X}''X)\,dx = (C - \overline{C})\int_0^L X\overline{X}\,dx,$$

en intégrant le membre de gauche par parties, on obtient :

$$X'\overline{X}\,\Big|_0^L - \overline{X}'X\,\Big|_0^L = (C - \overline{C})\int_0^L X\overline{X}\,dx,$$

mais les conditions aux limites du problème (2), imposent :

$$X(0) = 0, \quad \overline{X}(0) = 0, \quad X(L) = 0 \quad \text{et} \quad \overline{X}(L) = 0,$$

par ailleurs, X n'étant pas identiquement nulle sur [0,L], il en résulte : $C = \overline{C}$,
c'est-à-dire : $C \in \mathbb{R}$; examinons s'il est possible de déterminer le signe de C, l'équation en X donne aussi :

$$\int_0^L X''X\,dx = C\int_0^L X^2\,dx,$$

soit, en intégrant le membre de gauche par parties :

$$X'X\,\Big|_0^L - \int_0^L X'^2\,dx = C\int_0^L X^2\,dx,$$

compte-tenu des conditions aux limites, il reste : $C\displaystyle\int_0^L X^2\,dx = -\int_0^L X'^2\,dx$;

or, X' ne peut pas être identiquement nulle sur [0,L] car s'il en était ainsi, X y serait constante et aurait par exemple la valeur de X(0) qui est nulle.
On en conclut que : $C < 0$.

On pose alors :

(4) $\quad C = -\lambda^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*,$

l'équation en X devient : $X'' = -\lambda^2 X$, dont la solution générale est :

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x, \qquad A, B = C^{tes};$$

la condition $X(0) = 0$ impose : $A = 0$, et la condition $X(L) = 0$, afin de ne pas avoir $X(x) \equiv 0$, pour $x \in [0,L]$ entraîne :

(5) $\quad \lambda L = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}^*;$

d'où les fonctions propres : $X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{L}x, \quad n \in \mathbb{Z}^*;$

or, on remarque X_{-n} appartient au même sous-espace de l'espace vectoriel des applications que X_n, il en résulte que les fonctions propres sont :

(6) $\quad X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{L}x, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n = C^{te}$

Il est aisé de vérifier que les fonctions propres X_n sont orthogonales entre elles sur [0,L], relativement à la fonction poids $\rho(x) = 1$.

– Développons le second membre de l'équation aux dérivées partielles du problème (2), en série des fonctions propres, en ayant normé, au préalable, ces fonctions propres; posons :

$$\int_0^L X_n^2(x)\,dx = 1 = B_n^2 \int_0^L \sin^2\frac{n\pi}{L}x\,dx,$$

ou : $$\frac{B_n^2}{2}\int_0^L \left(1 - \cos\frac{2n\pi}{L}x\right)dx = 1,$$

on choisit arbitrairement : $B_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$, d'où les fonctions propres normées :

(7) $\quad X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x, \quad n \in \mathbb{N}^*.$

Posons alors : $a\left(\frac{x}{L} - 1\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n X_n(x)$, multiplions les deux membres de cette relation par X_p et intégrons sur [0,L], on trouve :

$$a\int_0^L \left(\frac{x}{L} - 1\right) X_p(x)\,dx = \int_0^L \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n X_n(x)\right] X_p(x)\,dx,$$

compte-tenu que les fonctions propres sont orthonormées, il reste :

$$\alpha_p = a\sqrt{\frac{2}{L}}\int_0^L \left(\frac{x}{L} - 1\right)\sin\frac{p\pi}{L}x\,dx,$$

un calcul élémentaire donne : $\alpha_p = -\frac{a\sqrt{2L}}{p\pi}, \quad p \in \mathbb{N}^*$, on écrit donc :

(8) $\quad a\left(\frac{x}{L} - 1\right) = -\frac{a\sqrt{2L}}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}X_n(x),$

les X_n étant définies par (7).

– On écrit alors : $U(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(x)\,T_n(t)$, en utilisant (8), l'équation aux dérivées partielles de (2) s'écrit, en utilisant (4) et (5) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\{T_n'(t)X_n(x) - kT_n(t)X_n''(x)\} = -\frac{a\sqrt{2L}}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}X_n(x),$$

or, on a vu que : $X_n''(x) = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}X_n(x)$, ce qui entraîne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{T_n'(t) + k\frac{n^2\pi^2}{L^2}T_n(t) + \frac{a\sqrt{2L}}{n\pi}\right\}X_n(x) = 0;$$

les X_n constituant une base de $L^2_{[0,L]}$, il en découle l'équation définissant les fonctions T_n

$$T_n'(t) + \frac{kn^2\pi^2}{L^2}T_n(t) = -\frac{a\sqrt{2L}}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

dont la solution générale s'écrit :

(9) $\quad T_n(t) = H_n e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t} - \frac{aL^2\sqrt{2L}}{kn^3\pi^3}, \quad H_n = C^{te}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$

– Pour déterminer les constantes H_n, on utilise la condition initiale :

$U(x,0) = u_1 - \frac{x}{L}u_0, \quad 0 < x < L$; posons alors : $U(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n X_n(x),$

en opérant comme le second membre, on obtient :

$$\int_0^L \left(u_1 - \frac{x}{L}u_0\right)X_p(x)\,dx = \int_0^L\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n X_n(x)\right]X_p(x)\,dx,$$

les fonctions propres étant orthonormées, il reste :

$$\beta_p = \int_0^L\left(u_1 - \frac{x}{L}u_0\right)\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{p\pi}{L}x\,dx,$$ un calcul simple donne :

(10) $\quad \beta_p = \frac{\sqrt{2L}}{p\pi}\{u_1 + (-1)^p(u_0 - u_1)\}.$

On obtient alors l'équation : $U(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(0)\, X_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n X_n(x)$,

qui impose : $T_n(0) = \beta_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, donc de (9) et (10) :

$$H_n = \frac{aL^2\sqrt{2L}}{k n^3 \pi^3} + \frac{\sqrt{2L}}{n\pi}\{u_1 + (-1)^n (u_0 - u_1)\}, \quad n \in \mathbb{N}^*;$$

d'où la solution particulière du problème (2) :

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \left[\frac{aL^2\sqrt{2L}}{k n^3 \pi^3} + \frac{\sqrt{2L}}{n\pi}(u_1 + (-1)^n (u_0 - u_1)) \right] e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t} - \frac{aL^2\sqrt{2L}}{k n^3 \pi^3} \right\} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

que l'on réécrit :

$$U(x,t) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \left[\frac{aL^2}{k n^3 \pi^3} + \frac{1}{n\pi}(u_1 + (-1)^n (u_0 - u_1)) \right] e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t} - \frac{aL^2}{k n^3 \pi^3} \right\} \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Retournons alors au problème initial, on a de (1) une solution particulière :

$$u(x,t) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) at + \frac{x}{L} u_0 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \left[\frac{aL^2}{k n^3 \pi^3} + \frac{1}{n\pi}(u_1 + (-1)^n (u_0 - u_1)) \right] e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t} - \frac{aL^2}{k n^3 \pi^3} \right\} \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

8.2.2.– On pose a priori : $u(r,t) = R(r)T(t)$, en remplaçant dans l'équation aux dérivées partielles considérée, on trouve :

(1) $\quad \dfrac{T'}{T} = \dfrac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} = C, \qquad C = C^{te} \in \mathbb{C}$ (a priori) ;

l'équation en R s'écrit : $r R'' + R' = C r R$, ou :

(2) $\quad (r R')' = C r R$,

elle a pour équation conjuguée : $(r \overline{R}')' = \overline{C} r \overline{R}$,

en opérant comme dans l'exercice précédent, on obtient :

$$\int_0^1 \{ \overline{R}(r R')' - R(r \overline{R}')' \}\, dr = (C - \overline{C}) \int_0^1 r R \overline{R}\, dr,$$

qui s'intègre par parties pour le membre de gauche et donne :

$$r \overline{R} R' \Big|_0^1 - r R \overline{R}' \Big|_0^1 = (C - \overline{C}) \int_0^1 r R \overline{R}\, dr;$$

les conditions aux limites du problème se traduisent par : $R(1) = 0$, $\overline{R}(1) = 0$,

$\lim_{r\to 0} R = a$, $|a| < +\infty$, donc $\lim_{r\to 0} \overline{R} = \overline{a}$, $|\overline{a}| < +\infty$;

il en découle : $C = \overline{C}$, soit : $C \in \mathbb{R}$.

On examine alors s'il est possible de déterminer le signe de la constante C, on déduit de l'équation en R :

$$\int_0^1 R (r R')'\, dr = C \int_0^1 r R^2\, dr, \quad \text{d'où :} \quad r R R' \Big|_0^1 - \int_0^1 r R'^2\, dr = C \int_0^1 r R^2\, dr,$$

le terme intégré au membre de gauche est nul, et R' ne peut pas être identiquement nulle sur [0,1], car ceci imposerait R identiquement nulle aussi sur cet intervalle;

il en résulte : $C < 0$; on pose alors : $C = -\lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

L'équation (2) s'écrit maintenant : $\dfrac{d^2R}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}^*$,

soit aussi : $r^2 \dfrac{d^2R}{dr^2} + r \dfrac{dR}{dr} + \lambda^2 r^2 R = 0$,

effectuons dans cette équation le changement de variable :

(3) $\quad x = \lambda r$,

il vient : $\dfrac{dR}{dr} = \lambda \dfrac{dR}{dx}$ et $\dfrac{d^2R}{dr^2} = \lambda^2 \dfrac{d^2R}{dx^2}$, notre équation devient :

(4) $\quad x^2 \dfrac{d^2R}{dx^2} + x \dfrac{dR}{dx} + x^2 R = 0$;

on reconnaît une équation de BESSEL d'ordre zéro; on sait que la solution générale de cette équation est :

(5)
- $R = AJ_0 + BY_0$, $\quad A, B = C^{tes}$,
- J_0 fonction de BESSEL de permiere espèce d'indice 0 ,
- Y_0 (notée aussi N_0) fonction de BESSEL de seconde espèce (appelée aussi fonction de NEUMANN) d'indice 0 ;

or, on sait aussi que : $\lim\limits_{x \to 0} Y_0(x) \Rightarrow -\infty$,

il en résulte que la solution qui reste bornée si $r \to 0^+$, s'écrit :

(6) $R(r) = AJ_0(\lambda r)$, $A = C^{te}$.

Les valeurs propres λ_n sont données par la condition aux limites $u(1,t) = 0$, qui impose :

(7) $J_0(\lambda_n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}^*$,

ce résultat montre que les λ_n forment la suite des zéros de J_0.

– En revenant à la relation (1), on obtient : $T_n'(t) = -\lambda_n^2 T_n(t)$, dont la solution générale est :

(8) $T_n(t) = a_n e^{-\lambda_n^2 t}$, $a_n = C^{te}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

En conclusion, la solution particulière obtenue s'écrit :

(9) $u(r,t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n J_0(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 t}$,

les λ_n étant les zéros de $J_0(\lambda_n)$.

– Par ailleurs, il est facile de montrer que $J_0(\lambda_n r)$ et $J_0(\lambda_p r)$, $n \neq p$, $n, p \in \mathbb{N}^*$, sont orthogonales sur $[0,1]$ relativement à la fonction poids $\rho(r) = r$, donc :

$$\int_0^1 r J_0(\lambda_n r) J_0(\lambda_p r)\, dr = 0 \quad \text{si} \quad n \neq p, \ n, p \in \mathbb{N}^*,$$

et il est établi, dans l'étude des fonctions de BESSEL de première espèce et d'indice 0, les résultats ci-après :

$$\int_0^1 r\, [J_0(\lambda_n r)]^2\, dr = \frac{1}{2} [J_0'(\lambda_n)]^2,$$

puis : $[J_0'(\lambda_n)]^2 = [J_1(\lambda_n)]^2$, $n \in \mathbb{N}^*$;

il en résulte :

$$\int_0^1 r\, [J_0(\lambda_n r)]^2\, dr = \frac{1}{2} [J_1(\lambda_n)]^2, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

Afin, dans la relation (9), de déterminer les constantes a_n, on marque la conditon initiale : $u(r,0) = f(r)$, $0<r<1$, compte-tenu des résultats précédents relatifs aux fonctions de BESSEL, on multiplie les deux membres de l'équation ci-dessus par $r J_0(\lambda_p r)$, en ayant posé :

(10) $u(r,0) = f(r) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n J_0(\lambda_n r)$,

et on intègre sur $[0,1]$, il apparaît :

$$\int_0^1 r f(r) J_0(\lambda_p r)\, dr = \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n J_0(\lambda_n r) \right] r J_0(\lambda_p r)\, dr,$$

qui donne : $\alpha_p = \dfrac{2}{[J_1(\lambda_p)]^2} \displaystyle\int_0^1 r f(r) J_0(\lambda_p r)\, dr$.

Or, si dans la solution (9), on fixe $t = 0$, en comparant à (10), on obtient : $a_n = \alpha_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, d'où une solution au problème envisagé :

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2}{[J_1(\lambda_n)]^2} \int_0^1 r f(r) J_0(\lambda_n r)\, dr \right] J_0(\lambda_n r) e^{-\lambda_n^2 t},$$

les λ_n étant la suite des zéros de J_0, soit : $J_0(\lambda_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, (évidemment, sous réserve de convergence pour les intégrales figurant dans la solution).

8.2.3. – En premier lieu, on effectue un changement de fonction inconnue afin de rendre homogènes les conditions aux limites; en posant, comme dans l'exercice 8.2.1 :

(1) $u(x,t) = U(x,t) + \left(1 - \frac{x}{L}\right) at + \frac{x}{L} u_0$,

on a vu que l'on était ramené au problème :

(2)
$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial t} - k \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = a\left(\dfrac{x}{L} - 1\right), \quad k = C^{te} > 0, \quad a = C^{te}, \quad 0<x<L, \quad 0<t<+\infty, \\ \left\{\begin{array}{l} U(0,t) = 0, \\ U(L,t) = 0, \end{array}\right. \quad 0<t<+\infty, \\ U(x,0) = u_1 - \dfrac{x}{L} u_0, \quad 0<x<L. \end{array}\right.$$

On envisage donc l'utilisation de la transformation de LAPLACE, posons :

(3) $\theta(\lambda, x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, U(x,t)\, dt, \quad \lambda > 0$,

il vient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{\partial U}{\partial t}(x,t)\, dt = e^{-\lambda t}\, U(x,t) \Big|_0^{+\infty} + \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, U(x,t)\, dt,$$

en supposant que : $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\lambda t}\, U(x,t) = 0$, on trouve : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)\,dt = \lambda\theta(\lambda,x) - U(x,0)$,

c'est-à-dire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)\,dt = \lambda\theta(\lambda,x) - u_1 + \frac{x}{L}u_0$;

d'autre part, formons :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(\lambda,x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t)\,dt ,$$

et pour le second membre de l'équation aux dérivées partielles apparaissant dans (2), il vient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, a\left(\frac{x}{L}-1\right)dt = -\frac{a}{\lambda}\left(\frac{x}{L}-1\right)e^{-\lambda t}\Big|_0^{+\infty},$$

soit : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, a\left(\frac{x}{L}-1\right)dt = \frac{a}{\lambda}\left(\frac{x}{L}-1\right)$.

En conclusion, la transformée de LAPLACE de l'équation aux dérivées partielles envisagée, s'écrit :

$$\lambda\theta(\lambda,x) - u_1 + \frac{x}{L}u_0 - k\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(\lambda,x) = \frac{a}{\lambda}\left(\frac{x}{L}-1\right)$$

en marquant dans (3) $x = 0$, il vient : $\displaystyle\theta(\lambda,0) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,U(0,t)\,dt = 0$,

et de même pour $x = L$: $\displaystyle\theta(\lambda,L) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,U(L,t)\,dt = 0$,

d'où le nouveau problème :

$$(4)\quad\begin{cases} k\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(\lambda,x) - \lambda\theta(\lambda,x) = -u_1 + \dfrac{x}{L}u_0 + \dfrac{a}{\lambda}\left(1-\dfrac{x}{L}\right), \\ 0<x<L,\quad L \text{ fini},\quad \lambda>0,\quad \theta(\lambda,0)=0,\quad \theta(\lambda,L)=0,\quad \lambda>0 . \end{cases}$$

La solution générale de l'équation s'écrit sans difficultés :

$$\theta(\lambda,x) = A(\lambda)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{\lambda}{k}}x + B(\lambda)\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{\lambda}{k}}x + \frac{u_1}{\lambda} - \frac{xu_0}{\lambda L} + \frac{a}{\lambda^2}\left(\frac{x}{L}-1\right);$$

$A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ étant deux fonctions que l'on détermine en marquant $\theta(\lambda,0) = 0$ et $\theta(\lambda,L)$, $\lambda>0$; on trouve par des calculs simples :

$$(5)\quad\begin{cases} \theta(\lambda,x) = \dfrac{1}{\lambda^2\,\mathrm{sh}\sqrt{\dfrac{\lambda}{k}}L}\left\{(a-\lambda u_1)\,\mathrm{sh}\sqrt{\dfrac{\lambda}{k}}(L-x) + \lambda(u_0-u_1)\,\mathrm{sh}\sqrt{\dfrac{\lambda}{k}}x\right\} \\ \qquad + \dfrac{u_1}{\lambda} - \dfrac{xu_0}{\lambda L} + \dfrac{a}{\lambda^2}\left(\dfrac{x}{L}-1\right). \end{cases}$$

– Nous savons que l'original $U(x,t)$ est défini par : $\displaystyle U(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\lambda t}\,\theta(\lambda,x)\,d\lambda$,

$\theta(\lambda,x)$ étant donné par (5); un calcul classique montre que $\lambda = 0$ est un pôle simple et que le résidu relatif à ce pôle a pour valeur : $R(\lambda=0) = \dfrac{a}{6kL}\left[(L-x)^3 + L^2(x-L)\right]$;

puis, il apparaît facilement que les pôles simples λ_n définis par : $\lambda = -\dfrac{k^2n^2\pi^2}{L^2}$,

$n \in \mathbb{N}^*$, ont pour résidus :

$$A_n = \left\{\frac{2aL^2}{kn^3\pi^3} + \frac{2}{n\pi}\left[u_1 + (-1)^n(u_0-u_1)\right]\right\} e^{-\frac{kn^2\pi^2 t}{L^2}} \sin\frac{n\pi}{L}x,\quad n\in\mathbb{N}^*;$$

l'intégrale de CAUCHY donne alors l'original :

$$(6)\quad\begin{cases} u(x,t) = \left(1-\dfrac{x}{L}\right)at + \dfrac{x}{L}u_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\dfrac{2}{n\pi}\left[u_1+(-1)^n(u_0-u_1)\right] + \dfrac{2aL^2}{kn^3\pi^3}\right\} \\ \qquad e^{-\frac{kn^2\pi^2 t}{L^2}}\sin\dfrac{n\pi}{L}x + \dfrac{a}{6kL}\left[(L-x)^3 + L^2(x-L)\right]. \end{cases}$$

– Si on veut retrouver le résultat obtenu en fin de la solution de l'exercice 8.2.1, on pose

$$\frac{a}{6kL}\left[(L-x)^3 + L^2(x-L)\right] = \sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n \sin\frac{n\pi}{L}x,$$

un calcul classique donne :

$$\alpha_n = \frac{2}{L}\cdot\frac{a}{6kL}\int_0^L\left[(L-x)^3 + L^2(x-L)\right]\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx,\quad \text{soit :}\quad \alpha_n = \frac{-2aL^2}{kn^3\pi^3}$$

on écrit alors :

$$u(x,t) = \left(1-\frac{x}{L}\right)at + \frac{x}{L}u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left\{\frac{2}{n\pi}[u_1 + (-1)^n(u_0-u_1)] + \frac{2aL^2}{kn^3\pi^3}\right\} e^{-\frac{kn^2\pi^2 t}{L^2}} - \frac{2aL^2}{kn^3\pi^3}\right] \sin\frac{n\pi}{L}x\,;$$

c'est le résultat obtenu antérieurement.

8.2.4. – Effectuons en premier lieu un changement de fonction inconnue afin de rendre homogènes les conditions aux limites, posons à cet effet :

$$u(x,t) = U(x,t) + (\alpha x + \beta)\, u_0\, e^{-kt} + (\gamma x + \delta)\, u_1\,,$$

α, β, γ et δ étant des constantes que l'on détermine en imposant à U les conditions aux limites homogènes : $U(0,t) = 0$ et $U(L,t) = 0$, des calculs simples donnent :

$\alpha = -\frac{1}{L}$, $\beta = 1$, $\gamma = \frac{1}{L}$ et $\delta = 0$, d'où le nouveau problème :

$$(1)\quad \begin{cases} a\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - bU - \dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{b}{L}xu_1 + (b-K)\left(1-\dfrac{x}{L}\right)u_0 e^{-Kt} \\ 0<x<L, \quad 0<t<+\infty, \quad a, b, k, u_0 \text{ et } u_1 = C^{tes} > 0, \\ U(0,t) = 0, \quad U(L,t) = 0, \quad 0<t<+\infty, \\ U(x,0) = (u_0-u_1)\dfrac{x}{L}, \quad 0<x<L. \end{cases}$$

On utilise la transformation de LAPLACE, on pose :

$$(2)\quad \theta(\lambda,x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, U(x,t)\, dt\,, \quad \lambda > 0,$$

en supposant que : $\lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda t}\, U(x,t) = 0$,

on obtient : $$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)\, dt = \lambda\theta(\lambda,x) - (u_0-u_1)\frac{x}{L}\,;$$

nous avons d'autre part :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(\lambda,x),$$

puis : $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, 1\, dt = \frac{1}{\lambda}$, enfin : $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} e^{-Kt} dt = \frac{1}{\lambda+K}$;

il découle de ces calculs que la transformée de LAPLACE de l'équation aux dérivées partielles (1) s'écrit :

$$(3)\quad a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(\lambda,x) - (b+\lambda)\,\theta(\lambda,x) = \left(u_1 - u_0 + \frac{b}{\lambda}u_1\right)\frac{x}{L} + \frac{(b-K)}{(\lambda+K)}\left(1-\frac{x}{L}\right)u_0.$$

On note que : $\theta(\lambda,0) = 0$ et $\theta(\lambda,L) = 0$, d'où le nouveau problème :

$$(4)\quad \begin{cases} a\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(\lambda,x) - (b+\lambda)\,\theta(\lambda,x) = \left(u_1 - u_0 + \dfrac{b}{\lambda}u_1\right)\dfrac{x}{L} + \dfrac{(b-K)}{(\lambda+K)}\left(1-\dfrac{x}{L}\right)u_0, \\ 0<x<L, \quad L \text{ fini}, \quad \lambda > 0, \\ \theta(\lambda,0) = 0, \quad \theta(\lambda,L) = 0, \quad \lambda > 0. \end{cases}$$

La solution générale de l'équation aux dérivées partielles ci-dessus, s'écrit sans difficultés :

$$\theta(\lambda,x) = A(\lambda)\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{b+\lambda}{a}}\,x + B(\lambda)\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{b+\lambda}{a}}\,x - \frac{1}{b+\lambda}\left\{\left(u_1-u_0+\frac{b}{\lambda}u_1\right)\frac{x}{L} + \frac{(b-K)}{(\lambda+K)}\left(1-\frac{x}{L}\right)u_0\right\},$$

A et B étant deux fonctions arbitraires de λ; en marquant les conditions $\theta(\lambda,0) = 0$ et $\theta(\lambda,L) = 0$, il vient la solution particulière cherchée :

$$(5)\quad \theta(\lambda,x) = \frac{1}{(b+\lambda)\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{b+\lambda}{a}}L}\left\{\frac{(b-K)}{(\lambda+K)}u_0\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{b+\lambda}{a}}(L-x) + \left(u_1-u_0+\frac{b}{\lambda}u_1\right)\mathrm{sh}\sqrt{\frac{b+\lambda}{a}}\,x - \left[\left(u_1-u_0+\frac{b}{\lambda}u_1\right)\frac{x}{L} + \frac{(b-K)}{(\lambda+K)}\left(1-\frac{x}{L}\right)u_0\right]\mathrm{sh}\sqrt{\frac{b+\lambda}{a}}L\right\}.$$

– L'original $U(x,t)$ est donné par : $$U(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\lambda t}\,\theta(\lambda,x)\, d\lambda,$$

$\theta(\lambda,x)$ étant précisé par (5); des calculs classiques montrent que $\lambda = -b$ n'est pas un pôle, mais que $\lambda = -K$ est un pôle simple, dont le résidu a pour valeur :

$$R(\lambda=-K) = \frac{u_0 e^{-Kt}}{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{b-K}{a}}L}\left\{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{b-K}{a}}(L-x) - \left(1-\frac{x}{L}\right)\mathrm{sh}\sqrt{\frac{b-K}{a}}L\right\};$$

on établit de même que $\lambda = 0$ est un pôle simple, dont le résidu a pour valeur :

$$R(\lambda = 0) = \frac{u_1}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{b}{a}}L}\left\{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{b}{a}}x - \frac{x}{L}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{b}{a}}L\right\};$$

enfin, il apparaît une infinité de pôles simples : $\lambda_n = -\left(b + \frac{an^2\pi^2}{L^2}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*$,

de résidus :

$$R(\lambda = \lambda_n) = \frac{2e^{\lambda_n t}}{n\pi}\left\{-\frac{(b-K)}{(\lambda_n + K)}u_0 + (-1)^n\left(u_1 - u_0 + \frac{b}{\lambda_n}u_1\right)\right\}\sin\frac{n\pi}{L}x, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

L'intégrale de CAUCHY donne alors l'original cherché :

$$u(x,t) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_0 e^{-Kt} + \frac{x}{L}u_1 + u_1\left\{\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{b}{a}}x}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{b}{a}}L} - \frac{x}{L}\right\}$$

$$+ u_0 e^{-Kt}\left\{\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{b-K}{a}}(L-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{b-K}{a}}L} - \left(1 - \frac{x}{L}\right)\right\}$$

$$+ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n\pi}e^{\lambda_n t}\left\{-\frac{(b-K)}{(\lambda_n + K)}u_0 + (-1)^n\left(u_1 - u_0 + \frac{b}{\lambda_n}u_1\right)\right\}\sin\frac{n\pi}{L}x,$$

$$\lambda_n = -\left(b + \frac{an^2\pi^2}{L^2}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

– ***Remarque :*** nous suggérons au lecteur de retrouver ce résultat en travaillant avec la méthode de séparation des variables.

8.3.1. – Nous savons du cours que pour résoudre ce problème, on peut "superposer" les solutions des 2 problèmes de DIRICHLET suivants : on cherche $u(x,y)$ harmonique pour $0 < x < a$ et $0 < y < b$, avec :

α) soit $v(x,y)$ solution telle que : $f = 0$ et $g = 0$,

β) soit $w(x,y)$ solution telle que : $h = 0$ et $k = 0$;

alors : $u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$, est solution du problème initial.

– On envisage donc <u>le premier problème</u> :

(1) $\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$

avec les conditions aux limites :

(2) $\quad v(0,y) = 0, \quad v(a,y) = 0, \quad 0 < y < b,$

(3) $\quad v(x,0) = h(x), \quad v(x,b) = k(x), \quad 0 < x < a;$

on pose en travaillant avec la méthode de séparation des variables :

$v(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$, en remplaçant dans l'équation (1), on obtient :

(4) $\quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = C, \quad C = C^{te};$

en travaillant avec l'équation en X, compte-tenu des conditions aux limites, on établit aisément d'une part que C est réelle et que d'autre part :

$$C = -\lambda_n^2, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

à ces valeurs propres λ_n, sont associés les fonctions propres X_n définies par :

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{a}x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On en conclut qu'une solution élémentaire de l'équation (1) satisfaisant les conditions (2) s'écrit :

$$v_n(x,y) = Y_n(y)\sin\frac{n\pi}{a}x, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

les fonctions Y_n vérifiant de (4) :

(5) $\quad \frac{d^2Y_n}{dy^2}(y) = \frac{n^2\pi^2}{a^2}Y_n(y);$

nous savons que les X_n constituent une base de $L^2_{[0,a]}$, on pose :

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n \sin\frac{n\pi}{a}x, \quad \text{qui donne :} \quad h_n = \frac{2}{a}\int_0^a h(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx,$$

on opère de même pour k (x), on écrit :

$$k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} k_n \sin\frac{n\pi}{a}x, \quad \text{d'où :} \quad k_n = \frac{2}{a}\int_0^a k(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx,$$

(sous réserve évidemment de convergence des intégrales).

L'équation (5) admet alors la solution générale :

$$Y_n(y) = H_n e^{-\frac{n\pi}{a}y} + K_n e^{\frac{n\pi}{a}y}, \quad H_n, K_n = C^{tes}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

en écrivant : $v(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} Y_n(y)\sin\frac{n\pi}{a}x$,

on obtient : $v(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} Y_n(0)\sin\frac{n\pi}{a}x = h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n\sin\frac{n\pi}{a}x$,

qui impose : $Y_n(0) = h_n$; un raisonnement analogue donne : $Y_n(b) = k_n$, d'où : $H_n + K_n = h_n$ et $H_n e^{-\frac{n\pi}{a}b} + K_n e^{\frac{n\pi}{a}b} = k_n$;

des calculs simples donnent alors :

$$Y_n(y) = h_n \frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}(b-y)}{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}b} + k_n \frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}y}{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}b} ;$$

il résulte de ces calculs qu'une solution particulière du premier problème posé par (1), (2) et (3) s'écrit :

$$(6)\quad \begin{cases} v(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ h_n \frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}(b-y)}{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}b} + k_n \frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}y}{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}b} \right\} \sin\frac{n\pi}{a}x , \\ h_n = \dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a h(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx , \quad k_n = \dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a k(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx . \end{cases}$$

– On considère alors le second problème :

$$(7)\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,y) = 0 , \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b ,$$

avec les conditions aux limites :

(8) $w(0,y) = f(y)$, $w(a,y) = g(y)$, $0 < y < b$,

(9) $w(x,0) = 0$, $w(x,b) = 0$, $0 < x < a$;

comme pour le premier problème, on écrit : $w(x,y) = X(x)\,Y(y)$,

qui entraîne aussi : $\dfrac{X''}{X} = -\dfrac{Y''}{Y} = C$, $C = C^{te}$;

en travaillant sur Y, on montre facilement que C est réelle, strictement positive, et que : $C = \lambda_m^2$, $\lambda_m = \dfrac{m\pi}{b}$, $m \in \mathbb{N}^*$,

et les fonctions propres : $Y_m(y) = \sin\dfrac{m\pi}{b}y$, $m \in \mathbb{N}^*$.

En opérant comme pour le premier problème, il apparaît qu'une solution particulière du second problème s'écrit :

$$(10)\quad \begin{cases} w(x,y) = \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \left\{ f_m \frac{\operatorname{sh}\frac{m\pi}{b}(a-x)}{\operatorname{sh}\frac{m\pi}{b}a} + g_m \frac{\operatorname{sh}\frac{m\pi}{b}x}{\operatorname{sh}\frac{m\pi}{b}a} \right\} \sin\frac{m\pi}{b}y , \\ f_m = \dfrac{2}{b}\displaystyle\int_0^b f(y)\sin\frac{m\pi}{b}y\,dy , \quad g_m = \dfrac{2}{b}\displaystyle\int_0^b g(y)\sin\frac{m\pi}{b}y\,dy . \end{cases}$$

– En définitive, unesolution particulière du problème posé initialement est :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ h_n \frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}(b-y)}{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}b} + k_n \frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}y}{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}b} \right\} \sin\frac{n\pi}{a}x ,$$
$$+ \sum_{m=1}^{+\infty} \left\{ f_m \frac{\operatorname{sh}\frac{m\pi}{b}(a-x)}{\operatorname{sh}\frac{m\pi}{b}a} + g_m \frac{\operatorname{sh}\frac{m\pi}{b}x}{\operatorname{sh}\frac{m\pi}{b}a} \right\} \sin\frac{m\pi}{b}y ,$$

avec :

$$h_n = \frac{2}{a}\int_0^a h(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx , \quad k_n = \frac{2}{a}\int_0^a k(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx ,$$

$$f_m = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\sin\frac{m\pi}{b}y\,dy , \quad g_m = \frac{2}{b}\int_0^b g(y)\sin\frac{m\pi}{b}y\,dy ,$$

sous réserve de convergence des intégrales.

8.3.2. – Posons a priori : $u(x,y,t) = X(x)\,Y(y)\,T(t)$,
en remplaçant dans l'équation aux dérivées partielles proposée, il vient :

$$(1)\quad \frac{YX'' + XY''}{XY} = \frac{T'}{C^2 T} = k , \quad k = C^{te}.$$

– Considérons en premier lieu l'équation : $\dfrac{YX'' + XY''}{XY} = k$,
que l'on écrit (arbitrairement) :

$$(2)\quad \frac{X''}{X} = -\left\{\frac{Y''}{Y} - k\right\} = \lambda, \quad \lambda = C^{te} ;$$

l'équation en X est : $X'' = \lambda X$, elle a pour conjuguée : $\overline{X}'' = \overline{\lambda}\,\overline{X}$.

on déduit de ces relations : $\displaystyle\int_0^a (\overline{X}X'' - \overline{X}''X)\,dx = (\lambda - \overline{\lambda})\int_0^a X\overline{X}\,dx$,

les conditions aux limites : $u(0,y,t) = 0$ et $u(a,y,t) = 0$, entraînent :

(3) $X(0) = 0$ et $X(a) = 0$,

il en découle : $\lambda = \overline{\lambda}$, donc λ est réelle; puis on forme aussi :

$$\int_0^a XX''\,dx = \lambda\int_0^a X^2\,dx , \quad \text{qui s'intègre :} \quad XX'\Big|_0^a - \int_0^a X'^2\,dx = \lambda\int_0^a X^2\,dx ,$$

il en résulte : $\lambda < 0$;

en posant $\lambda = -\eta^2$, $\eta \in \mathbb{R}^*$, des calculs classiques donnent :

(4) $\quad \eta = \dfrac{n\pi}{a}, \quad X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi}{a}x, \quad n \in \mathbb{N}^*.$

– On retourne alors à l'équation en Y de (2) en utilisant les résultats précédents, il vient :

$$Y'' = \left(k + \frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)Y, \qquad n \in \mathbb{N}^*,$$

elle a pour équation conjuguée : $\bar{Y}'' = \left(\bar{k} + \dfrac{n^2\pi^2}{a^2}\right)\bar{Y}$,

on déduit de ces deux équations : $\displaystyle\int_0^b (\bar{Y}Y'' - \bar{Y}''Y)\,dy = (k - \bar{k})\int_0^b Y\bar{Y}\,dy$,

les condition aux limites $u(x,0,t) = 0$ et $u(x,b,t) = 0$, imposent :

(5) $\quad Y(0) = 0 \quad \text{et} \quad Y(b) = 0,$

ce qui fixe : $k = \bar{k}$, donc k est réelle; on forme alors :

$$\int_0^b YY''\,dy = \left(k + \frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)\int_0^b Y^2\,dy,$$

soit : $\quad YY'\Big|_0^b - \displaystyle\int_0^b Y'^2\,dy = \left(k + \frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)\int_0^b Y^2\,dy,$

les conditions aux limites (5) entraînent : $k + \dfrac{n^2\pi^2}{a^2} < 0$, $n \in \mathbb{N}^*$; on pose alors :

(6) $\quad k + \dfrac{n^2\pi^2}{a^2} = -\nu^2, \qquad \nu \in \mathbb{R}^*,$

on en déduit sans difficulté d'une manière formelle :

(7) $\quad \nu = \dfrac{m\pi}{b}, \quad Y_m(y) = \sin\dfrac{m\pi}{b}y, \qquad m \in \mathbb{N}^*.$

– En résumé, nous avons obtenu :

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{a}x, \qquad n \in \mathbb{N}^*,$$

$$Y_m(y) = \sin\frac{m\pi}{b}y, \qquad m \in \mathbb{N}^*,$$

$$k = -\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right), \qquad n, m \in \mathbb{N}^*;$$

en revenant à (1), l'équation en T s'écrit : $T'' = C^2kT$, en posant pour simplifier les écritures :

(8) $\quad \omega_{mn}^2 = C^2\pi^2\left(\dfrac{n^2}{a^2} + \dfrac{m^2}{b^2}\right), \qquad n, m \in \mathbb{N}^*;$

l'équation précédente devient : $T'' = -\omega_{mn}^2 T$, elle a pour solution générale :

(9) $\quad T_{mn}(t) = H_{mn}\cos\omega_{mn}t + K_{mn}\sin\omega_{mn}t, \qquad H_{mn}, K_{mn} = C^{tes}.$

– Il résulte de ces calculs qu'une solution élémentaire du problème posé est :

(10) $$\begin{cases} u_{mn}(x,y,t) = \{H_{mn}\cos\omega_{mn}t + K_{mn}\sin\omega_{mn}t\}\sin\dfrac{n\pi}{a}x\,\sin\dfrac{m\pi}{b}y, \\ H_{mn}, K_{mn} = C^{tes}, \quad n, m \in \mathbb{N}^*, \quad \omega_{mn}^2 = C^2\pi^2\left(\dfrac{n^2}{a^2} + \dfrac{m^2}{b^2}\right), \end{cases}$$

une solution particulière du problème s'écrit par suite :

(11) $$\begin{cases} u(x,y,t) = \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{(H_{mn}\cos\omega_{mn}t + K_{mn}\sin\omega_{mn}t)\left(\sin\frac{n\pi}{a}x\right)\left(\sin\frac{m\pi}{b}y\right)\right\}, \\ \omega_{mn}^2 = C^2\pi^2\left(\dfrac{n^2}{a^2} + \dfrac{m^2}{b^2}\right), \quad n, m \in \mathbb{N}^*, \quad H_{mn}, K_{mn} = C^{tes}. \end{cases}$$

Les constantes H_{mn} et K_{mn} sont déterminées par les conditions initiales :

$u(x,y,0) = f(x,y)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = g(x,y)$, en utilisant (11), on obtient :

(12) $\quad f(x,y) = \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} H_{mn}\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi}{b}y,$

et

(13) $\quad g(x,y) = \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \omega_{mn}K_{mn}\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi}{b}y;$

on reconnaît les expressions des développements de f et g en <u>séries doubles de FOURIER-SINUS</u>.

Travaillons en premier lieu pour f donnée par (12), en multipliant les deux membres de cette équation par : $\sin\dfrac{p\pi}{a}x\,\sin\dfrac{q\pi}{b}y$, et en intégrant sur le rectangle $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, on trouve :

$$\int_0^a\left(\int_0^b f(x,y)\sin\frac{p\pi}{a}x\,\sin\frac{q\pi}{b}y\,dy\right)dx =$$

$$\int_0^a\left(\int_0^b\left[\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} H_{mn}\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi}{b}y\right]\sin\frac{p\pi}{a}x\,\sin\frac{q\pi}{b}y\,dy\right)dx;$$

or, des calculs simples montrent que :

$$\int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x \, \sin\frac{p\pi}{a}x \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq p , \\ \frac{a}{2} & \text{si} \quad n = p ; \end{cases}$$

et de même :

$$\int_0^b \sin\frac{m\pi}{b}y \, \sin\frac{q\pi}{b}y \, dy = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq q , \\ \frac{b}{2} & \text{si} \quad m = q ; \end{cases}$$

on en conclut, sous réserve de convergence des intégrales, que l'on a :

$$H_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a \left(\int_0^b f(x,y) \sin\frac{n\pi}{a}x \, \sin\frac{m\pi}{b}y \, dy \right) dx ;$$

et, de semblable façon :

$$K_{mn} = \frac{4}{ab\omega_{mn}}\int_0^a \left(\int_0^b g(x,y) \sin\frac{n\pi}{a}x \, \sin\frac{m\pi}{b}y \, dy \right) dx ;$$

en remplaçant H_{mn} et K_{mn} par leurs expressions dans (11), on obtient une solution particulière du problème considéré.

8.4.1. – On utilise la formule :

(1) $$\varphi(\nu,y) = 2\int_0^{+\infty} u(x,y) \sin 2\pi\nu x \, dx ,$$

en supposant que u appartient à $L^1_{\mathbb{R}}$, $\forall y \in [0,a]$; dérivons partiellement les deux membres de la relation précédente, deux fois par rapport à y, on trouve :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(\nu,y) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) \sin 2\pi\nu x \, dx ,$$

soit aussi en utilisant l'équation aux dérivées partielles du texte :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(\nu,y) = -2\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) \sin 2\pi\nu x \, dx ,$$

en intégrant une fois par parties le membre de droite et en supposant que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0 , \quad \text{il reste :} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(\nu,y) = 4\pi\nu \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \cos 2\pi\nu x \, dx ,$$

en intégrant une nouvelle fois par parties le membre de droite et en utilisant les conditions : $u(0,y) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} u(x,y) = 0$ uniformément en y, on obtient l'équation aux dérivées partielles :

(2) $$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(\nu,y) = 4\pi^2\nu^2\varphi(\nu,y) ;$$

sa solution générale s'écrit :

(3) $$\varphi(\nu,y) = A\,e^{2\pi\nu y} + B\,e^{-2\pi\nu y} ,$$ A et B étant des fonctions de ν.

Or, on a : $\varphi(\nu,a) = 2\int_0^{+\infty} u(x,a) \sin 2\pi\nu x \, dx = 0$, et en posant :

(4) $$F(\nu) = 2\int_0^{+\infty} f(x) \sin 2\pi\nu x \, dx ,$$

l'autre condition aux limites donne : $\varphi(\nu,0) = F(\nu)$;

on déduit de ces résultats : $A = \dfrac{-e^{-2\pi\nu a}F(\nu)}{2\,\mathrm{sh}\,2\pi\nu a}$ et $B = \dfrac{e^{2\pi\nu a}F(\nu)}{2\,\mathrm{sh}\,2\pi\nu a}$,

ce qui entraîne :

(5) $$\varphi(\nu,y) = \frac{F(\nu)}{\mathrm{sh}\,2\pi\nu a}\,\mathrm{sh}\,2\pi\nu(a-y) ;$$

la formule de réciprocité donne : $u(x,y) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} F(\nu)\frac{\mathrm{sh}\,2\pi\nu(a-y)}{\mathrm{sh}\,2\pi\nu a}\sin 2\pi\nu x \, d\nu$,

la solution (sous forme intégrale) du problème envisagé est donc :

$$u(x,y) = 2\int_0^{+\infty}\left\{ 2\int_0^{+\infty} f(z) \sin 2\pi\nu z \, dz \right\} \frac{\mathrm{sh}\,2\pi\nu(a-y)}{\mathrm{sh}\,2\pi\nu a} \sin 2\pi\nu x \, d\nu .$$

8.4.2. – On suppose ici aussi que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,t)|\,dx < +\infty$, $0 < t < +\infty$,

et on utilise la formule :

(1) $$U(\nu,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x}\,u(x,t)\,dx ,$$

opérant comme dans l'exercice précédent et, en supposant encore tous les calculs légitimes, on obtient :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(\nu,t) = -C^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t)\,dx\,,$$

qui en supposant que :

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x,t) = 0\,, \qquad \lim_{|x|\to+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0\,,$$

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0\,, \qquad \text{et} \qquad \lim_{|x|\to+\infty} u(x,t) = 0\,,$$

il apparaît l'équation transformée :

(2) $$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(\nu,t) + 16\,C^2 \pi^4 \nu^4\, U(\nu,t) = 0\,,$$

dont la solution générale s'écrit :

(3) $$\begin{cases} U(\nu,t) = A(\nu)\cos 4C\pi^2\nu^2 t + B(\nu)\sin 4C\pi^2\nu^2 t\,, \\ A \text{ et } B \text{ étant deux fonctions arbitraires.} \end{cases}$$

Afin de déterminer A et B, on utilise les conditions initiales, on a :

$$U(\nu,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x}\, u(x,0)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x}\, e^{-\pi x^2}\,dx\,,$$

qui s'écrit à l'aide de calculs simples : $U(\nu,0) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\pi x^2}\cos 2\pi\nu x\,dx\,;$

or, dans l'exercice 8.1.1, on a vu que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-z^2}\cos yz\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-\frac{y^2}{4}}\,,$

qui montre qu'ici nous avons :

(4) $$U(\nu,0) = e^{-\pi\nu^2}\,;$$

d'autre part : $\displaystyle\frac{\partial U}{\partial t}(\nu,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x}\,\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\,dx\,,$

donc :

(5) $$\frac{\partial u}{\partial t}(\nu,0) = 0\,.$$

Retournant à la solution (3), il apparaît :

$$A(\nu) = e^{-\nu^2\pi} \quad \text{et} \quad B(\nu) = 0\,,$$

d'où la transformée de FOURIER de notre solution :

$$U(\nu,t) = e^{-\pi\nu^2}\cos 4C\pi^2\nu^2 t\,;$$

la formule de réciprocité mène alors à la réponse au problème posé :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\nu x}\, e^{-\pi\nu^2}\cos 4C\pi^2\nu^2 t\,d\nu\,;$$

des calculs élémentaires montrent que l'on peut écrire aussi cette solution sous la forr

$$u(x,t) = 2\int_0^{+\infty} e^{-\pi\nu^2}\cos 4C\pi^2\nu^2 t\,\cos 2\pi\nu x\,d\nu\,.$$