classes préparatoires scientifiques

MP - PC - PC* - PSI - PSI*

UNE GRANDE ANNÉE DE MATHÉMATIQUES

70 problèmes de concours

sélectionnés, classés et corrigés

Roger DALLARD

ellipses

UNE GRANDE ANNÉE DE MATHÉMATIQUES

70 problèmes de concours

sélectionnés, classés et corrigés

classes préparatoires scientifiques
MP - PC - PC* - PSI - PSI*

Roger DALLARD
Professeur en Mathématiques Spéciales PC*
au lycée Pasteur de Neuilly

ellipses

Aymeric Chauprade, directeur de collection

ISBN 2-7298-0799-3

www.editions-ellipses.com

MODE D'EMPLOI DE L'OUVRAGE

Cet ouvrage vous propose un choix de problèmes de Mathématiques posés aux concours dans les filières MP, PC et PSI. Il s'adresse essentiellement aux élèves des classes de MP, PC, PC*, PSI et PSI*.

Il a été conçu dans un triple objectif :

• Mettre à votre disposition, à tout moment de l'année, même dès la rentrée, un sujet en rapport avec le programme en cours d'étude et qui soit abordable avec les connaissances acquises à ce moment.

À cet effet, et par commodité, les problèmes ont été répartis sur 24 semaines, ce qui représente à-peu-près la durée de l'année scolaire en Spéciales. Vous trouverez plus loin, pour chaque semaine, les thèmes abordés et quelques détails sur les problèmes posés.

Vous n'êtes pas obligés, bien sûr, d'aborder les problèmes en suivant ce rangement par semaine mais il est important pour vous de savoir, à un moment donné (pendant les vacances de Noël par exemple), et compte tenu des connaissances cumulées à ce moment, dans quelle partie du recueil vous allez dénicher le sujet qui vous intéresse.

Nous reviendrons un peu plus loin sur le découpage en semaines.

• Mettre à votre disposition des problèmes dont le niveau de difficulté vous convienne.

Pour varier le niveau de difficulté, plusieurs problèmes par semaine (en général trois) vous sont proposés. Vous ajusterez votre choix suivant vos appétits du moment et comme l'appétit vient en mangeant...

Nous reviendrons un peu plus loin sur le niveau des problèmes.

• Mettre à votre disposition des corrigés très détaillés.

Les corrigés sont très détaillés, dans un double but : tout d'abord, j'aimerais que chaque étudiant trouve dans le corrigé une réponse claire à toute question qu'il a pu se poser en cherchant le problème, sans qu'il lui soit nécessaire d'aller chercher ailleurs.

Ensuite, j'aimerais lui fournir, par l'exemple, des idées sur la façon de rédiger sa copie : dans quel ordre faut-il présenter les arguments d'une démonstration ? faut-il donner beaucoup de détails ? faut-il recopier ou seulement évoquer, avec plus ou moins de précision, les énoncés des théorèmes utilisés ? Vous verrez que cela dépend un peu du niveau du sujet étudié et que, si le problème est long, cela peut évoluer entre le début et la fin. J'aimerais aussi mettre en évidence l'intérêt d'une présentation matérielle soignée ; l'étudiant, bien sûr, ne devra pas y consacrer trop de temps ; par exemple, il ne devra pas se croire tenu de faire, comme dans un livre, de belles phrases ni d'encadrer ses réponses.

Revenons sur le découpage dans le temps.

La progression adoptée est une progression raisonnable pour une classe de Spéciales, essayant autant que possible d'alterner Algèbre, Analyse et Géométrie. Bien sûr, votre professeur ne suit peut-être pas cette progression et vous devrez sans doute faire quelques permutations entre les semaines.

La plupart des problèmes de concours ne sont pas centrés sur un unique chapitre du cours mais essaient au contraire de faire appel à l'ensemble du programme. J'ai placé chaque problème dans la semaine qui, à mon avis, lui convenait le mieux, compte tenu des connaissances acquises antérieurement et du thème abordé dans le problème en question.

Une difficulté se présente lorsqu'un problème fait incidemment appel à une notion qui n'a pas encore été étudiée ; cela concerne surtout les élèves qui font leur première année de Maths Spé et que nous désignerons plus loin par le symbole traditionnel « 3/2 ». Pour aplanir cette difficulté, j'ai inséré dans l'énoncé, des indications suffisantes. Quelquefois, je demande aux 3/2 d'abandonner purement et simplement la question, voire toute une partie du problème, étant bien entendu que cela n'empêche pas d'aborder le reste du sujet et qu'il reste de celui-ci l'essentiel. Pour que l'on distingue bien l'énoncé initial des indications que j'ai pu y ajouter, j'ai encadré ces dernières.

Revenons sur le niveau de difficulté des problèmes.

Aucun candidat ne doit être rebuté par la présence, en grand nombre, de problèmes posés dans une filière qui n'est pas la sienne : il faut savoir que les programmes de Mathématiques varient peu d'une filière à l'autre et que cette similitude s'accentue encore dans les problèmes posés aux concours. Il est rare qu'un énoncé fasse appel à une notion qui ne soit pas au programme des trois filières. Dans un tel cas, toutes indications utiles ont été ajoutées.

Par contre, il y a souvent, entre les épreuves des divers concours, d'importantes différences de longueur ou de niveau de difficulté du problème. Ces différences ne sont pas toujours proportionnelles au prestige de l'école concernée... De même, les problèmes les plus longs ou les plus difficiles ne sont pas toujours réservés à la filière MP...

Pour nuancer un peu les propos qui précèdent, il faut dire que, dans les sujets posés dans les concours 2000 et 2001, on note une légère accentuation des différences entre les trois filières.

Pour que chacun puisse utiliser l'ouvrage avec profit, j'ai choisi des problèmes variés quant à la longueur et à la difficulté, posés dans les concours les plus communément présentés (Mines-Ponts, Centrale-Supélec, E.N.S.I., E.S.I.M. etc.). Cet ouvrage étant destiné aux élèves de MP, PC, PC*, PSI et PSI*, j'ai placé dans ce recueil quelques problèmes posés à l'École Polytechnique et aux E.N.S. dans les filières PC et PSI mais pas dans la filière MP. Les élèves de la filière MP qui présentent ces concours (ils sont en général dans les classes de MP*) pourront quand même, avec profit, étudier les problèmes posés, à ces concours, dans les deux autres filières.

Le choix des problèmes est restreint en début d'année, quand certaines notions importantes non vues en Sup n'ont pas été encore abordées. J'ai dû faire appel alors, plus qu'en fin d'année, à des énoncés plus anciens, notamment à des énoncés posés avant la création des nouvelles filières. Rappelons à ce sujet que, grossièrement, les anciennes M-M' sont devenues les MP-MP*, les P-P' sont devenues les PC-PC* et que les actuelles PSI-PSI* n'avaient pas d'analogues dans l'ancien système. Rappelons aussi que le partage des classes, dans une même filière, entre classes «étoilées» et classes «non étoilées» correspond à une différence de niveau et non pas, à quelques détails près, à une différence de programme.

Avec la création des nouvelles filières, les programmes n'ont pas changé fondamentalement mais il a fallu quand même adapter, voire remanier, certains énoncés. Là-aussi, j'ai fait en sorte que l'on distingue bien l'énoncé initial des modifications que j'y ai apportées.

Comment résoudre le problème des erreurs d'énoncé, problème auquel tout candidat peut être confronté le jour du concours et auquel il doit savoir faire face ? J'ai choisi de ne rectifier que les erreurs qui risquaient de faire perdre trop de temps aux étudiants ou de leur inculquer des idées fausses. Ces rectifications, elles-aussi, sont, si nécessaire, clairement signalées.

Je ne voudrais pas terminer ce préambule sans adresser de chaleureux remerciements

à toutes ces générations d'élèves qui ont étudié avec moi tous ces problèmes, pour leurs critiques, leurs suggestions, et surtout leur entrain,

à Robert Cabane et Francis Fernique, avec qui j'ai découvert TeX,

à Patrick Bardet, qui a résolu bien des problèmes logiciels et matériels,

à Nicole Guesne, Pierre Février et Marc Tastet, pour leur collaboration à la rédaction de la plupart des corrigés,

à Monsieur Chauprade et aux éditions Ellipses, qui m'ont fait confiance,

à toute ma famille, enfin, pour sa patience et son aide.

Roger Dallard

Semaine 1 : Révisions du programme de Sup

Voici la rentrée...

Je vous propose quelques problèmes que l'on peut traiter en utilisant uniquement (ou presque) le programme de Maths Sup.

Attention ! Cela ne veut pas dire qu'ils soient particulièrement faciles. Non, ce sont de vrais problèmes de concours !

Ce sont surtout des problèmes d'Analyse. Ayez donc le cours de Sup à portée de la main, au cas où vous auriez des hésitations sur les intégrales, les «accroissements finis» ...

• Sujet 1 : Problème classique sur les polynômes et nombres de Bernoulli

Cet énoncé est une synthèse de divers problèmes posés aux concours sur ce sujet.

On a fait en sorte qu'il puisse être traité à l'aide du programme de Sup seulement ; il vous fera réviser les polynômes, un peu d'algèbre linéaire (matrice d'une application linéaire ...) et des notions élémentaires sur les intégrales.

• Sujet 2 : E.S.T.P.-E.N.S.A.M. 1997 Mathématiques 1 Filière PC

C'est un problème de révision d'algèbre et de géométrie, composé d'exercices indépendants, de difficulté croissante, pas très faciles dans l'ensemble. Le dernier exercice (géométrie) est même franchement difficile.

Comme c'est souvent le cas avec les épreuves formées d'exercices indépendants, il vaut mieux, le jour du concours, ne pas chercher à tout faire mais se concentrer plutôt, en premier lieu, sur les exercices qui paraissent les plus abordables. Par contre, à la maison, passez-y tout le temps qu'il faudra ; cela vous fera un bon entraînement, y compris pour l'oral.

• Sujet 3 : C.A.P.E.S. Interne 1990 Première Composition

Le «Capès» est un concours de recrutement des professeurs des lycées. Le concours interne est réservé aux professeurs qui ont déjà enseigné pendant un certain temps. Le programme est voisin de celui des classes préparatoires et les problèmes posés sont en général très intéressants.

Celui-ci est (ce n'est pas rare) un peu long ; il vous fera faire une bonne révision sur les suites de nombres réels. Il fait appel à quelques notions d'arithmétique que tout «honnête homme» doit connaître, pour aborder la méthode du développement en fraction continue, qui permet de faire apparaître tout réel comme limite d'une suite de rationnels remarquables.

Problème sur les POLYNÔMES et NOMBRES de BERNOULLI

Durée : 4 heures

Les fonctions considérées dans le problème sont toutes à valeurs réelles.
On identifie tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ et la fonction polynôme qui lui est associée.

Partie I : Polynômes et nombres de Bernoulli

1°) *Définition des polynômes de Bernoulli*

a) Montrer qu'il existe une suite unique (B_n) de polynômes réels telle que :

$$\begin{array}{lll} (i) & & B_0(x) = 1 \\ (ii) & \forall n \in \mathbb{N}^*, & B_n'(x) = nB_{n-1}(x) \\ (iii) & \forall n \in \mathbb{N}^*, & \int_0^1 B_n(x)\,dx = 0 \end{array}$$

b) Calculer B_1, B_2 et B_3.

2°) *Quelques propriétés des B_n*

a) Quel est le terme de plus haut degré de B_n ?

b) Démontrer que $C_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$ vérifie les trois relations de la question 1.a. Que peut-on en conclure ? Que vaut $B_n(\frac{1}{2})$ pour n impair ?
Préciser la parité de la fonction $x \mapsto B_n(\frac{1}{2}+x)$.

c) Montrer que $B_n(1) = B_n(0)$ pour $n \geqslant 2$. Que vaut $B_n(0)$ pour n impair ?

3°) *Représentation graphique*

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad B_n(x) = 2^{n-1}\left[B_n\left(\frac{x}{2}\right) + B_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]$.
En déduire la valeur de $B_{2k}(\frac{1}{2})$ en fonction de $B_{2k}(0)$.

b) Etudier par récurrence le sens de variation de B_n sur $[0, \frac{1}{2}]$, à partir de $n = 2$.

c) Donner l'allure de la représentation graphique de $B_n(x)$ pour $x \in [0;1]$, et $n \geqslant 3$, suivant que n est de l'une des formes $4k$, $4k+1$, $4k+2$ ou $4k+3$.

4°) *Nombres de Bernoulli*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $\beta_n = B_n(0)$. β_n est appelé un nombre de Bernoulli.

a) Que vaut β_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$?

b) Calculer $B_n^{(n-k)}(0)$ en fonction de β_k pour $0 \leqslant k \leqslant n$.
En déduire que $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \beta_k x^{n-k}$ et que $\beta_{n-1} = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2} C_n^k \beta_k$

c) Calculer β_1, β_2, β_4 et β_6. Donner une expression de B_6.

5°) Montrer que :

$$\sup_{x\in[0,1]} |B_{2k}(x)| = |\beta_{2k}| \quad \text{et} \quad \sup_{x\in[0,1]} |B_{2k+1}(x)| \leqslant \left(k+\frac{1}{2}\right)|\beta_{2k}|.$$

Partie II : Applications à l'algèbre

1°) Montrer que, pour chaque entier naturel $n \neq 0$, B_n vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_n(x+1) - B_n(x) = n\,x^{n-1}.$$

2°) On note $S_{m,p} = \sum_{k=0}^{m} k^p$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$.
Montrer que $S_{m,p}$ s'exprime facilement en fonction de valeurs prises par B_{p+1}.

3°) Calculer la somme des carrés des n premiers entiers.

4°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}^n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels.
On considère l'application u qui à $P \in \mathbb{R}^n[x]$ associe Q défini par $Q(x) = P(x+1) - P(x)$.

a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n[x]$. Représenter sa matrice sur la base usuelle $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ de $\mathbb{R}^n[x]$. Cet endomorphisme est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^n[x]$?

b) Préciser l'image et le rang de u, puis le noyau de u.

c) Quels sont les polynômes P, à coefficients réels, tels que $P(x+1) - P(x)$ soit le polynôme nul ?

d) Soit $Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, à coefficients réels.
Donner l'expression générale, utilisant les polynômes de Bernoulli, des polynômes P tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x+1) - P(x) = Q(x).$$

Partie III : Vers la formule d'EULER-MACLAURIN

1°) Soit $n \in \mathbb{N}$, F une fonction définie sur l'intervalle $I = [0,1]$, de classe C^{n+1} sur I.
Soit P un polynôme réel de degré n. Etant donnés deux réels x et $h > 0$ tels que l'intervalle $[x, x+h]$ soit contenu dans I, soit Φ la fonction définie sur I par la relation :

$$\forall t \in I, \quad \Phi(t) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k h^k P^{(n-k)}(t) F^{(k)}(x+ht). \qquad (1)$$

Montrer que la fonction Φ est de classe C^1 sur I et admet pour dérivée

$$\Phi'(t) = (-1)^n h^{n+1} P(t) F^{(n+1)}(x+ht).$$

2°) En exprimant de deux manières différentes $\Phi(1) - \Phi(0)$, démontrer la relation :

$$F(x+h) - F(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{h^k}{P^{(n)}(0)}\left(P^{(n-k)}(1)F^{(k)}(x+h) - P^{(n-k)}(0)F^{(k)}(x)\right) + \frac{(-1)^n h^{n+1}}{P^{(n)}(0)} R_n(h) \qquad (2)$$

avec : $R_n(h) = \int_0^1 P(t) F^{(n+1)}(x+ht)\,dt$.

3°) Quelle relation bien connue (en principe) la relation (2) permet-elle de retrouver lorsque l'on choisit $P(t) = (t-1)^n$?

4°) *Formule d'Euler-MacLaurin*

Soit f une fonction de classe C^{2n+1} sur $\mathbb{R}$, et $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.
En appliquant la relation (2) avec $P = B_{2n+1}$, démontrer la formule :

$$\int_x^{x+1} f(t)\,dt = \frac{1}{2}(f(x) + f(x+1)) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{\beta_k}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(x+1) - f^{(2k-1)}(x)\right) - \int_0^1 \frac{B_{2n+1}(t)}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(x+t)\,dt.$$

5°) *Première application*

a) En déduire que que pour p et q entiers relatifs tels que $p < q$ on a :

$$\sum_{k=p}^{q} f(k) = \int_p^q f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(p) + f(q)) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\beta_k}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(q) - f^{(2k-1)}(p)\right) + R_n \qquad (3)$$

avec :

$$|R_n| \leqslant \frac{\beta_{2n}}{2\,(2n)!}\int_p^q |f^{(2n+1)}(t)|\,dt.$$

b) En prenant $f(x) = \sqrt{x}$ dans la relation (3) trouver des réels a et b tels que :

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{m} - (am^{\frac{3}{2}} + b\sqrt{m})$$

reste borné quand $m \to \infty$.

***

Problème sur les POLYNÔMES et NOMBRES de BERNOULLI

CORRIGÉ

Partie I : Polynômes et nombres de Bernoulli

1°) *Définition des polynômes de Bernoulli*

a) Au rang 0, la condition $B_0(x) = 1$ définit un polynôme B_n et un seul. Soit $n \geqslant 0$ un entier fixé. Supposons qu'il existe une unique famille de polynômes $(B_0, B_1, \dots, B_n)$ vérifiant (i), (ii) et (iii). Alors, au rang $n+1$, la condition $B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x)$ impose que B_{n+1} soit de la forme $F + k$ où F est un polynôme bien précis, primitive de $(n+1)B_n$, et k une constante. Pour un k choisi, $\int_0^1 B_{n+1}(x)dx = k + \int_0^1 F(x)dx$ donc la condition $\int_0^1 B_{n+1}(x)dx = 0$ impose la valeur de k.

Il existe donc un polynôme B_{n+1} convenable et un seul. Donc, par récurrence sur n :

$\boxed{\text{il existe une suite unique de polynômes vérifiant les conditions imposées.}}$

b) B_1 est de la forme $x + k$ avec $k + \int_0^1 x dx = 0$, donc $k = -\frac{1}{2}$ donc $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$.

B_2 est de la forme $x^2 - x + k$ avec $k + \int_0^1 (x^2 - x)\,dx = 0$, donc $k = \frac{1}{6}$ donc $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$.

B_3 est de la forme $x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} + k$ avec $k + \int_0^1 \left(x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}\right) dx = 0$, donc $k = 0$ donc $B_3(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}$.

$$\boxed{B_1(x) = x - \frac{1}{2};\quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6};\quad B_3(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}.}$$

2°) *Quelques propriétés des B_n*

a) Le terme de plus haut degré de B_0 est 1. Si le terme de plus haut degré de B_{n-1} est x^{n-1}, alors, comme B_n est une primitive de de nB_{n-1}, son terme de plus haut degré est x^n. On a donc, par récurrence sur n :

$\boxed{\text{Le terme de plus haut degré de } B_n \text{ est } x^n.}$

b) Soit $C_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$. On a $C_0(x) = B_0(1-x) = 1 = B_0(x)$.
Ensuite $C'_n(x) = -(-1)^n B'_n(1-x) = -(-1)^n nB_{n-1}(1-x) = n.(-1)^{n-1}B_{n-1}(1-x) = nC_{n-1}(1-x)$.
Enfin $\int_0^1 C_n(x)dx = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-x)dx = (-1)^n \int_0^1 B_n(u)du$ (changement de variable $u = 1-x$).
Donc $\int_0^1 C_n(x)dx = 0$.

$\boxed{C_n(x) = (-1)^n B_n(1-x) \text{ vérifie les trois relations de la question I.a.}}$

Comme $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la seule suite vérifiant ces trois relations, on a nécessairement $B_n = C_n$ pour tout n.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x).}$$

Pour n impair, cela donne $B_n(x) = -B_n(1-x)$. En particulier

$\boxed{\text{Pour } n \text{ impair, } B_n(\tfrac{1}{2}) = 0.}$

En remplaçant x par $x + \frac{1}{2}$ dans la relation précédente, on obtient $B_n(\frac{1}{2} + x) = (-1)^n B_n(\frac{1}{2} - x)$, donc

$\boxed{\text{La fonction } x \mapsto B_n(\tfrac{1}{2} + x) \text{ est paire si } n \text{ est pair, impaire si } n \text{ est impair.}}$

c) Pour $n \geqslant 1$, $B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B'_n(x)dx = n\int_0^1 B_{n-1}(x)dx = 0$ pour $n - 1 > 0$, donc

$\boxed{B_n(1) = B_n(0) \text{ pour } n \geqslant 2 \quad \text{et} \quad B_n(0) = 0 \text{ pour } n \text{ impair autre que } 1}$

car, pour n impair autre que 1, on a, d'après 2°)b) et ce qui précède, $B_n(0) = -B_n(1) = -B_n(0)$.

3°) *Représentation graphique*

a) Considérons les polynômes P_n définis par $P_n(x) = 2^{n-1}\left[B_n\left(\frac{x}{2}\right) + B_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]$. Ils vérifient

(i) $P_0(x) = \frac{1}{2}\left[B_0\left(\frac{x}{2}\right) + B_0\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] = 1.$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad P'_n(x) = 2^{n-1}\left[\frac{1}{2}B'_n\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}B'_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] = 2^{n-2}\left[B'_n\left(\frac{x}{2}\right) + B'_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]$
$= 2^{n-2}\left[nB_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right) + nB_{n-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] = nP_{n-1}(x).$

(iii) $\int_0^1 P_n(x)\,dx = 2^{n-1}\int_0^1 \left[B_n\left(\frac{x}{2}\right) + B_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] dx = 2^{n-1}\left[\int_0^1 B_n\left(\frac{x}{2}\right) dx + \int_0^1 B_n\left(\frac{x+1}{2}\right) dx\right]$
$= 2^{n-1}\left(2\int_0^{\frac{1}{2}} B_n(u)du + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 B_n(v)dv\right) = 2^n \int_0^1 B_n(x)\,dx = 0.$

(on a fait les changements de variables $x = 2u$ et $x + 1 = 2v$).

Puisque $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la seule suite vérifiant ces trois propriétés, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = B_n$, autrement dit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad B_n(x) = 2^{n-1}\left[B_n\left(\frac{x}{2}\right) + B_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right].}$$

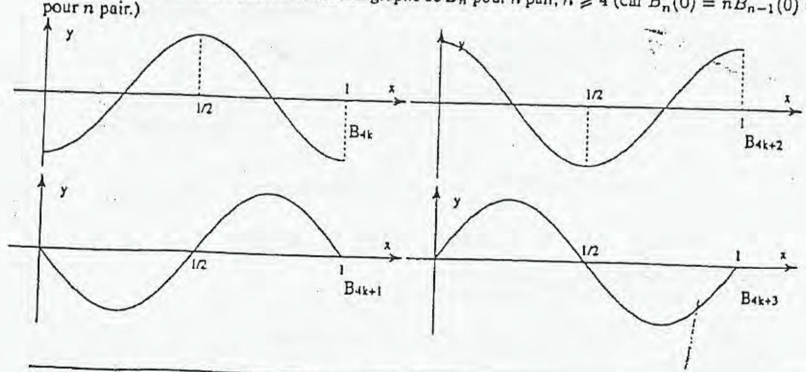
Pour $x = 0$ et $n = 2k$, cela donne $B_{2k}(0) = 2^{2k-1}(B_{2k}(0) + B_{2k}(\frac{1}{2}))$ donc

$$\boxed{B_{2k}(\tfrac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2^{2k-1}} - 1\right) B_{2k}(0).}$$

b) B_1 est strictement négatif sur $]0, \frac{1}{2}[$ donc B_2 est décroissante(strictement) sur $[0, \frac{1}{2}]$. $B_2(0)$ et $B_2(\frac{1}{2})$ sont de signe contraire d'après a), donc $B_2(0) > 0$ et $B_2(\frac{1}{2}) < 0$. B_2 s'annule donc une fois en $t_2 \in]0, \frac{1}{2}[$, est > 0 sur $[0, t_2[$, < 0 sur $]t_2, \frac{1}{2}]$.
B_3 est donc croissant (strictement) sur $[0, t_2]$ et décroissant strictement sur $[t_2, \frac{1}{2}]$. Comme $B_3(0) = B_3(\frac{1}{2}) = 0$, B_3 est strictement positif sur $]0, \frac{1}{2}[$.
B_4 est donc strictement croissant sur $[0, \frac{1}{2}]$. $B_4(0)$ et $B_4(\frac{1}{2})$ sont de signe contraire d'après a), donc $B_4(0) < 0$ et $B_4(\frac{1}{2}) > 0$. B_4 s'annule donc une fois en $t_4 \in]0, \frac{1}{2}[$, est < 0 sur $[0, t_4[$, > 0 sur $]t_4, \frac{1}{2}]$.
B_5 est donc décroissant (strictement) sur $[0, t_4]$ et croissant strictement sur $[t_4, \frac{1}{2}]$.
Comme $B_5(0) = B_5(\frac{1}{2}) = 0$, B_5 est strictement négatif sur $]0, \frac{1}{2}[$.
$B_5 < 0$ sur $]0, \frac{1}{2}[$, comme B_1 : on se retrouve pour B_6 exactement dans la même situation que pour B_2, d'où le même tableau de variations. Ensuite B_7 a le même tableau de variations que B_3 etc.. et l'on voit par récurrence immédiate :

$\boxed{\text{Il y a 4 sortes de tableaux de variations possibles.}}$

c) On en déduit les 4 aspects possibles pour le graphe de B_n sur $[0, \frac{1}{2}]$. On complète ensuite, pour avoir le graphe sur $[0, 1]$, en utilisant la parité ou l'imparité de $B_n(\frac{1}{2} + x)$. Pour préciser les dessins, notons les tangentes « horizontales » aux extrémités du graphe de B_n pour n pair, $n \geqslant 4$ (car $B'_n(0) = nB_{n-1}(0) = 0$ pour n pair.)



4°) *Nombres de Bernoulli*

a) Pour n impair autre que 1, on a déjà dit que $B_n(0)=0$. Donc $\boxed{\beta_{2k+1}=0 \text{ pour } k\in\mathbb{N}}$

b) On a, pour $n\geqslant 1$, $B'_n = nB_{n-1}$ donc, si $n>k\geqslant 0$,

$$B_n^{(n-k)} = nB_{n-1}^{(n-k-1)} = n(n-1)B_{n-2}^{(n-k-2)} = \dots = n(n-1)\dots(k+1)B_k = \frac{n!}{k!}B_k,$$

également valable si $n=k\geqslant 0$. Donc :

$$\boxed{\text{Pour } 0\leqslant k\leqslant n,\quad B_n^{(n-k)}(0)=\frac{n!}{k!}B_k(0)=\frac{n!}{k!}\beta_k.}$$

La formule de Taylor pour un polynôme de degré n donne $B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{B_n^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}x^{n-k}$ donc

$$\boxed{B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\beta_k x^{n-k}.}$$

Pour $x=0$, cela donne β_n et pour $x=1$, cela donne $\sum_{k=0}^{n} C_n^k\beta_k = \sum_{k=0}^{n-2} C_n^k\beta_k + n\beta_{n-1}+\beta_n$ (si $n\geqslant 2$).

Comme $B_n(0)=B_n(1)$ on a $\beta_n = \sum_{k=0}^{n-2}C_n^k\beta_k + n\beta_{n-1}+\beta_n$ ou encore

$$\boxed{\beta_{n-1} = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}C_n^k\beta_k \text{ (si } n\geqslant 2).}$$

c) On a : $\beta_0=1$, $\beta_1=B_1(0)=-\frac{1}{2}$, $\beta_2=B_2(0)=\frac{1}{6}$.
Ensuite les β_{2k+1} sont nuls et la formule précédente permet de calculer les β_{2k} de proche en proche.
On a ainsi $\beta_4 = -\frac{1}{5}(\beta_0+5\beta_1+10\beta_2+10\beta_3) = -\frac{1}{5}\left(1-\frac{5}{2}(!)+\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{30}$ et
$\beta_6 = -\frac{1}{7}(\beta_0+7\beta_1+21\beta_2+35\beta3+35\beta_4+21\beta_5) = -\frac{1}{7}(1-\frac{7}{2}(!!)+\frac{7}{2}(!!!)-\frac{7}{6})=\frac{1}{42}$.
La formule $B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\beta_kx^{n-k}$ donne ensuite une expression de B_n.
Ainsi $B_6(x)=\beta_0x^6+6\beta_1x^5+15\beta_2x^4+20\beta_3x^3+15\beta_4x^2+6\beta_5x+\beta_6 = x^6-3x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{42}$.
Rassemblons :

$$\boxed{\beta_1=-\frac{1}{2},\ \beta_2=\frac{1}{6},\ \beta_4=-\frac{1}{30},\ \beta_6=\frac{1}{42} \text{ et } B_6(x)=x^6-3x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{42}.}$$

5°) Pour $k\geqslant 2$, B_{2k} est strictement monotone sur $[0,\frac{1}{2}]$, et $B_{2k}([0,\frac{1}{2}]) = B_{2k}([\frac{1}{2},1])$ car $B_{2k}(\frac{1}{2}+x)$ est paire :
Donc le sup de $|B_{2k}(x)|$ est soit $|B_{2k}(0)|$, soit $|B_{2k}(\frac{1}{2})|$. Or $|B_{2k}(\frac{1}{2})|\leqslant|B_{2k}(0)|$ d'après 3)a).
Le sup de $|B_{2k}|$ est donc $|B_{2k}(0)|$. C'est également vrai pour $k=0$.
Ensuite, par imparité de $B_{2k+1}(\frac{1}{2}+x)$, le sup de $|B_{2k+1}|$ est le sup sur $[0;\frac{1}{2}]$. Le tableau des variations, traduit par le tracé du graphe, montre clairement que, pour $k\geqslant 1$, ce sup est atteint au point t_{2k} de $]0,\frac{1}{2}[$ où la dérivée $(2k+1)B_{2k}$ s'annule. On a

$$\begin{aligned}|B_{2k+1}(t_{2k})| &= \left|\int_0^{t_{2k}} B'_{2k+1}(x)\,dx\right| = (2k+1)\left|\int_0^{t_{2k}}B_{2k}(x)\,dx\right| \leqslant (2k+1)\int_0^{t_{2k}}|B_{2k}(x)|\,dx\\ &\leqslant (2k+1)\int_0^{t_{2k}}\beta_{2k}\,dx \leqslant (2k+1)t_{2k}\beta_{2k}\leqslant(2k+1).\frac{1}{2}.\beta_{2k}.\end{aligned}$$

La conclusion est également vraie pour $k=0$. Résumons :

$$\boxed{\sup_{x\in[0,1]}|B_{2k}(x)|=|\beta_{2k}| \quad\text{et}\quad \sup_{x\in[0,1]}|B_{2k+1}(x)|\leqslant\left(k+\frac{1}{2}\right)|\beta_{2k}|.}$$

Partie II : Applications à l'algèbre

1°) $B_1(x+1)-B_1(x) = (x+1-\frac{1}{2})-(x-\frac{1}{2})=1=1.x^0$:
la relation qu'on nous demande de démontrer est vraie pour $n = 1$.
Supposons qu'elle soit vraie à un rang $n\geqslant 1$. Alors :
$\forall x\in\mathbb{R}$, $B'_{n+1}(x+1)-B'_{n+1}(x) = (n+1)\,(B_n(x+1)-B_n(x)) = (n+1).n.x^{n-1}$, donc
$B_{n+1}(x+1)-B_{n+1}(x)=(n+1)x^n$+cste. En faisant $x=0$, on voit que cette constante est nulle.
Donc $B_{n+1}(x+1)-B_{n+1}(x)=(n+1)x^n$, ce qui termine la récurrence.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ B_n \text{ vérifie : } \forall x\in\mathbb{R},\quad B_n(x+1)-B_n(x)=n\,x^{n-1}}$$

2°) Soit $p\in\mathbb{N}$ et $S_{m,p}=0^p+1^p+2^p+\dots+m^p$. Appliquons la relation précédente pour $n=p+1$ et $x=0,\dots,m$:

$$\begin{cases} B_{p+1}(1)-B_{p+1}(0) &= (p+1)0^p\\ B_{p+1}(2)-B_{p+1}(1) &= (p+1)1^p\\ B_{p+1}(3)-B_{p+1}(2) &= (p+1)2^p\\ \dots & \dots\\ B_{p+1}(m+1)-B_{p+1}(m) &= (p+1)m^p.\end{cases}$$

Ajoutons membre à membre les égalités obtenues. Après télescopage et division par $p+1$, il vient :

$$\boxed{S_{m,p}=\frac{1}{p+1}\left(B_{p+1}(m+1)-B_{p+1}(0)\right).}$$

3°) En particulier

$$S_{n,2}=\frac{1}{3}(B_3(n+1)-B_3(0))=\frac{1}{3}B_3(n+1)=\frac{1}{3}\left((n+1)^3-\frac{3(n+1)^2}{2}+\frac{n+1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{6}(n+1)\left(2(n+1)^2-3(n+1)+1\right)=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2+4n+2-3n-3+1)=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2+n).$$

On retrouve le résultat connu :

$$\boxed{\text{La somme des carrés des } n \text{ premiers entiers est } \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

4°)a) Si $P(x)$ est un polynôme de degré $\leqslant n$, il en est de même de $P(x+1)$ et aussi de $P(x+1)-P(x)$.
u est donc une application de $\mathbb{R}^n[x]$ dans lui-même.
$u(\alpha P+\beta S)$ est le polynôme Q défini par
$Q(x)=(\alpha P+\beta S)(x+1)-(\alpha P+\beta S)(x)=\alpha(P(x+1)-P(x))+\beta(S(x+1)-S(x))$, d'où
$u(\alpha P+\beta S)=\alpha u(P)+\beta u(S)$: u est linéaire.

$$\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^n[x].}$$

Dans la $k+1$-ième colonne de la matrice de u sur la base usuelle de $\mathbb{R}^n[x]$ figurent les composantes de $u(x^k)$ sur $(1,x,x^2,\dots,x^n)$. Or $u(x^k)$ est le polynôme $(x+1)^k-x^k$. Pour $k=0$, c'est le polynôme nul.
Sinon, c'est $\sum_{j=0}^{k-1}C_k^jx^j$. La matrice demandée est donc

$$\begin{pmatrix} 0&1&1&\dots&1&\dots&1\\ 0&0&2&&C_k^1&&C_n^1\\ \vdots&&\ddots&&\vdots&&\\ &&&0&C_k^{k-1}&&\\ &&&&0&&\\ \vdots&&&\vdots&&\ddots&C_n^{n-1}\\ 0&&&\dots&&&0\end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est pas inversible puisqu'elle comporte une colonne nulle donc

$$\boxed{\text{Cet endomorphisme n'est pas un automorphisme de } \mathbb{R}^n[x].}$$

On pouvait dire aussi que le noyau n'est pas réduit à $\{0\}$ puisqu'il contient tous les polynômes constants, donc u n'est pas injectif, ou dire encore que $u(P)$ est de degré $< n$ (puisque les termes de degré n se simplifient dans $P(x+1)-P(x)$) donc les polynômes de degré n ne sont pas atteints par u, donc u n'est pas surjectif.

b) On vient de dire que l'image de u est incluse dans $\mathbb{R}^{n-1}[x]$. Tous les vecteurs de la base usuelle $(1, x, x^2, \ldots, x^{n-1})$ de $\mathbb{R}^{n-1}[x]$ sont atteints par u puisque, pour k de 1 à n, $x^{k-1} = \frac{1}{k}u(B_k)$ d'après le 1°. Tous les vecteurs de $\mathbb{R}^{n-1}[x]$ sont donc atteints par u et

$$\boxed{\text{L'image de } u \text{ est donc } \mathbb{R}^{n-1}[x]. \quad \text{Le rang de } u \text{ est } \dim(\mathbb{R}^{n-1}[x]), \text{ soit } n.}$$

D'après le théorème du rang, le noyau est donc de dimension 1. Comme il contient le sous-espace des constantes, qui est de dimension 1, il est égal à ce sous-espace.

$$\boxed{\text{Le noyau de } u \text{ est l'ensemble des polynômes constants.}}$$

c) Soit P un polynôme à coefficients réels, tel que $P(x+1)-P(x)$ soit le polynôme nul. P appartient à $\mathbb{R}^n[x]$, pour n suffisamment grand ($n \geqslant$ degré(P)). Reprenons l'endomorphisme u précédent ; P appartient à son noyau ; P est donc constant. Réciproquement, si P est constant, on a $P(x+1)-P(x)=0$.

$$\boxed{\text{Les polynômes } P \text{ tels que } P(x+1)-P(x) \text{ soit le polynôme nul sont les polynômes constants.}}$$

On pouvait aussi dire : Si $P(x+1)-P(x)=0$, alors $P(1)=P(0)$ puis, par récurrence, $P(k)=P(0)$ pour tout k. $P(x)-P(0)$ a donc une infinité de racines ; il est donc nul, donc $P(x)=P(0)=cste$.

d) Soit $Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, à coefficients réels. D'après 1°) on peut écrire $Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(\frac{1}{k+1}(B_{k+1}(x+1) - B_{k+1}(x))\right) = S(x+1) - S(x)$ en prenant

$S(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1} B_{k+1}(x)$. Pour avoir $Q(x) = P(x+1) - P(x)$ pour tout x, il faut et suffit donc que $P(x+1)-P(x) = S(x+1)-S(x)$ pour tout x, ou encore $(P-S)(x+1)-(P-S)(x)=0$, ce qui équivaut, on vient de le voir, à $P-S=$cste. Les polynômes P solutions sont donc les polynômes de la forme S+cste.

$$\boxed{\text{Les solutions sont les polynômes } \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1} B_{k+1}(x) + \lambda, \text{ où } \lambda \text{ est une constante réelle quelconque.}}$$

Partie III : Vers la formule d'EULER-MACLAURIN

1°) P est un polynôme réel de degré $n > 0$, F est une fonction définie de classe C^{n+1} sur $I = [0,1]$. x et $h > 0$ sont deux réels tels que $[x, x+h]$ soit contenu dans I.

On pose $\Phi(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k h^k P^{(n-k)}(t) F^{(k)}(x+ht)$.

Puisque F est de classe C^{n+1} sur $I=[0,1]$, $F^{(k)}$ est, pour tout k de 0 à n, au moins de classe C^1. On la compose par la fonction affine : $t \to x+ht$, qui est C^∞ sur I, à valeurs dans $[x, x+h]$ contenu dans I. Par composition, $t \to F^{(k)}(x+ht)$ est de classe C^1 sur I.
On multiplie par le polynôme $P^{(n-k)}(t)$ qui est C^∞ sur I et enfin on fait une combinaison linéaire des fonctions obtenues :
Φ est de classe C^1 sur I. En dérivant les produits :

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k h^k P^{(n-k+1)}(t) F^{(k)}(x+ht) + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k h^k P^{(n-k)}(t) h F^{(k+1)}(x+ht)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k h^k P^{(n-k+1)}(t) F^{(k)}(x+ht) + \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1} h^k P^{(n-k+1)}(t) F^{(k)}(x+ht).\end{aligned}$$

Concluons après avoir simplifié et tenu compte de $P^{(n+1)} = 0$:

$$\boxed{\text{la fonction } \Phi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \text{ et admet pour dérivée } \Phi'(t) = (-1)^n h^{n+1} P(t) F^{(n+1)}(x+ht).}$$

2°) On pose $\quad R_n(h) = \int_0^1 P(t) F^{(n+1)}(x+ht)\, dt.$

D'un côté on a, puisque Φ est de classe C^1 sur I : $\Phi(1) - \Phi(0) = \int_0^1 \Phi'(t)\, dt = (-1)^n h^{n+1} R_n(h)$.
De l'autre côté, la définition de Φ donne :

$$\Phi(1) - \Phi(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k h^k \left(P^{(n-k)}(1) F^{(k)}(x+h) - P^{(n-k)}(0) F^{(k)}(x)\right).$$

Comme le polynôme P est de degré n, $P^{(n)}$ est une constante non nulle : $P^{(n)}(1) = P^{(n)}(0) \neq 0$.
On peut donc encore écrire, en mettant à part le terme obtenu pour $k=0$:

$$\Phi(1)-\Phi(0) = P^{(n)}(0)(F(x+h)-F(x)) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k h^k \left(P^{(n-k)}(1) F^{(k)}(x+h) - P^{(n-k)}(0) F^{(k)}(x)\right).$$

En égalant les deux expressions de $\Phi(1) - \Phi(0)$ et isolant $F(x+h) - F(x)$, on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned}F(x+h) - F(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{h^k}{P^{(n)}(0)} &\left(P^{(n-k)}(1) F^{(k)}(x+h) - P^{(n-k)}(0) F^{(k)}(x)\right)\\ &+ \frac{(-1)^n h^{n+1}}{P^{(n)}(0)} R_n(h). \qquad (2)\end{aligned}}$$

3°) Lorsque l'on choisit $P(t) = (t-1)^n$, qui est effectivement de degré n, les dérivées successives de P en 1 sont nulles, sauf la n-ième qui vaut $n!$. $P^{(n-k)}(0)$ vaut $\frac{n!}{k!}(-1)^k$. La formule s'écrit

$$\begin{aligned}F(x+h) - F(x) &= -\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \frac{h^k}{n!}(-1)^k \frac{n!}{k!} F^{(k)}(x) \quad + \frac{(-1)^n h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (t-1)^n F^{(n+1)}(x+ht)\, dt\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} F^{(k)}(x) \quad + \frac{(-1)^n h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (t-1)^n F^{(n+1)}(x+ht)\, dt\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} F^{(k)}(x) \quad + \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n F^{(n+1)}(x+ht)\, dt\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} F^{(k)}(x) \quad + \frac{1}{n!} \int_x^{x+h} (x+h-u)^n F^{(n+1)}(u)\, du\end{aligned}$$

après le changement de variable $u = x + ht$ (d'où $1 - t = \frac{h-u+x}{h}$.)

$$\boxed{\text{On reconnaît la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à } F \text{ entre } x \text{ et } x+h.}$$

4°) **Formule d'Euler-MacLaurin**

Ici $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ où f est une fonction de classe C^{2n+1} sur $\mathbb{R}$, donc F est une fonction de classe C^{2n+2} sur $\mathbb{R}$.
On peut appliquer la formule précédente avec x et $h > 0$ quelconque à l'ordre $2n+1$ au lieu de n.
On prend $P = B_{2n+1}$, qui est bien de degré $2n+1$, et $h = 1$.
La formule donne :

$$F(x+1) - F(x) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{B_{2n+1}^{(2n+1)}(0)} \left(B_{2n+1}^{(2n+1-k)}(1) F^{(k)}(x+1) - B_{2n+1}^{(2n+1-k)}(0) F^{(k)}(x)\right) - \frac{R}{B_{2n+1}^{(2n+1)}(0)}$$

avec $\quad R = \int_0^1 B_{2n+1}(t) F^{(2n+2)}(x+t)\, dt.$

Compte tenu de la définition de F, cela donne

$$\int_x^{x+1} f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{B_{2n+1}^{(2n+1)}(0)} \left(B_{2n+1}^{(2n+1-k)}(1) f^{(k-1)}(x+1) - B_{2n+1}^{(2n+1-k)}(0) f^{(k-1)}(x)\right) - \frac{R}{B_{2n+1}^{(2n+1)}(0)}$$

avec $\quad R = \int_0^1 B_{2n+1}(t) f^{(2n+1)}(x+t)\, dt.$

D'après ce qu'on a vu dans la première partie, $B_{2n+1}^{(2n+1-k)}(0) = \frac{(2n+1)!}{k!}\beta_k$
égal aussi à $B_{2n+1}^{(2n+1-k)}(1)$ pour $k \geqslant 2$ donc, en mettant à part le terme obtenu pour $k = 1$,
et utilisant $B_{2n+1}^{(2n+1)}(0) = (2n+1)!\beta_0 = (2n+1)!$ on a :

$$\int_x^{x+1} f(t)\,dt = \frac{1}{(2n+1)!}\left(B^{(2n)}_{2n+1}(1)f(x+1) - B^{(2n)}_{2n+1}(0)f(x)\right)$$
$$+\sum_{k=2}^{2n+1}(-1)^{k-1}\frac{\beta_k}{k!}(f^{(k-1)}(x+1) - f^{(k-1)}(x)) - \frac{R}{(2n+1)!}.$$

Ensuite $B^{(2n)}_{2n+1} = (2n+1)!B_1$ donc $B^{(2n)}_{2n+1}(0) = -\dfrac{(2n+1)!}{2}$ et $B^{(2n)}_{2n+1}(1) = \dfrac{(2n+1)!}{2}$ donc

$$\int_x^{x+1} f(t)\,dt = \frac{1}{2}(f(x+1)+f(x)) + \sum_{k=2}^{2n+1}(-1)^{k-1}\frac{\beta_k}{k!}(f^{(k-1)}(x+1) - f^{(k-1)}(x)) - \frac{R}{(2n+1)!}.$$

Enfin, pour $k \geqslant 2$, seuls les β_k où k est pair sont non nuls donc

$$\boxed{\begin{aligned}\int_x^{x+1} f(t)\,dt = \frac{1}{2}(f(x)+f(x+1)) - \sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(x+1) - f^{(2k-1)}(x)\right)\\ - \int_0^1 \frac{B_{2n+1}(t)}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(x+t)\,dt.\end{aligned}}$$

5°) *Première application*

a) Soient p et q entiers relatifs tels que $p < q$. Appliquons la formule précédente à $x = p, p+1, \ldots, q-1$ et ajoutons membre à membre les égalités obtenues.

Les $\frac{1}{2}(f(x) + f(x+1))$ se regroupent à l'exception des deux extrêmes et cela donne $\left(\sum_{k=p}^{q} f(k)\right) - \frac{1}{2}(f(p)+f(q))$. Les $\int_x^{x+1} f(t)\,dt$ se regroupent en $\int_p^q f(t)\,dt$. Les $\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_{2k}}{(2k)!}(f^{(2k-1)}(x+1) - f^{(2k-1)}(x))$ se télescopent pour donner $\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_{2k}}{(2k)!}(f^{(2k-1)}(q) - f^{(2k-1)}(p))$

Les $\int_0^1 \frac{B_{2n+1}(t)}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(x+t)\,dt$ se regroupent en $R_n = \int_0^1 \frac{B_{2n+1}(t)}{(2n+1)!}\sum_{k=p}^{q-1} f^{(2n+1)}(k+t)\,dt$

et l'on a : $\sum_{k=p}^{q} f(k) = \int_p^q f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(p)+f(q)) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_{2k}}{(2k)!}(f^{(2k-1)}(q) - f^{(2k-1)}(p)) + R_n$

D'après ce qu'on a vu à la fin de la première partie on a, pour $t \in [0,1]$, $\dfrac{|B_{2n+1}(t)|}{(2n+1)!} \leqslant \dfrac{|\beta_{2n}|}{2((2n)!)}$ donc

$$|R_n| \leqslant \frac{|\beta_{2n}|}{2(2n)!}\int_0^1 \sum_{k=p}^{q-1}|f^{(2n+1)}(k+t)|\,dt = \frac{|\beta_{2n}|}{2((2n)!)}\sum_{k=p}^{q-1}\int_0^1 |f^{(2n+1)}(k+t)|\,dt$$
$$= \frac{|\beta_{2n}|}{2(2n)!}\int_p^q |f^{(2n+1)}(u)|\,du.$$

(Dans chaque intégrale on a fait le changement de variable $u = k+t$). Rassemblons :

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q} f(k) = \int_p^q f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(p)+f(q)) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_{2k}}{(2k)!}(f^{(2k-1)}(q) - f^{(2k-1)}(p)) + R_n\\ \text{avec } |R_n| \leq \frac{|\beta_{2n}|}{2(2n)!}\int_p^q |f^{(2n+1)}(t)|\,dt.\end{aligned}}$$

b) Le résultat précédent s'étend clairement à une fonction qui n'a les propriétés requises que sur $]0; +\infty[$ pourvu que $p \geqslant 1$, en particulier à $f(x) = \sqrt{x}$. En prenant $n = 1$, $p = 1$ et $q = m$ cela donne

$\sum_{k=1}^{m}\sqrt{k} = \int_1^m \sqrt{t}\,dt + \frac{1}{2}(1+\sqrt{m}) + \frac{\beta_2}{2!}\left(\frac{1}{2\sqrt{m}} - \frac{1}{2}\right) + R_1$ avec

$|R_1| \leqslant \frac{|\beta_2|}{2(2)!}\int_1^m |f^{(3)}(t)|\,dt = \frac{|\beta_2|}{2(2)!}(f''(1) - f''(m))$, qui reste borné quand $m \to +\infty$ puisque $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. $\frac{\beta_2}{2!}\left(\frac{1}{2\sqrt{m}} - \frac{1}{2}\right)$ reste également borné et $\int_1^m \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}(m^{\frac{3}{2}} - 1)$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{m} - \left(\tfrac{2}{3}m^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{m}\right) \text{ reste borné quand } m \to \infty.}$$

***

E.S.T.P. - E.N.S.A.M. 1997	Filière PC
Mathématiques 1	Durée : 3 heures

Les six sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.

Dans cette épreuve comme dans celles qui suivront, *il sera tenu compte de la qualité de la présentation, écriture, concision et précision, mise en évidence des résultats.*

---

1) Soit x un nombre réel et n un entier naturel. Simplifier les expressions suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k},\quad \sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k(1-x)^{n-k},\quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^k x^k(1-x)^{n-k},\quad \sum_{k=0}^{n} k^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k},$$
$$\text{et}\quad \sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}.$$

(On n'oubliera pas de justifier avec soin les cas $n = 0$ et $n = 1$).

---

2) Soit Ω la matrice complexe $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ et ω son polynôme caractéristique $\boxed{\text{c'est-à-dire le déterminant de } \Omega - xI_3.}$ Déterminer les racines de ω en posant $j = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et en déduire un entier n tel que ω divise le polynôme $X(X^n + 27)$.

---

3) a) Soit n un entier strictement supérieur à 1. Déterminer les réels x tels que $|\sin nx| \geqslant n|\sin x|$ (on pourra procéder par récurrence).

b) Si n est un entier arbitraire, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin^2 nx = n^2\sin^2 x$.

---

4) a) Résoudre l'équation $(1+iz)^5 = (1-iz)^5$ dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

b) En déduire les tangentes des nombres $\dfrac{\pi}{5}$ et $\dfrac{2\pi}{5}$ que l'on mettra sous la forme $\sqrt{p+q\sqrt{n}}$, où n, p et q sont éléments de $\mathbb{Z}$, puis celle du nombre $\dfrac{\pi}{10}$.

---

5) a) Déterminer la fonction φ telle qu'une droite d'équation $y = mx + p$ n'est tangente à la courbe E d'équation $y = e^x$ que si, et seulement si, $p = \varphi(m)$.

b) Déterminer la fonction ψ telle qu'une droite d'équation $y = mx + p$ n'est tangente à la courbe L d'équation $y = \ln x$ que si, et seulement si, $p = \psi(m)$.

c) Déterminer le nombre de tangentes communes aux courbes E et L. Que peut-on dire de leurs pentes ? Ce résultat était-il prévisible ?

---

6) Soient deux cercles de rayons distincts R et r, respectivement centrés aux points de coordonnées $(a, 0)$ et $(-a, 0)$ dans un repère orthonormé.

a) Montrer que les droites D coupant ces deux cercles suivant des cordes de même longueur sont tangentes à une parabole P dont on donnera l'équation.

b) Est-ce que réciproquement toutes les tangentes à P répondent à la question ?

***

E.S.T.P. - E.N.S.A.M. 1997

Mathématiques 1 — Filière PC

CORRIGÉ

1) Soient x et y deux réels. En vertu de la formule du binôme, on a, pour tout n entier,

$$(x+1-y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-y)^{n-k}. \quad (1)$$

En particulier, pour $x = y$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1. \quad (2)}$$

L'égalité (1), vue comme égalité entre deux fonctions de x, (y étant fixé), donne par dérivation :

$$n(x+1-y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^{k-1} (1-y)^{n-k}. \quad (3)$$

(Le cas $n = 0$ ne fait pas exception : le membre de gauche est nul du fait de la présence du coefficient nul. De même, il n'est pas gênant de faire commencer la sommation de droite à $k = 0$ au lieu de $k = 1$, le terme obtenu pour $k = 0$ étant nul).
En multipliant par x, on en déduit :

$$nx(x+1-y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-y)^{n-k}. \quad (4)$$

et, pour $y = x$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx. \quad (5)}$$

Dérivons à nouveau (3), vue comme égalité entre fonctions de x (et, là aussi, les termes où figurent des puissances négatives ne posent pas de problème car ces termes sont affectés de coefficients nuls). Nous obtenons

$$n(n-1)(x+1-y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k x^{k-2} (1-y)^{n-k}.$$

En multipliant par x^2 et en prenant $y = x$, cela donne :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2. \quad (6)}$$

Par dérivation de (4), on obtient :

$$n(x+1-y)^{n-1} + n(n-1)x(x+1-y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^{k-1} (1-y)^{n-k}.$$

En multipliant par x et en faisant $y = x$, cela donne

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1+(n-1)x). \quad (7)}$$

Vérification : On constate que l'addition membre à membre des formules (5) et (6) donne bien la formule (7).
$(k-nx)^2 = k^2 - 2nkx + n^2x^2$: la dernière formule demandée s'obtient par addition membre à membre des formules (7), (5) et (2), affectées des coefficients 1, $-2nx$ et n^2x^2. Après réductions, cela donne

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).}$$

2) Le polynôme caractéristique de Ω est :

$$\omega = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ 1 & 1-x & 0 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^3 - 1 = -3x + 3x^2 - x^3 = x(-3+3x-x^2).$$

Il s'annule si et seulement si $(1-x)^3 = 1$ donc si $1-x = 1, j$ ou j^2, donc $\boxed{\text{pour } x = 0, 1-j \text{ ou } 1-j^2,}$ et $\omega = -x(x-1+j)(x-1+j^2)$. $(1-j)^2 = 1-2j+j^2 = -3j$ donc $(1-j)^6 = -27j^3 = -27$ donc $1-j$ est racine du polynôme $x^6 + 27$. Le conjugué $1-j^2$ de ce complexe est également racine de ce polynôme à coefficients réels. Comme $1-j \neq 1-j^2$, x^6+27 est divisible par le produit $(x-1+j)(x-1+j^2)$.

Donc :

$$\boxed{\omega \text{ divise } x(x^6+27).}$$

3)a) Pour $n = 2$, $|\sin nx| \geqslant n|\sin x|$ s'écrit $2|\sin x \cos x| \geqslant 2|\sin x|$, qui ne peut se faire que si $\sin x = 0$ ou $|\cos x| \geqslant 1$. Finalement, les x solutions sont les réels de la forme $k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.
Supposons que, pour n fixé dans $\mathbb{N}$, les solutions de l'inéquation proposée soient les $k\pi$. L'inéquation au rang $n+1$ s'écrit $|\sin(n+1)x| \geqslant (n+1)|\sin x|$, ou $|\sin nx \cos x + \cos nx \sin x| \geqslant (n+1)|\sin x|$, qui implique $|\sin nx \cos x| + |\cos nx \sin x| \geqslant (n+1)|\sin x|$ et a fortiori $|\sin nx| + |\sin x| \geqslant (n+1)|\sin x|$ donc $|\sin nx| \geqslant n|\sin x|$, donc x de la forme $k\pi$, d'après l'hypothèse de récurrence.
Réciproquement, les x de la forme $k\pi$ vérifient évidemment $|\sin(n+1)x| \geqslant (n+1)|\sin x|$. On a donc prouvé par récurrence que :

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ entier, } n \geqslant 2, \text{ les } x \text{ vérifiant } |\sin nx| \geqslant n|\sin x| \text{ sont les } k\pi \text{ pour } k \in \mathbb{Z}.}$$

3)b) Pour $n = 0$ ou 1, l'égalité $\sin^2 nx = n^2 \sin^2 x$ est banale. Pour $n \geqslant 2$, cette égalité nécessite $|\sin nx| = n|\sin x|$ donc $|\sin nx| \geqslant n|\sin x|$ donc x de la forme $k\pi$. Réciproquement, ces x-là vérifient bien $\sin^2 nx = n^2 \sin^2 x$.

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ entier, } n \geqslant 2, \text{ les } x \text{ vérifiant } \sin^2 nx = n^2 \sin^2 x \text{ sont les } k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).}$$

4)a) $(1+iz)^5 = 1 + 5iz - 10z^2 - 10iz^3 + 5z^4 + iz^5$ et $(1-iz)^5 = 1 - 5iz - 10z^2 + 10iz^3 + 5z^4 - iz^5$ donc $(1+iz)^5 - (1-iz)^5 = 2(5iz - 10iz^3 + iz^5)$. L'équation $(1+iz)^5 = (1-iz)^5$ équivaut donc à $z(z^4 - 10z^2 + 5) = 0$. L'équation $Z^2 - 10Z + 5 = 0$ admet pour racines $5+\sqrt{20}$ et $5-\sqrt{20}$, qui sont des réels positifs. On en déduit les quatre solutions, toutes réelles, de l'équation $z^4 - 10z^2 + 5 = 0$. Finalement

$$\boxed{\text{Les solutions de } (1+iz)^5 = (1-iz)^5 \text{ sont } 0, \sqrt{5+\sqrt{20}}, -\sqrt{5+\sqrt{20}}, \sqrt{5-\sqrt{20}} \text{ et } -\sqrt{5-\sqrt{20}}.}$$

4)b) D'autre part $(1+iz)^5 = (1-iz)^5$ équivaut, puisque $1+iz = 0$ n'est pas solution, à $\left(\dfrac{1-iz}{1+iz}\right)^5 = 1$ donc à $\dfrac{1-iz}{1+iz} = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$, avec $k = 0, 1, 2, 3$ ou 4, encore équivalent à $1 - iz = (1+iz)e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ et à $1 - e^{\frac{2ik\pi}{5}} = iz(e^{\frac{2ik\pi}{5}} + 1)$ puis à $iz = \dfrac{1-e^{\frac{2ik\pi}{5}}}{1+e^{\frac{2ik\pi}{5}}}$. En multipliant haut et bas par $e^{\frac{-ik\pi}{5}}$, c'est encore équivalent à $iz = \dfrac{e^{\frac{-ik\pi}{5}} - e^{\frac{ik\pi}{5}}}{e^{\frac{-ik\pi}{5}} + e^{\frac{ik\pi}{5}}} = -\dfrac{2i\sin\frac{k\pi}{5}}{2\cos\frac{k\pi}{5}}$. Les racines de l'équation proposée sont donc les cinq valeurs de $-\tan\dfrac{k\pi}{5}$ pour k de 0 à 4. Outre la racine nulle, ces nombres sont deux à deux opposés. Les deux positifs sont, dans l'ordre croissant, $\tan\dfrac{\pi}{5}$ et $\tan\dfrac{2\pi}{5}$. On a donc nécessairement

$$\boxed{\tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-\sqrt{20}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}} \text{ et } \tan\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5+\sqrt{20}} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}.}$$

Remarquons que $\dfrac{\pi}{10} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\pi}{5}$. La tangente de $\dfrac{\pi}{10}$ est donc l'inverse de la tangente de $\dfrac{2\pi}{5}$, donc

$$\tan\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{25-20}} = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}.$$

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}.}$$

5)a) La tangente à E au point d'abscisse x_0 a pour équation $y - e^{x_0} = e^{x_0}(x - x_0)$ ou $y = e^{x_0}.x + e^{x_0}(1 - x_0)$. L'équation $y = mx + p$ d'une droite non parallèle à Oy est unique donc, si la droite d'équation $y = mx + p$ est tangente à E, c'est nécessairement au point d'abscisse $x_0 = \ln m$, ce qui nécessite déjà que m soit > 0. Ensuite, on a nécessairement $p = e^{x_0}(1 - x_0) = m(1 - \ln m)$.
Réciproquement, considérons la droite d'équation $y = mx + p$, avec $m > 0$ et $p = m(1 - \ln m)$. On reconnaît dans cette droite la tangente à E au point d'abscisse $x_0 = \ln m$. Finalement

> La droite $y = mx + p$ est tangente à E si et seulement si $m > 0$ et $p = \varphi(m) = m(1 - \ln m)$.

5)b) La tangente à L au point d'abscisse x_0 a pour équation $y - \ln x_0 = \dfrac{1}{x_0}(x - x_0)$ ou $y = \dfrac{1}{x_0}x + \ln x_0 - 1$ ou $y = \dfrac{1}{x_0}x - \ln\dfrac{1}{x_0} - 1$. De manière analogue à la précédente, on prouve alors que

> La droite $y = mx + p$ est tangente à L si et seulement si $m > 0$ et $p = \psi(m) = -\ln m - 1$.

5)c) La droite d'équation $y = mx + p$ est tangente à la fois à E et à L si et seulement si on a $m > 0$ et $p = \varphi(m) = \psi(m)$. On a donc autant de tangentes communes aux deux courbes qu'il y a de solutions strictement positives à l'équation $\varphi(m) = \psi(m)$. Cette équation s'écrit $m(1 - \ln m) = -\ln m - 1$ ou encore $\ln m(1 - m) + 1 + m = 0$
Étudions donc sur $\mathbb{R}^+$ les zéros de f définie par $f(x) = \ln x(1 - x) + 1 + x$. La dérivée de f est $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x$. Elle est continue strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, avec $f'(1) > 0$ et $f'(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$. f' s'annule donc pour un certain $\alpha > 1$ et l'on a pour f le tableau de variations suivant :

x	0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+		+	0	−	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	2	↗		↘	$-\infty$

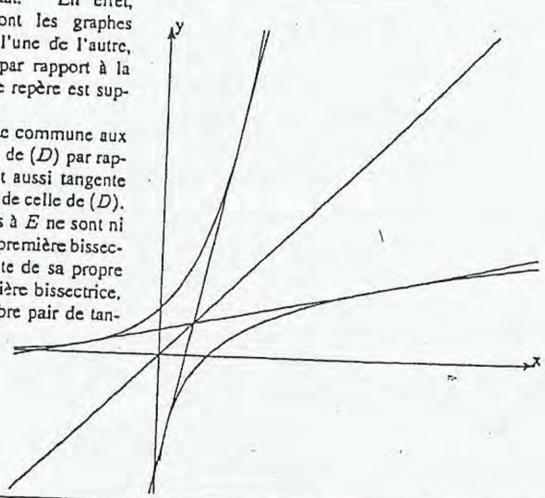
Ce tableau montre que la fonction continue f s'annule exactement deux fois sur $]0; +\infty[$ donc

> Il y a deux tangentes communes aux courbes E et L.

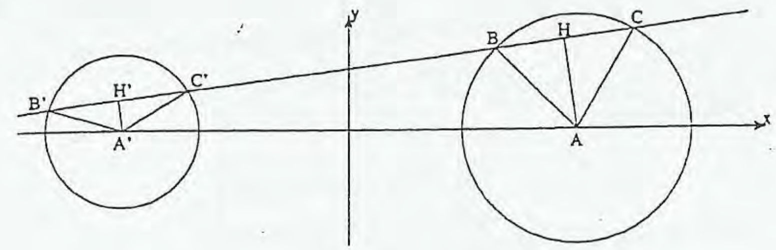
Les pentes de ces deux droites sont les deux zéros de la fonction f. L'une est < 1 et l'autre est > 1. Plus précisément, remarquons que $f(\frac{1}{x}) = -\ln x(1 - \frac{1}{x}) + 1 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(-\ln x(x-1) + x + 1) = \frac{1}{x}f(x)$ donc si x est un zéro de f, $\dfrac{1}{x}$ en est un aussi. Donc

> Les pentes des deux tangentes communes sont inverses l'une de l'autre.

On pouvait prévoir ce résultat. En effet, les courbes E et L, qui sont les graphes de deux fonctions réciproques l'une de l'autre, sont symétriques orthogonales par rapport à la première bissectrice des axes (le repère est supposé orthonormé).
Si la droite (D) est une tangente commune aux deux courbes, la symétrique (D') de (D) par rapport à la première bissectrice est aussi tangente commune et sa pente est l'inverse de celle de (D).
Il est clair aussi que les tangentes à E ne sont ni parallèles ni perpendiculaires à la première bissectrice. Chacune est donc différente de sa propre symétrique par rapport à la première bissectrice.
On pouvait donc prévoir un nombre pair de tangentes communes à E et L.
Tracé ci-contre :



6)a)



Soit D une droite coupant les deux cercles suivant les segments BC et $B'C'$ de milieux H et H'. Elle admet une équation de la forme $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ (équation normale). Le carré de sa distance à $A(a, 0)$ est $(a\cos\theta - p)^2$. Il apparaît en AH^2. Le théorème de Pythagore dans le triangle AHC donne $HC^2 = R^2 - AH^2 = R^2 - (a\cos\theta - p)^2$. En échangeant a et $-a$, R et r, on a de même $H'C'^2 = r^2 - (a\cos\theta + p)^2$.
Cette droite convient si et seulement si $HC^2 = H'C'^2$, soit, après réductions, $4ap\cos\theta = r^2 - R^2$, équivalent, puisque $r \neq R$ interdit la solution $\cos\theta = 0$, à $p = \dfrac{r^2 - R^2}{4a\cos\theta}$. La droite est donc de la forme :

$$D_\theta : x\cos\theta + y\sin\theta + \frac{R^2 - r^2}{4a\cos\theta} = 0.$$

On cherche une courbe à laquelle, quand θ varie, ces droites seraient toutes tangentes. C'est un problème d'enveloppe, notion hors-programme. Contournons l'obstacle : on nous prévient qu'on doit trouver une parabole, et nous devinons qu'elle doit être d'axe Ox ; cherchons donc α et β pour que toutes les D_θ soient tangentes à la parabole d'équation $x = \alpha y^2 + \beta$. Les ordonnées y des points d'intersections de D_θ avec cette parabole sont les racines de l'équation $\alpha y^2\cos\theta + y\sin\theta + \beta\cos\theta + \dfrac{R^2 - r^2}{4a\cos\theta} = 0$, dont le discriminant est $\sin^2\theta - 4\alpha\cos\theta\left(\beta\cos\theta + \dfrac{R^2 - r^2}{4a\cos\theta}\right) = \sin^2\theta - 4\alpha\beta\cos^2\theta - \dfrac{\alpha(R^2 - r^2)}{a}$ qu'on peut écrire $1 - \dfrac{\alpha(R^2 - r^2)}{a} - \cos^2\theta(1 + 4\alpha\beta)$.
La droite n'étant pas parallèle à l'axe (puisque $\cos\theta \neq 0$), elle est tangente à la parabole si et seulement si elle la coupe en un seul point, donc si le discriminant est nul. Il suffit pour cela que $1 - \dfrac{\alpha(R^2 - r^2)}{a} = 0$ et $1 + 4\alpha\beta = 0$, ce qui conduit à $\alpha = \dfrac{a}{R^2 - r^2}$ et $\beta = -\dfrac{R^2 - r^2}{4a}$. Donc

> Ces droites sont toutes tangentes à la parabole d'équation $x = \dfrac{a}{R^2 - r^2}y^2 - \dfrac{R^2 - r^2}{4a}$.

6)b) Revenons sur l'équation normale de la droite : nous avons vu que toute droite coupant convenablement les deux cercles est une droite D_θ. De plus, on peut toujours convenir que $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et même, puisque l'on exclut $\cos\theta = 0$, θ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
Le point de contact de D_θ avec la parabole a pour ordonnée la racine (double) de l'équation du second degré en y, soit $y_0 = -\dfrac{\sin\theta}{2\alpha\cos\theta} = \dfrac{r^2 - R^2}{2a}\tan\theta$.
Quand θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ce point de contact décrit la parabole en entier. Toute tangente à la parabole est donc une droite D_θ, mais il n'est pas sûr que toute droite D_θ soit une droite coupant convenablement les deux cercles. Il faut donc limiter θ pour qu'il en soit ainsi de D_θ.
Pour simplifier, supposons que $R > r$, ce qui, à la symétrie Oy près, ne change pas le problème.
La droite D_θ coupe le cercle de centre A si et seulement sa distance $\left|a\cos\theta + \dfrac{R^2 - r^2}{4a\cos\theta}\right|$ au centre est inférieure ou égale à R.

Comme $a\cos\theta + \dfrac{R^2-r^2}{4a\cos\theta}$ est positif, cela équivaut à $a\cos\theta + \dfrac{R^2-r^2}{4a\cos\theta} \leqslant R$, équivalent à $4a^2\cos^2\theta - 4aR\cos\theta + R^2 - r^2 \leqslant 0$, puis à $(2a\cos\theta - R)^2 \leqslant r^2$, puis à $R - r \leqslant 2a\cos\theta \leqslant R + r$ et enfin à

$$\frac{R-r}{2a} \leqslant \cos\theta \leqslant \frac{R+r}{2a}.$$

En écrivant que la droite D_θ coupe le cercle de centre A', on arrive à la même condition.

Cette condition va limiter les valeurs de θ, donc les tangentes à la parabole qui conviennent effectivement.
Il y a plusieurs cas, dans lesquels nous ne nous engagerons pas, suivant la position par rapport à 1 des nombres $\dfrac{R-r}{2a}$ et $\dfrac{R+r}{2a}$.

Une chose est sûre : les θ tels que $\cos\theta \in \left]0; \dfrac{R-r}{2a}\right[$ ne conviennent pas, donc nous pouvons répondre à la question posée :

$\boxed{\text{Les tangentes à la parabole ne répondent pas toutes à la question.}}$

Il y a même un cas où aucune droite D_θ ne convient : celui où $\dfrac{R-r}{2a} > 1$; c'est exactement le cas où le petit cercle est à l'intérieur du grand, un cas bien évident...

Pour voir mieux ce qui se passe, plaçons-nous dans un cas particulier : $a = 8$, $R = 5$, $r = 3$.

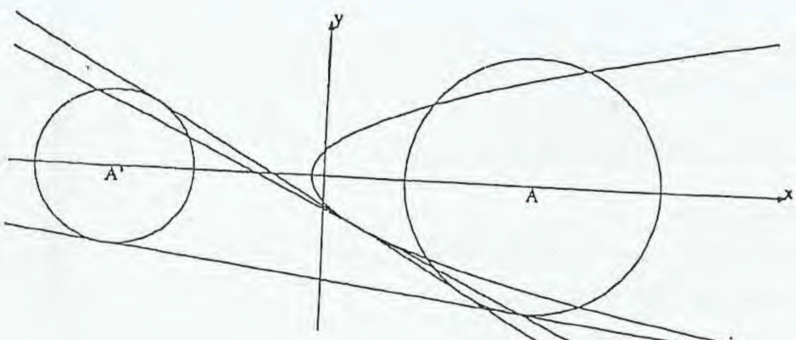
D_θ a pour équation : $x\cos\theta + y\sin\theta + \dfrac{1}{2\cos\theta} = 0$. La parabole a pour équation : $x = \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{1}{2}$.

Les θ des droites D_θ convenables sont ceux tels que $\dfrac{1}{8} \leqslant \cos\theta \leqslant \dfrac{1}{2}$. Limitons-nous à $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: les autres droites D_θ convenables seront obtenues par symétrie Ox.

En posant $\theta_0 = \dfrac{\pi}{3}$ et en notant θ_1 le réel de $[0, \dfrac{\pi}{2}[$ dont le cosinus est $\dfrac{1}{8}$, on doit donc avoir $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$.

L'ordonnée y_0 du point de contact de D_θ est, dans notre cas particulier, égale à $-\tan\theta$; elle va prendre toute valeur entre $-\tan\theta_0$ et $-\tan\theta_1$.

En représentant sur un même dessin la parabole, les deux cercles, les droites D_{θ_0}, D_{θ_1}, ainsi qu'une droite D_θ avec θ quelconque entre θ_0 et θ_1, on voit bien graphiquement que seules les tangentes à la parabole qui balaient une certaine zone coupent les deux cercles suivant des cordes de même longueur. On devine, et on pourrait le montrer par le calcul (fastidieux..), que les droites extrêmes D_{θ_0} et D_{θ_1} sont des tangentes communes aux deux cercles.



***

C.A.P.E.S. INTERNE de MATHÉMATIQUES 1990 Première Composition

Durée : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche -éventuellement programmable et alphanumérique- à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n86-228 du 28 juillet 1986.

Matériel à fournir : feuilles de papier quadrillé 5X5 ; feuilles de papier millimétré.

L'objectif du problème est la détermination d'approximations rationnelles de nombres réels, en particulier de e, au moyen de développements en fractions continues.

Les trois premières parties sont largement indépendantes. La partie I propose la construction d'une suite de nombres rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$, la partie II celle d'une suite de fonctions rationnelles convergeant vers la fonction tangente hyperbolique. La partie III introduit la notion de développement en fraction continue et la partie IV propose la recherche de tels développements en utilisant les résultats des parties précédentes.

Dans ce problème, on note (a_n), (u_n), (u_{2n}), etc., des suites de nombres réels indexées par n, où n décrit l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

On peut utiliser, sans en faire la démonstration, le résultat suivant ; on détermine une suite (x_n). de nombres réels et une seule par la donnée de ses deux premiers termes x_0 et x_1 et de la relation de récurrence : $\forall n \geqslant 2, x_n = \alpha_n x_{n-1} + x_{n-2}$ où $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est une suite donnée de nombres réels.

I. APPROXIMATION DE $\sqrt{2}$ PAR UNE SUITE DE NOMBRES RATIONNELS

A. Construction d'une suite de nombres réels convergeant vers $\sqrt{2}-1$

1. Vérifier que $\sqrt{2}-1$ est solution de l'équation $x = \dfrac{1}{2+x}$.

2. Représenter graphiquement (repère orthonormal, unité 10 cm) la fonction f définie sur le segment $[0, 1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$.

3. Vérifier qu'on définit une suite (u_n) de réels appartenant au segment $[0, 1]$ par $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}.$$

En utilisant le graphique précédent, marquer, sur l'axe des abscisses, les points d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2, u_3.

4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - (\sqrt{2}-1)\right| = \dfrac{1}{(1+\sqrt{2})(2+u_n)}\left|u_n - (\sqrt{2}-1)\right|$.

En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - (\sqrt{2}-1)\right| \leqslant \dfrac{1}{4}\left|u_n - (\sqrt{2}-1)\right|$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+1} - (\sqrt{2}-1)\right| \leqslant \frac{1}{4^n}. \qquad \text{Conclure.}$$

B. Propriétés de la suite (u_n)

1. Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est un nombre rationnel.
2. Calculer u_n pour les valeurs $1, 2, 3, 4, 5$ de n.
3. Montrer que la suite (u_{2n}) est croissante et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante.
On pourra s'appuyer, pour démontrer ces propriétés, sur le sens de variation de f.
4. Déduire des résultats précédents un encadrement d'amplitude inférieure à 10^{-3} de $\sqrt{2}-1$ par des nombres rationnels, puis une valeur décimale approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.
5. On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ où p_n et q_n sont des entiers naturels premiers entre eux et, pour $n = 0$, $p_0 = 0$, $q_0 = 1$.
a. Déterminer p_1, q_1, p_2, q_2.
b. Montrer que, si a et b sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même de b et $a + 2b$.
c. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = q_n$, $q_{n+1} = 2q_n + p_n$.

II. APPROXIMATION DE LA FONCTION TANGENTE HYPERBOLIQUE PAR UNE SUITE DE FONCTIONS RATIONNELLES

On rappelle que, pour tout réel x, $\text{sh } x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\text{ch } x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\text{th } x = \dfrac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$.
Dans cette partie, on désigne par la même notation un polynôme et la fonction polynôme associée.

A. Étude d'une suite de fonctions

1. Vérifier qu'on définit une suite de fonctions (f_n), continues sur $\mathbb{R}$, par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = \text{sh } x$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) = \int_0^x -2t f_n(t)dt$.

2. Expliciter les fonctions f_1 et f_2.

3. Montrer que la suite (f_n) vérifie la relation :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = 2(2n-1)f_{n-1}(x) + 4x^2 f_{n-2}(x).$$

On pourra, par exemple, caractériser f_n par l'expression de sa dérivée f_n' et la valeur $f_n(0)$.

4. a. Montrer que, si P et Q sont deux polynômes tels que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x)\,\text{sh } x - P(x)\,\text{ch } x = 0$, alors les polynômes P et Q sont nuls. On pourra étudier le comportement de $Q(x)\,\text{sh } x - P(x)\,\text{ch } x$ quand x tend vers $+\infty$.

b. Montrer l'existence et l'unicité de deux suites de polynômes (P_n) et (Q_n) tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = Q_n(x)\,\text{sh } x - P_n(x)\,\text{ch } x.$$

c. Déterminer P_0, Q_0, P_1, Q_1 et montrer que :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad \begin{aligned} P_n(x) &= 2(2n-1)P_{n-1}(x) + 4x^2 P_{n-2}(x) \\ Q_n(x) &= 2(2n-1)Q_{n-1}(x) + 4x^2 Q_{n-2}(x) \end{aligned}$$

d. Montrer que les coefficients des polynômes P_n et Q_n sont des entiers naturels, que les polynômes P_n sont impairs et les polynômes Q_n pairs.

e. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_n(x) \geqslant Q_n(0)$ et que $Q_n(O) = \dfrac{(2n)!}{n!}$.

B. Suite de fonctions rationnelles convergeant vers la fonction tangente hyperbolique

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{2n}}{n!}\,\text{sh } x$.

2. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$
$\left|\dfrac{\text{sh } x}{\text{ch } x} - \dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right| \leqslant \dfrac{x^{2n}}{n!} \times \dfrac{\text{sh } x}{\text{ch } x} \times \dfrac{1}{Q_n(x)}$ puis que $\left|\text{th } x - \dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right| \leqslant \dfrac{x^{2n}}{(2n!)}$.

3. Montrer que, pour tout réel x, la suite $\left(\dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right)$ converge vers $\text{th } x$ et que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Cette question sur la convergence uniforme de la suite de fonctions peut être laissée de côté par les 3/2.

III. DÉVELOPPEMENTS EN FRACTIONS CONTINUES

Dans la suite du problème, pour tout réel x, on note $E(x)$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.
Soit α un réel positif, il s'écrit $\alpha = E(\alpha) + \omega$ où ω appartient à l'intervalle $[0, 1[$. On pose $a_0 = E(\alpha)$.
Si ω est non nul, on peut écrire $\dfrac{1}{\omega} = E\left(\dfrac{1}{\omega}\right) + \omega_1$, et on a :

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \omega_1} \quad \text{en posant } a_1 = E\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

Si $\omega_1 = 0$, $\alpha = a_0 + \dfrac{1}{a_1}$ est rationnel.

Si ω_1 est non nul, on peut poursuivre le processus et poser $\dfrac{1}{\omega_1} = E\left(\dfrac{1}{\omega_1}\right) + \omega_2$. On a donc :

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \omega_2}} \quad \text{en posant } a_2 = E\left(\frac{1}{\omega_1}\right).$$

On constate que $\omega_1 = \dfrac{1}{\omega} - E\left(\dfrac{1}{\omega}\right)$, $\omega_2 = \dfrac{1}{\omega_1} - E\left(\dfrac{1}{\omega_1}\right)$, ce qui suggère l'introduction de l'application T définie sur l'intervalle $[0, 1[$ par $T(0) = 0$ et, $\forall x \in [0, 1[$, $T(x) = \dfrac{1}{x} - E\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exemple : Calculer $T(\sqrt{2} - 1)$. Pour $\alpha = \sqrt{2}$, déterminer a_0, a_1, a_2 et ω_2.

A. Suite d'entiers associée à un nombre irrationnel positif

1. Montrer que, $\forall x \in [0, 1[$, $T(x) \in [0, 1[$ et que $\forall x \in]0, 1[$, $E\left(\dfrac{1}{x}\right) \geqslant 1$.

On définit $T^0 = id$ où id désigne l'application identique de l'intervalle $[0, 1[$ dans lui-même puis, par récurrence, pour tout entier naturel n, $T^{n+1} = T \circ T^n$.

2. Soit ω un réel strictement compris entre 0 et 1.
On se propose de démontrer que ω est rationnel si et seulement si $T^n(\omega)$ est nul à partir d'un certain rang.
a. Montrer que $T(\omega)$ est rationnel si et seulement si ω est rationnel.
En déduire que, si ω est irrationnel, pour tout entier naturel n, $T^n(\omega)$ est différent de 0.
b. Soient p et q deux entiers tels que $0 < p < q$. Montrer que $T\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{r}{p}$ où r est le reste de la division euclidienne de q par p.
En déduire que, si ω est rationnel, il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que $T^{n_0-1}(\omega)$ soit non nul et que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, $T^n(\omega) = 0$.

3. α étant un nombre irrationnel positif, on considère $\omega = \alpha - E(\alpha)$.
Vérifier qu'on définit une suite d'entiers naturels (a_n), strictement positifs sauf peut-être a_0 en posant :

$$a_0 = E(\alpha) \text{ et, } \forall n \geqslant 1,\ a_n = E\left(\frac{1}{T^{n-1}(\omega)}\right).$$

B. Développement en fraction continue

En se plaçant dans l'hypothèse et avec les notations du A.3, on considère la suite de fonctions (φ_n), définies sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_0(x) = a_0 + x$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_{n+1}(x) = \varphi_n\left(\frac{1}{a_{n+1} + x}\right).$$

Enfin on pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n = \varphi_n(0)$, associant ainsi au réel α une nouvelle suite numérique, la suite (r_n).
On a donc $r_0 = a_0$, $r_1 = a_0 + \dfrac{1}{a_1}$, $r_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}$, etc... Remarquant que r_n ne dépend que de la suite finie $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, on note $r_1 = [a_0, a_1]$, $r_2 = [a_0, a_1, a_2]$, $r_n = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$.
L'objectif cette partie est de démontrer la convergence de la suite (r_n) vers α.

1. Convergence des suites (r_{2n}) et (r_{2n+1})
a. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha = \varphi_n(T^n(\omega))$.
b. Montrer que les fonctions φ_n sont strictement monotones, décroissantes si n est impair, croissantes si n est pair.
c. Déduire des questions précédentes que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_{2n} < \alpha < r_{2n+1}$.
d. Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_{n+2} - r_n = \varphi_n\left(\cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2}}}\right) - \varphi_n(0)$
En déduire que la suite (r_{2n}) est croissante et la suite (r_{2n+1}) décroissante.
e. Montrer que chacune des suites (r_{2n}) et (r_{2n+1}) est convergente.

2. Expression de (r_n) sous forme de fraction irréductible
a. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_n(x) = \dfrac{p_n + x p_{n-1}}{q_n + x q_{n-1}}$ où (p_n) et (q_n) sont deux suites

$p_0 = a_0,\ p_1 = 1 + a_0a_1,\ q_0 = 1,\ q_1 = a_1$, et

$$\forall n \geqslant 2,\ p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2},\ q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2}.$$

En déduire que $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

b. Propriétés des suites (p_n) et (q_n)

Montrer que :
- i. les suites (p_n) et (q_n) sont croissantes.
- ii. $\forall n \in \mathbb{N},\ q_{n+2} \geqslant 2q_n$.
- iii. $\forall n \in \mathbb{N},\ p_nq_{n+1} - p_{n+1}q_n = (-1)^{n+1}$.
- iiii. $\forall n \geqslant 1$, p_n et q_n sont premiers entre eux.

3. Convergence de la suite (r_n)

a. En remarquant que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \dfrac{1}{q_nq_{n+1}}$,

montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \dfrac{1}{2^n}$.

b. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{p_n}{q_n} - \alpha\right| < \dfrac{1}{q_nq_{n+1}}$, et $\left|\dfrac{p_n}{q_n} - \alpha\right| < \dfrac{1}{2^n}$.

En déduire que la suite (r_n) converge vers α.

• On dit qu'on a effectué le dévelopement en fraction continue de α et on écrit ;

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots].$$

r_n est nommé développement en fraction continue d'ordre n de α.

c. En remarquant que $\left|\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \dfrac{p_n}{q_n}\right|$, montrer que $\left|\dfrac{p_n}{q_n} - \alpha\right| < \left|\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \alpha\right|$.

d. i. Soient a, b, c, d, p, q six nombres entiers naturels tels que $bc - ad = 1$ et $\dfrac{a}{b} < \dfrac{p}{q} < \dfrac{c}{d}$.

Montrer que $p > a, p > c, q > b, q > d$.

ii. En déduire que, si le nombre rationnel positif $\dfrac{p}{q}$ est une meilleure approximation de α que $\dfrac{p_n}{q_n}$, alors $p > p_n$ et $q > q_n$.

4. Exemple : développement en fraction continue de $\sqrt{2}$: Les notations sont celles de la partie I.

a. Vérifier que les suites (p_n) et (q_n) introduites au I sont caractérisées par

$$p_0 = 0,\ p_1 = 1,\ q_0 = 1,\ q_1 = 2$$

$$\text{et } \forall n \geqslant 2,\ p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2},\ q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2}.$$

b. En utilisant le calcul de $T(\sqrt{2} - 1)$ donner le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$.

5. Cas d'un nombre rationnel   Dans cette question, et seulement dans cette question, on suppose que α est un nombre rationnel, strictement positif, non entier.

On pose à nouveau $a_0 = E(\alpha)$ et $\omega = \alpha - E(\alpha)$. On sait (1II.A.2.) qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que $T^{n_0-1}(\omega) \neq 0$ et $\forall n \geqslant n_0, T^n(\omega) = 0$.

On pose, pour $1 \leqslant n \leqslant n_0$, $a_n = E\left(\dfrac{1}{T^{n-1}(\omega)}\right)$.

a. Montrer que $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_{n_0}]$ (notation du III.B.).

On dit qu'on a un développement en fraction continue fini de α.

On pourra adapter à cette situation l'étude faite dans le cas où α est irrationnel.

α étant écrit sous forme fractionnaire $\dfrac{p}{q}$, vérifier que $a_0, a_1, \ldots, a_{n_0}$ sont obtenus à partir de l'algorithme d'Euclide pour la recherche du plus grand commun diviseur de p et q et qu'on a $a_{n_0} \geqslant 2$.

b. Dans chacun des deux cas $\alpha = \dfrac{193}{71}$ et $\alpha = \dfrac{2721}{1001}$, expliciter $a_0, a_1, \ldots, a_{n_0}$.

• Soit (a_n) une suite d'entiers naturels, strictement positifs sauf peut-être a_0.

On lui associe la suite (r_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ r_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ (voir III.B.).

On pourrait, en introduisant les suites (p_n) et (q_n) définies à partir de la suite (a_n) comme au III.B.2., ainsi que la suite de fonctions (φ_n), démontrer que la suite (r_n) est convergente et que sa limite α a pour développement en fraction continue $[a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$, mais nous admettrons tout ceci dans la fin de ce problème.

IV. DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE DE e

Les notations sont celles de la partie II.

On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = P_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $q_n = Q_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$, On sait (cf.II) que la suite $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)$ a pour limite $\operatorname{th}\dfrac{1}{2}$.

1. Développement en fraction continue de $\operatorname{th}\dfrac{1}{2}$

a. Vérifier que les suites (p_n) et (q_n) sont caractérisées par les conditions : $p_0 = 0, p_1 = 1, q_0 = 1, q_1 = 2$ et $\forall n \geqslant 2,\ p_n = 2(2n-1)p_{n-1} + p_{n-2},\ q_n = 2(2n-1)q_{n-1} + q_{n-2}$.

En déduire que le développement en fraction continue de $\operatorname{th}\dfrac{1}{2}$ est :

$$\operatorname{th}\frac{1}{2} = [0, 2, 6, 10, \ldots, 2(2n-1), \ldots].$$

2. Développement en fraction continue de e

a. Montrer que $e = \dfrac{1 + \operatorname{th}\frac{1}{2}}{1 - \operatorname{th}\frac{1}{2}}$.

b. Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n > p_n$.

c. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{q_n + p_n}{q_n - p_n}\right)$ a pour limite e et plus précisément que,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{q_{2n} + p_{2n}}{q_{2n} - p_{2n}} < e < \frac{q_{2n+1} + p_{2n+1}}{q_{2n+1} - p_{2n+1}}.$$

d. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = q_n + p_n$, $v_n = q_n - p_n$.

Montrer que, $\forall n \geqslant 2$,
$$u_n = 2(2n-1)u_{n-1} + u_{n-2}$$
$$v_n = 2(2n-1)v_{n-1} + v_{n-2}.$$

Calculer u_n et v_n pour $n = 0$ et $n = 1$.

Dire pourquoi $\dfrac{u_n}{v_n}$ ne peut être le développement en fraction continue d'ordre n de e.

e. Calculer u_n et v_n pour les valeurs 2, 3, 4 de n.

L'expression des développements en fractions continues de $\dfrac{193}{71}$ et de $\dfrac{2721}{1001}$ suggère d'introduire $\alpha = [2, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots]$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_{3n+1} = c_{3n+3} = 1,\ c_{3n+2} = 2n + 2.$$

On note $\dfrac{y_n}{z_n}$ la forme irréductible du développement en fraction continue d'ordre n de α.

i. Montrer que, $\forall n \geqslant 3$, $\begin{cases} y_{3n-2} = & 2(2n-1)y_{3n-5} + y_{3n-8} \\ z_{3n-2} = & 2(2n-1)z_{3n-5} + z_{3n-8} \end{cases}$

On pourra utiliser la relation de récurrence vérifiée par les suites (y_k) et (z_k) pour les valeurs de k :

$$3n-2,\ 3n-3,\ 3n-4,\ 3n-5,\ 3n-6.$$

ii. Montrer qu'on a, $\forall n \geqslant 1$, $u_n = y_{3n-2}$, $v_n = z_{3n-2}$.

f. Déduire des resultats précédents que :

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, \ldots, c_n, \ldots].$$

g. *Application numérique.*

Munir la calculatrice d'un programme permettant d'obtenir, à partir de la suite (c_n), les suites (y_n) et (z_n). Compte tenu de la capacité de la machine, indiquer le plus grand entier n_1 pour lequel les valeurs affichées de y_{n_1} et z_{n_1} sont exactes.

Préciser le sens de l'erreur commise et un majorant de cette erreur si on prend $\dfrac{y_{n_1}}{z_{n_1}}$ comme approximation de e.

Si l'on dispose de Maple, on pourra remplacer la question précédente par la suivante :

Ecrire une procédure Maple « fraccont(n) » qui renvoie $\dfrac{y_n}{z_n}$. Vérifier en demandant fraccont(7) et fraccont(10). Demander les évaluations approchées de ces deux fractions, ainsi que de fraccont(13) et de fraccont(14). En déduire e à 10^{-9} près.

***

C.A.P.E.S. INTERNE de MATHÉMATIQUES 1990 Première Composition

CORRIGÉ

I. APPROXIMATION DE $\sqrt{2}$ PAR UNE SUITE DE NOMBRES RATIONNELS

A. Construction d'une suite de nombres réels convergeant vers $\sqrt{2}-1$

1. $\dfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}-1$:

$$\boxed{\sqrt{2}-1 \text{ est solution de l'équation } x = \frac{1}{2+x}.}$$

2. La fonction f définie sur le segment $[0,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ est la restriction d'une fonction homographique, dont la représentation graphique est une hyperbole d'asymptotes $x=-2$ et $y=0$. La construction de l'arc $0 \leqslant x \leqslant 1$ est immédiate.

3. Quand x croît de 0 à 1, $f(x)$ decroît de $\dfrac{1}{2}$ à $\dfrac{1}{3}$; l'intervalle $[0,1]$ est donc stable par f et 0 est dans cet intervalle. Donc :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{On définit une suite } (u_n) \text{ de réels appartenant à } [0,1] \text{ par } u_0 = 0 \text{ et} \\ \text{par la relation de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2+u_n}.\end{array}}$$

L'utilisation de la première bissectrice et du graphe de f permet de marquer (technique bien connue) sur l'axe des abscisses, les points d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2, u_3.

4. $u_{n+1} - (\sqrt{2}-1) = \dfrac{1}{2+u_n} - \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)-u_n}{(2+u_n)(1+\sqrt{2})}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_{n+1} - (\sqrt{2}-1)\right| = \frac{1}{(1+\sqrt{2})(2+u_n)}\left|u_n - (\sqrt{2}-1)\right|.}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ donc $2+u_n \geqslant 2$; d'autre part $1+\sqrt{2} \geqslant 2$. Donc $\dfrac{1}{(2+u_n)(1+\sqrt{2})} \in [0, \frac{1}{4}]$. Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_{n+1} - (\sqrt{2}-1)\right| \leqslant \frac{1}{4}\left|u_n - (\sqrt{2}-1)\right|}$$

Ceci implique par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|u_n - (\sqrt{2}-1)\right| \leqslant \dfrac{1}{4^n}\left|u_0 - (\sqrt{2}-1)\right| = \dfrac{1}{4^n}(\sqrt{2}-1) \leqslant \dfrac{1}{4^n}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+1} - (\sqrt{2}-1)\right| \leqslant \frac{1}{4^n}.}$$

Comme la suite géométrique de terme général $\dfrac{1}{4^n}$ converge vers 0, on en déduit par majoration que

$$\boxed{\text{la suite de terme général } u_n \text{ converge vers } \sqrt{2}-1.}$$

B. Propriétés de la suite (u_n)

1. Si x est un rationnel différent de -2, $2+x$ est un rationnel non nul, donc $\dfrac{1}{2+x}$ est un rationnel. On en déduit par récurrence immédiate, en partant de u_0 rationnel, que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est un nombre rationnel.}}$$

2. On trouve ainsi

$$\boxed{u_1 = \frac{1}{2},\ u_2 = \frac{2}{5},\ u_3 = \frac{5}{12}\ u_4 = \frac{12}{29} \text{ et } u_5 = \frac{29}{70}.}$$

3. f est décroissante donc $f \circ f$ est croissante. Puisque $u_0 \leqslant u_2$, on a $u_2 = f \circ f(u_0) \leqslant f \circ f(u_2) = u_4$ et par récurrence $u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$. De même, par récurrence à partir de $u_1 \geqslant u_3$, on a $u_{2n+1} \geqslant u_{2n+3}$. Donc :

$$\boxed{\text{La suite } (u_{2n}) \text{ est croissante et que la suite } (u_{2n+1}) \text{ est décroissante.}}$$

4. u_{2n} converge donc vers $\sqrt{2}-1$ en croissant et u_{2n+1} converge vers $\sqrt{2}-1$ en décroissant. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leqslant \sqrt{2}-1 \leqslant u_{2n+1}$. Pour assurer $\left|\sqrt{2}-1-u_{2n}\right| \leqslant 10^{-3}$, il suffit donc d'avoir $u_{2n+1} - u_{2n} \leqslant 10^{-3}$, ce qui est vrai pour $2n = 4$, puisque $u_5 - u_4 = \dfrac{29}{70} - \dfrac{12}{29} = \dfrac{1}{2030} < 10^{-3}$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{12}{29} \leqslant \sqrt{2}-1 \leqslant \dfrac{29}{70} \text{ est un encadrement de } \sqrt{2}-1 \\ \text{d'amplitude inférieure à } 10^{-3} \text{ de } \sqrt{2}-1 \text{ par des rationnels.}\end{array}}$$

$\dfrac{u_4+u_5}{2} = \dfrac{29 \times 29 + 12 \times 70}{2 \times 70 \times 29} = \dfrac{1681}{4060} = 0,41403\ldots$ est donc une approximation de $\sqrt{2}-1$ à $\dfrac{1}{4060}$ près. On peut donc affirmer que

$$\boxed{\sqrt{2} = 1,414 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

5.a. Pour $n \geqslant 1$, u_n est un rationnel strictement positif ; il admet effectivement une écriture fractionnaire unique $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, où p_n et q_n sont des entiers naturels premiers entre eux. Cette écriture a été déjà donnée pour $u_1, \ldots, u_5$, donc :

$$\boxed{p_1 = 1, q_1 = 2, p_2 = 2 \text{ et } q_2 = 5.}$$

b. Supposons que a et b sont deux entiers naturels (nuls ou non) premiers entre eux et soit c un entier naturel divisant à la fois b et $a+2b$; c divise b donc divise $2b$; c divise $a+2b$ et $2b$ donc leur différence a ; entier naturel divisant a et b qui sont premiers entre eux, ce ne peut être que 1, donc

$$\boxed{\text{si } a \text{ et } b \text{ sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même de } b \text{ et } a+2b.}$$

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ avec p_n et q_n premiers entre eux, p_n pouvant être nul.

Alors $u_{n+1} = \dfrac{1}{2+\frac{p_n}{q_n}} = \dfrac{q_n}{p_n+2q_n}$. D'après ce que l'on vient de voir, q_n et p_n+2q_n sont également premiers entre eux. $\dfrac{q_n}{p_n+2q_n}$ est donc l'écriture fractionnaire irréductible de u_{n+1}. Puisque cette écriture est unique, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = q_n, \quad \text{et} \quad q_{n+1} = 2q_n + p_n.}$$

II. APPROXIMATION DE LA FONCTION TANGENTE HYPERBOLIQUE PAR UNE SUITE DE FONCTIONS RATIONNELLES

A. Étude d'une suite de fonctions

1. $f_0(x) = \operatorname{sh} x$ définit une et une seule fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Supposons qu'il existe une famille unique $f_0, \ldots, f_n$ de fonctions continues vérifiant les propriétés requises.
Alors f_n est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction g définie par $g(t) = -2tf_n(t)$ l'est aussi ; elle admet donc une intégrale sur tout segment. La relation : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x -2tf_n(t)dt$ définit donc une fonction f_{n+1} et une seule. De plus cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ (propriété d'une intégrale fonction de sa borne supérieure). On a donc prouvé par récurrence sur n que :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On définit une suite de fonctions } (f_n)\text{, continues sur } \mathbb{R}\text{, par :} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = \operatorname{sh} x \text{ et la relation de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x -2tf_n(t)dt.\end{array}}$$

2. $f_1(x) = \displaystyle\int_0^x -2t \operatorname{sh} t\, dt = 2[-t \operatorname{ch} t]_0^x + 2\int_0^x \operatorname{ch} t\, dt = 2 \operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x$.

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 4\int_0^x(-t\,\mathrm{sh}\,t+t^2\,\mathrm{ch}\,t)\,dt = 4\,\mathrm{sh}\,x-4x\,\mathrm{ch}\,x+4x^2\,\mathrm{sh}\,x+8\,\mathrm{sh}\,x-8x\,\mathrm{ch}\,x\\ &= 12\,\mathrm{sh}\,x-12x\,\mathrm{ch}\,x+4x^2\,\mathrm{sh}\,x. \end{aligned}$$

$$\boxed{f_1(x)=2\,\mathrm{sh}\,x-2x\,\mathrm{ch}\,x \quad\text{et}\quad f_2(x)=12\,\mathrm{sh}\,x-12x\,\mathrm{ch}\,x+4x^2\,\mathrm{sh}\,x.}$$

3. Pour $n=2$,
$2(2n-1)f_{n-1}(x)+4x^2f_{n-2}(x)=6f_1(x)+4x^2f_0(x)=12\,\mathrm{sh}\,x-12x\,\mathrm{ch}\,x+4x^2\,\mathrm{sh}\,x=f_2(x)$;
La relation demandée est donc vraie pour $n=2$. Supposons qu'elle soit vraie au rang $n-1\geqslant 2$. Alors

$$\begin{aligned}(f_n(x)-2(2n-1)f_{n-1}(x)-4x^2f_{n-2}(x))' &= f_n'(x)-2(2n-1)f_{n-1}'(x)-4x^2f_{n-2}'(x)-8xf_{n-2}(x)\\ &= -2xf_{n-1}(x)+4(2n-1)xf_{n-2}(x)+8x^3f_{n-3}(x)-8xf_{n-2}(x)\\ &= -2x\left(f_{n-1}(x)-2(2n-1-2)f_{n-2}(x)-4x^2f_{n-3}(x)\right)\end{aligned}$$

qui est nul par hypothèse de récurrence.
$f_n(x)-2(2n-1)f_{n-1}(x)-4x^2f_{n-2}(x)$ est donc constant sur $\mathbb{R}$, donc nul puisque nul pour $x=0$ ($f_n(0)=0$ pour tout n). Cela établit donc la relation au rang n et termine la récurrence.

$$\boxed{\text{La suite } (f_n) \text{ vérifie la relation : } \forall n\geqslant 2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f_n(x)=2(2n-1)f_{n-1}(x)+4x^2f_{n-2}(x).}$$

4. a. Soient P et Q deux polynômes tels que : $\forall x\in\mathbb{R},\ Q(x)\,\mathrm{sh}\,x-P(x)\,\mathrm{ch}\,x=0$, donc

$$\forall x\in\mathbb{R},\ (Q(x)-P(x))e^x-(Q(x)+P(x))e^{-x}=0$$

On sait que pour tout polynôme non nul R, quand $x\to+\infty$, $R(x)e^x$ est un infiniment grand et $R(x)e^{-x}$ est un infiniment petit. On a donc $Q-P=0$, sinon $(Q(x)-P(x))e^x-(Q(x)+P(x))e^{-x}$ serait un infiniment grand.
De même $Q+P=0$ sinon $(Q(x)-P(x))e^x-(Q(x)+P(x))e^{-x}$ serait un infiniment grand quand $x\to-\infty$. Donc $P=Q=0$.

$$\boxed{\text{Si les polynômes } P \text{ et } Q \text{ vérifient : } \forall x\in\mathbb{R},\ Q(x)\,\mathrm{sh}\,x-P(x)\,\mathrm{ch}\,x=0, \text{ alors } P \text{ et } Q \text{ sont nuls.}}$$

b. Les expressions trouvées pour f_0 ($f_0(x)=1\,\mathrm{sh}\,x-0\,\mathrm{ch}\,x$) et f_1 ($f_1(x)=2\,\mathrm{sh}\,x-2x\,\mathrm{ch}\,x$) montrent l'existence des polynômes P_n et Q_n demandés aux rangs 0 et 1 :
Si l'on suppose acquise l'existence de ces polynômes jusqu'au rang $n-1\geqslant 1$, remplaçons $f_{n-2}(x)$ par $Q_{n-2}(x)\,\mathrm{sh}\,x-P_{n-2}(x)\,\mathrm{ch}\,x$ et $f_{n-1}(x)$ par $Q_{n-1}(x)\,\mathrm{sh}\,x-P_{n-1}(x)\,\mathrm{ch}\,x$ dans l'expression trouvée au 3. Nous obtenons

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 2(2n-1)\left(Q_{n-1}(x)\,\mathrm{sh}\,x-P_{n-1}(x)\,\mathrm{ch}\,x\right)+4x^2\left(Q_{n-2}(x)\,\mathrm{sh}\,x-P_{n-2}(x)\,\mathrm{ch}\,x\right)\\ &= \left(2(2n-1)Q_{n-1}(x)+4x^2Q_{n-2}(x)\right)\mathrm{sh}\,x-\left(2(2n-1)P_{n-1}(x)+4x^2P_{n-2}(x)\right)\mathrm{ch}\,x,\end{aligned}$$

qui est bien de la forme $Q_n(x)\,\mathrm{sh}\,x-P_n(x)\,\mathrm{ch}\,x$.
On a donc prouvé l'existence de la double suite (P_n,Q_n). Supposons que la double suite (S_n,T_n) convient aussi.
On a donc $\forall x\in\mathbb{R},\ (Q_n(x)-T_n(x))\,\mathrm{sh}\,x-(P_n(x)-S_n(x))\,\mathrm{ch}\,x=0$, ce qui ne peut se faire, d'après a., que si $Q_n=T_n$ et $P_n=S_n$, ce qui prouve l'unicité de la double suite (P_n,Q_n).
On a ainsi prouvé

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{l'existence et l'unicité des suites de polynômes } P_n \text{ et } Q_n\\ \text{tels que : } \forall x\in\mathbb{R},\ f_n(x)=Q_n(x)\,\mathrm{sh}\,x-P_n(x)\,\mathrm{ch}\,x.\end{array}}$$

c. De plus, on a vu au passage que

$$\boxed{\begin{array}{c}Q_0(x)=1,\ P_0(x)=0,\ Q_1(x)=2,\ P_1(x)=2x \quad\text{et}\\ \forall n\geqslant 2,\ P_n(x)=2(2n-1)P_{n-1}(x)+4x^2P_{n-2}(x) \text{ et } Q_n(x)=2(2n-1)Q_{n-1}(x)+4x^2Q_{n-2}(x).\end{array}}$$

d. Aux rangs 0 et 1, les coefficients des polynômes P_n et Q_n sont entiers naturels, le polynôme P_n est impair et le polynôme Q_n est pair.

Supposons qu'il en soit ainsi jusqu'au rang $n-1$. Alors, $2(2n-1)P_{n-1}(x)$ et $4x^2P_{n-2}(x)$ sont impairs à coefficients dans $\mathbb{N}$, donc, par addition, P_n a les mêmes propriétés.
On prouve de même que Q_n est pair à coefficients dans $\mathbb{N}$. On a donc prouvé par récurrence que :

$$\boxed{\text{Les coefficients de } P_n \text{ et } Q_n \text{ sont dans } \mathbb{N}. \text{ les polynômes } P_n \text{ sont impairs et les polynômes } Q_n \text{ pairs.}}$$

e. Somme de monômes pairs affectés de coefficients positifs, $Q_n(x)$ est évidemment positif pour tout x, et minimal pour $x=0$. Montrons que $Q_n(O)=\dfrac{(2n)!}{n!}$.
Encore une fois, la propriété à prouver est vraie aux rangs 0 et 1. On la suppose vérifiée jusqu'au rang $n-1$.
Alors, $Q_n(0)=2(2n-1)Q_{n-1}(0)=2(2n-1)\dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!}=\dfrac{2n(2n-1)(2n-2)!}{n(n-1)!}=\dfrac{(2n)!}{n!}$,
ce qui termine la récurrence.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ Q_n(x)\geqslant Q_n(0) \quad\text{et}\quad Q_n(O)=\frac{(2n)!}{n!}.}$$

B. Suite de fonctions rationnelles convergeant vers la fonction tangente hyperbolique

1. Pour $x\geqslant 0$, $|f_0(x)|=\mathrm{sh}\,x=\dfrac{x^0}{0!}\mathrm{sh}\,x$. Supposons que, pour $n\geqslant 0$ fixé, on ait :
$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ |f_n(x)|\leqslant\dfrac{x^{2n}}{n!}\mathrm{sh}\,x$. Alors :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ |f_{n+1}(x)|=\left|\int_0^x -2tf_n(t)\,dt\right|\leqslant\int_0^x 2t|f_n(t)|\,dt\leqslant\int_0^x 2t\frac{t^{2n}}{n!}\mathrm{sh}\,t\,dt\leqslant 2\int_0^x\frac{t^{2n+1}}{n!}\mathrm{sh}\,x\,dt,$$

car $0\leqslant\mathrm{sh}\,t\leqslant\mathrm{sh}\,x$ pour t entre 0 et x.
Donc $|f_{n+1}(x)|\leqslant\mathrm{sh}\,x.2\displaystyle\int_0^x\frac{t^{2n+1}}{n!}\,dt=\mathrm{sh}\,x\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. On a donc montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}_+,\ |f_n(x)|\leqslant\frac{x^{2n}}{n!}\mathrm{sh}\,x.}$$

2. Pour tout x, $Q_n(x)$ est >0 donc $\left|\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}-\dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right|$ existe et est égal à $\dfrac{|\mathrm{sh}\,xQ_n(x)-\mathrm{ch}\,xP_n(x)|}{\mathrm{ch}\,xQ_n(x)}$
encore égal à $\dfrac{|f_n(x)|}{\mathrm{ch}\,xQ_n(x)}$. La majoration précédente montre alors immédiatement que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}_+\ \left|\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}-\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right|\leqslant\frac{x^{2n}}{n!}\times\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}\times\frac{1}{Q_n(x)}}$$

puis, en majorant $\mathrm{th}\,x$ par 1 et en majorant $\dfrac{1}{n!Q_n(x)}$ par $\dfrac{1}{n!Q_n(0)}=\dfrac{1}{(2n)!}$ que

$$\boxed{\left|\mathrm{th}\,x-\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right|\leqslant\frac{x^{2n}}{(2n)!}.}$$

3. La fonction $x\to\left|\mathrm{th}\,x-\dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right|$ étant paire, la majoration précédente est valable aussi pour $x<0$.
Pour x fixé quelconque, la suite de terme général $\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge vers 0 (terme général d'une série exponentielle). La majoration précédente montre donc que :

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x, \text{ la suite } \left(\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right) \text{ converge vers } \mathrm{th}\,x.}$$

Si x reste sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, on a une majoration indépendante de x : $\left|\mathrm{th}\,x-\dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right|\leqslant\dfrac{c^{2n}}{(2n)!}$,
où c désigne le Max de $|a|$ et $|b|$, et on a encore $\dfrac{c^{2n}}{(2n)!}$ qui converge vers 0. On en déduit que :

$$\boxed{\text{La convergence est uniforme sur ce segment (quelconque) de } \mathbb{R}.}$$

Exemple : $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 = 2+(\sqrt{2}-1)$ et $\sqrt{2}-1 \in [0,1[$ donc

$$\boxed{T(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}-1.}$$

La partie entière de $\alpha = \sqrt{2}$ est $a_0 = 1$ et le reste $\omega = \sqrt{2}-1$.
Ensuite $\omega_1 = T(\omega) = \sqrt{2}-1$, $a_1 = E(\frac{1}{\omega}) = E(1+\sqrt{2}) = 2$, $\omega_2 = T(\omega_1) = \sqrt{2}-1$ et $a_2 = E(\frac{1}{\omega_1}) = 2$.
$\sqrt{2}-1$ étant un point fixe de T, il est clair que la suite (ω_n) est constante et que la suite (a_n) qu'on a commencé de définir et qui sera précisée dans A.3 est, à partir du rang 1, constante égale à 2. En particulier :

$$\boxed{a_0 = 1,\ a_1 = 2\ ,\ a_2 = 2 \text{ et } \omega_2 = \sqrt{2}-1.}$$

A. Suite d'entiers associée à un nombre irrationnel positif

1. Pour tout a, on a $E(a) \leqslant a < E(a)+1$ donc $a - E(a) \in [0,1[$. Appliqué à $a = \frac{1}{x}$, cela donne $T(x) \in [0,1[$ pour $x \in]0,1[$.
Avec la convention $T(0) = 0$, on a donc $T(x) \in [0,1[$ pour tout $x \in [0,1[$.
Pour tout $x \in]0,1[$, on a aussi $1 < \frac{1}{x}$ donc $1 \leqslant E\left(\frac{1}{x}\right)$. Résumons :

$$\boxed{\forall x \in [0,1[, T(x) \in [0,1[\text{ et } \forall x \in]0,1[, E\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant 1.}$$

2. Soit ω un réel strictement compris entre 0 et 1.
a. Puisque ω est non nul, $T(\omega) = \frac{1}{\omega} - E\left(\frac{1}{\omega}\right)$ et $E\left(\frac{1}{\omega}\right)$ est entier, donc rationnel. Donc $T(\omega)$ est rationnel si et seulement si $\frac{1}{\omega}$ est rationnel donc si et seulement si ω est rationnel (les rationnels forment un sous-corps de $\mathbb{R}$).

$$\boxed{T(\omega) \text{ est rationnel si et seulement si } \omega \text{ est rationnel.}}$$

En particulier, si ω est irrationnel, $T(\omega)$ est irrationnel, donc non nul. On peut donc appliquer le raisonnement précédent à $T(\omega)$: $T^2(\omega)$ est un irrationnel non nul. Par récurrence immédiate :

$$\boxed{\text{Si } \omega \text{ est irrationnel, pour tout entier naturel } n, T^n(\omega) \text{ est différent de 0.}}$$

b. Soient p et q deux entiers tels que $0 < p < q$. Divisons euclidiennement q par p : $q = dp + r$ avec $0 \leqslant r < p$.
Donc $\frac{q}{p} = d + \frac{r}{p}$: d est entier et $\frac{r}{p} \in [0,1[$: d est nécessairement la partie entière de $\frac{q}{p}$.
Comme $\frac{p}{q}$ est dans $]0,1[$, on a $T\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{q}{p} - E\left(\frac{q}{p}\right) = \frac{q}{p} - d$. Résumons :

$$\boxed{T\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{r}{p} \text{ où } r \text{ est le reste de la division euclidienne de } q \text{ par } p.}$$

Supposons ω rationnel. Comme $\omega \in]0,1[$, on peut l'écrire $\omega = \frac{p_0}{q_0}$ avec p_0 et q_0 deux entiers tels que $0 < p_0 < q_0$ et appliquer ce qui précède ; $T(\omega)$ est un certain $\frac{p_1}{q_1}$, avec p_1, q_1 entiers tels que $0 \leqslant p_1 < p_0$.
Si p_1 n'est pas nul, on peut réitérer et $T^2(\omega) = \frac{p_2}{q_2}$, avec p_2, q_2 entiers tels que $0 \leqslant p_2 < p_1 < p_0$.
On ne peut poursuivre indéfiniment car il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'entiers positifs. Il existe donc un rang m pour lequel $T^m(\omega)$ est nul. Ensuite $T^{m+1}(\omega), T^{m+2}(\omega), \ldots$ sont tous nuls.
En introduisant le dernier n (qui est $\geqslant 1$) pour lequel $T^n(\omega)$ est non nul, on voit que :

$$\boxed{\text{Si } \omega \in \mathbb{Q}\text{, il existe un entier } n_0 \geqslant 1 \text{ tel que } T^{n_0-1}(\omega) \neq 0 \text{ et que, pour tout } n \geqslant n_0, T^n(\omega) = 0.}$$

Finalement, on a bien : ω est rationnel si et seulement si $T^n(\omega)$ est nul à partir d'un certain rang.
3. Soit α un nombre irrationnel positif, et $\omega = \alpha - E(\alpha)$. Puisque α est irrationnel, ω l'est aussi, et il est dans $]0,1[$. On peut donc lui appliquer le 2.a. $\forall n \geqslant 1$, $T^{n-1}(\omega)$ est un irrationnel $\in]0,1[$, donc son inverse existe et a une partie entière $\geqslant 1$:

$$\boxed{\text{On définit une suite } (a_n), a_n \in \mathbb{N}^* \text{ en posant : } a_0 = E(\alpha) \text{ et, } \forall n \geqslant 1,\ a_n = E\left(\frac{1}{T^{n-1}(\omega)}\right).}$$

B. Développement en fraction continue

1. Convergence des suites (r_{2n}) et (r_{2n+1})
Il n'est pas sûr que la relation de récurrence donnée définisse une suite de fonctions φ_n définies sur $\mathbb{R}$ entier, à cause du dénominateur qui peut être nul, mais il est sûr que ces fonctions sont définies pour tout $x > 0$ et même pour $x = 0$. Dans la suite, on n'applique fort heureusement ces φ_n qu'à des $x \geqslant 0$.
a. $\varphi_0(T^0(\omega)) = \varphi_0(\omega) = a_0 + \omega = \alpha$ par définition de a_0. Supposons que $\varphi_n(T^n(\omega))$ soit égal à α. Alors

$$\varphi_{n+1}(T^{n+1}(\omega)) = \varphi_n\left(\frac{1}{a_{n+1} + T^{n+1}(\omega)}\right) = \varphi_n\left(\frac{1}{E\left(\frac{1}{T^n(\omega)}\right) + T \circ T^n(\omega)}\right)$$

$$= \varphi_n\left(\frac{1}{E\left(\frac{1}{T^n(\omega)}\right) + \frac{1}{T^n(\omega)} - E\left(\frac{1}{T^n(\omega)}\right)}\right) = \varphi_n(T^n(\omega)) = \alpha,$$

ce qui termine la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha = \varphi_n(T^n(\omega))\ .}$$

b. La fonction φ_0 est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Supposons que φ_n soit strictement monotone sur $\mathbb{R}^+$. Alors, φ_{n+1} est strictement monotone sur $\mathbb{R}^+$ car c'est la composée de φ_n par la fonction $x \to \frac{1}{a_{n+1}+x}$ qui est strictement décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.
De plus, la monotonie de φ_{n+1} est l'opposée de celle de φ_n. On en déduit par récurrence :

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi_n \text{ est strictement monotone sur } \mathbb{R}^+\text{, décroissante si } n \text{ est impair, croissante si } n \text{ est pair.}}$$

c. Puisque $T^n(\omega) > 0$, on a $\alpha = \varphi_{2n}(T^{2n}(\omega)) > \varphi_{2n}(0) = r_{2n}$ et
$\alpha = \varphi_{2n+1}(T^{2n+1}(\omega)) < \varphi_{2n+1}(0) = r_{2n+1}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ r_{2n} < \alpha < r_{2n+1}.}$$

d. $r_{n+2} = \varphi_{n+2}(0) = \varphi_{n+1}\left(\frac{1}{a_{n+2}+0}\right) = \varphi_n\left(\frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}}}\right)$ et $r_n = \varphi_n(0)$. On a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ r_{n+2} - r_n = \varphi_n\left(\frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}}}\right) - \varphi_n(0)}$$

$a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}}$ est strictement positif. La stricte croissance de φ_{2n} et la stricte décroissance de φ_{2n+1} permettent alors de conclure que :

$$\boxed{\text{La suite } (r_{2n}) \text{ est (strictement) croissante et la suite } (r_{2n+1}) \text{(strictement) décroissante.}}$$

e. L'une est croissante majorée (par α) et l'autre décroissante minorée (par α) donc :

$$\boxed{\text{Chacune des suites } (r_{2n}) \text{ et } (r_{2n+1}) \text{ est convergente.}}$$

2. Expression de (r_n) sous forme de fraction irréductible

a. Les conditions

$p_0 = a_0$, $p_1 = 1 + a_0a_1$, $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$, et $\forall n \geqslant 2$, $p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2}$, $q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2}$ définissent clairement, par récurrence, un et un seul couple de suites (p_n, q_n) et il est également clair, par récurrence, que (p_n) et (q_n) sont deux suites d'entiers naturels.

Fixons $x \geqslant 0$. On a $\varphi_1(x) = \varphi_0\left(\frac{1}{a_1+x}\right) = a_0 + \frac{1}{a_1+x} = \dfrac{a_0a_1 + 1 + xa_0}{a_1 + x} = \dfrac{p_1 + xp_0}{q_1 + xq_0}$:

La relation $\varphi_n(x) = \dfrac{p_n + xp_{n-1}}{q_n + xq_{n-1}}$ est donc vraie pour $n = 1$.

Supposons la vraie au rang $n - 1 \geqslant 1$: $\varphi_{n-1}(x) = \dfrac{p_{n-1} + xp_{n-2}}{q_{n-1} + xq_{n-2}}$.

Alors $\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}\left(\dfrac{1}{a_n + x}\right) = \dfrac{p_{n-1} + \frac{1}{a_n+x}p_{n-2}}{q_{n-1} + \frac{1}{a_n+x}q_{n-2}} = \dfrac{p_{n-1}(a_n + x) + p_{n-2}}{q_{n-1}(a_n + x) + q_{n-2}} = \dfrac{p_n + xp_{n-1}}{q_n + xq_{n-1}}$,

ce qui termine notre récurrence à x fixé :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi_n(x) = \frac{p_n + xp_{n-1}}{q_n + xq_{n-1}}}$$

En faisant $x = 0$:

$$\boxed{r_n = \frac{p_n}{q_n}. \text{ (pour } n \geqslant 1 \text{ mais aussi pour } n = 0)}$$

b. Propriétés des suites (p_n) et (q_n)

Puisque $a_1 \geqslant 1$, on a $p_1 = 1 + a_0a_1 \geqslant a_0a_1 \geqslant a_0 = p_0$ et plus généralement $p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2} \geqslant a_np_{n-1} \geqslant p_{n-1}$. La suite (p_n) est donc croissante. De même pour (q_n).

Pour $n \geqslant 0$, on a donc $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n \geqslant a_{n+2}q_n + q_n$ et $a_{n+2} \geqslant 1$ donc $q_{n+2} \geqslant 2q_n$.

En reportant dans $p_nq_{n+1} - p_{n+1}q_n$, pour $n \geqslant 2$, les expressions récurrentes de p_n, q_{n+1}, p_{n+1} et q_n on trouve $-(p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1})$. Par récurrence, on a donc

$p_nq_{n+1} - p_{n+1}q_n = (-1)^n(p_0q_1 - p_1q_0) = (-1)^{n+1}$ pour $n \geqslant 1$ et aussi pour $n = 0$.

Si a est un entier $\geqslant 1$ divisant à la fois p_n et q_n, il doit donc diviser $p_nq_{n+1} - p_{n+1}q_n$. L'égalité précédente montre qu'il doit diviser $(-1)^{n+1}$, ce qui ne peut se faire que si $a = 1$. Les entiers p_n et q_n sont donc premiers entre eux (même pour $n = 0$). Résumons :

i. les suites (p_n) et (q_n) sont croissantes. ii. $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_{n+2} \geqslant 2q_n$.
iii. $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_nq_{n+1} - p_{n+1}q_n = (-1)^{n+1}$. iiii. $\forall n \geqslant 0$, p_n et q_n sont premiers entre eux.

3. Convergence de la suite (r_n)

a. On a effectivement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \left|\dfrac{p_nq_{n+1} - p_{n+1}q_n}{q_nq_{n+1}}\right| = \dfrac{1}{q_nq_{n+1}}$.

Ensuite, la propriété ii. donne par récurrence $q_{2m} \geqslant 2^mq_0 = 2^m$ et $q_{2m+1} \geqslant 2^mq_1 = 2^ma_1 \geqslant 2^m$.

Donc $q_{2m}q_{2m+1} \geqslant 2^{2m}$ et $q_{2m+1}q_{2m+2} \geqslant 2^{2m+1}$. D'une façon générale $q_nq_{n+1} \geqslant 2^n$.

Il en résulte que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \frac{1}{2^n}.}$$

b. Puisque $\dfrac{p_n}{q_n} = r_n$ et $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = r_{n+1}$ et que α est compris entre r_n et r_{n+1} (l'un étant de rang pair et l'autre de rang impair) l'écart entre α et $\dfrac{p_n}{q_n}$ est moindre qu'entre $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ et $\dfrac{p_n}{q_n}$. Il en résulte :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \left|\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right| < \frac{1}{q_nq_{n+1}} \quad \text{et} \quad \left|\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right| < \frac{1}{2^n}.}$$

Comme la suite géométrique $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ converge vers 0, on en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (r_n) \text{ converge vers } \alpha.}$$

c. On a $\left|\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \dfrac{1}{q_nq_{n+1}}$, $\left|\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \dfrac{p_n}{q_n}\right| = \dfrac{1}{q_{n-1}q_n}$, et $\dfrac{1}{q_nq_{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{2q_nq_{n-1}}$, donc effectivement $\left|\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \dfrac{p_n}{q_n}\right|$, ou encore $|r_n - r_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|r_{n-1} - r_n|(*)$.

On a $r_n < \alpha < r_{n+1} < r_{n-1}$ ou $r_{n-1} < r_{n+1} < \alpha < r_n$ suivant la parité de n.

Dans le premier cas, (*) s'écrit $r_{n+1} - r_n \leqslant \frac{1}{2}(r_{n-1} - r_n)$, donc $r_n < \alpha < r_{n+1} < \dfrac{r_n + r_{n-1}}{2}$.

α est donc à gauche du milieu de l'intervalle $[r_n, r_{n-1}]$. Donc $\alpha - r_n < r_{n-1} - \alpha$. L'autre cas est analogue.

D'une façon générale :

$$\boxed{\left|\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right| < \left|\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \alpha\right|.}$$

d.i. Soient a, b, c, d, p, q six nombres entiers naturels non nuls tels que $bc - ad = 1$ et $\dfrac{a}{b} < \dfrac{p}{q} < \dfrac{c}{d}$.

On a donc $0 < \dfrac{p}{q} - \dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d} - \dfrac{a}{b}$ donc $0 < \dfrac{pb - qa}{bq} < \dfrac{bc - ad}{bd} = \dfrac{1}{bd}$ donc $0 < pb - qa < \dfrac{q}{d}$.

Comme $pb - qa$ est un entier, $\dfrac{q}{d}$ est nécessairement > 1 donc $q > d$.

De même $0 < \dfrac{c}{d} - \dfrac{p}{q} < \dfrac{c}{d} - \dfrac{a}{b}$ donc $0 < \dfrac{cq - pd}{dq} < \dfrac{bc - ad}{bd} = \dfrac{1}{bd}$ donc $0 < cq - pd < \dfrac{q}{b}$, donc $q > b$,

donc $p > a$ (sinon on aurait $\dfrac{a}{b} \geqslant \dfrac{p}{q}$)

et aussi

$$pdb > cqb - q = q(bc - 1) \geqslant (d + 1)(bc - 1) = dbc + bc - d - 1 = dbc + ad - d = dbc + (a - 1)d \geqslant dbc$$

donc $pdb > dbc$ donc $p > c$. Résumons

$$\boxed{p > a,\ p > c,\ q > b,\ q > d.}$$

ii. Si le nombre rationnel positif $\dfrac{p}{q}$ est une meilleure approximation de α que $\dfrac{p_n}{q_n}$, c'est a fortiori une meilleure approximation de α que $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ d'après 3.c.

Notons respectivement $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ respectivement la plus petite et la plus grande des deux fractions $\dfrac{p_n}{q_n}$ et $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$.

Puisque α est entre deux r_n successifs, on a donc $\dfrac{a}{b} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{c}{d}$.

Puisque $\dfrac{p}{q}$ est une meilleure approximation de α que $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$, on a donc aussi $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{p}{q} \leqslant \dfrac{c}{d}$.

Par ailleurs $bc - ad = |p_nq_{n-1} - q_np_{n-1}| = 1$. On est donc dans les conditions du i.

On en déduit

$$\boxed{p > p_n \text{ et } q > q_n.}$$

4. Exemple : développement en fraction continue de $\sqrt{2}$

a. Pour $\alpha = \sqrt{2}$, on a déjà vu au début du III que $a_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1$, $a_n = 2$. En reprenant la définition des suites p_n et q_n du B.2.a, on voit que :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Dans cet exemple, les suites } (p_n) \text{ et } (q_n) \text{ sont caractérisées par} \\ p_0 = 1,\ p_1 = 3,\ q_0 = 1,\ q_1 = 2 \text{ et } \forall n \geqslant 2, p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2}, q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2}.\end{array}}$$

(il y a une petite faute dans l'énoncé).

b. On connaît tous les a_n :

$$\boxed{\text{Le développement en fraction continue de } \sqrt{2} \text{ est } \sqrt{2} = [1, 2, 2, \ldots, 2, \ldots].}$$

5. Cas d'un nombre rationnel. Ici, α est un nombre rationnel, strictement positif, non entier.

On pose à nouveau $a_0 = E(\alpha)$ et $\omega = \alpha - E(\alpha)$. On sait (III.A.2.) qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que $T^{n_0-1}(\omega) \neq 0$ et $\forall n \geqslant n_0, T^n(\omega) = 0$. On pose, pour $1 \leqslant n \leqslant n_0$, $a_n = E\left(\dfrac{1}{T^{n-1}(\omega)}\right)$.

a. On peut reprendre les calculs de III.B.1.a). Ils sont valables tant que $T^n(\omega)$ est non nul.

On a donc : $\forall n \leqslant n_0$, $\alpha = \varphi_n(T^n(\omega))$ et on arrive ainsi à $\alpha = \varphi_{n_0}(T^{n_0}(\omega)) = \varphi_{n_0}(0) = r_{n_0}$.

Donc $\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n_0}}}}$, qu'on peut noter :

$$\boxed{\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_{n_0}].}$$

α étant un rationnel positif non entier, on peut l'écrire sous forme fractionnaire $\dfrac{p}{q}$, avec p et q entiers strictement positifs, q ne divisant pas p.

L'algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD de p et q fait apparaître deux suites finies d'entiers positifs : (d_n) et (r_n) liées par : $q = r_0$, $p = d_0 r_0 + r_1$ puis, pour $n \geqslant 0$, $r_n = d_{n+1} r_{n+1} + r_{n+2}$.

La suite (r_n) est strictement décroissante. Son dernier terme est 0.

$\dfrac{p}{q} = d_0 + \dfrac{r_1}{r_0}$: d_0 est donc la partie entière de $\dfrac{p}{q}$, c'est-à-dire a_0, et $\omega = \dfrac{r_1}{r_0}$.

D'après III.A.2.b., $T(\omega) = \dfrac{r_2}{r_1}$, puis, par récurrence évidente, $T^n(w) = \dfrac{r_{n+1}}{r_n}$ jusqu'à ce que $T^n(\omega)$ soit nul.

$T^n(w) = \dfrac{r_{n+1}}{r_n}$ est donc valable pour n de 0 à n_0.

Pour $1 \leqslant n \leqslant n_0$, on a alors $a_n = E\left(\dfrac{1}{T^{n-1}(\omega)}\right) = E\left(\dfrac{r_{n-1}}{r_n}\right)$.

Comme $r_{n-1} = d_n r_n + r_{n+1}$, on a $\dfrac{r_{n-1}}{r_n} = d_n + \dfrac{r_{n+1}}{r_n}$. La partie entière de $\dfrac{r_{n-1}}{r_n}$ est donc d_n, donc $d_n = a_n$.

$T^{n_0}(\omega)$ est nul donc $\dfrac{r_{n_0+1}}{r_{n_0}} = 0$ donc $r_{n_0+1} = 0$: la fin de la recherche des $T^n(w)$ coïncide avec la fin de l'algorithme d'Euclide et $r_{n_0-1} = a_{n_0} r_{n_0}$.

Comme $r_{n_0-1} > r_{n_0}$, on a nécessairement $a_{n_0} > 1$. En abrégeant :

> $a_0, a_1, \ldots, a_{n_0}$ sont obtenus par l'algorithme d'Euclide pour la recherche du P.G.C.D. de p et q et on a $a_{n_0} \geqslant 2$.

b. Pour $\alpha = \dfrac{193}{71}$,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 193 &=& 2\times 71 &+& 51 & a_0 = 2\\ 71 &=& 1\times 51 &+& 20 & a_1 = 1\\ 51 &=& 2\times 20 &+& 11 & a_2 = 2\\ 20 &=& 1\times 11 &+& 9 & a_3 = 1\\ 11 &=& 1\times 9 &+& 2 & a_4 = 1\\ 9 &=& 4\times 2 &+& 1 & a_5 = 4\\ 2 &=& 2\times 1 &+& 0 & a_6 = 2 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \frac{193}{71} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}}}$$

Pour $\alpha = \dfrac{2721}{1001}$,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 2721 &=& 2\times 1001 &+& 719 & a_0 = 2\\ 1001 &=& 1\times 719 &+& 282 & a_1 = 1\\ 719 &=& 2\times 282 &+& 155 & a_2 = 2\\ 282 &=& 1\times 155 &+& 127 & a_3 = 1\\ 155 &=& 1\times 127 &+& 28 & a_4 = 1\\ 127 &=& 4\times 28 &+& 15 & a_5 = 4\\ 28 &=& 1\times 15 &+& 13 & a_6 = 1\\ 15 &=& 1\times 13 &+& 2 & a_7 = 1\\ 13 &=& 6\times 2 &+& 1 & a_8 = 6\\ 2 &=& 2\times 1 &+& 0 & a_9 = 2 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \frac{2721}{1001} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2}}}}}}}}}$$

IV. DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE DE e

1. Développement en fraction continue de th $\dfrac{1}{2}$

a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = P_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $q_n = Q_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$, donc, en appliquant les formules trouvées en II.A.5.c. en $x = \dfrac{1}{2}$, on a immédiatement :

$$\boxed{p_0 = 0, p_1 = 1, q_0 = 1, q_1 = 2 \text{ et } \forall n \geqslant 2,\ p_n = 2(2n-1)p_{n-1} + p_{n-2},\ q_n = 2(2n-1)q_{n-1} + q_{n-2}}$$

Considérons donc la suite (a_n) définie par $a_0 = p_0 = 0$, $a_1 = 2$ et, pour $n \geqslant 2$, $a_n = 2(2n-1)$. Les suites (p_n) et (q_n) qu'on vient d'introduire sont les suites (p_n) et (q_n) associées à a_n par les formules de III.B.2..

D'après ce qui est admis à la fin du III, la suite $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)$ est convergente et sa limite admet $[a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ comme développement en fraction continue. On nous rappelle par ailleurs que cette limite est th $\frac{1}{2}$. On en déduit que

> le développement en fraction continue de th $\frac{1}{2}$ est : th $\frac{1}{2} = [0, 2, 6, 10, \ldots, 2(2n-1), \ldots]$.

2. Développement en fraction continue de e

a. th $\frac{1}{2} = \dfrac{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}} = \dfrac{e-1}{e+1}$ donc $1 + \text{th } \dfrac{1}{2} = \dfrac{2e}{e+1}$ et $1 - \text{th } \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{e+1}$ donc

$$\boxed{e = \frac{1 + \text{th } \frac{1}{2}}{1 - \text{th } \frac{1}{2}}.}$$

b. Les formules démontrées au IV.1.a. prouvent clairement par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ q_n > p_n.}$$

c. La suite $\left(\dfrac{q_n + p_n}{q_n - p_n}\right)$ est donc définie pour tout n. Elle peut aussi s'écrire $\dfrac{1 + \frac{p_n}{q_n}}{1 - \frac{p_n}{q_n}}$.

Puisque $\dfrac{p_n}{q_n}$ converge vers th $\dfrac{1}{2}$, on déduit de a. précédent que

> la suite $\left(\dfrac{q_n + p_n}{q_n - p_n}\right)$ a pour limite e.

Cette suite est l'image de la suite $\dfrac{p_n}{q_n}$, dont les termes sont dans $]0;1[$, par la fonction homographique $x \to \dfrac{1+x}{1-x}$, strictement croissante sur $]0;1[$. De l'encadrement $\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}} <$ th $\dfrac{1}{2} < \dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}$ résultant de III on déduit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{q_{2n} + p_{2n}}{q_{2n} - p_{2n}} < e < \frac{q_{2n+1} + p_{2n+1}}{q_{2n+1} - p_{2n+1}}.}$$

d. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = q_n + p_n$, $v_n = q_n - p_n$. Ajoutons, puis retranchons, membre à membre les relations, associées deux à deux convenablement, du IV.1.a. Nous obtenons :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ u_n = 2(2n-1)u_{n-1} + u_{n-2},\ v_n = 2(2n-1)v_{n-1} + v_{n-2},\ u_0 = 1, v_0 = 1, u_1 = 3, v_1 = 1.}$$

Puisque $e = 2,71828\ldots$, la partie entière de e est 2 et la partie entière de $\dfrac{1}{e-2}$ est 1. Les développements en fraction continue d'ordre 1 et 2 de e sont 2 et $2 + \dfrac{1}{1} = 3$. Le deuxième est bien égal à $\dfrac{u_1}{v_1}$ mais le premier n'est pas égal à $\dfrac{u_0}{v_0}$. Conclusion :

> $\dfrac{u_n}{v_n}$ ne peut être, pour tout n, le développement en fraction continue d'ordre n de e.

… relations de récurrence établies au d. donnent, à partir de u_0, v_0, u_1, v_1 :

$$\boxed{u_2 = 19\,;\, v_2 = 7\,;\, u_3 = 193\,;\, v_3 = 71\,;\, u_4 = 2721\,;\, v_4 = 1001.}$$

i. On introduit donc $\alpha = [2, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots]$ avec : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_{3n+1} = c_{3n+3} = 1,\ \ c_{3n+2} = 2n+2.$
D'après III.B.2.B.iiii, la forme irréductible du développemment d'ordre n d'un irrationnel est $\dfrac{p_n}{q_n}$ où les suites p_n et q_n sont définies au III.B.2.a.
Puisque, ici, $\dfrac{y_n}{z_n}$ est la forme irréductible du développement en fraction continue d'ordre n de α, on a donc : $y_0 = c_0 = 2$, $y_1 = 1 + c_0c_1 = 1 + 2.1 = 3$, $z_0 = 1$, $z_1 = 1$ et ensuite : $y_n = c_ny_{n-1} + y_{n-2}$ et $z_n = c_nz_{n-1} + z_{n-2}$. En particulier, pour $n \geqslant 3$,

$$\begin{aligned}
y_{3n-2} &= c_{3n-2}y_{3n-3} + y_{3n-4} = y_{3n-3} + y_{3n-4} = c_{3n-3}y_{3n-4} + y_{3n-5} + y_{3n-4} = 2y_{3n-4} + y_{3n-5}\\
&= 2(2n-2)y_{3n-5} + 2y_{3n-6} + y_{3n-5} = 2(2n-1)y_{3n-5} + 2y_{3n-6} - y_{3n-5}\\
&= 2(2n-1)y_{3n-5} + y_{3n-6} - y_{3n-7} = 2(2n-1)y_{3n-5} + y_{3n-8}.
\end{aligned}$$

Le calcul est le même pour z_{3n-2}.

$$\boxed{\forall n \geqslant 3,\ y_{3n-2} = 2(2n-1)y_{3n-5} + y_{3n-8} \text{ et } z_{3n-2} = 2(2n-1)z_{3n-5} + z_{3n-8}.}$$

ii. On a $y_1 = 3 = u_1$ et
$y_4 = c_4y_3 + y_2 = y_3 + y_2 = c_3y_2 + y_1 + y_2 = 2y_2 + y_1 = (2c_2+1)y_1 + 2y_0 = 5.3 + 4 = 19 = u_2$.
De même on trouve $z_1 = v_1$ et $z_4 = v_2$. Les relations du i montrent alors par récurrence que

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ u_n = y_{3n-2},\ v_n = z_{3n-2}.}$$

f. La suite $\dfrac{u_n}{v_n}$ est donc extraite de la suite $\dfrac{y_n}{z_n}$, qui converge vers α ; donc la suite $\dfrac{u_n}{v_n}$ converge vers α.
Mais on sait par ailleurs qu'elle converge vers e. Donc $\alpha = e$. Autrement dit

$$\boxed{e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, \dots, c_n, \dots].}$$

g. *Application numérique*

Programme MAPLE

```
restart;
Digits :=14;
fraccont :=proc(n)
local
y,z,i,y0,y1,z0,z1,c;
y0 :=2; y1 :=3;
z0 :=1; z1 :=1;
for i from 2 to n do
c :=1;
if(type((i-2)/3,integer)
then
c :=(2*i+2)/3;fi;
y :=c*y1+y0;
y0 :=y1;
y1 :=y;
z :=c*z1+z0;
z0 :=z1;
z1 :=z;
od;
RETURN(y/z);
end;
```

COMMENTAIRES :

« Digits :=14 » imposera à Maple de sortir les résultats avec 14 chiffres.
La procédure « fraccont » reçoit à l'entrée le rang n auquel il faut s'arrêter.
Elle calcule les y_i successifs à partir de y_0 et y_1 en utilisant la formule $y_i = c_iy_{i-1} + y_{i-2}$. En fait, on n'utilise pas un tableau, mais seulement 2 variables $y0$ et $y1$: à chaque pas on remplace $y0$ par $y1$ et $y1$ par le nouvel y calculé en transitant par la variable intermédiaire y. Même chose pour z_n. La variable c contient le c_i en cours de validité ; il vaut 1 sauf si i est de la forme $3k+2$, c.a.d. si $(i-2)/3$ est entier. La procédure renvoie le dernier $\dfrac{y}{z}$ calculé.
Comme les variables manipulées sont des entiers, on est sûr que Maple va renvoyer une fraction. Si l'on veut une approximation « à virgule » (par exemple pour juger la qualité de l'approximation), il faut infliger un « evalf » à cette fraction.
Comme prévu dans ii ci-dessus, fraccont(7) renvoie $\dfrac{193}{71}$ et fraccont(10) renvoie $\dfrac{2721}{1001}$. evalf(fraccont(13)) renvoie 2,7182818287357. Tous les chiffres sont bons car Maple n'a fait que les « quatre opérations ». De même evalf(fraccont(13)) renvoie 2,7182818284454.

Comme e est compris entre ces deux derniers nombres, on peut affirmer que

$$\boxed{e = 2,718281828 \text{ à } 10^{-10} \text{ près.}}$$

***

Semaine 2 : Séries numériques

On suppose maintenant faite l'étude des séries numériques, c'est-à-dire des séries dont le terme général est réel ou complexe. La notion de série réapparaîtra dans l'année, quand on étudiera les séries de fonctions u_n d'une variable x et, notamment, les séries entières et les séries trigonométriques. Pour x fixé, une telle série devient une série numérique de terme général $u_n(x)$ et nous pouvons donc, dès cette semaine, en commencer l'étude. Par contre les propriétés de continuité, dérivabilité... de la fonction f « somme de la série », définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$, seront vues plus tard.

• Sujet 4 : École des Ingénieurs de la ville de Paris 1992

C'est un sujet très « pédagogique » sur les suites et les séries. Il permet d'abord de revoir le théorème de Césaro. Ensuite, on utilise une technique souvent fructueuse : pour trouver un équivalent de u_n, on fait le détour par la série télescopique de terme général $\dfrac{1}{(u_{n+1})^\beta} - \dfrac{1}{(u_n)^\beta}$, où β est choisi judicieusement.
Toujours très pédagogique, on applique enfin ce qui précède à des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ en étudiant, suivant le comportement de f, la convergence de la suite et celle de la série.

• Sujet 5 : E.S.I.M. (« Ingénieurs de Marseille ») 1988 Mathématiques 1 Options M et P'

Ce problème est intéressant pour plusieurs raisons :
– On y voit apparaître la notion de produit infini, qui se ramène en fait, par passage au logarithme, à celle de série numérique.
– On y voit apparaître la fonction Γ, mais la définition qui en est donnée au début du problème n'est pas la définition usuelle, que l'on retrouve en fin de problème.
– On se prépare à l'étude, qui sera détaillée en cours d'année, des notions de convergence uniforme d'une suite de fonctions et d'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle non borné. Il n'est pas nécessaire ici d'avoir des connaissances très poussées sur ces notions, si bien que peu d'indications supplémentaires suffisent pour rendre toutes les questions abordables par les 3/2.

• Sujet 6 : Centrale-Supélec 1997 Mathématiques 1 Filière MP

Encore un sujet « pédagogique » sur les suites et les séries, mais cette fois les suites vérifient une relation de récurrence de la forme : $u_{n+1} = u_n + a_{n-1}u_{n-1}$.
Même amputé de l'application à la résolution d'une équation différentielle, application que les 3/2 ne sont pas encore en mesure d'aborder, le problème demeure intéressant.

• Sujet 7 : Centrale-Supélec 1996 Mathématiques 1 Options M et P'

C'est un exemple de problème où l'on s'attache à résoudre une équation fonctionnelle, la propriété vérifiée par F cherchée reliant les valeurs prises par F en x et en $x + a$.
On cherche $F(x)$, à x fixé, sous la forme d'une somme de série mais ce problème ne requiert aucune connaissance spécifique sur les séries de fonctions. On peut le traiter en ne connaissant que les séries numériques.
Ce problème vous permettra en outre de vous familiariser avec les fonctions lipschitziennes.
Enfin, on voit apparaître ici une méthode fréquemment utilisée pour répondre à une question du type : Montrer l'existence et l'unicité d'un certain « objet mathématique » ayant certaines propriétés imposées. Il s'agit ici de fonctions et ce sont les questions **III.A.1)b)** et **IV.B.3)b)**. Pour cela, on commence par analyser les propriétés imposées à l'objet jusqu'à pouvoir conclure que l'objet en question ne peut pas être autre chose qu'un certain objet A bien précis qu'on exhibe. Dans notre problème l'objet A auquel on arrive ainsi par condition nécessaire est, pour les deux questions, la somme d'une certaine série convergente. Au point où on en est, on peut déjà dire que, s'il y a une solution elle est unique, et c'est l'objet A. Attention ! ce n'est pas parce que l'objet A existe qu'on peut dès lors affirmer l'existence et l'unicité de la solution. Non ! Il faut encore prouver que cet objet A, ici c'est la somme d'une série, vérifie effectivement les conditions imposées. À ce moment seulement on peut conclure à l'existence et l'unicité de la solution.

N.B. Le sujet comporte trois parties, qui ne sont pas indépendantes. Il est demandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé. Les candidats pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite du problème, même s'il ne les ont pas démontrés. Les résultats devront être soulignés ou encadrés.

Il sera tenu compte dans la notation de la qualité de la rédaction et de la présentation matérielle.

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels.

Préambule

Dans toutes les parties, étant donné une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et un réel a, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = a$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

On appelle alors E l'ensemble des réels a tels que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente et F l'ensemble des réels a tels que la série $\sum u_n$ soit convergente.

Partie I

1°) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$.

a) Montrer que si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Examiner la réciproque.

b) Montrer que si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et préciser alors sa limite. Réciproquement, si la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

2°) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers zéro. On suppose qu'il existe deux réels m et α tels que :

$$m \neq 0,\ \alpha > 1, \text{ et } \frac{u_{n+1}-u_n}{(u_n)^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} m.$$

a) Quel est le signe de m ?

b) Soit β un réel, et v_n la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{(u_{n+1})^\beta} - \dfrac{1}{(u_n)^\beta}$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie non nulle pour une et une seule valeur β_0 de β, que l'on exprimera en fonction de α.

c) On suppose que $\beta = \beta_0$, et que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$. Quelle est la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

En déduire un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de la forme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} Ln^s$, où on exprimera les réels L et s en fonction de m et α.

En déduire la nature de la série $\sum u_n$, en fonction du réel α.

3°) Applications :

a) On suppose que la fonction f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x - x^2$.

Déterminer l'ensemble E. Déterminer l'ensemble F (on pourra utiliser les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies au 2°), avec $\alpha = 2$).

b) On suppose que la fonction f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{|x|}}$.

Déterminer l'ensemble E. Déterminer l'ensemble F (on pourra utiliser les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies au 2°), avec une valeur convenable de α).

Partie II

Dans cette partie, on suppose que la fonction f est dérivable sur un voisinage de 0.

1°) Montrer que si l'ensemble F est non vide, alors f vérifie la condition $f(0) = 0$.
On suppose cette condition réalisée dans toute la suite de cette partie.

2°)

a) On suppose que $|f'(0)| < 1$. Montrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ strictement positif tel que $]-\eta, \eta[\subset F$.

b) Application :

b1) On suppose que f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x+x^3}{3}$. Déterminer les ensembles E et F.

b2) On suppose que f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, f(x) = \dfrac{x}{2(1-x)}$ et $f(1) = 0$. Déterminer les ensembles E et F.

3°) On suppose que $|f'(0)| > 1$;

a) Montrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si il existe un entier naturel p tel que $u_p = 0$.

b) On suppose en plus que f est injective. Déterminer l'ensemble F.

c) Application : on suppose que f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}, f(x) = \dfrac{2x}{1+x}$ et $f(-1) = 0$. Déterminer les ensembles E et F.

4°) Dans cette question, on suppose que $f'(0) = -1$.

a) On suppose en plus que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, f'(x) \in]-1, 0[$. Déterminer les ensembles E et F.

b) Applications :

b1) On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -\operatorname{th} x$. Déterminer les ensembles E et F.

b2) On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -\operatorname{sh} x$. Déterminer les ensembles E et F.

Partie III

Dans cette partie, on suppose que la fonction f vérifie les conditions suivantes :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$; $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$; $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ f'(x) \in]0, 1[$.

On considère toujours la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum u_n$, et également la série (entière) $\sum z_n(x)$, dont le terme général est défini par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ z_n(x) = u_n x^n$.

On note R le rayon de convergence de cette série entière.

D'une façon générale, pour une série de la forme $\sum u_n x^n$, dite « série entière », il existe un certain R, fini ou $+\infty$, appelé rayon de convergence, tel que, pour $x \in]-R, R[$, la série converge absolument. Si R est fini et si $|x| > R$, la série diverge grossièrement, son terme général n'étant même pas borné.
Souvent, on peut déterminer R en adaptant la règle de d'Alembert qu'on a vue pour les séries numériques.

... entière et G l'ensemble de définition de Z, soit :

$\forall x \in G, Z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$

G est donc un intervalle limité par $-R$ et R, mais on ne peut dire encore, si R est fini, si cet intervalle est fermé, ouvert ou semi-ouvert.

1°)

a) Déterminer l'ensemble E.

b) Déterminer le rayon de convergence R suivant les valeurs du réel a.

2°) On suppose que a est strictement positif, et que f est de classe C^k, ($k \geqslant 2$), et vérifie : $\forall l \in \{2, \dots, k-1\}, f^{(l)}(0) = 0$, et $f^{(k)}(0) \neq 0$.

a) Montrer que $f^{(k)}(0) < 0$, et que l'entier k est impair.

b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{(u_{n+1})^\beta} - \dfrac{1}{(u_n)^\beta}$ a une limite finie non nulle pour une et une seule valeur β_0 de β, que l'on précisera en fonction de l'entier k.

c) En utilisant les résultats de la partie I, en déduire un équivalent simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand l'entier n tend vers l'infini.

d) Déterminer l'ensemble G.

e) Montrer que la série entière $\sum z_n(x)$ converge uniformément sur le segment $[-R, 0]$.

Les 3/2 pourront laisser cette question e) de côté.

3°) Application : on suppose que a est strictement positif, et que f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{th} x$.

a) Déterminer un équivalent simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand l'entier n tend vers l'infini.

b) Montrer que : $Z(x) \xrightarrow[x\to 1-]{} +\infty$.

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{Z(x)}{\ln(1-x)}$.

***

Partie I

1°)

a) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si M est un majorant des $|x_n|$, on a aussi : $\forall n \in \mathbb{N}, |y_n| \leqslant M$. Donc,

si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi. La réciproque est fausse.

Pour le prouver, choisissons pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non bornée car présentant des «pics hauts» mais «rares», par exemple : $x_n = \sqrt{n}$ si n est un carré d'entier et 0 sinon.
Cette suite n'est pas bornée et cependant, si k^2 est le plus grand carré inférieur à n, on a $0 \leqslant y_n = \dfrac{1+2+\cdots+k}{n+1} = \dfrac{k(k+1)}{2(n+1)} \leqslant \dfrac{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}{2(n+1)}$, suite majorée (car convergente). Donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée.
On pouvait aussi choisir une suite non bornée présentant une alternance de signe permettant, par «compensations» d'obtenir y_n bornée ; par exemple $x_n = (-1)^n n$.

b) Il ne suffit pas d'invoquer ici, si on le connaît, le théorème de Césaro, car on nous demande clairement une démonstration.
Supposons donc que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite convergente, avec l pour limite. Soit $\varepsilon > 0$ imposé.
Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0, |x_n - l| \leqslant \varepsilon/2$. Pour $n > n_0$, on a

$$\begin{aligned}
|y_n - l| &= \left|\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k\right) - l\right| = \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n}(x_k - l)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n_0}(x_k - l)\right| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n}|(x_k - l)| \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n_0}(x_k - l)\right| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n_0}(x_k - l)\right| + \frac{n-n_0}{n+1}.\frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n_0}(x_k - l)\right| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

n_0 étant fixé, la suite de terme général $t_n = \dfrac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n_0}(x_k - l)\right|$ converge vers 0 donc :

$\exists n_1, \forall n \geqslant n_1,\ \dfrac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n_0}(x_k - l)\right| \leqslant \varepsilon/2$. Donc : $\forall n \geqslant \operatorname{Max}(n_0, n_1),\ |y_n - l| \leqslant \varepsilon$.

Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi, et a même limite.

La réciproque est fausse :

Le contre-exemple usuel est $x_n = (-1)^n$. Pour changer et fournir un contre-exemple avec x_n positive non bornée, affinons notre exemple précédent de sorte que y_n soit non seulement bornée mais converge vers 0.
Prenons par exemple $x_n = \sqrt[3]{n}$ si n est le cube d'un entier et 0 sinon.
De façon analogue à la précédente, si $k^3 \leqslant n < (k+1)^3$, on a
$0 \leqslant y_n = \dfrac{1+2+\cdots+k}{n+1} = \dfrac{k(k+1)}{2(n+1)} \leqslant \dfrac{\sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n}+1)}{2(n+1)} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}n^{1/3}$ donc $y_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

2°)

a) Avec les hypothèses faites, on a $(u_{n+1} - u_n) \underset{n\infty}{\sim} m(u_n)^\alpha$ donc $u_{n+1} - u_n$ est du signe de m (non nul) à partir d'un certain rang, donc u_n est monotone à partir d'un certain rang. Comme il s'agit d'une suite de réels positifs qui converge vers zéro, elle ne peut qu'être décroissante. On a donc nécessairement

$m < 0$.

b) On peut écrire $v_n = (u_{n+1})^{-\beta} - (u_n)^{-\beta} = (u_n)^{-\beta}\left[\left(1+\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n}\right)^{-\beta} - 1\right]$.

Comme $u_{n+1} - u_n \underset{n\infty}{\sim} m(u_n)^\alpha$ et $\alpha > 1$, $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$ est un infiniment petit équivalent à $m(u_n)^{\alpha-1}$. Le développement limité à deux termes de $(1+x)^{-\beta}$ au voisinage de 0 montre que $(1+x)^{-\beta} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\beta x$.

On en déduit ici que $v_n \underset{n\infty}{\sim} (u_n)^{-\beta}\left[-\beta\left(\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n}\right)\right] \underset{n\infty}{\sim} -\beta m (u_n)^{\alpha-\beta-1}$. Rappelons-le, m n'est pas nul.

Pour que v_n admette une limite finie non nulle, il faut et il suffit que β ne soit pas nul et que $\alpha - \beta - 1$ soit nul. Finalement, puisque $\alpha - 1$ n'est pas nul,

$$\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ admet une limite finie non nulle si et seulement si } \beta = \beta_0 = \alpha - 1.}$$

$$\boxed{\text{Cette limite est } -\beta_0 m = (1-\alpha)m.}$$

c) Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on peut appliquer 1°)b) :

$$\boxed{\text{La suite } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } (1-\alpha)m.}$$

Les termes de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se télescopent. Il reste $w_n = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{(u_{n+1})^{\beta_0}} - \dfrac{1}{(u_0)^{\beta_0}}\right)$. Donc

$(n+1)w_n(u_{n+1})^{\beta_0} = 1 - \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_0}\right)^{\beta_0}$, qui tend vers 1 quand $n \to +\infty$. De même pour $nw_{n-1}(u_n)^{\beta_0}$.

Donc $n(\alpha-1)(-m)(u_n)^{\alpha-1}$ tend vers 1. En élevant à la puissance $1/(\alpha-1)$, on obtient encore une suite qui tend vers 1 : $(n(\alpha-1)(-m))^{\frac{1}{\alpha-1}}\, u_n$ tend vers 1. Donc :

$$\boxed{u_n \text{ est équivalent à } [m(1-\alpha)]^{\frac{1}{1-\alpha}}.n^{\frac{1}{1-\alpha}} \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini.}}$$

Par comparaison de cette série à termes positifs avec une série de Riemann, on en déduit que

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge} \iff \frac{1}{\alpha-1} > 1 \iff \alpha < 2.}$$

3°) Applications :

a) $f(x) = x - x^2$; $f(x) - x = -x^2 \leqslant 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$: la suite est décroissante.
Ensuite : si u_n converge vers l, f est continue en l donc $l = f(l)$ donc $l = 0$.
Utilisons maintenant le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		0		$1/2$		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

- Si $u_0 = a \in \{0, 1\}$, u_n est constante et nulle dès le rang 1.
- Si $u_0 = a \in]0,1[$, on a, par récurrence : $\forall n,\ u_n \in]0,1[$; la suite est donc minorée ; comme elle est décroissante, elle converge.
- Si $u_0 = a \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, alors $u_1 \in]-\infty, 0[$ puis, par récurrence, $u_n \in]-\infty, 0[$. La suite, décroissante et strictement négative, ne peut converger vers 0. En résumé :

$$\boxed{E = [0, 1].}$$

Pour que $\sum u_n$ converge, il est d'abord nécessaire que la suite converge, donc que $a \in [0, 1]$.
- Si $a = 0$ ou 1, on a $u_n = 0$ pour $n \geqslant 1$, donc la série converge.
- Si $a \in]0,1[$, on a $u_n > 0$ pour tout n et $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{(u_n)^2} = -1$, qui nous permet d'utiliser ce qui précède avec $\alpha = 2$, donc $\sum u_n$ diverge. Résumons :

$$\boxed{F = \{0, 1\}.}$$

b) $f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{|x|}}$; f est définie sur $\mathbb{R}$, continue et impaire.

Pour $x > 0$, on a $f'(x) = \dfrac{2+\sqrt{x}}{2\left(1+\sqrt{x}\right)^2} > 0$. D'où le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Si $a \geqslant 0$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$ et $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n\sqrt{|u_n|}}{1+\sqrt{|u_n|}} \leqslant 0$. La suite est décroissante et minorée, donc convergente. De même si $a \leqslant 0$, la suite étant alors croissante majorée. Donc

$$\boxed{E = \mathbb{R}.}$$

Comme $f(x) - x = \dfrac{-x\sqrt{|x|}}{1+\sqrt{|x|}}$ et $l = f(l)$, la limite de u_n est à chaque fois 0. Si $a > 0$, on a $u_n > 0$ et $u_{n+1} - u_n \underset{n\infty}{\sim} -u_n\sqrt{u_n}$. On peut appliquer 2° avec $\alpha = 3/2$: la série converge. Il en est de même si $a < 0$ (considérer $\sum -u_n$). Enfin le cas $a = 0$ est évident. Donc

$$\boxed{F = \mathbb{R}.}$$

Partie II

1°) Si $F \neq \emptyset$, il existe a tel que, pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée, on ait convergence de la série $\sum u_n$, ce qui nécessite que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
f étant continue en 0 (puisque dérivable en 0), et puisque $u_{n+1} = f(u_n)$, on doit avoir $l = f(l)$, donc

$$\boxed{f(0) = 0.}$$

2°)

a) Soit k un réel tel que $|f'(0)| < k < 1$. Quand $x \to 0$, $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers $f'(0)$. Il existe donc un intervalle $]-\eta, +\eta[$, avec $\eta > 0$, tel que : $\forall x \neq 0,\ x \in]-\eta, +\eta[,\ \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leqslant k$, ou $|f(x)| \leqslant k|x|$, vrai aussi pour $x = 0$.
Choisissons alors $u_0 = a$ dans cet intervalle. Puisque $k < 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, u_1 est dans l'intervalle ; par récurrence, il en est de même de tous les u_n.
De plus $|u_1| \leqslant k|u_0| = k|a|$ et, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant k^n|a|$.
Cette majoration par le terme général d'une série géométrique convergente prouve que $\sum u_n$ converge absolument, donc que $a \in F$. Donc :

$$\boxed{]-\eta, \eta[\ \subset F.}$$

b) Application

b1) $f(x) = \dfrac{x + x^3}{3}$. f est impaire, continue sur $\mathbb{R}$, croissante sur $[0, +\infty[$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Quand on remplace a par $-a$, on remplace tous les u_n par leurs opposés, ce qui ne change pas la convergence de la suite de terme général u_n, ni de la série. On peut donc se limiter à $a \geqslant 0$.
- Si $a = 0$ ou $\sqrt{2}$, la suite est constante donc convergente.
- Si $a \in]0, \sqrt{2}[$, on voit, par récurrence, que tous les u_n sont dans $]0, \sqrt{2}[$. Alors $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{3}((u_n)^2 - 2)$ est strictement négatif. La suite, décroissante minorée, est convergente. f étant continue sur $\mathbb{R}$, la limite l doit vérifier $l = f(l)$, donc $l^3 + l - 3l = 0$, donc $l = 0$ ou $l = \pm\sqrt{2}$. La seule possibilité est $l = 0$.
- Si $a > \sqrt{2}$, on voit de même par récurrence que tous les u_n sont dans $]\sqrt{2}, +\infty[$, et $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{3}((u_n)^2 - 2)$ est strictement positif. La suite est croissante. Minorée par $\sqrt{2}$, elle ne peut converger ni vers 0 ni vers $\pm\sqrt{2}$. Elle est donc divergente. Rassemblons :

$$\boxed{E =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[.}$$

Pour que $\sum u_n$ converge, il est nécessaire que la suite de terme général u_n converge, avec 0 pour limite. D'après ce qui précède, cela nécessite que $a \in]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$. Supposons réciproquement que $a \in]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$.

• Si $a = 0$, u_n est constante et nulle, donc $\sum u_n$ converge.

• Si $a \neq 0$, aucun des u_n n'est nul et $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+(u_n)^2}{3} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{3}$ (car $u_n \to 0$ d'après ce qui précède). Donc $\sum u_n$ converge absolument d'après d'Alembert. Donc $a \in F$. En résumé :

$$\boxed{F =]-\sqrt{2},\sqrt{2}[.}$$

b2) Pour $x \neq 1$, $f(x) = \frac{2x}{1+x}$, donc $f'(x) = \frac{1}{2(1-x)^2}$, d'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$1/2$		1			$+\infty$
$f(x)$	$-1/2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1/2$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$		$-1/2$

Pour $x \neq 1$, $f(x) - x = x\left[\frac{2x-1}{2(1-x)}\right]$. Les points fixes de f sont donc 0 et 1/2.

• Si $a \in]0,\frac{1}{2}[$, intervalle stable par f, les u_n restent dans $]0,\frac{1}{2}[$, intervalle sur lequel $f(x) < x$. La suite est décroissante minorée ; elle converge vers un point de $[0,\frac{1}{2}[$ donc un point ou f est continue, donc un point fixe de f, qui ne peut être que 0.

• Si $a \leqslant 0$, les u_n restent de même sur l'intervalle stable $]-\infty,0]$. Cette fois la suite est croissante convergente, nécessairement vers 0. $a = 0$ ne fait pas exception.

• Si $a \geqslant 1$, on a $u_1 \leqslant 0$ (y compris pour $a = 1$), ce qui nous ramène au cas précédent à partir du deuxième terme.

• Si $a \in]\frac{1}{2},1[$, on a $u_1 > u_0 = a$ et, tant que u_k reste dans $]\frac{1}{2},1[$, on a $u_{k+1} > u_k$. Si c'était vrai pour tout k, la suite, croissante et majorée, convergerait vers une limite $l \in]\frac{1}{2},1]$. Cette limite ne peut être 1 puisque u_{n+1} convergerait vers $+\infty$. On ne peut avoir non plus $l \in]\frac{1}{2},1[$ car f serait continue en l et on devrait donc avoir $l = f(l)$. Il existe donc un rang k où $u_{k+1} \geqslant 1$. On est donc ramené, à un certain rang, au cas précédent.

• Si $a = \frac{1}{2}$, la suite est constante donc convergente, mais, contrairement aux autres cas, la limite est 1/2.

Résumons :

$$\boxed{E = \mathbb{R}}$$

La convergence de $\sum u_n$ nécessite la convergence vers 0 de la suite de terme général u_n.

Cela exige $a \neq \frac{1}{2}$. Dans ce cas u_n, qui converge vers 0, est différent de 1 à partir d'un certain rang. Alors $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{1}{|2(1-u_n)|} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{2}$, d'où la convergence de la série par d'Alembert. Donc :

$$\boxed{F = \mathbb{R} - \{\tfrac{1}{2}\}.}$$

3°)

a) S'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p = 0$, la suite est nulle à partir de ce rang p (car $f(0) = 0$), donc $\sum u_n$ converge.

Réciproquement, supposons que $\sum u_n$ converge et qu'aucun des u_n n'est nul. Puisque u_n tend vers 0, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{f(u_n)}{u_n}\right|$ tend vers $|f'(0)| > 1$, d'où la divergence grossière de la série par d'Alembert et l'absurdité.

$$\boxed{\text{La série converge si et seulement si } \exists p \in \mathbb{N},\, u_p = 0.}$$

b) Ici f est injective ; si $a \neq 0$, on a $u_1 = f(a) \neq f(0) = 0$ puis, par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}, u_p \neq 0$, d'où la divergence de $\sum u_n$.

$$\boxed{\text{Dans ce cas, } F \text{ est réduit à } \{0\}.}$$

c) Pour $x \neq -1$ $f(x) = \frac{2x}{1+x}$ et $f'(x) = \frac{2}{(1+x)^2}$, d'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2

Puisque $f'(0) = 2 > 1$, on est dans le cas du 3) (mais f n'est pas injective, puisque $f(0) = 0 = f(-1)$.)

• Si $a \in [0,1]$, les u_n restent sur cet intervalle stable par f. Puisque $f(u_n) - u_n = \frac{u_n(1-u_n)}{1+u_n}$, la suite est croissante majorée donc convergente.

• Si $a \in]1,+\infty[$, autre intervalle stable, la suite est décroissante minorée donc convergente.

• Si $a \leqslant -1$, alors $u_1 \geqslant 0$; nous sommes ramenés à l'un des cas précédents, y compris pour $a = -1$.

• Si $a \in]-1,0[$ alors : ou bien u_n reste sur l'intervalle, donc $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite décroissante minorée converge, ou bien u_n sort de l'intervalle et l'on est ramené à un cas précédent. Finalement :

$$\boxed{E = \mathbb{R}}$$

(Remarque : Le cas où u_n reste sur $]-1,0[$ ne peut se produire car la suite, décroissante et minorée, convergerait vers un point fixe de f situé sur $]-1,0[$, et il n'y en a pas, ou vers -1 également impossible, car u_{n+1} convergerait vers $-\infty$.)

$\sum u_n$ converge si et seulement si $\exists p, u_p = 0$, donc si $a = 0$ ou -1 ou si :

$a \neq 0$ et -1, $f(a) \neq 0$ et -1,... $f^{p-1}(a) \neq 0$ et -1, $f^p(a) = 0$ ou -1.

$f^p(a) = 0$ avec $f^{p-1}(a) \neq 0$ et -1 est impossible ; il ne reste que la possibilité $f^p(a) = -1$.

Or, si $x \neq -1$, $y = f(x)$ équivaut à $x = \frac{y}{2-y}$. Posons $g(y) = \frac{y}{2-y}$. $f^p(a) = -1$ équivaut à $a = g^p(-1)$. Résumons :

$$\boxed{F \text{ comprend } 0, -1 \text{ et les termes de la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ définie par : } v_0 = -1\,;\, v_{n+1} = \frac{v_n}{2-v_n}.}$$

Partant de $v_0 = -1$, on voit par récurrence que les v_n sont négatifs. $v_n = 2$ est donc exclu et la suite précédente est bien définie.

4°)

a) Puisque $f' < 0$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et le tableau de variations a l'aspect suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

Le cas $a = 0$ étant évident, continuons en supposant par exemple $u_0 = a > 0$ (le cas $a < 0$ est analogue).

Alors $u_1 < 0$. De plus, d'après le théorème des accroissements finis, $\exists c \in]0,a[$, $f(a) - f(0) = (a-0)f'(c)$. Puisque $f'(c) \in]-1,0[$, on a $0 < -u_1 < a$ puis de même $0 < u_2 < -u_1 < u_0$ et, par récurrence :

$u_{2n-1} < u_{2n+1} < 0 < u_{2n+2} < u_{2n}$. La suite des termes de rang pair, décroissante et minorée, admet une limite $l \geqslant 0$. De même, $u_{2n+1} \xrightarrow[n\infty]{} l' \leqslant 0$. f étant continue en l, on a $l' = f(l)$. Si $l \neq 0$, les accroissements finis montrent à nouveau que $0 < -l' < l$. De même $0 < l < -l' < l$, qui est absurde.

Les suites u_{2n} et u_{2n+1} convergent donc toutes deux vers 0 donc u_n converge vers 0.

On pouvait aussi montrer que $f \circ f$ n'admet que 0 comme point fixe, en étudiant la dérivée de $f \circ f(x) - x$.

Concluons :

$$\boxed{E = \mathbb{R}}$$

On a vu que $|u_{n+1}| \leqslant |u_n|$, que $u_n \to 0$ et que les u_n sont alternativement positifs et négatifs.

$\sum u_n$ vérifie donc le critère des séries alternées ; c'est une série convergente, et ceci pour tout a ; donc :

$$\boxed{F = \mathbb{R}}$$

b1) $f(x) = -\operatorname{th} x$: f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = -\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. Donc $f'(0) = -1$ et, pour $x \neq 0$, $f'(x) \in]-1, 0[$. On peut donc appliquer a) :

$$\boxed{E = F = \mathbb{R}}$$

b2) $f(x) = -\operatorname{sh} x$, donc $f'(x) = -\operatorname{ch} x$.

- Si $a = 0$, u_n est constante et nulle, donc $a \in E$ et $a \in F$.
- Si $a \neq 0$, par exemple si $a > 0$, reprenons la démarche de a). Cette fois $f'(c) < -1$ et on arrive par récurrence à $u_{2n+1} < u_{2n-1} < 0 < u_{2n+2} < u_{2n}$: u_{2n+1}, décroissante strictement négative et u_{2n}, croissante strictement positive, ne peuvent converger vers la même limite. Donc a n'appartient ni à E, ni à F. Résumons :

$$\boxed{E = F = \{0\}.}$$

Partie III

1°)

a) Encore les accroissements finis ! En dehors du cas particulier $a = 0$, on a encore $u_{n+1} = u_n f'(c)$ avec $f'(c) \in]0, 1[$. Suivant que $a > 0$ ou $a < 0$, la suite est décroissante minorée ou croissante majorée. Dans les deux cas, elle converge.

$$\boxed{E = \mathbb{R}}$$

De plus f est continue sur $\mathbb{R}$. u_n converge donc vers un point fixe de f. Or $(f(x) - x)' = f'(x) - 1 < 0$ sauf pour $x = 0$; $f(x) - x$ strictement décroissante ne peut s'annuler plusieurs fois ; 0 est le seul point fixe de f, donc, quel que soit a, la limite de la suite est 0.

b) Si $a = 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite constante nulle ; la série entière $\sum u_n x^n$ converge donc pour tout x.
Si $a \neq 0$, $u_{n+1} = u_n f'(c)$ prouve qu'aucun des u_n n'est nul.
Pour $x \neq 0$, on peut donc étudier $\left|\dfrac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n}\right| = \left|x \dfrac{f(u_n)}{u_n}\right|$, qui converge, puisque u_n converge vers 0, vers $|x f'(0)| = |x|$.
Il est sûr que pour $x \in]-1, 1[$ (y compris pour $x = 0$), $\sum u_n x^n$ converge absolument et que pour $|x| > 1$ cette série diverge grossièrement. Donc :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum u_n x^n \text{ est 1 si } a \neq 0, \text{ infini si } a = 0.}$$

2°)

a) Puisque $a > 0$, on est dans le cas où u_n converge vers 0 en étant > 0 et strictement décroissante. D'après la formule de Taylor-Young, on peut écrire :

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j + o(x^k) = x + \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k (1 + \varepsilon(x)).$$

Pour x suffisamment voisin de 0, $f(x) - x$ est donc du signe de $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Mais on a vu que $f(x) - x$ est strictement décroissante, nulle en 0. Donc, pour $x \neq 0$, $f(x) - x$ est du signe contraire de x. $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est donc, pour x suffisamment voisin de 0 mais non nul, positif ou négatif, du signe contraire de x. Cela nécessite :

$$\boxed{f^{(k)}(0) < 0 \text{ et } k \text{ est impair.}}$$

b) D'après a), on a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} (u_n)^k$. On peut donc appliquer le I.2 à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\alpha = k$ et $m = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

$$\boxed{\text{L'unique } \beta \text{ qui convient est } \beta_0 = k - 1.}$$

c) Toujours d'après I.2,

$$\boxed{u_n \underset{n\infty}{\sim} \left[(1 - k)\frac{f^{(k)}(0)}{k!} n\right]^{\frac{1}{1-k}}.}$$

d) Le rayon de convergence est 1, donc, déjà, on a $]-1, 1[\subset G \subset [-1, 1]$. D'après I.2, $\sum u_n$ converge si et seulement si $k < 2$. Or, ici, k est un entier impair > 1 donc $k \geqslant 3$ donc $1 \notin G$.
Par contre $\sum u_n (-1)^n$ converge (critère des séries alternées) donc $-1 \in G$. Finalement

$$\boxed{G = [-1, 1[.}$$

e) A fortiori, $\sum u_n x^n$ vérifie le critère des séries alternées pour tout $x \in [-1, 0]$. On sait que, pour une telle série, le reste d'ordre n est majoré, en valeur absolue, par le premier terme de ce reste. Donc :

$$\forall x \in [-1, 0], \left|Z(x) - \sum_{p=0}^{n} u_p x^p\right| = \left|\sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p x^p\right| \leqslant |u_{n+1} x^{n+1}| \leqslant |u_{n+1}|,$$

suite indépendante de x et qui converge vers 0, donc :

$$\boxed{\text{La convergence de } \sum_{p=0}^{n} u_p x^p \text{ vers } Z(x) \text{ est uniforme sur } [-1, 0].}$$

3°) Application : $f(x) = \operatorname{th} x$.

a) f est C^∞ sur $\mathbb{R}$. On trouve : $f(0) = 0$; $f'(0) = 1$; $\forall x \neq 0, f'(x) \in]0, 1[$; $f''(0) = 0$; $f'''(0) = -2$.
On peut donc appliquer 2°c) :

$$\boxed{u_n \underset{n\infty}{\sim} \left[\tfrac{2}{3} n\right]^{-\frac{1}{2}}.}$$

b) Soit $A > 0$ fixé. $\sum u_n$ diverge donc : $\exists n_0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0} u_k \geqslant A + 1$. Par ailleurs $\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0} u_k x^k \xrightarrow[x \to 1-]{} \sum_{k=0}^{n_0} u_k$ (fonction polynôme continue). Donc : $\exists x_0 \in [0, 1[$ tel que : $\forall x \in [x_0, 1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0} u_k x^k \geqslant \sum_{k=0}^{n_0} u_k - 1 \geqslant A$.
A fortiori : $\forall x \in [x_0, 1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k \geqslant A$. Donc

$$\boxed{Z(x) \xrightarrow[x \to 1-]{} +\infty.}$$

Supposons connu le résultat suivant : $\forall x \in]-1, 1[, \ln(1 - x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

Soit $A > 0$ fixé. $\displaystyle\lim_{n\infty} n u_n = +\infty$ donc $\exists N, \forall n \geqslant N, u_n > \dfrac{2A}{n}$. Pour $x \in]0, 1[$, cela donne en sommant : $\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} u_n x^n > 2A \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. On a donc : $Z(x) > 2A \left[-\ln(1 - x) - \displaystyle\sum_{1}^{N-1} \frac{x^n}{n}\right] + \sum_{0}^{N-1} u_n x^n$. Donc

$$\frac{Z(x)}{-\ln(1 - x)} > 2A \left[1 + \frac{\sum_{1}^{N-1} \frac{x^n}{n}}{\ln(1 - x)}\right] + \frac{\sum_{0}^{N-1} u_n x^n}{-\ln(1 - x)},$$

qui tend vers $2A$ quand $x \to 1-$ et qui est donc strictement supérieur à A pour x suffisamment proche de 1 : $\exists x_0, \forall x \in [x_0, 1[, \dfrac{Z(x)}{-\ln(1 - x)} > A$.

$$\boxed{\frac{Z(x)}{-\ln(1 - x)} \xrightarrow[x \to 1-]{} +\infty.}$$

***

Mathématiques 1

Durée : 4 heures

La précision des raisonnements et la qualité de la présentation seront des éléments importants dans l'appréciation des copies.
La partie III est indépendante des parties I et II.

Notations

Si (x_n) est une suite réelle on désignera par $\prod_{k=0}^{+\infty} x_k$ la limite, lorsqu'elle existe, de $\prod_{k=0}^{n} x_k$ quand n tend vers $+\infty$.
On notera $\ln x$ le logarithme népérien de x et $\exp$ la fonction : $x \mapsto e^x$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
On rappelle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$ et $0! = 1$.
Dans tout le problème u_n désigne, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par

$$u_n(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Lorsque la série de terme général $u_n(x)$ converge on note $S(x)$ sa somme : $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

Partie I

1. Quel est l'ensemble de définition de S ? On notera D cet ensemble. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.
2. Calculer, pour $x \in D$, $S(x+1) - S(x)$.
3. Dans la suite, la fonction T est définie sur D par $T(x) = \exp[S(x)]$.
   a. Montrer que T vérifie les propriétés suivantes :
   (i) $T(0) = 1$.
   (ii) $\forall x \in D \quad T(x+1) = (x+1)T(x)$.
   b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad T(n) = n!$.
4. Montrer que : $\forall x \in D \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad T(x+n) = T(x) \prod_{k=1}^{n} (x+k)$.

5. *a.* Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{k+n}\right)\right] = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(n+1)$.

   b. On pose : $R_n(x) = S(x+n) - S(n) - x\ln(n+1)$.
Montrer que $R_n(x)$ est le reste d'ordre n d'une série convergente (utiliser 5.a.). En déduire que :

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0.$$

   c. En déduire l'existence d'une fonction φ_n de D dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$(iii) \quad \forall x \in D \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad T(x+n) = n!(n+1)^x \varphi_n(x)$$

avec $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = 1$ pour tout x de D.

6. *a.* Montrer que la série de terme général $\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ converge. On note $\gamma = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right]$.

   b. Montrer que : $\forall x \in D \quad \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{1-x}(k+1)^x}{x+k} = e^{-\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{k}}}{1 + \frac{x}{k}}$.

   c. En déduire que : $\forall x \in D \quad T(x) = e^{-\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{k}}}{1 + \frac{x}{k}}$.

Partie II

On a vu dans la partie I que T vérifie les propriétés (i), (ii), (iii).
On désigne, *dans cette partie*, par T_1 une fonction continue dont l'ensemble de définition est D et vérifiant ces mêmes propriétés (i), (ii), (iii).

Dans l'énoncé initial, cette fonction s'appelait T, comme la première, ce qui prêtait à confusion.

Le but de cette partie est de montrer que : $\forall x \in D \quad T_1(x) = T(x)$.

1. Montrer que : $\forall x \in D \quad T_1(x+n) = (x+1)(x+2)\ldots(x+n)T_1(x)$.
2. En déduire que T_1 et φ_n sont strictement positives sur D et que :

$$\forall x \in D \quad \ln T_1(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right] + r_n(x)$$

avec $\lim_{n \to +\infty} r_n(x) = 0$ pour tout x de D.

3. En déduire que : $\forall x \in D \quad T_1(x) = T(x)$.

Partie III

Si les fonctions Θ_n sont définies de l'intervalle I vers $\mathbb{R}$ et si l'on peut trouver une suite w_n indépendante de t et convergeant vers 0 telle que pour tout t dans I on ait $|\Theta_n(t)| \leqslant w_n$, on dit que la suite de fonctions Θ_n converge uniformément vers la fonction nulle sur l'intervalle I.

Dans cette partie, on prend $x \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$ et on définit $\Psi_{n,x}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\Psi_{n,x}(t) = \begin{cases} t^x e^{-t} & \text{si } t > n \\ t^x \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] & \text{si } t \in [0, n]. \end{cases}$$

1. Etudier le signe de $e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ sur $[0, n]$ et en déduire le signe de $\Psi_{n,x}$ sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $\lim_{n \to +\infty} \Psi_{n,x}(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.
2. On prend dans cette question $x = 0$ et $n > 1$.
   a. On pose : $g_n(t) = (n-1)\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) + t$. Etudier le signe de g_n sur $[0, n]$.
   b. Montrer que : $\exists!\, a_n \in]1, n[: \quad \Psi'_{n,0}(a_n) = 0$.
   c. Donner un équivalent de $g_n(3)$ au voisinage de $+\infty$ et montrer que :
   $$\exists N \in \mathbb{N}^* \quad : \quad \forall n \geqslant N \quad 1 < a_n < 3.$$
   d. Étudier la convergence uniforme de la suite des fonctions $\Psi_{n,0}$, $n \in \mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. Étudier, à l'aide de III.1, le signe de $\Psi'_{n,x}$ sur $[0, x]$ pour $x < n$.
4. On prend dans cette question $x \geqslant 1$ et $n > x$ et on pose pour $t \in]x, n[$:
   $$h_n(t) = \ln\left[t - x + \frac{tx}{n}\right] - \ln(t - x) + g_n(t).$$
   a. Pour $t \in]x, n[$ calculer $h'_n(t)$ et montrer que : $\exists!\, b_n \in]x, n[: \quad h_n(b_n) = 0$.
   b. En déduire le signe de $\Psi'_{n,x}$ sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{n\}$.
   c. Donner le tableau des variations de $\Psi_{n,x}$ sur $\mathbb{R}_+$ et montrer que
   $$\exists K \in \mathbb{N} : \quad \Psi_{n,x}(b_n) \leqslant K \frac{b_n^{x+2}}{n(b_n - x)}.$$
   d. Donner un équivalent simple de $h_n(x+1)$ et de $h_n(x+3)$ quand n tend vers $+\infty$.
   e. En déduire que, x étant fixé, la suite des fonctions $\Psi_{n,x}$, $n \in \mathbb{N}^*$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

5. On prend dans cette question : $0 < x < 1$.

a. Comparer, pour $t \in [0,1]$, $\Psi_{n,x}(t)$ et $\Psi_{n,0}(t)$.

b. Comparer pour $t \in [1,+\infty[$, $\Psi_{n,x}(t)$ et $\Psi_{n,1}(t)$.

c. En déduire que, x étant fixé, la suite des fonctions $\Psi_{n,x}, n \in \mathbb{N}^*$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Partie IV

Les notations sont celles des parties I et III. En particulier : $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Etudier la continuité et l'intégrabilité de la fonction $\Psi_{n,x}$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

> $\Psi_{n,x}$ étant continue positive, dire qu'elle est intégrable sur $[0,+\infty[$ signifie que $\int_0^X \Psi_{n,x}(t)dt$ admet une limite finie quand $X \to +\infty$, limite qu'on note $\int_0^{+\infty} \Psi_{n,x}(t)dt$.
> Les 3/2 pourront admettre qu'ici cette limite existe. On remarquera que $\Phi(Y) = \int_Y^{+\infty} \Psi_{n,x}(t)dt$ existe de façon analogue pour tout $Y > 0$ et que la relation de Chasles $\int_0^{+\infty} = \int_0^Y + \int_Y^{+\infty}$ implique que $\Phi(Y) \xrightarrow[Y \to +\infty]{} 0$.

2. *a.* Calculer $\int_0^n t^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$ et exprimer le résultat sous la forme : $D_n(x) \prod_{k=1}^{n+1} \frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\frac{x}{k}}$ où D_n est une fonction à préciser.

b. Quelle est la limite de $D_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$? (On pourra utiliser I.5.a et I.6.a)

c. En déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^n t^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$.

Exprimer le résultat à l'aide de la fonction T de la partie I.

3. Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \Psi_{n,x}(t)dt = 0$.

4. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad T(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$.

***

Partie I

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > -1$, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ existent, donc $u_n(x)$ est bien défini.

De plus $u_n(x) = \left(\frac{x}{n} - \frac{x}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ donc, même pour $x = 0$ ou 1, on a $u_n(x) \underset{n\infty}{\sim} \frac{x^2 - x}{2n^2}$, d'où la convergence (absolue) de $\sum u_n(x)$.

$$\boxed{\text{L'ensemble de définition } D \text{ de } S \text{ est l'intervalle }]-1,+\infty[.}$$

Puisque, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n(0) = u_n(1) = 0$, $\boxed{S(0) \text{ et } S(1) \text{ sont nuls.}}$

2. Pour $x > -1$, on a

$$\begin{aligned} u_n(x+1) - u_n(x) &= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x+1}{n}\right) \\ &= \ln(n+1) - \ln n + \ln(x+n) - \ln(x+n+1), \text{ donc, après télescopage :} \\ \sum_{n=1}^{N}(u_n(x+1) - u_n(x)) &= \ln(N+1) + \ln(x+1) - \ln(x+N+1) = \ln(x+1) + \ln\frac{N+1}{x+N+1}. \end{aligned}$$

En passant à la limite pour $N \to +\infty$, on trouve d'un côté $S(x+1) - S(x)$ et de l'autre côté $\ln(x+1)$. Donc :

$$\boxed{\text{Pour } x \in D,\ S(x+1) - S(x) = \ln(1+x).}$$

3. *a.* $S(0) = 0$ donc $\boxed{T(0) = 1.}$

$\forall x > -1$, $T(x+1) = \exp(S(x+1)) = \exp(S(x) + \ln(x+1)) = (x+1)\exp(S(x))$ donc

$$\boxed{\forall x \in D \quad T(x+1) = (x+1)T(x).}$$

b. En particulier, pour n entier, $T(n+1) = (n+1)T(n)$, d'où, par récurrence, à partir de $T(0) = 1$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad T(n) = n!.}$$

4. Pour x fixé dans D, l'égalité demandée est vraie pour $n = 1$ d'après 3.a. Supposons cette égalité vraie au rang n. Alors : $T(x+n+1) = (x+n+1)T(x+n) = (x+n+1)T(x)\prod_{k=1}^{n}(x+k) = T(x)\prod_{k=1}^{n+1}(x+k)$ ce qui prouve l'égalité au rang $n+1$ et termine la récurrence.

$$\boxed{\forall x \in D \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad T(x+n) = T(x)\prod_{k=1}^{n}(x+k).}$$

5. *a.* $\forall k \geqslant 1$, $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n+k}\right) = \ln(k+1) - \ln k + \ln(k+n) - \ln(n+k+1)$ d'où, après télescopage :

$$\sum_{k=1}^{N}\left[\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n+k}\right)\right] = \ln(N+1) + \ln(1+n) - \ln(n+N+1) = \ln\frac{N+1}{n+N+1} + \ln(n+1),$$

qui tend vers $\ln(n+1)$ quand $N \to +\infty$. Donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{k+n}\right)\right] \text{ converge et est égal à } \ln(n+1), \text{ ou encore } \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right),}$$

car cette dernière somme est égale à $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$, qui se réduit à $\ln(n+1)$ après télescopage.

b. Pour $x > -1$ et $k \geqslant 1$, on a
$u_k(x+n) - u_k(n) = x\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{x+n}{k}\right) + \ln\left(1+\frac{n}{k}\right) = x\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n+k}\right)$
donc

$$\begin{aligned}
S(x+n) - S(n) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n+k}\right)\right]\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - x\ln\left(1+\frac{1}{n+k}\right) + u_{n+k}(x)\right]\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - x\ln\left(1+\frac{1}{n+k}\right)\right] + \sum_{k=1}^{+\infty} u_{n+k}(x).
\end{aligned}$$

(découpage licite de la somme d'une série convergente en deux sommes de séries convergentes).

En utilisant **5.a.** : $S(x+n) - S(n) = x\ln(n+1) + \sum_{k=1}^{+\infty} u_{n+k}(x)$. Donc $R_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_{n+k}(x)$:

$$\boxed{R_n(x) \text{ est le reste d'ordre } n : \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \text{ d'une série convergente. Donc (cours) } \lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0.}$$

c. Donc $\exp(S(x+n)).\exp(-S(n)).\exp(-x\ln(n+1)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, ou $\frac{T(x+n)}{T(n)(n+1)^x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Donc $\frac{T(x+n)}{n!(n+1)^x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Posons donc, pour $x > -1$, $\varphi_n(x) = \frac{T(x+n)}{n!(n+1)^x}$. On a bien

$$\boxed{(iii)\quad \forall x \in D \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad T(x+n) = n!(n+1)^x \varphi_n(x), \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = 1.}$$

6\. *a.* Un développement limité donne : $\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2k^2}$, ce qui prouve que

$$\boxed{\text{la série de terme général } \frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \text{ converge (absolument).}}$$

b. et *c.*

$$\begin{aligned}
\forall x \in D \quad \ln\left[\frac{k^{1-x}(k+1)^x}{x+k}\right] &= (1-x)\ln k + x\ln(k+1) - \ln(x+k)\\
&= x\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) = u_k(x).
\end{aligned}$$

Donc $\prod_{k=1}^{n} \frac{k^{1-x}(k+1)^x}{x+k}$ est égal à $\exp\left(\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right)$, qui converge, quand $n \to +\infty$, vers $\exp(S(x)) = T(x)$, ce qui prouve déjà l'existence du premier produit infini. D'autre part

$$\begin{aligned}
e^{-\gamma x}\prod_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\frac{x}{k}} &= \exp\left[-\gamma x + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{k} - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)\right]\\
&= \exp\left[x\left(-\gamma + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)\right]
\end{aligned}$$

Quand $n \to +\infty$, $-\gamma + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$ tend vers 0 par définition de γ et
$\sum_{k=1}^{n}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ converge vers $S(x)$. Donc

$-\gamma x + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{k} - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)$ converge vers $S(x)$ et son exponentielle vers $T(x)$, d'où l'existence du produit infini $e^{-\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\frac{x}{k}}$ et sa valeur $T(x)$. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in D \quad \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{1-x}(k+1)^x}{x+k} = T(x) = e^{-\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\frac{x}{k}}.}$$

Partie II

On veut donc montrer que les propriétés (i), (ii), (iii) caractérisent la fonction T parmi les fonctions continues sur $D =]-1, +\infty[$.
Soit donc T_1 une fonction continue sur D et vérifiant ces mêmes propriétés (i), (ii), (iii).

1. (ii) donne, par récurrence immédiate :

$$\boxed{\forall x \in D \quad T_1(x+n) = (x+1)(x+2)\ldots(x+n)T_1(x).}$$

2. Soit x fixé dans D. Comme $\lim_{n\infty} \varphi_n(x) = 1$, il existe n_0 (dépendant de x) tel que : $\forall n \geqslant n_0, \varphi_n(x) > 0$.
On a donc, pour $n \geqslant n_0$, $T_1(x+n) > 0$ d'après (iii). De plus, puisque $x > -1$, $(x+1), (x+2), \ldots, (x+n)$ sont tous positifs.
Donc, en utilisant II.1.,

$$\boxed{\forall x \in D, \ T_1(x) > 0.}$$

En reprenant (iii), puisque $T_1(x+n) > 0$, on voit que

$$\boxed{\forall x \in D, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \varphi_n(x) > 0.}$$

$\ln(\varphi_n(x))$ est donc défini pour tout $x \in D$ et, d'après (iii),
$\ln(\varphi_n(x) = \ln(T_1(x+n))) - \ln(n!) - x\ln(n+1)$ donc, d'après **II.1** :
$\ln(\varphi_n(x) = \ln(T_1(x)) + \sum_{k=1}^{n} \ln(k+x) - \sum_{k=1}^{n} \ln k - x\ln(n+1)$.
Après télescopage, $\sum_{k=1}^{n} x\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} x\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = x\ln(n+1)$,
et d'autre part $\ln(k+x) - \ln k = \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$, donc
$\ln(\varphi_n(x) = \ln(T_1(x)) + \sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - x\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]$.
Donc, en appelant $r_n(x)$ cette fonction $\ln(\varphi_n(x))$, on a, puisque la suite $\varphi_n(x)$ converge vers 1 :

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall x \in D \quad \ln(T_1(x)) = \sum_{k=1}^{n}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right] + r_n(x)\\ \text{avec } \lim_{n\to+\infty} r_n(x) = 0 \text{ pour tout } x \text{ de } D.\end{array}}$$

3. Quand $n \to +\infty$, $\sum_{k=1}^{n}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right]$ tend à la fois vers $S(x)$ et vers $\ln(T_1(x))$.
Donc : $S(x) = \ln(T_1(x))$. En prenant l'exponentielle, on en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in D \quad T_1(x) = T(x).}$$

Partie III

1. On sait que : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x$, strictement pour $x \neq 0$ (par convexité de l'exponentielle).
Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, n],\ e^{-\frac{t}{n}} \geqslant 1 - \dfrac{t}{n}$.

En élevant à la puissance n cette inégalité entre nombres positifs, on obtient $e^{-t} \geqslant \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$, donc :

$$\boxed{\forall t \in [0,n],\ e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geqslant 0, \text{ donc } \Psi_{n,x} \text{ est positif sur } \mathbb{R}_+ \text{ (strictement sur }]0,+\infty[).}$$

Fixons x et t dans $\mathbb{R}_+$: $\ln\left(1 - \dfrac{t}{n}\right) \underset{n\infty}{\sim} -\dfrac{t}{n}$ donc $n \ln\left(1 - \dfrac{t}{n}\right) \xrightarrow[n\infty]{} -t$ donc
$\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n = \exp\left[n \ln\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)\right] \xrightarrow[n\infty]{} e^{-t}$ donc $t^x\left(e^{-t} - \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n\right) \xrightarrow[n\infty]{} 0.$
Or, dès que n dépasse t, on a $\Psi_{n,x}(t) = t^x\left(e^{-t} - \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n\right)$, donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \Psi_{n,x}(t) = 0 \text{ pour } t \text{ fixé dans } \mathbb{R}_+.}$$

2. *a.* g_n est dérivable sur $[0, n[$, avec $g_n'(t) = 1 - \dfrac{n-1}{n-t} = \dfrac{1-t}{n-t}$, d'où le tableau des variations de g_n :

t	0		1		a_n		n
$g_n'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	‖
$g_n(t)$	0	↗	$g_n(1)$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖

Sur $[1, n[$, g_n continue strictement décroissante de $g_n(1) > 0$ à $-\infty$ passe donc une fois et une seule par 0 : $\exists! a_n \in]1, n[, g_n(a_n) = 0$.

b. Sur $[0, n[$, $\Psi'_{n,0}(t) = -e^{-t} + \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^{n-1}$.

$\Psi'_{n,0}(t) = 0 \iff e^{-t} = \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^{n-1} \iff -t = \ln\left[\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^{n-1}\right] \iff g_n(t) = 0.$ D'après ce qui précède :

$$\boxed{\exists!\ a_n \in]1, n[:\quad \Psi'_{n,0}(a_n) = 0.}$$

c. $g_n(3) = (n-1)\ln\left(1 - \dfrac{3}{n}\right) + 3 = (n-1)\left[-\dfrac{3}{n} - \dfrac{9}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})\right] + 3 = -3 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{9}{2n} + 3 + o(\dfrac{1}{n}).$
Donc

$$\boxed{g_n(3) \underset{n\infty}{\sim} -\frac{3}{2n}.}$$

A partir d'un certain rang N, $g_n(3)$ est donc strictement négatif, ce qui implique, vu le tableau de variations, que $3 > a_n$:

$$\boxed{\exists N \in \mathbb{N}^* \quad : \quad \forall n \geqslant N \quad 1 < a_n < 3.}$$

d. Sur $[0, n[$, $\Psi'_{n,0}(t)$ est du signe de $g_n(t)$, donc positif sur $]0, a_n[$ et négatif sur $]a_n, n[$.
$\Psi_{n,0}$ est donc croissante puis décroissante sur $[0, n[$. Sur $]n, +\infty[$, $\Psi_{n,0}(t) = e^{-t}$ est décroissante.
De plus $\lim\limits_{t\to n+} \Psi_{n,0}(t) = e^{-n} = \Psi_{n,0}(n)$: $\Psi_{n,0}$ est continue en n.
Quand t décrit $[0, +\infty[$, $\Psi_{n,0}(t)$ passe donc par un maximum, obtenu pour $t = a_n$.
On a donc : $\forall t \geqslant 0,\ 0 \leqslant \Psi_{n,0}(t) \leqslant \Psi_{n,0}(a_n)$.
On voudrait bien montrer que la suite $\Psi_{n,0}(a_n)$ converge vers 0.
Pour la simplifier, on peut tirer parti du fait que $\Psi'_{n,0}(a_n) = 0$, donc $e^{-a_n} = \left(1 - \dfrac{a_n}{n}\right)^{n-1}$ donc
$\Psi_{n,0}(a_n) = e^{-a_n}\left[1 - \left(1 - \dfrac{a_n}{n}\right)\right] = \dfrac{a_n}{n}e^{-a_n} \leqslant \dfrac{a_n}{n} \leqslant \dfrac{3}{n}$ à partir du rang N.

On a donc une majoration de $|\Psi_{n,0}(t)|$, valable pour tout $t \geqslant 0$ par une suite indépendante de t et qui converge vers 0 :

$$\boxed{\text{La suite des fonctions } \Psi_{n,0}, n \in \mathbb{N}^* \text{ converge uniformément vers la fonction nulle sur } \mathbb{R}_+.}$$

3. Si $0 < t \leqslant x < n$, on a

$$\begin{aligned}\Psi'_n(t) &= xt^{x-1}\left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] + t^x\left[-e^{-t} + \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1}\right] \\ &= t^{x-1}\left[(x-t)e^{-t} + \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1}\left(t - x + \frac{xt}{n}\right)\right].\end{aligned}$$

$(x - t)$ est positif et, d'après III.1., $e^{-t} \geqslant \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)$ donc $(x - t)e^{-t} \geqslant (x - t)\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$. En reportant dans $\Psi'_n(t)$, cela donne $\Psi'_n(t) \geqslant t^{x-1}\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^{n-1} . \dfrac{t^2}{n}$. Donc :

$$\boxed{\forall t \in]0, x],\quad \Psi'_n(t) \geqslant 0.}$$

4. *a.* h_n est dérivable sur $]x, n[$, avec
$$h_n'(t) = \frac{1 + \frac{x}{n}}{t - x + \frac{xt}{n}} - \frac{1}{t-x} + \frac{1-t}{n-t} = \frac{n+x}{nt - nx + xt} - \frac{1}{t-x} + \frac{1-t}{n-t}, \quad \text{ou :}$$

$$\boxed{h_n'(t) = \frac{-x^2}{(t-x)(nt - nx + tx)} + \frac{1-t}{n-t}.}$$

Comme $1 \leqslant x < t < n$, on a $t - x$, $nt - nx + tx$ et $n - t > 0$ et $1 - t$ et $-x^2 < 0$, donc $h_n'(t) < 0$; h_n est donc strictement décroissante sur $]x, n[$.
Quand $t \to x+$, $\ln\left[t - x + \dfrac{tx}{n}\right] \to \ln\dfrac{x^2}{n}$, $\ln(t - x) \to -\infty$ et $g_n(t) \to g_n(x)$, donc $h_n(t) \to +\infty$.
De même $\lim\limits_{t\to n-} h_n(t) = -\infty$. Par application du théorème des valeurs intermédiaires à h_n continue strictement décroissante sur $]x, n[$:

$$\boxed{\exists!\ b_n \in]x, n[:\quad h_n(b_n) = 0.}$$

b. En reprenant le calcul de 3., on voit que $\Psi'_{n,x}(t)$ est, sur $]0, n[$, du signe de
$-(t - x)e^{-t} + \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^{n-1}\left(t - x + \dfrac{xt}{n}\right)$. La différence de ces quantités positives est du signe de la différence de leurs logarithmes, donc de
$t - \ln(t - x) + (n - 1)\ln\left(1 - \dfrac{t}{n}\right) + \ln\left(t - x + \dfrac{xt}{n}\right) = h_n(t)$. En utilisant *a* :

$$\boxed{\Psi'_{n,x}(t) \text{ est } > 0 \text{ sur }]x, b_n[\text{ et } < 0 \text{ sur }]b_n, n[.}$$

Pour finir cette étude de signe, rappelons que $\Psi'_{n,x}$ est $\geqslant 0$ sur $]0, x[$ et que, pour $t > n$,
$\Psi'_{n,x}(t) = t^{x-1}e^{-t}(x - t)$, négatif.

c. Comme dans **2**, il y a continuité de $\Psi_{n,x}$ en n, d'où le tableau des variations de $\Psi_{n,x}$ sur $\mathbb{R}_+$:

t	0		x		b_n		n		$+\infty$
$\Psi'_{nx}(t)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\Psi_{nx}(t)$	0	↗		↗		↘		↘	0

Là aussi, on va tirer parti du fait que $\Psi'_{n,x}(b_n) = 0$ pour simplifier $\Psi_{n,x}(b_n)$: en reprenant l'expression de $\Psi'_{n,x}(t)$ trouvée au 3., cela donne $(b_n - x)e^{-b_n} = \left(1 - \dfrac{b_n}{n}\right)^{n-1}\left(b_n - x + \dfrac{xb_n}{n}\right)$, donc :

$$\begin{aligned}\Psi_{n,x}(b_n) &= b_n^x\left[e^{-b_n}-\left(1-\frac{b_n}{n}\right)^n\right]=b_n^x\left(1-\frac{b_n}{n}\right)^{n-1}\left[\frac{b_n-x+\frac{xb_n}{n}}{b_n-x}-1+\frac{b_n}{n}\right]\\ &= \frac{b_n^{x+1}}{n}\left(1-\frac{b_n}{n}\right)^{n-1}\left[\frac{x+b_n-x}{n(b_n-x)}\right]=\frac{b_n^{x+2}}{n(b_n-x)}\left(1-\frac{b_n}{n}\right)^{n-1}\leqslant\frac{b_n^{x+2}}{n(b_n-x)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En prenant } K=1, \text{ on a : } \quad \Psi_{n,x}(b_n)\leqslant K\frac{b_n^{x+2}}{n(b_n-x)}.}$$

d.

$$\begin{aligned}h_n(x+3) &= \ln\left(3+\frac{x(x+3)}{n}\right)-\ln 3+(n-1)\ln\left(1-\frac{x+3}{n}\right)+x+3\\ &= \ln\left(1+\frac{x(x+3)}{3n}\right)+x+3+n\ln\left(1-\frac{x+3}{n}\right)-\ln\left(1-\frac{x+3}{n}\right)\\ &= \frac{x(x+3)}{3n}+x+3-(x+3)-\frac{(x+3)^2}{2n}+\frac{x+3}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \; h_n(x+3)\underset{n\infty}{\sim}-\frac{(x+3)^2}{6n} \;\text{ et, de façon analogue, }\; h_n(x+1)\underset{n\infty}{\sim}\frac{(x+1)^2}{2n}.}$$

e. A partir d'un certain rang N on a donc $h_n(x+1)>0$ et $h_n(x+3)<0$, donc $x+1<b_n<x+3$ donc $1<b_n-x$ et $b_n<x+3$ donc $\dfrac{1}{b_n-x}<1$ et $(b_n)^{x+2}<(x+3)^{x+2}$ donc

$\forall n>N,\ \forall t\geqslant 0,\ 0\leqslant\Psi_{n,x}(t)\leqslant\Psi_{n,x}(b_n)\leqslant\dfrac{(x+3)^{x+2}}{n}$, suite indépendante de t et qui converge vers 0. Donc, $x\geqslant 1$ étant fixé,

$$\boxed{\text{la suite de fonctions } \Psi_{n,x}, n\in\mathbb{N}^* \text{ converge uniformément vers la fonction nulle sur } \mathbb{R}_+.}$$

5. *a.* $\Psi_{n,x}(t)=t^x\Psi_{n,0}(t)$, $\Psi_{n,0}(t)$ est positif pour tout $t\geqslant 0$ et t^x est, pour $t\in[0,1]$, défini, positif et inférieur à 1 puisque x est fixé dans $]0,1[$, donc :

$$\boxed{\text{Pour } \; t\in[0,1],\ 0\leqslant\Psi_{n,x}(t)\leqslant\Psi_{n,0}(t).}$$

b. Pour $t\in[1,+\infty[$ et toujours $0<x<1$, on a $0<t^x<t^1$, donc :

$$\boxed{\text{Pour } t\in[1,+\infty[, \text{ on a } 0\leqslant\Psi_{n,x}(t)\leqslant\Psi_{n,1}(t).}$$

c. On déduit de **2.d** et **4.e** des majorations valables pour tout $t\geqslant 0$: $\Psi_{n,0}(t)\leqslant v_n$ et $\Psi_{n,1}(t)\leqslant w_n$ où les suites v_n et w_n, indépendantes de t, convergent vers 0.
D'après **5.a** et **5.b**, on a alors, pour x fixé dans $]0,1[$: $\forall t\geqslant 0,\ 0\leqslant\Psi_{n,x}(t)\leqslant v_n+w_n$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{Si } x\in]0,1[, \text{ la suite de fonctions } \Psi_{n,x}, n\in\mathbb{N}^* \text{ converge uniformément vers la fonction nulle sur } \mathbb{R}_+.}$$

Partie IV

1. $\Psi_{n,x}$ est continue, on l'a vu, sur l'intervalle $[0,+\infty[$, notamment en n, où limite à gauche et limite à droite sont égales. Le problème de l'intégrabilité ne se pose donc qu'à cause de la borne infinie.
On remarque que, pour tout $t\geqslant 0$, on a $\Psi_{nx}(t)\leqslant t^xe^{-t}$ et donc $t^2\Psi_{nx}(t)\leqslant t^{x+2}e^{-t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ donc $0\leqslant\Psi_{nx}(t)\leqslant\dfrac{1}{t^2}$ pour $t\geqslant t_0$. De l'intégrabilité de $\dfrac{1}{t^2}$ sur $[1,+\infty[$ on déduit que

$$\boxed{\Psi_{nx} \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[.}$$

2. *a.* Dans $I_n=\displaystyle\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$, faisons le changement de variable $t=nu$.

$I_n=n^{x+1}\displaystyle\int_0^1 u^x(1-u)^n du$. Calculons $J_n=\displaystyle\int_0^1 u^x(1-u)^n du$ par récurrence. Pour $n\geqslant 2$:

$$J_n=\int_0^1 u^x(1-u)^n du=\int_0^1 u^x(1-u)(1-u)^{n-1}du=J_{n-1}-\int_0^1 u^{x+1}(1-u)^{n-1}du$$

$$\int_0^1 u^{x+1}(1-u)^{n-1}du=\left[-u^{x+1}\frac{(1-u)^n}{n}\right]_0^1+\frac{x+1}{n}\int_0^1 u^x(1-u)^n du=\frac{x+1}{n}J_n.$$

D'où la formule : $J_n=\dfrac{n}{x+n+1}J_{n-1}$. En partant de $J_0=\dfrac{1}{x+1}$ on arrive ainsi à

$$J_n=\frac{n!}{(x+1)\dots(x+n+1)}=\frac{n!}{(1+\frac{x}{1})(1+\frac{x}{2})\dots(1+\frac{x}{n+1}).(n+1)!}=\frac{1}{(n+1)\prod_{k=1}^{n+1}(1+\frac{x}{k})}$$

et $I_n=\dfrac{n^{x+1}}{n+1}\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}\frac{1}{1+\frac{x}{k}}$

$$\boxed{\text{En posant } D_n(x)=\frac{1}{n+1}n^{x+1}e^{-x\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n+1}\right)}, \text{ on a } \; I_n=D_n(x)\prod_{k=1}^{n+1}\frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\frac{x}{k}}.}$$

b. On a vu au **I.6.a** que $\gamma=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(r_n)$, où $r_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n\left[\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\ln(n+1)$ après télescopage. Dans l'expression de $D_n(x)$, on peut donc écrire $1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n+1}$ sous la forme $\gamma+\ln(n+2)+\varepsilon(n)$, où $\varepsilon(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$:

$$D_n(x)=\frac{n^{x+1}}{n+1}e^{-x(\gamma+\ln(n+2)+\varepsilon(n))}=\frac{n^{x+1}}{n+1}(n+2)^{-x}e^{-x(\gamma+\varepsilon(n))}=\frac{n}{n+1}\left(\frac{n}{n+2}\right)^x e^{-x(\gamma+\varepsilon(n))}$$

donc

$$\boxed{\text{Quand } n \text{ tend vers } +\infty,\ D_n(x) \text{ tend vers } e^{-\gamma x}.}$$

c. D'après **I.6.c.**, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n+1}\frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\frac{x}{k}}=T(x)e^{\gamma x}$, donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt=T(x)}$

3. Soit $\varepsilon>0$ imposé. Comme t^xe^{-t} est intégrable sur $[1,+\infty[$: $\exists A>1,\ \displaystyle\int_A^{+\infty}t^xe^{-t}dt<\frac{\varepsilon}{2}$.

Puisque $\Psi_{nx}(t)\leqslant t^xe^{-t}$, on a a fortiori $\displaystyle\int_A^{+\infty}\Psi_{nx}(t)dt<\frac{\varepsilon}{2}$.

Sur $[0,+\infty[$, on a vu une majoration $\Psi_{nx}(t)\leqslant r_n$, où la suite r_n, indépendante de t, converge vers 0. Donc $\displaystyle\int_0^A\Psi_{nx}(t)dt\leqslant Ar_n$ devient inférieur à $\dfrac{\varepsilon}{2}$ pour $n\geqslant n_0$. Pour $n\geqslant n_0$, on a donc $0\leqslant\displaystyle\int_0^{+\infty}\Psi_{nx}(t)dt\leqslant\varepsilon$.

Cela prouve que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\Psi_{n,x}(t)dt=0.}$

4. En revenant à la définition de Ψ_{nx} : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\Psi_{nx}(t)dt=\int_0^{+\infty}t^xe^{-t}dt-\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt.$

En passant à la limite pour $n\to+\infty$, cela donne : $0=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^xe^{-t}dt-T(x)$, donc :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+\quad T(x)=\int_0^{+\infty}t^xe^{-t}dt.}$$

Cette fonction T n'était donc autre que la fonction Γ !

***

Étant donnée une suite réelle (a_n), on associe à tout couple (u_0, u_1) de nombres réels la suite réelle (u_n) définie à partir de ces deux valeurs initiales u_0 et u_1 par la relation $(\mathfrak{R})$:

$$u_{n+1} = u_n + a_{n-1}u_{n-1} \quad \text{où} \quad n \geqslant 1$$

Partie I - Étude de la convergence de la suite (u_n)

I.A - On suppose dans la sous partie I.A que la suite (a_n) est à termes positifs et que $u_0 \geqslant 0$ et $u_1 > 0$.

I.A.1) Étudier, pour $n \geqslant 1$, le sens de variation de la suite (u_n).

I.A.2) Établir, pour $n \geqslant 2$, l'inégalité $u_{n+1} \leqslant u_n \exp(a_{n-1})$.
En déduire que si la série Σa_n converge, alors la suite (u_n) converge aussi.

I.A.3) Établir réciproquement que si la suite (u_n) converge, alors la série Σa_n est convergente.

I.B - Dans la sous partie I.B, on suppose la série Σa_n absolument convergente et l'on considère la suite (v_n) définie par $v_0 = |u_0|$, $v_1 = |u_1|$ et, pour $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = v_n + |a_{n-1}|\, v_{n-1}$.

I.B.1) Comparer $|u_n|$ et v_n.

I.B.2) Étudier la convergence absolue de la série $\Sigma(u_{n+1} - u_n)$ et la convergence de la suite (u_n).

I.C - On suppose dans la question I.C que $a_n = a^n$, a étant un réel de l'intervalle $]0, 1[$, et que la limite L de la suite (u_n) est non nulle. Déterminer un équivalent de $u_{k+1} - u_k$ et en déduire un équivalent de $L - u_n$ en interprétant $L - u_n$ comme reste d'ordre n de la série $\Sigma(u_{k+1} - u_k)$ (on citera précisément le théorème utilisé).

I.D - On suppose dans la sous partie I.D que

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

et que la limite L de la suite (u_n) est non nulle.

I.D.1) Prouver que $u_{k+1} - u_k$ est équivalent à

$$L\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2}$$

et en déduire que $L - u_n$ est équivalent à $\dfrac{L}{n}$.

I.D.2) On définit la suite (ε_n), en posant pour $n \geqslant 1$

$$u_n = L - \frac{L}{n} + \varepsilon_n$$

Déterminer de même un équivalent de $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$, puis de ε_n, et en déduire le développement limité à l'ordre 2 de u_n par rapport à $\dfrac{1}{n}$.

Partie II - Étude des suites (u_n) de limite nulle

Dans toute cette partie, on suppose les a_n strictement positifs pour tout entier naturel n et la série Σa_n convergente. Toute suite (u_n) de premiers termes u_0 et u_1 et définie par la relation $(\mathfrak{R})$ est donc convergente. On note $L(u_0, u_1)$ sa limite.

II.A - Montrer que l'application

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (u_0, u_1) \mapsto L(u_0, u_1)$$

est linéaire.
Dans toute la suite de cette partie, on supposera le couple (u_0, u_1) distinct du couple $(0, 0)$.

II.B - On note N le noyau de l'application linéaire L.

II.B.1) Montrer que s'il existe un indice $m \in \mathbb{N}$ tel que $u_m = 0$, alors la limite $L(u_0, u_1)$ de la suite (u_n) est non nulle.

II.B.2) Déterminer la dimension du sous-espace N.

II.C - On dira que la suite (u_n) est alternée si $u_n u_{n+1} < 0$ pour tout indice n.

II.C.1) Montrer que le couple de réels (u_0, u_1) est dans N si et seulement si la suite (u_n) de premiers termes u_0 et u_1 est alternée.

II.C.2) Le rapport $r_0 = -\dfrac{u_1}{u_0}$ dépend-t-il de l'élément (u_0, u_1) choisi dans $N\backslash\{0,0\}$?

II.D - On suppose dans cette question que le couple (u_0, u_1) appartient à N, donc que la suite (u_n) est alternée. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$r_n = -\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

II.D.1) Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$r_n = -1 + \frac{a_{n-1}}{r_{n-1}} \quad \text{et} \quad 0 < r_n < a_n.$$

II.D.2) En déduire que la suite (r_n) converge vers une limite que l'on précisera.

II.D.3) Étudier enfin la convergence des séries Σr_n, Σu_n et $\Sigma |u_n|$.

Partie III - Application à la résolution d'une équation différentielle

Les 3/2 peuvent laisser complètement de côté cette partie et passer directement à la partie IV, où l'on reprend l'idée générale du problème. Les deux parties sont complètement indépendantes.

On considère dans cette partie l'équation différentielle (E) :

$$(x-1)y'' + 2y' + y = 0$$

III.A - Déterminer les solutions de (E) développables en série entière pour $|x| < 1$, puis montrer que toutes les solutions de (E) sur $]-1, +1[$ sont développables en série entière sur cet intervalle.

III.B - Montrer que, parmi ces solutions, il existe une droite vectorielle de solutions développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

III.C - Soit f une solution de (E) développable en série entière sur $]-1, +1[$, mais pas sur $\mathbb{R}$. En utilisant les résultats de I.D, montrer que f admet pour développement asymptotique quand x tend vers 1 à gauche :

$$f(x) = \frac{\mathrm{L}}{1-x} + \mathrm{L}\ln(1-x) + g(x)$$

où L est un réel non nul et g une fonction admettant une limite finie lorsque x tend vers 1 à gauche.

Partie IV - Étude du noyau N de l'application L

Dans toute cette partie, on suppose les a_n strictement positifs pour tout indice n et la série Σa_n convergente. Pour tout entier naturel n, on considère les fonctions

$$f_n : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[, \qquad x \mapsto f_n(x) = \frac{a_n}{1+x}$$

$$g_n = f_0 \circ f_1 \circ \cdots \circ f_n$$

On pose $p_n = g_n(0)$.
Par ailleurs r_0 est l'unique réel tel que, pour tout u_1 non nul, le couple $(-r_0 u_1, u_1)$ est élément de N (cf II.D).

IV.A - Établir que f_n et g_n sont monotones, dérivables, et que, pour $x \geqslant 0$,

$$|g_n'(x)| \leqslant a_0 a_1 \cdots a_n$$

En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $|p_n - p_{n-1}| \leqslant a_0 a_1 \cdots a_n$.

IV.B - Établir que, pour tout entier $n \geqslant 1$, r_0 est compris entre p_{n-1} et p_n. En déduire que r_0 est limite de la suite (p_n).

IV.C - La suite (a_n) et un réel $\varepsilon > 0$ étant donnés, écrire en français ou dans un langage de programmation un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée à moins de ε près de r_0.

IV.D - Déterminer le nombre r_0 à 10^{-5} près lorsque

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

***

CENTRALE - SUPÉLEC 1997

Mathématiques 1

Filière MP

CORRIGÉ

Partie I - Étude de la convergence de la suite (u_n)

I.A.1) u_0 et u_1 sont positifs. Si l'on suppose qu'il en est de même de tous les u_k de $k = 0$ jusqu'à $k = n \geqslant 1$, alors la formule $u_{n+1} = u_n + a_{n-1}u_{n-1}$ prouve qu'il en est de même de u_{n+1}. On a ainsi prouvé par récurrence que tous les u_n sont positifs.
Ensuite, pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = a_{n-1}u_{n-1}$ est donc positif. Donc :

$$\boxed{\text{La suite est croissante à partir de } n = 1.}$$

I.A.2) Pour tout réel x, on a $\exp(x) = 1 + x + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$, donc pour $x \geqslant 0$, on a $1 + x \leqslant \exp(x)$. (on pouvait aussi utiliser la convexité de la fonction exponentielle.)
Pour $n \geqslant 2$, on a $u_{n-1} \leqslant u_n$ donc $u_{n+1} = u_n + a_{n-1}u_{n-1} \leqslant u_n + a_{n-1}u_n = u_n(1 + a_{n-1})$. Donc :

$$\boxed{\text{Pour } n \geqslant 2, \text{ on a } u_{n+1} \leqslant u_n \exp(a_{n-1}).}$$

On a donc, pour $n \geqslant 3$,

$$u_n \leqslant u_{n-1}\exp(a_{n-2}) \leqslant u_{n-2}\exp(a_{n-2} + a_{n-3}) \leqslant \ldots \leqslant u_2 \exp\left(\sum_{k=1}^{n-2} a_k\right)$$

Puisque la série de terme général a_n est convergente à termes positifs, on peut majorer la somme partielle $\sum_{k=1}^{n-2} a_k$ par la somme infinie $S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$. A partir du rang 2, la suite de terme général u_n est donc majorée par $u_2\exp(S)$. Comme cette suite est croissante,

$$\boxed{\text{cette suite } (u_n) \text{ est convergente.}}$$

I.A.3) Pour $n \geqslant 1$, on a $u_{n+2} - u_{n+1} = a_n u_n \geqslant a_n u_1$. Comme $u_1 > 0$ on a : $a_n \leqslant \frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_1}$. Or la suite de terme général u_n converge, donc la série télescopique de terme général $u_{n+2} - u_{n+1}$ converge et la série de terme général $\frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_1}$ aussi. Par majoration (valable à partir du rang 1), la série à terme général positif a_n converge aussi. Donc :

$$\boxed{\text{Si la suite } (u_n) \text{ converge, la série } \Sigma a_n \text{ converge.}}$$

I.B -

I.B.1) On a $|u_k| \leqslant v_k$ pour $k = 0$ et 1. Si l'on suppose qu'il en est de même de tous les u_k de $k = 0$ jusqu'à $k = n \geqslant 1$, alors

$$v_{n+1} = v_n + |a_{n-1}|v_{n-1} \geqslant |u_n| + |a_{n-1}||u_{n-1}| \geqslant |u_n + a_{n-1}u_{n-1}| = |u_{n+1}|.$$

On a ainsi prouvé par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant v_n.}$

I.B.2) Le couple de suites $(v_n, |a_n|)$ vérifie les hypothèses que vérifiait le couple (u_n, a_n) dans I.A- sauf qu'on ne peut affirmer que v_1 est strictement positif.
Dans **I.A.1)** et **I.A.2)**, on n'utilisait pas l'inégalité stricte $u_1 > 0$. Les résultats s'appliquent donc à (v_n) : Cette suite est croissante à partir de $n = 1$ et, puisque $\sum |a_n|$ est convergente, I.A.2) nous dit que la suite (v_n) converge. Notons l la limite de cette suite de terme général v_n.
On a donc, à partir du rang $n = 1$, et puisque (v_n) converge en croissant :

$$|u_{n+1} - u_n| = |a_{n-1}u_{n-1}| \leqslant |a_{n-1}|v_{n-1} \leqslant l|a_{n-1}|$$

La série $\Sigma l|a_n|$ est, comme $\Sigma|a_n|$, convergente. La majoration précédente prouve qu'il en est de même de $\sum |u_{n+1} - u_n|$, autrement dit :

$$\boxed{\text{La série } \sum(u_{n+1} - u_n) \text{ est absolument convergente.}}$$

La somme partielle au rang $n - 1$ de cette série télescopique est $u_n - u_0$. De la convergence de la série il résulte que

$$\boxed{\text{La suite de terme général } u_n \text{ est convergente.}}$$

I.C - La série de terme général a_n est une série géométrique de raison $a \in]0, 1[$; elle est donc absolument convergente. On peut donc appliquer I.B ; on en déduit que la suite de terme général u_n est effectivement convergente ; on fait l'hypothèse supplémentaire que sa limite L est non nulle.
$u_{k+1} - u_k = a_{k-1}u_{k-1} = a^{k-1}u_{k-1}$ est donc équivalent à La^{k-1}, ce qui assure d'abord que $u_{k+1} - u_k$ est du signe de L à partir d'un certain rang et ensuite que $\sum(u_{k+1} - u_k)$ converge.
Le reste d'ordre n de cette série convergente est

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{N} (u_{k+1} - u_k) = \lim_{N \to +\infty} (u_{N+1} - u_{n+1}) = L - u_{n+1}.$$

Le reste d'ordre n de la série de terme général La^{k-1} est $\sum_{k=n+1}^{+\infty} La^{k-1} = La^n \sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \frac{La^n}{1-a}$. Rappelons le théorème : Les restes d'ordre n de deux séries convergentes dont les termes généraux sont équivalents à l'infini (et gardent un signe fixe à partir d'un certain rang) sont eux-mêmes des infiniment petits équivalents.
Cela montre ici que, à l'infini, $L - u_{n+1}$ est équivalent à $\frac{La^n}{1-a}$ ou encore, en se plaçant au rang précédent :

$$\boxed{L - u_n \text{ est équivalent à } \frac{La^{n-1}}{1-a} \text{ quand } n \to +\infty.}$$

I.D - Ici, a_n est équivalent à $\frac{1}{n^2}$ terme général positif d'une série de Riemann convergente. Là encore, on peut appliquer I.B et là encore on fait l'hypothèse supplémentaire que la limite L de la suite de terme général u_n est non nulle.

I.D.1) A nouveau, on a besoin d'un équivalent de $u_{k+1} - u_k$, qui est égal à $a_{k-1}u_{k-1}$, donc à $\frac{u_{k-1}}{k(k+1)}$, équivalent à $\frac{L}{k(k+1)}$. D'autre part $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$. On a bien

$$\boxed{u_{k+1} - u_k \text{ est équivalent à } L\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2}.}$$

Le reste au rang $n - 1$ de la série de terme général $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2}$ est $\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{n}$.
On applique le même théorème que précédemment sur l'équivalence des restes :

$$\boxed{\text{Ici, } L - u_n \text{ est équivalent à } \frac{L}{n}.}$$

I.D.2)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n &= \left(u_{n+1} - L + \frac{L}{n+1}\right) - \left(u_n - L + \frac{L}{n}\right) = u_{n+1} - u_n - \frac{L}{n(n+1)} \\ &= a_{n-1}u_{n-1} - \frac{L}{n(n+1)} = \frac{u_{n-1} - L}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Par ailleurs : $u_{n-1} - L$ est équivalent à $-\frac{L}{n-1}$ donc à $-\frac{L}{n}$. Donc :

$$\boxed{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n \text{ est équivalent à } -\frac{L}{n^3}.}$$

$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^3} = \left[\frac{-1}{2t^2}\right]_n^{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{2n+1}{2n^2(n+1)^2}$, équivalent à $\frac{1}{n^3}$ quand $n \to +\infty$.
$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$ est donc équivalent à $-L\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^3}$. Comme il s'agit de termes généraux de signe constant

... on peut encore sommer les équivalents pour k variant de n à $+\infty$.

D'un côté, $\sum_{k=n}^{+\infty}(\varepsilon_{k+1}-\varepsilon_k) = -\varepsilon_n$ car la suite ε_n converge vers 0.

De l'autre côté, $\sum_{k=n}^{+\infty} -L\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^3} = -L\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^3} = \frac{-L}{2n^2}$. Donc

$$\boxed{\varepsilon_n \text{ est équivalent à } \frac{L}{2n^2}.}$$

ce qui permet d'écrire le développement limité :

$$\boxed{u_n = L - \frac{L}{n} + \frac{L+\varepsilon(n)}{2n^2}.}$$

Partie II - Étude des suites (u_n) de limite nulle

On est toujours dans les conditions de I.B. assurant la convergence de la suite de terme général u_n.

II.A - Supposons donnés les éléments (u_0,u_1) et (v_0,v_1) de $\mathbb{R}^2$ et deux réels α et β.
$L(u_0,u_1)$ et $L(v_0,v_1)$ sont les limites respectives des deux suites u et v vérifiant $(\mathfrak{R})$ et dont les deux premiers termes sont (u_0,u_1) pour l'une, (v_0,v_1) pour l'autre.
$L(\alpha(u_0,u_1)+\beta(v_0,v_1))$, égal à $L(\alpha u_0+\beta v_0, \alpha u_1+\beta v_1)$, est la limite de la suite vérifiant $\mathfrak{R}$ et dont les deux premiers termes sont $(\alpha u_0+\beta v_0, \alpha u_1+\beta v_1)$. Or cette suite est $\alpha u+\beta v$: elles coïncident aux rangs 0 et 1 puis, grâce à la relation $\mathfrak{R}$, à tout rang. Sa limite est donc $\alpha L(u_0,u_1)+\beta L(v_0,v_1)$. Donc $L(\alpha u_0+\beta v_0, \alpha u_1+\beta v_1) = \alpha L(u_0,u_1)+\beta L(v_0,v_1)$. Autrement dit,

$$\boxed{L \text{ est une application linéaire de } \mathbb{R}^2 \text{ vers } \mathbb{R}.}$$

II.B.1) Supposons donc qu'il existe des indices m tels que $u_m = 0$. Désignons par p le plus petit d'entre eux. On a donc $u_p = 0$. Si $p = 0$, alors $u_1 \neq 0$ (puisque $(u_0,u_1) \neq (0,0)$). Si $u_1 > 0$, la suite est croissante d'après I.A- donc sa limite L vérifie $L \geqslant u_1$ donc L est non nulle. Si $u_1 < 0$, on montre de même que la suite est décroissante avec une limite strictement négative.
Si $p > 0$, on a donc $u_{p-1} \neq 0$ et $u_p = 0$. Par exemple $u_{p-1} > 0$. On démontre alors comme dans I.A- que la suite est croissante positive à partir du rang p, donc sa limite L vérifie $L \geqslant u_{p+1} = a_{p-1}u_{p-1}$ donc L est strictement positive (les a_n sont strictement positifs).

$$\boxed{\text{Dans tous les cas, la limite } L(u_0,u_1) \text{ de la suite } (u_n) \text{ est non nulle.}}$$

II.B.2) En prenant par exemple $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on a donc $L(u_0,u_1) \neq 0$. L'application linéaire L est donc non nulle. En fait, c'est une forme linéaire (l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$). Son noyau est donc un hyperplan de $\mathbb{R}^2$. Donc :

$$\boxed{N \text{ est de dimension 1.}}$$

II.C.1) Si la suite n'est pas alternée, il y a donc deux termes consécutifs u_{n_0} et u_{n_0+1} de même signe (au sens large). Le même raisonnement que dans I.A. prouve que la suite est monotone à partir de u_{n_0}, croissante ou décroissante suivant le signe de u_{n_0}, donc de limite non nulle si u_{n_0} est non nul, mais aussi de limite non nulle si u_{n_0} est nul (d'après II.B.1).
Si la suite est alternée, l'inégalité $u_n.u_{n+1} < 0$ donne par passage à la limite $L^2 \leqslant 0$, ce qui ne peut se faire que si $L = 0$ donc si (u_0,u_1) est dans N. Résumons :

$$\boxed{(u_0,u_1) \text{ est dans } N \text{ si et seulement si la suite de premiers termes } u_0 \text{ et } u_1 \text{ est alternée.}}$$

Ne perdons pas de vue que tout cela est fait en excluant la possibilité $u_0 = u_1 = 0$, qui donnerait un couple (u_0,u_1) dans N avec cependant une suite non alternée.

II.C.2) N est une droite de $\mathbb{R}^2$. Soit (α,β) un vecteur directeur de N. Ce vecteur est non nul donc la suite (u_n) ayant pour premiers termes α et β est alternée. En particulier α est non nul.
Tout autre élément non nul (u_0,u_1) de N est de la forme $(k\alpha,k\beta)$ avec k non nul donc :

$$\boxed{\text{Le rapport } r = -u_1/u_0 = -\beta/\alpha \text{ ne dépend pas de l'élément } (u_0,u_1) \text{ choisi dans } N\backslash\{0,0\}.}$$

II.D - La suite (u_n) est alternée donc aucun de ses termes n'est nul : la suite (r_n) est donc bien définie et strictement positive.

II.D.1) Pour $n \geqslant 1$, on a $r_n = -\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{u_n + a_{n-1}u_{n-1}}{u_n}$. Donc :

$$\boxed{r_n = -1 + \frac{a_{n-1}}{r_{n-1}}.}$$

Puisque $r_n > 0$ (la suite est alternée), on a, pour $n \geqslant 1$, $\frac{a_{n-1}}{r_{n-1}} > 1$ donc $r_{n-1} < a_{n-1}$. Donc :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ (même } n = 0\text{) on a } 0 < r_n < a_n.}$$

II.D.2) Puisque la série Σa_n converge, la suite (a_n) converge vers 0 donc, par encadrement,

$$\boxed{\text{la suite } (r_n) \text{ converge vers } 0.}$$

II.D.3) De même l'inégalité $0 < r_n < a_n$ prouve (critère de comparaison entre séries à termes positifs) que Σr_n converge. Donc $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = r_n$ converge vers 0 donc (d'Alembert) Σu_n est absolument convergente, donc convergente. Résumons :

$$\boxed{\text{Les séries } \Sigma r_n,\ \Sigma u_n \text{ et } \Sigma|u_n| \text{ sont convergentes}}$$

Partie III - Application à la résolution d'une équation différentielle

III.A - Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ une série entière convergente sur $]-1,1[$. Sur $]-1,1[$ on a alors

$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n$ et

$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)u_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)u_{n+1}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)u_{n+2}x^n$ si bien que

$(x-1)f''(x) + 2f'(x) + f(x) =$

$$-2u_2 + 2u_1 + u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(n(n+1)u_{n+1} - (n+1)(n+2)u_{n+2} + 2(n+1)u_{n+1} + u_n\right)x^n.$$

f est solution de (E) si et seulement si la série précédente est la série nulle ce qui ne peut se faire, le rayon de convergence étant non nul, que si tous les coefficients sont nuls donc si $u_0 + 2u_1 - 2u_2 = 0$ et, pour $n \geqslant 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}u_n$, autrement dit, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}u_n$.
Il faut et suffit donc que la suite (u_n) soit une suite vérifiant les conditions de I.D.
Reste à examiner si, pour une telle suite, la série entière $\Sigma u_n x^n$ converge effectivement pour $x \in]0,1[$.
En fait, quel que soit le choix de u_0 et u_1, une telle suite (u_n) est, on l'a vu, convergente donc $(u_n x^n)$ est bornée pour $x = 1$, donc (lemme d'Abel) le rayon de convergence de $\Sigma u_n x^n$ est $\geqslant 1$ donc on a bien une somme définie sur $]-1,1[$. Donc :

$$\boxed{\text{Les fonctions } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \text{ solutions de } (E) \text{ sur }]-1,1[\text{ sont celles telles que la suite } (u_n) \text{ vérifie I.D.}}$$

L'équation (E) est linéaire du deuxième ordre à coefficients continus sur $]-1,1[$, le coefficient $(x-1)$ de y'' ne s'annulant pas. On sait qu'alors l'espace vectoriel des solutions sur $]-1,1[$ est de dimension 2.
Or nos solutions développables en séries entières forment un espace de dimension supérieure ou égale à 2 :
La solution f obtenue pour $u_0 = 0, u_1 = 1$ n'est pas nulle (ses coefficients ne sont pas tous nuls) et la solution g obtenue pour $u_0 = 1, u_1 = 1$ ne lui est pas colinéaire : on ne peut avoir $g = kf$ puisque puisque $g(0) = u_0 = 1$ et $f(0) = 0$.
Ces solutions développables en série entière forment donc l'espace tout entier. Donc :

$$\boxed{\text{Les solutions sont toutes développables en série entière sur }]-1,1[.}$$

Autre solution : Soit g une solution de (E) ; posons $g(0) = a$ et $g'(0) = b$; on sait que g est la seule solution vérifiant ces conditions initiales. Mais on dispose aussi de la solution $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, où (u_n) vérifie I.D-, avec $f(0) = u_0 = a$ et $f'(0) = u_1 = b$. Donc $g = f$. Donc g est développable en série entière.

III.B - Soit f une solution obtenue pour un certain couple (u_0, u_1), pris dans N, mais non nul. Alors, d'après **II.D** -, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers 0 ; donc, par d'Alembert, le rayon de convergence de $\Sigma u_n x^n$ est infini. $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est donc définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. La relation de récurrence entre les coefficients, qui fait que $f(x)$ vérifie (E) sur $]-1,1[$, assure de même que $f(x)$ vérifie (E) pour tout x ; f est donc une solution sur $\mathbb{R}$ tout entier. On a donc là une solution développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Il en est de même des fonctions kf. Comme f est non nulle,

$$\boxed{\text{on a là une droite vectorielle de solutions développables en série entière sur } \mathbb{R}}$$

III.C - Ici, la solution f n'est pas développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Le couple (u_0, u_1) n'est donc pas nul et, d'après ce qui précède, il n'appartient pas à N. La limite L de (u_n) n'est donc pas nulle. On peut donc appliquer **I.D.**

$f(x)$ est donc de la forme $u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\mathrm{L} - \frac{\mathrm{L}}{n} + \frac{\mathrm{L}}{2n^2} + \frac{\varepsilon_n}{n^2}\right)x^n$, où la suite ε_n converge vers 0, ou encore $f(x) = u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\mathrm{L} - \frac{\mathrm{L}}{n} + \frac{t_n}{n^2}\right)x^n$ avec t_n convergeant vers L.

On peut couper en trois cette série car les trois convergent sur $]-1,1[$.

Donc $f(x) = u_0 + \mathrm{L}\sum_{n=1}^{+\infty} x^n - \mathrm{L}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t_n x^n}{n^2} = u_0 - \mathrm{L} + \frac{\mathrm{L}}{1-x} + \mathrm{L}\ln(1-x) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t_n x^n}{n^2}$.

Posons donc $g(x) = u_0 - \mathrm{L} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t_n x^n}{n^2}$. La suite (t_n) est convergente donc bornée. Il existe donc un M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1,1], \left|\frac{t_n x^n}{n^2}\right| \leqslant \frac{M}{n^2}.$$

La convergence de la série de fonctions continues $\frac{t_n x^n}{n^2}$ est donc normale sur $[-1,1]$. La somme est donc continue sur $[-1,1]$. g, qui en est la restriction à $]-1,1[$, a donc une limite à gauche de 1. On peut donc écrire

$$\boxed{f(x) = \frac{\mathrm{L}}{1-x} + \mathrm{L}\ln(1-x) + g(x), \text{ avec } \mathrm{L} \neq 0 \text{ et } g \text{ admettant une limite à gauche de } 1.}$$

Partie IV - Étude du noyau N de l'application L

IV.A - Les f_n allant de $[0,+\infty[$ dans lui-même, on peut effectivement les composer. Comme ce sont des fonctions strictement décroissantes et dérivables, ces composées sont strictement monotones et dérivables.

$$\boxed{f_n \text{ et } g_n \text{ sont monotones et dérivables.}}$$

$g_0'(x) = f_0'(x) = -\frac{a_0}{(1+x)^2}$ donc $|g_0'(x)| \leqslant a_0$: le résultat demandé est vrai au rang 0.

Supposons le vrai au rang $n-1$ pour tout $x \geqslant 0$; on a notamment $|g_{n-1}'(f_n(x))| \leqslant a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$.

Alors $g_n'(x) = g_{n-1}'(f_n(x)).f_n'(x) = -\frac{a_n}{(1+x)^2}g_{n-1}'(f_n(x))$. Donc $|g_n'(x)| \leqslant |a_n||g_{n-1}'(f_n(x))| \leqslant a_0 a_1 \ldots a_{n-1}.a_n$. On a donc prouvé par récurrence que :

$$\boxed{|g_n'(x)| \leqslant a_0 a_1 \ldots a_n.}$$

On a donc $|g_{n-1}'(x)| \leqslant a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$, qu'on notera M. En utilisant l'inégalité des accroissements finis et le majorant M de g_{n-1}' sur l'intervalle $[0, f_n(0)]$ on obtient

$|p_n - p_{n-1}| = |g_n(0) - g_{n-1}(0)| = |g_{n-1}(f_n(0)) - g_{n-1}(0)| \leqslant M|f_n(0) - 0| = Ma_n$. On a bien

$$\boxed{|p_n - p_{n-1}| \leqslant a_0 a_1 \ldots a_n.}$$

IV.B - Montrons d'abord que la suite de terme général p_n converge effectivement : puisque la série de terme général a_n est convergente, son terme général converge vers 0. Donc $a_0 a_1 \cdots a_{n+1}/a_0 a_1 \cdots a_n$ converge vers 0 donc, d'après d'Alembert, la série de terme général $a_0 a_1 \cdots a_n$ converge ; donc, par majoration, la série de terme général $|p_n - p_{n-1}|$ converge donc la série de terme général $p_n - p_{n-1}$ converge (absolument). Or il s'agit d'une série télescopique et sa convergence implique celle de la suite de terme général p_n.

Ensuite, on a $r_n + 1 = \frac{a_{n-1}}{r_{n-1}}$ donc $r_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{1+r_n} = f_{n-1}(r_n)$ (rappelons que $r_n > 0$) ; en réitérant :

$$r_0 = f_0 \circ f_1 \circ \ldots \circ f_{n-1}(r_n) = g_{n-1}(r_n).$$

Si $n-1$ est pair, g_{n-1}, composée de n applications décroissantes est décroissante, donc $g_{n-1}(r_n) \leqslant g_{n-1}(0) = p_{n-1}$ donc $r_0 \leqslant p_{n-1}$; comme n est impair, on trouve de même $p_n \leqslant r_0$.

Si $n-1$ est impair, les inégalités sont inversées. De toutes façons

$$\boxed{r_0 \text{ est compris entre } p_{n-1} \text{ et } p_n.}$$

Encadré par deux suites qui tendent vers la même limite,

$$\boxed{r_0 \text{ est la limite de la suite } (p_n)}$$

IV.C - On peut mettre le programme demandé sous forme d'une procédure Maple appelée "rzero" dont les paramètres d'entrée seront

-une fonction a supposée telle que pour tout n, $a(n)$ existe, soit strictement positif et terme général d'une série convergente.

-un réel epsil strictement positif, le "ε" de l'énoncé.

Cette procédure calcule les p_n successifs en testant l'écart de chacun avec le précédent. Quand cet écart devient inférieur à epsil, la procédure s'arrête et renvoie le dernier p_n calculé. On est sûr en effet que r_0, qui est encadré par deux p_n consécutifs, est égal, à epsil près, à ce dernier p_n calculé.

```
rzero:=proc(a,epsil)
local n,k,pn,pnmoins,ecart;
n:=2;  pn:=0;
while ecart>epsil
do
   pnmoins:=pn;pn:=0;
   for k from n by -1 to 0
   do pn:=a(k)/(1+pn); od;# calcul du nouveau pn à l'aide d'une boucle
   ecart:=abs(pn-pnmoins);# pnmoins est l'ancien pn
   n:=n+1;
od;
RETURN(pn);
end;
```

IV.D - On ne dispose pas de Maple le jour du Concours... Pour ne pas y passer trop de temps, on peut implanter dans la calculatrice un programme plus rudimentaire que celui décrit ci-dessus et ne comportant que la boucle :

"Pour k descendant de n à 0 faire pn :=1/(1+pn)(k+1)(k+2) et afficher pn."

On fait quelques essais avec diverses valeurs de n. Avant chaque essai, on initialise pn à zéro. A la fin de l'essai, on voit bien à l'oeil nu, si l'écart entre les deux derniers nombres affichés est ou non inférieur à 10^{-5}. Quand il en est ainsi, le dernier pn affiché nous fournit r_0 à 10^{-5} près. On trouve ainsi

$$\boxed{r_0 = 0,43313 \text{ à } 10^{-5} \text{ près.}}$$

***

Mathématiques 1 — Options M et P' — Durée : 4 heures

On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{L}$ le sous-ensemble de $\mathscr{F}$ formé des fonctions lipschitziennes, c'est-à-dire des fonctions φ pour lesquelles existe une constante $K_\varphi \geqslant 0$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant K_\varphi |x - y|\,.$$

On a pour but, dans ce problème, de rechercher les fonctions $F \in \mathscr{L}$ telles que

(1) $$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) - \lambda F(x + a) = f(x),$$

où f est une fonction de $\mathscr{L}$ donnée et où a et λ sont deux réels non nuls donnés. Les parties III et IV sont largement indépendantes.

Partie I - Question préliminaire

Soit $F \in \mathscr{F}$ vérifiant (1). Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

(2) $$F(x) = \lambda^n F(x + na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x + ka)$$

(3) $$F(x) = \lambda^{-n} F(x - na) - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} f(x - ka).$$

Partie II - Quelques propriétés des fonctions lipschitziennes

II.1) Montrer que $\mathscr{L}$ est un sous-espace vectoriel réel de $\mathscr{F}$.

II.2) Soit $f \in \mathscr{F}$ dérivable. Montrer que, pour que $f \in \mathscr{L}$, il faut et il suffit que sa dérivée f' soit bornée.

II.3) f et g étant deux fonctions bornées de $\mathscr{L}$, montrer que leur produit $f \cdot g$ est aussi une fonction de $\mathscr{L}$. En est-il de même si f et g ne sont pas toutes les deux bornées ?

II.4) Soit $f \in \mathscr{L}$. Montrer l'existence de deux réels positifs A et B tels que

(4) $$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant A|x| + B.$$

II.5) Soit $f \in \mathscr{F}$. On suppose qu'existe un réel positif M tel que, pour tous x et y réels vérifiant $0 \leqslant x - y \leqslant 1$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$. Démontrer que $f \in \mathscr{L}$.

Partie III - Étude de (1) pour $|\lambda| \neq 1$

III.A - On suppose dans cette sous-partie que $|\lambda| < 1$.

III.A.1)

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na)$ est absolument convergente (on pourra utiliser la Question II.4).

b) En déduire qu'il existe une, et une seule, fonction $F \in \mathscr{L}$ vérifiant (1) et que F est donnée par

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na)\,.$$

III.A.2) Étude de trois cas particuliers

a) On suppose que f est la fonction f_1 définie par $f_1(x) = 1$. Montrer que $f_1 \in \mathscr{L}$ et déterminer la fonction F_1 correspondante.

b) On suppose que f est la fonction f_2 définie par $f_2(x) = \cos x$. Montrer que $f_2 \in \mathscr{L}$ et que la fonction F_2 correspondante est donnée par

(5) $$F_2(x) = \frac{\cos x - \lambda \cos(x - a)}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2}\,.$$

c) On suppose que f est la fonction f_3 définie par $f_3(x) = \sin x$. Montrer que $f_3 \in \mathscr{L}$ et déterminer la fonction F_3 correspondante.

III.B - On suppose dans cette sous-partie que $|\lambda| > 1$.

III.B.1)

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x - na)$ est absolument convergente.

b) En déduire qu'il existe une, et une seule, fonction $F \in \mathscr{L}$ vérifiant (1) et que F est donnée par

$$F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x - na)\,.$$

III.B.2) Dans chacun des trois cas particuliers suivants, déterminer la fonction F_i correspondante.

a) f est la fonction f_1 définie par $f_1(x) = 1$.

b) f est la fonction f_2 définie par $f_2(x) = \cos x$.

c) f est la fonction f_3 définie par $f_3(x) = \sin x$.

Partie IV - Étude de (1) pour $|\lambda| = 1$

IV.A - On suppose dans cette sous-partie que $\lambda = 1$.

IV.A.1) Montrer que, pour qu'il existe une fonction $F \in \mathscr{L}$ vérifiant (1), il faut que f soit bornée.

IV.A.2)

a) Montrer, en en explicitant une, qu'il existe des fonctions $F \in \mathscr{L}$ non nulles vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) - F(x + a) = 0$.

b) Soit $F \in \mathscr{L}$ vérifiant (1). F est-elle unique ?

IV.A.3) On suppose dans cette question que f est la fonction définie par $f(x) = \cos x$.

a) Si $\cos a \neq 1$, montrer qu'en faisant tendre λ vers 1 dans la fonction F_2 donnée par (5), on obtient une fonction $F \in \mathscr{L}$ vérifiant (1).

b) Si $a = 2\pi$, établir qu'il n'existe aucune fonction $F \in \mathscr{L}$ vérifiant (1).

IV.B - On suppose dans cette sous-partie que $\lambda = -1$.

IV.B.1)

a) Montrer, en en explicitant une, qu'il existe des fonctions $F \in \mathscr{L}$ non nulles vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) + F(x + a) = 0$.

b) Soit $F \in \mathscr{L}$ vérifiant (1). F est-elle unique ?

IV.B.2) On suppose dans cette question que f est la fonction définie par $f(x) = \cos x$.

a) Si $\cos a \neq -1$, expliciter une fonction $F \in \mathscr{L}$ vérifiant (1).

b) Si $a = \pi$, établir qu'il n'existe aucune fonction $F \in \mathscr{L}$ vérifiant (1).

IV.B.3) On suppose dans cette question que $a = 1$ et que $f \in \mathscr{L}$ est décroissante, de limite nulle en $+\infty$ et à dérivée f' croissante.

a) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(x + n)$ converge.

b) Montrer qu'il existe une, et une seule, fonction $F \in \mathscr{L}$ vérifiant (1) et telle que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$ (pour établir que $F \in \mathscr{L}$, on pourra utiliser la Question II.5).

***

Partie I - Question préliminaire

Puisque F vérifie (1), la formule (2) est vraie pour $n = 1$. Supposons la vraie au rang n.
L'application de la formule (1) en $x + na$ donne $F(x+na) = \lambda F(x+(n+1)a) + f(x+na)$. En reportant $F(x+na)$ dans la formule au rang n, on obtient

$$F(x) = \lambda^{n+1}F(x+(n+1)a)+\lambda^n f(x+na)+\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k f(x+ka) = \lambda^{n+1}F(x+(n+1)a)+\sum_{k=0}^{n}\lambda^k f(x+ka)$$

soit la formule au rang $n+1$. En appliquant cette formule (2) en $x - na$ et divisant par λ^n on obtient

$$\lambda^{-n}F(x-na) = F(x) + \sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{k-n}f(x-na+ka) = F(x) + \sum_{p=1}^{n}\lambda^{-p}f(x-pa)$$

(on a posé $k = n - p$). On reconnaît la formule (3). Résumons :

$$\boxed{F(x) = \lambda^n F(x+na) + \sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k f(x+ka) \text{ (1) et } F(x) = \lambda^{-n}F(x-na) - \sum_{k=1}^{n}\lambda^{-k}f(x-ka) \text{ (3).}}$$

Partie II - Quelques propriétés des fonctions lipschitziennes

II.1) $\mathscr{L}$ est une partie non-vide de $\mathscr{F}$ (elle contient, par exemple, les fonctions constantes) ; cette partie est stable par combinaison linéaire car, si φ et ψ sont dans $\mathscr{L}$,

$$|(\alpha\varphi+\beta\psi)(x)-(\alpha\varphi+\beta\psi)(y)| = |\alpha(\varphi(x)-\varphi(y))+\beta(\psi(x)-\psi(y))| \leqslant |\alpha||\varphi(x)-\varphi(y)|+|\beta||\psi(x)-\psi(y)|$$
$$\leqslant (|\alpha|K_\varphi + |\beta|K_\psi)|x-y|$$

prouve que $\alpha\varphi + \beta\psi$ est lipschitzienne. Donc

$$\boxed{\mathscr{L} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{L}.}$$

II.2) Soit f une fonction dérivable de $\mathscr{L}$. Si f' est bornée et si M est un majorant de $|f'|$ sur $\mathbb{R}$ tout entier, on a, d'après le théorème des accroissements finis,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|.$$

Donc $f \in \mathscr{L}$.

Réciproquement, si $f \in \mathscr{L}$, il existe K_f tel que $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant K_f|x - y|$. x_0 étant fixé, on a, pour tout $x \neq x_0$, $\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \leqslant K_f$

En faisant tendre x vers x_0, on obtient $|f'(x_0)| \leqslant K_f$, qui est indépendant de x_0. Donc f' est bornée.

$$\boxed{f \text{ dérivable appartient à } \mathscr{L} \text{ si et seulement si sa dérivée est bornée sur } \mathbb{R}.}$$

II.3) Soient f et g deux fonctions bornées de $\mathscr{L}$; il existe M_f et M_g tels que pour tout réel x on ait $|f(x)| \leqslant M_f$ et $|g(x)| \leqslant M_g$. Alors :

$$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leqslant |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)|$$
$$\leqslant M_f|g(x) - g(y)| + M_g|f(x) - f(y)| \leqslant (M_fK_g + M_gK_f)|x - y|$$

donc fg appartient à $\mathscr{L}$.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ et } g \text{ sont deux fonctions bornées de } \mathscr{L}, \text{ leur produit appartient à } \mathscr{L}.}$$

Si f et g sont dans $\mathscr{L}$ mais ne sont pas toutes les deux bornées, fg n'est pas nécessairement dans $\mathscr{L}$.
Par exemple, si $f(x) = x$ et $g(x) = \cos x$, f et g sont dans $\mathscr{L}$ car leurs dérivées sont bornées ; g est bornée mais f ne l'est pas ; $(f.g)'(x) = \cos x - x\sin x$ donc $\left|(f.g)'(\frac{\pi}{2} + k\pi)\right| = \frac{\pi}{2} + k\pi$, qui peut être rendu aussi grand qu'on veut : $(f.g)'$ n'est pas bornée donc $f.g$ n'est pas dans $\mathscr{L}$.

II.4) Soit $f \in \mathscr{L}$. En posant $A = K_f$ on a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(0)| \leqslant A|x|$.
Comme on a aussi $|f(x)| - |f(0)| \leqslant |f(x) - f(0)|$, on en déduit, en posant $B = |f(0)|$:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant A|x| + B.}$$

II.5) Soit $f \in \mathscr{L}$ et M un réel positif tel que, pour tous x et y réels vérifiant $0 \leqslant x - y \leqslant 1$, on ait $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, avec, par exemple $x \geqslant y$; soit $y = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = x$ une subdivision de $[y, x]$ en sous-intervalles de longueur < 1.
Pour tout i de 0 à $n-1$ on a donc $|f(a_{i+1}) - f(a_i)| \leqslant M|a_{i+1} - a_i| = M(a_{i+1} - a_i)$.

En ajoutant membre à membre ces inégalités et en utilisant l'inégalité triangulaire, cela donne, après télescopage $|f(x) - f(y)| = |f(a_n) - f(a_0)| \leqslant M(a_n - a_0) = M(x - y) = M|x - y|$. Donc :

$$\boxed{\text{Sous les hypothèses faites, } f \in \mathscr{L}, \text{ avec } K_f = M.}$$

Partie III - Etude de (1) pour $|\lambda| \neq 1$

III.A.1.a) On sait qu'il existe A et B positifs tels que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on ait :
$|\lambda^n f(x + na)| \leqslant |\lambda^n|(A|x + na| + B)$, qui est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $u_n = |\lambda|^n nA|a|$.
Or la règle de d'Alembert montre que Σu_n converge, donc :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \lambda^n f(x + na) \text{ est absolument convergente.}}$$

III.A.1.b) Si $F \in \mathscr{L}$ et F vérifie (1), alors elle vérifie la relation (2) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x)$ est la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\lambda^n F(x + na) + \sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k f(x + ka)$.

Or, d'après ce qui précède, $\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k f(x + ka)$ a une limite, à savoir $\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k f(x + ka)$ par définition de la somme d'une série convergente. D'autre part, ce qui a été dit dans a) pour $f \in \mathscr{L}$ est valable pour F puisque $F \in \mathscr{L}$: la série de terme général $\lambda^n F(x + na)$ converge ; son terme général tend donc vers 0.

En résumé, si F convient, ce ne peut être autre chose que la fonction définie par $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n f(x + na)$.

Considérons réciproquement cette fonction : $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n f(x + na)$. La convergence prouvée au a) nous assure que F est définie sur $\mathbb{R}$. Après télescopage

$$F(x) - \lambda F(x + a) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n f(x + na) - \sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^{n+1}f[x + (n + 1)a] = f(x)$$

Donc F vérifie (1). Enfin, cette fonction appartient à $\mathscr{L}$: En effet, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|F(x) - F(y)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n[f(x + na) - f(y + na)]\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}|\lambda|^n K_f|x - y| \leqslant \frac{K_f}{1 - |\lambda|}|x - y|.$$

Finalement :

$$\boxed{F \text{ définie par } F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n f(x + na) \text{ est l'unique fonction appartenant à } \mathscr{L} \text{ vérifiant (1).}}$$

III.A.2.a) $f_1(x) = 1$. f_1 est 0−lipschitzienne. $F_1(x)$ est la somme de la série géométrique de raison λ, avec $|\lambda| < 1$, donc :

$$\boxed{f_1 \in \mathscr{L} \text{ et } F_1(x) = \frac{1}{1-\lambda}.}$$

III.A.2.b et c)
$f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = \sin x$. f_2 et f_3 sont dérivables sur $\mathbb{R}$, avec une dérivée bornée ; ces fonctions appartiennent donc à $\mathscr{L}$, d'après II.2). F_2 et F_3 sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n e^{i(x+na)}$ qui est une série géométrique de raison λe^{ia}, dont le module $|\lambda|$ est strictement inférieur à 1. Cette somme vaut $\dfrac{e^{ix}}{1-\lambda e^{ia}}$. En multipliant haut et bas par $1 - \lambda e^{-ia}$, cela donne $\dfrac{e^{ix}}{1-\lambda e^{ia}} = \dfrac{e^{ix} - \lambda e^{i(x-a)}}{1 - 2\lambda\cos a + \lambda^2}$. Donc, en séparant partie réelle et partie imaginaire :

$$\boxed{F_2(x) = \frac{\cos x - \lambda\cos(x-a)}{1-2\lambda\cos a + \lambda^2} \quad , \quad F_3(x) = \frac{\sin x - \lambda\sin(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}.}$$

III.B.1.a)
Le raisonnement est analogue à celui de **III.A.1)** : on a, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda^{-n} f(x-na)| \leqslant |\lambda^{-n}|(A|x-na| + B)$, qui est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $u_n = |1/\lambda|^n nA|a|$, et la règle de d'Alembert montre que Σu_n converge, donc :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \lambda^{-n} f(x-na) \text{ est absolument convergente.}}$$

III.B.1.b)
On continue comme dans III.A.1)b, mais en utilisant l'égalité (3) au lieu de (2) :

$$\boxed{F \text{ définie par } F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x-na) \text{ est l'unique fonction appartenant à } \mathscr{L} \text{ vérifiant (1).}}$$

III.B.2.a)
Encore une série géométrique et $F_1(x) = -\frac{\lambda^{-1}}{1-\lambda^{-1}} = \frac{1}{1-\lambda}$.

$$\boxed{f_1 \in \mathscr{L} \text{ et } F_1(x) = \frac{1}{1-\lambda}.}$$

III.B.2.b et c)
De façon analogue à III.A :

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} e^{i(x-na)} = -\frac{\lambda^{-1} e^{i(x-a)}}{1-\lambda^{-1}e^{-ia}} = -\frac{\lambda e^{i(x-a)} - e^{ix}}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}.$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, on constate que :

$$\boxed{F_2 \text{ et } F_3 \text{ ont la même expression qu'en III.A.1.b et c).}}$$

<u>Autre solution</u> pour traiter les cas particuliers $f_2(x) = \cos x$ et $f_3(x) = \sin x$ sans distinguer deux cas suivant λ (l'unicité de F, elle, ayant été démontrée en distinguant $|\lambda| < 1$ et $|\lambda| > 1$).
On pose $H_2(x) = \dfrac{\cos x - \lambda\cos(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}$ et $H_3(x) = \dfrac{\sin x - \lambda\sin(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}$ puis $H(x) = H_2(x) + iH_3(x)$.
En simplifiant $H(x) - \lambda H(x+a)$ on trouve e^{ix}. On identifie parties réelles et parties imaginaires, constatant ainsi que H_1 et H_2 vérifient la relation (1) pour $f = f_2$ et $f = f_3$. Comme H_1 et H_2 sont dans $\mathscr{L}$ (combinaisons linéaires de $\cos x$, $\cos(x-a)$, $\sin x$, $\sin(x-a)$ qui sont dans $\mathscr{L}$) on a nécessairement $H_2 = F_2$ et $H_3 = F_3$.

Partie IV - Etude de (1) pour $|\lambda| = 1$

IV.A.1) La relation (1) s'écrit ici : $F(x) - F(x+a) = f(x)$. Si $F \in \mathscr{L}$ la vérifie, on a pour tout x : $|f(x)| = |F(x+a) - F(a)| \leqslant K_F|a|$.

$$\boxed{\text{S'il existe } F \in \mathscr{L} \text{ vérifiant (1), alors } f \text{ est bornée.}}$$

IV.A.2.a) N'importe quelle fonction lipschitzienne de période a vérifie la relation (1) lorsqu'on prend pour f la fonction nulle. Par exemple $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{2\pi x}{a}\right)$ ou, plus simplement,

$$\boxed{\text{Toute fonction constante non nulle vérifie } F(x) - F(x+a) = 0 \text{ et appartient à } \mathscr{L}.}$$

IV.A.2.b) On reprend ici la relation (1) avec une fonction f qui n'est plus nécessairement la fonction nulle (l'énoncé n'est pas très clair sur ce point). Si $F \in \mathscr{L}$ vérifie (1), la fonction obtenue en lui ajoutant une des fonctions trouvées au IV.A.2.a) est une autre fonction vérifiant (1), différente de F, et appartenant aussi à $\mathscr{L}$, qui est un espace vectoriel.

$$\boxed{\text{Si } F \in \mathscr{L} \text{ vérifie (1), elle n'est pas unique.}}$$

IV.A.3.a) Quand λ vers 1, x étant fixé, $F_2(x)$ trouvé dans (5) tend vers $F(x) = \dfrac{\cos x - \cos(x-a)}{2(1-\cos a)}$. (la limite du dénominateur n'est pas nulle car $\cos a \neq 1$). Cette fonction F est dans $\mathscr{L}$ comme combinaison linéaire de fonctions de $\mathscr{L}$.

En écrivant, pour x fixé, que F_2 vérifie (1), on voit que $F_2(x) - \lambda F_2(x+a)$, vue comme fonction de λ, est constante égale à $\cos x$ sur $]-1, 1[$. La limite de $F_2(x) - \lambda F_2(x+a)$ quand λ vers 1 est aussi égale à $\cos x$. Cela donne $F(x) - F(x+a) = \cos x$, et c'est vrai pour tout x réel.

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ définie par } F(x) = \frac{\cos x - \cos(x-a)}{2(1-\cos a)} \text{ appartient à } \mathscr{L} \text{ et vérifie (1).}}$$

IV.A.3.b) Ici $a = 2\pi$. Supposons qu'il existe $F \in \mathscr{L}$ vérifiant (1). F vérifie la propriété (2), donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ F(x) = F(x+2n\pi) + \sum_{k=0}^{n-1} \cos(x+2k\pi) = F(x+2n\pi) + n\cos x.$$

Pour $x = 0$, cela donne $F(0) = F(2n\pi) + n$ et pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, cela donne $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = F\left((2n+\frac{1}{2})\pi\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Donc : } |n| &= \left|F(0) - F(2n\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F\left((2n+\frac{1}{2})\pi\right)\right| \\ &\leqslant \left|F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)\right| + \left|F\left((2n+\frac{1}{2})\pi\right) - F(2n\pi)\right| \leqslant K_f\frac{\pi}{2} + K_f\frac{\pi}{2} = K_f\pi, \end{aligned}$$

ce qui est faux pour n suffisamment grand.

$$\boxed{\text{Il n'y a donc aucune fonction de } \mathscr{L} \text{ vérifiant (1).}}$$

IV.B.1.a) La fonction $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)$ est

$$\boxed{\text{une fonction non nulle de } \mathscr{L} \text{ vérifiant : } \forall x \in \mathbb{R},\ F(x) + F(x+a) = 0.}$$

On peut aussi prendre $F(x) = x$ sur $[0, \frac{a}{2}]$ et la prolonger convenablement.

IV.B.1.b) Là aussi, on reprend la relation (1) avec une fonction f qui n'est plus nécessairement la fonction nulle, mais ce n'est pas très clair.

Comme dans IV.A.2)b : En ajoutant à $F \in \mathscr{L}$, F vérifiant (1), l'une des fonctions trouvées ci-dessus, on obtient une fonction, différente de la première, vérifiant (1) et appartenant à $\mathscr{L}$, qui est un espace vectoriel :

$$\boxed{\text{Si } f \in \mathscr{L} \text{ vérifie (1), elle n'est pas unique.}}$$

$$\boxed{F(x)=\frac{\cos x+\cos(x-a)}{2(1+\cos a)}},$$

puisque $\cos a \neq -1$.
Cette fonction F est lipschitzienne ($\mathscr{L}$ est un espace vectoriel) et vérifie $F(x)+F(x+a)=\cos x$ pour tout x (on le justifie, comme dans **IV A.3**), par un passage à la limite dans la relation (1), qui est vérifiée par F_2 .)

IV.B.2.b) Ici $a=\pi$. Supposons qu'il existe $F \in \mathscr{L}$ vérifiant (1). D'après (2)

$$F(x)=(-1)^nF(x+n\pi)+\sum_{k=0}^{n-1}(-1]^k\cos(x+k\pi)=(-1)^nF(x+n\pi)+n\cos x.$$

Pour $x=0$ cela donne $n=F(0)-(-1)^nF(n\pi)$ et pour $x=\frac{\pi}{2}$: $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^nF\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$.
Donc :

$$\begin{aligned}|n| &= \left|F(0)-F\left(\tfrac{\pi}{2}\right)-(-1)^nF(n\pi)+(-1)^nF\left(\tfrac{\pi}{2}+n\pi\right)\right|\\ &\leqslant \left|F(0)-F\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right|+\left|F\left(\tfrac{\pi}{2}+n\pi\right)-F(n\pi)\right| \leqslant 2K_F\tfrac{\pi}{2}\end{aligned}$$

ce qui est faux pour n suffisamment grand. Donc :

$$\boxed{\text{Il n'y a aucune fonction de } \mathscr{L} \text{ vérifiant (1).}}$$

IV.B.3.a) f étant décroissante et de limite nulle en $+\infty$ est nécessairement positive.
Pour x fixé dans $\mathbb{R}$, la suite de terme général $f(x+n)$ est positive, décroissante et converge vers 0. Donc, en vertu du critère des séries alternées,

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nf(x+n) \text{ est convergente.}}$$

IV.B.3.b) Supposons que F vérifie tout ce qui est imposé ; d'après la relation (2), on a nécessairement
$F(x)=(-1)^nF(x+n)+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kf(x+k)$.
Puisque $\lim_{n\to+\infty}F(x+n)=0$, et en faisant tendre n vers $+\infty$, on voit que F ne peut être autre chose que la fonction définie par $F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nf(x+n)$, fonction dont on sait d'après a) qu'elle est effectivement définie sur $\mathbb{R}$. Reste à prouver que cette fonction convient effectivement.
D'abord, cette fonction est la somme d'une fonction vérifiant le critère des séries alternées ; elle est donc majorée en valeur absolue par la valeur absolue du premier terme, soit $|f(x)|$, ce qui nous assure que $F(x)$, comme $f(x)$, tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
Ensuite, après télescopage :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x)+F(x+1)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n[f(x+n)+f(x+n+1)]=f(x), \text{ donc } F \text{ vérifie (1).}$$

Enfin, soit $(x\,,\,y)\in\mathbb{R}^2$, tels que $0<x-y\leqslant 1$. On a : $F(x)-F(y)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n[f(x+n)-f(y+n)]$.

Puisque f' est croissante, f est convexe donc : $\dfrac{f(x+n-1)-f(y+n-1)}{x-y}\leqslant\dfrac{f(x+n)-f(y+n)}{x-y}$,
qui est négatif puisque f est décroissante. La série définissant $F(x)-F(y)$ vérifie donc le critère des séries alternées. On majore encore une fois la valeur absolue de la somme par la valeur absolue du premier terme :
$|F(x)-F(y)|\leqslant(x-y)|f'(0)|$. On peut alors appliquer **II.5)** : $F\in\mathscr{L}$. Résumons :

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ définie par } F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nf(x+n) \text{ vérifie les conditions imposées et c'est la seule.}}$$

***

Semaine 3 : Applications linéaires et matrices

Cette semaine, nous avons commencé l'étude de l'algèbre linéaire. En fait, une révision approfondie des notions vues en Sup s'est avérée nécessaire car ces notions ne sont plus au programme des classes Terminales et la seule année de Sup ne suffit pas à en assurer la digestion.

Nous avons donc passé la semaine sur les espaces vectoriels, les applications linéaires et les matrices, si bien que les problèmes proposés peuvent être traités presque entièrement avec le programme de Sup.

- **Sujet 8 : Ecole Nationale de l'Aviation Civile («E.N.A.C. Ingénieurs») 1992 épreuve optionnelle**

C'est un problème qui passe bien en revue toutes les propriétés des projecteurs (caractérisation, composition ...) Il demande une bonne maîtrise des notions de base de l'algèbre linéaire, notamment celles de somme, somme directe, noyau, image... Prenez le temps de la réflexion pour ne pas commettre les fautes classiques comme la confusion entre «supplémentaire» et «complémentaire». Le problème n'est pas trop difficile et constitue un bon entraînement à l'algèbre linéaire.

- **Sujet 9 : Concours Communs Polytechniques («E.N.S.I.») 1998 Mathématiques 1 Filière PC**

Cette épreuve comporte deux problèmes indépendants. L'ensemble donne une épreuve intéressante mais longue.

Dans le premier problème, on étudie l'ensemble des matrices qui commutent avec une matrice 2×2 particulière. Ce problème, assez facile, permet de réviser au passage certaines connaissances qu'il faut avoir sur les récurrences linéaires et sur les structures d'anneau et de corps.

Le deuxième problème utilise des méthodes matricielles pour construire une fonction de classe C^2, polynomiale par morceaux, prenant des valeurs imposées aux points de subdivision.

C'est un thème voisin, mais abordé dans un cas plus général, qui faisait l'objet d'un problème posé à l'X en 1994 et que nous verrons plus tard. Les thèmes étaient voisins mais les problèmes étaient très différents. Celui posé à l'X, plus ambitieux, est nettement plus difficile.

- **Sujet 10 : Centrale-Supélec 1997 Mathématiques 2 Filière PC**

Le problème est construit autour d'un thème d'arithmétique, celui des triangles rectangles pseudo-isocèles (TRPI) mais il ne requiert aucune connaissance en arithmétique. Le thème est abordé sous plusieurs angles, essentiellement en utilisant l'algèbre et la géométrie.

Cela donne au bout du compte un problème assez plaisant et pas trop difficile.

E.N.A.C. INGÉNIEURS 1992

Épreuve optionnelle

Option M

Durée : 4 heures

Notations et définitions

$f \circ g$ désigne pour deux applications f et g d'un même ensemble E dans lui-même la fonction composée définie pour tout x de E par $f \circ g = f(g(x))$;

$Ker f$ désigne pour un endomorphisme f d'un espace vectoriel E, le noyau de cet endomorphisme;

$Im f$ désigne pour un endomorphisme f d'un espace vectoriel E, l'image de cet endomorphisme;

$A + B$ désigne pour deux sous-espaces vectoriels A et B d'un espace vectoriel E la somme de ces deux sous-espaces définie comme le sous-espace vectoriel de E constitué des vecteurs pouvant s'écrire comme la somme d'un vecteur de A et d'un vecteur de B ;

$A \bigoplus B$ désigne la somme directe de deux sous-espaces vectoriels de E, c'est-à-dire la somme de deux sous-espaces vectoriels A et B tels que $A \bigcap B = \{0\}$;

$tr(A)$ désigne pour une matrice carrée A d'ordre n sur un corps K et de terme général a_{ij}, la trace de A définie par $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$;

On rappelle que pour deux matrices carrées A et B d'ordre n sur un corps K commutatif on a $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$ et $tr(AB) = tr(BA)$.

PROBLÈME

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On appelle projecteur de E tout endomorphisme de E qui vérifie $f \circ f = f$.
On se propose d'étudier quelques propriétés des projecteurs de E.

Première partie

On se donne un projecteur f de E et on se propose de démontrer quelques propriétés élémentaires de f.

1.1. - Montrer que $E = Ker f \bigoplus Im f$.
1.2 - Que peut-on dire de la restriction de f à $Im f$?
1.3. - Montrer que pour tout sous-espace vectoriel de A de E on a :

$$f^{-1}(A) = (A \bigcap Im f) \bigoplus Ker f$$

1.4. - Montrer qu'un sous-espace vectoriel de E est stable par f si et seulement si il est somme d'un sous-espace vectoriel du noyau de f et d'un sous-espace vectoriel de l'image de f.

Deuxième partie

On recherche ici d'autres caractéristiques des projecteurs de E.

2.1. - Soit f un endomorphisme de E. Montrer que f est un projecteur de E si et seulement si il existe deux sous-espaces vectoriels A et B de E tels que :
- $E = A \bigoplus B$;
- $\forall x \in A, f(x) = 0$;
- $\forall x \in B, f(x) = x$.

On dira alors que f est la projection sur B parallèlement à A.
2.2. - Soit f un endomorphisme de E. I désigne l'application identique de E. Montrer que $I - f$ est un projecteur de E si et seulement si f en est un. Comparer le noyau et l'image de $I - f$ à ceux de f.
2.3. - Soit f et g deux endomorphismes de E. Montrer que f et g sont deux projecteurs de même image si et seulement si $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$. Donner de même une condition nécessaire et suffisante pour que f et g soient deux projecteurs de même noyau.

Troisième partie

On se donne deux projecteurs f et g de E. On se propose d'étudier les propriétés de $f \circ g$, $g \circ f$ et $f + g$.

3.1. - Montrer que si $f \circ g = g \circ f$ on a :

$$E = (Im f \bigcap Im g) \bigoplus (Im f \bigcap Ker g) \bigoplus (Ker f \bigcap Im g) \bigoplus (Ker f \bigcap Ker g).$$

Que peut-on dire alors du produit $f \circ g$?
3.2. - Montrer que $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si il existe une décomposition de E en somme directe de 4 sous-espaces vectoriels A, B, C, D tels que f soit la projection sur $A + B$ parallèlement à $C + D$ et g la projection sur $A + C$ parallèlement à $B + D$.
3.3. - Montrer l'équivalence des trois propositions :
a) $f + g$ est aussi un projecteur de E ;
b) $f \circ g = -g \circ f$;
c) $f \circ g = g \circ f = 0$.
Quels sont alors le noyau et l'image de $f + g$?

Quatrième partie

On suppose dans cette partie que E est de dimension finie n.

4.1. - Soit f un endomorphisme de E. Montrer que la trace de la matrice carrée d'ordre n associée à f est indépendante de la base utilisée.
Cette trace dite alors trace de f est notée $tr(f)$. Quelle relation y-a-t-il entre la trace de f et le rang de f si f est un projecteur ?

4.2. - On considère k projecteurs $f_1, f_2, \dots, f_k$ de E et on note f leur somme : $f = \sum_{i=1}^{k} f_i$.
a) Montrer que si f est aussi un projecteur alors l'image de f est la somme directe des images des f_i pour i allant de 1 à k.
b) Montrer que f est un projecteur si et seulement si on a $f_i \circ f_j = 0$ pour tout couple (i, j) tel que $i \neq j, 1 \leqslant i \leqslant k$ et $1 \leqslant j \leqslant k$.
4.3. - On suppose que f et g sont deux endomorphismes de E de rang 1.
Montrer que si f et g sont deux projecteurs tels que $f \circ g = g \circ f$ alors $f = g$ ou $f \circ g = g \circ f = 0$.

Cinquième partie

On revient au cas général où E n'est pas forcément de dimension finie.

5.1. - Montrer que si f est un endomorphisme de E et g un projecteur de E, on a :

$$Ker f \circ g = Ker g \bigoplus (Ker f \bigcap Im g)$$

5.2. - Montrer que si f est un projecteur de E et g un endomorphisme quelconque de E, on a :

$$Im f \circ g = Im f \bigcap (Im g + Ker f)$$

5.3. - Étant donné deux projecteurs f et g de E, montrer que $f \circ g$ est aussi un projecteur de E si et seulement si :

$$Im f \bigcap (Im g + Ker f) \subset Im g \bigoplus (Ker f \bigcap Ker g)$$

Sixième partie

On suppose dans cette partie que E est de dimension 3.
f et g étant deux projecteurs de rang 1 de E, donner les conditions sur les positions relatives des noyaux et des images de f et g qui sont nécessaires et suffisantes pour que $f \circ g$ soit aussi un projecteur. Déterminer dans ces conditions le noyau et l'image de $f \circ g$ et $g \circ f$.

***

E.N.A.C. INGÉNIEURS 1992

Épreuve optionnelle

Option M

CORRIGÉ

Première partie

1.1. - Soit $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$: $\exists y \in E$, $x = f(y)$ et $f(x) = 0$ donc $0 = f(f(y)) = f \circ f(y) = f(y) = x$ donc $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$. Soit $x \in E$; on peut l'écrire $x = f(x) + (x - f(x))$ avec $f(x) \in \operatorname{Im} f$ et $x - f(x) \in \operatorname{Ker} f$ car $f(x - f(x)) = f(x) - f \circ f(x) = 0$. Donc $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. Donc :

$$\boxed{E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f .}$$

1.2. - Soit $x \in \operatorname{Im} f$: $\exists y \in E$, $x = f(y)$ et $f(x) = f \circ f(y) = f(y) = x$ donc

$\boxed{\text{La restriction de } f \text{ à } \operatorname{Im} f \text{ est l'identité.}}$

1.3. - La somme de $A \cap \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ est effectivement directe car $(A \cap \operatorname{Im} f) \cap \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$ donc $(A \cap \operatorname{Im} f) \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.
Soit $x \in E$; on peut l'écrire $x = x_1 + x_2$ avec $x_2 \in \operatorname{Ker} f$ et $x_1 \in \operatorname{Im} f$ et $f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1) = x_1$, donc $x_1 = f(x)$.
Si, en plus, $x \in f^{-1}(A)$, alors $x_1 \in A \cap \operatorname{Im} f$, donc $x = x_1 + x_2 \in (A \cap \operatorname{Im} f) \oplus \operatorname{Ker} f$.

Réciproquement, si $x \in (A \cap \operatorname{Im} f) \oplus \operatorname{Ker} f$, il s'écrit $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in A \cap \operatorname{Im} f$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} f$, donc $f(x) = f(x_1) = x_1 \in A$ donc $x \in f^{-1}(A)$. Rassemblons :

$$\boxed{f^{-1}(A) = (A \cap \operatorname{Im} f) \oplus \operatorname{Ker} f .}$$

1.4. - Soit F un sous-espace de E de la forme $F_1 + F_2$ avec F_1 sous-espace de $\operatorname{Im} f$ et F_2 sous-espace de $\operatorname{Ker} f$ et soit $x \in F$. x s'écrit $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$, donc $f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1) = x_1 + 0 \in F_1 + F_2$. Donc F est stable par f.

Réciproquement, soit F stable par f et soit $x \in F$. On sait que $x - f(x) \in \operatorname{Ker} f$. Comme $x \in F$ et $f(x) \in F$, on a $x - f(x) \in F$ donc $x - f(x) \in F \cap \operatorname{Ker} f$. Donc : $x = f(x) + (x - f(x)) \in (F \cap \operatorname{Im} f) + (F \cap \operatorname{Ker} f)$. Donc $F \subset (F \cap \operatorname{Im} f) + (F \cap \operatorname{Ker} f) \subset F$ donc $F = (F \cap \operatorname{Im} f) + (F \cap \operatorname{Ker} f)$, qui est bien de la forme $F_1 + F_2$ avec F_1 s.e.v. de $\operatorname{Im} f$ et F_2 s.e.v. de $\operatorname{Ker} f$. Résumons :

$\boxed{F \text{ est stable par } F \text{ si et seulement si } F = F_1 + F_2 \text{ avec } F_1 \text{ s.e.v. de } \operatorname{Im} f \text{ et } F_2 \text{ s.e.v. de } \operatorname{Ker} f.}$

Deuxième partie

2.1. - On a déjà vu que, si f est un projecteur, on a $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ et : $\forall x \in \operatorname{Ker} f$, $f(x) = 0$, $\forall x \in \operatorname{Im} f$, $f(x) = x$.

Réciproquement, supposons l'existence de deux sous-espaces A et B tels que :
1) $E = A \oplus B$ 2) $\forall x \in A, f(x) = 0$ 3) $\forall x \in B, f(x) = x$.
Tout $x \in E$ peut donc s'écrire $x = x_1 + x_2$ et $f(x) = f(x_1) + f(x_2) = 0 + x_2$ donc $f \circ f(x) = f(x_2) = x_2 = f(x)$. Donc $f \circ f = f$ et f est un projecteur. Donc :

$\boxed{f \text{ est un projecteur de } E \text{ si et seulement si il existe deux sous-espaces } A \text{ et } B \text{ de } E \text{ tels que : } 1)\ E = A \oplus B \quad 2)\ \forall x \in A, f(x) = 0 \quad 3)\ \forall x \in B, f(x) = x .}$

2.2. - $(I - f) \circ (I - f) = I - 2f + f^2 = (I - f) + (f^2 - f)$ donc $(I - f) \circ (I - f) = (I - f)$ si et seulement si $f^2 - f = O$ donc

$\boxed{I - f \text{ est un projecteur si et seulement si } f \text{ est un projecteur .}}$

Supposons que f soit un projecteur.
On sait que : $\forall x \in \operatorname{Im} f$, $f(x) = x$ donc $(I - f)(x) = 0$. Donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker}(I - f)$.
Réciproquement, si $x \in \operatorname{Ker}(I - f)$, on a $x = f(x)$ donc $x \in \operatorname{Im} f$.
Donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(I - f)$. $I - f$ est aussi un projecteur : on peut remplacer f par $I - f$. Finalement :

$\boxed{\text{Si } f \text{ est un projecteur, } \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(I - f) \text{ et } \operatorname{Im}(I - f) = \operatorname{Ker} f.}$

2.3. - Si f et g sont deux projecteurs de même image, on a : $\forall x \in E, g(x) \in \operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$ donc $f(g(x)) = g(x)$ donc $f \circ g = g$ et, de même, $g \circ f = f$.
Réciproquement, si les deux endomorphismes f et g vérifient $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$, on a $f^2 = (g \circ f)^2 = (g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ g \circ f = g \circ f = f$ donc f est un projecteur et, de même, g est un projecteur. D'autre part, $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$ donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$ et, de même, $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$ d'où l'égalité $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$. Donc f et g sont deux projecteurs de même image. Finalement

$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les deux endomorphismes } f \text{ et } g \text{ vérifient } f \circ g = g \text{ et } g \circ f = f \\ \text{si et seulement si ce sont deux projecteurs de même image.}\end{array}}$

D'après 2.2. -, les deux projecteurs f et g ont le même noyau si et seulement si les deux projecteurs $I - f$ et $I - g$ ont la même image donc, d'après ce qui précède, si et seulement si $(I - f) \circ (I - g) = I - g$ et $(I - g) \circ (I - f) = I - f$, ce qui, après développement et réduction, équivaut à $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$:

$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les deux endomorphismes } f \text{ et } g \text{ vérifient } f \circ g = f \text{ et } g \circ f = g \\ \text{si et seulement si ce sont deux projecteurs de même noyau.}\end{array}}$

Troisième partie

3.1. - Supposons que $f \circ g = g \circ f$. Pour tout x dans $\operatorname{Im} g$ on a $g(x) = x$ donc $f \circ g(x) = f(x) = g \circ f(x)$ donc $f(x) \in \operatorname{Im} g$ donc $\operatorname{Im} g$ est stable par f donc, en appliquant ce qu'on a vu au passage dans 1.4 - à $F = \operatorname{Im} g$, on a $\operatorname{Im} g = (\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Im} f) \oplus (\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f)$.
Pour tout x dans $\operatorname{Ker} g$, on a $f \circ g(x) = f(0) = 0 = g(f(x))$ donc $f(x) \in \operatorname{Ker} g$. Donc $\operatorname{Ker} g$ est stable par f et en appliquant à nouveau 1.4. -, on a $\operatorname{Ker} g = (\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f) \oplus (\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Ker} f)$.
En reportant dans $E = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} g$ et en utilisant l'associativité et la commutativité de la somme directe, on obtient

$$\boxed{E = (\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) \oplus (\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g) \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g).}$$

E est donc la somme directe de $((\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g) \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g))$ et de $(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g)$. Soit $x \in (\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g) \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g)$.
x s'écrit $x = x_1 + x_2 + x_3$ avec $x_1 \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$, $x_2 \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g$ et $x_3 \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$.
On a donc $f \circ g(x) = 0 + f \circ g(x_2) + 0 = g \circ f(x_2) = g(0) = 0$.
Soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g$. On a $g(x) = x$ donc $f \circ g(x) = f(x) = x$.
En utilisant la caractérisation vue dans 2.1 - :

$\boxed{\begin{array}{c}f \circ g \text{ est la projection sur } \operatorname{Im} g \cap \operatorname{Im} f \text{ parallèlement à} \\ (\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f) \oplus (\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Ker} f) \oplus (\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f).\end{array}}$

3.2. -

- Supposons que ; $f \circ g = g \circ f$. D'après 3.1. , on a : $E = A \oplus B \oplus C \oplus D$ avec
$A = \operatorname{Im} g \cap \operatorname{Im} f$, $B = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$, $C = \operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f$ et $D = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Ker} f$.

On a vu au passage dans 3.1. que $\operatorname{Im} g = A \oplus C$ et $\operatorname{Ker} g = B \oplus D$.

... $\operatorname{Im} f = A \oplus B$ et $\operatorname{Ker} f = C \oplus D$. Donc f est la projection sur $A \oplus B$ parallèlement à $C \oplus D$ et g est la projection sur $A \oplus C$ parallèlement à $B \oplus D$

- Supposons que $E = A \oplus B \oplus C \oplus D$, que f est la projection sur $A \oplus B$ parallèlement à $C \oplus D$ et que g est la projection sur $A \oplus C$ parallèlement à $B \oplus D$.

On a, pour $x \in E$, la décomposition $x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ donnant $f \circ g(x) = f(x_1 + x_4) = x_1$ et $g \circ f(x) = g(x_1 + x_2) = x_1$ donc $f \circ g = g \circ f$.

Résumons :

$\boxed{f \circ g = g \circ f \text{ si et seulement si } E = A \oplus B \oplus C \oplus D, \text{ avec } f \text{ projection sur } A \oplus B \text{ parallèlement à } C \oplus D \text{ et } g \text{ projection sur } A \oplus C \text{ parallèlement à } B \oplus D.}$

3.3. - Après développement et réduction, $(f+g)\circ(f+g) - (f+g) = f \circ g + g \circ f$ donc $(a) \Leftrightarrow (b)$.

On a évidemment $(c) \Rightarrow (b)$. Supposons réciproquement que $f \circ g = -g \circ f$.

On a donc $f \circ g = f \circ f \circ g = f \circ (f \circ g) = -f \circ (g \circ f) = -(f \circ g) \circ f = (g \circ f) \circ f = g \circ f \circ f = g \circ f$;

On a donc à la fois $f \circ g = g \circ f$ et $f \circ g = -g \circ f$, ce qui n'est possible que si $f \circ g = g \circ f = O$.

Résumons :

$\boxed{f + g \text{ projecteur} \Longleftrightarrow f \circ g = -g \circ f \Longleftrightarrow f \circ g = g \circ f = O.}$

Puisque $f \circ g = g \circ f$, on peut appliquer 3.1, mais il y a des simplifications du fait que $f \circ g = g \circ f = O$: l'image de f est incluse dans le noyau de g et l'image de g est incluse dans le noyau de f, donc $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f$, et aussi $\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$.

Donc : $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g)$.

En écrivant alors $x = x_1 + x_2 + x_3$ avec $x_1 \in \operatorname{Im} f$, $x_2 \in \operatorname{Im} g$, $x_3 \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$, on a $(f+g)(x) = x_1 + x_2$. On voit que $f+g$ est la projection sur $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$.

Donc :

$\boxed{\operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g \text{ et } \operatorname{Ker}(f+g) = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g.}$

Quatrième partie

4.1. - C'est du cours, mais quand l'énoncé demande expressément une démonstration, il faut refaire le cours, au moins en partie. Ici, par exemple, on peut supposer connu que $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

Alors, si M et M' sont les matrices de l'endomorphisme f sur les bases B et B' de E et si P est la matrice de passage de B à B', on a $M = PM'P^{-1}$, donc

$$\operatorname{Tr} M = \operatorname{Tr}(PM'P^{-1}) = \operatorname{Tr}((PM')P^{-1}) = \operatorname{Tr}(P^{-1}(PM')) = \operatorname{Tr} M' \text{ :}$$

$\boxed{\text{La trace de la matrice carrée d'ordre } n \text{ associée à } f \text{ est indépendante de la base utilisée.}}$

Si f est un projecteur, on obtient une base B de E en concaténant une base de $\operatorname{Im} f$ (et dont les vecteurs sont donc invariants par f) et une base de $\operatorname{Ker} f$. La matrice de f sur cette base est alors, si $\operatorname{Im} f$ est de dimension r : $\begin{pmatrix} I_r & \vdots & O \\ \cdots & & \cdots \\ O & \vdots & O \end{pmatrix}$. Dans le cas particulier où $\operatorname{Ker} f$ est réduit à $\{0\}$, c'est I_n ; dans le cas particulier où $\operatorname{Im} f$ est réduit à $\{0\}$, c'est la matrice nulle. Donc, d'une façon générale,

$\boxed{\operatorname{Tr}(f) = \dim(\operatorname{Im} f) = \operatorname{rg}(f).}$

4.2. -a) On suppose que $f_1, f_2, \ldots, f_k$ sont des projecteurs et leur somme f également.

Pour tout $x \in E$, on a : $f(x) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x) \in \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Im} f_i$ donc $\operatorname{Im} f \subset \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Im} f_i$. En utilisant aussi la linéarité de la trace, on a alors

$$\dim(\operatorname{Im} f) = \operatorname{Tr}(f) = \operatorname{Tr}\Big(\sum_{i=1}^{k} f_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Tr}(f_i) = \sum_{i=1}^{k} \dim(\operatorname{Im} f_i) \geqslant \dim\Big(\sum_{i=1}^{k} \operatorname{Im} f_i\Big) \geqslant \dim(\operatorname{Im} f).$$

Les deux inégalités sont donc en fait des égalités. Donc $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim\Big(\sum_{i=1}^{k} \operatorname{Im} f_i\Big)$ ce qui donne, compte tenu de l'inclusion, $\operatorname{Im} f = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Im} f_i$, et d'autre part, $\dim\Big(\sum_{i=1}^{k} \operatorname{Im} f_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} \dim(\operatorname{Im} f_i)$, qui assure que la somme est directe.

En conclusion,

$\boxed{\text{Si } f \text{ est un projecteur, alors } \operatorname{Im} f \text{ est la somme directe des } \operatorname{Im} f_i, \text{ pour } i \text{ allant de 1 à } k.}$

4.2. -b)

- Supposons que f est un projecteur. On peut donc appliquer ce qui précède : $\operatorname{Im} f_j \subset \operatorname{Im} f$, donc, pour x fixé dans E et j entre 1 et k, on a $f(f_j(x)) = f_j(x)$.

Avec l'écriture $f(f_j(x)) = \sum_{i=1}^{k} f_i(f_j(x))$, cela fait deux écritures du même vecteur $f(f_j(x))$ sous la forme $\sum_{i=1}^{k} y_i$, avec $y_i \in \operatorname{Im} f_i$. On peut donc identifier puisque la somme est directe :

$\forall i \neq j,\ f_i \circ f_j(x) = 0$. Donc : $\forall i \neq j,\ f_i \circ f_j = O$.

- Supposons réciproquement que : $\forall i \neq j,\ f_i \circ f_j = O$. Alors :

$$f \circ f = \sum_{i=1}^{k} f_i \circ f_i + 2\sum_{i \neq j} f_i \circ f_j = \sum_{i=1}^{k} f_i \circ f_i = \sum_{i=1}^{k} f_i = f \text{ donc } f \text{ est un projecteur.}$$

$\boxed{f = \sum_{i=1}^{k} f_i \text{ est un projecteur si et seulement si } \forall i \neq j,\ f_i \circ f_j = O.}$

4.3. - f et g sont deux projecteurs qui commutent et qui sont de rang 1, donc leurs images sont des droites vectorielles.

- Si ces droites vectorielles sont égales, alors, d'après 2.3, on a $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$, mais, comme $f \circ g = g \circ f$, on a donc $f = g$.
- Si ces droites vectorielles sont distinctes, leur intersection est réduite au vecteur nul. Comme, d'après 3.1., $f \circ g$ est un projecteur d'image $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g$, ce projecteur $f \circ g$ est nul.

$\boxed{\text{Si } f \text{ et } g \text{ sont deux projecteurs de rang 1, qui commutent, alors } f = g \text{ ou } f \circ g = g \circ f = 0.}$

Cinquième partie

5.1. - $\operatorname{Ker}(f \circ g)$ est l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(g(x)) = 0$, donc des x tels que $g(x) \in \operatorname{Ker} f$. C'est donc $g^{-1}(\operatorname{Ker} f)$ donc, d'après 1.3),

$\boxed{\operatorname{Ker}(f \circ g) = \operatorname{Ker} g \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g).}$

5.2. -

- Si $x \in \operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Im} g + \operatorname{Ker} f)$, on peut l'écrire $f(x_1)$ et aussi $g(x_2) + x_3$ avec $f(x_3) = 0$.

Comme $f \circ f = f$, on a aussi $x = f \circ f(x_1) = f(g(x_2) + x_3) = f(g(x_2)) + f(x_3) = f \circ g(x_2)$.

Donc $x \in \operatorname{Im}(f \circ g)$.

- Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Im}(f \circ g)$. On a déjà $x \in \operatorname{Im} f$.

Ensuite, x s'écrit $f(g(y))$ et $g(y)$ peut s'écrire $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \operatorname{Im} f$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} f$ donc $x = f(x_1 + x_2) = f(x_1) = x_1$.

On a donc $x = x_1 = g(y) + (-x_2) \in \operatorname{Im} g + \operatorname{Ker} f$ donc $x \in \operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Im} g + \operatorname{Ker} f)$.

$\boxed{\operatorname{Im}(f \circ g) = \operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Im} g + \operatorname{Ker} f).}$

… projecteurs.

- Supposons que $f \circ g$ est un projecteur. Soit $x \in \mathrm{Im}(f \circ g)$. Donc $f \circ g(x) = x$ et $f(x) = x$, puisque, à fortiori, $x \in \mathrm{Im}\, f$. Donc $x \in \mathrm{Ker}(f - f \circ g) = \mathrm{Ker}(f \circ (I - g))$. D'où l'inclusion : $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Ker}(f \circ (I - g))$.
- Réciproquement, supposons $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Ker}(f \circ (I - g))$.
Pour tout $x \in E$ on a donc $f \circ (I - g) \circ f \circ g(x) = 0$ donc $f \circ f \circ g(x) = f \circ g \circ f \circ g(x)$,
donc $f \circ g(x) = f \circ g \circ f \circ g(x)$, donc $f \circ g$ est un projecteur.
- D'où l'équivalence : $f \circ g$ est un projecteur $\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Ker}(f \circ (I - g))$.
- Comme $I - g$ est un projecteur, on peut appliquer 5.1. :
$\mathrm{Ker}(f \circ (I - g)) = \mathrm{Ker}(I - g) \oplus (\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}(I - g)) = \mathrm{Im}\, g \oplus (\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g)$.

D'autre part, on peut appliquer 5.2. : $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}\, f \cap (\mathrm{Im}\, g + \mathrm{Ker}\, f)$. L'équivalence précédente devient

$$\boxed{f \circ g \text{ est un projecteur si et seulement si } \mathrm{Im}\, f \cap (\mathrm{Im}\, g + \mathrm{Ker}\, f) \subset \mathrm{Im}\, g \oplus (\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g).}$$

Sixième partie

- Si $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$ alors $f \circ g = O$, qui est un projecteur.
- Si $\mathrm{Im}\, g$ n'est pas inclus dans $\mathrm{Ker}\, f$ alors, puisque $\mathrm{Im}\, f$ est une droite vectorielle et $\mathrm{Ker}\, f$ un plan vectoriel, on a $E = \mathrm{Im}\, g \oplus \mathrm{Ker}\, f$. La condition du **5.3)** se simplifie alors et devient :

$$f \circ g \text{ projecteur} \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, g \oplus (\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g).$$

Si $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, g$ cette condition est vérifiée puisque $\mathrm{Im}\, g \oplus (\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g) = \mathrm{Im}\, g \oplus \mathrm{Ker}\, g = E$.

Si $\mathrm{Ker}\, f \neq \mathrm{Ker}\, g$, ces deux plans distincts d'un espace de dimension 3 se coupent suivant une droite. $\mathrm{Im}\, g \oplus (\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g)$ est de dimension 2. $\mathrm{Im}\, g \oplus (\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g)$ est alors un plan ; la condition est réalisée si la droite $\mathrm{Im}\, f$ est dans ce plan. On ne peut en dire plus... Retenons :

$$\boxed{f \circ g \text{ est un projecteur si et seulement si } \mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f \text{ ou si } \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, g \oplus (\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g).}$$

Si f et g sont des projecteurs de rang 1, et que la condition précédente soit vérifiée ou non, le rang de $f \circ g$ est inférieur ou égal au rang de f. Il vaut donc 0 ou 1.

S'il vaut 0, $f \circ g$ est l'application nulle. Son noyau et son image sont évidents.

Si le rang de $f \circ g$ est 1, comme $\mathrm{Im}(f \circ g)$ est contenue dans $\mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Im}(f \circ g)$ est nécessairement égal à $\mathrm{Im}\, f$. Le noyau de $f \circ g$ est de dimension 2 et il contient le noyau de g, qui est de dimension 2 : donc $\mathrm{Ker}(f \circ g) = \mathrm{Ker}\, g$.

On a des conditions symétriques pour $g \circ f$.

Le fait que $f \circ g$ soit un projecteur ne restreint pas le nombre de cas possibles :

Avec $f \circ g = 0$, c'est-à-dire la droite $\mathrm{Im}\, g$ incluse dans le plan $\mathrm{Ker}\, f$, la droite $\mathrm{Im}\, f$, pour laquelle la seule contrainte, si l'on veut un projecteur, est de ne pas être incluse dans $\mathrm{Ker}\, f$, peut être, ou non, incluse dans le plan $\mathrm{Ker}\, g$. On peut donc avoir $g \circ f$ nul ou pas.

Pour assurer $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, g \oplus (\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g)$, on choisit d'abord deux plans qui seront $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, g$, puis une droite non contenue dans $\mathrm{Ker}\, g$ et qui sera $\mathrm{Im}\, g$. On est sûr alors que $\mathrm{Im}\, g \oplus (\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g)$ est au moins de dimension 2. On prend dedans une droite non contenue dans $\mathrm{Ker}\, f$ et qui sera $\mathrm{Im}\, f$. Tout cela est faisable avec $f \circ g$ ou $g \circ f$ nuls ou non.

Nous ne pouvons donc préciser les conclusions que nous avions données alors que nous ne supposions pas $f \circ g$ projecteur.

***

Groupe Concours Polytechniques («E.N.S.I.») 1998	Filière PC
Mathématiques 1	Durée : 4 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Les deux problèmes sont indépendants.

$\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels.

Problème I

On désigne par $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On se donne trois réels (a, b, c) avec $b \neq 0$ et on pose :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1)

a) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}$ qui commutent avec $\mathbf{F}$ est un sous–espace vectoriel de $\mathscr{M}$. On le notera $\mathscr{F}$.

b) Montrer que $(\mathbf{F}, \mathbf{I})$ est une base de $\mathscr{F}$.

c) Établir que pour tout entier $n \geqslant 0$, $\mathbf{F}^n$ appartient à $\mathscr{F}$.

2) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $\mathbf{F}^n = \alpha_n \mathbf{F} + \beta_n \mathbf{I}$.

a) Justifier l'existence de (α_n, β_n).

b) Déterminer α_2 et β_2 en fonction de a, b, c. Que dire de $\mathbf{F}$ si $\beta_2 = 0$?

c) Déterminer une relation de récurrence entre α_n, α_{n+1}, et α_{n+2}.

d) Déterminer les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand $a = 3$, $b = c = -2$.

e) Déterminer les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand $a = 3$, $b = c = 1$.

3)

a) Montrer que $\mathscr{F}$ est un anneau commutatif pour le produit matriciel habituel.

b) A quelle condition nécessaire et suffisante, portant sur α_2 et β_2, $\mathscr{F}$ est-il un corps ?

c) Dans le cas où $\mathscr{F}$ est un corps, résoudre dans $\mathscr{F}$ l'équation : $\mathbf{X}^2 = -\mathbf{I}$. Que peut-on conclure ?

d) $\mathscr{F}$ est-il un corps dans les cas indiqués aux questions 2-c) et 2-d) ?
Si non, caractériser alors tous ses éléments non inversibles.

4) On considère l'endomorphisme u de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{M}$ défini par :

$$u : \mathbf{M} \in \mathscr{M} \longrightarrow \mathbf{F}.\mathbf{M}$$

a) Montrer que $\mathscr{F}$ est stable par u.

b) Établir que u est un automorphisme de $\mathscr{M}$ si et seulement si F est inversible.

c) Donner la matrice de u dans la base de $\mathscr{M}$ formée des matrices :

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) A quelle condition nécessaire et suffisante, portant sur α_2 et β_2, u est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Déterminer les valeurs propres de u dans chacun des cas indiqués aux questions 2) c) et 2) d).

Les 3/2 pourront laisser cette question d) de côté.

Problème II

Si $n \geqslant 1$ est un entier, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

On désigne par $<.,.>$ le produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire celui pour lequel la base naturelle $\{(1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)\}$ est orthonormée.

Soient $a < b$ deux réels et $n \geqslant 3$ un entier.

On désigne par $C^2[a,b]$ l'ensemble des fonctions numériques deux fois continûment dérivables sur $[a,b]$.

On divise l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles de longueur $h = \dfrac{b-a}{n}$ et on considère les $(n+1)$ points de $[a,b]$: $x_k = a + k.h$; $k = 0,\dots,n$.

On se donne une fonction numérique f définie sur $[a,b]$ et on note f_k ses valeurs aux points x_k, c'est-à-dire :

$$\forall k \in \{0,\dots,n\},\ f(x_k) = f_k.$$

Si α et β sont deux réels donnés, on désigne par $W(f,\alpha,\beta)$ l'ensemble des fonctions numériques u qui vérifient les trois propriétés :

P1) u appartient à $C^2[a,b]$.

P2) u coïncide avec f en chaque point x_k : $\forall k \in \{0,\dots,n\}$, $u(x_k) = f_k$.

P3) $u'(a) = \alpha$, $u'(b) = \beta$.

On désigne par S l'ensemble des fonctions numériques u de $C^2[a,b]$ qui vérifient la propriété :

P4) Sur chaque intervalle $]x_{k-1}, x_k[$, $(k = 1,\dots,n)$, u est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

Justifier succinctement que S est non vide.

On désigne par $\vec{e_0}, \vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$, la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ et on identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^{n+1}$ à des matrices à $(n+1)$ lignes et une colonne.

A. Interpolation de f par une fonction de S

Les réels α et β étant donnés, on cherche une fonction G de $W(f,\alpha,\beta)$ qui soit dans S.

1) Soit $\vec{m} = \sum_{k=0}^{n} m_k \vec{e_k}$ un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ donné par ses composantes sur la base canonique.

a) Soit k un entier de $\{1,\dots,n\}$ montrer qu'il existe un unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$, de degré inférieur ou égal à 3, P_k, tel que

$$\begin{cases} P_k(x_{k-1}) &= f_{k-1} \\ P_k(x_k) &= f_k \\ P_k''(x_{k-1}) &= m_{k-1} \\ P_k''(x_k) &= m_k \end{cases}$$

On cherchera P_k sous la forme

$$P_k(X) = a_0(x_k - x)^3 + b_0(x - x_{k-1})^3 + a_1(x_k - x) + b_1(x - x_{k-1})$$

et on explicitera les coefficients (a_0, b_0, a_1, b_1) en fonction de $(f_{k-1}, f_k, m_{k-1}, m_k, h)$.

b) On considère la fonction g dont la restriction à $[x_{k-1}; x_k]$, $(k = 1,\dots,n)$, est P_k.

Vérifier que g est bien définie et montrer qu'une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que g soit deux fois continûment dérivable sur $[a;b]$ est que :

$$m_{k-1} + 4m_k + m_{k+1} = \frac{6}{h^2}(f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1}) \ :\ k = 1,\dots,n-1$$

c) En déduire qu'une CNS pour que g soit deux fois continûment dérivable sur $[a,b]$ et vérifie : $g'(a) = \alpha$, $g'(b) = \beta$ est que le vecteur $\vec{m}$ soit solution d'un système linéaire de la forme

$$\text{(II.1)} \qquad A.\vec{m} = \vec{b}$$

où A est une matrice de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont $(2,4,4,\dots,4,2)$ et $\vec{b}$ un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ que l'on précisera.

On ne cherchera pas à résoudre ce système.

Que remarque-t-on quant à la forme de A ?

2) Soit $\vec{v} = \sum_{k=0}^{n} v_k \vec{e}_k$ un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ donné par ses composantes sur la base canonique.

a) Montrer que $< A.\vec{v}, \vec{v} > \geqslant < \vec{v}, \vec{v} >$.

Déterminer les vecteurs $\vec{v}$ pour lesquels l'inégalité précédente est une égalité.

b) En déduire que A est inversible.

c) En déduire l'existence et l'unicité de la fonction G cherchée.

Indiquer au moins un algorithme permettant de résoudre en pratique le système (II-1).

3) On suppose pour cette question que $\alpha = \beta = 0$.

Montrer que le vecteur $\vec{b}$ du membre de droite de (II-1) est de la forme $\vec{b} = H.\vec{f}$

où $\vec{f} = \sum_{k=0}^{n} f_k \vec{e_k}$ et H est une matrice de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ que l'on précisera.

Déterminer le noyau de H. Pouvait-on le connaître sans expliciter H ?

4) Application

On considère la fonction $f(x) = \cos(x)$ avec $a = 0$ et $b = \pi$, et on prend $n = 6$.

On cherche la solution $(m_0, m_1,\dots,m_6)$ du système (II-1), dans le cas où $\alpha = f'(a)$, $\beta = f'(b)$.

a) Montrer, sans calculer $\vec{m}$, que l'on a les relations : $m_i = -m_{6-i}$; $i = 0,1,2,3$.

On pourra pour cela, par exemple, introduire la matrice de permutation associée à ces relations.

Cette propriété se généralise-t-elle à n quelconque ?

b) Déterminer alors $(m_0, m_1,\dots,m_6)$.

B. Une propriété « extrémale » des fonctions de S

1) Montrer que S est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Indiquer sa dimension ; il pourra être utile d'exhiber une application linéaire de S dans un certain $\mathbb{R}^p$.

2) On désigne par S_0, la partie de S formée des fonctions u vérifiant : $u'(a) = u'(b) = 0$.

Montrer que S_0 est un sous-espace vectoriel de S. Indiquer une base de S_0 ainsi que sa dimension.

Si α et β sont deux réels donnés caractériser l'ensemble $S(\alpha,\beta)$ des éléments u de S vérifiant :

$$u'(a) = \alpha \text{ et } u'(b) = \beta.$$

3) A chaque fonction u de $C^2[a,b]$ on associe le nombre $\Phi(u)$ défini par : $\Phi(u) = \displaystyle\int_a^b [u''(x)]^2 dx$.

Les réels α et β étant donnés, G désigne la fonction déterminée à la partie précédente.

a) Montrer que pour tout u de $W(f,\alpha,\beta)$ on a $\Phi(u - G) = \Phi(u) - \Phi(G)$.

Il sera utile de considérer directement l'expression $\Phi(u - G) - [\Phi(u) - \Phi(G)]$.

b) En déduire que $\Phi(G) = \inf\limits_{u \in W(f,\alpha,\beta)} \Phi(u)$.

c) Existe-t-il une fonction g de S vérifiant la propriété P2 et la condition $g''(a) = g''(b) = 0$?

Si oui, que représente $\Phi(g)$?

***

Problème I

1)a) $\mathscr{F}$ est inclus dans $\mathscr{M}$, $\mathscr{F}$ est non vide (il contient la matrice nulle), est stable par combinaison linéaire, car si M_1 et M_2 commutent avec F, $\alpha M_1 + \beta M_2$ commute aussi, donc

$$\boxed{\mathscr{F} \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathscr{M}.}$$

1)b) $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas colinéaire à I, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire de I et E_1 et F n'est pas combinaison linéaire des trois précédentes puisque $-b \neq 0$.
(I, E_1, E_2, F) est donc une base de $\mathscr{M}$. Une matrice $xI + yE_1 + zE_2 + tF$ de $\mathscr{M}$ commute avec F si et seulement si $yE_1 + zE_2$ commute avec F.
$yE_1 + zE_2 = \begin{bmatrix} y & 0 \\ z & 0 \end{bmatrix}$ donc les termes de la deuxième colonne de $(yE_1 + zE_2)F$ sont $-by$ et $-bz$; ceux de la deuxième colonne de $F(yE_1 + zE_2)$ sont nuls donc $(yE_1 + zE_2)F = F(yE_1 + zE_2)$ si et seulement si $y = z = 0$. Les matrices qui commutent avec F sont donc les $xI + tF$. Finalement :

$$\boxed{\mathscr{F} \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel de dimension 2 et (I,F) est une base de } \mathscr{F}.}$$

1)c) Par récurrence immédiate, pour tout entier n, F^n commute avec F, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ F^n \in \mathscr{F}.}$$

2)a) Puisque (I,F) est une base de $\mathscr{F}$ et que $F^n \in \mathscr{F}$,

$$\boxed{F^n \text{ s'écrit, et de façon unique, comme combinaison linéaire } \alpha_n F + \beta_n I \text{ de F et I.}}$$

2)b) $F^2 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -(ab+bc) \\ ab + bc & -b^2 + c^2 \end{pmatrix} = aF + cF - b^2 I - c^2 I$, donc

$$\boxed{\alpha_2 = a + c\ ;\ \beta_2 = -b^2 - ac}$$

Le déterminant de F est $b^2 + ac$, donc :

$$\boxed{\beta_2 = 0 \text{ si et seulement si F n'est pas inversible.}}$$

2)c) Partant de $F^n = \alpha_n F + \beta_n I$, on trouve $F^{n+1} = (\alpha_2 \alpha_n + \beta_n) F + \beta_2 \alpha_n I$.
L'unicité de la décomposition impose : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_2 \alpha_n + \beta_n \\ \beta_{n+1} = \beta_2 \alpha_n \end{cases}$, d'où $\alpha_{n+2} = \alpha_2 \alpha_{n+1} + \beta_{n+1}$ puis :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+2} - \alpha_2 \alpha_{n+1} - \beta_2 \alpha_n = 0}$$

2)d) C'est une récurrence linéaire usuelle. Si a = 3 et b = c = -2, alors $\alpha_2 = 1$ et $\beta_2 = 2$.
La relation de récurrence s'écrit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} - 2\alpha_n = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$, dont les racines sont 2 et -1.
α_n est de la forme $\lambda 2^n + \mu(-1)^n$, et on obtient λ et μ en utilisant : $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 = 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}}$$

Ensuite, pour $n \geqslant 1$, $\beta_n = \beta_2 \alpha_{n-1} = 2\alpha_{n-1} = \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3}$, vrai aussi pour $n = 0$, donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}}$$

2)e) Pour $a = 3$ et $b = c = 1$, on a $\alpha_2 = 4$ et $\beta_2 = -4$ et la récurrence $\alpha_{n+2} - 4\alpha_{n+1} + 4\alpha_n = 0$.
L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$, qui admet 2 pour racine double.
Donc α_n est de la forme $(\lambda n + \mu)2^n$.
On obtient λ et μ en faisant $n = 0$ puis $n = 1$. Ensuite on obtient β_n par $\beta_n = \beta_2 \alpha_{n-1}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{aligned} \alpha_n &= n 2^{n-1} \\ \beta_n &= (1 - n)\, 2^n \end{aligned}}$$

3)a) Puisque $F^2 \in \mathscr{F}$, le produit de deux éléments de $\mathscr{F}$ est dans $\mathscr{F}$.
En outre, I et F commutent, donc ce produit de deux éléments de $\mathscr{F}$ est commutatif.
Enfin $\mathscr{F}$ contient I, élément neutre de la multiplication. Résumons

$$\boxed{\mathscr{F} \text{ est un sous anneau commutatif de } \mathscr{M}.}$$

(C'est même une sous-algèbre.)

3)b) Cet anneau est un corps si et seulement si tout élément non nul admet, pour la multiplication, un inverse (dans l'anneau).
Pour x, y, z, t réels, $(xF + yI)(zF + tI) = xzF^2 + (yz + xt)F + ytI = (xz\alpha_2 + yz + xt)F + (yt + xz\beta_2)I$,
qui est égal à I si et seulement si $\begin{cases} (\alpha_2 z + t)\,x + zy = 0 \\ (\beta_2 z)\,x + ty = 1 \end{cases}$ (1)
(z, t) étant donné, on peut voir (1) comme un système linéaire d'inconnues (x, y).
Dans tous les cas, ce système ne peut donner plusieurs solutions puisque l'inverse d'une matrice, s'il existe, est unique.
S'il n'est pas de Cramer, ce système n'a donc pas de solution.
Il y a donc 0 ou 1 solution suivant que le déterminant $t^2 + \alpha_2 zt - \beta_2 z^2$ est nul ou n'est pas nul.
L'anneau $\mathscr{F}$ est un corps si et seulement si le système a une solution pour tout $(z, t) \neq (0, 0)$ donc si et seulement si l'équation $t^2 + \alpha_2 zt - \beta_2 z^2 = 0$ n'a que la solution : $z = 0, t = 0$, donc si et seulement si, pour $z \neq 0$, le trinôme $t^2 + \alpha_2 zt - \beta_2 z^2$ n'a pas de racine.
Le discriminant du trinôme étant $(\alpha_2^2 + 4\beta_2)z^2$, on voit que

$$\boxed{\mathscr{F} \text{ est un corps si et seulement si } \alpha_2^2 + 4\beta_2 < 0.}$$

3)c) Ici $\mathscr{F}$ est un corps donc $\alpha_2^2 + 4\beta_2 < 0$. Alors, en modifiant un peu le système (1) :

$$(xF + yI)^2 = -I \Leftrightarrow \begin{cases} x(\alpha_2 x + 2y) = 0 \\ \beta_2 x^2 + y^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 x + 2y = 0 \\ \beta_2 x^2 + y^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{\alpha_2 x}{2} \\ \beta_2 x^2 + \dfrac{\alpha_2^2 x^2}{4} = -1 \end{cases}$$

On obtient deux solutions :

$$\boxed{X = \pm \frac{1}{\sqrt{-(\alpha_2^2 + 4\beta_2)}}(2F - \alpha_2 I)}$$

Désignons par X_0 l'une de ces solutions, choisie une fois pour toutes.
Puisque F n'est pas colinéaire à I, X_0 n'est pas colinéaire à I donc la famille (I, X_0) est une base de $\mathscr{F}$.
L'application $\Phi : x + iy \in \mathbb{C} \mapsto xI + yX_0 \in \mathscr{F}$ est donc bijective.
De plus $\Phi(z_1 + z_2) = \Phi(z_1) + \Phi(z_2)$ et

$$\begin{aligned} \Phi(z_1 . z_2) &= \Phi(x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)) = (x_1 x_2 - y_1 y_2)I + (x_1 y_2 + x_2 y_1)X_0 \\ &= (x_1 I + y_1 X_0)(x_2 I + y_2 X_0) \ \ (\text{car } X_0^2 = -I) = \Phi(z_1).\Phi(z_2). \end{aligned}$$

Φ est donc un isomorphisme de corps.

$$\boxed{\mathscr{F} \text{ est un corps isomorphe à } \mathbb{C}.}$$

3)d) Dans le cas $a = 3$, $b = c = -2$, on a : $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 2$ et $\alpha_2^2 + 4\beta_2 > 0$ donc

$$\boxed{\mathscr{F} \text{ n'est pas un corps}}$$

... dans l'anneau $\mathscr{F}$» ce qui est différent de «non inversible dans $\mathscr{M}$». ... On peut considérer que cela veut dire «n'admettant

Les matrices $(z\mathrm{F}+t\mathrm{I})$ n'admettant pas d'inverse dans l'anneau $\mathscr{F}$ sont celles pour lesquelles le système (1) du 3)b) ne donne pas de solution ce qui, on l'a vu, équivaut à $t^2+\alpha_2 zt-\beta_2 z^2=0$

Ici $t^2+\alpha_2 zt-\beta_2 z^2 = t^2+zt-2z^2$ qui est nul pour $t=z$ ou $t=-2z$.

$\boxed{\text{Les éléments non inversibles de } \mathscr{F} \text{ sont les matrices colinéaires à } (\mathrm{F}-2\mathrm{I}) \text{ ou } (\mathrm{F}+\mathrm{I})}$

Dans le cas $a=3, b=c=1$, on a $\alpha_2=4, \beta_2=-4$ et $\alpha_2^2+4\beta_2=0$ donc :

$\boxed{\mathscr{F} \text{ n'est pas un corps}}$

Les matrices non inversibles $(z\mathrm{F}+t\mathrm{I})$ sont ici celles qui vérifient $t^2+4zt+4z^2=0$ soit $t=-2z$.

$\boxed{\text{Les éléments non inversibles de } \mathscr{F} \text{ sont les matrices colinéaires à } (\mathrm{F}-2\mathrm{I})}$

4)a) Pour tout $\mathrm{M}\in\mathscr{F}$, on a : $u(\mathrm{M})\cdot\mathrm{F}=\mathrm{F}\cdot\mathrm{M}\cdot\mathrm{F}=\mathrm{F}\cdot\mathrm{F}\cdot\mathrm{M}=\mathrm{F}\cdot u(\mathrm{M})$, donc $u(\mathrm{M})\in\mathscr{F}$. Donc :

$\boxed{\mathscr{F} \text{ est stable par } u.}$

4)b) si u est un automorphisme de $\mathscr{M}$, alors il existe $\mathrm{M}\in\mathscr{M}$ telle que $u(\mathrm{M})=\mathrm{F}\cdot\mathrm{M}=\mathrm{I}$, donc F est inversible.

Si F est inversible, $u(\mathrm{M})=0$ équivaut à $\mathrm{M}=0$, donc u est injective. C'est donc un automorphisme de $\mathscr{M}$. Résumons :

$\boxed{u \text{ est un automorphisme de } \mathscr{M} \text{ si et seulement si F est inversible.}}$

4)c) $(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2,\mathrm{E}_3,\mathrm{E}_4)$ est effectivement une base de $\mathscr{M}$ (la base usuelle).

En cherchant les images de ces matrices par u, on obtient U, la matrice de u dans cette base $(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2,\mathrm{E}_3,\mathrm{E}_4)$.

$$\boxed{U=\begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0\\ b & c & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & -b\\ 0 & 0 & b & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{F} & 0\\ 0 & \mathrm{F}\end{pmatrix}}$$

4)d) $\mathrm{Vect}(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2)$ et $\mathrm{Vect}(\mathrm{E}_3,\mathrm{E}_4)$ sont donc stables par u donc u est diagonalisable si et seulement si ses deux restrictions le sont. Comme ces deux restrictions admettent F pour matrice, U est diagonalisable si et seulement si F est diagonalisable.

F n'est pas une matrice d'homothétie ($b\neq 0$), donc elle ne peut être semblable à une matrice d'homothétie. Elle est donc diagonalisable si et seulement si elle admet deux valeurs propres réelles distinctes donc si son polynôme caractéristique $(x-a)(x-c)+b^2=x^2-(a+c)x+(ac+b^2)=x^2-\alpha_2 x-\beta_2$ a un discriminant strictement positif. Donc

$\boxed{u \text{ est diagonalisable si et seulement si } \alpha_2^2+4\beta_2>0}$

Le polynôme caractéristique χ_U de U est le carré du polynôme caractéristique de F donc :

Quand $a=3$ et $b=c=-2$, $\chi_U(x)=(x^2-x-2)^2$,

$\boxed{\text{u admet deux valeurs propres doubles -1 et 2}}$

Quand $a=3$ et $b=c=1$, $\chi_U(x)=(x-2)^4$,

$\boxed{\text{u admet une valeur propre quadruple 2}}$

Problème II

La fonction nulle est de classe C^2 sur $[a,b]$ et vérifie P4) donc $\boxed{S \text{ est non vide}}$

A) Interpolation de f par une fonction de S

a) Les polynômes $(x_k-x)^3$, $(x-x_{k-1})^3$, (x_k-x), $(x-x_{k-1})$ forment une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

En effet, leur nombre est égal à la dimension de $\mathbb{R}_3[x]$ et ils forment une famille libre :

Supposons que $P(x)=a(x_k-x)^3+b(x-x_{k-1})^3+c(x_k-x)+d(x-x_{k-1})=0$. Alors $P''(x_k)=0$ donc $b=0$. De même $a=0$. Ensuite $P(x_k)=0$ donc $d=0$ et de même $c=0$.

On peut donc effectivement chercher P_k sous la forme

$$P_k(x)=a_0(x_k-x)^3+b_0(x-x_{k-1})^3+a_1(x_k-x)+b_1(x-x_{k-1}).$$

Alors $\begin{cases} P_k(x_{k-1}) &= a_0h^3+a_1h\\ P_k(x_k) &= b_0h^3+b_1h\\ P_k''(x_{k-1} &= 6a_0h\\ P_k''(x_k) &= 6b_0h\end{cases}$ et les conditions imposées s'écrivent $\begin{cases} a_0h^3+a_1h &= f_{k-1}\\ b_0h^3+b_1h &= f_k\\ 6a_0h &= m_{k-1}\\ 6b_0h &= m_k\end{cases}$

Elles définissent un unique quadruplet (a_0,b_0,a_1,b_1), donc une unique solution :

$$\boxed{\begin{array}{l} P_k(x)=a_0(x_k-x)^3+b_0(x-x_{k-1})^3+a_1(x_k-x)+b_1(x-x_{k-1}) \text{ avec}\\ a_0=\dfrac{m_{k-1}}{6h},\ a_1=\dfrac{f_{k-1}}{h}-\dfrac{hm_{k-1}}{6},\ b_0=\dfrac{m_k}{6h} \text{ et } b_1=\dfrac{f_k}{h}-\dfrac{hm_k}{6}.\end{array}}$$

1)b) Au point de subdivision x_k, pour $k=1,..,n-1$, g est définie de deux façons, mais les deux définitions coïncident puisque $P_k(x_k)=P_{k+1}(x_k)=f_k$.

$\boxed{g \text{ est bien définie sur } [a,b]}$

en plus, cette égalité assure la continuité à droite et à gauche des points de subdivision.

Sur les intervalles ouverts limités par ces points de subdivision, g est bien sûr C^∞. Donc g sera de classe C^2 sur $[a,b]$ si et seulement si les limites des dérivées premières et secondes à droite et à gauche de ces points de subdivision sont les mêmes, donc g sera de classe C^2 sur $[a,b]$ si et seulement si pour $k=1,..,n-1$ on a $P_k'(x_k)=P_{k+1}'(x_k)$ et $P_k''(x_k)=P_{k+1}''(x_k)$.

La deuxième relation est vérifiée grâce au choix des P_k et, puisque

$$P_k'(x)=-\frac{1}{2h}m_{k-1}(x_k-x)^2+\frac{1}{2h}m_k(x-x_{k-1})^2+\frac{1}{h}(f_k-f_{k-1})-\frac{h}{6}(m_k-m_{k-1}),$$

la première équivaut à :

$$\boxed{\forall k=1,..,n-1,\ m_{k-1}+4m_k+m_{k+1}=\frac{6}{h^2}(f_{k-1}-2f_k+f_{k+1})}$$

1)c) Outre les conditions précédentes, on impose $g'(a)=\alpha$ et $g'(b)=\beta$ équivalentes à $P_1'(a)=\alpha$ et $P_n'(b)=\beta$, qui s'écrivent respectivement $2m_0+m_1=\dfrac{6}{h^2}(-f_0+f_1-\alpha h)$ et $m_{n-1}+2m_n=\dfrac{6}{h^2}(f_{n-1}-f_n+\beta h)$.

On peut rassembler les conditions de 1)b) et 1)c) en un système dont les inconnues sont $(m_0,\dots,m_n)$, système que l'on peut écrire matriciellement $\mathrm{A}\vec{\mathrm{m}}=\vec{\mathrm{b}}$ en utilisant le vecteur inconnu $\vec{\mathrm{m}}$ de l'énoncé et les matrices

$$\boxed{\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & & \cdots & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0 & & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 4 & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 & 4 & 1\\ & & & & 0 & 1 & 2\end{bmatrix} \text{ et } \vec{\mathrm{b}}=\frac{6}{h^2}\begin{bmatrix} -f_0+f_1-\alpha h\\ f_0-2f_1+f_2\\ \vdots\\ f_{k-1}-2f_k+f_{k+1}\\ \vdots\\ f_{n-2}-2f_{n-1}+f_n\\ f_{n-1}-f_n+\beta h\end{bmatrix}}$$

On remarque que A est symétrique.

2)a) En faisant un produit matriciel, on trouve $(A-I)\vec{v} = \begin{bmatrix} v_0+v_1 \\ v_0+3v_1+v_2 \\ \vdots \\ v_{k-1}+3v_k+v_{k+1} \\ \vdots \\ v_{n-1}+v_n \end{bmatrix}$ donc

$$\langle (A-I)\vec{v},\vec{v}\rangle = v_0^2 + 3\sum_{k=1}^{n-1} v_k^2 + v_n^2 + 2\sum_{k=0}^{n-1} v_k v_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1}(v_k+v_{k+1})^2 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k^2 \geqslant 0 \text{ donc}$$

$$\boxed{\langle A\cdot\vec{v},\vec{v}\rangle \geqslant \langle\vec{v},\vec{v}\rangle}$$

L'inégalité devient égalité quand tous les termes de la somme de carrés sont nuls donc si $v_0+v_1 = v_1+v_2 = \cdots = v_{n-1}+v_n = 0 = v_1 = v_2 = \cdots v_{n-1}$. donc

$$\boxed{\langle A\cdot\vec{v},\vec{v}\rangle = \langle\vec{v},\vec{v}\rangle \text{ si et seulement si } \vec{v} = \vec{0}.}$$

2)b) Si $A\cdot\vec{v} = \vec{0}$, alors $\langle A\cdot\vec{v},\vec{v}\rangle = 0$. Puisque $0 \leqslant \langle\vec{v},\vec{v}\rangle \leqslant \langle A\cdot\vec{v},\vec{v}\rangle$, on a donc $\langle\vec{v},\vec{v}\rangle = 0$, donc $\vec{v} = \vec{0}$ donc le noyau de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{n+1}$ admettant la matrice carrée A comme matrice sur la base canonique est réduit à $\{0\}$ donc $\boxed{\text{A est inversible}}$

c) Pour un vecteur $\vec{m}$ donné, on a trouvé au 1)a) une unique fonction g vérifiant P2) et P4). D'après 1)b), cette fonction g vérifie en outre P1) et P3) si et seulement si ce vecteur $\vec{m}$ vérifie $A.\vec{m} = \vec{b}$ Puisque A est inversible, il y a un unique vecteur $\vec{m}$ convenable. On en déduit

$$\boxed{\text{l'existence et l'unicité de la fonction G de } W^*(f,\alpha,\beta) \text{ qui soit dans } S.}$$

On pourrait procéder, avec Maple, de la façon suivante :
On choisit une fonction f permettant de calculer $f_k = f(k)$ et on affecte aux variables $a, b, n, alpha, beta$ des valeurs numériques à notre convenance.
On prévoit pour les b_i et les m_i deux tableaux de longueur $n+1$. On remplit le tableau des b_i en utilisant les formules en fonction de $a, b, n, alpha, beta$, formules qui se programment sans problème.
On affecte à $m[0]$ une valeur littérale, x par exemple, et à $m[1]$ la valeur $b[0]-2m[0]$, de façon à ce que la première équation soit satisfaite.
On utilise ensuite une boucle "for" pour finir de remplir le tableau m, à l'aide de la formule $m[k] = -4m[k-1] - m[k-2] + b[k-1]$.
On demande alors à Maple de résoudre la dernière équation : $m[n-1] + 2m[n] = b[n]$ par rapport à l'inconnue x (cette équation est du premier degré, Maple sait faire) puis d'évaluer le tableau m.

3) Ici, $\alpha = \beta = 0$ donc

$$\vec{b} = \frac{6}{h^2}\begin{bmatrix} -f_0+f_1 \\ f_0-2f_1+f_2 \\ \vdots \\ f_{k-1}-2f_k+f_{k+1} \\ \vdots \\ f_{n-2}-2f_{n-1}+f_n \\ f_{n-1}-f_n \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_k \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{qui est bien de la forme } \vec{b} = H\cdot\vec{f}.}$$

$\vec{f} \in \ker H$ si et seulement si $\begin{cases} -f_0+f_1 = 0 \\ f_0-2f_1+f_2 = 0 \\ \vdots \\ f_{n-2}-2f_{n-1}+f_n = 0 \\ f_{n-1}-f_n = 0 \end{cases}$ qui équivaut à $f_0 = f_1 = \ldots = f_n$

$$\boxed{\ker H \text{ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur } (1,1,\ldots,1).}$$

Pouvait-on connaître ker H sans expliciter H ?
Si $\vec{f} \in \ker H$, on a $\vec{b} = \vec{0}$, donc, comme A est inversible, $\vec{m} = \vec{0}$ donc les P_k sont du premier degré. Ils se raccordent en donnant une fonction g dérivable sur $[a,b]$. Cette fonction g est donc elle-même du premier degré sur $[a,b]$. Comme $g'(a) = \alpha = 0$, g est constante sur $[a,b]$ donc les f_k sont tous égaux, et le vecteur $\vec{f}$ est colinéaire à $(1,1,\ldots,1)$.
Réciproquement si les f_k sont tous égaux, la fonction constante g égale à f_0, est solution du problème ; c'est donc l'unique solution ; les P_k sont donc constants ; on a donc $\vec{m} = \vec{0}$ donc $\vec{b} = \vec{0}$, donc $\vec{f}$ est dans le noyau de H.

4) Application

$f(x) = \cos(x)$, $f'(x) = -\sin(x)$, $a = 0$, $b = \pi$, donc $\alpha = \beta = 0$. On a donc $\vec{b} = H\cdot\vec{f}$.
4)a) Soit $\vec{m}$ la solution ; on a donc $A\cdot\vec{m} = H\cdot\vec{f}$
Soit P la matrice (de permutation) de passage de la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^7$ à $\mathscr{B}'$, la même base rangée dans l'ordre inverse. Si $\vec{m}'$ et $\vec{f}'$ sont les matrices de $\vec{m}$ et $\vec{f}$ sur $\mathscr{B}'$, on a $\vec{m} = P.\vec{m}'$ et $\vec{f} = P.\vec{f}'$ donc $A.P.\vec{m}' = H.P.\vec{f}'$ et $P.A.P.\vec{m}' = P.H.P.\vec{f}'$.
Si A est la matrice d'un certain endomorphisme de $\mathbb{R}^7$ sur $\mathscr{B}$, alors $P.A.P(= P^{-1}.A.P)$ est la matrice de cet endomorphisme sur $\mathscr{B}'$. P.A.P est donc la symétrique de A par rapport au centre. Vue la forme de A, on a donc $P.A.P = A$ et de même $P.H.P = H$.
On a donc $A.\vec{m}' = H.\vec{f}'$.
Mais $\vec{f}' = -\vec{f}$, car $h = \frac{\pi}{6}$ et, pour k de 0 à 6, $f_{6-k} = \cos(\pi - k\frac{\pi}{6}) = -f_k$.
Donc $A.\vec{m}' = -H.\vec{f} = -A.\vec{m}$ puis $\vec{m}' = -\vec{m}'$. Donc :

$$\boxed{\forall i \in \{0,\cdots,6\},\ m_{6-i} = -m_i.}$$

Pour n quelconque et k de 0 à n, on a encore $f_{n-k} = \cos(\pi - k\frac{\pi}{n}) = -f_k$, donc :

$$\boxed{\text{La propriété se généralise à } n \text{ quelconque.}}$$

4)b) Revenons à $n = 6$. On a $m_3 = -m_3$ donc $m_3 = 0$. Reste à trouver m_0, m_1, m_2 qui sont donnés par
$\begin{cases} 2m_0 + m_1 = \frac{108}{\pi^2}\left(-2+\sqrt{3}\right) \\ m_0 + 4m_1 + m_2 = \frac{108}{\pi^2}\left(3-2\sqrt{3}\right) \\ m_1 + 4m_2 = \frac{108}{\pi^2}\left(-2+\sqrt{3}\right) \end{cases}$ On obtient ainsi :

$$\boxed{\begin{aligned} &m_0 = -m_6 = 108\left(-22+12\sqrt{3}\right)/13\pi^2;\ \ m_1 = -m_5 = 108\left(18-11\sqrt{3}\right)/13\pi^2; \\ &m_2 = -m_4 = 108\left(-11+6\sqrt{3}\right)/13\pi^2;\ m_3 = 0. \end{aligned}}$$

B) **Une propriété « extrémale » des fonctions de S**

1) S est une partie non vide de $C^2[a,b]$, visiblement stable par combinaison linéaire :

$$\boxed{\text{S est un sous-espace vectoriel de } C^2[a,b].}$$

Soit Φ l'application de S dans $\mathbb{R}^{n+3}$ définie par : $\forall u \in S$, $\Phi(u) = (u'(a), u'(b), u(x_0), u(x_1), \cdots u(x_n))$.
Φ est linéaire, elle est bijective d'après A-2) (existence et unicité de la fonction $u \in S$ qui vérifie en plus P2) et P3) quand $u'(a), u'(b), u(x_0), u(x_1), \cdots u(x_n)$ sont donnés.)
Donc S et $\mathbb{R}^{n+3}$ ont la même dimension :

$$\boxed{\dim(S) = n+3.}$$

2) S_0 est l'image réciproque, par l'isomorphisme précédent, de l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^{n+3}$ dont les deux premières composantes sont nulles, c'est-à-dire du sous-espace de $\mathbb{R}^{n+3}$ engendré par les $n+1$ derniers vecteurs de la base canonique. Donc

$$\boxed{\dim(S_0) = n+1.}$$

L'isomorphisme fournit aussi une base $(u_0,\ldots,u_n)$ de S_0, où u_l est l'unique fonction G de S qui vérifie : $G'(a) = G'(b) = 0$, $G(x_l) = 1$ et $G(x_k) = 0$ pour $k \neq l$. On imagine bien, graphiquement, comment une telle fonction est faite : En dehors des cas particuliers $l = 0$ et $l = n$, elle est nulle en dehors de $[x_{l-1}, x_{l+1}]$

et, sur cet intervalle, elle est du troisième degré, avec $g(x_{l-1}) = g(x_{l+1}) = g'(x_{l-1}) = g'(x_{l+1}) = 0$ et $g(x_l) = 1$.

L'ensemble $S(\alpha,\beta)$ des éléments u de S qui vérifient $u'(a) = \alpha, u'(b) = \beta$ n'est pas vide, d'après ce qui précède. Désignons par U_0 un élément de cet ensemble. Un autre élément U de S appartient à $S(\alpha,\beta)$ si et seulement si $(U - U_0)'(a) = (U - U_0)'(b) = 0$ donc si U est de la forme $U_0 + u$, avec $u \in S_0$. Donc :

$$\boxed{S(\alpha,\beta) \text{ est un sous espace affine de S de direction } S_0}$$

3) G est la fonction déterminée à la partie précédente.

3)a) Soit $u \in \vec{W}(f,\alpha,\beta)$. On a $\Phi(u - G) - (\Phi(u) - \Phi(G)) = \int_a^b 2G''(x)(G''(x) - u''(x))dx$.

Sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, les fonctions utilisées sont des polynômes.

On peut donc, dans $I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} 2G''(x)(G''(x) - u''(x))dx$, faire une intégration par parties :

$I_k = 2\left[G''(G' - u')\right]_{x_k}^{x_{k+1}} - 2\int_{x_k}^{x_{k+1}} G^{(3)}(x)(G'(x) - u'(x))dx$. $G^{(3)}$ est une constante, donc

$\int_{x_k}^{x_{k+1}} G^{(3)}(x)(G'(x) - u'(x))dx = G^{(3)}.\int_{x_k}^{x_{k+1}} (G'(x) - u'(x))dx = G^{(3)}.\left[G(x) - u(x)\right]_{x_k}^{x_{k+1}} = 0$

car u et G prennent la même valeur en chaque point de subdivision.

Donc $I_k = 2\left[G''(G' - u')\right]_{x_k}^{x_{k+1}}$. $G''(G' - u')$ est continue sur $[a, b]$, notamment aux points de subdivision, donc, quand on somme les I_k, il y a télescopage et il reste :

$\Phi(u - G) - (\Phi(u) - \Phi(G)) = 2\left[G''(G' - u')\right]_a^b$.

Ce dernier crochet est nul car $(G' - u')(a) = (G' - u')(b) = 0$. Finalement :

$$\boxed{\Phi(u - G) = \Phi(u) - \Phi(G)}$$

3)b) De par la définition de Φ, $\Phi(u - G)$ est une quantité positive. Donc :

$\forall u \in W(f,\alpha,\beta)$, $\Phi(u) \geqslant \Phi(G)$. Comme de plus $G \in W(f,\alpha,\beta)$, on en déduit que :

$$\boxed{\Phi(G) = \inf_{u \in W(f,\alpha,\beta)} \Phi(u).}$$

c) Tout les calculs de A.1)a) et A.1)b) sont encore valables et la contrainte $g'(a) = \alpha, g'(b) = \beta$ de A.1)c) doit être remplacée par $g''(a) = 0 = g''(b)$, qui équivaut à $m_0 = m_n = 0$. Les inconnues m_0 et m_n disparaissent du système, qui devient :

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} f_0 - 2f_1 + f_2 \\ \vdots \\ f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1} \\ \vdots \\ f_{n-2} - 2f_{n-1} + f_n \end{bmatrix}$$

La matrice $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ est inversible. Pour le prouver, on pourrait reprendre la méthode de la question A-2)a). On peut aussi de la dernière ligne retrancher l'avant-dernière divisée par 4, puis de l'avant-dernière retrancher l'antépénultième divisée par 4 etc.. On obtient une matrice inversible puisqu'elle est triangulaire sans aucun 0 sur la diagonale. Donc :

$$\boxed{\text{Il y a une solution } g \text{ et une seule au problème.}}$$

Pour $u \in C^2[a, b]$ vérifiant P2) on peut reprendre a) jusqu'à $\Phi(u - g) - (\Phi(u) - \Phi(g)) = 2\left[g''(g' - u')\right]_a^b$. Cette fois-ci, le crochet est nul car $g''(a) = g''(b) = 0$. On a donc encore $\Phi(u) \geqslant \Phi(g)$. Donc :

$$\boxed{\Phi(g) \text{ est donc l'Inf de } \Phi(u) \text{ pour } u \text{ dans } C^2[a, b] \text{ vérifiant P2)}}$$

***

Partie I - Préambule

Dans tout le problème, on appelle triangle rectangle pseudo-isocèle (en abrégé TRPI) tout triangle rectangle dont les côtés ont pour longueurs des entiers de la forme a, $a + 1$, c (c est la longueur de l'hypoténuse). On admet qu'il existe une infinité de TRPI (ce résultat sera démontré au II.C) et on classe les TRPI dans l'ordre croissant des valeurs de a.

Ainsi, le triangle de côtés $a = 3$, $a + 1 = 4$, $c = 5$ est le plus petit TRPI.

I.A - Si a et c sont des entiers naturels non nuls, montrer qu'ils définissent un TRPI si et seulement s'ils vérifient la relation

(R1) $\quad 2a^2 - c^2 + 2a + 1 = 0.$

Le but du problème est la détermination des TRPI. On note a_n et c_n les longueurs du plus petit côté et de l'hypoténuse du $n^{\text{ième}}$ TRPI et on définit ainsi deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a_1 = 3$ et $c_1 = 5$. Comme $a = 0$ et $c = 1$ vérifient la relation (R1), on pose $a_0 = 0$ et $c_0 = 1$. Les termes a_n et c_n sont alors définis pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.B - Ecrire un programme permettant de déterminer les valeurs successives de a_n et c_n (le candidat peut utiliser, en l'indiquant, le langage informatique de son choix, ou écrire le programme en français).

I.C - Déterminer les valeurs de a_n et c_n pour $n = 2$ et pour $n = 3$.

Partie II - Les suites

II.A - Montrer que pour $n = 1, 2, 3$ les termes c_n vérifient une relation de la forme

(R2) $\quad c_{n+1} + \beta c_n + \lambda c_{n-1} = 0.$

Déterminer β et λ.

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = c_0$, $v_1 = c_1$ et pour $n \geqslant 1$, $v_{n+1} + \beta v_n + \lambda v_{n-1} = 0$ (où β et λ sont les valeurs calculées ci-dessus).

Montrer que, pour tout n, $v_n \in \mathbb{N}$. Déterminer v_n en fonction de n.

II.B - Montrer que pour $n = 1, 2, 3$, les termes a_n vérifient une relation de la forme :

(R3) $\quad a_{n+1} + \beta a_n + \lambda a_{n-1} = b,$

où β et λ sont les coefficients calculés en II.A et où b est à déterminer.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a_0$, $u_1 = a_1$ et pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} + \beta u_n + \lambda u_{n-1} = b$.

Montrer que, pour tout n, $u_n \in \mathbb{N}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + \frac{1}{2}$.

Déterminer w_n, puis u_n en fonction de n.

Dans toute la suite du problème, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont celles définies dans les questions II.B et II.A.

II.C - Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, u_n et v_n sont les longueurs du petit côté et de l'hypoténuse d'un TRPI.

Partie III - L'algèbre linéaire

III.A -

III.A.1) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient le système :

$$(S)\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n + 1 \\ v_{n+1} = 4u_n + 3v_n + 2 \end{cases}$$

III.A.2) - En notant, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix},$$

... matricielle :

$$X_{n+1} = AX_n + B$$

où $A \in M_2(\mathbb{R})$, $B \in M_{2,1}(\mathbb{R})$, en précisant A et B.

III.B -

III.B.1) Montrer que $A - I$ est inversible, où I désigne la matrice unité de $M_2(\mathbb{R})$. Calculer $(A-I)^{-1}$.

III.B.2) Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on pose $S_n = I + A + \cdots + A^{n-1}$. Calculer $(A-I)S_n$. En déduire S_n en fonction de $(A-I)$, I et A^n.

III.B.3) Exprimer X_n en fonction de A^n, S_n, B et X_0.

III.C -

III.C.1) Montrer que la matrice A est diagonalisable. Diagonaliser A. On pourra poser $p = (3+2\sqrt{2})$ et $q = (3 - 2\sqrt{2})$.

> Les 3/2 pourront remplacer les deux lignes qui précèdent par :
> Trouver deux vecteurs colonnes X_1 et X_2 non nuls tels que $AX_1 = pX_1$ et $AX_2 = qX_2$.
> En interprétant A comme matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ rapporté à la base canonique, montrer qu'on peut trouver deux matrices P et D, avec P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
> Préciser P et D ; calculer P^{-1}.

En déduire A^n.

III.C.2) Calculer X_n en fonction de n. Retrouver les expresssions de u_n et v_n déterminées en II.

Partie IV - Un peu de géométrie

L'objectif de cette partie est de montrer que les couples (u_n, v_n) définissent des TRPI et que ce sont les seuls couples d'entiers ayant cette propriété.

On munit le plan euclidien d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

IV.A - Montrer que la recherche des TRPI équivaut à la recherche des points à coordonnées dans $\mathbb{N}$ sur la conique C d'équation : $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$.

IV.B - Préciser la nature de cette conique. En tracer un graphe soigné dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

IV.C - On considère l'application φ du plan dans lui-même, qui au point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ défini par : $x' = 3x + 2y + 1$ et $y' = 4x + 3y + 2$.
Montrer que φ est bijective et déterminer φ^{-1}.

IV.D - Montrer que $\varphi(C) = C$.
On notera C_1 la partie de C constituée des points de C d'ordonnée positive. Montrer que $\varphi(C_1) = C_1$.

IV.E - Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par M_n le point de coordonnées (u_n, v_n) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\overrightarrow{OM_n} = u_n \vec{i} + v_n \vec{j}.$$

Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $M_n \in C_1$.

IV.F - On note $[M_n, M_{n+1}]$ l'ensemble des points de C_1 dont l'abscisse x appartient au segment $[u_n, u_{n+1}]$.
Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\varphi([M_n, M_{n+1}]) \subset [M_{n+1}, M_{n+2}]$.

IV.G - Déterminer l'ensemble des points M de C_1 tels que $\varphi(M)$ a une abscisse positive. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\varphi([M_n, M_{n+1}]) = [M_{n+1}, M_{n+2}]$.

IV.H - En considérant deux entiers a et c définissant un TRPI, conclure.

Partie V - Et l'outil arithmétique

V.A - Montrer que les deux entiers naturels a et c définissent un TRPI si et seulement si : $(2a+1)^2 - 2c^2 = -1$.

V.B - En déduire que $(2a_n + 1)$ et c_n sont, pour $n \geqslant 1$, respectivement les coefficients de 1 et de $\sqrt{2}$ dans le développement de $(1+\sqrt{2})^{2n+1}$.
Ce procédé est exactement celui utilisé par Bhaskârâ pour traiter l'équation plus générale : $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$.

***

CENTRALE - SUPÉLEC 1997	Filière PC
Mathématiques 2	**CORRIGÉ**

Partie I- Préambule

I.A - Un triangle de côtés a, b, c est rectangle avec c pour hypoténuse si et seulement si il vérifie la relation de Pythagore : $a^2 + b^2 = c^2$. Si l'on veut en plus que $b = a+1$, cela s'écrit $a^2 + a^2 + 2a + 1 = c^2$ ou encore

$$\boxed{(R1) : 2a^2 - c^2 + 2a + 1 = 0.}$$

I.B - On a écrit le programme sous forme d'une procédure Maple. Cette procédure affiche les n premiers TRPI, sans en garder souvenir.
Elle utilise le booléen *issqr* : $issqr(n)$ est vrai si n est un carré d'entier. Elle utilise aussi *isqrt* qui donne la racine carrée entière d'un entier.

```
TRPI := proc(n)
local k, p, q;
p := 1; k := 1;
while k ≤ n do
    q := 2*p^2+2*p+1;
    if issqr(q) then print(p,p+1,isqrt(q));
    k := k + 1 fi;
    p := p + 1;
    od;
end
```

Remarques :

- On a testé ce programme Maple en tapant "TRPI(5) :" ; il a fourni

$$3, 4, 5$$
$$20, 21, 29$$
$$119, 120, 169$$
$$696, 697, 985$$
$$4059, 4060, 5741$$

- On a effectivement besoin de certains de ces nombres (au moins les 3 premiers TRPI) pour continuer le problème, et on n'a pas Maple à portée de main.. Il est donc indispensable de disposer d'une calculatrice, et de la programmer, au moins de façon rudimentaire. Par exemple, afficher les racines carrées des $2a^2 + 2a + 1$ successifs et voir si ces racines « tombent juste » et fournissent donc un c entier.

I.C - On a donc

$$\boxed{a_2 = 20; c_2 = 29 \text{ et } a_3 = 119; c_3 = 169.}$$

Partie II- Les suites

II.A - Pour assurer la relation (R2) aux rangs 1 et 2, on cherche β et λ solutions du système qui n'a qu'une solution :

$$\boxed{\beta = -6, \lambda = 1.}$$

Si on a effectivement calculé $c_4 = 985$, on voit que la relation (R2) est vraie aussi pour $n = 3$:

$$985 + (-6)169 + 1 * 29 = 0.$$

La relation de récurrence $v_{n+1} = -\beta v_n - \lambda v_{n-1} = 6v_n - v_{n-1}$ définit bien, à partir de v_0 et v_1 imposés, une suite et une seule. Ensuite, si l'on impose $v_0 = c_0 = 1$ et $v_1 = c_1 = 5$, on voit immédiatement par récurrence que tous les v_n sont dans $\mathbb{Z}$.

Cherchons les r non nuls tels que la suite de terme général $r_n = r^n$ vérifie la relation $r_{n+1} = 6r_n - r_{n-1}$; il faut et suffit que $r^2 = 6r - 1$ ou $r^2 - 6r + 1 = 0$, ce qui donne les solutions $r = 3 + 2\sqrt{2}$ et $r = 3 - 2\sqrt{2}$. Par combinaison linéaire, toute suite de la forme $t_n = \alpha(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n$ vérifie aussi $t_{n+1} = 6t_n - t_{n-1}$.
Pour assurer $t_0 = 1$ et $t_1 = 5$ il faut et suffit que $\alpha + \gamma = 1$ et $3(\alpha+\gamma) + 2\sqrt{2}(\alpha - \gamma) = 5$

équivalent à $\alpha + \gamma = 1$ et $2\sqrt{2}(\alpha-\gamma) = 2$ puis $\alpha + \gamma = 1$ et $\alpha - \gamma = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ puis

$\alpha = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $\gamma = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$, ce qui donne $t_n = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}(3+2\sqrt{2})^n + \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}(3-2\sqrt{2})^n$.

Cette suite coïncide avec v_n pour $n = 0$ et $n = 1$ et vérifie la relation de récurrence. On a déjà dit qu'il n'y a qu'une seule suite ayant ces propriétés donc : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = v_n$.
On peut l'arranger un peu en écrivant

$$2+\sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1), \quad 2-\sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1), \quad (3+2\sqrt{2}) = (\sqrt{2}+1)^2, \quad (3-2\sqrt{2}) = (\sqrt{2}-1)^2$$

$$\boxed{\text{Alors : } v_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[(\sqrt{2}+1)^{2n+1} + (\sqrt{2}-1)^{2n+1}\right].}$$

On a déjà dit que les v_n sont dans $\mathbb{Z}$. Comme ils sont positifs,

$$\boxed{\text{les } v_n \text{ sont dans } \mathbb{N}.}$$

II.B - Avec $\beta = -6$ et $\lambda = 1$, on trouve $\begin{cases} a_2 + \beta a_1 + \lambda a_0 &= 2 \\ a_3 + \beta a_2 + \lambda a_1 &= 2 \end{cases}$

Si on a calculé a_4, on vérifie que

$$a_4 + \beta a_3 + \lambda a_2 = 696 - 6.119 + 20 = 696 - 714 + 20 = 2.$$

$$\boxed{\text{Pour } n = 1, 2, 3, \text{ les } a_n \text{ vérifient (R3) : } a_{n+1} + \beta a_n + \lambda a_{n-1} = 2.}$$

$w_{n+1} - 6w_n + w_{n-1} = u_{n+1} - 6u_n + u_{n-1} - 2 = 0$, donc (w_n) vérifie la même relation de récurrence que (v_n) et est donc de la forme $w_n = \alpha(\sqrt{2}+1)^{2n+1} + \gamma(\sqrt{2}-1)^{2n+1}$.
$w_0 = \frac{1}{2}$ et $w_1 = \frac{7}{2}$ fournissent $\alpha = -\gamma = -\frac{1}{4}$ donc

$$\boxed{w_n = \frac{1}{4}\left[(\sqrt{2}+1)^{2n+1} - (\sqrt{2}-1)^{2n+1}\right] \text{ et } u_n = w_n - \tfrac{1}{2} = \frac{1}{4}\left[(\sqrt{2}+1)^{2n+1} - (\sqrt{2}-1)^{2n+1} - 2\right].}$$

La relation de récurrence vérifiée par les u_n montre que ce sont des entiers (relatifs). Dans l'expression trouvée pour u_n, si l'on développe $(\sqrt{2}+1)^{2n+1} - (\sqrt{2}-1)^{2n+1}$ en utilisant la formule du binôme, il ne reste que des termes positifs, notamment $1^{2n+1} - (-1)^{2n+1} = 2$, qui va compenser le -2 qui apparaît dans u_n. Donc

$$\boxed{\text{les } u_n \text{ sont des entiers positifs.}}$$

On pouvait aussi, en utilisant la relation de récurrence vérifiée par les u_n, prouver par récurrence que $u_n > u_{n-1} \geqslant 0$.
II.C - u_n et v_n sont des entiers positifs. Pour montrer qu'ils définissent petit côté et hypoténuse d'un TRPI, il faut vérifier qu'ils satisfont à (R1), c'est-à-dire $2u_n^2 - v_n^2 + 2u_n + 1 = 0$ ou encore

$2\left(w_n - \dfrac{1}{2}\right)^2 - v_n^2 + 2w_n = 0$ ou encore $2w_n^2 - v_n^2 + \dfrac{1}{2} = 0$ ou encore $(v_n + w_n\sqrt{2})(v_n - w_n\sqrt{2}) = \dfrac{1}{2}$.

Or $v_n + w_n\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left[2(\sqrt{2}+1)^{2n+1}\right]$ et $v_n - w_n\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left[2(\sqrt{2}-1)^{2n+1}\right]$.

Le produit est bien égal à $\dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 1, u_n \text{ et } v_n \text{ sont les longueurs du petit côté et de l'hypoténuse d'un TRPI.}}$$

Cela prouve qu'il y a une infinité de TRPI.

Partie III- L'algèbre linéaire

III.A1) Puisque (v_n) et (w_n) vérifient la relation $(R2)$, il en est de même de $(t_n) = (w_{n+1})$ et de $(s_n) = (v_{n+1})$. Il en est de même, par combinaison linéaire, des suites $(3w_n + 2v_n)$ et $(4w_n + 3v_n)$.
Or $t_0 = w_1 = \frac{7}{2} = \frac{3}{2} + 2 = 3w_0 + 2v_0$ et $t_1 = w_2 = 20 + \frac{1}{2} = \frac{21}{2} + 10 = 3w_1 + 2v_1$. Les suites (t_n) et $(3w_n + 2v_n)$, qui coïncident pour $n = 0$ et $n = 1$ et vérifient toutes les deux $(R2)$ sont donc égales.
On montre de même que $s_n = 4w_n + 3v_n$. Donc pour tout n dans $\mathbb{N}$: $\begin{cases} w_{n+1} &= 3w_n + 2v_n \\ v_{n+1} &= 4w_n + 3v_n \end{cases}$

Cela s'écrit aussi

$$\boxed{\begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n + 2v_n + 1 \\ v_{n+1} &= 4u_n + 3v_n + 2 \end{cases}}$$

III.A2)

$$\boxed{\text{En posant } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ cela s'écrit } X_{n+1} = AX_n + B.}$$

III.B1) $A - I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Elle est inversible puisque son déterminant est égal à -4.

$(A - I)^{-1} = \dfrac{1}{\det A}{}^t(\text{comatrice}(A)) = -\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{A - I \text{ est inversible et } (A-I)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

III.B2) En développant $(A-I)(I + A + \cdots + A^{n-1}) = (I + A + \cdots + A^{n-1})(A - I)$ on trouve $A^n - I$, donc

$$\boxed{(A-I)S_n = S_n(A-I) = A^n - I \text{ donc } S_n = (A-I)^{-1}(A^n - I) = (A^n - I)(A-I)^{-1}.}$$

III.B3) On a $X_1 = AX_0 + B$ puis $X_2 = AX_1 + B = A^2X_0 + AB + B$ et par récurrence immédiate :

$$\boxed{X_n = A^nX_0 + S_nB.}$$

III.C1) $\det(A - XI) = X - 6X + 1$ donc A admet 2 valeurs propres distinctes ($p = 3 + 2\sqrt{2}$ et $q = 3 - 2\sqrt{2}$) donc

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$$

En résolvant le système homogène $(A - (3+2\sqrt{2})I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (0\ 0)$, on trouve la droite dirigée par $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

De même, le sous-espace propre associé à la valeur propre $q = 3 - 2\sqrt{2}$ est la droite dirigée par $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

A se diagonalise donc sous la forme

$$\boxed{A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}.}$$

En passant par la comatrice de P, on trouve $P^{-1} = \frac{-\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$.

Nous avions formulé différemment la question pour ceux qui n'ont pas encore vu valeurs propres et vecteurs propres :
on demandait d'abord de trouver X_1 non nul tel que $AX_1 = pX_1$. En notant x et y les composantes inconnues de X_1, cela conduit au système : $\begin{cases} 3x + 2y &= (3+2\sqrt{2})x \\ 4x + 3y &= (3+2\sqrt{2})y \end{cases}$ équivalent à $\begin{cases} -2\sqrt{2}x + 2y &= 0 \\ 4x - 2\sqrt{2}y &= 0 \end{cases}$

On voit une solution non nulle : $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

De même, en prenant $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, on a $AX_2 = qX_2$. La famille (X_1, X_2) est libre ; c'est donc une base de $\mathbb{R}^2$ et la matrice de passage de la base canonique à cette base est la matrice P dessinée plus haut.

On interprète ensuite A comme la matrice, sur la base canonique, d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Puisque $AX_1 = pX_1$ et $AX_2 = qX_2$, la matrice de cet endomorphisme sur la base (X_1, X_2) est la matrice diagonale D représentée plus haut. En utilisant la formule de changement de base pour un endomorphisme, on retrouve la formule $A = PDP^{-1}$ sans avoir parlé de vecteur propre, de valeur propre ni de diagonalisation.

Ensuite $A^n = PD^nP^{-1}$, avec $D^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & q^n \end{pmatrix}$. En calculant le produit des trois matrices, on trouve :

$$\boxed{A^n = \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2}(p^n+q^n) & p^n - q^n \\ 2(p^n - q^n) & \sqrt{2}(p^n+q^n) \end{pmatrix}}$$

III.C2) On a
$X_n = A^nX_0 + S_nB = A^nX_0 + (A^n - I)(A-I)^{-1}B = A^n\left(X_0 + (A-I)^{-1}B\right) - (A-I)^{-1}B$.

On calcule $(A-I)^{-1}B$. On trouve $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_0 + (A-I)^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, dont on fait le produit par A^n. Alors

$X_n = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\sqrt{2}(p^n+q^n)\frac{1}{2} + (p^n - q^n)\right] - \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4}\left[(p^n-q^n) + \sqrt{2}(p^n+q^n)\right] \end{pmatrix}$ ou encore

$$\boxed{X_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left[(1+\sqrt{2})p^n - (\sqrt{2}-1)q^n - 2\right] \\ \frac{\sqrt{2}}{4}\left[(1+\sqrt{2})p^n + (\sqrt{2}-1)q^n\right] \end{pmatrix}.}$$

On retrouve les expressions de u_n et v_n obtenues dans la partie II.

Partie IV- Un peu de géométrie

IV.A - Le couple (x, y) de réels définit un TRPI si et seulement si x et y sont entiers strictement positifs avec $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$; autrement dit

$\boxed{\text{La recherche des TRPI équivaut à la recherche des points à coordonnées dans } \mathbb{N}^* \text{ sur la conique } \mathcal{C} \text{ d'équation } y^2 = 2x^2+2x+1.}$

(Avec les conventions du début, le couple $(0, 1)$ ne définit pas un TRPI.)

IV.B - $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$ équivaut à $2y^2 - (2x+1)^2 = 1$ ou encore à $\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}} - \dfrac{(x+\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}} = 1$.

$\boxed{\mathcal{C} \text{ est donc une hyperbole}}$

Son centre a pour coordonnées $-\frac{1}{2}$ et 0. Ses asymptotes ont pour pentes $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.
Le dessin est à la page suivante.

IV.C - La matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible avec $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ pour inverse. Donc

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y + 1 \\ y' = 4x + 3y + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x' - 1 = 3x + 2y \\ y' - 2 = 4x + 3y \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x'-1 \\ y'-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'-1 \\ y'-2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = 3x' - 2y' + 1 \\ y = -4x' + 3y' - 2 \end{cases}$$

En exhibant l'unique antécédent par φ du point $M'(x', y')$,

$\boxed{\text{on prouve ainsi que } \varphi \text{ est bijective, et on détermine } \varphi^{-1}.}$

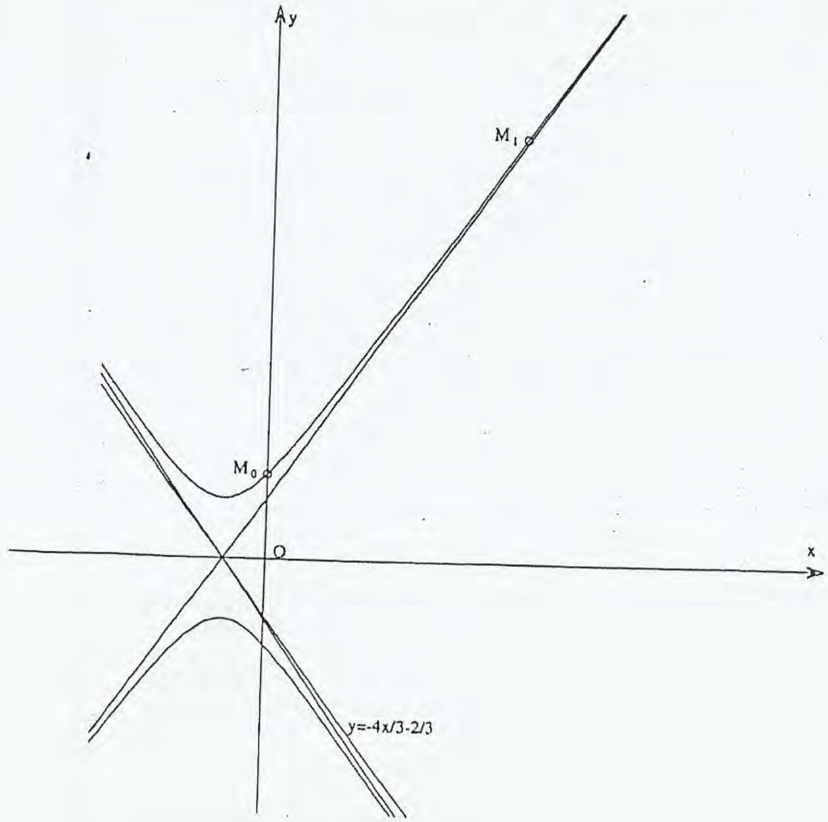
IV.D - Si M a pour coordonnées (x, y) et $M' = \varphi(M)$ a pour coordonnées (x', y'), on a :
$y'^2 - (2x'^2 + 2x' + 1) = (4x + 3y + 2)^2 - 2(3x + 2y + 1)^2 - 2(3x + 2y + 1) - 1$
$= 9y^2 + 6y(4x + 2) + (4x + 2)^2 - 2[4y^2 + 4y(3x + 1) + (3x + 1)^2] - 4y - 6x - 3$
$= y^2 + y(24x + 12 - 24x - 8 - 4) + (16x^2 + 16x + 4 - 18x^2 - 12x - 2 - 6x - 3) = y^2 - (2x^2 + 2x + 1)$.

On voit donc que $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si $\varphi(M) \in \mathcal{C}$. Donc, puisque φ est une bijection du plan dans lui-même :

$$\boxed{\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}.}$$

Si M a pour coordonnées (x, y) et $M' = \varphi(M)$ a pour coordonnées (x', y'), on a $y' > 0$ si et seulement si $4x + 3y + 2 > 0$ donc si et seulement si $y > -\frac{2}{3}(2x+1)$.
Le demi-plan $y > 0$ est donc l'image par φ du demi-plan « au-dessus » de la droite $y = -\frac{2}{3}(2x+1)$.
Cette droite passe par le centre de l'hyperbole et, on le voit sur le dessin, est assez proche de l'asymptote de pente $-\sqrt{2}$. Sa pente $-\frac{4}{3}$ est cependant, en valeur absolue, inférieure à celle de l'asymptote, si bien que la moitié $\mathcal{C}_1$ de $\mathcal{C}$ est dans le demi-plan au-dessus de cette droite alors que l'autre moitié de l'hyperbole est dans l'autre demi-plan donc

$$\boxed{\varphi(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_1.}$$



IV.E - On a vu au II que (u_n, v_n) définit un TRPI ; donc $M_n \in \mathcal{C}$. En plus $v_n > 0$ donc

$$\boxed{M_n \in \mathcal{C}_1.}$$

IV.F - On a même plus précisément, d'après III, $M_{n+1} = \varphi(M_n)$ et $M_{n+2} = \varphi(M_{n+1})$.
Si le point M de C_1 a une abscisse x comprise entre celles de M_n et M_{n+1}, l'abscisse de $\varphi(M)$, égale à $3x + 2y + 1 = 3x + 1 + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$, est comprise entre celles de $\varphi(M_n) = M_{n+1}$ et $\varphi(M_{n+1})$ car la fonction qui à x associe $3x + 1 + 2\sqrt{2x + 2x + 1}$ est visiblement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Donc $\varphi(M) \in [M_{n+1}, M_{n+2}]$. En résumé

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \varphi([M_n M_{n+1}]) \subset [M_{n+1}, M_{n+2}].}$$

On peut même préciser : quand M décrit $[M_n M_{n+1}]$ son abscisse décrit l'intervalle $[u_n, u_{n+1}]$.
La fonction $x \to 3x + 1 + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$ étant croissante et continue sur $\mathbb{R}^+$, l'abscisse de $\varphi(M)$ va décrire l'intervalle $[u_{n+1}, u_{n+2}]$ tout entier, donc $\varphi(M)$ va décrire $[M_{n+1}, M_{n+2}]$. Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \varphi([M_n M_{n+1}]) = [M_{n+1}, M_{n+2}].}$$

IV.G - Pour $M(x, y) \in C_1$, $\varphi(M)$ a une abscisse positive si $3x + 2y + 1 \geqslant 0$ donc si $3x + 1 + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geqslant 0$.
Si $x \geqslant -\frac{1}{3}$ cette inégalité est satisfaite. Sinon, elle équivaut à $4(2x^2+2x+1) \geqslant (3x+1)^2 = 9x^2+6x+1$, donc à $x^2 - 2x - 3 \leqslant 0$ donc à : x compris entre -1 et 3. Finalement, $\varphi(M)$ a une abscisse positive si et seulement si $x \geqslant -1$.

$$\boxed{\text{Les points } M \text{ de } C_1 \text{ tels que } \varphi(M) \text{ a une abscisse positive sont ceux de l'arc } x \geqslant -1.}$$

On a déjà vu que $\forall n \in \mathbb{N}, ([M_n M_{n+1}]) = [M_{n+1}, M_{n+2}]$.
IV.H - Supposons que le couple (a, c) définisse un TRPI.
Le point P de coordonnées (a, c) se trouve donc sur la partie $x > 0$ de C_1. Comme la suite (u_n) est une suite d'entiers strictement croissante, elle tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$.
Les intervalles $]u_n; u_{n+1}]$ forment donc une partition de $\mathbb{R}^{+*}$; a se trouve donc dans un certain $]u_n; u_{n+1}]$, donc $P \in]M_n M_{n+1}]$. Il existe donc $Q \in]M_{n-1} M_n]$ tel que $P = \varphi(Q)$ etc.
Il existe $R \in]M_0 M_1]$ tel que $P = \varphi^n(R)$.
Or l'examen des formules donnant φ^{-1} montre que Q est, comme P, à coordonnées entières.
Par récurrence immédiate, il en est de même de R. Comme R est sur C_1, ses coordonnées définissent un TRPI. Puisque le plus petit TRPI est $(3, 4, 5)$, il n'y a pas d'autre point possible que M_1 sur $]M_0 M_1]$, donc $R = M_1$ donc $P = \varphi^n(M_1) = M_{n+1}$, donc ses coordonnées sont u_{n+1}, v_{n+1}. Cela prouve que

$$\boxed{\text{Les couples } (u_n, v_n) \text{ sont les seuls couples définissant un TRPI.}}$$

Partie V- Et l'outil arithmétique

V.A - La relation $2a^2 - c^2 + 2a + 1 = 0$ est évidemment équivalente à

$$\boxed{(2a + 1)^2 - 2c^2 = -1.}$$

V.B - Il n'y a pas d'autre TRPI que ceux définis par les suites (u_n) et (v_n). Puisqu'on a convenu au début de noter a_n et c_n le plus petit côté et l'hypoténuse du n-ième d'entre eux, on a donc $a_n = u_n$ et $c_n = v_n$.
On a donc

$$c_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[(\sqrt{2}+1)^{2n+1} + (\sqrt{2}-1)^{2n+1}\right] \quad \text{et} \quad 2a_n + 1 = 2w_n = \frac{1}{2}\left[(\sqrt{2}+1)^{2n+1} - (\sqrt{2}-1)^{2n+1}\right].$$

Le développement de $(\sqrt{2} + 1)^{2n+1}$ par la formule du binôme est de la forme $p + q\sqrt{2}$ avec p et q entiers.
Celui de $(-\sqrt{2} + 1)^{2n+1}$, obtenu en remplaçant $\sqrt{2}$ par $-\sqrt{2}$, est $p - q\sqrt{2}$.
Donc $c_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[(p + q\sqrt{2}) - (p - q\sqrt{2})\right] = q$ et de même $2a_n + 1 = p$.

$$\boxed{(2a_n + 1) \text{ et } c_n \text{ sont respectivement les coefficients de 1 et } \sqrt{2} \text{ dans le développement de } (\sqrt{2} + 1)^{2n+1}.}$$

***

Semaine 4 : Déterminants, valeurs propres et vecteurs propres

Nous poursuivons l'étude de l'algèbre linéaire. Nous avons vu, cette semaine, les déterminants, les systèmes linéaires et les notions de valeur propre et vecteur propre. Nous avons enfin abordé (un peu) la diagonalisation.

• Sujet 11 : Concours Communs Polytechniques («E.N.S.I.») 1995 Mathématiques 1 Options M et P

En plus des connaissances générales en algèbre linéaire, ce problème utilise les déterminants et les systèmes linéaires mais pas les notions de valeur propre ni de vecteur propre.

Il est entièrement consacré à l'étude d'un système qui fait penser à un système linéaire, mais les coefficients (les a_i) qui affectent les inconnues (les A_i) sont eux-mêmes considérés comme des inconnues. Les données (les S_i) étant elles-mêmes littérales, cela fait trois sortes de lettres à gérer, ce qui conduit assez souvent à des études de C.N.S. assez délicates, nécessitant une gymnastique intellectuelle intense. Fort heureusement, l'ensemble de l'énoncé est très cohérent et l'on ne perd pas le fil.

• Sujet 12 : Centrale-Supélec 2001 Mathématiques 2 Filière PC

On définit une liste de six propriétés que peut avoir une partie de l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n, comme par exemple : «cette partie est stable par multiplication».

Après l'étude de quelques exemples, on examine si certaines de ces propriétés en impliquent d'autres. On termine par une étude poussée du cas d'un sous-espace, stable pour la multiplication, de l'espace vectoriel des matrices carrées complexes d'ordre n.

On manipule sans arrêt des matrices mais, le plus souvent, sans qu'il soit nécessaire de les dessiner.

On utilise un peu les notions de valeurs propres, vecteurs propres et sous-espace stable par un endomorphisme, pas du tout la diagonalisation.

Le problème est assez court, et d'une difficulté moyenne.

• Sujet 13 : Centrale-Supélec 1998 Mathématiques 2 Filière PSI

On règle ici assez vite un problème assez intéressant : trouver une matrice carrée d'ordre k ayant un polynôme caractéristique donné (la matrice «compagne» du polynôme). C'est une occasion de passer en revue quelques notions de base d'algèbre linéaire et notamment la diagonalisation dans le cas où les valeurs propres sont simples.

On utilise ensuite une telle matrice pour transformer un polygone à k sommets puis, par récurrence, pour construire une suite de polygones, en s'en tenant à deux exemples. Les propriétés des matrices compagnes permettent d'étudier cette suite et son comportement à l'infini. Comme dans les deux cas le polygone devient «infiniment petit» cela donne l'idée, pour finir, d'examiner sa forme «asymptotique» en l'agrandissant.

Cela donne finalement un problème intéressant mais long. La progression dans la difficulté est bonne.

Groupe Concours Polytechniques («E.N.S.I.») 1995

Mathématiques 1 — Options M et P

Durée : 4 heures

Présentation du problème

Étant donnée une suite $(S_0, S_1, ..., S_{2n-1})$ de $2n$ nombres complexes (avec $n \geqslant 1$), on appelle $E_n(S_0, S_1, ..., S_{2n-1})$ ou plus simplement E_n le système des $2n$ équations :

$$\sum_{j=1}^{n} A_j a_j^k = S_k \quad (\text{pour } k = 0, 1, ..., 2n-1)$$

dont les inconnues sont les $2n$ nombres complexes $a_1, a_2, \dots, A_1, A_2, \dots, A_n$; voici explicitement les premières et la dernière équations de ce système E_n :

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \cdots + A_n = S_0 \\ A_1 a_1 + A_2 a_2 + \cdots + A_n a_n = S_1 \\ A_1 a_1^2 + A_2 a_2^2 + \cdots + A_n a_n^2 = S_2 \\ \vdots \\ A_1 a_1^{2n-1} + A_2 a_2^{2n-1} + \cdots + A_n a_n^{2n-1} = S_{2n-1} \end{cases}$$

Une solution $(a_1, ..., a_n, A_1, ..., A_n)$ est dite dégénérée si l'un au moins des nombres A_1 ou A_2 ... ou A_n est nul, ou si deux au moins parmi les nombres $a_1, a_2, ..., a_n$ sont égaux ; dans le cas contraire elle est dite non dégénérée. Au système E_n on associe la matrice carrée d'ordre n

$$C_n = \begin{bmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \dots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & S_4 & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n-1} & S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n-2} \end{bmatrix}$$

et le déterminant D_n de C_n est appelé le déterminant de E_n ; en cas de nécessité, on pourra préciser $D_n(S_0, S_1, ..., S_{2n-2})$.

A) Préliminaires

A1) On suppose que $(a_1, ..., a_n, A_1, ..., A_n)$ est solution de E_n : calculez D_n en fonction de $a_1, ..., a_n A_1, ..., A_n$. On vous suggère de décomposer C_n en un produit de deux matrices, celle de gauche étant :

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Vous pouvez considérer comme bien connu, ou sinon admettre sans démonstration, le fait que le déterminant de cette matrice V_n est le produit de toutes les différences $(a_j - a_h)$ avec $j > h$.

A2) Déduisez-en que si E_n admet des solutions, ou bien elles sont toutes dégénérées, ou bien aucune n'est dégénérée.

Voici maintenant quelques précisions sur le langage utilisé dans la suite, et sur les objectifs des parties suivantes. Si vous connaissez une solution non dégénérée de E_n, vous en déduisez $n!$ solutions en effectuant des permutations à la fois sur les nombres a_j et les nombres A_j associés ; vous compterez ces $n!$ solutions comme une seule solution à permutation près. Quand on vous demande une solution de E_n, vous répondrez par une suite de $2n$ nombres, d'abord les n nombres a_j, puis les n nombres A_j dans l'ordre correspondant.
Si $D_n \neq 0$, le système E_n est dit non dégénéré ; sauf dans la dernière partie F, nous n'étudierons que des systèmes non dégénérés.

La suite se compose de trois études indépendantes ; la partie B présente une première méthode de résolution, seulement développée dans le cas où $n = 2$, pour limiter les calculs ; les parties C, D et E présentent une deuxième méthode de résolution, traitée de façon plus approfondie. Enfin, on propose une rapide étude des systèmes dégénérés dans la partie F.

B) Cas où $n = 2$

Nous allons étudier, lorsque $n = 2$, une méthode de résolution qui pourrait certes fonctionner pour tout entier n supérieur, mais au prix de calculs laborieux ; c'est pourquoi nous étudierons plus tard une méthode de résolution plus performante, mais aussi plus sophistiquée.

Au système $E_2(S_0, S_1, S_2, S_3)$ supposé non dégénéré, on associe le polynôme $P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2$ donné par le déterminant que voici :

$$P(x) = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix}$$

Notez que $p_2 = D_2(S_0, S_1, S_2) \neq 0$.

B1) Démontrez les égalités

$$p_0 S_0 + p_1 S_1 + p_2 S_2 = 0,$$
$$p_0 S_1 + p_1 S_2 + p_2 S_3 = 0.$$

B2) Calculez les polynômes $P(x)$ associés aux systèmes $E_2(2, 1, 1, 1)$ et $E_2(1, 1, 0, 0)$.

B3) Vérifiez que toute solution (a_1, a_2, A_1, A_2) de E_2 est aussi solution du système d'équations

$$E_2' \begin{cases} P(a_1) = P(a_2) = 0 \\ A_1 + A_2 = S_0 \\ A_1 a_1 + A_2 a_2 = S_1. \end{cases}$$

B4) Expliquez comment trouver les solutions (a_1, a_2, A_1, A_2) de E_2' telles que $a_1 \neq a_2$, et indiquez selon les cas, le nombre de ces solutions. On ne vous demande ici ni le calcul explicite de ces solutions, ni le calcul d'aucune quantité qui interviendrait dans la discussion de leur nombre.

B5) Démontrez réciproquement que toute solution (a_1, a_2, A_1, A_2) de E_2' est une solution de E_2. On vous suggère de poser $S_k' = A_1 a_1^k + A_2 a_2^k$ et de démontrer les égalités :

$$p_0 S_k' + p_1 S_{k+1}' + p_2 S_{k+2}' = 0.$$

B6) Trouvez explicitement les solutions de $E_2(2, 1, 1, 1)$ et celles de $E_2(1, 1, 0, 0)$.

C) Un détour par les fonctions rationnelles

Les fonctions rationnelles considérées ici sont des quotients de polynômes N et M à coefficients complexes en une indéterminée x ; le degré d'un polynôme N sera noté d°N.
Pour tout n entier $\geqslant 0$, on appelle F_n l'ensemble des fonctions rationnelles f qui peuvent s'écrire comme quotient N/M de deux polynômes N et M tels que d°N< n, d°M$\leqslant$ n et M(0)$\neq$ 0; pour $n = 0$ il faut comprendre que F_0 est réduit au seul élément 0.
Si $n \geqslant 1$, un élément de F_n est dit non dégénéré si il n'est pas dans F_{n-1}, ce qui signifie que les deux polynômes précédents N et M doivent être premiers entre eux, et que, ou bien d°N $= n - 1$, ou bien d°M $= n$, ces deux éventualités ne s'excluant pas.

C1) Expliquez pourquoi l'hypothèse M(0) $\neq$ 0, relative aux dénominateurs des fonctions rationnelles dans F_n, entraîne que tout élément f de F_n possède un développement en série entière au point 0 ; on ne vous demande pas de calculer cette série entière, mais de rappeler les quelques propriétés des fonctions rationnelles et des séries entières qui justifient l'existence de ce développement. On vous demande aussi son rayon de convergence ; justifiez votre réponse.

Les 3/2 admettront l'existence, pour tout $f \in F_n$, d'un développement en série entière de la forme $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, valable pour tout complexe z tel que $|z| < R$ où R, appelé rayon de convergence, est le plus petit des $|z_i|$, où les z_i sont les zéros, réels ou complexes, de M.
Pour la suite, ils admettront aussi que si deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ sont égales pour tous les z tels que $|z| < r$, où $r > 0$ est fixé, alors les deux suites (b_n) et (c_n) sont égales.

C2) Pour tout f de F_n, on appelle développement tronqué à l'ordre k de f au point 0, la somme des termes d'ordre inférieur ou égal à k dans son développement en série entière au point 0.

Écrivons f = N/M, avec M(0) $\neq$ 0, comme ci-dessus, et considérons un polynôme Q de degré $\leqslant k$; démontrez que Q est le développement tronqué à l'ordre k de f au point 0, si et seulement si le polynôme N-MQ est divisible par x^{k+1}.

C3) Démontrer que deux éléments de F_n sont égaux si ils ont même développement tronqué à l'ordre $(2n-1)$ au point 0.

C4) On se donne n nombres distincts $a_1, a_2, ..., a_n$ et n nombres non nuls $A_1, A_2, ...A_n$ et l'on pose :

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{1-a_j x}.$$

Démontrez que φ est un élément non dégénéré de F_n. Quel est son développement en série entière au point 0 ?

On dira qu'un élément de F_n est de type normal si il est égal à une tele fonction φ pour un choix convenable des a_j et des A_j.

C5) On suppose qu'un élément non dégénéré f de F_n a été écrit comme quotient N/M de deux polynômes premiers entre eux ; quelles conditions doivent satisfaire N et M pour que f soit de type normal ? Par exemple, la fonction rationnelle $x^2/(1-x^2)$ est-elle de type normal dans F_3 ?

C6) On suppose le système $E_n(S_0, S_1, ..., S_{2n-1})$ non dégénéré. Expliquez comment résoudre E_n si l'on connaît un élément f de F_n dont le développement tronqué à l'ordre $(2n-1)$ au point 0 est $S_0 + S_1 x + ... + S_{2n-1}x^{2n-1}$.

D) Recherche d'une fonction rationnelle connaissant un développement tronqué

On suppose toujours le système $E_n(S_0, S_1, ..., S_{2n-1})$ non dégénéré et l'on pose :

$$Q(x) = S_0 + S_1 x + ... + S_{2n-1}x^{2n-1};$$

on cherche l'éventuel élément de F_n dont le développement tronqué à l'ordre $(2n-1)$ au point 0 est Q.

Tout élément f de F_n peut s'écrire comme quotient de deux polynômes N et M tels que ceux-ci :

$$N(x) = v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + ... + v_{n-1}x^{n-1}, \quad M(x) = 1 + u_1 x + u_2 x^2 + ... + u_n x^n;$$

et si f est non dégénéré, ces polynômes N et M sont uniques.

D1) Démontrez qu'il existe un unique polynôme $M(x) = 1 + \sum_{j=1}^{n} u_j x^j$ tel que le produit MQ ne contienne aucun monôme de degré compris entre n et $(2n-1)$ inclus, c'est-à-dire, tel que MQ soit de la forme $\sum_{j=0}^{n-1} v_j x^j + \sum_{j=2n}^{3n-1} w_j x^j$.

D2) Existe-t-il dans F_n un élément f dont le développement tronqué à l'ordre $(2n-1)$ au point 0 est Q ? Si oui, comment peut-on le calculer ? Est-il non dégénéré ?

D3) Utilisez C6 et D2 pour trouver les solutions de $E_3(0,0,1,0,1,0)$.

E) Systèmes non dégénérés sans solution

Après le lemme préliminaire dont la démonstration est demandée dans E1, on se contentera d'étudier dans E2 et E3 des cas où $n = 3$.

E1) Soit a un nombre non nul, et soit p un entier $\geqslant 1$; démontrez que toute fonction rationnelle $\frac{N(x)}{(1-ax)^p}$, où N est un polynôme de degré $< p$, peut s'écrire :

$$\frac{A_1}{1-ax} + \frac{A_2 x}{(1-ax)^2} + \frac{A_3 x^2}{(1-ax)^3} + ... + \frac{A_p x^{p-1}}{(1-ax)^p},$$

avec des nombres $A_1, A_2, ..., A_p$ convenablement choisis.

E2) Soit f un élément non dégénéré de F_3 qui n'est pas du type normal défini dans C4 ; démontrez que f est égal à une fonction de l'un des deux types suivants :

$$(1) \qquad \psi(x) = \frac{A_1}{1-a_1 x} + \frac{A_2}{1-a_2 x} + \frac{A_3 x}{(1-a_2 x)^2} (\text{ avec } A_1 \neq 0, A_3 \neq 0, \text{ et } a_1 \neq a_2)$$

$$(2) \qquad \chi(x) = \frac{A_1}{1-a_1 x} + \frac{A_2 x}{(1-a_1 x)^2} + \frac{A_3 x^2}{(1-a_1 x)^3} (\text{ avec } A_3 \neq 0).$$

De quel type sont respectivement x^2 et $x^2/(1-x)$, qui sont deux éléments non dégénérés de F_3 ?

E3) Trouvez les développements en série entière au point 0 des fonctions ψ et χ écrites ci-dessus.

Déduisez-en une description des systèmes non dégénérés $E_3(S_0, S_1, ..., S_5)$ qui n'ont pas de solution ; vous devez aboutir à un énoncé du type suivant : pour que ce système soit non dégénéré et sans solution, il faut et il suffit que $S_0, S_1, ..., S_5$ s'expriment au moyen de 4 ou 5 paramètres que vous préciserez, selon des formules que vous préciserez.

> Les 3/2 pourront admettre que les développements sous forme de série entière de $\frac{1}{(1-z)^2}, \frac{1}{(1-z)^3}$ etc.. s'obtiennent par dérivations successives à partir de celui de $\frac{1}{1-z}$, et sont, comme ce dernier, valables pour $|z| < 1$.

F) Systèmes dégénérés

Soit $(a_1, ..., a_n, A_1, ..., A_n)$ une solution de E_n ; pour tout $h = 1, 2, ..., n$, on note A'_h la somme des A_j correspondant aux indices j tels que $a_j = a_h$; par définition, le rang r de cette solution est le cardinal de l'ensemble formé par les a_h tels que $A'_h \neq 0$; il faut comprendre que chaque élément a_h de cet ensemble compte pour une unité, même si dans la suite $(a_1, ..., a_n)$ il apparaît plusieurs fois.

Ce rang vaut n si et seulement si la solution est non dégénérée ; il vaut 0 si et seulement si tous les A'_h sont nuls.

F1) Soit r un entier tel que $0 < r < n$; démontrez que E_n possède une solution dégénérée de rang r si et seulement si le système $E'_{n,r}$ formé par les $2n$ équations

$$\sum_{j=1}^{r} A_j a_j^k = S_k (\text{ pour } k = 0, 1, ..., 2n-1)$$

possède une solution $(a_1, ..., a_r, A_1, ..., A_r)$ non dégénérée, c'est-à-dire telle que les $A_1, ..., A_r$ soient non nuls et les $a_1, ..., a_r$ distincts.

F2) On suppose que E_n possède une solution de rang r (ici $0 \leqslant r \leqslant n$) ; que pouvez-vous dire de $D_r = D_r(S_0, S_1, ..., S_{2r-2})$(lorsque $r > 0$), et des déterminants $D_{r+1}, D_{r+2}, ..., D_n$ (lorsque $r < n$) ?

Que pouvez-vous dire du rang des autres solutions de E_n ?

F3) Utilisez les résultats de F1 et F2 pour discuter selon les valeurs de S_4 et S_5 l'existence et le rang des solutions de $E_3(1,0,0,0,S_4,S_5)$.

***

A) Préliminaires

A1) Puisque le système est vérifié, on peut écrire

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & .. & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & .. & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & .. & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & .. & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & .. & a_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & a_1A_1 & .. & a_1^{n-1}A_1 \\ A_2 & a_2A_2 & .. & a_2^{n-1}A_2 \\ A_3 & a_3A_3 & .. & a_3^{n-1}A_3 \\ \dots & \dots & .. & \dots \\ A_n & a_nA_n & .. & a_n^{n-1}A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & .. & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & .. & S_n \\ S_2 & S_3 & S_4 & .. & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & .. & \\ S_{n-1} & S_n & S_{n+1} & .. & S_{2n-2} \end{bmatrix}$$

Cette écriture est de la forme $V_n.U_n = C_n$ donc $D_n = \det(V_n).\det(U_n)$.
$\det(V_n)$ est un déterminant de Vandermonde ; on suppose connu que $\det(V_n) = \prod_{n\geqslant j>h\geqslant 1} (a_j - a_h)$.

Dans $\det(U_n)$, on peut mettre en facteur : A_1 dans la première ligne, A_2 dans la deuxième ligne, etc et l'on retrouve alors notre déterminant de Vandermonde transposé. Finalement

$$\boxed{D_n = A_1.A_2.\dots.A_n.\left(\prod_{n\geqslant j>h\geqslant 1} (a_j - a_h)\right)^2.}$$

A2) Si les S_n donnés sont tels que D_n est nul, alors, pour toute solution $(a,\dots,a_n,A,\dots,A_n)$ du système, l'un au moins des A_i ou des $(a_j - a_h)$ est nul et cette solution est donc dégénérée.
Si les S_n donnés sont tels que D_n est non nul, alors, pour toute solution $(a,\dots,a_n,A,\dots,A_n)$ du système, aucun des A_i ni des $(a_j - a_h)$ n'est nul et cette solution est non dégénérée.

> Si E_n admet des solutions, ou bien elles sont toutes dégénérées, ou bien aucune n'est dégénérée.

B) Cas où n=2

Quand on développe $P(x)$ suivant la dernière ligne, on constate que le coefficient p_2 de x^2 est $\begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}$.
C'est effectivement $D_2(S_0, S_1, S_2)$, qui est non nul puisque le système est non dégénéré.

B1) p_0 et p_1 sont les deux autres cofacteurs des termes de la dernière ligne du déterminant définissant $P(x)$.
Quand on remplace cette dernière ligne $(1, x, x^2)$ par l'une des deux autres lignes, on obtient un déterminant, nul car il a deux lignes identiques, qui s'écrit aussi $p_0\alpha + p_1\beta + p_2\gamma$ si (α, β, γ) est la ligne utilisée.
Ainsi

> $p_0S_0 + p_1S_1 + p_2S_2$ et $p_0S_1 + p_1S_2 + p_2S_3$ sont nuls.

B2) Pour $E_2(2,1,1,1)$, $P(x) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix}$ et pour $E_2(1,1,0,0)$, $P(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix}$.

> Pour $E_2(2,1,1,1)$, $P(x) = x^2 - x$ et, pour $E_2(1,1,0,0)$, $P(x) = -x^2$.

Le coefficient D_2 de x^2 n'étant pas nul, ces deux systèmes sont effectivement non dégénérés.

B3) Puisque $n = 2$, les deux dernières lignes du système E_2' de l'énoncé ne sont autres que le recopiage des deux premières lignes du système E_2.
Si (a_1, a_2, A_1, A_2) est solution de E_2, les trois premières lignes de E_2 s'écrivent

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_1^2 \end{bmatrix} + A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ a_2 \\ a_2^2 \end{bmatrix} \quad \text{et les trois dernières :} \quad \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = a_1.A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_1^2 \end{bmatrix} + a_2.A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ a_2 \\ a_2^2 \end{bmatrix}.$$

La matrice $\begin{bmatrix} S_0 & S_1 & 1 & 1 \\ S_1 & S_2 & a_1 & a_2 \\ S_2 & S_3 & a_1^2 & a_2^2 \end{bmatrix}$ n'est donc pas de rang 3. Les deux déterminants extraits

$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & 1 \\ S_1 & S_2 & a_1 \\ S_2 & S_3 & a_1^2 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & 1 \\ S_1 & S_2 & a_2 \\ S_2 & S_3 & a_2^2 \end{vmatrix}$ sont donc nuls, ce qui, en transposant, se traduit par $P(a_1) = P(a_2) = 0$. Résumons :

> Toute solution de E_2 est aussi solution du système E_2' de l'énoncé.

B4) (S_0, S_1, S_2, S_3) étant donné tel que le système soit non dégénéré, on peut donc former le polynôme P, et P est effectivement du second degré.
On calcule ses racines (complexes). On ne continue que si elles sont distinctes (sinon le système E_2' n'a pas de solution, puisqu'on ne peut trouver a_1 et a_2 distincts tels que $P(a_1) = P(a_2) = 0$).
On prend pour a_1 l'une des racines et l'autre pour a_2 (on cherche les solutions (a_1, a_2) à une permutation près).

On trouve enfin A_1 et A_2 en résolvant le système $\begin{cases} A_1 + A_2 &= S_0 \\ a_1A_1 + a_2A_2 &= S_1 \end{cases}$, qui est de Cramer car son déterminant $(a_2 - a_1)$ est non nul. Résumons :

> Si P a deux racines distinctes, E_3' a une solution unique (à l'échange de a_1 et a_2 près).

Si P a une racine double, E_2' n'a pas de solution, donc E_2 n'en n'a pas non plus, ce qui n'est pas incompatible avec le fait que E_2 soit non dégénéré, comme on va le voir sur un exemple.

B5) On suppose que (a_1, a_2, A_1, A_2) est solution de E_2'.
Posons, comme il est suggéré, $S_k' = A_1a_1^k + A_2a_2^k$. Alors, pour tout entier naturel k on a :

$$\begin{aligned} p_0S_k' + p_1S_{k+1}' + p_2S_{k+2}' &= p_0(A_1a_1^k + A_2a_2^k) + p_1(A_1a_1^{k+1} + A_2a_2^{k+1}) + p_2(A_1a_1^{k+2} + A_2a_2^{k+2}) \\ &= A_1a_1^k(p_0 + p_1a_1 + p_2a_1^2) + A_2a_2^k(p_0 + p_1a_2 + p_2a_2^2) = 0, \end{aligned}$$

puisque $P(a_1) = P(a_2) = 0$. D'autre part, les deux dernières lignes de E_2' nous disent que $S_0 = S_0'$ et $S_1 = S_1'$.
En utilisant aussi B1), on a donc $p_0S_0 + p_1S_1 + p_2S_2' = 0 = p_0S_0 + p_1S_1 + p_2S_2$.
Le système E_2 étant toujours supposé non dégénéré, on a donc $p_2 \neq 0$, donc $S_2' = S_2$.
Donc, en utilisant à nouveau B1) : $p_0S_1 + p_1S_2 + p_2S_3' = 0 = p_0S_1 + p_1S_2 + p_2S_3$, donc $S_3' = S_3$.
Finalement, a_1, a_2, A_1, A_2 vérifient les quatre relations de A_2 :

> Toute solution (a_1, a_2, A_1, A_2) de E_2' est une solution de E_2.

B6) On a déjà dit que les systèmes proposés comme exemples étaient non dégénérés.

- Pour $E_2(2,1,1,1)$, $P(x) = x^2 - x$ dont les racines sont 0, qu'on peut prendre pour a_1, et 1, qu'on peut prendre pour a_2.

On résout ensuite $\begin{cases} A_1 + A_2 &= S_0 = 2 \\ 0A_1 + 1A_2 &= S_1 = 1 \end{cases}$, qui donne $A_1 = A_2 = 1$.

> La solution, unique à l'interversion près de a_1 et a_2, est $(0,1,1,1)$.

- Pour $E_2(1,1,0,0)$, $P(x) = -x^2$, qui admet une racine double : il n'y a pas de solution.

C) Un détour par les fonctions rationnelles

C1) Le développement en série entière d'une fraction rationnelle est (presque) une question de cours.
Si le complexe a est non nul, on peut écrire, pour $|z| < |a|$ (donc $\left|\frac{z}{a}\right| < 1$) :

$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a}.\frac{1}{1-\frac{z}{a}} = -\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^n}{a^n}$, d'où l'existence d'un développement en série entière de $\frac{1}{z-a}$, valable au moins sur le disque complexe de centre 0 et rayon $|a|$.
Si, maintenant, $\frac{N}{M}$ est un élément de F_n, M se factorise sous la forme $\rho(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_d)$, où $a_1, a_2, \dots, a_d$ sont les divers zéros de M dans $\mathbb{C}$, répétés avec leur multiplicité.
$\frac{N}{M}$ s'écrit donc $\frac{N}{\rho}.\frac{1}{z-a_1}.\dots.\frac{1}{z-a_d}$.

$\dfrac{N}{p}$ est un polynôme, donc une série entière dont les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang et dont le rayon de convergence est donc infini.
$\dfrac{N}{M}$ apparaît donc comme le produit de $d+1$ fonctions admettant chacune un développement en série entière sur le disque complexe ouvert de centre 0 et de rayon r, où r est le plus petit des modules des zéros de M. Si $M(0) \neq 0$, on a donc $r > 0$.
En appliquant d fois le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries entières,

> on justifie l'existence d'un développement en série entière en 0 pour N/M, si $M(0) \neq 0$.

Soit R le rayon de convergence de cette série entière. On a donc $R \geqslant r$ et r est le module d'un certain z_0 qui annule M. On sait que la fonction somme de la série entière est continue sur le disque de centre 0 et de rayon R. Si l'on avait $R > r$, cette fonction somme serait donc continue en z_0. Sa restriction aux $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| < r$ devrait donc avoir une limite quand $z \to r$, ce qui n'est pas le cas puisque cette restriction est $N(z)/M(z)$, dont le module tend vers l'infini quand $z \to z_0$ ($M(z_0)$ est nul et $N(z_0)$ ne l'est pas, sinon les polynômes N et M auraient en commun le facteur $z - z_0$ et ne seraient pas premiers entre eux.) Donc :

> Le rayon de convergence du développement est $r = \inf\{|z|, M(z) = 0\}$.

On s'est placé bien sûr en dehors du cas particulier où M n'a pas de zéro. Dans ce cas particulier, la fonction est polynomiale. Ce polynôme peut être considéré comme développement en série entière de la fonction elle- même, de rayon infini.
C2) Supposons $M(0) \neq 0$. Avec les notations précédentes, on peut écrire, pour tout z tel que $|z| < r$,
$\dfrac{N(z)}{M(z)} = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} a_p z^p = Q(z) + \sum\limits_{p=k+1}^{+\infty} a_p z^p$, où $Q(z)$ est le développement tronqué à l'ordre k.

Pour $|z| < r$, on a donc $N(z) - M(z)Q(z) = z^{k+1}M(z) \sum\limits_{p=k+1}^{+\infty} a_p z^{p-k-1}$.
Du côté gauche du signe égal, on a un polynôme, donc la somme d'une série entière dont les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang.
Du côté droit, après développement, c'est une série entière dont les termes sont nuls avant l'indice $k+1$.
Par unicité du développement en série entière sur un disque de rayon non nul, on peut identifier les coefficients des deux développements et la série entière écrite du côté droit est donc, en fait, un polynôme commençant par un terme en x^{k+1}.
Le polynôme $N(z) - M(z)Q(z)$ est donc divisible par z^{k+1}.
Réciproquement, si Q est de degré inférieur ou égal à k et si le polynôme $N(z) - M(z)Q(z)$ est divisible par z^{k+1}, on a
$\dfrac{N(z)}{M(z)} = Q(z) + z^{k+1}\dfrac{R(z)}{M(z)}$, somme d'un polynôme de degré inférieur ou égal à k et d'une série entière dont le premier terme est déjà à la puissance $k+1$. Par unicité du développement en série entière, Q est nécessairement le développement tronqué de N/M à l'ordre k

> Q, de degré inférieur ou égal à k, est le développement tronqué à l'ordre k de $f = N/M$ si et seulement si le polynôme $N - MQ$ est divisible par x^{k+1}.

C3) Si deux éléments de F_n sont égaux, ils ont bien sûr même développement tronqué à l'ordre $(2n-1)$ au point 0.
Réciproquement, soient f et g deux éléments de F_n ayant le même développement tronqué Q à l'ordre $(2n-1)$ au point 0. Après réduction au même dénominateur, $f - g$ apparaît comme une fraction rationnelle $h = \dfrac{N}{M}$, avec $\text{degré}(M) \leqslant 2n$ et $\text{degré}(N) \leqslant 2n-1$, (donc $h \in F_{2n}$.)
Les développements tronqués d'ordre $2n-1$ de f et g sont égaux donc celui de h est nul. Donc, d'après C2), $N - M.0$ est divisible par x^{2n}, ce qui ne peut se faire que si $N = 0$, donc si $f = g$.

> Deux éléments de F_n sont égaux s'ils ont le même développement tronqué à l'ordre $(2n-1)$ en 0.

C4) Après réduction au même dénominateur, on a $\varphi(x) = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n} P_j(x)}{(1-a_1x)(1-a_2x)\dots(1-a_nx)}$,
où $P_j(x) = A_j(1-a_1x)\dots(1-a_{j-1}x)(1-a_{j+1}x)\dots(1-a_nx)$ (même si a_j est nul.)

Posons $N(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} P_j(x)$.
La décomposition du dénominateur $M(x)$ en produit de facteurs du premier degré est en évidence : ces facteurs sont les $(1 - a_kx)$ pour a_k non nul. Pour prouver que N et M sont premiers entre eux, il suffit de prouver qu'aucun de ces facteurs n'apparaît dans $N(x)$, donc que, si a_k n'est pas nul, $N(\frac{1}{a_k})$ n'est pas nul.
C'est le cas puisque tous les $P_j\left(\frac{1}{a_k}\right)$ sont nuls, sauf $P_k\left(\frac{1}{a_k}\right)$ égal à
$A_k(1-\frac{a_1}{a_k})\dots(1-\frac{a_{k-1}}{a_k})(1-\frac{a_{k+1}}{a_k})\dots(1-\frac{a_n}{a_k})$, qui est non nul (car $A_k \neq 0$).
Ensuite, si aucun des a_k n'est nul, M est de degré n et N de degré strictement inférieur à n. Si l'un des a_k est nul, cet a_k est unique puisque les a_k sont tous distincts. Les $P_j(x)$ sont tous de degré $n-2$ (produit de $n-2$ facteurs du premier degré) sauf $P_k(x) = A_k(1-a_1x)\dots(1-a_{k-1}x)(1-a_{k+1}x)\dots(1-a_nx)$, qui est de degré $n-1$. $N(x)$ est donc de degré $n-1$.
$\varphi(x)$ appartient donc à F_n et vérifie donc le critère, admis par l'énoncé, de non-dégénerescence.

> φ est un élément non dégénéré de F_n.

Les pôles de φ sont les $\dfrac{1}{a_k}$ tels que $a_k \neq 0$. Le rayon de convergence R du développement de φ en série entière est donc le plus petit des $\dfrac{1}{|a_k|}$.
Pour x fixé tel que $|x| < R$, on a donc, pour tout j de 1 à n, $|a_jx| < 1$; la série géométrique de terme général a_jx converge donc et l'on peut donc écrire :
$\dfrac{1}{1-a_jx} = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} a_j^p x^p$, même pour $a_j = 0$. Par addition de n séries convergentes :

$$\boxed{\varphi(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p x^p, \text{ avec } c_p = \sum_{j=1}^{n} A_j a_j^p.}$$

C5) Ce qui précède prouve que, si $f = \dfrac{N}{M} \in F_n$, avec N et M premiers entre eux et si f est de type normal, alors M admet, suivant qu'un des a_i est nul ou non, $n-1$ ou n racines complexes toutes différentes et non nulles, N est de degré strictement inférieur à n et, dans le cas où M admet $n-1$ racines, N est exactement de degré $n-1$.
Considérons réciproquement une fonction f s'écrivant N/M où le couple (N, M) de polynômes a toutes les propriétés précédentes. Que M ait $n-1$ ou n racines, et en notant x_j ces diverses racines de M (donc non nuls), $f(x)$ admet une décomposition en éléments simples, chacun de la forme $\dfrac{c_j}{x - x_j}$ qu'on peut écrire $\dfrac{A_j}{1 - a_jx}$ en posant $a_j = \dfrac{1}{x_j}$ et $A_j = \dfrac{-c_j}{x_j}$.
Les A_j et les a_j sont non nuls et les a_j sont tous différents.
Dans le cas où M a n racines, on a $\text{degré}(N) < \text{degré}(M)$: la partie entière est nulle.
Dans le cas où M a $n-1$ racines, on a $\text{degré}(N) = \text{degré}(M) = n-1$: la partie entière est une constante non nulle, qu'on peut écrire $\dfrac{A_n}{1 - a_nx}$ en introduisant un a_n nul, donc différent des autres a_j, et un A_n non nul.
Dans les deux cas f est de la forme φ de C4), donc de type normal.

> L'élément non dégénéré $f = N/M$ de F_n est de type normal si et seulement si M admet $n-1$ ou n racines toutes différentes, et si, dans le premier cas, $\text{degré}(N) = n-1$.

Il est inutile d'ajouter que les racines de M sont non nulles, ni que $\text{degré}(N) < n$, car c'est impliqué par $f \in F_n$. Dans l'exemple proposé, $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-x)(1+x)}$, $\text{degré}(N) = 2 < 3$, M a deux racines distinctes 1 et -1, non nulles et non racines de N, donc N et M sont premiers entre eux donc $f \in F_3$ et N est exactement de degré 2, donc f est de type normal.

C6) On suppose donc qu'on connaît $f \in F_n$ dont le développement tronqué à l'ordre $(2n-1)$ au point 0 est $S_0 + S_1x + \dots + S_{2n-1}x^{2n-1}$.

• Supposons que E_n admette une solution $(a_1, a_2, \dots, a_n, A_1, \dots, A_n)$. Comme cette solution est non dégénérée, on peut lui associer $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{1 - a_j x}$. D'après la fin de C4), le coefficient c_p du développement en série entière de φ est $\sum_{j=1}^{n} A_j a_j^p$. Pour p de 0 à $2n-1$, c'est donc S_p, puisque E_n est vérifié. f et φ ont donc le même développement tronqué à l'ordre $2n-1$ et sont donc égaux d'après C3).
Comme φ doit être de type normal, on en déduit déjà que, si f n'est pas de type normal, le système n'a pas de solution. Ensuite, si f est de type normal, sa décomposition en éléments simples est unique à l'ordre près et les coefficients a_j et A_j qui apparaissent dans cette décomposition sont ceux qui figurent dans la solution de E_n dont on est parti. Cela prouve que cette solution de E_n est unique à l'ordre près.
• Réciproquement, supposons que f soit de type normal. Décomposons la en éléments simples. Le coefficient c_j du développement en série entière de f s'exprime en fonction des a_j et A_j qui apparaissent dans cette décomposition sous la forme $c_j = \sum_{j=1}^{n} A_j a_j^p$. Par hypothèse sur f, pour j de 0 à $2n-1$, c'est S_j. Ces coefficients a_j et A_j constituent donc une solution de E_n.

$$\boxed{\text{Si l'élément } f \text{ de l'énoncé est de type normal, on sait trouver l'unique solution de } E_n.}$$

Cela pose donc le problème : retrouver une fraction rationnelle connaissant son développement tronqué.

D) Recherche d'une fonction rationnelle connaissant un développement tronqué

D1) En développant le produit MQ, on constate que la nullité des coefficients d'indice entre n et $2n-1$ de ce polynôme se traduit par le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} S_{n-1}u_1 & + & S_{n-2}u_2 & + & \dots & + & S_0 u_n & = & -S_n \\ S_n u_1 & + & S_{n-1}u_2 & + & \dots & + & S_1 u_n & = & -S_{n+1} \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ S_{2n-2}u_1 & + & S_{2n-3}u_2 & + & \dots & + & S_{n-1}u_n & = & -S_{2n-1} \end{array}\right.$$

La matrice de ce système est, à l'ordre près des colonnes, la matrice C_n des préliminaires, dont le déterminant D_n est non nul, d'après A2), puisque le système n'est pas dégénéré.
Ce système est donc de Cramer et :

$$\boxed{\text{Il existe } M(x) = 1 + \sum_{j=1}^{n} u_j x^j \text{ tel que } MQ \text{ ne contienne aucun monôme de degré entre } n \text{ et } 2n-1.}$$

D2) D'après C2), Q est le développement tronqué à l'ordre $(2n-1)$ de N/M si et seulement si $N - MQ$ est divisible par x^{2n}. Comme on veut N de degré inférieur ou égal à $n-1$, cela nécessite que MQ ne contienne aucun monôme de degré compris entre n et $2n-1$. On veut aussi $M(0) \neq 0$; puisque $\frac{N}{M} = \frac{kN}{kM}$, on peut imposer au représentant N/M de f de vérifier $M(0) = 1$. Ces conditions imposent le choix de M, comme on vient de le voir. N est alors nécessairement la somme des monômes de MQ dont les degrés sont entre 0 et $n-1$.
Réciproquement, il est clair que ce choix de N et M fournit $N - MQ$ divisible par x^{2n}, donc :

$$\boxed{\text{Il existe dans } F_n \text{ un unique élément } f \text{ dont le développement tronqué à l'ordre } (2n-1) \text{ est } Q.}$$

On a de plus un moyen de le calculer : on détermine d'abord M en résolvant un système de Cramer, puis on détermine N.
De plus, non seulement il y a une seule solution $f \in Fn$ convenable, mais il n'y a qu'un seul couple (N, M) avec $\text{degré}(N) < n$ et $\text{degré}(M) \leqslant n$ tel que $f = N/M$, sous la contrainte supplémentaire $M(0) = 1$. Si f était dégénéré, on aurait une écriture de f utilisant un couple $(N_1(x), M_1(x))$ vérifiant $\text{degré}(N_1) < n-1$ et $\text{degré}(M_1) \leqslant n-1$ et une autre utilisant le couple, différent, $((1-x)N_1(x), (1-x)M_1(x))$.

$$\boxed{f \text{ est donc non dégénéré.}}$$

D3) Le système donnant (u_1, u_2, u_3) est $\left\{\begin{array}{ccccccc} 1u_1 & + & 0u_2 & + & 0u_3 & = & -0 \\ 0u_1 & + & 1u_2 & + & 0u_3 & = & -1 \\ 1u_1 & + & 0u_2 & + & 1u_3 & = & 0 \end{array}\right.$

Il fournit $u_1 = 0, u_2 = -1$, et $u_3 = 0$, donc $M(x) = 1 - x^2$ puis $M(x)Q(x) = (1-x^2)(x^2+x^4) = x^2 - x^6$ donc $N(x) = x^2$ et
$f(x) = \frac{x^2}{1-x^2} = -1 + \frac{1}{1-x^2} = -1 + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}$, d'où la solution

$$\boxed{(a_1, a_2, a_3, A_1, A_2, A_3) = (0, 1, -1, -1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}).}$$

E) Systèmes non dégénérés sans solution

E1) Puisque $a \neq 0$, les polynômes $x^{p-1}, x^{p-2}(1-ax), x^{p-3}(1-ax)^2, \dots, (1-ax)^{p-1}$ sont tous de degré $p-1$ et sont de valuations toutes différentes : $p-1, p-2, \dots, 0$. Ils forment donc une base de $\mathbb{C}_{p-1}[x]$. Le polynôme $N(x)$, qui appartient à cet espace, est donc combinaison linéaire de ces polynômes :
$$N(x) = A_1(1-ax)^{p-1} + A_2 x(1-ax)^{p-2} + A_3 x^2(1-ax)^{p-3} + \dots + A_p x^{p-1}.$$
En divisant par $(1-ax)^p$:

$$\boxed{\frac{N(x)}{(1-ax)^p} = \frac{A_1}{1-ax} + \frac{A_2 x}{(1-ax)^2} + \frac{A_3 x^2}{(1-ax)^3} + \dots + \frac{A_p x^{p-1}}{(1-ax)^p}.}$$

E2) $f = N/M \in F_3$ donc $\text{degré}(N) \leqslant 2$, $\text{degré}(M) \leqslant 3$ et 0 n'est pas racine de M ; $M(x)$ est, à une constante multiplicative près, un produit de facteurs $(x_i - x)$ où les x_i sont non nuls, donc, en posant $\frac{1}{x_i} = a_i$, un produit de facteurs $(1 - a_i x)$. En convenant que certains des a_i peuvent être nuls, on peut supposer qu'il y a trois facteurs : $M(x) = (1-a_1x)(1-a_2x)(1-a_3x)$.
f est non dégénéré donc N et M n'ont pas de racine commune et $\text{degré}(M) = 3$ ou $\text{degré}(N) = 2$.
f n'est pas pas du type normal.
• Si $a_1 = a_2 = a_3 \neq 0$, on peut, d'après E1), mettre $f(x)$ sous la forme $\chi(x)$; A_3 n'est pas nul, sinon, en réduisant au même dénominateur $(1-a_1x)^3$, on aurait $1 - a_1 x$ en facteur au numérateur ; N et M auraient une racine commune.
Si $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, on peut encore mettre $f(x)$ sous la forme $\chi(x)$ en écrivant $N(x) = A_1 + A_2 x + A_3 x^2$. A_3 n'est pas nul car $f \notin F_2$.
• Si deux des a_i sont égaux, le troisième différent, par exemple $a_1 \neq a_2 = a_3$, $M(x) = (1-a_1x)(1-a_2x)^2$.
Les trois polynômes $(1-a_2x)^2$, $(1-a_1x)(1-a_2x)$ et $x(1-a_1x)$ forment une base de $\mathbb{C}_2[x]$. En effet, la matrice qui donne ces trois polynômes sur la base $(1, x, x^2)$ est $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2a_2 & -(a_1+a_2) & 1 \\ a_2^2 & a_1a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$.
Son déterminant se réduit à $a_2^2 + a_1^2 - 2a_1a_2 = (a_1 - a_2)^2$: il n'est pas nul. N se décompose sur cette base : $N(x) = A_1(1-a_2x)^2 + A_2(1-a_1x)(1-a_2x) + A_3x(1-a_1x)$.
A_1 et A_3 sont non nuls sinon, après simplification de N/M, f apparaîtrait comme un élément de F_2.
Le quotient N/M prend bien la forme $\psi(x)$ demandée. Notons que nous n'avons pas eu besoin d'envisager la nullité de a_1 ou a_2.
• Le cas où les a_i sont tous différents ne peut se produire car alors, l'existence de la décomposition en éléments simples de f montrerait, comme dans C5), que f est de type normal, même si l'un des a_i est nul.
En résumé :

$$\boxed{f(x) \text{ est du type de } \psi(x) \text{ ou du type de } \chi(x).}$$

x^2 est donc du type $\chi(x)$ $(a_1 = a_2 = a_3 = 0)$ et $\frac{x^2}{1-x}$ du type de $\psi(x)$ $(a_1 = 1$ et $a_2 = a_3 = 0)$.

E3) On part de $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, qui donne par dérivation $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$ donc
$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$, puis $\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2}$ donc
$\frac{x^2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^n$.
(chaque développement écrit est valable sur un disque complexe ouvert de rayon convenable).

On remplace x par $a_1 x$ ou $a_2 x$ et on combine linéairement. On obtient ainsi

$$\boxed{\begin{aligned}\psi(x) &= A_1 + A_2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_1 a_1^n + A_2 a_2^n + A_3 n a_2^{n-1}\right)x^n \quad \text{et}\\ \chi(x) &= A_1 + (A_1 a_1 + A_2)x + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(A_1 a_1^n + A_2 n a_1^{n-1} + A_3 \frac{n(n-1)}{2} a_1^{n-2}\right)x^n.\end{aligned}}$$

Soit $E_3(S_0, S_1, \ldots, S_5)$ un système supposé non dégénéré. D'après D2), il existe une unique $f \in F_3$ dont le développement tronqué d'ordre 5 est $Q(x) = S_0 + S_1 x + \ldots + S_5 x^5$ et elle est non dégénérée.
D'après C6), on sait que le système n'a aucune solution si et seulement si cet f non dégénéré n'est pas de type normal. Pour $n = 3$, cela équivaut à dire que f est du type ψ ou χ (la réciproque n'a pas été traitée mais il est clair que ni ψ ni χ n'est de type normal.)
Il faut et il suffit donc que $S_0 + S_1 x + \ldots + S_5 x^5$ soit la partie tronquée d'une fonction du type ψ ou χ.
Il faut et suffit donc qu'il existe A_1, A_2, A_3, a_1, a_2, avec

$$\boxed{\begin{aligned}&A_1 \neq 0, A_3 \neq 0, a_1 \neq a_2, \text{ tels que } S_0 = A_1 + A_2, S_n = A_1 a_1^n + A_2 a_2^n + A_3 n a_2^{n-1}\ (1 \leqslant n \leqslant 5) \text{ ou}\\ &A_3 \neq 0, \text{ tels que } S_0 = A_1, S_1 = A_1 a_1 + A_2, S_n = A_1 a_1^n + A_2 n a_1^{n-1} + A_3 \frac{n(n-1)}{2} a_1^{n-2}\ (2 \leqslant n \leqslant 5)\end{aligned}}$$

F) Systèmes dégénérés

F1) Soit $(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_n)$ une solution dégénérée de rang r de E_n. Soit $b_1, \ldots, b_l$ les différentes valeurs des a_k. Dans la $p+1$-ième équation, regroupons les $A_k a_k^p$ pour lesquels $a_k = b_1$ et mettons b_1^p en facteur. Cela donne un nombre $B_1(b_1)^p$, qui disparaît si $B_1 = 0$. Regroupons ainsi les b_1^p, les $b_2^p \ldots$ les b_l^p. Le premier membre de l'équation devient $B_1 b_1^p + \ldots + B_l b_l^p$. En fait, nos B_k sont les A'_h de l'énoncé, à l'ordre près, et il y en a r qui sont non nuls. Supposons les rangés de sorte que les non nuls soient les premiers. La p+1-ième équation s'écrit $B_1 b_1^p + \ldots B_r b_r^p = S_p$. Les B_k étant non nuls et les b_k étant tous différents, $(b_1, \ldots, b_r, B_1, \ldots, B_r)$ est, avec les définitions de l'énoncé, une solution non dégénérée du système $E'_{n,r}$.
Réciproquement, à partir d'une telle solution de $E'_{n,r}$, on peut fabriquer de multiples façons une solution dégénérée de rang r de E_n. Par exemple, on prend $A_k = B_k$ et $a_k = b_k$ pour k de 1 à r puis on on prend les derniers a_k nuls et les derniers A_k nuls aussi, si bien que la p+1-ième équation de E'_{nr} donne : $A_1 a_1^p + \cdots + A_n a_n^p = S_p$: le système E_n est bien satisfait.

$$\boxed{E_n \text{ a une solution dégénérée de rang } r \text{ si et seulement si } E'_{n,r} \text{ a une solution non dégénérée.}}$$

F2) Si E_n a une solution dégénérée de rang r, $E'_{n,r}$ a une solution non dégénérée, qui peut être vue comme solution non dégénérée du système carré constitué par les r premières équations. D'après A)

$$\boxed{\text{Le déterminant, qui est } D_r, \text{ associé ce système est non nul.}}$$

A partir d'une solution non dégénérée de $E'_{n,r}$, on a su construire une solution une solution dégénérée de E_n en prenant les derniers a_k nuls et les derniers A_k nuls aussi. Cela fonctionne aussi bien pour tous les systèmes intermédiaires $E_{r+1}(S_0, \ldots, S_{2r+1})$, $E_{r+3}(S_0, \ldots, S_{2r+3})$ etc... Tous ces systèmes ont donc une solution dégénérée. D'après A,

$$\boxed{\text{leurs déterminants } D_{r+1}, \ldots, D_n \text{ sont nuls.}}$$

Le rang r de la solution dégénérée considérée est donc le dernier indice k tel que le déterminant D_k est non nul. Cela ne dépend pas de la solution dégénérée considérée :

$$\boxed{\text{Les autres solutions de } E_n \text{ sont aussi de rang } r.}$$

F3) Pour l'exemple proposé, $D_1 = 1, D_2 = D_3 = 0$. S'il y a une solution, elle est forcément dégénérée et de rang 1.
Pour savoir si elle existe, on regarde $E'_{3,1}$: $A_1 = 1, A_1 a_1 = 0, A_1 a_1^2 = 0, A_1 a_1^3 = 0, A_1 a_1^4 = S_4, a_1^5 = S_5$.

$$\boxed{\text{Il y a des solutions si et seulement si } S_4 = S_5 = 0.}$$

***

Notations

On désigne par $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes dont les coefficients sont des nombres complexes. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A, $\overline{A}$ la matrice obtenue en conjuguant tous les coefficients de la matrice A et $rg(A)$ le rang de A.
On fixe un entier $n \geqslant 2$ et on considère $V = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $E = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ munis des opérations usuelles. Les vecteurs nuls sont notés respectivement 0_V et 0_E.
L'espace vectoriel V admet pour base canonique

$$e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \ldots \quad e_n = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}.$$

Pour $(k,m) \in [\![1,n]\!]^2$ on pose $E_{k,m} = e_k\,{}^te_m$, ce qui donne une matrice à n lignes et n colonnes dont le coefficient d'indice (i,j) vaut 1 si $(i,j) = (k,m)$ et 0 sinon.
La base canonique de E est constituée des n^2 matrices $E_{k,m}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant m \leqslant n$.
On note I la matrice identité, $I = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} E_{k,k}$.
Si A est une matrice élément de E et W un sous-espace vectoriel de V, $A(W)$ désigne l'ensemble $\{Aw | w \in W\}$.
Si F est un sous-ensemble de E, on dit que W est stable par F si $\forall A \in F, A(W) \subset W$.
Pour tout sous-ensemble $\mathcal{L}$ de E on s'intéresse aux propriétés suivantes :
P_1 : $\mathcal{L}$ contient (au moins) une matrice de rang 1,
P_2 : $\mathcal{L}$ contient (au moins) une matrice de rang n,
P_3 : $\mathcal{L}$ contient I,
P_4 : $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de E,
P_5 : $\mathcal{L}$ est stable par produit de matrices : $A, B \in \mathcal{L} \Rightarrow AB \in \mathcal{L}$,
P_6 : Si W est un sous-espace vectoriel de V stable par $\mathcal{L}$, alors soit $W = \{0_V\}$ soit $W = V$.

Partie I - Étude de quelques exemples

I.A - Dans cette section I.A -, $\mathcal{L}$ est l'ensemble des $A \in E$ qui sont inversibles : $\mathcal{L} = GL_n(\mathbb{C})$.
I.A.1) Soit x un vecteur non nul de V. Montrer que pour tout vecteur y non nul de V il existe une matrice inversible A telle que $Ax = y$.
Indication : on peut considérer deux cas,
a) la famille (x, y) est liée,
b) la famille (x, y) est libre.
En déduire que la propriété P_6 est vérifiée par $\mathcal{L}$.

I.A.2) Indiquer celles des propriétés $P_1, \ldots, P_5$ qui sont vérifiées par $\mathcal{L}$; justifier les réponses.
I.B - Dans cette section I.B -, $\mathcal{L}$ est l'ensemble des matrices $T = (t_{k,m}) \in E$ qui sont triangulaires inférieures, c'est-à-dire telles que $m > k \Rightarrow t_{k,m} = 0$.
I.B.1) Montrer que e_n est vecteur propre de tout $T \in \mathcal{L}$. Que peut-on dire de la propriété P_6 pour $\mathcal{L}$?
I.B.2) Indiquer celles des propriétés $P_1, \ldots, P_5$ qui sont vérifiées par $\mathcal{L}$; justifier les réponses.
I.C - Dans cette section I.C -, $n = 2$ et $\mathcal{L}$ est un sous-ensemble de E pour lequel P_3 et P_4 sont vérifiées.
I.C.1) On suppose que P_1 n'est pas vérifiée par $\mathcal{L}$ (les matrices 2×2 de rang 1 appartiennent donc toutes à $E \setminus \mathcal{L}$ le complémentaire de $\mathcal{L}$ dans E). Soit $A \in \mathcal{L}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Quelles sont les valeurs possibles du rang de $A - \lambda I$? Montrer que $\mathcal{L}$ est l'ensemble des homothéties vectorielles.
I.C.2) On suppose que P_6 est vérifiée par $\mathcal{L}$. Montrer qu'alors la propriété P_1 est vérifiée par $\mathcal{L}$.

Dans toute la suite du problème, P_4 et P_5 sont supposées vérifiées : $\mathcal{L}$ est donc un sous-espace vectoriel de E stable par produit matriciel.

Partie II -

Dans cette partie, les propriétés P_3 et P_6 sont supposées vérifiées par $\mathscr{L}$ (en plus de P_4 et P_5). On veut montrer qu'alors P_1 aussi est vérifiée.
On note
$$m=\min\{rg(M)|M\in\mathscr{L}\setminus\{0_E\}\},$$
et on se propose de montrer que $m=1$, ce qui établira P_1.
On suppose dans un premier temps que $m\geqslant 2$. On note alors M_0 un élément de $\mathscr{L}$ qui vérifie $rg(M_0)=m$ et on considère une base $(z_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ de $M_0(V)$.
On note $x_1,\dots,x_m$ des éléments de V tels que $\forall i\in[\![1,m]\!], M_0x_i=z_i$.

II.A - Montrer que $\{Nz_1|N\in\mathscr{L}\}=V$.
On note alors N_0 un élément de $\mathscr{L}$ qui vérifie $N_0z_1=x_2$ et on pose $M_1=M_0N_0M_0$. Montrer que (M_0,M_1) est une famille libre.

II.B - Montrer que $M_0(V)$ est stable par M_0N_0 puis que
$$\exists(\alpha,z)\in\mathbb{C}\times M_0(V),\ \text{tel que } z\neq 0_V \text{ et } M_0N_0z=\alpha z.$$
En déduire que $0<rg(M_1-\alpha M_0)<rg(M_0)$.
Conclure que $m=1$.

Partie III -

Dans cette partie on suppose que $n>2$ et que la dimension de $\mathscr{L}$ est supérieure ou égale à n^2-1.
On veut montrer que P_3 et P_8 sont vérifiées, puis que $\mathscr{L}=E$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'hyperplan de E stable par produit matriciel.

III.A - Soit W un sous-espace vectoriel de V stable par $\mathscr{L}$; on note k la dimension de W. Montrer que $\{M\in E|M(W)\subset W\}$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient $\mathscr{L}$ et dont la dimension vaut $n^2-k(n-k)$. En déduire que $W=\{0_V\}$ ou $W=V$. On a donc démontré P_8.

III.B -

III.B.1) On suppose ici : (*) $\exists k,m\in[\![1,n]\!]^2,\ k\neq m$ et $E_{k,m}\in E\setminus\mathscr{L}$.
On note alors $\mathscr{H}$=Vect$(E_{k,m},I)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par $E_{k,m}$ et I.
Montrer que $\dim(\mathscr{H}\cap\mathscr{L})\geqslant 1$ puis que $\mathscr{L}$ contient une matrice inversible.

III.B.2) On suppose ici que c'est le contraire de (*) qui est vrai, donc $k\neq m\Rightarrow E_{k,m}\in\mathscr{L}$.
Trouver une combinaison linéaire de ces $E_{k,m}$ qui donne une matrice inversible.
En déduire que dans tous les cas $\mathscr{L}$ contient une matrice inversible A.

III.C - Montrer que pour la matrice A définie ci-dessus, la famille $\left(A,A^2,\dots,A^{n^2+1}\right)$ est une famille liée.
En déduire qu'il existe un entier $p>0$ et des nombres complexes $(\lambda_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$ tels que $\lambda_0\lambda_p\neq 0$ et $\lambda_0 I+\lambda_1A+\dots+\lambda_pA^p=0$.
Montrer alors que $I\in\mathscr{L}$.
On a donc démontré P_3. Compte tenu de la partie II -, la propriété P_1 est donc satisfaite.
On note alors M_0 une matrice de rang 1 qui appartient à $\mathscr{L}$, matrice que l'on peut écrire
$$M_0=v_0\,{}^t\overline{w_0}\quad\text{où } v_0,w_0\in V\setminus\{0_V\}.$$
On introduit le produit scalaire canonique sur V, $(v,w)\mapsto {}^t\overline{v}w$ et pour $v\in V$ on pose
$A_v=\{Lv|L\in\mathscr{L}\}$,
$B_v=\{{}^t\overline{L}v|L\in\mathscr{L}\}$,
$C_v=(B_v)^\perp$.

C_v est l'ensemble des $u\in V$ tels que ${}^t\overline{u}w=0$ pour tout $w\in B_v$. Quand on aura vu les produits scalaires hermitiens, on aura des justifications plus directes pour certaines des questions qui suivent.

III.D - Soit $u\in V$, $u\neq 0_V$. Montrer que C_u est un sous-espace vectoriel de V stable par $\mathscr{L}$ et que B_u n'est pas réduit à $\{0_V\}$.
Montrer alors que $C_u=\{0_V\}$ et $B_u=V$.
Montrer que $A_u=V$. En déduire que pour tout $(x,y)\in V^2$ il existe $L,M\in\mathscr{L}$ tels que $Lv_0=x$ et ${}^t\overline{M}w_0=y$, puis que toute matrice $A\in E$ de rang 1 appartient à $\mathscr{L}$. Montrer que $\mathscr{L}=E$.

***

CENTRALE - SUPÉLEC 2001	Filière PC
Mathématiques 2	CORRIGÉ

Partie I - Étude de quelques exemples

I.A - Rappel préliminaire : On dit que la matrice $M\in E$ et l'endomorphisme f de V sont canoniquement associés si M est la matrice de f sur la base canonique de V.

I.A.1) Soit x et y deux vecteurs non nuls de V. Envisageons deux cas comme on nous le suggère :

a) la famille (x,y) est liée : comme x et y sont non nuls, il existe $\alpha\neq 0$ tel que $y=\alpha x$. Alors, si A est la matrice de l'homothétie de rapport α, A est inversible et $y=Ax$.

b) la famille (x,y) est libre : On peut compléter cette famille en une base :
$(u_1(=x),u_2(=y),u_3,\dots,u_n)$ de V. Soit $\mathscr{F}$ la base $(v_1(=u_2),v_2(=u_1),v_3(=u_3)\dots,v_n(=u_n))$.
On sait qu'il existe un automorphisme de V transformant la première base en la deuxième. Si A est la matrice canoniquement associée à cet automorphisme, on a en particulier $Au_1=v_1$, autrement dit $Ax=y$!
En rassemblant les deux cas :

Pour tout vecteur y non nul de V il existe une matrice inversible A telle que $Ax=y$.

Soit W un sous-espace de V stable par $\mathscr{L}$, $W\neq\{0_V\}$. Soit y quelconque dans V.
Si y est nul, y est dans W. Continuons en supposant y non nul. Soit x non nul dans W.
On vient de voir qu'il existe une matrice $A\in\mathscr{L}$ telle que $y=Ax$.
Comme W est stable par $\mathscr{L}$, on a $A(W)\subset W$; comme $y\in A(W)$, on a donc $y\in W$. Donc W est égal à V tout entier.
Les seuls sous-espaces de V stables par $\mathscr{L}$ sont donc $\{0_V\}$ et V lui-même :

La propriété P_8 est vérifiée par $\mathscr{L}$.

I.A.2) Les matrices inversibles sont les matrices de rang n. P_2 et P_3 sont donc vérifiées. Comme $n>1$, P_1 n'est pas vérifiée.
L'ensemble $\mathscr{L}$ne contient pas la matrice nulle donc P_4 n'est pas vérifiée.
Le produit de deux matrices de E inversibles est inversible donc P_5 est vérifiée. Résumons :

P_2,P_3 et P_5 sont vérifiées par $\mathscr{L}$. P_1 et P_4 ne le sont pas.

I.B -

I.B.1) Pour toute matrice T, Te_n est la dernière colonne de T. Si T est triangulaire inférieure, cette dernière colonne de T est formée de zéros, sauf en dernière position où on trouve $t_{n,n}$. Cette dernière colonne est donc $t_{n,n}e_n$. Il en résulte que :

e_n est vecteur propre de tout $T\in\mathscr{L}$, associé à la valeur propre $t_{n,n}$.

Notons W la droite engendrée par e_n. On a donc : $\forall A\in\mathscr{L}, A(W)\subset W$.
W est donc stable par $\mathscr{L}$et c'est un sous-espace de V distinct de $\{0_V\}$ et de V, donc :

$\mathscr{L}$ne vérifie pas la propriété P_8.

I.B.2) Les matrices diagonales sont triangulaires inférieures, donc dans $\mathscr{L}$. Il en est de rang 1 (celles qui ont un et un seul terme diagonal non nul) et il y a l'identité, qui est de rang n. On a vu en cours qu'une combinaison linéaire, et aussi le produit, de deux matrices triangulaires inférieures étaient des matrices triangulaires inférieures. Il en résulte que $\mathscr{L}$ vérifie P_4 et P_5. Finalement :

Les propriétés $P_1,\dots,P_5$ sont toutes vérifiées par $\mathscr{L}$.

I.C -

I.C.1) Soit $A \in \mathscr{L}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. La matrice $I \in \mathscr{L}$, puisque $\mathscr{L}$ vérifie P_3. Puisque $\mathscr{L}$ vérifie P_4, la combinaison linéaire $A - \lambda I$ appartient à $\mathscr{L}$. Puisque $\mathscr{L}$ ne contient aucune matrice de rang 1 :

$$\boxed{\text{Cette matrice } A - \lambda I \text{ est de rang 0 ou 2.}}$$

La matrice complexe A admet des valeurs propres. Soit λ_0 l'une d'elles. La matrice $A - \lambda_0 I$ n'est pas inversible, donc elle n'est pas de rang 2. D'après ce qui précède, elle est donc de rang 0. C'est donc la matrice nulle et $A = \lambda_0 I$. A est donc la matrice d'une homothétie vectorielle.

Réciproquement, si A est la matrice d'une homothétie vectorielle, A est de la forme $\lambda_0 I$ donc $A \in \mathscr{L}$ puisque $I \in \mathscr{L}$ et que $\mathscr{L}$ est un sous-espace vectoriel de E. En résumé :

$$\boxed{\mathscr{L} \text{ est l'ensemble des matrices d'homothéties vectorielles.}}$$

I.C.2) Si P_1 n'est pas vérifiée, $\mathscr{L}$ est donc l'ensemble des matrices d'homothéties vectorielles.
Soit W une droite vectorielle quelconque dans V. Elle est stable par toute homothétie vectorielle, donc stable par $\mathscr{L}$.
Comme W est de dimension 1, la propriété P_0 n'est pas vérifiée. En prenant la contraposée :

$$\boxed{\text{Si } P_0 \text{ est vérifiée par } \mathscr{L}, \text{ alors la propriété } P_1 \text{ est vérifiée par } \mathscr{L}.}$$

Partie II -

Puisque $I \in \mathscr{L}$, l'ensemble $\mathscr{L}\backslash\{0_E\}$ n'est pas vide, donc l'ensemble $\{rg(M) | M \in \mathscr{L}\backslash\{0_E\}\}$ est un ensemble non vide d'entiers naturels. Il admet donc effectivement un plus petit élément m et il existe effectivement un élément M_0 de $\mathscr{L}$ qui vérifie $rg(M_0) = m$.

La matrice M_0 étant de rang m, le sous-espace $M_0(V)$ de V est de dimension m. Il admet donc effectivement une base $(z_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$.

Les z_i étant dans $M_0(V)$, il existe effectivement des éléments $x_1, \dots, x_m$ de V tels que $\forall i \in [\![1, m]\!], M_0 x_i = z_i$.

II.A - z_1 est donc fixé. Notons W l'ensemble des Nz_1, N décrivant $\mathscr{L}$.

W est stable par combinaison linéaire : si u et u' sont dans W, il s'écrivent respectivement Nz_1 et $N'z_1$ avec N et N' dans $\mathscr{L}$. Si α et α' sont deux complexes, $\alpha N + \alpha' N'$ est dans $\mathscr{L}$, qui vérifie P_4. Puisque $\alpha u + \alpha' u' = (\alpha N + \alpha' N')z_1$, $\alpha u + \alpha' u'$ est dans W.

W est non vide puisqu'il contient $z_1 (= Iz_1)$.

W est donc un sous-espace vectoriel de V contenant z_1, donc non réduit à $\{0\}$.

Soit maintenant u un élément fixé de W ; il existe N_1 dans $\mathscr{L}$ tel que $u = N_1 z_1$. Alors, pour tout N dans $\mathscr{L}$, Nu est dans W puisque $Nu = (N.N_1)z_1$ et que $N.N_1$ est dans $\mathscr{L}$, qui vérifie P_5. Comme c'est vrai pour tout u dans W, on a donc : $\forall N \in \mathscr{L}, N(W) \subset W$. W est donc stable par $\mathscr{L}$.

Comme $\mathscr{L}$ vérifie P_0, et que le sous-espace W n'est pas réduit à $\{0\}$, c'est que $W = V$:

$$\boxed{\{Nz_1 | N \in \mathscr{L}\} = V.}$$

On peut donc bien trouver N_0 dans $\mathscr{L}$ tel que $N_0 z_1 = x_2$ (qui existe, car on suppose $m \geqslant 2$).

Supposons que les deux complexes α et β vérifient : $\alpha M_0 + \beta M_1 = 0$. Alors $\alpha M_0 x_1 + \beta M_1 x_1 = 0$. Comme $M_0 x_1 = z_1$ et $M_1 x_1 = M_0 N_0 M_0 x_1 = M_0 N_0 z_1 = M_0 x_2 = z_2$, cela s'écrit $\alpha z_1 + \beta z_2 = 0$. La liberté de la famille (z_1, z_2) nécessite $\alpha = \beta = 0$. Donc :

$$\boxed{(M_0, M_1) \text{ est une famille libre.}}$$

II.B - $M_0 N_0 (M_0(V)) = M_0(N_0 M_0(V)) \subset M_0(V)$ donc

$$\boxed{M_0(V) \text{ est stable par } M_0 N_0.}$$

La restriction de $M_0 N_0$ à $M_0(V)$ est donc un endomorphisme de l'espace vectoriel $M_0(V)$, espace qui n'est pas réduit au vecteur nul.
Tout endomorphisme d'un espace complexe non réduit au vecteur nul admet des valeurs propres. Cela se traduit ici par :

$$\boxed{\exists (\alpha, z) \in \mathbb{C} \times M_0(V), \text{ tel que } z \neq 0_V \text{ et } M_0 N_0 z = \alpha z.}$$

Puisque $z \in M_0(v)$, on peut trouver $x \in V$ tel que $z = M_0 x$.
On a donc $M_1 x = M_0 N_0 M_0 x = M_0 N_0 z = \alpha z = \alpha M_0 x$ donc $(M_1 - \alpha M_0)x = 0$.
Le vecteur x est donc dans le noyau de $M_1 - \alpha M_0$ mais pas dans celui de M_0 puisque $M_0 x = z \neq 0$.
Or le noyau de M_0 est inclus dans celui de $M_1 - \alpha M_0$ puisque si $M_0 y = 0$, on a
$(M_1 - \alpha M_0)y = M_0 N_0 M_0 y - \alpha M_0 y = 0$.
Cette inclusion est donc stricte donc $\dim(\ker M_0) < \dim(\ker(M_1 - \alpha M_0))$. En utilisant le théorème du rang, on a l'inégalité inverse entre les dimensions des images. Donc $rg(M_1 - \alpha M_0) < rg(M_0)$.

Par ailleurs la matrice $M_1 - \alpha M_0$ est non nulle car la famille (M_0, M_1) est libre. Son rang est donc strictement positif.

Rassemblons :

$$\boxed{0 < rg(M_1 - \alpha M_0) < rg(M_0).}$$

Or cela est absurde car $M_1 = M_0 N_0 M_0$ est dans $\mathscr{L}$, stable par multiplication donc $M_1 - \alpha M_0$ est dans $\mathscr{L}$, stable par combinaison linéire et le rang de M_0 est le rang minimal d'une matrice de $\mathscr{L}$. L'hypothèse $m \geqslant 2$ est donc absurde donc :

$$\boxed{m = 1.}$$

Partie III -

L'ensemble $\mathscr{L}$ est un sous-espace, de dimension supérieure ou égale à $n^2 - 1$, de E, qui est de dimension n^2.
Les deux possibilités pour la dimension de $\mathscr{L}$ sont $n^2 - 1$, auquel cas $\mathscr{L}$ est un hyperplan de E, et n^2 auquel cas $\mathscr{L}$ est égal à E tout entier. On veut donc prouver que seul ce dernier cas est possible.

III.A - Soit W un sous-espace vectoriel de V stable par $\mathscr{L}$ et k sa dimension.

Soit $(f_1, \dots, f_k)$ une base de W qu'on prolonge en une base $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_n)$ de V et soit P la matrice de passage de la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ à $(f_1, \dots, f_n)$.

Soit M une matrice quelconque et v l'endomorphisme de V qui lui est canoniquement associé. Alors $M(W) \subset W \Leftrightarrow \forall w \in W, Mw \in W \Leftrightarrow \forall w \in W, v(w) \in W$.

On sait qu'un tel endomorphisme v est caractérisé par le fait que sa matrice sur $\mathscr{F}$ est de la forme $N = \begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}$ où le bloc A est carré d'ordre k, les coefficients contenus dans les blocs A, B et C sont quelconques et le bloc O est formé de zéros.

Ces matrices N sont donc exactement les combinaisons linéaires des matrices de la base canonique de E qui ont la même forme que N et dont le nombre est $k^2 + k(n-k) + (n-k)^2 (= n^2 - k(n-k))$.

Ces matrices N forment donc un sous-espace vectoriel $\mathscr{N}$ de E, de dimension $n^2 - k(n-k)$.

Or la matrice de v sur la base canonique est M si et seulement si sa matrice sur $\mathscr{F}$ est $P^{-1}MP$. Les matrices $M \in E$ telles que $M(W) \subset W$ sont donc celles telles que $P^{-1}MP$ soit de la forme N.

Ce sont donc les matrices M de la forme PNP^{-1}.

L'application $N \in E \mapsto PNP^{-1} \in E$ est linéaire de noyau réduit à la matrice nulle. C'est donc un automorphisme de E.
Quand N décrit le sous-espace $\mathcal{N}$ de E, PNP^{-1} décrit un sous-espace de même dimension. $\{M \in E|M(W) \subset W\}$ est donc un sous-espace vectoriel de E, de dimension $n^2 - k(n-k)$.
Si $M \in \mathcal{L}$, on a $M(W) \subset W$, puisque W est stable par $\mathcal{L}$. S contient donc $\mathcal{L}$. Résumons :

$$\boxed{\begin{array}{c}\{M \in E|M(W) \subset W\} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E\\ \text{qui contient } \mathcal{L} \text{ et dont la dimension vaut } k^2 - k(n-k).\end{array}}$$

Puisque $\mathcal{L}$ est de dimension supérieure ou égale à $n^2 - 1$, on a nécessairement $n^2 - 1 \leqslant k^2 - k(n-k)$ donc $k(n-k) \leqslant 1$. Puisque k et $n - k \in \mathbb{N}$, et que $n > 2$, cela n'est possible que si $k = 0$ ou $k = n$. Donc

$$\boxed{W = \{0_V\} \text{ ou } W = V.}$$

On a donc démontré P_6.

III.B -

III.B.1) Puisque $E_{k,m}$ n'est pas colinéaire à I, le sous-espace vectoriel $\mathcal{H}$ de E engendré par $E_{k,m}$ et I est de dimension 2.
Comme $\dim(\mathcal{L}) \geqslant n^2 - 1$, on a $\dim(\mathcal{L}) + \dim(\mathcal{H}) \geqslant n^2 + 1 > \dim(E)$. La somme $\mathcal{L} + \mathcal{H}$ ne peut donc être directe, donc le sous-espace $\mathcal{H} \cap \mathcal{L}$ n'est pas réduit au vecteur nul donc :

$$\boxed{\dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{L}) \geqslant 1.}$$

Donc $\mathcal{L}$ contient une matrice non nulle de la forme $\alpha I + \beta E_{k,m}$. $\alpha = 0$ est exclu car on aurait $\beta \neq 0$. L'espace vectoriel $\mathcal{L}$ contiendrait $E_{k,m}$, ce qui n'est pas.
La matrice $\alpha I + \beta E_{k,m}$ est triangulaire avec α non nul sur toute la diagonale. Son déterminant est donc non nul. Donc :

$$\boxed{\mathcal{L} \text{ contient une matrice inversible.}}$$

III.B.2) Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

C'est la matrice de passage d'une base de V à la même base rangée autrement ; elle est donc inversible.
Comme c'est la somme de certaines des matrices $E_{k,m}$ telles que $k \neq m$,

$$\boxed{\text{On a là une combinaison linéaire de ces } E_{k,m} \text{ qui donne une matrice inversible.}}$$

On est dans le cas où, si $k \neq m$, $E_{k,m} \in \mathcal{L}$. Comme $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de E, $\mathcal{L}$ contient la combinaison linéaire, qu'on vient de trouver, de ces $E_{k,m}$.

$$\boxed{\text{Dans tous les cas, donc, } \mathcal{L} \text{ contient une matrice inversible.}}$$

III.C - La famille $\left(A, A^2, \dots, A^{n^2+1}\right)$ comporte $n^2 + 1$ vecteurs de E, qui est de dimension n^2 donc :

$$\boxed{\text{Cette famille } \left(A, A^2, \dots, A^{n^2+1}\right) \text{ est une famille liée.}}$$

Il existe donc des complexes non tous nuls $\alpha_1, \dots, \alpha_{n^2+1}$ tels que $\alpha_1 A + \dots + \alpha_{n^2+1} A^{n^2+1} = 0$.
Si q est le premier indice i tel que $\alpha_i \neq 0$ et si r est le dernier on a : $\alpha_q A^q + \dots + \alpha_r A^r = 0$.
On peut simplifier par A^q inversible : $\alpha_q I + \dots + \alpha_r A^{r-q} = 0$.
On ne peut avoir $r = q$ car cela donnerait $\alpha_q I = 0$, absurde car $\alpha_q \neq 0$.
Changeons les noms des coefficients et appelons les $\lambda_0 \dots \lambda_p$, avec $p = r - q > 0$. On a trouvé

$$\boxed{\text{un entier } p > 0 \text{ et des complexes } (\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant p} \text{ tels que } \lambda_0 \lambda_p \neq 0 \text{ et } \lambda_0 I + \lambda_1 A + \dots + \lambda_p A^p = 0.}$$

Comme $\lambda_0 \neq 0$, cela permet d'écrire I comme combinaison linéaire de $A, \dots, A^p$. Comme $A \in \mathcal{L}$ et que $\mathcal{L}$ est stable par multiplication, les puissances de A sont dans $\mathcal{L}$. Comme $\mathcal{L}$ est stable par combinaison linéaire, il en résulte que

$$\boxed{I \in \mathcal{L}.}$$

On a donc démontré P_3.

On est donc dans les hypothèses de la partie II et $\mathcal{L}$ contient une matrice M_0 de rang 1.

Les colonnes sont toutes colinéaires à un même vecteur v_0 non nul de V.
Si ces colonnes sont $\alpha_1 v_0, \dots, \alpha_n v_0$ et en introduisant le vecteur w_0 de V de coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, on peut effectivement écrire M_0 sous la forme $v_0\,{}^t\overline{w_0}$. De plus, comme $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ne sont pas tous nuls, le vecteur w_0 est lui aussi non nul.

III.D - Soit $u \in V$, $u \neq 0_V$. Alors $B_u = \{{}^t\overline{L}u | L \in \mathcal{L}\}$.
Puisque $u \neq 0_V$ et que $\mathcal{L}$ contient des matrices non nulles, B_u n'est pas réduit à $\{0_V\}$.
De plus B_u est stable par combinaison linéaire : si ${}^t\overline{L_1}u$ et ${}^t\overline{L_2}u$ sont deux éléments de B_u et (α, β) deux complexes, $\alpha\,{}^t\overline{L_1}u + \beta\,{}^t\overline{L_2}u = {}^t\left(\overline{\alpha L_1 + \beta L_2}\right)u$, élément de B_u puisque $\alpha L_1 + \beta L_2 \in \mathcal{L}$.
$C_u = (B_u)^\perp$. C'est donc le supplémentaire orthogonal de B_u pour le produit scalaire hermitien canonique sur V, donc un sous-espace de V.
Soit $w \in C_u$ et $N \in \mathcal{L}$. Alors, pour tout ${}^t\overline{L}u \in B_u$, on a
${}^t(\overline{Nw})({}^t\overline{L}u) = {}^t\overline{w}\,{}^t\overline{N}\,{}^t\overline{L}u = {}^t\overline{w}\,{}^t\overline{(LN)}u = {}^t\overline{w}\left({}^t\overline{(LN)}u\right) = 0$ puisque ${}^t\overline{(LN)}u \in B_u$ et que w lui est donc orthogonal.
Nw est donc orthogonal à tout vecteur de B_u et appartient donc à l'orthogonal C_u de B_u, pour tous $w \in C_u$ et $N \in \mathcal{L}$, d'où la stabilité de C_u par $\mathcal{L}$. Résumons :

$$\boxed{C_u \text{ est un sous-espace vectoriel de } V \text{ stable par } \mathcal{L} \text{ et } B_u \text{ n'est pas réduit à } \{0_V\}.}$$

L'orthogonal C_u de B_u n'est donc pas V en entier. Comme C_u est stable par $\mathcal{L}$ et que $\mathcal{L}$ vérifie P_6, on a nécessairement

$$\boxed{C_u = \{0_V\}}$$

Puisque B_u est son supplémentaire orthogonal,

$$\boxed{B_u = V.}$$

On montre comme pour B_u que A_u est un sous-espace vectoriel de E. Ce sous-espace est stable par $\mathcal{L}$ car si Lu est un élément de A_u et $N \in \mathcal{L}$, $N.(Lu) = (NL)u \in Au$ puisque $NL \in \mathcal{L}$.
Puisque $I \in \mathcal{L}$, $u \in A_u$. Puisque $u \neq 0_V$, A_u n'est pas réduit à $\{0_V\}$. Puisque A_u est stable par $\mathcal{L}$ et que $\mathcal{L}$ vérifie P_6,

$$\boxed{A_u = V.}$$

En particulier, puisque v_0 et w_0 sont non nuls, A_{v_0} et B_{w_0} sont égaux à V tout entier. Il en résulte que :

$$\boxed{\text{Pour tout } (x, y) \in V^2 \text{ il existe } L, M \in \mathcal{L} \text{ tels que } Lv_0 = x \text{ et } {}^t\overline{M}w_0 = y.}$$

Soit maintenant $A \in E$ de rang 1. On peut la mettre, comme on l'a vu, sous la forme $x\,{}^t\overline{y}$, avec x et y non nuls, donc sous la forme $Lv_0\,{}^t\overline{w_0}M = LM_0M$, avec L et M dans $\mathcal{L}$. Comme M_0 est aussi dans $\mathcal{L}$ et que $\mathcal{L}$ est stable par multiplication, la matrice A est dans $\mathcal{L}$. Donc :

$$\boxed{\text{Toute matrice } A \in E \text{ de rang 1 appartient à } \mathcal{L}.}$$

En particulier, $\mathcal{L}$ contient toutes les matrices $E_{k,m}$, qui sont de rang 1. Le sous-espace $\mathcal{L}$ de E contient une base de E donc

$$\boxed{\mathcal{L} = E.}$$

***

CENTRALE - SUPÉLEC 1998 Filière PSI

Mathématiques 2 Durée : 4 heures

Exemples de suites récurrentes de polygones du plan

Notations valables pour l'ensemble du sujet :

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
- k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
- $M_k(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices à coefficients complexes possédant k lignes et k colonnes.
- Pour toute matrice M de $M_k(\mathbb{C})$, on note ${}^tM$ la transposée de M.
- Si $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$ on note :

$$M(a_0,\dots,a_{k-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{k-2} & a_{k-1} \end{bmatrix} \in M_k(\mathbb{C}).$$

Par exemple, lorsque $k = 3$,

$$M(a_0, a_1, a_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix}.$$

Définition : on dit qu'un endomorphisme u de $\mathbb{C}^k$ est canoniquement associé à une matrice M de $M_k(\mathbb{C})$ si et seulement si M est la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{C}^k$.

Partie I - Étude des matrices compagnes

I.A - Cas général

I.A.1) Soit $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$. On note ϕ l'endomorphisme canoniquement associé à $M(a_0, \dots, a_{k-1})$. Calculer le déterminant de ϕ. Déterminer le rang, l'image et le noyau de ϕ.

I.A.2) Soit $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$. Montrer que $M(a_0, \dots, a_{k-1})$ est semblable à la matrice :

$$N = \begin{bmatrix} a_{k-1} & a_{k-2} & \dots & \dots & \dots & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

I.A.3) L'énoncé « toute matrice non nulle élément de $M_k(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de la forme $M(a_0, \dots, a_{k-1})$ » est-il vrai ? Justifier la réponse.

I.A.4) L'énoncé « toute matrice de la forme $M(a_0, \dots, a_k)$ est diagonalisable » est-il vrai ? Justifier la réponse.

I.A.5) Soit $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$. Rappeler la définition du polynôme caractéristique de $M(a_0, \dots, a_{k-1})$. On pose

$$Q(X) = X^k - \sum_{r=0}^{k-1} a_r X^r.$$

Déterminer, à l'aide de $Q(X)$, le polynôme caractéristique de $M(a_0, \dots, a_{k-1})$.

I.A.6) Soit $N \in M_k(\mathbb{C})$. On suppose que N est semblable à une matrice de la forme $M(a_0, \dots, a_{k-1})$. Le k-uplet $(a_0, \dots, a_{k-1})$ est-il unique ?

I.A.7) Soit $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$. Soit λ une valeur propre de $M(a_0, \dots, a_{k-1})$. Donner une base du sous-espace propre E_λ associé à cette valeur propre. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les valeurs propres de $M(a_0, \dots, a_{k-1})$ pour que $M(a_0, \dots, a_{k-1})$ soit diagonalisable.

I.B - Étude d'un cas particulier

On fixe $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$ tel que

$$\sum_{r=0}^{k-1} a_r = 1.$$

On suppose de plus que : $\forall r \in \{0, \dots, k-1\}, a_r > 0$.

On pose

$$Q(X) = X^k - \sum_{r=0}^{k-1} a_r X^r.$$

I.B.1) Montrer que 1 est une valeur propre de $M(a_0, \dots, a_{k-1})$ et indiquer un vecteur propre associé.

I.B.2) Montrer que les racines de Q sont toutes de module inférieur ou égal à 1.

I.B.3)

a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $Q(e^{i\theta}) = 0$. Montrer que

$$\sum_{r=0}^{k-1} a_r \cos((r-k)\theta) = 1.$$

b) En déduire que 1 est la seule racine de Q de module 1.

I.B.4) Montrer que 1 est une racine simple de Q.

Partie II - Présentation des exemples

Notations valables pour toute la suite du sujet :

- P est un plan vectoriel euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
- On rappelle que si A est un point de P de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, le complexe $z = x + iy$ est appelé l'affixe de A et A est appelé l'image du complexe z.
- On appelle polygone d'ordre k tout k-uplet de points de P.

II.A - Préliminaire

II.A.1) Soient $(A_0, \dots, A_{k-1})$ un polygone d'ordre k et $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$ tel que

$$\sum_{r=0}^{k-1} a_r \neq 0.$$

On rappelle que le barycentre des points $A_0, \dots, A_{k-1}$ affectés des coefficients $a_0, \dots, a_{k-1}$ est l'unique point G de P vérifiant

$$\sum_{r=0}^{k-1} a_r \overrightarrow{GA_r} = \vec{0}.$$

Lorsque, pour tout $r \in \{0, \dots, k-1\}$, $a_r = 1$, on dit que G est l'isobarycentre des points $A_0, \dots, A_{k-1}$. Donner une expression du vecteur $\overrightarrow{OG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_1}, \dots, \overrightarrow{OA_{k-1}}$.

II.A.2) On note $z_0, \dots, z_{k-1}$ les affixes des points $A_0, \dots, A_{k-1}$. Déterminer l'affixe de G en fonction des complexes $z_0, \dots, z_{k-1}$.

Fixons une suite de polygones d'ordre k de P, notée $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $p_n = (A_0^{(n)}, \dots, A_{k-1}^{(n)})$ et notons $z_0^{(n)}, \dots, z_{k-1}^{(n)}$ les affixes des points $A_0^{(n)}, \dots, A_{k-1}^{(n)}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Z_n = (z_0^{(n)}, \dots, z_{k-1}^{(n)})$. Ainsi $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{C}^k$.

II.B.1) Soit $(a_0,\dots,a_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$ tel que

$$\sum_{r=0}^{k-1} a_r = 1.$$

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polygone p_{n+1} est construit à partir du polygone p_n selon le procédé suivant :

- pour tout $r \in \{0,\dots,k-2\}$, on pose $A_r^{(n+1)} = A_{r+1}^{(n)}$,
- $A_{k-1}^{(n+1)}$ est le barycentre des points $A_0^{(n)},\dots,A_{k-1}^{(n)}$ affectés des coefficients $a_0,\dots,a_{k-1}$.

II.B.1) Montrer qu'il existe une matrice $M \in M_k(\mathbb{C})$ telle que, en écrivant Z_n et Z_{n+1} sous la forme de matrices colonnes : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = MZ_n$. Exprimer Z_n en fonction de n, de Z_0 et de M.

II.B.2) Faire un schéma représentant un polygone p_0 d'ordre 3 (un triangle) et les polygones p_1 et p_2 lorsque $a_0 = a_1 = a_2 = 1/3$.

II.C - Exemple 2

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le polygone p_{n+1} est construit à partir de p_n selon le procédé suivant :

- pour tout $r \in \{0,\dots,k-2\}$, $A_r^{(n+1)}$ est le barycentre des deux points $A_r^{(n)}$ et $A_{r+1}^{(n)}$ affectés des coefficients respectifs λ et $1-\lambda$,
- $A_{k-1}^{(n+1)}$ est le barycentre des deux points $A_{k-1}^{(n)}$ et $A_0^{(n)}$ affectés des coefficients respectifs λ et $1-\lambda$.

II.C.1) Montrer qu'il existe une matrice $M \in M_k(\mathbb{C})$ telle que, en écrivant Z_n et Z_{n+1} sous la forme de matrices colonnes : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = MZ_n$. Exprimer Z_n en fonction de n, de Z_0 et de M.

II.C.2) Faire un schéma représentant un polygone p_0 d'ordre 5 et les polygones p_1, p_2, p_3 et p_4 lorsque $\lambda = 1/2$.

II.D - Un peu d'informatique

On garde les hypothèses et les notations du II.C. On suppose que l'on dispose d'un langage informatique présentant les caractéristiques suivantes :

- l'instruction $A:=B$ permet d'affecter à la variable A la valeur de l'expression B, qui peut notamment désigner un point de P.
- dans une série d'instructions, ces dernières sont séparées par des ";".
- si $S(i)$ désigne une série d'instructions qui dépend d'une variable entière i, et si m et n sont deux entiers tels que $m \leqslant n$, l'instruction
  `for i from m to n do S(i) od;`
  effectue $S(m)$, puis $S(m+1),\dots$, puis $S(n)$.
- l'instruction
  `if test then <série d'instructions> fi;`
  effectue la série d'instructions lorsque le test est vrai et n'effectue rien sinon.
- Si A et B sont des points de P, $f(A,B,\lambda)$ désigne le barycentre de A et de B affectés des coefficients λ et $1-\lambda$.

II.D.1) À l'aide des seules caractéristiques du langage précisées ci-dessus, écrire dans ce langage une série d'instructions dont l'exécution a pour effet de stocker dans les variables $A_0, A_1,\dots,A_{k-1}$ les points du polygone p_{100}, en supposant qu'initialement les variables $A_0, A_1,\dots,A_{k-1}$ contiennent les valeurs des points du polygone p_0. On prendra soin d'utiliser le moins de variables supplémentaires possible.

II.D.2) À l'aide des seules caractéristiques du langage précisées ci-dessus, en supposant qu'initialement les variables $A_0, A_1,\dots,A_{k-1}$ contiennent les valeurs des points d'un polygone p, écrire dans ce langage une série d'instructions qui stockent dans la variable OK la valeur 0 si le polygone contient au moins deux points égaux et la valeur 1 si les points du polygone sont deux à deux distincts.

Partie III - Étude des exemples

III.A - Étude de l'exemple 1

On reprend les notations de l'exemple 1 (cf II.B.). Ainsi $(a_0,\dots,a_{k-1})$ est un élément de $\mathbb{R}^k$ tel que

$$\sum_{r=0}^{k-1} a_r = 1.$$

On suppose de plus que $\forall r \in \{0,k-1\}$, $a_r > 0$. On pose $Q(X) = X^k - \sum_{r=0}^{k-1} a_r X^r$ et on suppose que toutes les racines de Q sont simples.

III.A.1) Montrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$ que l'on notera Z_∞.

> Cela revient à montrer que les k suites composantes (sur une base de $\mathbb{C}^k$ à notre convenance) de Z_n sont convergentes. Le vecteur limite Z_∞ a alors pour composantes, sur la base qu'on a choisie, les limites des suites composantes.

III.A.2) Montrer que Z_∞ est colinéaire au vecteur de $\mathbb{C}^k$ égal à $(1,1,\dots,1)$.

III.A.3)

a) Montrer que 1 est une valeur propre de ${}^tM(a_0,\dots,a_{k-1})$.

b) Soit $V \in \mathbb{C}^k$ un vecteur propre de ${}^tM(a_0,\dots,a_{k-1})$ pour la valeur propre 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En écrivant V, Z_n et Z_{n+1} sous la forme de matrices colonnes, montrer que ${}^tVZ_n = {}^tVZ_{n+1}$.

c) En déduire la valeur de Z_∞.

d) Quelle est l'interprétation géométrique de ce résultat, relativement à la suite des polygones $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$? (On introduira un barycentre).

III.B - Étude de l'exemple 2

III.B.1) Préliminaires

a) Soit la matrice

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et $u \in L(\mathbb{C}^k)$ l'endomorphisme canoniquement associé à J.
On note aussi $c = (c_0,\dots,c_{k-1})$ la base canonique de $\mathbb{C}^k$.
Calculer $u(c_0),\dots,u(c_{k-1})$.
Soit $r \in \{0,\dots,k\}$. Calculer $u^r(c_0),\dots,u^r(c_{k-1})$
En déduire la valeur de J^r pour tout $r \in \{0,\dots,k\}$.

b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de J.

c) Posons $\omega = e^{2i\pi/k}$. Pour tout $r \in \{0,\dots,k-1\}$ on pose

$$e_r = \frac{1}{\sqrt{k}} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega^r \\ \omega^{2r} \\ \dots \\ \omega^{(k-1)r} \end{bmatrix}.$$

Montrer que $e = (e_0,\dots,e_{k-1})$ est une base de $\mathbb{C}^k$ qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^k$.

> Nous n'avons pas encore étudié les produits scalaires hermitiens, mais il suffit ici de savoir que le produit scalaire canonique sur $\mathbb{C}^k$ est l'application $(X,Y) \mapsto (X,Y) = \sum_{r=1}^{k} \overline{x_r} y_r$, où les x_r et y_r sont les composantes de X et Y, et qu'une famille orthonormée est libre.

Calculer la matrice de u dans la base e.
Pour toute la suite du problème, on notera A la matrice de passage de la base c vers la base e.

d) Soit $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$. On note $R(X) = \sum_{r=0}^{k-1} a_r X^r$. Préciser la forme de la matrice $R(J)$ et la diagonaliser.

III.B.2) On reprend les notations de l'exemple 2 (cf II.C) et on suppose jusqu'à la fin du sujet que $\lambda = 1/2$.

a) Montrer que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$, que l'on notera Z_∞, et montrer que, en représentant Z_∞ et Z_0 sous la forme de matrices colonnes, $Z_\infty = ADA^{-1}Z_0$, où D est une matrice diagonale à déterminer.

b) Si Z et Z' sont deux éléments de $\mathbb{C}^k$, on note $\langle Z, Z' \rangle$ leur produit scalaire canonique. Montrer que

$$Z_0 = \sum_{r=0}^{k-1} \langle e_r, Z_0 \rangle \, e_r.$$

En déduire que $Z_\infty = \langle e_0, Z_0 \rangle \, e_0$.

c) Quelle est l'interprétation géométrique de ce résultat, relativement à la suite des polygones $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

III.B.3) Déterminer une matrice C diagonale, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, en représentant Z_n, Z_∞ et Z_0 sous la forme de matrices colonnes,

$$Z_n - Z_\infty = AC^n A^{-1} Z_0.$$

III.B.4)

a) Soit $s \in \{0, \dots, 2k-1\}$. Montrer que la limite de la suite

$$\left(\left(\cos \tfrac{\pi}{k} \right)^{-2nk-s} (Z_{2nk+s} - Z_\infty) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

vaut $A\,\Delta_s\,A^{-1} Z_0$ où Δ_s est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont

$$0, e^{is\pi/k}, 0, \dots, 0, e^{-is\pi/k}.$$

b) Soit $s \in \{0, \dots, 2k-1\}$. Montrer que

$$A\,\Delta_s\,A^{-1} Z_0 = \langle e_1, Z_0 \rangle e^{is\pi/k} e_1 + \langle e_{k-1}, Z_0 \rangle e^{-is\pi/k} e_{k-1}.$$

c) Montrer qu'il existe $(c, d) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $r \in \{0, \dots, k-1\}$ et pour tout $s \in \{0, \dots, 2k-1\}$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\left(\cos \tfrac{\pi}{k} \right)^{-2nk-s} \left(z_r^{(2nk+s)} - z_G \right) \right) = e^{i\pi(2r+s)/k} c + e^{-i\pi(2r+s)/k} d,$$

où z_G est l'affixe de l'isobarycentre noté G des points constituant le polygone initial p_0.

III.B.5)

a) Montrer qu'il existe un endomorphisme v de P dans P tel que pour tout $r \in \{0, \dots, k-1\}$ et pour tout $s \in \{0, \dots, 2k-1\}$, si l'on note $M_{r,s}$ le point de P d'affixe $z_G + e^{i\pi(2r+s)/k} c + e^{-i\pi(2r+s)/k} d$ et $\Omega_{r,s}$ le point de P d'affixe $e^{i\pi(2r+s)/k}$, on a

$$\overrightarrow{GM_{r,s}} = v(\overrightarrow{O\Omega_{r,s}}).$$

b) Notons w l'application de P dans P définie par : $\forall \Omega \in P$, $w(\Omega) = G + v(\overrightarrow{O\Omega})$.
Montrer que w est une application affine de P dont l'application linéaire associée est v.

> Autrement dit : $\overrightarrow{Ow(\Omega)} = \overrightarrow{OG} + v\left(\overrightarrow{O\Omega}\right)$. w vérifie la définition d'une application affine. Il n'y a donc rien à démontrer.

Montrer que l'image du cercle de centre 0 et de rayon 1 par l'application affine w est ou bien une ellipse de centre G ou bien une partie bornée d'une droite passant par G.

III.B.6))
Interpréter géométriquement les résultats des questions IIIB3, IIIB4 et IIIB5, relativement à la suite des polygones $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

***

Exemples de suites récurrentes de polygones du plan

Partie I - Étude des matrices compagnes

I.A - Cas général Nous noterons $(\overrightarrow{w_0}, \cdots, \overrightarrow{w_{k-1}})$ la base canonique de $\mathbb{C}^k$.

I.A.1) En supprimant la première colonne et la dernière ligne de $M(a_0, \dots, a_{k-1})$, on obtient I_{k-1} dont le déterminant est 1. Le développement de $\det(\varphi) = \det(M(a_0, \dots, a_{k-1}))$ suivant la première colonne donne donc $\boxed{\det(\varphi) = (-1)^{k-1} a_0.}$

- Si $a_0 \neq 0$ le rang de φ est donc k, son image est $\mathbb{C}^k$, son noyau est réduit à 0.
- Si $a_0 = 0$ le rang de φ n'est donc plus k, mais on peut extraire de M (en haut et à droite) une matrice inversible de taille $k-1$, donc le rang de φ est $k-1$.

Le noyau est donc de dimension 1. Comme il contient déjà le premier vecteur de la base canonique, c'est donc **la droite engendrée par ce premier vecteur de la base canonique.**

$(\overrightarrow{w_1}, \cdots, \overrightarrow{w_{k-1}})$ est donc un supplémentaire du noyau de φ. On sait que son image par φ est une base de l'image. Donc

$$\boxed{\text{L'image de } \varphi \text{ est le sous-espace engendré par } \overrightarrow{w_0} + a_1\overrightarrow{w_{k-1}}, \dots, \overrightarrow{w_{k-2}} + a_{k-1}\overrightarrow{w_{k-1}}}$$

I.A.2) $N = \begin{bmatrix} a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. N est la matrice de φ sur la base $(\overrightarrow{w_{k-1}}, \overrightarrow{w_{k-2}}, \cdots, \overrightarrow{w_0})$,

car $\varphi(\overrightarrow{w_{k-1}}) = a_{k-1}\overrightarrow{w_{k-1}} + \overrightarrow{w_{k-2}}$, $\varphi(\overrightarrow{w_{k-2}}) = a_{k-2}\overrightarrow{w_{k-1}} + \overrightarrow{w_{k-3}}$ etc..

Comme ce sont les matrices d'un même endomorphisme sur deux bases différentes

$$\boxed{M(a_0, \dots, a_{k-1}) \text{ et } N \text{ sont semblables.}}$$

I.A.3) Une matrice $M(a_0, \dots, a_{k-1})$ est de rang k ou $k-1$. Puisque $k \geqslant 3$, elle ne peut donc être de rang 1.

> Les matrices de rang 1 (donc non nulles) ne peuvent être semblables à une matrice $M(a_0, \dots, a_{k-1})$.

I.A.4) La matrice $M(0, \dots, 0)$ est triangulaire ; ses valeurs propres sont en évidence sur la diagonale : elles sont toutes nulles. Si cette matrice était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle donc elle serait nulle, ce qui n'est pas.

> Les matrices de la forme $M(a_0, \dots, a_{k-1})$ ne sont pas toutes diagonalisables.

I.A.5) Le polynôme caractéristique de $M(a_0, \dots, a_{k-1})$ est

$$\det\left(M(a_0, \dots, a_{k-1}) - XI_k\right) = \begin{vmatrix} -X & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -X & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & -X & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{k-2} & a_{k-1} - X \end{vmatrix}$$

Pour le calculer, ajoutons à la première colonne la deuxième multipliée par X, la troisième multipliée par X^2 etc.. la dernière multipliée par X^{k-1}.

Sur la première colonne, il ne reste plus que des zéros, sauf en dernière position, où on trouve
$a_0 + a_1X + \cdots + a_{k-2}X^{k-2} + (a_{k-1} - X)X^{k-1}$ c'est à dire $-Q(X)$.
On développe alors suivant la première colonne de manière analogue à I.A.1) et on trouve $(-1)^{k-1} \times (-Q(X))$.

$$\boxed{\text{Le polynôme caractéristique de } M(a_0,\dots,a_{k-1}) \text{ est } (-1)^kQ(X).}$$

(Si on avait pris $\det(XI - M)$ comme définition du polynôme caractéristique, au lieu de $\det(M - XI)$, on aurait trouvé exactement $Q(X)$.)

I.A.6) Si N est semblable à deux matrices de la forme $M(a_0,\dots,a_{k-1})$, ces deux matrices sont semblables entre elles. Elles ont donc le même polynôme caractéristique. Les polynômes $Q(X)$ associés à ces deux matrices sont donc les mêmes. Ils ont donc les mêmes coefficients $(a_0,\dots,a_{k-1})$.

$$\boxed{\text{Si } N \text{ est semblable à une matrice } M(a_0,\dots,a_{k-1}) \text{, le } k\text{-uplet } (a_0,\dots,a_{k-1}) \text{ est unique.}}$$

(autrement dit, cette matrice $M(a_0,\dots,a_{k-1})$ est unique)

I.A.7) Si λ est une valeur propre de $M(a_0,\dots,a_{k-1})$, on trouve les vecteurs propres en résolvant le système $(M - \lambda I)X = O$. Les $k-1$ premières équations de ce système donnent :

$$\begin{array}{rcl} -\lambda x_1 + x_2 & = & 0 \\ & \vdots & \\ -\lambda x_{k-1} + x_k & = & 0 \end{array}$$

Donc, pour $i = 1\dots k$, $x_i = \lambda^{i-1}x_1$

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre associé à } \lambda \text{ est la droite vectorielle dirigée par } (1,\lambda,\dots,\lambda^{k-1}).}$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres est donc égale au nombre de valeurs propres distinctes.

$$\boxed{M(a_0,\dots,a_{k-1}) \text{ est diagonalisable si et seulement si elle admet } k \text{ valeurs propres distinctes.}}$$

I.B- Étude d'un cas particulier

I.B.1) La somme des termes de chaque ligne de $M(a_0,\dots,a_{k-1})$ est 1, donc

$$M(a_0,\dots,a_{k-1}).\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix} \text{ donc}$$

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre.} \quad \text{Le vecteur } \begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix} \text{ est vecteur propre associé.}}$$

I.B.2) Soit λ un zéro de Q, autrement dit une valeur propre réelle ou complexe de $M(a_0,\dots,a_{k-1})$.
On a donc $\lambda^k = \sum_{p=0}^{k-1} a_p\lambda^p$ donc $|\lambda|^k \leqslant \sum_{p=0}^{k-1} |a_p|.|\lambda|^p = \sum_{p=0}^{k-1} a_p|\lambda|^p$.
Si $|\lambda|$ était > 1, chaque $a_p|\lambda|^p$ serait strictement inférieur à $a_p|\lambda|^k$ (car $a_p > 0$).
On aurait $\sum_{p=0}^{k-1} a_p|\lambda|^p < |\lambda|^k \sum_{p=0}^{k-1} a_p = |\lambda|^k$ et finalement l'absurdité $|\lambda|^k < |\lambda^k|$. Donc

$$\boxed{\text{Les racines de } Q \text{ sont toutes de module inférieur ou égal à 1.}}$$

I.B.3)a) Puisque $Q(e^{i\theta}) = 0$, on a $e^{ik\theta} = \sum_{r=0}^{k-1} a_r e^{ir\theta}$ donc $1 = \sum_{r=0}^{k-1} a_r e^{i(r-k)\theta}$. En égalant les parties réelles

$$\boxed{1 = \sum_{r=0}^{k-1} a_r \cos((r-k)\theta)).}$$

I.B.3)b) Une racine de module 1 de Q est de la forme $e^{i\theta}$. On peut lui appliquer ce qui précède et, puisque $a_r \geqslant 0$, on a : $1 = \sum_{r=0}^{k-1} a_r \cos((r-k)\theta)) \leqslant \sum_{r=0}^{k-1} a_r = 1$.

L'inégalité intermédiaire est donc une égalité et les inégalités qu'on a ajoutées pour l'obtenir sont des égalités. En particulier, $a_{k-1}\cos(-\theta) = a_{k-1}$ donc, puisque $a_{k-1} \neq 0$, $\cos\theta = 1$ et $e^{i\theta} = 1$.

$$\boxed{1 \text{ est la seule racine de } Q \text{ de module 1.}}$$

I.B.4) Pour r de 0 à $k-1$, on a $ra_r < ka_r$ donc
$Q'(1) = k - \sum_{r=1}^{k-1} ra_r > k - \sum_{r=0}^{k-1} ka_r = k(1 - \sum_{r=0}^{k} a_r) = 0$ donc $Q'(1) \neq 0$:

$$\boxed{1 \text{ est racine simple de } Q.}$$

Partie II - Présentation des exemples

II.A- Préliminaire

II.A.1) $\overrightarrow{GA_r} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_r}$ donc

$$\sum_{r=0}^{k-1} a_r\overrightarrow{GA_r} = \vec{0} \iff \sum_{r=0}^{k-1} a_r(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_r}) = \vec{0} \iff \left(\sum_{r=0}^{k-1} a_r\right)\overrightarrow{OG} = \sum_{r=0}^{k-1} a_r\overrightarrow{OA_r} \iff$$

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{r=0}^{k-1} a_r}\sum_{r=0}^{k-1} a_r\overrightarrow{OA_r}.}$$

En particulier, si les a_r sont tous égaux à 1, alors $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}\overrightarrow{OA_r}$.

II.A.2) En passant aux affixes dans les relations précédentes et en utilisant la linéarité de l'affixe :

$$\boxed{\text{L'affixe de } G \text{ est } \frac{1}{\sum_{r=0}^{k-1} a_r}\sum_{r=0}^{k-1} a_r z_r.}$$

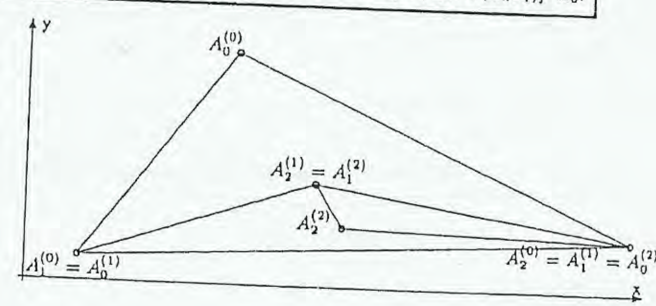
Dans le cas où les a_r sont tous égaux à 1 c'est $\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1} z_r$.

II.B - Exemple 1

II.B.1) Si le n-ième polygone est $(A_0,\dots,A_{k-1})$, le n+1-ième est $(A_1,\dots,A_{k-2},B)$, où B est le barycentre de $(A_0,\dots,A_{k-1})$ affectés des coefficients a_r. Pour i de 0 à $k-2$ on a donc
$z_i^{(n+1)} = z_{i+1}^{(n)}$ et $z_{k-1}^{(n+1)} = \frac{1}{\sum_{r=0}^{k-1} a_r}\sum_{r=0}^{k-1} a_r z_r^{(n)} = \sum_{r=0}^{k-1} a_r z_r^{(n)}$. Matriciellement

$$\boxed{Z_{n+1} = M(a_0,\dots,a_{k-1})Z_n \quad \text{et, par récurrence,} \quad Z_n = [M(a_0,\dots,a_{k-1})]^n Z_0.}$$

II.B.2) Ici, le dernier sommet d'un triangle est l'isobarycentre (ou centre de gravité) du triangle précédent. Il est à l'intersection des médianes du triangle.



II.C - Exemple 2

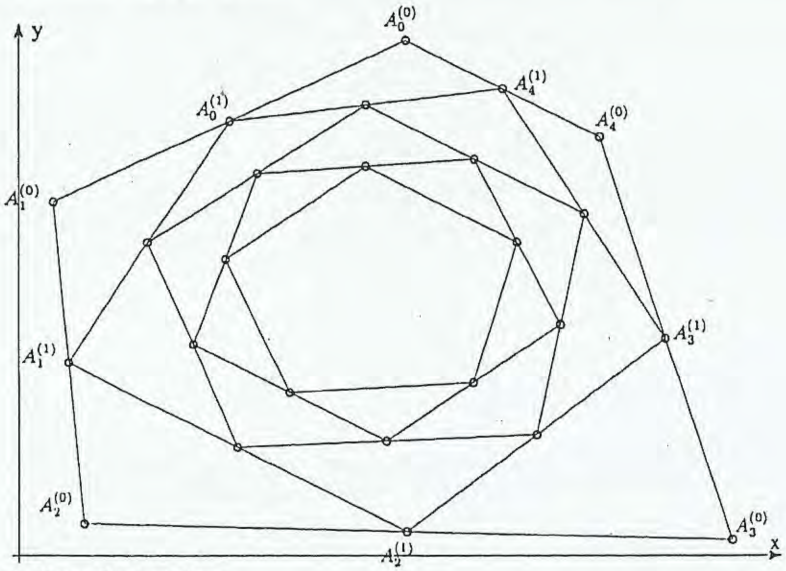
II.C.1) Pour r de 0 à $k-2$, on a $Z_r^{(n+1)} = \lambda z_r^{(n)} + (1-\lambda) z_{r+1}^{(n)}$.

Pour $r = k-1$, on a $z_{k-1}^{(n+1)} = \lambda z_{k-1}^{(n)} + (1-\lambda) z_0^{(n)}$.

Introduisons la matrice $M = \begin{bmatrix} \lambda & 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1-\lambda & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$. On peut donc écrire

$$\boxed{Z_{n+1} = M Z_n \quad \text{et, par récurrence,} \quad Z_n = M^n Z_0.}$$

II.C.2) Ici, $\lambda = 1/2$ donc chaque polygone (en fait un pentagone) s'obtient en joignant les milieux des côtés consécutifs du polygone précédent.



II.D- Un peu d'informatique

On suppose que le langage « comprend » que A_i désigne le i-ème élément d'un certain tableau A (c'est implicite dans l'énoncé).

II.D.1) On a besoin d'une variable supplémentaire, qu'on appellera $Avieux$, pour stocker la valeur de A_0 avant de modifier A_0. D'où le programme :

```
for i from 1 to 100 do
Avieux : = A0 ;
for r from 0 to k − 2 do Ar : = f(Ar, Ar+1, λ) ; od ;
Ak−1 : = f(Ak−1, Avieux, λ) ;
od ; od ;
```

II.D.2) On initialise OK à 1 ; on le fait basculer à 0 quand on rencontre deux points égaux. Quand c'est le cas, on écourte la fin du programme.

```
OK : = 1 ;
for i from 0 to k − 2 do
if OK = 1 then
for r from i + 1 to k − 1 do
if Ai = Ar then OK : = 0 ; fi ; od ; fi ; od ;
```


PARTIE III - Étude des exemples

III.A- Étude de l'exemple 1

III.A.1) et III.A.2) On a donc $M = M(a_0, \dots, a_{k-1})$ et les racines du polynôme caractéristique sont simples. M est donc diagonalisable et l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}^k$ qui lui est canoniquement associé aussi. De plus, les valeurs propres sont, outre $\lambda_0 = 1$, des complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ de module strictement inférieur à 1 d'après I.B.2) et I.B.3)b) (qu'on peut appliquer, puisque les a_r sont strictement positifs.)

Soit donc B' une base de $\mathbb{C}^k$ formée de vecteurs propres de φ associés à $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$. D'après I.B.1), on peut prendre comme premier vecteur de base le vecteur dont les composantes sur la base canonique sont toutes égales à 1.

Le vecteur Z_n de $\mathbb{C}^k$ a sur cette base une matrice colonne Z'_n dont nous noterons les composantes $z'^{(n)}_0, \dots, z'^{(n)}_{k-1}$. Puisque Z_n est l'image par φ de Z_{n-1}, et que B' est formée de vecteurs propres de φ on a, pour r de 0 à $k-1$, $z'^{(n)}_r = \lambda_r z'^{(n-1)}_r = \dots = \lambda_r^n z'^{(0)}_r$.

Quand $n \to +\infty$, la première composante de Z_n sur cette base B' reste bloquée à la valeur $z'^{(0)}_0$. Quand aux autres, elles tendent vers 0.

$$\boxed{Z_n \text{ converge donc vers un vecteur } Z_\infty \text{ colinéaire au premier vecteur } (1, \dots, 1) \text{ de } B'.}$$

III.A.3)a) Une matrice carrée a le même polynôme caractéristique que sa transposée car $\det(A - xI) = \det{}^t(A - xI) = \det({}^tA - xI)$. Comme 1 est valeur propre de $M(a_0, \dots, a_{k-1})$, on a :

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de } {}^tM(a_0, \dots, a_{k-1}).}$$

III.A.3)b) On a donc ${}^tMV = V$ donc, en transposant, on a l'égalité entre vecteurs lignes : ${}^tVM = {}^tV$ qu'on peut mulitiplier par la colonne Z_n : ${}^tVMZ_n = {}^tVZ_n$. Donc

$$\boxed{{}^tVZ_{n+1} = {}^tVZ_n.}$$

III.A.3)c) La matrice à un seul élément ${}^tVZ_n$ est donc constante égale à ${}^tVZ_0$. Or son unique terme est la somme des produits deux par deux des termes de V et de Z_n, qui tend vers Z_∞.

Il est clair qu'elle tend vers ${}^tVZ_\infty$. Donc ${}^tVZ_\infty = {}^tVZ_0$.

Puisque $a_0 + \dots + a_{k-1} = 1$, on voit que $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & a_1 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & a_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_0 + \dots + a_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_0 + \dots + a_{k-1} \end{bmatrix}$.

Le vecteur de composantes $v_r = a_0 + a_1 + \dots + a_r$ est donc vecteur propre de ${}^tM$ associé à la valeur propre 1. On peut donc le prendre pour V.

Le vecteur Z_∞ a toutes ses composantes égales à un certain α. L'unique terme de ${}^tVZ_\infty$ est donc $\alpha \sum_{r=0}^{k-1} v_r$ et l'unique terme de ${}^tVZ_0$ est $\sum_{r=0}^{k-1} v_r z_r^{(0)}$. Comme $\sum_{r=0}^{k-1} v_r \neq 0$,

$$\boxed{Z_\infty \text{ est le vecteur dont toutes les composantes sont } \frac{\sum_{r=0}^{k-1} v_r z_r^{(0)}}{\sum_{r=0}^{k-1} v_r}, \text{ avec } v_r = a_0 + a_1 + \dots + a_r.}$$

III.A.3)d) Quand $n \to +\infty$ les affixes des sommets tendent donc toutes vers la même valeur, qui est l'affixe du point G, barycentre des sommets de p_0 affectés des coefficients v_r. D'une façon abrégée :

$$\boxed{\text{La suite des polygones } p_n \text{ tend vers le point } G.}$$

III.B.1)a) $u(c_0)=c_{k-1}$ et, pour r de 1 à $k-1$, $u(c_r)=c_{r-1}$. Par récurrence immédiate sur j on obtient : $\begin{cases} u^r(c_j)=c_{j-r} \text{ si } 0\leqslant r\leqslant j\\ u^r(c_j)=c_{k+j-r} \text{ si } j<r\leqslant k\end{cases}$ Matriciellement, cela se traduit par

$$\boxed{\text{Pour } 0<r<k,\quad J^r=\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&&0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&&&&&\ddots&\\0&0&&&&&&&1\\1&0&&&&&&&\\0&1&&&&&&&\\\vdots&\vdots&\ddots&&&&&&\\\vdots&\vdots&&\ddots&&&&&\\0&0&&&1&&&&\end{bmatrix}\quad \text{et}\quad J^k=I_k.}$$

III.B.1)b) En fait $J=M(1,0,\dots,0)$ et on peut appliquer I : Le polynôme caractéristique de J est, au signe près, $Q(X)$ égal ici à X^k-1. Il admet k racines distinctes qui sont les racines k-ièmes de l'unité, qui peuvent s'écrire ω^r, pour r de 0 à $k-1$, en posant $\omega=\exp\left(\dfrac{2i\pi}{k}\right)$.

$\boxed{\text{Les valeurs propres sont les } \omega^r, \text{ pour } r \text{ de } 0 \text{ à } k-1.}$

J est donc diagonalisable et, en utilisant I.A.7,

$\boxed{\text{Le sous-espace propre associé à } \omega^r \text{ est la droite dirigée par } (1,\omega^r,\omega^{2r},\dots,\omega^{(k-1)r}).}$

III.B.1)c) Puisque le conjugué de ω^{js} est ω^{-js}, le produit scalaire canonique de e_s et e_r est $\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}\omega^{jr}\omega^{-js}=\dfrac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\omega^{(r-s)}\right)^j$. Pour $r=s$ cela donne 1 et pour $r\neq s$ cela donne $\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{1-\left(\omega^{(r-s)}\right)^k}{1-\omega^{(r-s)}}=0$, car $\omega^k=1$. Puisqu'une famille orthonormée est libre,

$\boxed{e=(e_0,\dots,e_{k-1}) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{C}^k.}$

Puisque cette base est formée de vecteurs propres de J,

$\boxed{\text{La matrice de } u \text{ sur cette base est la matrice diagonale } \Delta=\mathrm{Diag}(1,\omega,\omega^2,\dots,\omega^{k-1}).}$

III.B.1)d) En reprenant les J^r tels qu'ils ont été écrits au III.B.1)a), en les multipliant respectivement par les a_r, et ajoutant tout, on obtient

$$\boxed{R(J)=\begin{bmatrix}a_0&a_1&a_2&\cdots&\cdots&a_{k-1}\\a_{k-1}&a_0&a_1&\cdots&\cdots&a_{k-2}\\\vdots&&\ddots&&&\\\vdots&&&\ddots&&\\\vdots&&&&\ddots&\\a_1&a_2&\cdots&\cdots&a_{k-1}&a_0\end{bmatrix}}.$$

$J=A\Delta A^{-1}$ donc $J^r=A\Delta^rA^{-1}$ et $R(J)=\displaystyle\sum_{r=0}^{k-1}a_rA\Delta^rA^{-1}=A\left(\sum_{r=0}^{k-1}a_r\Delta^r\right)A^{-1}$.

$\boxed{R(J) \text{ se diagonalise sous la forme } AR(\Delta)A^{-1}, \text{ où } R(\Delta)=\mathrm{Diag}(R(1),\dots,R(\omega^k)).}$

III.B.2)a) En reprenant II.C) avec $\lambda=1/2$, on constate que $M=1/2(I_k+J)$. Elle se diagonalise sous

la forme $M=A\left[\dfrac{1}{2}(I_k+\Delta)\right]A^{-1}$. Le terme général de $\left[\dfrac{1}{2}(I_k+\Delta)\right]$ est $\dfrac{1+\omega^j}{2}=e^{\frac{ij\pi}{k}}\cos\left(\dfrac{j\pi}{k}\right)$ que nous noterons α_j. $\dfrac{1}{2^n}(I_k+\Delta)^n$ est donc la matrice $\mathrm{Diag}(1,\dots,\alpha_j^n,\dots,\alpha_{k-1}^n)$.

Pour j de 1 à $k-1$, $|\alpha_j|=\left|\cos\left(\dfrac{j\pi}{k}\right)\right|<1$ donc α_j^n tend vers 0 quand $n\to+\infty$, donc $\dfrac{1}{2^n}(I_k+\Delta)^n$ tend vers la matrice $D=\mathrm{Diag}(1,0,\dots,0)$.

Rappelons que si les produits matriciels CB_n et B_nE existent et si la suite de matrices B_n converge vers B, alors CB_n converge vers CB (on peut le justifier en utilisant la continuité de l'application $X\to CX$) et de même B_nE converge vers BE. De $Z_n=M^nZ_0=A\left[\dfrac{1}{2}(I_k+\Delta)\right]^nA^{-1}Z_0$, il résulte alors que

$\boxed{Z_n \text{ converge vers } Z_\infty=ADA^{-1}Z_0, \text{ avec } D=\mathrm{Diag}(1,0,\dots,0).}$

III.B.2)b) Si $Z_0=\displaystyle\sum_{m=0}^{k-1}\delta_me_m$, alors $<e_r,Z_0>=\displaystyle\sum_{m=0}^{k-1}\delta_m<e_r,e_m>=\delta_r$ car la base est orthonormée.

Donc $\boxed{Z_0=\displaystyle\sum_{r=0}^{k-1}<e_r,Z_0>e_r.}$

D est la matrice, dans la base $(e_0,\dots,e_{k-1})$, de la projection sur e_0 parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{k-1})$. ADA^{-1} est la matrice, sur la base canonique, de cette projection. Appliquée au vecteur colonne Z_0, qu'on vient d'écrire $Z_0=\displaystyle\sum_{r=0}^{k-1}<e_r,Z_0>e_r$, elle va donc donner $ADA^{-1}Z_0=<e_0,Z_0>e_0$. Donc

$\boxed{Z_\infty=<e_0,Z_0>e_0.}$

III.B.2)c) $<e_0,Z_0>=\dfrac{1}{\sqrt{k}}\displaystyle\sum_{r=0}^{k-1}z_r(0)$ donc Z_∞ est le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à $\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{r=0}^{k-1}z_r^{(0)}$, qui est l'affixe de l'isobarycentre G du polygone p_0. Là encore

$\boxed{\text{tous les sommets du polygone } p_n \text{ tendent vers un même point } G.}$

III.B.3) $Z_n-Z_\infty=A\left[\dfrac{1}{2^n}(I+\Delta)^n-D\right]A^{-1}Z_0$ et $\dfrac{1}{2^n}(I+\Delta)^n-D=\mathrm{Diag}(0,\alpha_1^n,\dots,\alpha_{k-1}^n)$. Donc

$\boxed{\text{Si } C=\mathrm{Diag}(0,\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1}),\ \text{ avec } \alpha_j=e^{\frac{ij\pi}{k}}\cos\left(\frac{j\pi}{k}\right),\ \text{ on a } Z_n-Z_\infty=AC^nA^{-1}Z_0.}$

III.B.4)a) $\left(\cos\dfrac{\pi}{k}\right)^{-2nk-s}(Z_{2nk+s}-Z_\infty)=A\left(\left(\cos\dfrac{\pi}{k}\right)^{-2nk-s}C^{2nk+s}\right)A^{-1}Z_0$. En numérotant les termes diagonaux de $\left(\cos\dfrac{\pi}{k}\right)^{-2nk-s}C^{2nk+s}$ à partir de 0, le terme d'indice 0 est nul et le terme d'indice j est $\left(\cos\dfrac{\pi}{k}\right)^{-2nk-s}\alpha_j^{2nk+s}$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^{-2nk-s}e^{\frac{(2nk+s)ij\pi}{k}}\left(\cos\frac{j\pi}{k}\right)^{2nk+s}=\left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^{-2nk-s}e^{\frac{sij\pi}{k}}\left(\cos\frac{j\pi}{k}\right)^{2nk+s}.$$

Pour $j=1$ cela ne dépend pas de n et vaut $e^{is\pi/k}$. De même pour $j=k-1$, puisque $\cos\dfrac{(k-1)\pi}{k}=-\cos\dfrac{\pi}{k}$, cela vaut $e^{-is\pi/k}$. Pour les valeurs de j entre 2 et $k-2$ apparaît un coefficient $\left(\cos(\dfrac{j\pi}{k})/\cos(\dfrac{\pi}{k})\right)^{2nk}$ qui tend vers 0 quand $n\to+\infty$ car $\left|\cos\left(\dfrac{j\pi}{k}\right)\right|<\cos\dfrac{\pi}{k}$.

$\left(\cos\dfrac{\pi}{k}\right)^{-2nk-s}C^{2nk+s}$ tend donc vers $\Delta_s=\mathrm{Diag}(0,e^{is\pi/k},0,\dots,0,e^{-is\pi/k})$ et

$\boxed{\left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^{-2nk-s}(Z_{2nk+s}-Z_\infty) \text{ tend vers } A\Delta_sA^{-1}Z_0.}$

III.B.4)b) En introduisant deux matrices diagonales convenables Δ_1 et Δ_2, on a $\Delta_s = e^{is\pi/k}\Delta_1 + e^{-is\pi/k}\Delta_2$ et $A\Delta_s A^{-1}Z_0 = e^{is\pi/k}A\Delta_1 A^{-1}Z_0 + e^{-is\pi/k}A\Delta_2 A^{-1}Z_0$.
On fait alors le même calcul que dans III.B.2)b) (en remplaçant e_0 par e_1 puis e_{k-1}) et on obtient $A\Delta_1 A^{-1}Z_0 = < e_1, Z_0 > e_1$ puis $A\Delta_2 A^{-1}Z_0 = < e_{k-1}, Z_0 > e_{k-1}$. Donc

$$\boxed{A\Delta_s A^{-1}Z_0 = < e_1, Z_0 > e^{is\pi/k}e_1 + < e_{k-1}, Z_0 > e^{-is\pi/k}e_{k-1}.}$$

III.B.4)c) Dans $\mathbb{C}^k$, la r-ième composante du vecteur colonne
$\left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^{-2nk-s}(Z_{2nk+s} - Z_\infty)$ est
$\left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^{-2nk-s}\left(z_r^{(2nk+s)} - z_G\right)$. Elle converge vers la r-ième composante du vecteur colonne $< e_1, Z_0 > e^{is\pi/k}e_1 + < e_{k-1}, Z_0 > e^{-is\pi/k}e_{k-1}$.
En regardant la matrice A, on voit que c'est $< e_1, Z_0 > e^{i(2r+s)\pi/k} + < e_{k-1}, Z_0 > e^{-i(2r+s)\pi/k}$.

$$\boxed{\text{En prenant } c = < e_1, Z_0 > \text{ et } d = < e_{k-1}, Z_0 >\text{, cette limite s'écrit } e^{i(2r+s)\pi/k}c + e^{-i(2r+s)\pi/k}d.}$$

III.B.5)a) Soit v l'application de l'espace réel P dans lui-même qui, au vecteur de composantes (x, y), associe le vecteur de composantes (X, Y) où X est la partie réelle de $c(x+iy) + d(x-iy)$ et Y la partie imaginaire. La linéarité de v est claire.
Le vecteur d'affixe $e^{i(2r+s)\pi/k}$ a pour image le vecteur d'affixe $e^{i(2r+s)\pi/k}c + e^{-i(2r+s)\pi/k}d$.

Avec les notations de l'énoncé, $\boxed{\overrightarrow{GM_{r,s}} = v\left(\overrightarrow{O\Omega_{r,s}}\right).}$

III.B.5)b) Par définition même d'une application affine, w est l'application affine qui transforme O en G et dont l'application linéaire associée est v.
Par cette application affine, le point Ω d'affixe z est transformé en le point d'affixe $Z = z_G + cz + d\overline{z}$.
Introduisons des réels $\gamma, \delta, \rho_1 \geqslant 0, \rho_2 \geqslant 0$ tels que $c = \rho_1 e^{2i\gamma}$ et $d = \rho_2 e^{2i\delta}$ et faisons tourner le repère de l'angle $\alpha = \delta + \gamma$ autour de O.
Le point d'affixe z dans le repère initial a pour affixe $z' = ze^{-i\alpha}$ dans le nouveau repère et notre application affine est donc décrite, dans ce nouveau repère, par $Z'e^{i\alpha} = z'_G e^{i\alpha} + cz'e^{i\alpha} + d\overline{z'}e^{-i\alpha}$ ou
$Z' = z'_G + cz' + d\overline{z'}e^{-2i\alpha} = z'_G + \rho_1 e^{2i\gamma}z' + \rho_2\overline{z'}e^{2i(\delta-\alpha)} = z'_G + \rho_1 e^{2i\gamma}z' + \rho_2 e^{-2i\gamma}\overline{z'}$.
Prenons alors $z' = e^{i(\theta - 2\gamma)}$ pour affixe de Ω, ce qui donne $Z' = z'_G + \rho_1 e^{i\theta} + \rho_2 e^{-i\theta}$. L'image de Ω par l'application affine a pour coordonnées, dans le nouveau repère : $\begin{cases} X' = x'_G + (\rho_1 + \rho_2)\cos\theta \\ Y' = y'_G + (\rho_1 - \rho_2)\sin\theta \end{cases}$
Quand θ décrit $\mathbb{R}$, $\theta - 2\gamma$ décrit $\mathbb{R}$ donc le point Ω décrit le cercle unité.
Son image par l'application affine décrit donc une ellipse de centre G, aplatie si $\rho_1 = \rho_2$.

$$\boxed{\text{L'image du cercle unité par } w \text{ affine est une ellipse, éventuellement aplatie en un segment de droite.}}$$

III.B.6) Notons tout d'abord que le module l'affixe de $\Omega_{r,s}$ est 1 : ce point est sur le cercle unité. Le point $M_{r,s}$ se trouve donc sur une certaine ellipse $\mathcal{E}$ de centre G, éventuellement aplatie, qui dépend uniquement de p_0. D'après III.B.4)c), on a $z_r^{(2nk+s)} = z_G + \left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^{2nk+s}\left(e^{i\pi(2r+s)/k}c + e^{-i\pi(2r+s)/k}d + \varepsilon_n\right)$, où la suite ε_n converge vers 0.
Cela montre qu'on peut approcher le point d'affixe $z_r^{(2nk+s)}$ par le point $M_{r,s,n}$ d'affixe

$$z_G + \left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^{2nk+s}\left(e^{i\pi(2r+s)/k}c + e^{-i\pi(2r+s)/k}d\right)$$

et cela permet d'apprécier la qualité de cette approximation. Etudions donc la forme du polygone $(M_{0,s,n}, \ldots, M_{k-1,s,n})$ qui est donc une « bonne » approximation de p_{2nk+s}.
En plus, quand n décrit N et s décrit $[0, \ldots, 2k-1]$, $2nk+s$ décrit N. En fixant donc s et en faisant tendre n vers l'infini, on aura donc une idée du comportement de tous les polygones à l'infini.
On remarque que $M_{r,s,n}$ se déduit de $M_{r,s}$ par l'homothétie de centre G et de rapport $\left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^{2nk+s}$.
A cette homothétie près (dont le rapport tend vers 0) p_{2nk+s} est donc « très proche » d'un certain polygone dont les sommets sont sur l'ellipse $\mathcal{E}$. Ces sommets, obtenus en faisant varier r, dépendent de s mais pas de n.

***

Semaine 5 : Diagonalisation

Nous sommes maintenant en plein dans les questions de valeurs propres, vecteurs propres et diagonalisation.

Nous avons étudié aussi cette semaine, en relation avec les notions précédentes, des questions délicates comme celle de polynôme d'endomorphisme. Cette notion est délicate car les fonctions sont utilisées à plusieurs niveaux : il y a d'abord un polynôme ; on le fait agir ensuite sur un endomorphisme, ce qui donne un endomorphisme qu'on fait ensuite agir sur un vecteur... Cela donne trois sortes d'objets dans trois ensembles munis chacun de lois de compositions. En plus, la lettre x est utilisée pour désigner l'indéterminée du polynôme mais aussi, souvent, un vecteur, ce qui accroît encore les risques de confusion. Il faut donc être très vigilant sur la nature des objets manipulés et sur la cohérence des écritures (ne pas multiplier les vecteurs entre eux, par exemple...).

- **Sujet 14 : Concours Communs Polytechniques (« E.N.S.I. ») 2000 Mathématiques 1 Filière PC**

Ce problème, très « matriciel », utilise tout l'arsenal de l'algèbre linéaire non euclidienne (et même un peu d'algèbre euclidienne mais là, les connaissances de Sup suffisent). Il constitue un bon entraînement à la manipulation des polynômes d'endomorphismes.

Deux parties préliminaires vous font visiter des questions classiques comme la démonstration du théorème de Cayley-Hamilton ou les propriétés des matrices de rang 1. On utilise les résultats obtenus pour étudier enfin les valeurs propres, les vecteurs propres et la diagonalisation d'un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.

Cela donne finalement un problème riche et long, assez difficile par endroits.

- **Sujet 15 : Concours Communs Polytechniques (« E.N.S.I. ») 2001 Mathématiques 2 Filière MP**

Le thème est celui de la matrice « compagnon » d'un polynôme, déjà abordé la semaine dernière dans un problème de Centrale (sous le nom de matrice « compagne » !).

Mis à part le point de départ, les problèmes sont très différents. Dans celui proposé cette semaine, l'étude est plus poussée et les applications sont plus algébriques (localisation des zéros d'un polynôme, suites récurrentes linéaires). On revient ensuite au thème central pour poser le problème de la similitude d'une matrice et de son « compagnon ».

Le problème est assez long, bien structuré, facile dans sa plus grande partie. C'est une bonne application du cours.

- **Sujet 16 : Concours Mines-Ponts 2001 Mathématiques 1 Filières MP et PSI**

On étudie ici les applications semi-linéaires d'un espace vectoriel complexe dans lui-même, c'est-à-dire : la propriété $f(\alpha x) = \alpha x$ des applications linéaires est remplacée par $f(\alpha x) = \overline{\alpha}x$. On définit et on étudie alors les notions, associées à ces applications, de valeurs et vecteurs co-propres, de co-diagonalisation etc., qui remplacent celles de valeurs et vecteurs propres, de diagonalisation etc.

Il faut bien sûr avoir des idées assez claires sur ces dernières notions avant de se lancer dans l'étude des notions qui les remplacent, car on s'y réfère souvent. On est fort heureusement bien guidé par l'énoncé et il n'y a pas de piège.

Le problème est court et assez facile. L'énoncé pour la filière PSI comporte une question de moins que celui de la filière MP.

Groupe Concours Polytechniques («E.N.S.I.») 2000 — Filière PC

Mathématiques 1 — Durée : 4 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées et les parties I et II sont indépendantes

Notations

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Pour p entier supérieur ou égal à 1, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant n lignes et p colonnes et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices à coefficients complexes ayant n lignes et p colonnes. On identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$, que l'on supposera muni de son produit scalaire canonique noté $(.|.)$.

Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ sont notés plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et sont munis de leur structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité.

Pour A appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A : c'est un élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$. $0_{n,p}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.

Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n représenté par la matrice A dans une base donnée, on note $\mathrm{Sp}(f)$ ou $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de f, χ_f ou χ_A son polynôme caractéristique et $\mathrm{Tr}(f)$ ou $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace. En outre, si A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A, lorsque A est considérée comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$\mathbb{R}[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, $\mathbb{C}[X]$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes et $\mathbb{N}_n$ est l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Partie I

I.1 a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, et M la matrice de $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$ donnée par

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix}.$$

I.1 a) Si A est non inversible, montrer sans recourir au déterminant, que M est non inversible.

I.1 b) Si A est inversible, on pose $P = \begin{pmatrix} A & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & I_p \end{pmatrix}$. Résoudre alors dans $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$ l'équation matricielle $XP = M$.

I.1 c) Retrouver le résultat connu : $\det M = \det A . \det C$.

Dans toute la suite, u désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

I.2 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par u. Si v désigne l'endomorphisme induit par u sur F, montrer que χ_v divise χ_u.

I.3 Pour tout élément de $\mathbb{R}^n$, on définit l'ensemble $F_u(x)$ par :

$$F_u(x) = \{y \in \mathbb{R}^n | \exists P \in \mathbb{R}[X], y = P(u)(x)\}.$$

Montrer que $F_u(x)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par u.

I.4 Dans cette question, on suppose que x est un élément non nul de $\mathbb{R}^n$.

I.4 a) Montrer l'existence d'un plus petit entier naturel q pour lequel la famille de vecteurs $(x, u(x), \dots, u^q(x))$ est liée.

I.4 b) Soit $(a_0, a_1, \dots, a_q)$ une famille de réels non tous nuls telle que $\sum_{j=0}^{q} a_j u^j(x) = 0$ et S le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $S(X) = \sum_{j=0}^{q} a_j X^j$. Montrer que a_q est non nul puis que $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est une base de $F_u(x)$.

I.4 c) Pour tout $i \in \{0, 1, \dots, q\}$, on pose $\alpha_i = \dfrac{a_i}{a_q}$ et on note u_0 l'endomorphisme induit par u sur $F_u(x)$. Montrer que $\chi_{u_0}(X) = (-1)^q \sum_{i=0}^{q} \alpha_i X^i$, donner la valeur de $\chi_{u_0}(u)(x)$ et en déduire que le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u.

Partie II

II.1 Vérifier les propriétés suivantes :

II.1 a) $\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (AX|Y) = (X|{}^tAY)$.

II.1 b) $\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \mathrm{Tr}(X{}^tY) = (X|Y)$.

II.1 c) $\forall (X, Y, Z) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^3, (X{}^tY)Z = (Y|Z)X$.

II.2 Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, (A, B) \to \mathrm{Tr}({}^tAB)$. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans toute la suite ce produit scalaire sera noté $((.|.))$.

II.3 À partir de cette question, r, s, l, m désignent des entiers naturels inférieurs ou égaux à n.

II.3 a) Évaluer le produit par blocs $\begin{pmatrix} I_r \\ 0_{n-r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \end{pmatrix}$.

II.3 b) Soit $A \in (\mathcal{M}_n\mathbb{R})$ une matrice de rang r. Montrer qu'il existe B dans $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ et C dans $\mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ telles que $A = BC$.

II.3 c) Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si et seulement s'il existe deux matrices non nulles X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = X{}^tY$.

II.3 d) Montrer que la décomposition $A = X{}^tY$ de la question précédente n'est pas unique et déterminer les relations vérifiées par des matrices colonnes X, Y, Z, T telles que

$$A = X{}^tY = Z{}^tT.$$

II.4 a) Soit $(Z_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ et $(T_j)_{1 \leqslant j \leqslant s}$ deux familles libres de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la famille $(Z_i{}^tT_j)_{1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant s}$ est de rang égal à rs.

II.4 b) Soit $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(Y_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ deux bases de $\mathbb{R}^n$. Que peut-on dire de la famille de matrices $(X_i{}^tY_j)_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$?

II.4 c) Soit $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ et $(W_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ deux familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de rangs respectifs r et s. Déterminer le rang de la famille de matrices $(V_i{}^tW_j)_{1 \leqslant i \leqslant l, 1 \leqslant j \leqslant m}$.

II.5 Montrer que si les bases $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(Y_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ sont des bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$, la famille $(X_i{}^tY_j)_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini en **II.2.** La réciproque est-elle vraie ?

II.6 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

II.6 a) Montrer que $A^2 = (\mathrm{Tr}A)A$.

II.6 b) Soit X et Y deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = X{}^tY$. Montrer l'équivalence des quatre propositions suivantes :

i) $(X|Y) = 0$.

ii) $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

iii) $\mathrm{Im}A \subset \mathrm{Ker}A$.

iv) A est non diagonalisable.

II.7 Montrer que les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisables et de rang 1, engendrent $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie III

Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $h_{A,B}$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ h_{A,B}(M) = AM - MB.$$

et $\overline{h}_{A,B}$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \overline{h}_{A,B}(M) = AM - MB.$$

III.1 Soit A_0 et B_0 les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ données par :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

III.1 a) Déterminer $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A_0)$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B_0)$.

III.1 b) On considère la base $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note H_0 la matrice dans cette base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme h_{A_0,B_0}. Déterminer H_0, puis $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(H_0)$ et vérifier que :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(H_0) = \{a - b | (a, b) \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A_0) \times \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B_0)\}.$$

III.1 c) Montrer que A_0 et B_0 sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En est-il de même de H_0 ?

Soit maintenant A et B quelconques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On se propose d'étudier les liens entre la diagonalisabilité de A et B et celle de $h_{A,B}$.

III.2 Soit $a \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $b \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$. Montrer qu'il existe $(V, W) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \backslash \{0\})^2$ tel que

$$AV = aV, \ {}^tWB = b^tW \text{ et } V^tW \text{ est vecteur propre de } \overline{h}_{A,B}.$$

En déduire l'inclusion : $\{a - b | (a, b) \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \times \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)\} \subset \mathrm{Sp}(\overline{h}_{A,B})$.

III.3 Montrer que si A et B sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il en est de même de $h_{A,B}$.
Calculer dans ce cas $\mathrm{Tr}(h_{A,B})$.

III.4 On note $a_1, a_2, \dots, a_n$ les valeurs propres non nécessairement distinctes de A dans $\mathbb{C}$. En exprimant χ_A en fonction des a_i, montrer que la matrice $\chi_A(B)$ est inversible si et seulement si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \emptyset$.

III.5 Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\overline{h}_{A,B})$ et M un vecteur propre associé.

III.5 a) Montrer que pour tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$, on a la relation

$$P(A)M = MP(B + \lambda I_n).$$

III.5 b) Montrer que $\chi_A(B + \lambda I_n)$ est non inversible.

III.5 c) En déduire en utilisant **III.2** et **III.4** : $\{a - b | (a, b) \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \times \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)\} = \mathrm{Sp}(\overline{h}_{A,B})$.

III.6 Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe M non nulle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MA$.
Dans toute la suite du problème, on suppose $B = A$ et on considère l'endomorphisme $h_{A,A}$ que l'on notera plus simplement h_A.

III.7 On suppose A diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note $(V_1, \dots, V_n)$ une base de vecteurs propres de A, chaque vecteur V_i étant associé à la valeur propre λ_i.
Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, on définit la matrice $M_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \ M_{ij}V_k = \delta_{jk}V_i, \text{ où } \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = k \\ 0 & \text{si} \quad j \neq k \end{cases}$$

III.7 a) Montrer que la famille de matrices $(M_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.7 b) Montrer que pour tout $(i, j, k) \in \mathbb{N}_n^3$:

$$h_A(M_{i,j})V_k = (\lambda_i - \lambda_j)M_{ij}V_k,$$

et en déduire que les matrices $M_{i,j}$ sont des vecteurs propres de h_A.

III.7 c) On note $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ les valeurs propres distinctes de A, $m_1, m_2, \dots, m_p$ leurs ordres de multiplicité respectifs et $J = \{(i, j) \in \mathbb{N}_n^2 | \lambda_i = \lambda_j\}$. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(h_A) = \mathrm{Vect}\{M_{ij} | (i, j) \in J\} \quad \text{et} \quad \dim \mathrm{Ker}(h_A) = \sum_{i=1}^{p} m_i{}^2.$$

III.7 d) Montrer que $\dim \mathrm{Ker}(h_A) \geqslant n$, et que l'égalité a lieu si et seulement si A a n valeurs propres distinctes.

III.7 e) On note $\mathbb{R}[A] = \{Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \exists P \in \mathbb{R}[X], Q = P(A)\}$. Montrer que si les n valeurs propres de A sont distinctes, $\{I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$ constitue une base de $\mathbb{R}[A]$ et en déduire que dans ce cas $\mathrm{Ker}(h_A) = \mathbb{R}[A]$.

III.8 On suppose h_A diagonalisable et on note $(P_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n}$ une base de vecteurs propres de h_A, chaque matrice $P_{i,j}$ étant associée à la valeur propre $\lambda_{i,j}$. Montrer que si X est un vecteur propre de A, associé à la valeur propre λ, la famille $(P_{i,j}X)_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ et en déduire que A est diagonalisable.

***

Groupe Concours Polytechniques («E.N.S.I.») 2000	Filière PC
Mathématiques 1	**CORRIGÉ**

Partie I

I.1 a) Si la matrice carrée A est non inversible, la famille de ses n vecteurs colonnes $(V_1, \dots, V_n)$, qui sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, est liée ; il existe des réels non tous nuls α_1, α_n tels que $\alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_n V_n = 0$.
Autrement dit, si $m_{i,j}$ est le terme général de M, on a, pour tout i de 1 à n, $\alpha_1 m_{i,1} + \dots + \alpha_n m_{i,n} = 0$.
Cette relation est également vérifiée pour i de $n + 1$ à $n + p$ car les $m_{i,j}$ alors concernés sont nuls.
La famille des n premiers vecteurs colonnes de la matrice carrée M est donc liée ; cette matrice n'est pas inversible.

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est non inversible, } M \text{ est non inversible.}}$$

I.1 b) $P = \begin{pmatrix} A & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & I_p \end{pmatrix}$. On peut écrire une matrice $X \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$ sous la forme
$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ où les blocs $X_1, \dots, X_4$ ont les mêmes tailles que les blocs formant P. On a alors :
$XP = \begin{pmatrix} X_1 A & X_2 \\ X_3 A & X_4 \end{pmatrix}$ et $XP = M$ si et seulement si $X_1 A = A$, $X_2 = B$, $X_3 A = 0_{p,n}$ et $X_4 = C$.
Puisque A est inversible, on voit l'unique solution

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix}.}$$

I.1 c) On a alors, en développant $\det X$ suivant la première colonne et en réitérant, $\det X = \det C$. De même $\det P = \det A$ en développant $\det P$ suivant la dernière colonne et en réitérant.
Comme $\det XP = \det X \det P$, on a bien

$$\boxed{\det M = \det A . \det C.}$$

Cette relation est encore valable si A n'est pas inversible car alors $\det A = \det M = 0$.

I.2 Si F sous-espace de dimension q de $\mathbb{R}^n$ est stable par u, la matrice de u sur une base de $\mathbb{R}^n$ obtenue en prolongeant une base de F est de la forme $G = \begin{pmatrix} H & L \\ 0_{n-q,q} & N \end{pmatrix}$ où H est la matrice, sur la base de F, de l'endomorphisme v induit par u sur F. Le polynôme caractéristique $\chi_u(x)$ de u est le déterminant de $\begin{pmatrix} H - xI_q & L \\ 0_{n-q,q} & N - xI_{n-q} \end{pmatrix}$. On peut le calculer en utilisant **I.1 c)** et c'est donc le produit des polynômes $\det(H - xI_q)$ et $\det(N - xI_{n-q})$. Comme $\det(H - xI_q) = \chi_v(x)$, on voit que

$$\boxed{\chi_v \text{ divise } \chi_u.}$$

I.3 Ici, u et x sont fixés. $\mathbb{R}[X]$ étant non vide, l'ensemble $F_u(x)$ des $P(u)(x)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Il est stable par combinaison linéaire car si y_1 et $y_2 \in F_u(x)$ et si α_1 et $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, il existe P_1 et $P_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que $y_1 = P_1(u)(x)$ et $y_2 = P_2(u)(x)$.
Alors $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2)(u)(x) \in F_u(x)$.
Enfin, $F_u(x)$ est stable par u car si $y \in F_u(x)$, y est de la forme $P(u)(x)$, donc
$u(y) = u(P(u)(x)) = (u \circ P(u))(x) = Q(u)(x)$, où $Q(X)$ est le polynôme $XP(X)$, donc $u(y) \in F_u(x)$.
Résumons :

$$\boxed{F_u(x) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^n \text{ stable par } u.}$$

I.4 a) La famille $(x, u(x), \dots, u^l(x))$ est liée dès que son cardinal $l + 1$ dépasse la dimension n de l'espace. L'ensemble des l tels que cette famille est liée est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$; cette partie admet un plus petit élément.

$$\boxed{\text{Il existe un plus petit entier naturel } q \text{ pour lequel } (x, u(x), \dots, u^q(x)) \text{ est liée.}}$$

Notons que $\{x\}$ est une famille libre puisque $x \neq 0$. q est donc au moins égal à 1.

I.4 b) La famille $(a_0, a_1, \dots, a_q)$ de réels non tous nuls telle que $\sum_{j=0}^{q} a_j u^j(x) = 0$ existe donc. Si a_q était nul, cela donnerait une relation de liaison entre $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$, contradictoire avec le caractère minimal de q.

$$\boxed{\text{On a donc : } a_q \neq 0.}$$

Cela permet d'exprimer $u^q(x)$ comme combinaison linéaire de $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$:

$$u^q(x) = -\sum_{j=0}^{q-1} \frac{a_j}{a_q} u^j(x) = \sum_{j=0}^{q-1} -\alpha_j u^j(x).$$

Ensuite, en composant par u, cela donne $u^{q+1}(x)$ comme combinaison linéaire de $(u(x), u^2(x), \dots, u^q(x))$, donc de $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ après report de $u^q(x)$; par récurrence, on voit donc que toute puissance $u^r(x)$ s'exprime comme combinaison linéaire de $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$.
Par combinaison linéaire, $P(u)(x)$ s'exprime donc, quel que soit le polynôme P, comme combinaison linéaire de $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$, qui sont eux-mêmes des éléments de $F_u(x)$.
Cette famille $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est donc génératrice de $F_u(x)$. On a vu qu'elle était libre :

$$\boxed{\text{C'est une base de } F_u(x).}$$

I.4 c) On a vu que $F_u(x)$ est stable par u ; on peut donc effectivement considérer l'endomorphisme induit par u sur $F_u(x)$. La matrice de cet endomorphisme sur la base $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ de $F_u(x)$ donne $(u(x), u^2(x), \dots, u^q(x))$ en fonction de $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$. C'est donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & 1 & 0 & -\alpha_{q-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{q-1} \end{pmatrix} \text{ et son polynôme caractéristique}$$

$$\chi_{u_0}(X) = \begin{vmatrix} -X & & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & -X & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & 1 & -X & -\alpha_{q-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -X-\alpha_{q-1} \end{vmatrix}.$$

Pour le calculer, on ajoute à la première ligne la deuxième multipliée par X, la troisième multipliée par X^2,..., la dernière multipliée par X^{q-1}. Sur la première ligne on a alors des zéros, sauf en dernière position où on a $-X^q - \sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i X^i = -\sum_{i=0}^{q} \alpha_i X^i$ (car $\alpha_q = 1$).
En supprimant la première ligne et la dernière colonne, il reste I_{q-1}, de déterminant 1, si bien que le développement de notre déterminant suivant la première ligne conduit à

$$\boxed{\chi_{u_0}(X) = (-1)^q \sum_{i=0}^{q} \alpha_i X^i.}$$

Donc $\chi_{u_0}(u) = (-1)^q \sum_{i=0}^{q} \alpha_i u^i$ et $\chi_{u_0}(u)(x) = (-1)^q \sum_{i=0}^{q} \alpha_i u^i(x) = 0$, d'après I.4 b).

$$\boxed{\chi_{u_0}(u)(x) \text{ est donc nul.}}$$

Puisque χ_{u_0} divise χ_u, on a aussi $\chi_u(u)(x) = 0$. Comme c'est vrai pour tout x, c'est que $\chi_u(u) = 0$.

$$\boxed{\text{Le polynôme caractéristique de } u \text{ est un polynôme annulateur de } u.}$$

(On a retrouvé le théorème de Cayley-Hamilton, qui n'est pas au programme dans la filière PC).

Partie II

II.1 a) Si $x_1, \dots, x_n$ sont les éléments du vecteur colonne X et $y_1, \dots, y_n$ ceux de Y, alors $(X|Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. C'est en fait l'unique terme de la matrice ${}^tXY$ (ou ${}^tYX$). $(AX|Y)$ est donc l'unique terme de ${}^t(AX)Y = {}^tX{}^tAY$ et $(X|{}^tAY)$ aussi, donc :

$$\boxed{\text{Pour tous } X \text{ et } Y \text{ dans } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \text{ pour tout } A \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ on a : } (AX|Y) = (X|{}^tAY).}$$

II.1 b) $X{}^tY$ est quant à elle une matrice carrée d'ordre n dont les termes diagonaux sont $x_1y_1, \dots, x_ny_n$. On peut donc dire aussi que

$$\boxed{(X|Y) \text{ est la trace de } X{}^tY.}$$

II.1 c) $(Y|Z)$ étant l'unique terme de ${}^tYZ$, la matrice colonne $(Y|Z)X$ peut aussi s'écrire $X({}^tYZ)$. Par associativité du produit matriciel, il vient :

$$\boxed{(Y|Z)X = (X{}^tY)Z.}$$

II.2 $\varphi(A,B) = \varphi(B,A)$ car ${}^tAB$ et ${}^tBA$, transposées l'une de l'autre, ont la même trace.
$\varphi(A, \beta_1B_1 + \beta_2B_2) = \mathrm{Tr}({}^tA.(\beta_1B_1 + \beta_2B_2)) = \mathrm{Tr}({}^tA\beta_1B_1 + {}^tA\beta_2B_2) = \beta_1\varphi(A,B_1) + \beta_2\varphi(A,B_2)$ par linéarité de la trace. φ est donc une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Le $k-$ième terme diagonal de ${}^tAA$ est égal à $\sum_{j=1}^{n} a_{jk}^2$ si bien que $\varphi(A,A)$ est la somme des carrés des termes de A, matrice réelle. $\varphi(A,A)$ est donc positif et n'est nul que si A est nulle. Résumons :

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

II.3 a) On a immédiatement

$$\boxed{\begin{pmatrix} I_r \\ 0_{n-r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}.}$$

II.3 b) $A \in \mathcal{M}_n\mathbb{R}$ et A est de rang r. On sait qu'elle est équivalente à la matrice ci-dessus trouvée. Il existe donc deux matrices inversibles P et Q de taille n telles que $A = P\begin{pmatrix} I_r \\ 0_{n-r,r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \end{pmatrix}Q$. Or $B = P\begin{pmatrix} I_r \\ 0_{n-r,r} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ et $C = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \end{pmatrix}Q \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$. Donc :

$$\boxed{\text{Il existe } B \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R}) \text{ et } C \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R}) \text{ telles que } A = BC.}$$

II.3 c) Si $r = 1$, la matrice B est unicolonne, non nulle car produit d'une inversible et d'une unicolonne non nulle. De même C est uniligne non nulle. En les notant respectivement X et ${}^tY$, on a $A = X{}^tY$.
Réciproquement, si $A = X{}^tY$ avec X et Y unicolonnes non nulles, les colonnes de A sont $y_1X, \dots, y_nX$. Elles sont toutes colinéaires à X donc $\mathrm{rang}(A) \leqslant 1$, mais elles ne sont pas toutes nulles car X n'est pas nul et les y_i ne sont pas tous nuls. Donc $\mathrm{rang}(A) = 1$. Résumons :

$$\boxed{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est de rang } 1 \iff \exists X \text{ et } Y \text{ non nulles dans } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ telles que } A = X{}^tY.}$$

II.3 d) Si A s'écrit aussi $Z{}^tT$, le vecteur colonne Z est un deuxième vecteur directeur de la droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$ qui contient toutes les colonnes de A. Il doit être colinéaire au premier. Il existe donc λ non nul tel que $Z = \lambda X$. En transposant A, on a $T{}^tZ = Y{}^tX$ donc, de même, il existe μ tel que $T = \mu Y$. Alors $A = X{}^tY = Z{}^tT = \lambda\mu X{}^tY$ et A n'est pas nulle donc $\lambda\mu = 1$ donc $T = \frac{1}{\lambda}Y$.
Réciproquement, il est clair que les couples (Z,T) avec $Z = \lambda X$ et $T = \frac{1}{\lambda}Y$ vérifient $A = Z{}^tT$, et qu'ils sont différents du couple (X, Y) pourvu que $\lambda \neq 1$. D'où

$$\boxed{\text{la forme générale des couples } (Z,T) \text{ solutions et la non-unicité de la décomposition } A = X{}^tY.}$$

II.4 a) Supposons qu'il existe une famille de réels α_{ij} tels que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant r, 1\leqslant j\leqslant s} \alpha_{ij} Z_i{}^tT_j = 0.$

En introduisant la matrice ligne $T'_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{s} \alpha_{ij}{}^tT_j$, cela s'écrit $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} Z_i T'_i = 0.$

Chaque colonne de cette matrice carrée de taille n est donc nulle.

Or, si $T'_i = [\beta_{1,i}, \dots, \beta_{n,i}]$, la k−ième colonne de $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} Z_i T'_i$ est $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \beta_{k,i} Z_i$.

La famille des Z_i est libre donc la nullité de cette k−ième colonne implique celle de tous les $\beta_{k,i}$. Comme c'est vrai pour tout k, T'_i est donc la matrice nulle. On a donc, à i fixé, $\displaystyle\sum_{j=1}^{s} \alpha_{ij}{}^tT_j = 0$.

Comme la famille des T_j est libre, cela nécessite la nullité des $\alpha_{i,j}$, finalement pour tout i et tout j. Il en résulte que

$$\boxed{\text{la famille des } rs \text{ matrices } Z_i{}^tT_j \text{ est libre, donc de rang égal à } rs.}$$

II.4 b) Dans le cas particulier $r = s = n$, on obtient une famille de n^2 matrices, de rang n^2, qui est la dimension de $M_n(\mathbb{R})$ donc :

$$\boxed{\text{Si } (X_i) \text{ et } (Y_j) \text{ sont deux bases de } \mathbb{R}^n, \text{ la famille des } X_i{}^tY_j \text{ est une base de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

II.4 c) La famille des vecteurs colonnes V_i est de rang r ; on peut donc en extraire une famille libre $(Z_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ et tous les V_i sont des combinaisons linéaires de ces Z_i.

De même on peut extraire de la famille des W_j une famille libre $(T_j)_{1\leqslant j\leqslant s}$ dont les autres W_j sont combinaisons linéaires.

D'après a), la famille des $Z_i{}^tT_j$ est libre. Elle est extraite de la famille des $V_i{}^tW_j$, qui est donc au moins de rang rs. Toute matrice $V_i{}^tW_j$ s'écrit $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \alpha_k Z_k\right) \cdot^t \left(\displaystyle\sum_{p=1}^{s} \beta_p T_p\right)$, ce qui donne après développement une combinaison linéaire des $Z_i{}^tT_j$. Finalement, engendrée par les $Z_i{}^tT_j$ qui forment une famille de rang rs,

$$\boxed{\text{la famille des } V_i{}^tW_j \text{ est de rang } rs.}$$

II.5 Ici, les X_i et les Y_j forment deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$. Examinons le produit scalaire de deux matrices $X_i{}^tY_j$ et $X_p{}^tY_q$ de la base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée par les $X_i{}^tY_j$.

${}^t(X_i{}^tY_j)X_p{}^tY_q = Y_j{}^tX_iX_p{}^tY_q = Y_j({}^tX_iX_p){}^tY_q$, qui est nul si $i \neq p$ car la matrice à un seul terme $({}^tX_iX_p)$ contient le produit scalaire canonique de X_i et X_p. Si $i = p$, cet unique terme vaut 1 et ${}^t(X_i{}^tY_j)X_p{}^tY_q = Y_j{}^tY_q$, dont la trace est $(Y_j|Y_q)$ d'après II.1 b) et vaut 1 ou 0 suivant que $j = p$ ou $j \neq p$.

Le produit scalaire des deux matrices $X_i{}^tY_j$ et $X_p{}^tY_q$ vaut donc 1 si $i = p$ et $j = q$ et il vaut 0 sinon.

$$\boxed{\text{Les matrices } X_i{}^tY_j \text{ forment une base orthonormale de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

La réciproque qu'on nous demande d'étudier n'est pas très claire :

On nous suggère sans doute de montrer que la base des $X_i{}^tY_j$ peut être orthonormale alors que les X_i et les Y_j forment deux bases non orthonormales. C'est facile : on part de deux bases orthonormales X_i et Y_j. On multiplie les X_i par 2, on divise les Y_i par 2 pour avoir deux bases non orthonormales de $\mathbb{R}^n$ conduisant à une base orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Vue comme cela,

$$\boxed{\text{La réciproque de la propriété précédente est fausse.}}$$

S'il s'agit d'exhiber une base orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui ne soit pas un ensemble de matrices de la forme $X_i{}^tY_j$, c'est plus délicat...

II.6 a) A est de rang 1 ; d'après II.3 b) elle peut donc s'écrire $A = X{}^tY$, où les matrices colonnes X et Y sont non nulles.

Alors $A^2 = X{}^tYX{}^tY = X({}^tYX){}^tY = aX{}^tY$ où a est l'unique terme de $({}^tYX)$. D'après II.1 b), cet unique terme de $({}^tYX)$ est $\mathrm{Tr}(X{}^tY) = \mathrm{Tr}A$. Donc :

$$\boxed{A^2 = (\mathrm{Tr}A)A.}$$

II.6 b) L'équivalence de i) et ii) est claire d'après II.1 b).

A étant non nulle, $\mathrm{Tr}(A) = 0$ équivaut, d'après a), à $A^2 = 0$, ce qui équivaut (et c'est vrai pour toute matrice) à $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Ker}(A)$. D'où l'équivalence de ii) et iii).

A étant non nulle et de rang 1, son noyau est de dimension $n - 1$, autrement dit 0 est valeur propre et le sous-espace propre associé ($\mathrm{Ker}A$) est de dimension $n - 1$. 0 peut être valeur propre d'ordre n, auquel cas il n'y a pas d'autre valeur propre et A n'est pas diagonalisable (ni dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ni dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) ou bien 0 est valeur propre d'ordre $n - 1$ et il y a une autre valeur propre, nécessairement réelle puisque la somme des valeurs propres complexes de la matrice A, comptées avec leur multiplicité, est $\mathrm{Tr}(A)$. Cette dernière valeur propre fournit un vecteur propre qui, juxtaposé avec une base de $\mathrm{Ker}A$, donnera une base de $\mathbb{R}^n$ diagonalisant A. On sera dans un cas ou dans l'autre suivant que la trace de (A), somme des valeurs propres, est nulle ou pas, d'où l'équivalence de ii) et de iv).

$$\boxed{\text{Les quatre propositions sont équivalentes.}}$$

II.7 Les matrices de la base usuelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ont un élément égal à 1 et les autres nuls ; elles sont donc de rang 1. Malheureusement, si $n \geqslant 2$, elles n'ont pas toutes une trace non nulle : celles pour lesquelles le 1 n'est pas sur la diagonale ont une trace nulle. Ajoutons donc à une telle matrice A celle pour laquelle le 1 est diagonal et sur la même ligne que celui de A. Nous obtenons une matrice A' ayant deux colonnes identiques, les autres colonnes étant nulles ; A' est donc, comme A, de rang 1. Sa trace vaut 1. Elle est donc diagonalisable. Enfin, on ne change pas le rang d'une famille en ajoutant à un vecteur une combinaison linéaire des autres. La nouvelle famille de matrices est donc encore une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cela prouve que

$$\boxed{\text{Les matrices de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ diagonalisables et de rang 1, engendrent } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

On aurait pu aussi utiliser II.4 b) en prenant deux bases X_i et Y_j de $\mathbb{R}^n$. Il eût alors fallu choisir ces bases de sorte que les ${}^tX_iY_j$ soient non nuls afin que les $X_i{}^tY_j$ aient une trace non nulle.

Remarquons aussi que nous avons fait plus qu'on nous demandait en exhibant une base formée de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisables et de rang 1. On nous demandait seulement, en fait, de montrer que toute matrice est combinaison linéaire de matrices diagonalisables et de rang 1, sans se soucier ni du nombre ni de l'indépendance linéaire des matrices utilisées.

Partie III

III.1 a) En utilisant trace et déterminant, on voit que les valeurs propres de A_0 ont pour somme 3 et produit 2 :

$$\boxed{\mathrm{Spc}(A_0) = \{1, 2\} \text{ et, de même, } \mathrm{Spc}(B_0) = \{0, 1\}.}$$

III.1 b)

$$h_{A_0,B_0}(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -2E_{1,1} - 2E_{1,2} - E_{2,1},$$

d'où la première colonne de la matrice H_0.

On calcule de même $h_{A_0,B_0}(E_{1,2})$ $h_{A_0,B_0}(E_{2,1})$ et $h_{A_0,B_0}(E_{2,2})$. On en déduit :

$$\boxed{H_0 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.}$$

Le polynôme caractéristique de H_0 est $P(X) = \begin{vmatrix} -2-X & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1-X & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1-X & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 4-X \end{vmatrix}$. Pour le simplifier un peu, on ajoute les trois autres colonnes à la première puis on retranche de la troisième colonne le double de la deuxième :

$$P(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 0 & 0 \\ 1-X & 1-X & -2(1-X) & 2 \\ 1-X & 0 & 1-X & 1 \\ 1-X & -1 & 0 & 4-X \end{vmatrix},$$ ce qui permet de mettre $(1 - X)^2$ en facteur :

$$P(X) = (1-X)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-X & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 4-X \end{vmatrix}$$. De la deuxième colonne on retranche la première et on développe suivant la première ligne, ce qui revient à supprimer première ligne et première colonne :

$$P(X) = (1-X)^2 \begin{vmatrix} -X & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4-X \end{vmatrix}$$. On finit en appliquant la règle de Sarrus :

$$P(X) = (1-X)^2\left[X(X-4)+4+4-2(4-X)\right] = (1-X)^2\left[X^2-2X\right] = (1-X)^2X(X-2).$$

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } H_0 \text{ sont } 0, 1 \text{ et } 2. \quad 1 \text{ est valeur propre double.}}$

Ce sont effectivement les nombres $a-b$, avec a valeur propre de A_0 et b valeur propre de B_0.

III.1 c) Puisqu'elles ont chacune deux valeurs propres réelles distinctes,

$\boxed{A_0 \text{ et } B_0 \text{ sont diagonalisables dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$

Les sous-espaces propres de H_0 associés aux valeurs propres simples 0 et 2 sont de dimension 1. Pour que H_0 soit diagonalisable, il suffit donc que le sous-espace propre associé à la valeur propre double 1 soit de dimension 2, c'est-à-dire que la matrice $H_0 - I_4$, dont le noyau est ce sous-espace propre, soit de

rang $4-2=2$. Cette matrice est $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Elle est effectivement de rang 2 car les deux dernières

colonnes sont combinaisons linéaires des deux premières.

$\boxed{H_0 \text{ est diagonalisable.}}$

III.2 Puisque a est valeur propre de A, il existe $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, non nul, tel que $AV = aV$.
b est valeur propre de B donc aussi de ${}^tB$, qui a le même polynôme caractéristique que B, donc les mêmes valeurs propres. Il existe donc $W \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, non nul, tel que ${}^tBW = bW$.
En transposant, on obtient : ${}^tWB = b{}^tW$.
Puisque $V{}^tW \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut lui appliquer $\overline{h}_{A,B}$:
$\overline{h}_{A,B}(V{}^tW) = AV{}^tW - V{}^tWB = aV{}^tW - bV{}^tW = (a-b)V{}^tW$.
En outre, cette matrice $V{}^tW$ est non nulle, comme on l'a déjà vu dans II. Résumons :

$\boxed{\exists V \text{ et } W \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ \neq 0, \text{ tels que } AV = aV,\ {}^tWB = b{}^tW \text{ et } V{}^tW \text{ est vecteur propre de } \overline{h}_{A,B}.}$

De plus, la valeur propre associée est $a-b$, d'où l'inclusion :

$\boxed{\{a-b \mid (a,b) \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\times\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)\} \subset \mathrm{Sp}(\overline{h}_{A,B}).}$

III.3 On suppose A et B diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si $B = PDP^{-1}$, alors ${}^tB = ({}^tP)^{-1}D({}^tP)$, donc ${}^tB$ est diagonalisable. Soit donc $(V_1, \ldots, V_n)$ et $(W_1, \ldots, W_n)$ deux bases de $\mathbb{R}^n$ formées respectivement de vecteurs propres de A et de ${}^tB$. D'après II, l'ensemble des $V_i{}^tW_j$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et d'après III.2, elle est formée de vecteurs propres de $h_{A,B}$.
Concluons :

$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont diagonalisables dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ alors } h_{A,B} \text{ est diagonalisable.}}$

De plus si $a_1, \ldots, a_n$ sont les valeurs propres, non nécessairement distinctes, associées aux V_i et $b_1, \ldots, b_n$ celles associées aux W_j, la valeur propre associée à $V_i{}^tW_j$ est $a_i - b_j$ d'après III.2.
La matrice de $h_{A,B}$ sur la base des $V_i{}^tW_j$ porte donc $a_1-b_1, a_1-b_2, \ldots, a_1-b_n, a_2-b_1, \ldots, a_n-b_n$ sur la diagonale. Donc :

$\boxed{\text{La trace de } h_{A,B} \text{ est } n(\mathrm{Tr}(A)-\mathrm{Tr}(B)).}$

III.4 On ne suppose plus A ni B diagonalisable.
Les a_i, maintenant complexes, répétées avec leur multiplicité, étant les zéros du polynôme caractéristique de A, on a $\chi_A(X) = (a_1 - X)\ldots(a_n - X)$ si bien que $\chi_A(B) = (a_1I_n - B)\ldots(a_nI_n - B)$.
$\chi_A(B)$ est inversible si et seulement si chacune des matrices $(a_1I_n - B)\ldots(a_nI_n - B)$ est inversible donc si et seulement si aucun des a_i n'est valeur propre de B ou encore :

$\boxed{\chi_A(B) \text{ est inversible si et seulement si } \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\cap\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \emptyset.}$

III.5 a) λ est valeur propre de $\overline{h}_{A,B}$ et la matrice M est vecteur propre associé donc $\overline{h}_{A,B}(M) = \lambda M$ donc $AM - MB = \lambda M$ donc $AM = M(B + \lambda I_n)$ puis
$A^2M = AM(B+\lambda I_n) = M(B+\lambda I_n)^2$ et par récurrence :
$A^kM = M(B+\lambda I_n)^k$ et enfin, par combinaison linéaire :

$\boxed{\text{Pour tout polynôme } P,\ P(A)M = MP(B+\lambda I_n).}$

III.5 b) On a démontré dans I le théorème de Cayley-Hamilton pour les endomorphismes : $\chi_u(u) = 0$.
Matriciellement, il donne : $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \chi_C(C) = 0$.
En prenant ici $P = \chi_A$, le a) donne donc $0 = M.\chi_A(B+\lambda I_n)$.
Si $\chi_A(B+\lambda I_n)$ était inversible, la multiplication de cette dernière égalité par l'inverse de $\chi_A(B+\lambda I_n)$ conduirait à $M = 0$, contradictoire avec le fait que M, vecteur propre, est non nul.

$\boxed{\chi_A(B+\lambda I_n) \text{ est non inversible.}}$

III.5 c) D'après III.4 appliqué à $B + \lambda I_n$ au lieu de B, on a donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\cap\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B+\lambda I_n) \neq \emptyset$.
Il y a donc une valeur propre a de A qui est valeur propre de $B + \lambda I_n$.
$B + \lambda I_n - aI_n$ a donc un déterminant nul. $a - \lambda$ est donc valeur propre de B.
λ est donc de la forme $a - b$ avec a valeur propre de A et b valeur propre de B.
L'ensemble des valeurs propres de $\overline{h}_{A,B}$ est donc inclus dans l'ensemble des $a - b$.
Comme on a dans III.2 démontré l'inclusion inverse, on a donc :

$\boxed{\{a-b \mid (a,b) \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\times\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)\} = \mathrm{Sp}(\overline{h}_{A,B}).}$

III.6 $AM = MB \iff \overline{h}_{A,B}(M) = 0$. Cela est possible avec $M \neq 0$ si et seulement si 0 est valeur propre de $(\overline{h}_{A,B})$. Compte tenu de III.5 :

$\boxed{\text{C'est possible si et seulement si } A \text{ et } B \text{ ont au moins une valeur propre commune.}}$

III.7 a) $M_{i,j}$ est la matrice, sur la base canonique de $\mathbb{R}^n$, de l'endomorphime $\varphi_{i,j}$ de $\mathbb{R}^n$ qui transforme V_j en V_i et les autres V_k en 0. $(V_1, \ldots, V_n)$ étant une base de $\mathbb{R}^n$, $M_{i,j}$ est donc bien définie.
On sait aussi que la famille des $\varphi_{i,j}$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
L'isomorphisme qui, à un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, associe sa matrice sur la base canonique de $\mathbb{R}^n$ transforme cette base en une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc

$\boxed{\text{La famille des } M_{i,j} \text{ est une base de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

III.7 b) Sous les hypothèses faites :
$h_A(M_{i,j})V_k = AM_{i,j}V_k - M_{i,j}AV_k = A\delta_{jk}V_i - \lambda_kM_{i,j}V_k = \delta_{jk}(\lambda_i - \lambda_k)V_i$ et
$(\lambda_i - \lambda_j)M_{ij}V_k = (\lambda_i - \lambda_j)\delta_{jk}V_i$: c'est la même chose. Donc :

$\boxed{h_A(M_{i,j})V_k = (\lambda_i - \lambda_j)M_{ij}V_k.}$

$h_A(M_{i,j})$ et $(\lambda_i - \lambda_j)M_{ij}$ donnent donc de la base $(V_1, \ldots, V_n)$ la même image ; elles sont donc égales :
$h_A(M_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)M_{ij}$. Comme M_{ij} n'est pas nulle

$\boxed{M_{ij} \text{ est vecteur propre de } h_A, \text{ associé à la valeur propre } \lambda_i - \lambda_j.}$

III.7 c) On savait déjà, car III.3 s'applique, que h_A est diagonalisable, mais on peut être maintenant plus précis. Tout d'abord, les $M_{i,j}$ forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ce sont des vecteurs propres de h_A. Ensuite, $\text{Ker}(h_A)$, qui est, s'il n'est pas réduit à 0, le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 de h_A, est engendré par les $M_{i,j}$ tels que $\lambda_i - \lambda_j = 0$. Avec les notations de l'énoncé, ce sont les $M_{i,j}$ tels que $(i,j) \in J$. Le nombre de ces couples nous donnera la dimension de $\text{Ker}(h_A)$.
Si la valeur propre λ est d'ordre de multiplicité m, elle va nous fournir m valeurs possibles pour i et m valeurs possibles pour j donc m^2 couples (i,j) tels que $\lambda_i = \lambda_j = \lambda$. Puisque les divers ordres de multiplicité des valeurs propres de A sont $m_1, \dots, m_p$, le cardinal de J est $\sum_{i=1}^{p} m_i^2$. On a bien

$$\boxed{\text{Ker}(h_A) = \text{Vect}\{M_{ij} | (i,j) \in J\} \quad \text{et} \quad \dim \text{Ker}(h_A) = \sum_{i=1}^{p} m_i^2.}$$

III.7 d) Comme il s'agit d'entiers naturels, on a $\sum_{i=1}^{p} m_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{p} m_i = n$ et l'égalité n'a lieu que si, pour tout i, on a $m_i^2 = m_i$ donc $m_i = 1$ donc μ_i valeur propre simple :

$$\boxed{\dim \text{Ker}(h_A) \geqslant n, \quad \text{avec égalité si et seulement si } A \text{ a } n \text{ valeurs propres distinctes.}}$$

III.7 e) $\mathbb{R}[A]$ est l'ensemble des matrices qui sont des polynômes en A. Cet ensemble est non vide (il contient A) et visiblement stable par combinaison linéaire. C'est donc un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ sont dans ce sous-espace.
On a déjà vu que A annule son polynôme caractéristique. Cela permet d'écrire A^n comme combinaison linéaire de $I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ puis A^{n+1} comme combinaison linéaire de $A, A^2, \dots, A^{n-1}, A^n$ donc, après report de A_n, comme combinaison linéaire de $I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}$. Par récurrence, on voit ainsi que toute puissance de A est combinaison linéaire de $I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}$. Par combinaison linéaire, il en est de même de tout polynôme en A. Cette famille est donc génératrice de $\mathbb{R}[A]$.
Cette famille est libre. Si l'on suppose en effet que $\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2, \dots, +\alpha_{n-1} A^{n-1} = 0$, A annule un polynôme de degré inférieur à $n-1$. Les valeurs propres de A sont à chercher parmi les zéros de ce polynôme. Comme elles sont au nombre de n, cela n'est possible que si ce polynôme est nul, donc si tous les coefficients sont nuls. Tout cela prouve que

$$\boxed{\{I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}\} \text{ est une base de } \mathbb{R}[A].}$$

Toute puissance de A commute avec A donc appartient au noyau de h_A. Par combinaison linéaire, il en est de même de tout polynôme en A. Donc $\mathbb{R}[A] \subset \text{Ker}(A)$. Comme ici on est dans le cas où $\dim \text{Ker}(h_A) = n = \dim \mathbb{R}[A]$, on a :

$$\boxed{\text{Ker}(h_A) = \mathbb{R}[A].}$$

III.8 Soit Y imposé dans $\mathbb{R}^n$. X est non nul et peut être complété pour obtenir une base de $\mathbb{R}^n$. Une famille quelconque comportant Y étant donnée, il existe une application linéaire transformant cette base en cette famille et, notamment, X en Y. Soit donc M une matrice telle que $Y = MX$.
M est combinaison linéaire des P_{ij} donc Y est combinaison linéaire des $P_{ij}X$:

$$\boxed{\text{La famille des } P_{ij}X \text{ est génératrice de } \mathbb{R}^n.}$$

$h_A(P_{ij}) = A.P_{ij} - P_{ij}.A = \lambda_{ij} P_{ij}$ donc, si $AX = \lambda X$,
$A.P_{ij}X = P_{ij}AX + \lambda_{ij} P_{ij}X = (\lambda + \lambda_{ij}) P_{ij}X$. $P_{ij}X$ est donc soit nul soit vecteur propre de A. Tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est combinaison linéaire des $P_{ij}X$. En enlevant les vecteurs nuls, il reste que tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est combinaison linéaire de vecteurs propres de A. On peut extraire de cette famille génératrice de $\mathbb{R}^n$, même si elle est infinie, une base de $\mathbb{R}^n$, ce qui prouve que

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable,}}$$

sous réserve que A admette effectivement une valeur propre λ réelle, et l'énoncé n'est pas très clair sur ce point.

***

Groupe Concours Polytechniques («E.N.S.I.») 2001 — Filière MP
Mathématiques 2 — Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n°99-186 du 16/11/99.

UTILISATIONS DES MATRICES COMPAGNON

Notations et définitions

Dans tout le problème, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n est un entier naturel.
Si u est un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E, on note $u^0 = id_E$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u^n \circ u$.
On note $K_n[X]$ la K-algèbre des polynômes de degré inférieur ou égal à n, $\mathcal{M}_n(K)$, la K-algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans K de matrice unité I_n et $GL_n(K)$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$; les éléments de $\mathcal{M}_n(K)$ sont notés $M = (m_{i,j})$.
Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(K)$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A, $\text{rg}(A)$ son rang, $\chi_A = \det(A - XI_n)$ son polynôme caractéristique et $\text{Sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres.
Si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ est un polynôme unitaire de $K_n[X]$ on lui associe

$$\textbf{la matrice compagnon } C_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 & -a_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & . & . & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(K).$$

(c'est-à-dire la matrice $C_P = (c_{ij})$ est définie par $c_{ij} = 1$ pour $i - j = 1$, $c_{in} = -a_{i-1}$ et $c_{i,j} = 0$ dans les autres cas).

Les parties II, III. et IV. utilisent les résultats de la partie I. et sont indépendantes entre elles.

Partie I : Propriétés générales

Dans cette partie on considère le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ de $K_n[X]$ et C_P sa matrice compagnon associée.

1. Montrer que C_p est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.

2. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C_P et déterminer une constante k telle que $\chi_{C_P} = kP$.

3. Soit Q un polynôme de $K_n[X]$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe A de $\mathcal{M}_n(K)$ telle que $\chi_A = Q$.

4. On note ${}^tC_P$ la transposée de la matrice C_P.

4.a. Justifier la proposition : $\text{Sp}(C_P) = \text{Sp}({}^tC_P)$.

4.b. Soit λ élément de $\text{Sp}({}^tC_P)$, déterminer le sous-espace propre de ${}^tC_P$ associé à λ.

4.c. Montrer que ${}^tC_P$ est diagonalisable si et seulement si P est scindé sur K et a toutes ses racines simples.

4.d. On suppose que P admet n racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes, montrer que ${}^tC_P$ est diagonalisable et en déduire que le déterminant de Vandermonde $\begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & . & . & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & . & . & \lambda_n^2 \\ . & . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & . & . & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$ est non nul.

5. *Exemples*

5.a. Déterminer une matrice A (dont on précisera la taille n) vérifiant :

$$A^{2002} = A^{2001} + A^{2000} + 1999 I_n.$$

... $\neq 0$, montrer que l'on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice compagnon que l'on déterminera.

Partie II : Localisation des racines d'un polynôme

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$: $r_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ et

$D_i = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant r_i\}$. Pour $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $\|X\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.

6. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$ un vecteur propre associé à λ. Montrer que pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$: $|\lambda x_i| \leqslant r_i \|X\|_\infty$.

7. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{k=1}^{n} D_k$.

8. Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, établir que toutes les racines de P sont dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \ldots, 1 + |a_{n-1}|\}$.

9. *Application*

Soit a, b, c et d quatre entiers naturels distincts et non nuls, montrer que l'équation d'inconnue n :
$$n^a + n^b = n^c + n^d$$
n'admet pas de solution sur $\mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$.

Partie III : Suites récurrentes linéaires

On note $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites de complexes et si u est une suite de E, on écrira $u(n)$ à la place de u_n pour désigner l'image de n par u.

On considère le polynôme $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \ldots + a_0$ de $\mathbb{C}[X]$ avec $a_0 \neq 0$ et on lui associe le sous-espace vectoriel F de E formé des éléments u vérifiant la relation :
$$\forall n \in \mathbb{N} \; : \; u(n+p) = -a_{p-1}u(n+p-1) - \ldots - a_0 u(n).$$

10. Montrer que si λ est racine de P, alors la suite $n \mapsto \lambda^n$ est élément de F.

11. Soit φ l'application de F vers $\mathbb{C}^p$ définie par $u \mapsto (u(0), u(1), \ldots, u(p-1))$, montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Quelle est la dimension de F ?

12. Pour tout entier $0 \leqslant i \leqslant p-1$ on définit les éléments e_i de F par : $e_i(i) = 1$ et, lorsque $0 \leqslant j \leqslant p-1$ et $j \neq i$, $e_i(j) = 0$.

12.a. Déterminer pour $0 \leqslant i \leqslant p-1$, $e_i(p)$.

12.b. Montrer que le système de vecteurs $(e_0, e_1, \ldots, e_{p-1})$ est une base de F.

12.c. Soit u un élément de F, établir que $u = \sum_{i=0}^{p-1} u(i)e_i$.

13. Si u est un élément de E, on définit l'élément $f(u)$ de E par : $f(u) \; : \; n \mapsto u(n+1)$. Montrer que l'application f ainsi définie est un endomorphisme de E et que F est stable par f.

14. Si g est l'endomorphisme de F induit par f, montrer que la matrice de g dans la base $(e_0, e_1, \ldots, e_{p-1})$ est ${}^tC_P$.

15. On suppose que P admet p racines non nulles et deux à deux distinctes : $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}$.

15.a. Déterminer une base de F formée de vecteurs propres de g.

15.b. En déduire que, si u est élément de F, il existe des constantes complexes $k_0, k_1, \ldots, k_{p-1}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u(n) = k_0\lambda_0^n + k_1\lambda_1^n + \cdots + k_{p-1}\lambda_{p-1}^n$.

16. *Exemples* (On revient à la notation usuelle u_n.)

Soit a, b et c trois réels distincts. Déterminer une base de l'espace vectoriel des suites définies par u_0, u_1 et u_2 et par la relation de récurrence valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+3} = (a+b+c)u_{n+2} - (ab+ac+bc)u_{n+1} + abc.$$

Partie IV : Matrices vérifiant : $\mathrm{rg}(U - V) = 1$

Dans cette partie, pour une matrice A, on notera C_A la matrice compagnon du polynôme $(-1)^n\chi_A$.

17. Une matrice A est-elle nécessairement semblable à la matrice compagnon C_A ?

Pour tout couple (U, V) de matrices de $GL_n(K)$, on considère les deux propositions suivantes, que l'on identifie chacune par un symbole :

(*) : $\mathrm{rg}(U - V) = 1$.

(**) : Il existe une matrice inversible P telle que $U = P^{-1}C_U P$ et $V = P^{-1}C_V P$.

18. Montrer qu'un couple (U, V) de matrices distinctes vérifiant (**) vérifie (*).

19. Déterminer un couple (U, V) de matrices de $GL_2(K)$ $(n = 2)$ vérifiant (*) mais ne vérifiant pas (**) et déterminer le plus grand commun diviseur des polynômes χ_U et χ_V.

Dans la suite de cette partie, (U, V) est un couple de matrices de $GL_n(K)$ vérifiant (*) et tel que χ_U et χ_V sont deux polynômes premiers entre eux.

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et de base B, on désigne par u et v les automorphismes de E tels que U (respectivement V) soit la matrice de u (respectivement v) dans la base B.

Enfin on pose $H = \ker(u - v)$.

20. Montrer que H est un hyperplan vectoriel de E.

21. Soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de E stable par u et v c'est-à-dire :
$$u(F) \subset F \text{ et } v(F) \subset F.$$
On notera u_F (respectivement v_F) l'endomorphisme induit par u (respectivement v) sur F.

On rappelle que χ_{u_F} divise χ_u.

21.a. Montrer que F n'est pas inclus dans H.

21.b. On suppose que $F \neq E$, montrer que $F + H = E$ puis que l'on peut compléter une base B_F de F par des vecteurs de H pour obtenir une base B' de E. En utilisant les matrices de u et v dans la base B', montrer que l'on aboutit à une contradiction.

21.c. Quels sont les seuls sous-espaces stables à la fois par u et par v ?

22. Pour $j \in \mathbb{N}$, on note $G_j = \{x \in E, u^j(x) \in H\}$.

22.a. Montrer que les sous-espaces G_j sont des hyperplans vectoriels de E.

22.b. Montrer que $\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j \neq \{0\}$.

22.c. Soit y un vecteur non nul de $\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j$, on pose pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$: $e_j = u^j(y)$.

Montrer que $B'' = (e_0, e_1, \ldots, e_{n-1})$ est une base de E.

(On pourra considérer $F = \mathrm{Vect}\{y, u(y), \ldots, u^{p-1}(y)\}$ où p est le plus grand entier naturel non nul pour lequel la famille $y, u(y), \ldots, u^{p-1}(y)$ est libre).

22.d. Montrer que la matrice de u (respectivement v) dans B'' est C_U (respectivement C_V).

22.e Conclure.

23. *Application*

Soit u et v deux automorphismes d'un K-espace vectoriel E de dimension n vérifiant :
$$\mathrm{rg}(u - v) = 1, \quad \chi_u(X) = (-1)^n(X^n + 1) \quad \text{et} \quad \chi_v(X) = (-1)^n(X^n - 1).$$
En utilisant une action de groupe, montrer que le groupe engendré par u et v est fini de cardinal inférieur ou égal à $(2n)!$.

Il semble plus simple, pour résoudre cette question, de ne pas utiliser la notion d'action de groupe.

***

Groupe Concours Polytechniques («E.N.S.I.») 2001	Filière MP
Mathématiques 2	**CORRIGÉ**

Partie I : Propriétés générales

On supposera, bien sûr, que n est supérieur ou égal à 1.

1. Les $n-1$ premières colonnes de C_P sont les $n-1$ derniers vecteurs de la base canonique de K^n. La matrice C_P est inversible si et seulement si la dernière colonne n'est pas dans le sous-espace engendré par ces $n-1$ vecteurs donc si et seulement si la composante a_0 $(=P(0))$ de cette dernière colonne sur le premier vecteur de la base canonique de K^n n'est pas nulle.

$$\boxed{C_P \text{ est inversible si et seulement si } P(0) \neq 0.}$$

On pouvait aussi, bien sûr, calculer le déterminant de C_P.

2. Le polynôme caractéristique de la matrice C_P est

$$\chi_{C_P} = \begin{vmatrix} -X & 0 & . & . & 0 & -a_0 \\ 1 & -X & . & . & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -X & . & 0 & -a_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & 1 & -X & -a_{n-2} \\ 0 & . & . & 0 & 1 & -a_{n-1}-X \end{vmatrix}.$$

Pour le calculer, ce que l'on a déjà fait dans un autre problème, ajoutons à la première ligne la deuxième multipliée par X, la troisième multipliée par X^2 etc. , la dernière multipliée par X^{n-1}.
Sur la première ligne, il ne reste plus que des zéros, sauf en dernière position où on trouve
$-a_0 - a_1X - a_2X^2 \ldots - a_{n-2}X^{n-2} - (a_{n-1}+X)X^{n-1}$, c'est-à-dire $-P$.
On développe alors suivant la première ligne. Le seul mineur qui intervienne est obtenu en supprimant la première ligne et la dernière colonne ; c'est le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Il vaut 1. Finalement :

$$\boxed{\chi_{C_P} = (-1)^n P.}$$

3. Le polynôme caractéristique $\chi_A = \det(A - XI_n)$ d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(K)$ est un polynôme de degré n, le terme de plus haut degré étant $(-1)^nX^n$ (c'est du cours) donc $(-1)^nQ$ est unitaire de degré n.
Réciproquement si Q est un polynôme de $K_n[X]$ avec $(-1)^nQ$ unitaire de degré n , on peut écrire $Q = (-1)^nP$ avec P unitaire.
D'après 2., Q est donc le polynôme caractéristique de C_P. Donc :

$$\boxed{Q \in K_n[X] \text{ est le polynôme caractéristique d'une matrice si et seulement si } (-1)^nQ \text{ est unitaire.}}$$

4.

4.a. $\chi_A = \det(A - XI_n) = \det {}^t(A - XI_n) = \det({}^tA - XI_n) = \chi_{{}^tA}$: une matrice et sa transposée ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres, puisque ce sont les racines du polynôme caractéristique. En particulier :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(C_P) = \mathrm{Sp}({}^tC_P).}$$

4.b. Si $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, on a :

$${}^tC_P.X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & . \\ \vdots & . & . & . & 1 & . \\ 0 & . & 0 & . & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & . & . & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_n \\ -a_0x_1 \ldots - a_{n-1}x_n \end{bmatrix}.$$

Donc ${}^tC_P.X = \lambda X$ si et seulement si

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ -a_0x_1 - \ldots - a_{n-1}x_n = \lambda x_n \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1}x_1 \\ -a_0x_1 - a_1\lambda x_1 \ldots - a_{n-1}\lambda^{n-1}x_1 = \lambda^n x_1 \end{cases}.$$

Si l'on veut que X soit vecteur propre, il faut que X soit non nul, ce qui nécessite ici $x_1 \neq 0$.
La dernière équation s'écrit alors $-a_0 - a_1\lambda \ldots - a_{n-1}\lambda^{n-1} = \lambda^n$, ou encore $P(\lambda) = 0$, et les autres :

$X = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix}$. On voit donc que λ est valeur propre de ${}^tC_P$ si et seulement si λ est une racine de P,

$$\boxed{\text{le sous-espace propre de } {}^tC_P \text{ associé étant alors la droite engendrée par le vecteur } \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix}.}$$

4.c. La somme des dimensions des sous-espaces propres de ${}^tC_P$ est donc égale aux nombre de racines distinctes de P.
Or, on sait que ${}^tC_P$ est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension n de l'espace K^n. Comme P est de degré n,

$$\boxed{{}^tC_P \text{ est diagonalisable si et seulement si } P \text{ est scindé sur } K \text{ et a toutes ses racines simples.}}$$

4.d. Ici, P admet n racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes ; on est donc dans le cas où ${}^tC_P$ est diagonalisable.
De plus, d'après b., on dispose pour chaque valeur propre λ_i d'un vecteur propre qui est le i-ème vecteur colonne de la matrice de Vandermonde dont on étudie le déterminant. Associés à des valeurs propres toutes distinctes, ces vecteurs propres forment une base de K^n. La matrice de Vandermonde étudiée est donc une matrice de passage donc

$$\boxed{\text{son déterminant est non nul.}}$$

5. *Exemples*

5.a. Considérons bien sûr le polynôme $P(X) = X^{2002} - X^{2001} - X^{2000} - 1999$ et notons A la matrice C_P, qui est de taille 2002. Son polynôme caractéristique est $(-1)^nP$, donc P. Le théorème de Cayley-Hamilton, au programme de la filière pour laquelle ce problème a été posé, dit que le polynôme caractéristique d'une matrice est un polynôme annulateur pour cette matrice. Il en résulte :

$$\boxed{\text{Avec ce choix de } A, \text{ de taille 2002, on a : } A^{2002} = A^{2001} + A^{2000} + 1999I_n.}$$

Si l'on ne dispose pas du théorème de Cayley-Hamilton, ce n'est pas beaucoup plus compliqué :
On a : $P'(X) = 2002X^{2001} - 2001X^{2000} - 2000X^{1999}$ dont les racines sont, outre 0, les racines du trinôme $2002X^2 - 2001X - 2000$, qui sont réelles, entre -1 et 2 (le trinôme est positif pour $X = -1$ et pour $X = 2$, négatif pour $X = 0$) et ne sont donc visiblement pas racines de P.

P et P' n'ont donc pas de racine commune. Les 2002 racines complexes de P sont donc simples. A, vue comme matrice complexe, est donc diagonalisable sous la forme $A = QDQ^{-1}$. On peut factoriser Q à gauche et Q^{-1} à droite dans la matrice $P(A)$, si bien que $P(A) = QP(D)Q^{-1}$. La matrice diagonale D porte sur sa diagonale les valeurs propres λ_i de A donc $P(D)$ porte les $P(\lambda_i)$, qui sont nuls. On a bien $P(A) = 0$.

5.b. Puisque $f^{n-1} \neq 0$, on peut trouver dans E un vecteur u_1 tel que $f^{n-1}(u_1)$ ne soit pas nul.
Posons alors $u_2 = f(u_1), \ldots, u_n = f^{n-1}(u_1)$ et montrons que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre. Supposons donc que $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$.
En appliquant f^{n-1} à cette combinaison linéaire, il ne reste que $\alpha_1 u_n = 0$ car $f^{n-1}(u_2) = f^n(u_1) = 0$ et de même $f^{n-1}(u_3) = f^{n-1}(u_n) = 0$. Comme u_n n'est pas nul, on a nécessairement $\alpha_1 = 0$.
En appliquant f^{n-2} à la combinaison linéaire $\alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$, qui est nulle, on prouve de même que $\alpha_2 = 0$ et ensuite, de même, que tous les α_i sont nuls.
La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre et comme elle comporte n vecteurs, c'est une base de E. Comme

$f(u_1) = u_2, \ldots, f(u_{n-1}) = u_n$ et $f(u_n) = 0$, la matrice de f sur cette base est $\begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & . & . & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{C'est bien une matrice compagnon,}}$

en l'occurrence celle associée au polynôme X^n.

Partie II : Localisation des racines d'un polynôme

6. Puisque X est un vecteur propre associé à λ, on a $AX = \lambda X$ d'où, pour tout i de 1 à n, l'égalité entre composantes : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i$, donc $|\lambda x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| ||X||_\infty = r_i ||X||_\infty$:

$$\boxed{\text{Pour tout entier } 1 \leqslant i \leqslant n : \ |\lambda x_i| \leqslant r_i ||X||_\infty.}$$

7. Si l'on choisit, en particulier, un indice i tel que $|x_i|$ soit maximal, on a $|x_i| = ||X||_\infty$ donc $|\lambda|.||X||_\infty \leqslant r_i||X||_\infty$. Comme X n'est pas nul, $||X||_\infty$ est strictement positif ; on peut simplifier : $|\lambda| \leqslant r_i$, donc $\lambda \in D_i$ donc $\lambda \in \bigcup_{k=1}^{n} D_k$. Comme c'est vrai pour toutes les valeurs propres :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{k=1}^{n} D_k.}$$

8. Si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$, appliquons ce qui précède à la matrice $A = C_P$. Les racines de P sont les valeurs propres complexes de A. Elles sont donc toutes dans celui des disques D_i qui a le plus grand rayon. Comme les divers r_i sont $|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \ldots, 1 + |a_{n-1}|$, on a donc :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Toutes les racines de } P \text{ sont dans le disque fermé de centre 0} \\ \text{et de rayon } R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \ldots, 1 + |a_{n-1}|\}.\end{array}}$$

9. Il en est de même, en considérant le polynôme $-P$ qui a les mêmes racines que P, du polynôme $-X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$.

Pour un polynôme P dont les coefficients valent 0, 1 ou -1, R est alors inférieur ou égal à 2. P ne peut donc pas admettre de racine dans $\mathbb{N}$ autre que 0,1 ou 2.

En fait, si P n'est pas le polynôme nul, 2 ne peut être racine car, après factorisation de la plus basse puissance de X, $P(X)$ prend la forme $\pm X^m(Q(X) \pm 1)$, où $Q(X)$ lui aussi a tous ses coefficients égaux à 0, 1 ou -1 . Pour $X = 2$, le facteur $Q(X) \pm 1$ prend une valeur de la forme $2k \pm 1$, donc non nulle ($k \in \mathbb{Z}$).
En particulier, si a, b, c et d sont quatre entiers naturels distincts et non nuls, le polynôme $X^a + X^b - X^c - X^d$ ne peut avoir de racine entière autre que 0 ou 1. Autrement dit :

$$\boxed{\text{L'équation } n^a + n^b = n^c + n^d \text{ n'admet pas de solution entière autre que 0 et 1,}}$$

Partie III : Suites récurrentes linéaires

10. Si λ est racine de P, on a : $\lambda^p = -a_{p-1}\lambda^{p-1} + \ldots + a_0$ donc
$\forall n \in \mathbb{N} : \lambda^{p+n} = -a_{p-1}\lambda^{p+n-1} + \ldots + a_0\lambda^n$. En posant $u(n) = \lambda^n$, cela s'écrit :
$u(n+p) = -a_{p-1}u(n+p-1) - \ldots - a_0u(n)$. Autrement dit :

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est racine de } P, \text{ alors la suite } n \mapsto \lambda^n \text{ est élément de } F.}$$

11. Dès que les p premiers termes $(u(0), u(1), \ldots, u(p-1))$ de la suite sont donnés, la relation $u(n+p) = -a_{p-1}u(n+p-1) - \ldots - a_0u(n)$ définit, par récurrence, une suite élément de F et une seule.
L'application φ est donc une bijection de F vers $\mathbb{C}^p$.
Si u et v sont dans F, et si α et β sont deux complexes,

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha u + \beta v) &= ((\alpha u + \beta v)(0), \ldots, (\alpha u + \beta v)(p-1)) = (\alpha u(0) + \beta v(0), \ldots, \alpha u(p-1) + \beta v(p-1)) \\ &= \alpha(u(0), \ldots, u(n-1)) + \beta(v(0), \ldots, v(n-1)) = \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v)) :\end{aligned}$$

φ est bien linéaire. Rassemblons :

$$\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.}}$$

Deux espaces vectoriels isomorphes étant de même dimension,

$$\boxed{\text{l'espace vectoriel } F \text{ est, comme } \mathbb{C}^p, \text{ de dimension } p.}$$

12. Donnée par ses p premières valeurs $e_i(0), \ldots, e_i(p-1)$, la suite $e_i \in F$ est bien définie.

12.a. La relation $e_i(n+p) = -a_{p-1}e_i(n+p-1) - \ldots - a_0e_i(n)$ appliquée pour $n = 0$ donne $e_i(p) = -a_{p-1}e_i(p-1) - \ldots - a_0e_i(0)$ donc, en utilisant la définition de e_i :

$$\boxed{\text{Pour } 0 \leqslant i \leqslant p-1, \text{ on a } e_i(p) = -a_i}$$

12.b. En fait, les suites e_i sont définies comme images réciproques par φ des vecteurs de la base canonique de C^p ; image réciproque par un isomophisme de la base canonique de C^p,

$$\boxed{\text{le système de vecteurs } (e_0, e_1, \ldots, e_{p-1}) \text{ est une base de } F.}$$

12.c. Soit u un élément de F. Il peut s'écrire comme une combinaison linéaire $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i e_i$ de vecteurs de la base précédente. Pour j de 0 à $p-1$, on détermine α_j en écrivant $u(j) = \left(\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i e_i\right)(j) = \alpha_j$ (les autres termes de la somme sont nuls). Donc $u(j) = \alpha_j$. On a bien :

$$\boxed{u = \sum_{i=0}^{p-1} u(i)e_i.}$$

13. Si u et v sont deux suites complexes et (α,β) deux complexes, $f(\alpha u+\beta v)$ est la suite de terme général $(\alpha u+\beta v)(n+1)$, égal au terme général $\alpha u(n+1)+\beta v(n+1)$ de $\alpha f(u)+\beta f(v)$, d'où la linéarité de f.
Si $u\in F$ et si $v=f(u)$, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$v(n+p)=u(n+p+1)=-a_{p-1}u(n+p)-\ldots-a_0u(n+1)=-a_{p-1}v(n+p-1)-\ldots-a_0v(n)$, propriété qui caractérise les éléments de F. Donc $f(u)\in F$. Rassemblons :

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est un endomorphisme de } E \text{ et } F \text{ est stable par } f.}$$

14. Soit M la matrice, sur la base $(e_0,e_1,\ldots,e_{p-1})$ de F, de g endomorphisme de F induit par f.
$g(e_0)$ est la suite de terme général $v(n)=e_0(n+1)$, donc $v(0)=e_0(1)=0, v(1)=e_0(2)=0,\ldots,$ $v(p-2)=e_0(p-1)=0$ et $v(p-1)=e_0(p)=-a_0$, comme on l'a vu dans 12.a.
$g(e_0)$ est donc égale à la suite $-a_0e_{p-1}$, par définition de e_{p-1}. La première colonne de M est donc la première ligne de C_P.
Ensuite, pour k de 1 à $p-1$, $g(e_k)$ est la suite de terme général $v(n)=e_k(n+1)$.
Pour n de 0 à $p-2$, $n\neq k-1$, on a $v(n)=0$. Pour $n=k-1$, on a $v(n)=e_k(k)=1$. Pour $n=p-1$, on a $v(n)=e_k(p)=-a_k$. v est donc la somme des deux suites e_{k-1} et $-a_ke_{p-1}$, donc $g(e_k)=e_{k-1}-a_ke_{p-1}$. La $(k+1)$–ième ligne de M est la $(k+1)$–ième colonne de C_P. Finalement :

$$\boxed{\text{La matrice de } g \text{ dans la base } (e_0,e_1,\ldots,e_{p-1}) \text{ est } {}^tC_P.}$$

15.

15.a. On a vu que, dans le cas où P admet p racines non nulles et deux à deux distinctes : $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-1}$, la matrice ${}^tC_P$ est diagonalisable, et les colonnes de la matrice de Vandermonde associée à $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-1}$ sont des vecteurs propres de ${}^tC_P$ et forment une base de $\mathbb{C}^p$. Puisque ${}^tC_P$ est la matrice de g dans la base $(e_0,e_1,\ldots,e_{p-1})$, on en déduit que

$$\boxed{\text{la famille des suites } \sum_{j=0}^{p-1}\lambda_l^je_j,\ 0\leqslant l\leqslant p-1 \text{ est une base de } F \text{ formée de vecteurs propres de } g.}$$

15.b. Si nous appelons $w_0,\ldots,w_l,\ldots,w_{p-1}$ ces suites formant base de F, il existe pour tout $u\in F$, des constantes complexes $k_0,k_1,\ldots,k_{p-1}$ telles que : $u=\sum_{l=0}^{p-1}k_lw_l$.
Pour j de 0 à $p-1$, on a $w_l(j)=\lambda_l^j$. La suite w_l est nécessairement la suite géométrique de terme général λ_l^n trouvée au 10., puisque ces deux suites de F prennent la même valeur pour $n=0,\ldots,p-1$. On a donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u(n)=k_0\lambda_0^n+k_1\lambda_1^n+\cdots+k_{p-1}\lambda_{p-1}^n.}$$

16. L'exemple proposé relève de l'étude précédente, avec

$$p=3 \text{ et } P=X^3-(a+b+c)X^2+(ab+bc+ca)X-abc.$$

Ce polynôme admet pour racines les réels a,b et c, qui sont supposés distincts. On est donc dans les hypothèses de 15. et

$$\boxed{\text{les suites de termes généraux } a^n,\ b^n \text{ et } c^n \text{ forment une base de } F.}$$

Partie IV : Matrices vérifiant : $\mathrm{rg}(U-V)=1$

17. Comme C_A admet χ_A comme polynôme caractéristique, A et C_A ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec le même ordre de multiplicité.
On peut donc bien se poser la question de leur éventuelle similitude.

En fait, si on prend pour A la matrice nulle, C_A contient des 1 (dès que $n\geqslant 2$), n'est donc pas nulle, donc ne peut être semblable à A :

$$\boxed{\text{Une matrice } A \text{ n'est pas nécessairement semblable à sa matrice compagnon } C_A.}$$

18. Si U et V vérifient (**), il existe une matrice inversible P telle que $U=P^{-1}C_UP$ et $V=P^{-1}C_VP$. On a donc $U-V=P^{-1}(C_U-C_V)P$. Les $n-1$ premières colonnes de C_U-C_V sont nulles donc C_U-C_V est au plus de rang 1. Il en est de même de $U-V$ qui lui est semblable. Comme $U\neq V$, $U-V$ n'est pas de rang 0. Elle est donc exactement de rang 1.

$$\boxed{\text{Un couple } (U,V) \text{ de matrices distinctes vérifiant (**) vérifie (*).}}$$

19. Pour répondre à la question, il suffit d'exhiber deux matrices U et V ayant le même polynôme caractéristique et telles que $\mathrm{rg}(U-V)=1$.
On aura alors $C_U=C_V$. Elles ne vérifieront donc pas (**), puisqu'elles ne sont pas égales.

$$\boxed{\text{Les matrices } U=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix} \text{ et } U=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \text{ conviennent.}}$$

En effet $U-V=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ est de rang 1. De plus $\chi_u=\chi_V=(x-1)^2$, qui est donc, dans ce cas particulier, le plus grand commun diviseur des polynômes χ_U et χ_V.

20. D'après le théorème du rang, on a $\dim(\ker(u-v))+\mathrm{rg}(u-v)=\dim(E)=n$. Le rang de $u-v$ est celui de sa matrice $U-V$ sur la base B, soit 1. Donc $\dim(H)=\dim(\ker(u-v))=n-1$.

$$\boxed{H \text{ est un hyperplan vectoriel de } E.}$$

21.

21.a. Si F était inclus dans H, on aurait : $\forall x\in F, u(x)=v(x)$, donc $\chi_{u_F}=\chi_{v_F}$ diviserait à la fois χ_u et χ_v. Or le polynôme χ_{u_F} n'est pas une constante car $F\neq\{0\}$. Tout cela est contradictoire avec le fait que χ_U et χ_V sont deux polynômes premiers entre eux, c'est-à-dire n'ont aucun polynôme diviseur non constant en commun.

$$\boxed{F \text{ n'est pas inclus dans } H.}$$

21.b. Il y a donc un vecteur, nécessairement non nul, qui est dans F sans être dans H. Si D est la droite engendrée par ce vecteur, la somme de H et de D est donc directe ; puisque H est un hyperplan et D une droite, cette somme a une dimension égale à celle de l'espace entier. Donc $D+H=E$ et a fortiori, puisque $D\subset F$,

$$\boxed{F+H=E.}$$

Soit maintenant B_F une base de F. $B_F\cup H$ est une partie génératrice de $F+H$, donc de E. D'après le théorème de la base incomplète, on peut obtenir une base B' de E en complétant B_F par des vecteurs bien choisis de $B_F\cup H$. Ces vecteurs ne sont pas dans B_F (sinon ils apparaîtraient deux fois dans B'). Ils sont donc dans H.

$$\boxed{\text{On peut compléter une base } B_F \text{ de } F \text{ par des vecteurs de } H \text{ pour obtenir une base } B' \text{ de } E.}$$

Puisque F est stable par u, la matrice M_u de u sur B' a l'aspect suivant : $\begin{bmatrix}A_u&B\\0&C\end{bmatrix}$. Le bloc carré A_u est la matrice sur B_F de l'endomorphime induit par u sur F. Puisque $F\neq E$, ce bloc A_u n'occupe pas la matrice en entier. Le bloc carré C existe effectivement.

La matrice M_v de v sur B' se présente de même par blocs, mais les blocs B et C utilisés sont les mêmes que pour u, car leurs colonnes donnent les composantes sur B' d'images de vecteurs de H et les restrictions de u et v à H sont égales. M_v est donc de la forme $\begin{bmatrix} A_v & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$.

Ensuite, si I_l et I_m sont les matrices identités de la même taille que A_u et C, le polynôme caractéristique de u est le déterminant $\begin{vmatrix} A_u - XI_l & B \\ 0 & C - XI_m \end{vmatrix}$.

Nous supposons connu le fait qu'il se factorise sous la forme $\chi_u = \det(A_u - XI_l).\det(C - XI_m)$.
Le polynôme non constant $\det(C - XI_m)$ divise donc χ_u et, de même, divise χ_v.

$\boxed{\text{On aboutit à une contradiction avec le fait que } \chi_u \text{ et } \chi_v \text{ sont premiers entre eux.}}$

21.c. L'hypothèse supplémentaire $F \neq E$ était donc absurde donc :

$\boxed{\text{Les seuls sous-espaces stables à la fois par } u \text{ et par } v \text{ sont } \{0\} \text{ et l'espace } E \text{ lui-même.}}$

22.

22.a. Les puissances u^j de u sont, comme u, des automorphismes de E. Les G_j sont les images de H par les automorphismes réciproques des u^j. Ils ont donc la même dimension que H.

$\boxed{\text{Les sous-espaces } G_j \text{ sont des hyperplans vectoriels de } E.}$

22.b. Si F est un sous-espace de E et L un hyperplan, on a $\dim(F)+\dim(L)-\dim(F\cap L) = \dim(F+L)$.
Comme $\dim(L) = n-1$ et $\dim(F+L) \leqslant n$, cela donne $\dim(F)-\dim(F\cap L) \leqslant 1$ donc $\dim(F\cap L) \geqslant \dim(F) - 1$.
Partant de $\dim(G_0) = n-1$, cela donne $\dim(G_0 \cap G_1) \geqslant n-2$, $\dim(G_0 \cap G_1 \cap G_2) \geqslant n-3, \dots$, $\dim \bigcap_{j=0}^{n-2} G_j \geqslant 1$, donc :

$$\boxed{\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j \neq \{0\}.}$$

22.c. On peut donc effectivement introduire un vecteur y non nul de $\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j$.

Dès que $p > n$, la famille des p vecteurs $y, u(y), \dots, u^{p-1}(y)$ est liée. On peut donc bien définir le plus grand entier naturel non nul pour lequel cette famille est libre, et cet entier p est inférieur ou égal à n.

Comme on nous le suggère, introduisons $F = \mathrm{Vect}\{y, u(y), \dots, u^{p-1}(y)\}$.
Comme $(y, u(y), \dots, u^{p-1}(y))$ est libre et $(y, u(y), \dots, u^{p-1}(y), u^p(y))$ liée, le dernier vecteur est combinaison linéaire des premiers, donc $u^p(y)$ est dans F. Les images par u de tous les vecteurs $y, u(y), \dots, u^{p-1}(y)$ d'une base de F sont donc dans F. F est donc stable par u.

D'autre part, y est dans G_j pour j de 0 à $n-2$ donc $u^j(y)$ est dans H pour j de 0 à $n-2$.
Si l'on avait $p < n$, tous les vecteurs de la base $(y, u(y), \dots, u^{p-1}(y))$ de F seraient donc dans H. Leurs images par v seraient donc égales à leurs images par u et seraient donc dans F, qui serait donc stable par u et v, ce qui contredirait le résultat de 21.c.

On a donc $p = n$ et $(y, u(y), \dots, u^{p-1}(y))$, famille libre à n vecteurs, est une base de E.
Si on pose pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$: $e_j = u^j(y)$, on peut donc conclure :

$\boxed{B'' = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1}) \text{ est une base de } E.}$

22.d. Les vecteurs $e_0, \dots, e_{n-2}$ sont dans H, hyperplan sur lequel u et v coïncident, donc $v(e_0) = u(e_0) = e_1, \dots, v(e_{n-2}) = u(e_{n-2}) = e_{n-1}$. Les $n-1$ premières colonnes montrent donc que les matrices de u et v sur B'' sont les matrices compagnon d'un certain polynôme, dont les coefficients apparaissent dans la dernière colonne de la matrice.

Mais la question 2. montre que ce polynôme ne peut être autre chose que $(-1)^n P$, où P est le polynôme caractéristique de la matrice. Ici, il s'agit des matrices de u et v sur une certaine base, donc le polynôme caractéristique de la matrice est celui de l'endomorphisme, soit χ_u pour l'une et χ_v pour l'autre.

Ces polynômes caractéristiques sont aussi ceux des matrices U et V dont on était parti pour définir u et v.
Les matrices de u et v sur B'' sont donc les matrices compagnon des polynômes $(-1)^n\chi_U$ et $(-1)^n\chi_V$:

$\boxed{\text{La matrice de } u \text{ (respectivement } v\text{) dans } B'' \text{ est } C_U \text{ (respectivement } C_V\text{).}}$

22.e Si P est la matrice de passage de B'' à B, on a donc $U = P^{-1}C_U P$ et $V = P^{-1}C_V P$: la propriété (**) est vérifiée. Concluons :

$\boxed{\text{Si le couple } (U,V) \text{ de matrices de } GL_n(K) \text{ vérifie (*) et si les polynômes } \chi_U \text{ et } \chi_V \text{ sont premiers entre eux, alors le couple } (U,V) \text{ vérifie (**).}}$

23. Les polynômes $X^n + 1$ et $X^n - 1$ sont premiers entre eux car tout diviseur commun doit diviser la différence, qui est constante. On peut donc appliquer 22.

Il existe une base $B'' = (e_1, \dots, e_n)$ de E sur laquelle les matrices de u et v sont respectivement C_U et C_V à savoir :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & -1 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & . & . & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & 1 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & . & . & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On voit donc que u et v transforment la base B'' en une base qui résulte de B'' par permutation et, éventuellement, changement de signe d'un vecteur.

Si w désigne u ou v, $w(e_i) = \pm e_j$ implique $w^{-1}(e_j) = \pm e_i$: w^{-1} a aussi la propriété de transformer $(e_1, \dots, e_n)$ en $(\pm e_{\sigma(1)}, \dots, \pm e_{\sigma(n)})$ où $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ est une permutation des n premiers entiers.
Il est clair aussi que la composée de deux automorphismes ayant cette propriété a cette propriété.

Or le groupe engendré par u et v est l'ensemble de tous les $w_1 \circ w_2 \circ \dots \circ w_k$ possibles, où les w_i sont u, v, u^{-1} ou v^{-1}.
Les éléments du groupe considéré ont donc tous la propriété précédente.
Or un automorphisme est complètement déterminé par l'image qu'il donne d'une base. Il n'y donc pas plus d'éléments dans le groupe qu'il n'y a de bases de la forme $(\pm e_{\sigma(1)}, \dots, \pm e_{\sigma(n)})$ où $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ est une permutation des n premiers entiers, soit $2^n.n!$ (on range la base dans un ordre quelconque, ce qui peut se faire de $n!$ façons, et on choisit les $\pm$, ce qui peut se faire de 2^n façons).

Puisque $(2n)! = n!(n+1)(n+2)\dots(n+n)$ et que $n+1, \dots, n+n$ sont plus grands que 2, on a donc $(2n)! \geqslant 2^n.n!$

$\boxed{\text{Le groupe engendré par } u \text{ et } v \text{ est fini de cardinal inférieur ou égal à } (2n)!,}$

mais on a obtenu en fait une majoration plus fine.

***

MINES - PONTS 2001 — Filières MP et PSI

Mathématiques 1 — Durée : 3 heures

L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Dans tout ce problème l'entier n est supérieur ou égal à 1 ($n \geqslant 1$) ; E est un espace vectoriel complexe de dimension n. Le but de ce problème est d'étudier les applications semi-linéaires de l'espace vectoriel E dans lui même. Une application u de E dans lui même est semi-linéaire si elle possède la propriété suivante : pour tout scalaire a et tout couple de vecteurs x et y de l'espace vectoriel E la relation ci dessous est vérifiée :

$$u(ax+y) = \overline{a}u(x) + u(y).$$

Le nombre complexe $\overline{a}$ est le nombre complexe conjugué de a.
Un nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u s'il existe un vecteur x différent de 0 tel que la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$u(x) = \mu x.$$

Le vecteur x est un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre μ.

Première partie

Le but de cette partie est d'étudier, pour une application semi-linéaire u donnée, les valeurs et vecteurs co-propres.

I-1 *Premières propriétés*

Soit u une application semi-linéaire de l'espace vectoriel E.

a. Démontrer qu'étant donné un vecteur x différent de 0, appartenant à l'espace E, il existe au plus un nombre complexe μ tel que la relation $u(x) = \mu x$ ait lieu.

b. Démontrer que, si le nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u, pour tout réel θ, le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ est encore valeur co-propre de l'application semi-linéaire u. Exprimer un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre $\mu e^{i\theta}$ en fonction d'un vecteur co-propre x associé à la valeur co-propre μ du réel θ.

c. Étant donnée une valeur co-propre μ de l'application semi-linéaire u, soit E_μ l'ensemble des vecteurs x de l'espace vectoriel E qui vérifient la relation $u(x) = \mu x$: $E_\mu = \{x \in E | u(x) = \mu x\}$. Est-ce que l'ensemble E_μ est un espace vectoriel complexe ? réel ?

d. Étant données deux applications semi-linéaires u et v, étudier la linéarité de l'application composée $u \circ v$.

I-2. *Matrice associée à une application semi-linéaire*

Soit u une application semi-linéaire de l'espace vectoriel E ; soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de l'espace vectoriel E. À un vecteur x de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est associée une matrice-colonne X d'éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ appelée (abusivement) vecteur.

a. Démontrer qu'à l'application semi-linéaire u est associée dans la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E une matrice A, carrée, complexe, d'ordre n telle que la relation $y = u(x)$ s'écrive : $Y = A\overline{X}$.
La matrice-colonne $\overline{X}$ est la matrice complexe conjuguée de la matrice-colonne X.

b. Soient A et B les matrices associées à une même application semi-linéaire u dans les bases $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ respectivement. Soit S la matrice de passage de la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ à la base $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Exprimer la matrice B en fonction des matrices A et S.
Étant donnée une matrice carrée A, complexe, d'ordre n, le vecteur X, différent de 0, ($X \neq 0$) est un vecteur co-propre de la matrice carrée A, associée à la valeur co-propre μ, si le vecteur X et le nombre complexe μ vérifient la relation matricielle ci-dessous :

$$A\overline{X} = \mu X.$$

Dans la suite toutes les matrices considérées sont des matrices carrées complexes.

I-3. *Exemples*

a. Soit A la matrice d'ordre 2 définie par la relation suivante : $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Rechercher les valeurs co-propres μ et les vecteur co-propres $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ associés.

b. Démontrer que si une matrice A est réelle et admet une valeur propre réelle λ, cette matrice a au moins une valeur co-propre.

I-4. *Correspondance entre les valeurs co-propres de la matrice A et les valeurs propres de la matrice $A\overline{A}$*

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n.

a. Démontrer que si le scalaire μ est une valeur co-propre de la matrice A, le nombre réel $|\mu|^2$ est une valeur propre de la matrice $A\overline{A}$.

b. Soit λ une valeur propre positive ou nulle ($\lambda \geqslant 0$) de la matrice $A\overline{A}$ et X un vecteur propre associé :

$$A\overline{A}X = \lambda X.$$

Démontrer que le réel $\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de la matrice A en envisageant les deux cas suivants :
i. les vecteurs $A.\overline{X}$ et X sont liés ;
ii. les vecteurs $A.\overline{X}$ et X sont indépendants ;

c. En déduire que, pour que le réel positif ou nul μ soit valeur co-propre de la matrice A, il faut et il suffit que le réel μ^2 soit valeur propre de la matrice $A\overline{A}$.

I-5. *Cas d'une matrice triangulaire supérieure*

Dans cette question la matrice A est une matrice triangulaire supérieure (les éléments situés en-dessous de la diagonale principale son nuls).

a. Démontrer que si λ est une valeur propre de la matrice A, pour tout réel θ, le nombre complexe $\lambda e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de la matrice A.

b. Démontrer que si μ est une valeur co-propre de la matrice A, il existe un réel θ tel que le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ soit valeur propre de la matrice A.

c. Soit A la matrice définie par la relation : $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}$. Démontrer que le réel 1 est valeur co-propre de cette matrice et déterminer un vecteur X co-propre associé. Poser $X = \begin{bmatrix} a+ib \\ c+id \end{bmatrix}$.

I-6. *Une caractérisation des valeurs co-propres*

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n ; soient B et C les matrices réelles définies par la relation suivante $A = B + iC$.
Démontrer que le nombre complexe μ est valeur co-propre de la matrice A si et seulement si le nombre réel $|\mu|$ est une valeur propre de la matrice D, carrée réelle d'ordre $2n$, définie par blocs par la relation suivante : $D = \begin{bmatrix} B & C \\ C & -B \end{bmatrix}$.

Seconde partie

Étant données deux matrices carrées complexes A et B d'ordre n, s'il existe une matrice carrée complexe S d'ordre n inversible ($S \in GL_n(\mathbb{C})$) telle que la relation

$$B = SA\left(\overline{S}\right)^{-1}$$

soit vérifiée, les deux matrices A et B sont dites co-semblables. Si une matrice A est co-semblable à une matrice diagonale, la matrice A est dite co-diagonalisable. Le but de cette partie est de rechercher à quelles conditions une matrice est co-diagonalisable.

II-1. *Une relation d'équivalence*

Étant données deux matrices carrées complexes A et B d'ordre n, ces matrices sont dites satisfaire la relation $\approx$ si et seulement si ces deux matrices sont co-semblables :

$$A \approx B \iff \exists S \in GL_n(\mathbb{C}) \ : \ B = SA\left(\overline{S}\right)^{-1}.$$

Démontrer que la relation $\approx$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n.

II-2. *Indépendance des vecteurs co-propres*

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n, soient $X_1,\ X_2, ..., X_k$, k vecteurs co-propres de la matrice A associés à des valeurs co-propres $\mu_1,\ \mu_2, ..., \mu_k$; l'entier k est inférieur ou égal à l'entier n ($k \leqslant n$).

Démontrer que, si les valeurs co-propres μ_p, $p = 1,\ 2, ...,\ k$ ont des modules différents les uns des autres ($p \neq q \Longrightarrow |\mu_p| \neq |\mu_q|$), la famille $(X_1,\ X_2, ...,\ X_k)$ est libre.

En déduire que, si la matrice $A.\overline{A}$ a n valeurs propres λ_p, $p = 1, 2, .., n$, positives ou nulles, ($\lambda_p \geqslant 0$), distinctes les unes des autres ($p \neq q \Longrightarrow \lambda_p \neq \lambda_q$), la matrice A est co-diagonalisable.

II-3. *Quelques propriétés*

a. Soit S une matrice carrée complexe d'ordre n inversible ($S \in GL_n(\mathbb{C})$) ; soit A la matrice définie par la relation $A = S.\left(\overline{S}\right)^{-1}$. Calculer la matrice produit $A.\overline{A}$.

b. Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n telle que $A.\overline{A} = I_n$, démontrer qu'il existe au moins un réel θ tel que la matrice $S(\theta)$ définie par la relation $S(\theta) = e^{i\theta}A + e^{-i\theta}I_n$, soit inversible.

Calculer en donnant au réel θ cette valeur, la matrice $A.\overline{S(\theta)}$; en déduire la matrice $S(\theta).\left(\overline{S(\theta)}\right)^{-1}$.

II-4. *Une condition nécessaire*

Soit A une matrice d'ordre n co-diagonalisable. Il existe par suite une matrice S inversible telle que la matrice $S^{-1}.A.\overline{S}$ soit diagonale. Démontrer que la matrice $A.\overline{A}$ est diagonalisable, que ses valeurs propres sont positives ou nulles et que le rang de la matrice A est égal au rang de la matrice $A.\overline{A}$.

II-5. *Une condition suffisante*

$\boxed{\text{Cette question ne figure pas dans l'énoncé pour la filière PSI.}}$

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n qui vérifie les trois propriétés suivantes :

i. la matrice $A.\overline{A}$ est diagonalisable,

ii. les valeurs propres de la matrice $A.\overline{A}$ sont positives ou nulles,

iii. le rang de la matrice A est égal au rang de la matrice $A.\overline{A}$.

Soient $\lambda_1,\ \lambda_2, ...,\ \lambda_k$, les valeurs propres deux à deux distinctes de la matrice $A.\overline{A}$; elles sont positives et ordonnées de façon qu'elles vérifient la relation suivante : $\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_k \geqslant 0$.

Les valeurs propres $\lambda_1,\ \lambda_2, ...,\ \lambda_k$ ont respectivement les multiplicités $n_1,\ n_2, ...,\ n_k$. Soit I_p la matrice identité d'ordre p. Une matrice diagonale Λ, semblable à la matrice $A.\overline{A}$, s'écrit par blocs avec les conventions précédentes sous la forme suivante :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k I_{n_k} \end{bmatrix}.$$

Par hypothèse il existe une matrice S inversible telle que $A.\overline{A} = S.\Lambda.S^{-1}$.

Soit B la matrice définie par la relation suivante : $B = S^{-1}.A.\overline{S}$.

a. Démontrer les relations : $B.\overline{B} = \overline{B}.B$; $B.\Lambda = \Lambda.B$.

b. Démontrer que la matrice B s'écrit par blocs sous la forme ci-dessous ; dans cette expression chaque matrice B_p est une matrice d'ordre n_p :

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_k \end{bmatrix}.$$

c. Démontrer qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale Δ d'ordre n telles que la relation suivante ait lieu : $B = P\Delta\left(\overline{P}\right)^{-1}$. En déduire que toute matrice vérifiant les hypothèses i, ii, iii est co-diagonalisable.

II-6. *Exemples*

a. Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n ; est-elle co-diagonalisable ?

$\boxed{\text{On pourra laisser provisoirement cette question a. de côté.}}$

b. Soient A, B, C, D les matrices d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}.$$

Est-ce que ces matrices sont diagonalisables ? co-diagonalisables ?

***

MINES - PONTS 2001	Filières MP et PSI
Mathématiques 1 .	**CORRIGÉ**

Première partie

I-1. *Premières propriétés*

Soit u une application semi-linéaire de E.

a. Si $u(x) = \mu x = \mu' x$, alors $(\mu - \mu')x = 0$. Si $x \neq 0$, cela n'est possible que si $\mu = \mu'$.

$\boxed{\text{Si } x \neq 0, \text{ il existe au plus un nombre complexe } \mu \text{ tel que } u(x) = \mu x.}$

b. Remarquons tout d'abord, en appliquant la définition donnée avec $y = 0$ que pour tout $x \in E$ et tout $a \in \mathbb{C}$, on a $u(ax) = \overline{a}u(x)$.

Supposons que le complexe μ soit valeur co-propre de u et que x non nul soit vecteur co-propre associé. Alors $u(x) = \mu x$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. En appliquant la remarque précédente, on peut écrire

$$u(e^{i\alpha}x) = e^{-i\alpha}u(x) = \mu e^{-i\alpha}x = (\mu e^{-2i\alpha})e^{i\alpha}x.$$

On voit qu'en choisissant $\alpha = -\dfrac{\theta}{2}$ et en posant $y = e^{i\alpha}x$, y est non nul et $u(e^{i\theta}y) = \mu e^{i\theta}y$. Donc :

$\boxed{\text{Si } \mu \text{ est valeur co-propre de } u \text{ et } x \text{ vecteur co-propre associé, alors } \mu e^{i\theta} \text{ est aussi valeur co-propre ; } y = e^{-i\theta/2}x \text{ est un vecteur co-propre associé.}}$

c. En restreignant la multiplication externe à des réels, tout espace vectoriel complexe peut être considéré comme espace réel. C'est ici le cas de E ; pour prouver qu'une partie V non vide de E est un espace vectoriel réel, il suffit donc de montrer que c'est un sous-espace réel de E, ce qui revient à montrer que, pour tous x et y dans V et tout a dans $\mathbb{R}$, $ax + y$ est dans E.

Ici, E_μ est non vide car il contient le vecteur nul. Si $x \in E_\mu$ et $a \in \mathbb{C}$ alors $u(ax) = \overline{a}u(x) = \overline{a}\mu x$. Si a n'est pas réel, ceci n'est pas égal à μax, et ax n'appartient donc pas à E_μ, sauf dans le cas $\mu = 0$.

Par contre, si $\mu = 0$ et a complexe quelconque ou bien si μ est quelconque et que a est réel, on a, pour tous x et y dans E_μ, $u(ax + y) = \overline{a}u(x) + u(y) = \overline{a}\mu x + \mu y = \mu(\overline{a}x + y) = \mu(ax + y)$ (dans les deux cas). Donc

$\boxed{E_\mu \text{ n'est pas un espace complexe sauf si } \mu = 0. \text{ Pour tout } \mu, \text{ c'est un espace réel.}}$

d. Si u et v sont semi-linéaires, on a, pour tous x et y dans E et $a \in \mathbb{C}$,

$u \circ v(ax + y) = u(v(ax + y)) = u(\overline{a}v(x) + v(y)) = \overline{\overline{a}}u(v(x)) + u(v(y)) = au \circ v(x) + u \circ v(y)$. Donc :

$\boxed{\text{La composée de deux applications semi-linéaires est linéaire.}}$

I-2. *Matrice associée à une application semi-linéaire*

a. Soit u semi-linéaire ; pour y_1, y_2 dans E et α_1, α_2 dans $\mathbb{C}$, on a

$$u(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha}_1 u(y_1) + u(\alpha_2 y_2) = \overline{\alpha}_1 u(y_1) + \overline{\alpha}_2 u(y_2).$$

Par récurrence immédiate on obtient, pour $y_1, \ldots, y_2$ dans E et $\alpha_1, \ldots, \alpha_2$ dans $\mathbb{C}$:

$$u\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} u(y_k).$$

En particulier, si $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées du vecteur x dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, on a $u(x) = u\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} u(e_k)$. En introduisant la matrice carrée A dont la k-ième colonne donne les composantes de $f(e_k)$ sur la base $(e_1, \ldots, e_n)$ et les matrices colonnes X et Y donnant les composantes de x et y on a :

$$\boxed{Y = A\overline{X}.}$$

b. Si $\mathscr{G}$ est une base de E, désignons par $Mat_{\mathscr{G}}\mathscr{H}$ la matrice qui donne les composantes sur $\mathscr{G}$ des vecteurs de la famille $\mathscr{H}$. En particulier, si $\mathscr{H}$ est une base de E, $Mat_{\mathscr{G}}\mathscr{H}$ est la matrice de passage de la base $\mathscr{G}$ à la base $\mathscr{H}$.
Pour un vecteur x quelconque, rappelons la formule de changement de base : si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont deux bases, on a : $Mat_{\mathscr{E}}x = Mat_{\mathscr{E}}\mathscr{F}.Mat_{\mathscr{F}}x$.
Si u est semi-linéaire et si $y = u(x)$, la formule matricielle du a. s'écrit : $Mat_{\mathscr{E}}y = A.\overline{Mat_{\mathscr{E}}x}$. De même, si B est la matrice associée à u dans la base $\mathscr{F}$ et si X' et Y' sont les matrices de x et y sur cette base, on a $Y' = B\overline{X'}$. Utilisons la formule de changement de base :

$$\begin{aligned} Y' &= Mat_{\mathscr{F}}y = Mat_{\mathscr{F}}\mathscr{E}.Mat_{\mathscr{E}}y = S^{-1}.Mat_{\mathscr{E}}y \\ &= S^{-1}.A.\overline{Mat_{\mathscr{E}}x} = S^{-1}.A.\overline{Mat_{\mathscr{E}}\mathscr{F}.Mat_{\mathscr{F}}x} = S^{-1}.A.\overline{Mat_{\mathscr{E}}\mathscr{F}}.\overline{Mat_{\mathscr{F}}x}, \end{aligned}$$

car le conjugué du produit de deux matrices est le produit des conjugués.
On donc, pour tout $x \in E$, $Y' = \left(S^{-1}.A.\overline{S}\right)\overline{X'} = B\overline{X'}$.
On sait que si M et P sont deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ telles que : $\forall Z \in \mathbb{C}^n$, $MZ = PZ$, alors $M = P$. Or, ici, quand x décrit E, $\overline{X'}$ décrit $\mathbb{C}^n$. Donc

$$\boxed{B = S^{-1}.A.\overline{S}.}$$

I-3. *Exemples*

a. On cherche donc des complexes a, b, μ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ tels que $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{bmatrix} = \mu\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, c'est-à-dire $-\overline{b} = \mu a$ et $\overline{a} = \mu b$, qui nécessite $-b\overline{b} = \mu ab = a\overline{a}$ donc $-|b|^2 = |a|^2$ qui nécessite $a = b = 0$, exclu.

$$\boxed{\text{La matrice proposée n'admet pas de valeur co-propre.}}$$

b. Si A est réelle et admet une valeur propre réelle λ, il existe un vecteur propre X réel associé. On a donc $AX = \lambda X$, qu'on peut écrire $A\overline{X} = \mu X$ puisque X est réel, donc :

$$\boxed{\text{Cette matrice admet } \lambda \text{ comme valeur co-propre.}}$$

I-4. *Correspondance entre les valeurs co-propres de la matrice A et les valeurs propres de la matrice $A\overline{A}$*

a. Si μ est une valeur co-propre de A et si X est vecteur co-propre associé, on a $A.\overline{X} = \mu X$, donc, en conjugant, $\overline{A}.X = \overline{\mu}\overline{X}$, donc $A\overline{A}.X = \overline{\mu}A\overline{X} = \overline{\mu}\mu X = |\mu|^2 X$.

$$\boxed{|\mu|^2 \text{ est valeur propre de } A\overline{A}.}$$

b. On suppose que X non nul et $\lambda \geqslant 0$ sont tels que $A.\overline{A}.X = \lambda X$.
i) Si $A.\overline{X}$ et X sont liés, comme $X \neq 0$, il existe un complexe β tel que $A.\overline{X} = \beta X$. β est donc valeur co-propre de A, ainsi que $|\beta|$, qui est de la forme $\beta e^{i\theta}$, en utilisant I-1 b.
En conjugant : $\overline{A}.X = \overline{\beta}\,\overline{X}$ donc $A\overline{A}.X = \overline{\beta}A.\overline{X} = \beta\overline{\beta}X$. On a donc $\lambda X = |\beta|^2 X$. Comme X est non nul, on a $|\beta|^2 = \lambda$, donc $|\beta| = \sqrt{\lambda}$.
ii) Si $A.\overline{X}$ et X sont linéairement indépendants, on sent bien que tout va se passer dans le plan engendré par ces deux vecteurs. En examinant l'image par $\overline{A}$ d'une combinaison linéaire de ces deux vecteurs, on est amené à considérer le vecteur $Y = A.\overline{X} + \sqrt{\lambda}X$; en conjugant : $\overline{Y} = \overline{A}.X + \sqrt{\lambda}\,\overline{X}$, donc $A\overline{Y} = A\overline{A}.X + \sqrt{\lambda}A\,\overline{X} = \lambda X + \sqrt{\lambda}A.\overline{X} = \sqrt{\lambda}(A.\overline{X} + \sqrt{\lambda}X) = \sqrt{\lambda}Y$.
$A\overline{Y} = \sqrt{\lambda}Y$ et Y, somme de deux vecteurs linéairement indépendants, est non nul. C'est donc un vecteur co-propre de A, associé à $\sqrt{\lambda}$, ce qui termine le ii). Rassemblons les deux cas :

$$\boxed{\sqrt{\lambda} \text{ est valeur co-propre de la matrice } A.}$$

Remarquons qu'on pouvait se dispenser de i). En effet, dans ii), si l'on ne suppose pas $A.\overline{X}$ et X linéairement indépendants, le seul cas ennuyeux est celui où $A.\overline{X} + \sqrt{\lambda}X$ est nul, mais alors $A.\overline{X} = -\sqrt{\lambda}X$, donc $-\sqrt{\lambda}$ est valeur co-propre de A et $\sqrt{\lambda} = (-\sqrt{\lambda})e^{i\pi}$ l'est aussi.

c. Si μ est un réel positif, alors $\mu^2 = |\mu|^2$ et $\sqrt{\mu^2} = \mu$. Il résulte alors de a. et b. que

$$\boxed{\text{le réel positif } \mu \text{ est valeur co-propre de } A \text{ si et seulement si } \mu^2 \text{ est valeur propre de } A.\overline{A}.}$$

I-5. *Cas d'une matrice triangulaire supérieure*

a. La matrice A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont ses termes diagonaux ; $\overline{A}$ est également triangulaire supérieure, avec $\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n}$ sur la diagonale, et le produit $A.\overline{A}$ aussi, avec $|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_n|^2$ sur la diagonale.
Si λ est valeur propre de A, $|\lambda|^2$ est donc valeur propre de $A.\overline{A}$. Il en résulte, d'après I-4., que $|\lambda|$ est valeur co-propre de A. Tout complexe $\lambda e^{i\theta}$ peut se mettre sous la forme $|\lambda|e^{i\alpha}$; il est donc, d'après I-1. b. valeur co-propre de A.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est valeur propre de } A, \text{ alors, pour tout réel } \theta, \text{ alors } \lambda e^{i\theta} \text{ est valeur co-propre de } A.}$$

b. Si μ est valeur co-propre de A, $|\mu|$ l'est aussi, comme on l'a déjà vu. D'après I-4, $|\mu|^2$ est donc valeur propre de $A.\overline{A}$ et doit donc figurer parmi les termes diagonaux de cette matrice triangulaire. Il y a donc une valeur propre λ de A telle que $|\lambda| = |\mu|$. Donc :

$$\boxed{\text{Il existe un réel } \theta \text{ tel que } \mu e^{i\theta} \text{ soit valeur propre de } A.}$$

c. Il résulte de a. et b. que les valeurs co-propres de A sont exactement les complexes dont le module est égal au module d'un terme diagonal de A.
Si $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}$, qui est bien triangulaire supérieure, les termes diagonaux sont de module 1. Les valeurs co-propres de A sont donc les complexes de module 1. En particulier,

$$\boxed{\text{1 est valeur co-propre de cette matrice.}}$$

Cherchons, sous la forme $X = \begin{bmatrix} a + ib \\ c + id \end{bmatrix}$, un vecteur X co-propre associé à 1.
$A.\overline{X} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a - ib \\ c - id \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b + c + i(a - d) \\ d + ic \end{bmatrix}$. $A.\overline{X} = X$ si et seulement si $\begin{cases} b + c + i(a - d) = a + ib \\ d + ic = c + id \end{cases}$
En identifiant partie réelle et partie imaginaire, on trouve la condition nécessaire et suffisante : $\begin{cases} d = c \\ b = a - c \end{cases}$, donc :

$$\boxed{\text{Les vecteurs co-propres sont les vecteurs } \begin{bmatrix} (1 + i)a - ic \\ c(1 + i) \end{bmatrix}, \text{ où } a \text{ et } c \text{ sont des réels quelconques.}}$$

I-6. *Une caractérisation des valeurs co-propres*

On sait que μ est valeur co-propre de A si et seulement si $|\mu|$ l'est. On est donc ramené à chercher sous quelle condition $|\mu|$ est valeur co-propre de A, autrement dit : il existe $X \neq 0$ tel que $A.\overline{X} = |\mu|X$.
Ayant posé $A = B + iC$, on va naturellement écrire tout vecteur X sous la forme $X = Y + iZ$ où les vecteurs colonnes Y et Z sont réels.
La condition $A.\overline{X} = |\mu|X$ s'écrit $(B + iC).(Y - iZ) = |\mu|(Y + iZ)$ ou encore

$$(BY + CZ) + i(CY - BZ) = |\mu|(Y + iZ).$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire de ces deux vecteurs colonnes, cela donne :

$$\begin{cases} BY + CZ = |\mu|Y \\ CY - BZ = |\mu|Z \end{cases}.$$

D'autre part, en introduisant la matrice par blocs carrée d'ordre $2n$: $D = \begin{bmatrix} B & C \\ C & -B \end{bmatrix}$, le produit $D\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix}$ existe et est égal à $\begin{bmatrix} BY + CZ \\ CY - BZ \end{bmatrix}$. La condition précédente s'écrit donc $D\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} = |\mu|\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix}$.
La non nullité de X étant équivalente à la non nullité de $\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix}$, cette condition signifie que $\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix}$ est vecteur propre de D associé à $|\mu|$. Résumons :

$$\boxed{\mu \text{ est valeur co-propre de } A \text{ si et seulement si le réel } |\mu| \text{ est valeur propre de } D.}$$

Seconde partie

II-1. *Une relation d'équivalence*

Remarque préliminaire : en revenant à I-2.b., on voit l'interprétation de la relation $P \approx Q$:
Si A et B sont les matrices associées à une même application semi-linéaire u de l'espace E dans deux bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ et si S est la matrice de passage de $\mathscr{F}$ à $\mathscr{E}$ (et non de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{F}$), il y a lieu de remplacer S par S^{-1} dans le résultat de I-2.b.. On obtient $B = S.A.\overline{S^{-1}} = S.A.(\overline{S})^{-1}$ car la conjuguée de l'inverse est l'inverse de la conjuguée. Donc $A \approx B$. Cette remarque étant faite :

- La matrice A étant donnée, soit $\mathscr{E}$ une base de E et u l'application semi-linéaire associée, sur cette base, à la matrice A. En prenant $\mathscr{E}=\mathscr{F}$ dans la remarque préliminaire, on voit que $A \approx A$: la relation $\approx$ est réflexive.
- Soit maintenant B une deuxième matrice, telle que $A \approx B$. Il existe S inversible telle que $B = S.A.(\overline{S})^{-1}$. Introduisant la base $\mathscr{F}$ telle que S soit la matrice de passage de $\mathscr{F}$ à $\mathscr{E}$, on voit que B est la matrice associée à u sur $\mathscr{F}$. En échangeant les rôles de A et B dans la remarque préliminaire, on voit que $B \approx A$: la relation $\approx$ est symétrique.
- Soit maintenant C une troisième matrice, telle que $B \approx C$. Il existe S' inversible telle que $C = S'.B.(\overline{S'})^{-1}$. Introduisant la base $\mathscr{H}$ telle que S' soit la matrice de passage de $\mathscr{H}$ à $\mathscr{F}$, on voit que C est la matrice associée à u sur $\mathscr{H}$. En remplaçant B par C dans la remarque préliminaire, on voit que $A \approx C$: la relation $\approx$ est transitive.

$$\boxed{\text{La relation } \approx \text{ est une relation d'équivalence dans l'ensemble } M_n(\mathbb{C}).}$$

Cette démonstration, sans doute plus longue qu'un calcul direct, a l'avantage de mieux préciser le lien entre les deux parties.

II-2. *Indépendance des vecteurs co-propres*

Soient $X_1,\dots,X_k$ k vecteurs co-propres de A associés à k valeurs co-propres de modules tous distincts, $\mu_1,\dots,\mu_k$. On sait d'après I-4. a) que $X_1,\dots,X_k$ sont vecteurs propres de $A\overline{A}$ associés à $|\mu_1|^2,\dots,|\mu_k|^2$. Pour un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est une famille libre, donc :

$$\boxed{\text{La famille } (X_1,\dots,X_k) \text{ est libre dans } \mathbb{C}^n.}$$

Supposons que $A\overline{A}$ admette n valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ positives ou nulles, toutes distinctes. D'après I-4, cela nous donne pour A n valeurs co-propres $\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n}$ toutes distinctes, ce qui équivaut à dire que leurs modules sont tous distincts.
Si $X_1,\dots,X_n$ sont des vecteurs co-propres associés, la famille $(X_1,\dots,X_n)$ est donc libre d'après ce qui précède.
Soit $\mathscr{E}$ une base de E et soit $\mathscr{F} = (f_1,\dots,f_n)$ la base telle que la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{F}$ ait pour colonnes $(X_1,\dots,X_n)$.
Soit u l'application semi-linéaire associée, sur la base $\mathscr{E}$, à la matrice A.
Pour k de 1 à n, on a $u(f_k) = \sqrt{\lambda_k} f_k$. La matrice D associée à u sur la base $\mathscr{F}$ est donc diagonale.
Comme $A \approx D$ d'après la remarque préliminaire de II-1, on en déduit que

$$\boxed{A \text{ est co-diagonalisable.}}$$

II-3. *Quelques propriétés*

a. On a déjà dit que, si S est inversible, la conjuguée de son inverse est l'inverse de la conjuguée. Si $A = S.(\overline{S})^{-1}$, on a donc $\overline{A} = \overline{S}.S^{-1}$ et $A.\overline{A} = S.(\overline{S})^{-1}.\overline{S}.S^{-1} = S.S^{-1} = I_n$.

$$\boxed{A.\overline{A} = I_n.}$$

b. $S(\theta) = e^{i\theta}A + e^{-i\theta}I_n = e^{i\theta}(A + e^{-2i\theta}I_n)$. Pour que cette matrice soit inversible, il suffit (et il faut) que $\det(A + e^{-2i\theta}I_n) \neq 0$, ce qui équivaut à dire que $-e^{-2i\theta}$ n'est pas valeur propre de A. L'ensemble des valeurs propres de A étant fini, il est clair que :

$$\boxed{\text{On peut trouver } \theta \text{ tel que } S(\theta) \text{ soit inversible.}}$$

On a alors : $A.\overline{S(\theta)} = A(e^{-i\theta}\overline{A} + e^{i\theta}I_n) = e^{-i\theta}A\overline{A} + e^{i\theta}A = e^{-i\theta}I_n + e^{i\theta}A$. On constate que :

$$\boxed{A.\overline{S(\theta)} = S(\theta) \text{ donc } S(\theta)\left(\overline{S(\theta)}\right)^{-1} = A.}$$

II-4. *Une condition nécessaire*

$S^{-1}.A.\overline{S} = D$, diagonale, donc $(\overline{S})^{-1}.\overline{A}.S = \overline{D}$ et $D.\overline{D} = S^{-1}.A.\overline{S}.(\overline{S})^{-1}.\overline{A}.S = S^{-1}.A.\overline{A}.S$. La matrice $A.\overline{A}$ est donc semblable à $D.\overline{D}$, qui est diagonale :

$$\boxed{\text{La matrice } A.\overline{A} \text{ est diagonalisable.}}$$

De plus, ses valeurs propres sont les termes diagonaux $d_i.\overline{d_i}$ de $D.\overline{D}$, qui sont des réels positifs ou nuls :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A.\overline{A} \text{ sont sont des réels positifs ou nuls.}}$$

La multiplication à droite et à gauche de A par les matrices $\overline{S}$ et S^{-1}, qui sont inversibles, ne change pas son rang. Donc $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(D)$.
Le rang de la matrice diagonale D est le nombre d'éléments diagonaux d_i non nuls. Ce nombre est le même que sur la diagonale de la matrice $D.\overline{D}$, qui porte sur sa diagonale les $|d_i|^2$. Donc $\mathrm{rang}(D) = \mathrm{rang}(D.\overline{D})$.
Enfin, $\mathrm{rang}(D.\overline{D}) = \mathrm{rang}(A.\overline{A})$ car elles sont semblables. Donc

$$\boxed{\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A.\overline{A}).}$$

II-5. *Une condition suffisante*

La matrice Λ de l'énoncé est en fait une matrice diagonale. Ses termes diagonaux sont les k valeurs propres de $A.\overline{A}$, chacune répétée avec l'ordre de multiplicité qu'elle a en tant que racine du polynôme caractéristique de $A.\overline{A}$. Puisque $A.\overline{A}$ est supposée diagonalisable, elle est bien semblable à Λ et s'écrit sous la forme $A.\overline{A} = S.\Lambda.S^{-1}$. On en déduit aussi $\Lambda = S^{-1}.A.\overline{A}.S$.

a. Puisque $B = S^{-1}.A.\overline{S}$, on a $B.\overline{B} = S^{-1}.A.\overline{S}.(\overline{S})^{-1}.\overline{A}.S = S^{-1}.A.\overline{A}.S = \Lambda$.
On a aussi : $\overline{B}.B = (\overline{S})^{-1}.\overline{A}.S.S^{-1}.A.\overline{S} = (\overline{S})^{-1}.\overline{A}.A.\overline{S} = \overline{\Lambda} = \Lambda$, car Λ est réelle.

$$\boxed{B.\overline{B} = \overline{B}.B = \Lambda.}$$

b. $\Lambda.B = S^{-1}.A.\overline{A}.S.S^{-1}.A.\overline{S} = S^{-1}.A.\overline{A}.A.\overline{S}$ et
$B.\Lambda = B.\overline{\Lambda} = S^{-1}.A.\overline{S}.(\overline{S})^{-1}.\overline{A}.A.\overline{S} = S^{-1}.A.\overline{A}.A.\overline{S}$. On constate que

$$\boxed{\Lambda.B = B.\Lambda.}$$

Les endomorphismes l et b de $\mathbb{C}^n$ qui admettent Λ et B comme matrices sur la base canonique commutent donc. On sait qu'alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.
Les sous-espaces propres de l'endomorphisme l sont en évidence : le sous-espace propre E_{λ_1} associé à la valeur propre λ_1 est engendré par les n_1 premiers vecteurs de la base canonique ; le sous-espace propre E_{λ_2} associé à la valeur propre λ_2 est engendré par les n_2 vecteurs suivants etc.
On connaît (c'est du cours) la traduction de cette stabilité des E_{λ_i} sur la matrice B de b :

$$\boxed{\text{La matrice s'écrit par blocs : } B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_k \end{bmatrix}, \text{ où } B_i \text{ est carrée de taille } n_i.}$$

c. On peut calculer par blocs le produit $B.\overline{B}$:

$$B.\overline{B} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_k \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \overline{B_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \overline{B_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{B_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1.\overline{B_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2.\overline{B_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_k.\overline{B_k} \end{bmatrix}.$$

On sait que $B.\overline{B} = \Lambda$, donc $B_1.\overline{B_1} = \lambda_1 I_{n_1}$, $B_2.\overline{B_2} = \lambda_2 I_{n_2}$, etc. Les λ_i sont positives ou nulles. Pour i de 1 à $k-1$, $\lambda_i \neq 0$; on peut poser $B_i = \sqrt{\lambda_i}C_i$, si bien que $C_i.\overline{C_i} = I_{n_i}$. D'après II-3.b., on peut mettre C_i sous la forme $S_i.(\overline{S_i})^{-1}$. donc $B_i = \sqrt{\lambda_i}C_i = S_i.(\sqrt{\lambda_i}I_{n_i}).(\overline{S_i})^{-1}$.
On sait aussi que, lorsqu'une matrice se présente par blocs comme B, son rang est la somme des rangs des blocs. Ici, les matrices B_1, B_2, B_{k-1} sont inversibles, comme le montre par exemple l'écriture de B_i ci-dessus. Leur rang est donc leur taille et le rang des $(k-1)$ premières colonnes est $n - n_k$.

- Si la dernière valeur propre, λ_k, n'est pas nulle, B_k se comporte comme $B_1,\dots,B_{k-1}$.
- Si $\lambda_k = 0$, le noyau de $A.\overline{A}$, qui est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0, a pour dimension l'ordre de multiplicité de 0 en temps que valeur propre, soit n_k.

La matrice diagonale Λ comporte sur la diagonale $n - n_k$ éléments non nuls. Elle est donc de rang $n - n_k$.
Par l'hypothèse iii. le rang de A est égal au rang de $A.\overline{A}$, soit $n - n_k$ dans le cas qui nous occupe.
Le rang de B est égal au rang de A puisque $B = S^{-1}.A.\overline{S}$. Le rang de B est donc $n - n_k$.
Les $n - n_k$ premières colonnes de B forment une famille de rang $n - n_k$. Les n_k dernières colonnes sont donc combinaisons linéaires des $n - k$ premières, ce qui ne peut se faire, vue la forme de B, que si ces n_k dernières colonnes sont nulles. Les n_k dernières colonnes de B sont donc nulles. La matrice B_k est donc nulle ; on peut donc l'écrire, comme les $k-1$ premières, sous la forme $B_k = S_k.\left(\sqrt{\lambda_k}I_{n_k}\right).\left(\overline{S_k}\right)^{-1}$, en prenant pour S_k une quelconque matrice carrée, de taille n_k, inversible.

- Dans les deux cas, introduisons la matrice $P = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & S_k \end{bmatrix}$. Le produit par blocs de P

par $\begin{bmatrix} (S_1)^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (S_2)^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (S_k)^{-1} \end{bmatrix}$ donne I_n, donc cette dernière matrice est P^{-1}.

Donc $(\overline{P})^{-1} = \begin{bmatrix} (\overline{S_1})^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\overline{S_2})^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (\overline{S_k})^{-1} \end{bmatrix}$. Posons $\Delta = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}I_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2}I_{n_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_k}I_{n_k} \end{bmatrix}$.

Cette matrice Δ est diagonale et le produit par bloc $P.\Delta.(\overline{P})^{-1}$ donne $\begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_k \end{bmatrix} = B$.

$\boxed{\text{On a trouvé } P \text{ inversible et } \Delta \text{ diagonale telles que } B = P.\Delta.(\overline{P})^{-1}.}$

En reportant dans $A = S.B.(\overline{S})^{-1}$ cela donne $A = S.P.\Delta.(\overline{P})^{-1}.(\overline{S})^{-1} = (S.P).\Delta.(\overline{S.P})^{-1}$.
On en déduit que A est co-diagonalisable.

Toute matrice vérifiant les hypothèses i,ii,iii est co-diagonalisable.

II-6. *Exemples*

a. Si A est réelle et diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$, elle s'écrit $A = P.D.P^{-1}$, qu'on peut écrire $A = P.D.(\overline{P})^{-1}$ puisque P est réelle. A est donc co-diagonalisable. Comme toute matrice réelle symétrique est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$: **Toute matrice réelle symétrique est co-diagonalisable.**

b. Les matrices A et C sont triangulaires ; leurs valeurs propres se lisent sur la diagonale. Chacune d'elle a donc une valeur propre double. Si l'une d'elles était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice de la forme λI_2. Ce serait donc une matrice de la forme λI_2, ce qui n'est pas. A et C ne sont donc pas diagonalisables.
Le polynôme caractéristique de B est $(1-x)^2+1$. Il s'annule pour $1 - x = \pm i$. B admet donc deux valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable. Il en est de même de D, dont le polynôme caractéristique est $(1-x)^2-1$. **B et D sont diagonalisables ; A et C ne le sont pas.**

On trouve

- $A.\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; elle est diagonalisable, à valeurs propres positives, de même rang que A.
- $B.\overline{B} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; son polynôme caractéristique $x^2 + 2$ n'admet pas de racine réelle.
- $C.\overline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; elle n'est pas de même rang que C.
- $D.\overline{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; elle est diagonalisable, à valeurs propres positives, de même rang que D.

En utilisant la condition nécessaire et suffisante établie :

A et D sont co-diagonalisables ; B et C ne le sont pas.

***

Semaine 6 : Espaces normés

Nous sommes sortis, cette semaine, de l'algèbre linéaire à proprement parler pour commencer l'étude des espaces vectoriels normés et des fonctions définies sur de tels espaces.

Dans cette étude apparaissent les notions d'ouvert, fermé, compact, point adhérent etc., notions que l'on regroupe sous le vocable général de « topologie ».

• Sujet 17 : E.N.S.A.I. 1999 Mathématiques 1 Option Mathématiques

L'École Nationale de la Statistique et de l'Analyse de l'Information dépend de l'Institut National de la Statistique et des Études Économiques. Le concours est surtout présenté par des élèves de la filière MP mais l'épreuve de Maths ne présente pas de difficulté particulière pour les élèves des filières PC et PSI.

On vous propose ici d'étudier la plus grande valeur propre d'une matrice réelle dont tous les termes sont positifs ainsi que le sous-espace propre associé. Ce problème, très matriciel, d'une difficulté moyenne, constitue donc une bonne transition avec la leçon précédente.

L'utilisation d'une norme vient assez loin dans le problème, mais elle est décisive.

On parle dans l'énoncé de matrices positives. Attention ! on ne donne pas à cette notion le sens qu'on lui donnera plus tard, quand on étudiera les matrices symétriques réelles.

• Sujet 18 : Concours Mines-Ponts 1995 Mathématiques 1 Options M et P'

Le thème le plus important du problème est l'étude de la continuité et du caractère lipschitzien d'applications linéaires et de formes linéaires définies sur un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie.

Avant d'en venir là, on doit résoudre un assez grand nombre de questions d'algèbre linéaire. Ces questions ne sont pas très difficiles mais elles demandent une certaine vigilance car l'espace n'est pas de dimension finie ; il faut donc bien réfléchir à la validité des arguments qu'on avance.

Il y a aussi quelques questions où l'on étudie des séries numériques ; ces questions, pas trop difficiles, demandent aussi une certaine vigilance dans le maniement des équivalents.

• Sujet 19 : École Polytechnique et E.S.P.C.I. 1998 Mathématiques 2 Filière PC

C'est un problème un peu curieux, d'origine physique, où l'on étudie le mouvement d'une boule de billard sur un billard circulaire.

On se pose un peu, tout au long, la même question : faut-il tout démontrer « mathématiquement » ou faut-il admettre ce qui est physiquement évident ? Par exemple, en poussant les choses à l'extrême, faut-il démontrer qu'une bille roulant sur le tapis à vitesse constante va, à un certain instant, heurter le bord ?

On peut penser que les correcteurs n'attendaient pas que l'on coupe ainsi les cheveux en quatre et que l'on pouvait admettre beaucoup d'« évidences ». De même, ils n'ont sans doute pas été très exigeants sur les justifications des égalités angulaires, car, ces questions de physique et de géométrie mises à part, il y avait encore beaucoup de grain à moudre.

On finit notamment par une délicate question de topologie : la bille, en tournant indéfiniment, passera-t-elle aussi près qu'on veut d'un point fixé sur le tapis ?

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices est interdit

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel au moins égal à 1. On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on définit le polynôme caractéristique de M par :

$$P_M(X) = \det(XI_n - M).$$

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est rapporté à sa base canonique $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$.

On identifie $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des matrices colonnes $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On dira qu'un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ est positif (resp. strictement positif) et l'on écrira $X \geqslant 0$ (resp. $X > 0$), lorsque toutes les coordonnées de X dans $\mathscr{B}$ sont positives (resp. strictement positives).

Pareillement, on dira qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est positive (resp. strictement positive) et l'on écrira $A \geqslant 0$ (resp. $A > 0$), lorsque tous les coefficients de A sont positifs (resp. strictement positifs).

On notera Spec A l'ensemble des valeurs propres réelles de A et lorsque Spec $A \neq \emptyset$, on pose $\rho(A) = \mathrm{Sup}\{|\lambda_i|, \lambda_i \in \mathrm{Spec}\, A\}$.

Pour $J \subset [\![1, n]\!]$ on pose $F_J = \mathrm{Vect}\langle e_i, i \in J\rangle$.

On dira que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est irréductible si $\{0\}$ et $\mathbb{R}^n$ sont les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de la forme F_J, stables par l'endomorphisme associé à la matrice A dans la base $\mathscr{B}$.

On admettra dans les parties I et II qu'une matrice positive irréductible admet une valeur propre $\lambda > 0$ associée à un vecteur propre $X \geqslant 0$.

La démonstration de ce résultat fait l'objet de la partie III qui n'utilise que le résultat de la question I.5.d.

Préliminaire

1.a. Donner un exemple de matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ pour laquelle Spec $A = \emptyset$.

1.b. Montrer que pour toute matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, Spec $A \neq \emptyset$.

2.a. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $A > 0$. Soit $e_{i_0} \in \mathscr{B}$. Prouver que les coordonnées de Ae_{i_0} sont strictement positives, c'est-à-dire $Ae_{i_0} > 0$.

2.b. Prouver que si $J \subset [\![1, n]\!]$, $J \neq [\![1, n]\!]$, $i_0 \in J$, alors le sous-espace F_J n'est pas stable par l'endomorphisme associé à A.

2.c. En déduire qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $A > 0$, est irréductible.

PARTIE I

On note $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les coordonnées dans $\mathscr{B}$ du vecteur propre positif X.

1.a. On pose $J = \{i \in [\![1, n]\!] / x_i \neq 0\}$. De l'égalité $AX = \lambda X$, déduire que

$$\forall i \notin J,\ \forall j \in J,\ a_{ij} = 0.$$

1.b. Prouver que F_J est stable par l'endomorphisme associé à A.

1.c. En déduire que $X > 0$.

2. Soit $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à une valeur propre réelle μ.

On pose $m = \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \dfrac{|y_i|}{x_i}$ et l'on introduit $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $m = \dfrac{|y_p|}{x_p}$

2.a. Montrer que $\mu y_p = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{pj} y_j$.

2.b. En déduire que $|\mu| \leqslant \lambda$.

On vient donc de prouver que $\lambda = \rho(A)$.

3. Montrer que si μ est une valeur propre non nulle de A associée à un vecteur propre positif, alors $\mu > 0$ et en déduire $\mu = \lambda$.

4. Dans cette question, on suppose $A > 0$. Soit Y un vecteur propre associé à la valeur propre $\rho(A)$. Prouver que Y est colinéaire à X. (On pourra reprendre le raisonnement de la question I.2.)

5. L'objet de cette question est de généraliser le résultat précédent au cas d'une matrice $A \geqslant 0$. Soit $Y \neq 0$ un vecteur positif dont au moins une coordonnée est nulle. On pose $Z = (I_n + A)Y$ et l'on note $z_1, \dots, z_n$ les coordonnées de Z. On introduit :

$$J = \{i \in [\![1, n]\!] / y_i \neq 0\} \quad \text{et} \quad J' = \{i \in [\![1, n]\!] / z_i \neq 0\}.$$

5.a. Prouver que $J \subset J'$.

5.b. En supposant $J = J'$, prouver que :

$$\forall i \notin J,\ \forall j \in J,\ a_{ij} = 0.$$

5.c. En déduire que l'inclusion $J \subset J'$ est stricte.

5.d. En déduire que $(I_n + A)^{n-1} > 0$.

5.e. Soit maintenant X' un vecteur propre non nécessairement positif, associé à $\rho(A)$. Prouver qu'il est est colinéaire à X. (On pourra utiliser un vecteur de la forme $X' + \alpha X$).

PARTIE II

On a démontré, à la partie précédente, que l'espace propre associé à la valeur propre $\rho(A)$ était de dimension 1.

On se propose maintenant de prouver que $\rho(A)$ est une valeur propre simple.

Pour alléger les notations, on pose $\rho = \rho(A)$ et $B = {}^t\mathrm{Com}(\rho I_n - A)$. On supposera $B \neq 0$.

1. Justifier que $(\rho I_n - A)B = 0$.

2. Montrer que B est de rang 1 et préciser $\mathrm{Im}(B)$.

3. En déduire que si une colonne de B n'est pas nulle, alors elle ne contient aucun coefficient nul et tous ses coefficients sont de même signe.

4.a Soit $J \subset [\![1, n]\!]$ et I son complémentaire. En remarquant que $(F_J)^\perp = F_I$ pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, prouver que ${}^tA$ est irréductible.

4.b Justifier que si une colonne de ${}^tB$ n'est pas nulle, elle ne contient aucun coefficient nul et tous ses coefficients sont de même signe.

5. En déduire que tous les coefficients de B sont non nuls et de même signe.

6. On note diag$(x_1, \dots, x_n)$ la matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix}.$$

On définit une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \det(\operatorname{diag}(\rho, \dots, \rho, x_k, \rho, \dots, \rho) - A).$$

6.a. Calculer, pour $k \in [\![1, n]\!]$, la dérivée partielle $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\rho, \rho, \dots, \rho)$.

6.b. En déduire que $P'_A(\rho) = \operatorname{tr} B$.

Si l'on n'a pas vu, en Sup, le théorème de dérivation d'une fonction composée d'une seule variable par l'intermédiaire de n variables, on admettra la réponse.

7. Justifier que $P'_A(\rho) \neq 0$.

PARTIE III

A désigne toujours une matrice positive irréductible.

On se propose désormais de prouver l'existence d'une telle valeur propre associée à un vecteur propre positif.

1. Soit $K = \{Y \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R}), / Y \geqslant 0 \text{ et } \|Y\| = 1\}$ où $\|Y\| = \sum_{i=1}^{n} |y_i|$ lorsque

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Prouver que $K' = (I_n + A)^{n-1}(K)$ est un compact de $\mathbb{R}^n$ et qu'il est inclus dans $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$.

2. En observant que si f et g sont deux applications numériques on a :

$$\operatorname{Inf}(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

prouver que la fonction définie sur K' par :

$$r(X) = \operatorname{Inf}\left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k / i \in [\![1, n]\!] \right\} \text{ si } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

est continue sur K'.

3.a. Justifier l'existence de $\lambda = \sup_{X \in K'} r(X)$ et prouver que cette borne supérieure est atteinte.

On note X_0 une matrice colonne telle que $r(X_0) = \lambda$.

3.b. Justifier que $AX_0 - \lambda X_0 \geqslant 0$.

4. On suppose $AX_0 - \lambda X_0 \neq 0$.

4.a. Prouver l'existence de $Y_0 > 0$ tel que $AY_0 - \lambda Y_0 > 0$ (on pourra utiliser la question I.5.d.).

4.b. Obtenir une contradiction avec la définition de λ.

***

E.N.S.A.I. 1999 Mathématiques 1	Option Mathématiques CORRIGÉ

Préliminaire

1.a. Si $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, son polynôme caractéristique est du second degré. S'il n'a pas de racine réelle, le spectre de A est vide. Par exemple :

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, le polynôme caractéristique est $x^2 + 1$; le spectre de A est vide.

1.b. Par contre, si $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ son polynôme caractéristique est du troisième degré, à coefficients réels ; il admet au moins une racine réelle.

Si $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, le spectre de A n'est pas vide.

2.a. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $A > 0$. e_{i_0} est le vecteur de la base canonique qui porte le numéro i_0. Ae_{i_0} est la colonne de A qui porte ce numéro i_0. Puisque $A > 0$,

les composantes de Ae_{i_0} sont strictement positives.

2.b. Description de F_J utile pour la suite
Combinaison linéaire de vecteurs qui ont des zéros sur les lignes dont les numéros sont hors de J, tout vecteur de F_J a aussi cette propriété.
Réciproquement, tout vecteur ayant des zéros sur les lignes dont les numéros sont hors de J est combinaison des e_i avec $i \in J$. Ce vecteur est donc dans F_J.
Cette propriété caractérise donc F_J.
Il y a un problème non réglé par l'énoncé : le cas où $J = \emptyset$; nous conviendrons que F_J est alors réduit au vecteur nul, ce qui étendra la propriété précédente.
Ici $J \neq [\![1, n]\!]$; le nombre de zéros apparaissant dans un vecteur de F_J n'est donc pas nul. On nous dit que $i_0 \in J$; l'image e'_{i_0} de e_{i_0} par l'endomorphisme associé à A a des coordonnées, on l'a vu, strictement positives. Le vecteur e'_{i_0} n'est donc pas dans F_J alors que e_{i_0} y est :

F_J n'est pas stable par l'endomorphisme associé à A.

2.c. Exceptés $\{\vec{0}\}$ et $\mathbb{R}^n$, il n'y a donc pas de sous-espace F_J stable par A donc

cette matrice $A > 0$ est irréductible.

PARTIE I

1.a. X n'est pas nul (c'est un vecteur propre) donc l'ensemble J n'est pas vide. Soit $i \notin J$; la i-ième composante de X est donc nulle donc la i-ième composante de AX l'est aussi puisque $AX = \lambda X$.
Donc $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$. Comme il s'agit d'une somme de termes positifs (A et X sont positifs), chaque terme $a_{ij} x_j$ de la somme est nul.
Pour les $j \in J$, x_j est non nul ; a_{ij} est donc nul. Résumons :

$\forall i \notin J,\ \forall j \in J,\ a_{ij} = 0.$

1.b. Soit $Y \in F_J$, de composantes $y_1, \dots, y_n$, et $i \notin J$. La i-ième composante de AY est $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j$. Elle est nulle car si $j \in J$, a_{ij} est nul et si $j \notin J$, y_j est nul. Donc $AY \in F_J$.

$$\boxed{F_J \text{ est stable par l'endomorphisme associé à } A.}$$

1.c. Puisque A est supposée irréductible, c'est que J est vide ou égal à $[\![1, n]\!]$. La possibilité J vide ayant été écartée au début de 1.a., c'est que $J = [\![1, n]\!]$: tous les x_i sont donc non nuls par définition de J donc ils sont tous strictement positifs :

$$\boxed{X \text{ est strictement positif.}}$$

2. $\dfrac{|y_p|}{x_p}$ est donc le plus grand des $\dfrac{|y_i|}{x_i}$.

Il n'est pas nul (sinon tous les y_i seraient nuls, ce qui n'est pas puisque y, vecteur propre, n'est pas nul).

Notons aussi que les $\dfrac{|y_i|}{x_i}$ sont tous bien définis puisque les x_i sont tous non nuls.

2.a. On sait que $AY = \mu Y$. Pour la p-ième composante, cela donne immédiatement

$$\boxed{\mu y_p = \sum_{j=1}^{n} a_{pj}y_j.}$$

2.b. Puisque les a_{pj} sont positifs, l'inégalité triangulaire donne $|\mu|.|y_p| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{pj}|y_j|$.

Puisque $x_j > 0$ et $\dfrac{|y_j|}{x_j} \leqslant \dfrac{|y_p|}{x_p}$, on a $|y_j| \leqslant \dfrac{x_j}{x_p}|y_p|$, donc $|\mu|.|y_p| \leqslant |y_p| \sum_{j=1}^{n} a_{pj}\dfrac{x_j}{x_p}$.

En simplifiant par $|y_p| > 0$: $|\mu| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{pj}\dfrac{x_j}{x_p}$.

Puisque X est vecteur propre associé à λ, on a $\sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j = \lambda x_p$. Finalement :

$$\boxed{|\mu| \leqslant \lambda.}$$

λ est donc la plus grande, en valeur absolue, des valeurs propres : $\lambda = \rho(A)$.

3. Soit μ une valeur propre non nulle de A associée à un vecteur propre positif Z. A est positive : AZ a donc aussi toutes ses composantes positives.

Z n'est pas nul : il a donc une composante strictement positive. A cause de cette composante et du fait que $AZ = \mu Z$, on ne peut avoir $\mu < 0$. Puisque μ n'est pas nul, on a bien :

$$\boxed{\mu > 0.}$$

Z est donc un vecteur propre positif associé à une valeur propre positive : on peut donc appliquer au couple (Z, μ) les conclusions qu'on avait obtenues pour le couple (X, λ). En particulier $\mu = \rho(A)$. Donc

$$\boxed{\mu = \lambda.}$$

4. On a donc deux vecteurs propres X et Y associés à la même valeur propre $\lambda = \rho(A)$. On peut reprendre la question 2. avec cette fois $\mu = \lambda$. On a maintenant, λ étant positif,

$$\lambda|y_p| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{pj}y_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{pj}|y_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{pj}\frac{x_j}{x_p}|y_p| = \frac{|y_p|}{x_p}\sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j = \frac{|y_p|}{x_p}\lambda x_p = \lambda|y_p|.$$

Les inégalités écrites sont donc toutes des égalités. Notamment $\left|\sum_{j=1}^{n} a_{pj}y_j\right| = \sum_{j=1}^{n} a_{pj}|y_j|$, qui implique que les $a_{pj}y_j$ sont tous de même signe (au sens large) donc, puisque les a_{pj} sont strictement positifs, que les y_j sont tous de même signe.

Ensuite $\sum_{j=1}^{n} a_{pj}|y_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{pj}\dfrac{x_j}{x_p}|y_p|$, avec $|a_{pj}y_j| \leqslant a_{pj}\dfrac{x_j}{x_p}|y_p|$, implique que les $a_{pj}|y_j|$ sont égaux aux $a_{pj}\dfrac{x_j}{x_p}|y_p|$.

Comme les a_{pj} sont strictement positifs, cela implique : $\forall j,\ |y_j| = \dfrac{x_j}{x_p}|y_p|$. On peut enlever les valeurs absolues puisque les y_j sont tous de même signe. $\forall j,\ y_j = \dfrac{x_j}{x_p}y_p$, donc $Y = \dfrac{y_p}{x_p}X$:

$$\boxed{Y \text{ est colinéaire à } X.}$$

5.a. Puisque $Z = (I_n + A)Y$, on a, pour tout i de 1 à n : $z_i = y_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \geqslant y_i \geqslant 0$.

Si y_i n'est pas nul, z_i ne l'est pas non plus :

$$\boxed{J \subset J'.}$$

5.b. Supposons $J = J'$. Soit i un indice n'appartenant pas à J. On a donc $y_i = 0$. Cet indice n'appartient pas non plus à J', donc $z_i = 0$.

L'égalité $z_i = y_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j$ donne $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = 0$; cette somme de réels positifs est nulle donc ils sont tous nuls : pour tout j, on a : $a_{ij}y_j = 0$, donc pour tout $j \in J$: $a_{ij} = 0$. Résumons :

$$\boxed{\forall i \notin J,\ \forall j \in J,\ a_{ij} = 0.}$$

5.c. On a déjà vu au 1.b. que la propriété précédente entraîne que F_J est stable par l'endomorphisme associé à A. Ceci est contradictoire avec le fait que A soit irréductible car, vues les hypothèses sur Y, J n'est ni vide, ni égal à $[\![1, n]\!]$.

L'hypothèse $J = J'$ est donc absurde.

$$\boxed{\text{L'inclusion } J \subset J' \text{ est donc stricte.}}$$

5.d. Appliquons ce qui précède à $Y = e_q$, vecteur de la base canonique, effectivement positif. Du fait de l'inclusion stricte précédente, $Z = (I_n + A)e_q$ a, au moins, un zéro de moins que e_q. Z est un vecteur positif. S'il a au moins une composante nulle, on peut à son tour lui appliquer ce qui précède. $(I_n + A)^2 e_q$ aura à son tour un zéro de moins.

En réitérant, il est clair qu'il existe $r \leqslant n - 1$ tel que $V = (I_n + A)^r e_q$ n'a aucun zéro dans ses composantes et est donc strictement positif.

Ensuite, $(I_n + A)^{r+1} e_q = V + AV$ est a fortiori strictement positif. En poursuivant : $(I_n + A)^{n-1} e_q$ est strictement positif.

Les termes de la q-ième colonne de $(I_n + A)^{n-1}$ sont donc strictement positifs. Comme c'est vrai pour tout q :

$$\boxed{(I_n + A)^{n-1} \text{ est strictement positive.}}$$

5.e. La matrice $(I_n + A)^{n-1}$ est strictement positive donc, d'après le préliminaire, elle est irréductible.

Le vecteur X est vecteur propre de A associé à $\lambda = \rho(A)$ donc $(I_n + A)X = (1 + \lambda)X$ puis $(I_n + A)^{n-1}X = (1 + \lambda)^{n-1}X$:

le vecteur positif X est donc vecteur propre de la matrice irréductible et positive $(I_n + A)^{n-1}$, associé à la valeur propre $(1 + \lambda)^{n-1}$.

En appliquant 2. à $(I_n + A)^{n-1}$ au lieu de A, on obtient $(1 + \lambda)^{n-1} = \rho\left((I_n + A)^{n-1}\right)$.

Si maintenant X' est un autre vecteur propre associé à $\rho(A)$, X' est, comme X, vecteur propre de $(I_n + A)^{n-1}$, associé à la valeur propre $(1 + \lambda)^{n-1} = \rho\left((I_n + A)^{n-1}\right)$.

On est donc dans les hypothèses de 4. en y remplaçant A par $(I_n + A)^{n-1}$. Donc

$$\boxed{X' \text{ est colinéaire à } X.}$$

Visiblement, l'indication donnée nous incitait à choisir α tel que $X' + \alpha X$ soit positif et à raisonner sur ce nouveau vecteur propre. On peut même, en supposant par l'absurde que X' n'est pas colinéaire à X, choisir α tel que $X' + \alpha X$ soit positif et non strictement positif, mais tout cela ne semble pas simplifier la solution.

PARTIE II

1. On a vu en cours que, pour une matrice carrée réelle C, on a $C.{}^t\mathrm{Com}(C) = \det(C)I_n$. Appliquons cela à $C = \rho I_n - A$. Puisque ρ est valeur propre de A, c'est un zéro du polynôme caractéristique de A donc $\det(\rho I_n - A) = 0$ donc

$$\boxed{(\rho I_n - A)B = 0.}$$

2. L'image de B est donc incluse dans le noyau de $\rho I_n - A$ (nous allégeons en notant de la même façon une matrice et l'endomorphisme qui lui est canoniquement associé). Le noyau de $\rho I_n - A$ n'est autre que le sous-espace propre de A associé à ρ : il est de dimension 1, comme on nous le rappelle en préliminaire de cette partie II.
Le rang de B est donc inférieur ou égal à 1. Ce ne peut être 0 puisque B n'est pas la matrice nulle donc

$$\boxed{B \text{ est de rang 1 et } \mathrm{Im}(B) \text{ est exactement le sous-espace propre de } A \text{ associé à } \rho.}$$

3. Ce sous-espace propre est dirigé par le vecteur strictement positif X introduit dans la partie I. Les colonnes de B sont des vecteurs de $\mathrm{Im}(B)$ et sont donc de la forme kX, avec $k = 0$ ou $k > 0$ ou $k < 0$ donc :

$$\boxed{\text{Si une colonne de } B \text{ n'est pas nulle, alors elle n'a aucun coefficient nul et tous ses coefficients sont de même signe.}}$$

4.a F_J est, on l'a vu, l'ensemble des vecteurs dont les composantes sont nulles sauf peut-être celles dont le numéro est dans J. Il est clair qu'on a effectivement $(F_J)^\perp = F_I$ pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$. Supposons que F_J soit stable par ${}^tA$ et soit $Z \in F_I$; alors, pour tout $T \in F_J$ on a
$(T|AZ) = {}^tT.AZ = {}^t({}^tAT).Z = ({}^tAT|Z) = 0$ puisque ${}^tAT \in F_J$.
AZ est donc orthogonal à tout vecteur T de F_J ; il est donc dans F_I. Donc, dès que Z est dans F_I, AZ y est aussi : F_I est donc stable par A ; comme A est irréductible, I est nécessairement vide ou $[\![1,n]\!]$ tout entier ; son complémentaire J est aussi nécessairement vide ou $[\![1,n]\!]$ tout entier. Donc

$$\boxed{{}^tA \text{ est irréductible.}}$$

4.b Pour une matrice carrée quelconque M, la matrice des cofacteurs (ou comatrice) de la transposée de M est évidemment la transposée de la comatrice de M.
Ici, on a donc ${}^tB = {}^t\mathrm{Com}({}^t(\rho I_n - A)) = {}^t\mathrm{Com}(\rho I_n - {}^tA)$, avec $\rho({}^tA) = \rho(A) = \rho$ car A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres. Comme ${}^tA$ est, comme A, irréductible et positive, on peut lui appliquer ce qui précède. Notamment, 3. donne :

$$\boxed{\text{Si une colonne de } {}^tB \text{ n'est pas nulle, elle ne contient aucun coefficient nul et tous ses coefficients sont de même signe.}}$$

5. Si un terme de B était nul, tous ceux de sa ligne le seraient d'après 4.b donc tous ceux de toutes les colonnes le seraient d'après 3., ce qui est contradictoire avec $B \neq 0$.
Tous les termes d'une même ligne de B sont donc non nuls et, d'après 4.b, de même signe. Ce signe est le même, ensuite, sur la colonne de chacun d'eux d'après 3. et, finalement,

$$\boxed{\text{tous les coefficients de } B \text{ sont non nuls et de même signe.}}$$

6.a. Fixons toutes les variables à la valeur ρ sauf x_k.
Les termes de la matrice $\mathrm{diag}(\rho, \dots, \rho, x_k, \rho, \dots, \rho) - A$ sont des fonctions du premier degré de x_k, donc des fonctions dérivables de x_k.
On sait qu'alors le déterminant de cette matrice est une fonction dérivable de x_k et que sa dérivée est la somme de n déterminants, chacun étant obtenu en dérivant une seule colonne et conservant les autres colonnes.
Ici, comme x_k n'apparaît que sur la k-ième colonne, il ne va rester que le déterminant obtenu en dérivant la k-ième colonne et conservant les autres colonnes.
La dérivée de cette k-ième colonne de $\mathrm{diag}(\rho, \dots, \rho, x_k, \rho, \dots, \rho) - A$ comporte un 1 en k-ième position et des zéros partout ailleurs.
$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k}(\rho, \dots, \rho, x_k, \rho, \dots)$ est donc une fonction constante de x_k, donc égale à $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k}(\rho, \rho, \dots, \rho)$, et
$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k}(\rho, \rho, \dots, \rho)$ est le déterminant de la matrice $\rho I_n - A$ qu'on aurait modifiée en mettant, dans la k-ième colonne, un 1 en k-ième position et des zéros ailleurs.
C'est donc le cofacteur, dans $\rho I_n - A$, du terme de la k-ième ligne, k-ième colonne.

$$\boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(\rho, \rho, \dots, \rho) \text{ est } b_{kk}\text{, le } k\text{-ème terme diagonal de } B.}$$

6.b. $\rho \longrightarrow P_A(\rho) = \det(\rho I_n - A)$ est la composée de φ par l'application qui à ρ associe le n-uplet $(\rho, \dots, \rho)$.
Sa dérivée au point ρ peut se calculer à l'aide du théorème de dérivation des fonctions composées :

$$P'_A(\rho) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\rho, \rho, \dots, \rho).\frac{dx_1}{d\rho} + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(\rho, \rho, \dots, \rho).\frac{dx_n}{d\rho} = b_{11}.1 + \dots + b_{nn}.1.$$

$$\boxed{P'_A(\rho) \text{ est égal à la trace de } B.}$$

7. Comme les coefficients de B sont tous de même signe et non nuls, la trace est non nulle.

$$\boxed{P'_A(\rho) \neq 0.}$$

$\rho(A)$ annule le polynôme caractéristique mais pas le polynôme dérivée : c'est donc une valeur propre simple, du moins dans le cas où B n'est pas la matrice nulle.

PARTIE III

1. La sphère unité (pour la norme choisie) de $\mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$. Notons-la S. K est l'intersection de S et des n demi-espaces $y_k \geqslant 0$, qui sont des fermés. Intersection de fermés, K est un fermé. Contenu dans le borné S, K est borné. Fermé borné de $\mathbb{R}^n$, K est un compact. L'application $Y \in \mathbb{R}^n \to (I_n + A)^{n-1}Y$ est linéaire entre espaces de dimension finie, donc continue. Image d'un compact par une fonction continue,

$$\boxed{K' \text{ est un compact de } \mathbb{R}^n.}$$

Les raisonnements faits dans le I.5 jusqu'au d. n'utilisaient pas l'hypothèse d'existence d'une valeur propre positive et d'un vecteur propre positif associé.
Le résultat du d. s'applique donc pour n'importe quelle matrice A irréductible et positive, notamment celle qu'on manipule maintenant : $(I_n + A)^{n-1}$ est strictement positive.
Un vecteur de K a toutes ses composantes positives et est non nul : son image par $(I_n + A)^{n-1}$ a toutes ses composantes strictement positives.

$$\boxed{K' \text{ est inclus dans } (\mathbb{R}_+^*)^n.}$$

$\ldots \mathrm{Sup}(f,g) + \mathrm{Inf}(f,g) = f + g$ et $\mathrm{Sup}(f,g) - \mathrm{Inf}(f,g) = |f-g|$, on a bien

$$\mathrm{Inf}(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f-g|).$$

Cette formule montre que la fonction Inf de deux fonctions continues sur une même partie de $\mathbb{R}^n$ est elle-même continue sur cette partie.
En utilisant l'associativité de l'Inf, il en est de même de l'Inf de 3,4,...,n fonctions continues.

Appliquons cela aux n fonctions qui à $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K'$ associent $\frac{1}{x_1}\sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_k, \ldots, \frac{1}{x_n}\sum_{k=1}^{n} a_{nk}x_k$, qui sont bien définies continues sur K' (quotient de deux fonctions continues, et le dénominateur ne s'annule pas car aucune des composantes d'un vecteur de K' n'est nulle.)

> La fonction définie sur K' par $r(X) = \mathrm{Inf}\left\{\frac{1}{x_i}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k / i \in [\![1,n]\!]\right\}$ est donc continue sur K'.

3.a. D'après la propriété fondamentale des fonctions continues sur un compact de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$,

> $\lambda = \sup_{X \in K'} r(X)$ existe et est atteinte en un certain point X_0 de K'.

3.b. En reprenant la définition de $r(X_0)$, on a, si $X_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$:

Pour tout i de 1 à n : $\frac{1}{x_{0i}}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{0k} \geqslant \lambda$ ou $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{0k} \geqslant \lambda x_{0i}$ ou $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{0k} - \lambda x_{0i} \geqslant 0$ d'où

$$\boxed{AX_0 - \lambda X_0 \geqslant 0.}$$

4.a. On suppose $AX_0 - \lambda X_0 \neq 0$. On l'a déjà dit, $(I_n + A)^{n-1}$ est strictement positive.
Comme X_0 est strictement positif (il est dans K'), $Y_0 = (I_n + A)^{n-1}X_0$ est strictement positif.
Toutes les matrices utilisées commutent donc $AY_0 - \lambda Y_0 = (I_n + A)^{n-1}(AX_0 - \lambda X_0)$.
Comme $AX_0 - \lambda X_0$ est positif non nul, ce dernier vecteur est strictement positif. Cela prouve

> l'existence de $Y_0 > 0$ tel que $AY_0 - \lambda Y_0 > 0$.

4.b. Notons $(y_1, \ldots, y_n)$ les composantes de Y_0 ; elles sont strictement positives et, pour tout i de 1 à n, on a :
$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}y_k - \lambda y_i > 0$ donc $\frac{1}{y_i}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}y_k > \lambda$, donc $r(Y_0) > \lambda$, alors que Y_0, tel que nous l'avons choisi, est dans K'.

> On a une contradiction avec la définition de λ.

L'hypothèse de départ était absurde.
On a donc $AX_0 = \lambda X_0$, ce qui prouve, pour A, l'existence d'une valeur propre associée à un vecteur propre positif.

***

MINES - PONTS 1995	Options M et P'
Mathématiques 1	Durée : 4 heures

Ce problème est consacré à l'étude de suites complexes périodiques.

Par définition, une suite complexe $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique si et seulement s'il existe un entier naturel p, différent de 0 tel que, pour tout entier naturel n, l'égalité

$$u_{n+p} = u_n$$

a lieu. L'entier p est appelé période de la suite U. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble de ces suites.

La première et la deuxième partie définissent les applications linéaires L, D, Θ, S et les sous-espaces vectoriels $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ de l'espace vectoriel $\mathcal{P}$. Elles étudient les noyaux et les espaces images de ces applications. La troisième partie s'intéresse à leur continuité.

Première partie

Désignons par $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites complexes $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées. Admettons que $\mathcal{B}$ soit un espace vectoriel complexe et que l'application de $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{R}$, $V \mapsto \|V\|_\infty = \sup_{n\geqslant 0} |v_n|$, soit une norme.

I-1°) *Premières propriétés de l'ensemble $\mathcal{P}$ des suites complexes périodiques*

a. Désignons par $\mathcal{T}(U)$ l'ensemble des périodes d'une suite complexe périodique U. Démontrer l'existence d'une plus petite période p_0 ; caractériser l'ensemble $\mathcal{T}(U)$. Déterminer les ensembles $\mathcal{T}(\Omega)$ et $\mathcal{T}(C)$ relatifs aux deux suites définies ci-dessous :

$$\Omega = (\omega)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ pour tout } n, \omega_n = 1 ; \quad C = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ pour tout } n, c_n = \mathrm{Re}(i^{n+1}).$$

b. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des suites complexes périodiques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}$.

c. Cet espace vectoriel $\mathcal{P}$ est-il de dimension finie ?

Étant donnés une suite U de $\mathcal{P}$ et deux entiers naturels p et n, désignons par $A(U,p,n)$ le nombre complexe défini par la relation : $A(U,p,n) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u_{n+k}$.

I-2°) *Décomposition de $\mathcal{P}$ en somme directe*

a. Démontrer que pour une suite U donnée de $\mathcal{P}$, le nombre complexe $A(U,p,n)$ ne dépend ni de l'entier naturel n, ni de la période p de U (p appartient à $\mathcal{T}(U)$).

Pour une suite U donnée de $\mathcal{P}$, soit $L(U)$ la valeur commune de ces nombres complexes $A(U,p,n)$; désignons par L la forme linéaire : $U \mapsto L(U)$.

b. Calculer $L(\Omega)$ et $L(C)$; Ω et C sont les suites définies à la question I-1°) a.

c. Soit $\mathcal{P}_0$ le noyau de la forme linéaire L. Soit $\mathcal{P}_1$ le sous-espace vectoriel engendré par la suite Ω définie à la question I-1°) a ; démontrer que l'espace vectoriel $\mathcal{P}$ est égal à la somme directe des deux sous-espaces vectoriels $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$: $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{P}_1$.

I-3°) *Étude d'un endomorphisme D_0 de $\mathcal{P}_0$*

À tout élément $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}$, associons la suite $U' = (u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u'_n = u_{n+1} - u_n.$$

a. Démontrer que, pour tout U de $\mathcal{P}$, la suite U' appartient à $\mathcal{P}$. Soit D l'application : $U \mapsto U'$; établir que D est un endomorphisme de $\mathcal{P}$. Déterminer les images $D(\Omega)$ et $D(C)$ des suites définies à la question I-1°) a. Quels sont les noyau et espace image de l'endomorphisme D ?

b. Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_0$ est stable par D et que la restriction de D à $\mathcal{P}_0$ est un automorphisme, qui est noté D_0.

c. Déterminer toutes les valeurs propres de cet automorphisme D_0 de $\mathcal{P}_0$; préciser des éléments de $\mathcal{P}_0$ qui sont des vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

I-4°) *Étude d'une application linéaire de $\mathcal{P}_0$ dans $\mathcal{P}$*

À tout élément $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}$, associons la suite $U^* = (u^*_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u^*_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

a. Démontrer que l'application $\Theta : U \mapsto U^*$ est une application linéaire de $\mathcal{P}_0$ dans $\mathcal{P}$.

b. Déterminer le noyau et l'espace image de cette application linéaire Θ.

Deuxième partie

Soient $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathcal{P}$, et α un réel supérieur ou égal à 1. L'objet de cette partie est d'étudier la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{n^\alpha}$, $n \geqslant 1$, et de considérer la forme linéaire S qui, à un élément U de $\mathcal{P}_0$, associe le nombre complexe $S(U)$ défini par la relation : $S(U) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$.

II-1°) Soient $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathcal{P}$, et α un réel strictement supérieur à 1.
Quelle est la nature de la série de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$? Quelle est celle de la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{n^\alpha}$, $n \geqslant 1$?

II-2°) Soit $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathcal{P}$, de période p ; supposons le réel α égal à 1 ; pour étudier la convergence de la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{n}$, $n \geqslant 1$, considérons les nombres w_k, $k \geqslant 1$, définis par la relation

$$w_k = v_{kp} + v_{kp+1} + \cdots + v_{kp+p-1} = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{u_j}{kp+j}.$$

a. En supposant les deux entiers p et j donnés ($p > 0, j \geqslant 0$), déterminer le développement limité à l'ordre 2 par rapport à $\dfrac{1}{k}$ de l'expression $\dfrac{1}{kp+j}$, lorsque l'entier k croît indéfiniment.

b. En déduire la nature de la série de terme général w_k, $k \geqslant 1$, lorsque la suite U appartient à $\mathcal{P}$ sans appartenir à $\mathcal{P}_0$ puis, lorsque la suite U appartient à $\mathcal{P}_0$.

c. En déduire la nature de la série de terme général v_n, $n \geqslant 1$; discuter sa convergence suivant que la suite U appartient ou non à l'ensemble $\mathcal{P}_0$.
Désormais, désignons par S la forme linéaire qui, à une suite U appartenant à $\mathcal{P}_0$, fait correspondre le réel $S(U) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n}$.

II-3°) *Deux exemples*

a. Soit $C = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie à la question I-1°)a. Calculer $S(C)$. Une méthode, parmi d'autres, consiste à utiliser la relation : pour tout entier naturel k, $\displaystyle\int_0^1 t^k\,dt = \frac{1}{k+1}$.

b. Soit $T = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de période p, dont les termes t_n, $n \in \mathbb{N}$, sont définis par les relations :

$$\text{pour tout entier } r \text{ compris entre 1 et } p-1,\ 1 \leqslant r \leqslant p-1,\ t_r = 1\ ;\ t_p = 1-p.$$

Déterminer $S(T)$ en supposant connu le résultat : il existe une constante γ telle que :

$1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + o(1)$, lorsque l'entier n croît indéfiniment.

Troisième partie

D'après les résultats admis et la question I-1°) b., le couple $(\mathcal{P}, \|U\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé. Le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_0$ de $\mathcal{P}$ est muni de la même norme. L'objet de cette partie est d'étudier la continuité des applications linéaires L, D, Θ et S. Rappelons que, si T est une application $\boxed{\text{linéaire}}$ lipschitzienne d'un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|_E)$ dans un espace vectoriel normé $(F, \|\ \|_F)$, sa norme est définie par la relation :

$$\|T\| = \sup_{x\in E} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

III-1°) Démontrer que la forme linéaire L est lipschitzienne. Déterminer sa norme. Le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_0$ est-il fermé dans $\mathcal{P}$?

III-2°) Cette application linéaire D de $\mathcal{P}$ dans lui-même est-elle lipschitzienne ? Déterminer éventuellement sa norme.

III-3°) L'application linéaire Θ de $\mathcal{P}_0$ dans $\mathcal{P}$ est-elle lipschitzienne ?

III-4°) *Étude de la continuité de la forme linéaire S*
Dans cette question, q est un entier donné strictement positif.

a. Soit I_q l'intégrale définie par la relation : $I_q = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^q}{(1-t)(1+t^q)}\,dt$.
Étudier la définition de l'intégrale I_q et la convergence de la suite réelle $(I_q)_{q\geqslant 1}$ lorsque l'entier q croît indéfiniment.

b. Soit $Z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite appartenant à $\mathcal{P}$, de période $2q$ dont les termes z_n, $n \in \mathbb{N}$, sont définis par les relations :

$$\text{pour tout entier } n \text{ compris entre 1 et } q : 1 \leqslant n \leqslant q,\ z_n = 1,$$
$$\text{pour tout entier } n \text{ compris entre } q+1 \text{ et } 2q : q+1 \leqslant n \leqslant 2q,\ z_n = -1.$$

Étant donné un entier N strictement positif, soit V_N le réel défini par la relation :

$$V_N = \sum_{n=1}^{2qN} \frac{z_n}{n}.$$

Étudier la convergence de la suite réelle $(V_N)_{N\geqslant 1}$.

c. Déduire des résultats précédents que la forme linéaire S définie sur $\mathcal{P}_0$, n'est pas lipschitzienne.

***

CORRIGÉ

Première partie

I-1°) *Premières propriétés de l'ensemble $\mathcal{P}$ des suites complexes périodiques*

a. L'ensemble $\mathcal{T}(U)$ est un ensemble d'entiers naturels, non vide puisque U est périodique. Donc

$\boxed{\text{Il admet un plus petit élément } p_0.}$

$p_0 + p_0$ est également période de U ainsi que, par récurrence immédiate, tout multiple kp_0 non nul de p_0.
Réciproquement, si $p \in \mathcal{T}(U)$ (donc $p \geqslant p_0$), divisons p euclidiennement par p_0 :
$\exists k \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{N}$ tels que $p = kp_0 + r$, avec $r < p_0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $u_n = u_{n+p} = u_{kp_0+r+n} = u_{r+n}$ (puisque $kp_0 \in \mathcal{T}(U)$) et $r \geqslant 0$, donc $r = 0$ ou $r \in \mathcal{T}(U)$, contradictoire avec $r < p_0$. Donc $r = 0$ et $p = kp_0$. Résumons :

$\boxed{\mathcal{T}(U) \text{ est l'ensemble des } kp_0, \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*.}$

La plus petite période d'une suite constante est évidemment 1 donc

$\boxed{\mathcal{T}(\Omega) = \mathbb{N}^*.}$

$c_0 = 0$; $c_1 = \mathrm{Re}(i^2) = -1$; $c_2 = \mathrm{Re}(i^3) = 0$; $c_3 = \mathrm{Re}(i^4) = 1, \ldots$ A l'évidence, 4 est la plus petite période et

$\boxed{\mathcal{T}(C) = 4\mathbb{N}^*.}$

b. Une suite périodique est bornée puisque l'ensemble de ses valeurs est fini. Donc $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$. Si u et $v \in \mathcal{P}$, qui est non vide, de périodes respectives p et q, pq est une période commune à u et v ; c'est donc une période de $\alpha u + \beta v$ quels que soient les réels α et β. Donc $\alpha u + \beta v \in \mathcal{P}$. Résumons :

$\boxed{\mathcal{P} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{B}.}$

c. Si $\mathcal{P}$ était de dimension finie, il admettrait une famille génératrice finie $(u_1, \ldots, u_k)$ formée de suites de périodes respectives $p_1, \ldots, p_k$. Le produit $p = p_1 \ldots p_k$ serait période de toute combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_k$ donc de tout $u \in \mathcal{P}$. Pour tout $u \in \mathcal{P}$ la plus petite période serait donc inférieure ou égale à p. Or, en prenant $u_0 = \ldots = u_{p-1} = 0$, $u_p = 1$, et prolongeant la suite par périodicité on obtient une suite dont la petite période est $p+1$. . Donc :

$\boxed{\mathcal{P} \text{ n'est pas de dimension finie.}}$

I-2°) *Décomposition de $\mathcal{P}$ en somme directe.*

a. $A(U,p,n+1) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} u_{n+1+k} = \dfrac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} u_{n+k} = \dfrac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u_{n+k}$ (car $u_n = u_{n+p}$) $= A(U,p,n)$, donc

$A(U,p,n)$ ne dépend pas de n. $A(U,p,n)$ est donc égal à $A(U,p,0) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} u_k$.

Soit p_0 la plus petite période de U. p est donc de la forme mp_0, avec $m \in \mathbb{N}^*$.
Dans $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} u_k$, chaque terme est répété m fois du fait de la périodicité si bien que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} u_k = m\sum_{k=0}^{p_0-1} u_k$ et

$A(U,p,0) = \dfrac{m}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p_0-1} u_k = \dfrac{1}{p_0}\sum_{k=0}^{p_0-1} u_k = A(U,p_0,0)$. $A(U,p,0)$ ne dépend donc pas de la période p de U utilisée.

$\boxed{A(U,p,n) = A(U,p_0,0) \text{ est indépendant de } n \text{ et de la période } p \text{ de } U \text{ utilisée.}}$

Ce nombre $L(U)$ est la valeur moyenne des p premiers termes de la suite. Si p et q sont des périodes de U et V, alors pq est une période de $\alpha U + V$ donc

$L(\alpha U + V) = A(\alpha U + V, pq, 0) = \dfrac{1}{pq}\displaystyle\sum_{k=0}^{pq-1}(\alpha u_k + v_k) = \alpha A(U,pq,0) + A(V,pq,0) = \alpha L(U) + L(V)$:
L est bien une forme linéaire sur $\mathcal{P}$.

b. En reprenant I.1.a)

$\boxed{L(\Omega) = 1 \text{ et } L(C) = \frac{1}{4}(0 + (-1) + 0 + 1) = 0\,.}$

c. Si $U \in \mathcal{P}$, alors $U - L(U)\Omega \in \mathcal{P}$ et $L(U - L(U)\Omega) = L(U) - L(U)L(\Omega)$ (par linéarité) donc $L(U - L(U)\Omega) = 0$ donc $U - L(U)\Omega \in \mathrm{Ker}(L)$. En écrivant $U = (U - L(U)\Omega) + L(U)\Omega$, on voit donc que $\mathcal{P} = \mathrm{Ker}\, U + \mathrm{Vect}(\Omega) = \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1$. Si $U \in \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_1$, alors $U \in \mathcal{P}_1$ donc U s'écrit $\alpha\Omega$ donc $L(U) = \alpha L(\Omega) = \alpha$ et $U \in \mathcal{P}_0$ donc $L(U) = 0$ donc $\alpha = 0$ donc $U = 0$. Donc $\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_1 = \{0\}$.
Résumons :

$\boxed{\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{P}_1.}$

(On ne peut utiliser le théorème du rang car $\mathcal{P}$ n'est pas de dimension finie).

I-3°) *Étude d'un endomorphisme D_0 de $\mathcal{P}_0$*

a. Soit $U \in \mathcal{P}$ et p une période de U.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u'_{n+p} = u_{n+p+1} - u_{n+p} = u_{n+1} - u_n = u'_n$ donc

$\boxed{U' \in \mathcal{P}.}$

$D(\alpha U + \beta V)$ est la suite de terme général $(\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1}) - (\alpha u_n + \beta v_n)$.
C'est donc la suite $\alpha D(U) + \beta D(V)$, d'où la linéarité de D.

$\boxed{D \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{P}.}$

U' est nulle si et seulement si U est constante donc si et seulement si $U \in \mathrm{Vect}(\Omega) = \mathcal{P}_1$:

$\boxed{D(\Omega) \text{ est la suite nulle et } \mathrm{Ker}(D) = \mathcal{P}_1.}$

Pour $U = C$, on trouve la suite

$\boxed{C' \text{ telle que } c'_{4n} = c'_{4n+3} = -1 \text{ et } c'_{4n+1} = c'_{4n+2} = 1.}$

Pour $U \in \mathcal{P}$, on a $L(D(U)) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(u_{k+1} - u_k) = A(U,p,1) - A(U,p,0) = 0$, donc $D(U) \in \mathcal{P}_0$.

Réciproquement, donnons nous $V \in \mathcal{P}_0$ et considérons la suite U définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k$. Si p est une période de V, on a, même pour $n = 0$,

$u_{n+p} - u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{n+p-1} v_k = \sum_{k=0}^{p-1} v_{n+k} = pL(V) = 0$, donc U est p-périodique.
Enfin, $v_0 = u_1 = u_1 - u_0$ et, pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = v_n$. Donc $V = D(U)$. Résumons :

$\boxed{\text{L'image de } \mathcal{P} \text{ par } D \text{ est } \mathcal{P}_0.}$

(On ne pouvait invoquer des égalités de dimensions non finies.)

b. Puisque $D(\mathcal{P}) = \mathcal{P}_0$, on a $D(\mathcal{P}_0) \subset \mathcal{P}_0$:

$\boxed{\mathcal{P}_0 \text{ est stable par } D.}$

On sait aussi que la restriction d'une application linéaire à un supplémentaire S du noyau est un isomorphisme entre S et l'espace image. Ici, on peut prendre $S = \mathscr{P}_0$, puisque c'est un supplémentaire de $\mathscr{P}_1 = \mathrm{Ker}(D)$, et S, espace de départ de cet isomorphisme est aussi espace d'arrivée puisque l'image de $\mathscr{P}$ est $\mathscr{P}_0$.

$\boxed{\text{La restriction de } D \text{ à } \mathscr{P}_0 \text{ est un automorphisme de } \mathscr{P}_0.}$

c. Si λ est une valeur propre de D_0 et $U \in \mathscr{P}_0$ un vecteur propre associé, on a :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u'_n = \lambda u_n = u_{n+1} - u_n$ donc $u_{n+1} = (1+\lambda)u_n$. U est donc une suite géométrique de raison $1+\lambda$ et de premier terme $u_0 \neq 0$ car U n'est pas la suite nulle.

U ne peut être constante (car $\mathscr{P}_0 \cap \mathscr{P}_1 = \{0\}$) donc $1+\lambda \neq 1$ (d'ailleurs $\lambda = 0$ est déjà exclu par le fait que 0 ne peut être valeur propre de D_0 automorphisme). U doit admettre une période $p \geqslant 2$, donc $(1+\lambda)^p u_0 = u_0$ donc $(1+\lambda)^p = 1$.

Donc $1+\lambda$ doit être, pour un certain $p \geqslant 2$, racine p-ième de l'unité avec $\lambda \neq 0$ et le sous-espace propre associé ne peut être alors autre chose que la droite de $\mathscr{P}$ dirigée par la suite géométrique U_λ de terme général $u_n = (1+\lambda)^n$.

Réciproquement, avec un tel choix de λ, la suite U_λ est effectivement p-périodique puisque
$(1+\lambda)^{n+p} = (1+\lambda)^n(1+\lambda)^p = (1+\lambda)^n$

De plus $L(U_\lambda) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(1+\lambda)^k = \dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{1-(1+\lambda)^p}{1-(1+\lambda)} = 0$, qui nous assure que $U_\lambda \in \mathscr{P}_0$.

Enfin $u'_n = (1+\lambda)^{n+1} - (1+\lambda)^n = \lambda.(1+\lambda)^n = \lambda u_n$ nous assure que λ est effectivement valeur propre associée à U_λ. On a donc toutes les valeurs propres. Précisons les :

$\boxed{\text{Ce sont les complexes } -1 + e^{\frac{2ik\pi}{p}}\text{, pour } p \geqslant 2 \text{ et } 1 \leqslant k \leqslant p-1.}$

(On utilise toutes les racines p-ième de 1, sauf 1, pour exclure $\lambda = 1$.) On a déjà dit que

$\boxed{\text{les vecteurs propres associés à } \lambda \text{ sont les suites géométriques non nulles de raison } 1+\lambda.}$

I-4°) *Étude d'une application linéaire de $\mathscr{P}_0$ dans $\mathscr{P}$.*

a. Si $U \in \mathscr{P}_0$ et si p est une période de U, $u^*_{n+p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+p} u_k = u^*_n + \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k = u^*_n + pL(U) = u^*_n$ car $L(U) = 0$, donc U^* est p-périodique. Θ est donc à valeurs dans $\mathscr{P}$.

Pour u et v dans $\mathscr{P}_0$, $(\alpha u + \beta v)^*_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(\alpha u+\beta v)_k = \alpha\sum_{k=0}^{n} u_k + \beta\sum_{k=0}^{n} v_k = \alpha u^*_n + \beta v^*_n$, d'où la linéarité de Θ. Résumons :

$\boxed{\Theta \text{ est une application linéaire de } \mathscr{P}_0 \text{ dans } \mathscr{P}.}$

b. Que l'on prenne U dans $\mathscr{P}$ ou dans $\mathscr{P}_0$, on a $U^* = 0$ si et seulement si
$u_0 = 0, u_0 + u_1 = 0, \ldots, u_0 + u_1 + \ldots + u_n = 0, \ldots$ donc si et seulement si $U = 0$.

$\boxed{\text{Le noyau de } \Theta \text{ est réduit à la suite nulle.}}$

Si $U^* = \Theta(U)$ avec $U \in \mathscr{P}_0$ et p période de U, alors, comme on l'a vu, p est période de U^* et
$u^*_{p-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} u_k = pL(U) = 0$.

Réciproquement, soit $V \in \mathscr{P}$ dont une période soit p et telle que $v_{p-1} = 0$. Considérons la suite U définie par $u_0 = v_0$ et, pour $n \geqslant 1$, par $u_n = v_n - v_{n-1}$.
Alors $u_p = v_p = v_0 = u_0$ et, pour $n \geqslant 1$, $u_{p+n} = u_n$. Donc U est p-périodique. On voit aussi facilement que $U \in \mathscr{P}_0$ et que $\Theta(U) = V$ donc $V \in \mathrm{Im}(\Theta)$. Donc :

$\boxed{\begin{array}{c}\text{Im}(\Theta) \text{ est l'ensemble des suites } v \text{ périodiques telles que,}\\ \text{si } p \text{ est une période (quelconque), alors } v_{p-1} = 0.\end{array}}$

Deuxième partie

II-1°) Si $U \in \mathscr{P}$ et $U \neq 0$, u_n ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (puisque u_n est périodique non nulle) donc $\sum u_n$ diverge.

$\boxed{\text{Si } U \in \mathscr{P},\ \sum u_n \text{ ne converge que si } U \text{ est la suite nulle.}}$

Si $U \in \mathscr{P}$, U est une suite bornée : $\exists A > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant A$ donc $\dfrac{|u_n|}{n^\alpha} \leqslant \dfrac{A}{n^\alpha}$, terme général d'une série convergente puisque $\alpha > 1$:

$\boxed{\sum \frac{u_n}{n^\alpha} \text{ converge (absolument).}}$

II-2°)

a. Si p et $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}$, alors $\dfrac{1}{kp+j} = \dfrac{1}{kp}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{j}{kp}} = \dfrac{1}{kp}\left[1 - \dfrac{j}{kp} + o(\dfrac{1}{k})\right]$ donc :

$\boxed{\frac{1}{kp+j} = \frac{1}{kp} - \frac{j}{k^2p^2} + o(\frac{1}{k^2}) \text{ quand } k \to +\infty, j \text{ et } p \text{ étant fixés.}}$

b. Puisque U est de période p, on a effectivement $v_{kp} + v_{kp+1} + \cdots + v_{kp+p-1} = \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1}\frac{u_j}{kp+j}$. p est fixé ; additionnons les p développements limités obtenus pour j variant de 1 à $p-1$:
$w_k = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{j=0}^{p-1}\frac{u_j}{p} + \frac{1}{k^2}\sum_{j=0}^{p-1}\frac{-ju_j}{p^2} + o(\frac{1}{k^2})$ qui est de la forme $w_k = \dfrac{B}{k} + \dfrac{C+\varepsilon(k)}{k^2}$ avec $\varepsilon(k) \xrightarrow[k\infty]{} 0$.

Pour $k \geqslant k_0$, $|\varepsilon(k)| < 1$, donc $\left|\dfrac{C+\varepsilon(k)}{k^2}\right| < \dfrac{|C|+1}{k^2}$, terme général d'une série convergente. Donc $\sum \dfrac{C+\varepsilon(k)}{k^2}$ converge (absolument). Quant à $\sum \dfrac{B}{k}$, elle converge ou diverge suivant que $B = 0$ ou $B \neq 0$, donc suivant que $\displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} u_j = 0$ ou $\neq 0$. Donc, par addition :

$\boxed{\text{Si } U \in \mathscr{P}_0,\ \sum w_k \text{ converge ; sinon elle diverge.}}$

c. Pour ne pas avoir d'ennui avec les premiers termes, nous conviendrons de poser

$\boxed{v_0 = 0, \text{ ce qui nous permet d'étendre la définition de } w_k \text{ au cas } k = 0.}$

Nous noterons $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} v_n$ la somme partielle de rang N de $\sum v_n$.

Alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} w_k = \sum_{n=0}^{Np+p-1} v_n = S_{Np+p-1}$; c'est une suite extraite de S_N. La convergence de $\sum v_n$ implique donc celle de $\sum w_n$ donc, d'après b),

$\boxed{\text{Si } U \notin \mathscr{P}_0,\ \sum v_n \text{ diverge.}}$

Si $U \in \mathscr{P}_0$, $\sum w_k$ converge. Notons S la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} w_k$. Soit $\varepsilon > 0$ imposé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on peut écrire, par division euclidienne par p, n sous la forme $n = Np + r$ avec $0 \leqslant r \leqslant p-1$ et $N \in \mathbb{N}$.
Alors $|S_n - S| = |S_{Np+r} - S| \leqslant |S_{Np+r} - S_{Np+p-1}| + |S_{Np+p-1} - S|$.

$S_{Np+p-1} - S_{Np+r}$ comporte moins de p termes qui s'écrivent $v_k = \dfrac{u_k}{k}$ avec $k > Np + r = n$. Si A est le plus grand terme de la suite périodique $|U|$, on a donc $|S_{Np+r} - S_{Np+p-1}| \leqslant \dfrac{pA}{n}$ qui devient inférieur à $\dfrac{\varepsilon}{2}$ pour $n \geqslant n_1$ suffisamment grand.

- Puisque S_{Np+p-1} converge vers S quand $N \to +\infty$, on a $|S_{Np+p-1} - S| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ dès que $N \geqslant N_2$ suffisamment grand. Or $N \geqslant N_2$ est assuré par $n \geqslant (N_2+1)p = n_2$.
- Donc, dès que $n \geqslant \text{Max}(n_1, n_2)$, on a $|S_n - S| \leqslant \varepsilon$, ce qui assure la convergence de $\sum v_n$.

$$\boxed{\text{Si } U \in \mathscr{P}_0, \text{ alors } \sum v_n \text{ converge.}}$$

Notons qu'on a alors $S(U) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n = S = \sum_{k=0}^{\infty} w_k$.

II-3°) *Deux exemples :*

a. On a vu que $L(C) = 0$, donc $C \in \mathscr{P}_0$, donc on peut appliquer ce qui précède à la suite C : $S(C)$ existe et vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} w_k$, avec $w_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{3} \frac{u_j}{4k+j} = \frac{-1}{4k+1} + \frac{1}{4k+3}$ pour $k \geqslant 1$ mais aussi pour $k = 0$ avec notre convention. Donc :

$$\begin{aligned} S(C) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{4k+1} + \frac{1}{4k+3}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}\left(-\int_0^1 t^{4k}dt + \int_0^1 t^{4k+2}dt\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}(t^{4k+2} - t^{4k})\right) dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 (-1 + t^2 - t^4 \ldots - t^{4n} + t^{4n+2})dt \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{4n+4} - 1}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

Or $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{4n+4}}{1+t^2}dt \leqslant \int_0^1 t^{4n+4}dt = \left[\frac{t^{4n+5}}{4n+5}\right]_0^1 = \frac{1}{4n+5}$ qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{4n+4}-1}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{-1}{1+t^2}dt = [-\text{Arctan}t]_0^1 = -\frac{\pi}{4}$. Donc

$$\boxed{S(C) = -\frac{\pi}{4}.}$$

b. Puisque T est p-périodique, on a $t_0 = t_p = 1 - p$ et $L(T) = \dfrac{1}{p}(t_0 + t_1 + \cdots + t_{p-1}) = \dfrac{1}{p}(1 - p + p - 1) = 0$, donc $T \in \mathscr{P}_0$ et on peut encore appliquer 2° : $S(T)$ existe et vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} w_k$.

Pour $k > 0$, on a $w_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} \frac{t_j}{kp+j} = \frac{1-p}{kp} + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{t_j}{kp+j} = \frac{1}{kp} + \frac{1}{kp+1} + \cdots + \frac{1}{kp+p-1} - \frac{1}{k}$.

Pour $k = 0$, il faut enlever le $\dfrac{1-p}{kp}$ qui est devant, puisqu'on a convenu $v_0 = 0$. Donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1}\right) + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{2p-1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(n-1)p} + \cdots + \frac{1}{np-1}\right)$$
$$-\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) \text{ qu'on peut écrire}$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{np-1} - \ln(np-1)\right] - \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln(n-1)\right] + \ln\frac{np-1}{n-1}.$$

Quand $n \to +\infty$, les deux crochets tendent vers γ et $\ln\dfrac{np-1}{n-1}$ tend vers $\ln p$. Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} w_k = \ln p$:

$$\boxed{S(T) = \ln p.}$$

Troisième partie

Petit oubli dans l'énoncé : $||T||$ n'est définie que pour T linéaire de E vers F.
Dire que T est k-lipschitzienne c'est dire que : $\forall x$ et $y \in E$ on a : $||T(y) - T(x)||_F \leqslant k||y - x||_E$.

Si T est linéaire, cela équivaut à : $\forall x, y \; ||T(y-x)||_F \leqslant k||y - x||_F$ ou encore à : $\forall z \in E, \; ||T(z)||_F \leqslant k||z||_F$.

Cela assure effectivement l'existence de $\displaystyle\sup_{x\in E; x\neq 0} \frac{||T(x)||_F}{||x||_E} = ||T||$, avec $||T|| \leqslant k$.

III-1°) Ici $F = \mathbb{C}$ et $||L(U)|| = |L(U)|$.

Si $U \in \mathscr{P}$ et si p est l'une des périodes de U, on a :

$|L(U)| = \dfrac{1}{p}\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} u_k\right| \leqslant \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}|u_k| \leqslant \dfrac{1}{p}.p||U|| = ||U||$, donc

$$\boxed{L \text{ est 1-lipschitzienne}}$$

et $||L|| \leqslant 1$. Comme $||\Omega|| = 1$ et $||L(\Omega)|| = 1$, on a aussi $||L|| \geqslant 1$ et finalement

$$\boxed{||L|| = 1.}$$

Rappelons qu'une application lipschitzienne de E dans F est continue sur E. C'est donc le cas ici de la forme linéaire L. $\mathscr{P}_0$ est l'ensemble des U de $\mathscr{P}$ tels que $L(U) = 0$. C'est donc l'image réciproque par L, fonction continue, du singleton $\{0\}$, qui est un fermé de $\mathbb{C}$. Donc

$$\boxed{\mathscr{P}_0 \text{ est un fermé de } \mathscr{P}.}$$

III-2°) Ici $F = E = \mathscr{P}$. Si $U \in \mathscr{P}$, on a $D(U) = U'$ avec : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u'_n = u_{n+1} - u_n$ donc $|u'_n| \leqslant |u_{n+1}| + |u_n|$ donc $||D(U)|| \leqslant 2||U||$ donc

$$\boxed{D \text{ est 2-lipschitzienne.}}$$

De plus $||D|| \leqslant 2$. En prenant la suite $u_n = (-1)^n$, on a $||U|| = 1$, $||D(U)|| = 2$ et donc $||D|| \geqslant \dfrac{||D(U)||}{||U||} = 2$. Finalement

$$\boxed{||D|| = 2.}$$

III-3°) Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $u_0 = \cdots = u_{p-1} = 1$; $u_p = \cdots = u_{2p-1} = -1$, que l'on prolonge par $2p$-périodicité.
On a fait en sorte que $L(U) = 0$ (donc $U \in \mathscr{P}_0$) et que $||U|| = 1$. Θ lui associe la suite de terme général $u^*_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

En particulier $u^*_{p-1} = p$ donc $||\Theta(U)|| \geqslant p$, aussi grand qu'on veut. Il n'existe donc pas de k tel que $\forall U \in \mathscr{P}_0$, $||\Theta(U)|| \leqslant k||U||$:

$$\boxed{\Theta \text{ n'est pas lipschitzienne.}}$$

III-4°) *Étude de la continuité de la forme linéaire S :*

a. $\forall t \neq 1$, $\dfrac{1-t^q}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots + t^{q-1}$ tend vers q quand t tend vers 1.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1-t^q}{(1-t)(1+t^q)}$, continue sur $[0, 1[$, admet donc une limite finie quand $t \to 1$. Donc

$$\boxed{\text{l'intégrale } I_q \text{ existe .}}$$

(intégrale d'une fonction continue après prolongement).

De plus, $I_q = \int_0^1 \frac{1+t+t^2+\cdots+t^{q-1}}{1+t^q}dt$ et $1+t^q \leqslant 2$ pour $t \in [0,1]$ donc
$I_q \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 (1+t+t^2+\cdots+t^{q-1})dt = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{q}\right)$ qui tend vers $+\infty$ quand $q \to +\infty$ (série harmonique). Donc :

$$\boxed{\lim_{q\to+\infty} I_q = +\infty.}$$

b. Telle qu'elle est construite, $Z \in \mathscr{S}_0$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z_n}{n}$ converge d'après II.

$$\boxed{\text{La suite de terme général } V_N = \sum_{n=1}^{2qN} \frac{z_n}{n} \text{ est donc convergente.}}$$

(C'est une suite extraite de la suite des sommes partielles de $\sum \frac{z_n}{n}$).
De plus,
$$V_N = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{q}-\frac{1}{q+1}-\cdots-\frac{1}{2q}+\frac{1}{2q+1}+\cdots+\frac{1}{2qN-q}-\frac{1}{2qN-q+1}-\cdots-\frac{1}{2qN}$$
$$=\sum_{r=1}^{q}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{1}{r+2kq}-\frac{1}{r+q+2kq}\right)$$ en regroupant les termes deux par deux.

Donc $V_N = \sum_{r=1}^{q}\sum_{k=0}^{2N-1}\frac{(-1)^k}{r+kq}$.

D'un autre côté, $I_Q = \int_0^1 \frac{(1-t^q)\left(1-(-t^q)^{2N}\right)}{(1-t)(1+t^q)}dt + W_N$ avec $W_N = \int_0^1 \frac{(1-t^q).(-t^q)^{2N}}{(1-t)(1+t^q)}dt$.

En désignant par A un majorant de $\left|\frac{1-t^q}{(1-t)(1+t^q)}\right|$ sur $[0,1]$ (cette fonction est continue après prolongement), on a $|W_N| \leqslant A\int_0^1 t^{2qN}dt = A.\frac{1}{q2N+1}$ qui tend vers 0 quand $N \to +\infty$. Donc

$$\begin{aligned} I_q &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \frac{(1-t^q)}{(1-t)}.\frac{(1-(-t^q)^{2N})}{(1+t^q)}dt \\ &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 (1+t+\cdots+t^{q-1})(1-t^q+t^{2q}\cdots-(-t)^{q2N-1})dt \\ &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{r=1}^{q}\sum_{k=0}^{2N-1} t^{r-1}.(-t^q)^k dt = \lim_{N\to+\infty}\sum_{r=1}^{q}\sum_{k=0}^{2N-1}\frac{(-1)^k}{r+qk}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \lim_{N\to+\infty} V_N = I_q.}$$

c. On a donc $S(Z) = I_q$. Si S était lipschitzienne, il existerait α tel que : $\forall U \in \mathscr{S}_0,\ |S(U)| \leqslant \beta\|U\|$.
En particulier $|S(Z)| \leqslant \beta\|Z\|$ donc, puisque $\|Z\| = 1$, $0 \leqslant I_q \leqslant \beta$, ceci pour tout $q \in \mathbb{N}^*$.
C'est contradictoire avec $\lim_{q\to+\infty} I_q = +\infty$.

$$\boxed{S \text{ n'est pas lipschitzienne.}}$$

***

ÉCOLE POLYTECHNIQUE et E.S.P.C.I. 1998	Filière PC
Mathématiques 2	Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Le but de ce problème est d'étudier le mouvement d'une boule de billard dans un billard circulaire sans frottement.

On considère dans un plan horizontal un billard circulaire, de rayon 1. On l'identifie au disque unité du plan complexe,
$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}.$$
Le bord du billard s'identifie donc au cercle unité de centre O,
$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$
Une boule de billard, supposée ponctuelle, est lancée à l'instant $t = 0$, d'un point M_0 du bord du billard d'affixe z_0, avec un vecteur vitesse initial $\vec{V}_0$, de module 1, l'angle orienté de $\overrightarrow{M_0O}$ vers $\vec{V}_0$ ayant pour mesure un nombre réel α tel que $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. On désigne par $z(t)$ l'affixe de la position $M(t)$ de la boule de billard à l'instant $t \geqslant 0$. On suppose que le mouvement de la boule de billard se poursuit à l'infini sans frottement : entre deux chocs successifs sur le bord, le mouvement est supposé rectiligne uniforme.

$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres entiers supérieurs ou égaux à 1.

Première partie

Billard circulaire à réflexion élastique

On suppose dans cette partie que les chocs de la boule sur le bord du billard sont des réflexions élastiques, c'est-à-dire que

– la composante tangentielle du vecteur vitesse après le choc est égale à celle du vecteur vitesse avant le choc,

– la composante radiale du vecteur vitesse après le choc est opposée à celle du vecteur vitesse avant le choc.

1.a) Montrer que la boule de billard rebondit sur le bord Γ du billard en les points $M_n, n \in \mathbb{N}^*$, d'affixes $z_n = z_0 e^{in\beta}$, où β est un nombre réel tel que $0 < \beta < 2\pi$, que l'on déterminera en fonction de α.

b) Calculer le temps mis par la boule pour parcourir la corde $M_{j-1}M_j, j \in \mathbb{N}^*$, et le temps mis pour atteindre le point $M_n, n \in \mathbb{N}^*$.

c) Trouver l'affixe $z(t)$ de la position $M(t)$ de la boule à l'instant t. [On notera $[y]$ la partie entière d'un nombre réel y.]

2.a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que le mouvement de la boule soit périodique. Trouver alors la période du mouvement.

b) Montrer que, si le mouvement de la boule est périodique, sa trajectoire est une partie fermée du plan.

Billard circulaire à réflexion inélastique

Soit f un nombre réel tel que $0 < f < 1$.

On suppose dans cette partie que les chocs de la boule de billard sur le bord du billard sont des réflexions inélastiques avec coefficient f, c'est-à-dire que

– la composante tangentielle du vecteur vitesse après le choc est égale à celle du vecteur vitesse avant le choc,

– la composante radiale $\vec{V}_r^+$ du vecteur vitesse après le choc et la composante radiale $\vec{V}_r^-$ du vecteur vitesse avant le choc sont liées par la relation

$$\vec{V}_r^+ = -f\vec{V}_r^- \quad .$$

On pose $\alpha_0 = \alpha$ et l'on suppose dans cette partie que $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$. On se propose d'étudier le mouvement de la boule lorsque t tend vers $+\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par M_n le n-ième point de choc, par z_n son affixe et par α_n la mesure de l'angle orienté de $\overrightarrow{M_nO}$ vers $\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$ telle que $0 < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$. On désigne par T_n le temps de parcours de M_0 à M_n.

3.a) Etudier la série de terme général $2\alpha_n - \pi$.

b) Montrer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite Z quand n tend vers $+\infty$.

c) Montrer que le point M d'affixe Z est atteint par la boule de billard en un temps fini, que l'on notera T.

4.a) Montrer qu'il existe une unique fonction à valeurs vectorielles $\overrightarrow{W}$ définie sur $[0, T]$ vérifiant les conditions suivantes :

* $\overrightarrow{W}(0) = \vec{V}_0$,
* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\overrightarrow{W}(T_n)$ est la vitesse de la boule après le choc en M_n,
* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in]T_n, T_{n+1}[$, $\overrightarrow{W}(t)$ est la vitesse de la boule au temps t,
* $\overrightarrow{W}$ est continue au temps T.

b) On admet que la vitesse de la boule au temps T est $\overrightarrow{W}(T)$. Quel est le mouvement de la boule pour $t \geqslant T$?

c) Calculer, pour $t \geqslant T$, $z(t)$ en fonction de $z(T)$, α et $t - T$.

5. Soit g une fonction réelle continue d'une variable réelle, périodique de période 2π. On désigne par $\theta(t)$ un argument continu de $z(t)$ pour $t \geqslant 0$.

a) Montrer que

$$\lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{t}\int_0^t g(\theta(\tau))d\tau - \frac{1}{t-T}\int_T^t g(\theta(\tau))d\tau \right) = 0 \quad .$$

b) En déduire que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t g(\theta(\tau))d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta \quad .$$

Troisième partie

Réflexion élastique, points adhérents aux trajectoires non périodiques

Dans cette partie, indépendante de la précédente, on considère à nouveau le cas de la réflexion élastique et l'on se propose d'étudier les trajectoires non périodiques. On étudie d'abord les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.

On rappelle que $x \in \mathbb{R}$ est un point adhérent à une partie X de $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de X qui tend vers x.

6. Soit G un sous-groupe du groupe additif $\mathbb{R}$, non réduit à $\{0\}$. On considère

$$G^+ = \{x \in G \,|\, x > 0\} \quad .$$

a) Montrer que G^+ a une borne inférieure. On la désigne par a.

b) Montrer que si $a > 0$, alors G est le sous-groupe

$$G_a = \{na \,|\, n \in \mathbb{Z}\} \quad .$$

c) Montrer que si $a = 0$, alors tout point de $\mathbb{R}$ est un point adhérent à G. [On montrera d'abord que 0 est un point adhérent à G^+.]

7. Soit $\beta \in \mathbb{R}$. *On suppose que $\frac{\beta}{\pi}$ n'est pas rationnel.*

On considère l'ensemble

$$H_\beta = \{k\beta + 2\ell\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}, \ell \in \mathbb{Z}\} \quad .$$

a) Montrer que tout nombre réel est un point adhérent à H_β.

On pose

$$H_\beta^+ = \{x \in H_\beta \,|\, x > 0\} \quad ,$$
$$S_\beta = \{k\beta + 2\ell\pi \,|\, k \in \mathbb{N}, \ \ell \in \mathbb{Z}, \ k\beta + 2\ell\pi > 0\} \quad ,$$
$$S'_\beta = \{-k\beta + 2\ell\pi \,|\, k \in \mathbb{N}, \ \ell \in \mathbb{Z}, \ -k\beta + 2\ell\pi > 0\} \quad .$$

b) Montrer que 0 est un point adhérent à S_β ou à S'_β.

c) On suppose que $(-k_n\beta + 2\ell_n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de S'_β qui converge vers 0. Montrer que la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{N}$ n'est pas bornée. En déduire qu'il existe une suite de S_β qui converge vers 0.

d) Montrer que tout nombre réel positif est un point adhérent à S_β.

8. On reprend les notations de la première partie et l'on suppose que le mouvement de la boule de billard n'est pas périodique.

a) Montrer que, pour tout $z \in \Gamma$, il existe une suite d'entiers positifs ou nuls $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} z_{k_n} = z$.

b) Montrer que, pour tout point z de la couronne $C_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |\sin\alpha| \leqslant |z| \leqslant 1\}$, il existe une suite de nombres réels positifs ou nuls $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} z(t_n) = z$.

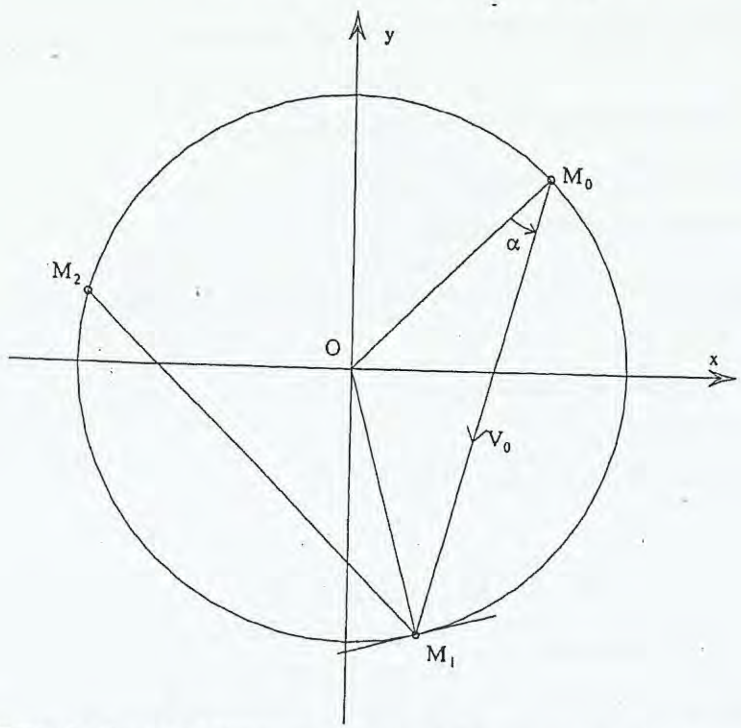
c) Déterminer quels sont les points du billard qui sont adhérents à la trajectoire de M_0.

***

ÉCOLE POLYTECHNIQUE et E.S.P.C.I. 1998 Filière PC

Mathématiques 2 CORRIGÉ

Première Partie : Billard circulaire à réflexion élastique



1.a) Tant que la trajectoire de la boule ne rencontre pas le cercle Γ, le mouvement est rectiligne uniforme, donc les vecteurs $\overrightarrow{M_0M}$ et $\overrightarrow{V_0}$ sont colinéaires et de même sens. M reste donc sur la demi-droite d'origine M_0 faisant avec la demi-droite M_0O l'angle α. Puisque $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$, ces deux demi-droites sont dans le même demi-plan limité par la tangente à Γ en M_0.
La demi-droite d'origine M_0 dirigée par $\overrightarrow{V_0}$ rencontre donc le cercle Γ en un point.
On vient donc déjà de prouver que la bille va effectivement heurter le bord du billard (c'était assez évident « physiquement » !).
Soit donc M_1 le point de rencontre. Le triangle OM_0M_1 est isocèle donc, modulo 2π :
$(\overrightarrow{M_1O}, \overrightarrow{M_1M_0}) = (\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0O}) = -\alpha$ ou encore $(\overrightarrow{M_1O}, -\overrightarrow{V_0}) = -\alpha[2\pi]$.
Ensuite, le choc élastique peut se traduire en disant que le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_1}$ après le choc est le symétrique de $-\overrightarrow{V_0}$ par rapport à la droite M_1O .
On a donc $(\overrightarrow{M_1O}, \overrightarrow{V_1}) = \alpha[2\pi]$, et ainsi de suite : $(\overrightarrow{M_nO}, \overrightarrow{V_n}) = \alpha[2\pi]$.
Ensuite :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_1}) &= (\overrightarrow{M_0O}, \overrightarrow{M_1O}) = (\overrightarrow{M_0O}, \overrightarrow{M_0M_1}) + (\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_1M_0}) + (\overrightarrow{M_1M_0}, \overrightarrow{M_1O}) \\ &= \alpha + \pi + \alpha = 2\alpha + \pi[2\pi].\end{aligned}$$

En posant $\beta = 2\alpha + \pi$, on a donc $z_1 = z_0e^{i\beta}$ puis de même $z_2 = z_1e^{i\beta} = z_0e^{2i\beta}$ et ainsi de suite :

$$\boxed{\text{En posant } \beta = 2\alpha + \pi, \text{ on a } z_n = z_0e^{in\beta}, \text{ et } \beta \in]0, 2\pi[.}$$

1.b)
Le triangle OM_0M_1 étant isocèle, la longueur de la corde M_0M_1 est le double de la projection orthogonale de M_0O sur la corde, soit $2\cos\alpha$. Le mouvement étant rectiligne uniforme et la norme du vecteur-vitesse étant égal à 1, le temps mis pour aller de M_0 à M_1 est donc $2\cos\alpha$. De même pour aller de M_1 à M_2 et ainsi de suite.

$$\boxed{\text{Le temps mis pour parcourir } M_{j-1}M_j \text{ est } 2\cos\alpha. \text{ Le temps mis pour atteindre } M_n \text{ est donc } 2n\cos\alpha.}$$

1.c)
Notons n la partie entière de $\dfrac{t}{2\cos\alpha}$. A cet instant t, M est donc entre M_n et M_{n+1}.

Le mouvement de M est rectiligne uniforme depuis l'instant $2n\cos\alpha$, de vitesse unitaire, donc

$\overrightarrow{M_nM} = (t - 2n\cos\alpha)\dfrac{\overrightarrow{M_nM_{n+1}}}{\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\|} = \dfrac{t - 2n\cos\alpha}{2\cos\alpha}\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$. Donc

$$z(t) = z_0e^{in\beta} + \frac{t - 2n\cos\alpha}{2\cos\alpha}(z_0e^{i(n+1)\beta} - z_0e^{in\beta}) = e^{in\beta}z_0\left(1 + \frac{t - 2n\cos\alpha}{2\cos\alpha}(e^{i\beta} - 1)\right).$$

Or $e^{i\beta} - 1 = e^{i(\pi+2\alpha)} - 1 = -e^{2i\alpha} - 1 = -\cos(2\alpha) - i\sin(2\alpha) - 1 = -(2\cos^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha)$.
Après réductions :

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est la partie entière de } \frac{t}{2\cos\alpha}, \quad z(t) = z_0e^{in\beta}\left(1 - (t - 2n\cos\alpha)e^{i\alpha}\right).}$$

2.a)
• Supposons que le mouvement soit périodique. Il existe donc un instant t où la bille repasse en M_0, donc un $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $z_0e^{in\beta} = z_0$ donc $e^{in\beta} = 1$. Il doit donc exister $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\beta = 2k\pi$.

Cela équivaut à ce que β soit de la forme $\dfrac{2k\pi}{n}$ avec, pour assurer $\beta \in]0, 2\pi[$, k et n entiers avec $0 < k < n$.
En divisant k et n par leur PGCD, on peut rajouter la contrainte que k et n sont premiers entre eux.

• En traduisant ces contraintes sur α, cela équivaut à dire que α est de la forme $\left(\dfrac{k}{n} - \dfrac{1}{2}\right)\pi$ avec k et n entiers premiers entre eux vérifiant $0 < k < n$.

• Supposons réciproquement que α soit de cette forme. On a déjà $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$.
Ensuite, le β qui lui est associé est égal à $\dfrac{2k\pi}{n}$. Alors $z_0e^{in\beta} = z_0$: à l'instant $2n\cos\alpha$, la boule repasse en M_0.
A cet instant, on se retrouve exactement dans la situation initiale. Il est clair alors qu'à tout instant $t + 2n\cos\alpha$ la boule est dans la même position qu'à l'instant t. Le mouvement est donc périodique et $2n\cos\alpha$ est une période.

• A un instant $2m\cos\alpha$ avec m entier, la boule est à l'affixe $e^{im\beta} = e^{\frac{2km i\pi}{n}}$. Pour que ce soit z_0, il faut que $\dfrac{km}{n}$ soit un entier donc que n divise km. Comme n et k sont premiers entre eux il faut que n divise m (théorème de Gauss).
Cela implique en particulier $m \geqslant n$: la boule ne peut donc repasser en M_0 avant l'instant $2n\cos\alpha$; la plus petite période est donc $2n\cos\alpha$.

• Résumons :

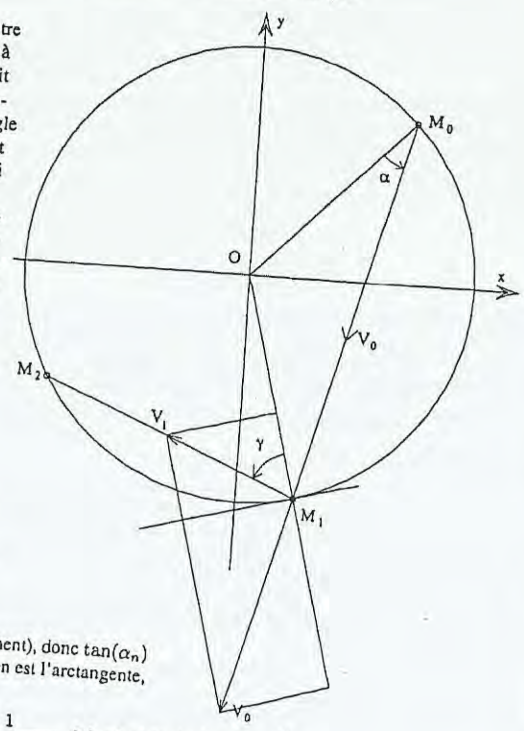
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Le mouvement est périodique si et seulement si } \alpha \text{ est de la forme } \left(\dfrac{k}{n} - \dfrac{1}{2}\right)\pi \text{ avec} \\ k \text{ et } n \text{ entiers premiers entre eux vérifiant } 0 < k < n. \text{ La période est alors } 2n\cos\alpha.\end{array}}$$

2.b)
Si le mouvement de la boule est périodique, la trajectoire est une réunion finie de segments de droites. Chacun de ces segments est l'image d'un intervalle $[a, b]$, qui est un compact de $\mathbb{R}$, par une fonction continue (les composantes sur le repère Oxy sont du premier degré). Un tel segment est donc un compact du plan, a fortiori un fermé. En tant que réunion d'une famille finie de fermés,

$$\boxed{\text{la trajectoire est un fermé du plan.}}$$

3.a)

On voit clairement sur le dessin ci-contre la différence de situation par rapport à la première partie, où le vecteur $\overrightarrow{V_1}$ était symétrique de $\overrightarrow{V_0}$ par rapport à la tangente en M_1 au cercle, si bien que l'angle $(\overrightarrow{M_1O}, \overrightarrow{V_1})$ était égal à α ; on repartait de M_1 exactement comme on était parti de M_0.



Ici, bien que ce nouveau départ soit analogue au départ de M_0, il faut remplacer α par un certain γ car la projection de $\overrightarrow{V_1}$ sur $\overrightarrow{M_1O}$ n'est plus $\|V_0\| \cos\alpha$ mais $\|V_0\| f \cos\alpha$.

La composante tangentielle étant toujours $\|V_0\| \sin\alpha$, on a donc

$\tan\gamma = \dfrac{\tan\alpha}{f}$.

Autre changement : On n'a plus

$\|\overrightarrow{V_1}\| = \|\overrightarrow{V_0}\| (= 1)$ mais

$\|\overrightarrow{V_1}\|^2 = \|\overrightarrow{V_0}\|^2 (\sin^2\alpha + f^2\cos^2\alpha)$

donc

$\|\overrightarrow{V_1}\| = \|\overrightarrow{V_0}\| \sqrt{\sin^2\alpha + f^2\cos^2\alpha}$.

On se retrouve avec une situation analogue en $M_2, M_3, \cdots, M_n$, si bien que, avec les notations de l'énoncé, on a

$\tan(\alpha_n) = \dfrac{\tan\alpha_{n-1}}{f} = \ldots = \dfrac{\tan\alpha}{f^n}$.

Dans cette partie, $\tan\alpha$ est positif (strictement), donc $\tan(\alpha_n)$ tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$ et α_n, qui en est l'arctangente, tend donc vers $\dfrac{\pi}{2}$ et $\sin(\alpha_n)$ tend vers 1.

$\tan(\alpha_n)$ est équivalent à $\dfrac{1}{\cos(\alpha_n)} = \dfrac{1}{\sin(\pi/2 - \alpha_n)}$ lui-même équivalent à $\dfrac{1}{\pi/2 - \alpha_n}$.

Donc $\dfrac{\pi}{2} - \alpha_n$ est équivalent à $\dfrac{f^n}{\tan\alpha}$, terme général positif d'une série géométrique convergente. Il en résulte que

$$\boxed{\text{la série de terme général } 2\alpha_n - \pi \text{ est convergente.}}$$

3.b) Comme dans 1.a), on a $z_n = z_{n-1} e^{i(\pi + 2\alpha_n)} = z_{n-1} e^{i(2\alpha_n - \pi)}$.

Par récurrence cela donne $z_n = z_0 \exp\left(i \sum_{k=1}^{n} (2\alpha_k - \pi)\right)$.

Quand $n \to +\infty$, $\sum_{k=1}^{n} (2\alpha_k - \pi)$ tend vers une limite finie puisque la série converge. Par continuité de l'exponentielle,

$$\boxed{\text{la suite } (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ a une limite finie quand } n \text{ tend vers } +\infty.}$$

3.c) La composante tangentielle de la vitesse lors des chocs, $\|\overrightarrow{V_n}\| \sin(\alpha_n)$, est constante égale à $\sin\alpha$.

Puisque $\sin(\alpha_n)$ tend vers 1, $\|\overrightarrow{V_n}\|$ tend donc vers $\sin\alpha$.

La distance de M_n à M_{n+1} est $2\cos(\alpha_n)$. Le temps mis pour la parcourir est $t_n = \dfrac{2\cos(\alpha_n)}{\|\overrightarrow{V_n}\|}$.

Quand $n \to +\infty$, il est donc équivalent à $\dfrac{\pi - 2\alpha_n}{\sin\alpha}$, terme général d'une série convergente.

Autrement dit,

$$\boxed{\text{Le point limite } M \text{ est atteint au bout d'un temps fini.}}$$

4.a) Les contraintes imposées à $\overrightarrow{W}$:

- $\overrightarrow{W}(0) = \overrightarrow{V}_0$,
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overrightarrow{W}(T_n)$ est la vitesse de la boule après le choc en M_n,
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in]T_n, T_{n+1}[$, $\overrightarrow{W}(t)$ est la vitesse de la boule au temps t

signifient que, sur le semi-ouvert $[0, T[$, $\overrightarrow{W}(t)$ est la vitesse $\overrightarrow{V}(t)$ de la boule au temps t (avec une convention aux points de discontinuité). Ces contraintes assurent l'existence et l'unicité de la fonction $\overrightarrow{W}$ sur le semi-ouvert.

La contrainte : « $\overrightarrow{W}$ est continue au temps T » signifie que $\overrightarrow{W}$ est le prolongement par continuité, nécessairement unique, de V sur $[0, T]$. Reste donc à prouver qu'il existe, c'est-à-dire que $\overrightarrow{W}(t)$ admet une limite quand $t \to T$, ou encore que l'affixe de ce vecteur tend vers une limite.

Cette affixe est constante sur l'intervalle $[T_n, T_{n+1}[$, de module $\|\overrightarrow{V}_n\|$; son argument est l'angle polaire de $\overrightarrow{V}_n$ soit, modulo 2π, $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_n}) + (\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{V_n})$ ou encore l'argument de $z_n + \pi + \alpha_n$.

Cette affixe est donc le complexe $r_n = -\|\overrightarrow{V}_n\| z_n e^{i\alpha_n}$.

La limite éventuelle de cette fonction du temps constante par intervalle est donc la limite éventuelle de la suite de terme général r_n.

Or, quand $n \to +\infty$, z_n tend vers Z, α_n tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ donc $e^{i\alpha_n}$ tend vers $e^{i\pi/2} = i$.

Enfin, la suite de terme général $\|\overrightarrow{V}_n\|$ converge vers $\sin\alpha$.

Donc r_n converge vers $-i\sin\alpha Z$. $\overrightarrow{W}$ peut bien être prolongée par continuité.

$$\boxed{\text{Il existe une unique fonction } \overrightarrow{W} \text{ vérifiant les contraintes de l'énoncé.}}$$

4.b)

- La vitesse-limite $\overrightarrow{W}(T)$ a pour affixe $-i\sin\alpha Z$. On admet que c'est la vitesse de la boule à l'instant T. Notons d'abord que ce vecteur est tangent au bord du billard.

Nous supposons par ailleurs vérifiées les lois de la Physique ; notamment, ici, la norme du vecteur vitesse ne peut augmenter. Elle est donc toujours inférieure à 1.

- Supposons qu'à un instant T' postérieur à T, la boule soit en un point S_0 à l'intérieur du billard (et non sur le bord). En reprenant les raisonnements précédents mais en remontant le temps à partir de l'instant T', il est clair qu'il y a eu un choc de la boule sur le bord avant cet instant T', en un certain point S_1, avec une vitesse après le choc faisant un angle δ_0 avec OS_0 et une vitesse avant le choc faisant un angle δ_1 avec OS_0, δ_0 et δ_1 étant liés par $\tan\delta_1 = f\tan\delta_0$. Toujours en remontant le temps, on obtient une suite de points de choc S_n avec des angles δ_n tels que $\tan\delta_n = f\tan\delta_0$. Donc, cette fois-ci, les distances S_nS_{n+1} vont en croissant. Puisque la vitesse est, en norme, inférieure à 1, la durée séparant les positions S_n et S_0 tend vers l'infini avec n. Il y aura donc un n tel que le choc en S_n ait lieu à un instant $T'' < T$. Or ceci est absurde : les passages sur le bord du disque(en $S_n, S_{n-1}, \ldots, S_1$) ne se font jamais avec un vecteur-vitesse tangent au disque.

$$\boxed{\text{Après l'instant } T\text{, la boule reste perpétuellement en contact avec le bord.}}$$

Nous ne sommes pas en mesure de dire si le mouvement est uniforme ou décéléré, ne sachant pas s'il y a absorption ou non d'une partie de l'énergie cinétique par frottement mais l'énoncé laisse à penser que non, puisque, lors d'un choc, la composante tangentielle de la vitesse ne diminue pas.

Nous continuerons donc en supposant que, après le choc, le mouvement est circulaire uniforme.

4.c) La vitesse angulaire constante de ce mouvement est donnée par le vecteur vitesse à l'instant T : $-i\sin\alpha Z$: cette vitesse angulaire est donc $-\sin\alpha$. Comme le rayon du cercle est 1 et que $Z = z(T)$, on a donc, pour $t \geqslant T$

$$\boxed{z(t) = z(T) e^{-i\sin\alpha(t-T)}.}$$

5.a) Pour $t > T$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\int_0^t g(\theta(\tau))d\tau - \frac{1}{t-T}\int_T^t g(\theta(\tau))d\tau &= \frac{1}{t}\int_0^T g(\theta(\tau))d\tau + \frac{1}{t}\int_T^t g(\theta(\tau))d\tau - \frac{1}{t-T}\int_T^t g(\theta(\tau))d\tau \\
&= \frac{1}{t}\int_0^T g(\theta(\tau))d\tau - \frac{T}{t(t-T)}\int_T^t g(\theta(\tau))d\tau.
\end{aligned}$$

Quand $t \to +\infty$, $\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^T g(\theta(\tau))d\tau \to 0$.

Si M est un majorant sur $[0; 2\pi]$ de la fonction continue $|g|$, on a, puisque g est 2π-périodique,

$\left|\frac{\dots}{t(t-T)}\int_T \dots\right| \leqslant \frac{\dots}{t(t-T)}M(t-T) = \frac{\dots}{t}$, qui tend vers 0 quand $t \to +\infty$. En rassemblant,

$$\boxed{\frac{1}{t}\int_0^t g(\theta(\tau))d\tau - \frac{1}{t-T}\int_T^t g(\theta(\tau))d\tau \text{ tend vers 0 quand } t \to +\infty.}$$

5.b) Pour $t > T$ les arguments de $z(t)$ sont de la forme $-t\sin\alpha$+cste+$2k\pi$. $\theta(t)$ est un argument continu : il utilise donc le même k pour tout t. $\theta(t)$ est donc de la forme $\mu - t\sin\alpha$.

Donc $\int_T^t g(\theta(\tau))d\tau = \int_T^t g(\mu - \sin\alpha\tau)d\tau$.

On intègre une fonction de période $L = \frac{2\pi}{\sin\alpha}$. Si k est la partie entière de $\frac{(t-T)\sin\alpha}{2\pi}$, l'intégrale précédente est k fois l'intégrale sur une période + le morceau $\int_{T+kL}^t g(\mu - \sin\alpha\tau)d\tau$.

On peut majorer ce morceau indépendamment de t en majorant $|g|$ par M et en agrandissant l'intervalle d'intégration jusqu'à obtenir une période.

En le divisant par $t-T$, on obtient donc quelque chose qui tend vers 0 quand $t \to +\infty$.

Quand à l'intégrale de T à $T+kL$, c'est k fois l'intégrale sur une période. En divisant par $t-T$, qui est équivalent à kL quand $t \to +\infty$, on obtient une fonction de t qui tend, quand $t \to +\infty$, vers $\frac{1}{L}$ multiplié par l'intégrale sur une période, soit

$$\frac{1}{L}\int_0^L g(\mu - \sin\alpha\tau)d\tau = \frac{1}{L}\int_0^L g(\mu - \frac{2\pi\tau}{L})d\tau,$$

égal, après le changement de variable $\theta = \mu - \frac{2\pi\tau}{L}$, à $-\frac{1}{2\pi}\int_\mu^{\mu-2\pi} g(\theta)d\theta$ encore égal à $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta$.

Cela donne donc la limite pour $t \to +\infty$ de $\frac{1}{t-T}\int_T^t g(\theta(\tau))d\tau$. En utilisant le résultat de 5.a) on obtient

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t g(\theta(\tau))d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta.}$$

Troisième Partie : Réflexion élastique, points adhérents aux trajectoires non périodiques

6) Quatre rappels préliminaires :

- Toute partie minorée non vide X de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure a (qui n'est pas forcément dans X).
- Cette borne inférieure a est, par définition, le plus grand des minorants de X. Si $\varepsilon > 0$ est fixé, $a+\varepsilon$ n'est pas un minorant de X. Il y a donc un élément c de X vérifiant $a \leqslant c < a+\varepsilon$, ce qu'on traduit commodément en disant : « On peut s'approcher d'aussi près qu'on veut de la borne inférieure de X à l'aide d'éléments de X ».

Notons que, si $a \notin X$, l'inégalité $a \leqslant c$ est forcément stricte.

- En prenant ci-dessus $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on obtient une suite d'éléments c_n de X vérifiant $a \leqslant c_n \leqslant a + \frac{1}{n}$; cette suite converge donc vers a. La borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$ est donc un point adhérent à cette partie, même dans le cas où la borne n'appartient pas à la partie.
- Nous utiliserons la division euclidienne dans $\mathbb{R}$: Si $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, avec $b > 0$, il existe un couple unique (q, r) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$ vérifiant $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.

a) Puisqu'il y a dans G un élément b non nul, il y a aussi $-b$ puisque G est un groupe additif. L'un des deux (b ou $-b$) est strictement positif. L'ensemble G^+ des éléments strictement positifs de G est donc une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0 ; $\boxed{G^+ \text{ possède donc une borne inférieure } a.}$

b) Dans cette question, on suppose $a > 0$; si a n'était pas dans G^+, on pourrait trouver c puis d dans G^+ vérifiant $a < d < c < 2a$ (deuxième rappel). $c - d$ appartiendrait à G, qui est un groupe additif. On aurait $c - d \in G^+$ et $c - d < a$, contradictoire avec le fait que a est la borne inférieure de G^+.

La borne inférieure a de G^+ est donc un élément de G^+.

Par addition, l'ensemble des $na, n \in \mathbb{N}$ est inclus dans G, ainsi que l'ensemble de leurs opposés. L'ensemble G_a des $na, n \in \mathbb{Z}$ est donc inclus dans G.

Notons au passage que cet ensemble G_a, non vide et stable par soustraction, est un sous-groupe additif du groupe additif $\mathbb{Z}$.

Soit x dans G et n le quotient euclidien de x par a ; alors $y = x - na$ est dans G et vérifie : $0 \leqslant y < a$, donc $y = 0$, donc $x \in G_a$. On peut conclure par double inclusion :

$$\boxed{G \text{ est le sous-groupe } G_a = \{na | n \in \mathbb{Z}\}.}$$

c) Ici la borne inférieure de G^+ est $a = 0$, (qui n'appartient pas à G^+). On conclut à l'aide du troisième rappel : 0 est un point adhérent à G^+. Il existe donc une suite x_n de points de G^+ qui converge vers 0.

Soit maintenant x un réel quelconque. Divisons le euclidiennement par x_n : $x = p_n x_n + r_n$ avec $p_n \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant r_n < x_n$, donc r_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc $p_n x_n$ tend vers x.

Puisque G est un groupe additif, $p_n x_n \in G$. x est donc la limite d'une suite de points de G.

$$\boxed{\text{Tout point } x \text{ de } \mathbb{R} \text{ est adhérent à } G.}$$

7 $\beta \in \mathbb{R}$, $\frac{\beta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ et $H_\beta = \{k\beta + 2l\pi | k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}\}$.

a) H_β est non vide et stable par soustraction : $(k\beta + 2l\pi) - (k'\beta + 2l'\pi)$ peut s'écrire $(k-k')\beta + 2(l-l')\pi$. H_β est donc un sous-groupe du groupe additif de $\mathbb{R}$, évidemment non réduit à $\{0\}$. Désignons par a, comme dans 6., la borne inférieure de l'ensemble $H_\beta{}^+$ des éléments > 0 de H_β. Supposons $a > 0$. D'après 6.b), H_β est l'ensemble des multiples de a. Or β et 2π appartiennent à H_β($\beta = 1.\beta + 2.0.\pi$ et $2\pi = 0.\beta + 2.1.\pi$) donc il existe deux entiers relatifs p et q ($q \neq 0$) tels que $\beta = pa$ et $2\pi = qa$ donc $\frac{\beta}{\pi} = \frac{2p}{q}$ contradictoire avec $\frac{\beta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$. Donc $a = 0$. On peut appliquer 6.c) :

$$\boxed{\text{Tout point } x \text{ de } \mathbb{R} \text{ est adhérent à } H_\beta.}$$

b) On peut appliquer 6.c) donc 0 est adhérent à H_β^+. Il existe une suite tendant vers 0 de réels > 0 de la forme $u_n = k_n\beta + 2l_n\pi$ où $k_n \in \mathbb{Z}$ et $l_n \in \mathbb{Z}$.

Si l'ensemble des n tels que k_n soit un entier positif est infini, la suite des $k_n\beta + 2l_n\pi$ où $k_n \geqslant 0$ est une suite extraite de (u_n). Elle converge vers 0 comme (u_n). On a donc là une suite tendant vers 0 constituée d'éléments de S_β.

Si l'ensemble des n tels que k_n soit un entier positif est fini, k_n est un entier négatif à partir d'un certain rang n_0. La suite des $k_n\beta + 2l_n\pi$ où $n \geqslant n_0$ est une suite extraite de (u_n). Elle converge vers 0 comme (u_n). On a donc là une suite tendant vers 0 constituée d'éléments de S'_β. Rassemblons :

$$\boxed{0 \text{ est un point adhérent à } S_\beta \text{ ou à } S'_\beta.}$$

c) On suppose que $u_n = -k_n\beta + 2l_n\pi$ converge vers 0, avec $k_n \in \mathbb{N}$ et $l_n \in \mathbb{Z}$.

Supposons que la suite (k_n) soit bornée. On peut donc en extraire une suite convergente $(k_{\varphi(n)})$.

Alors $l_{\varphi(n)} = \frac{u_{\varphi(n)} + k_{\varphi(n)}\beta}{2\pi}$, combinaison linéaire de suites convergentes, est convergente.

$k_{\varphi(n)}$ et $l_{\varphi(n)}$ sont des suites convergentes d'entiers : elles sont donc, à partir d'un certain rang, constantes et égales à leur limite. La suite $u_{\varphi(n)} = k_{\varphi(n)}\beta + 2l_{\varphi(n)}\pi$ est donc, à partir de ce rang, constante et égale à sa limite 0, ce qui est contradictoire avec le fait que $0 \notin S'_\beta$.

$$\boxed{\text{La suite } (k_n) \text{ n'est pas bornée.}}$$

Puisque $u_n = -k_n\beta + 2l_n\pi$ converge vers 0 par valeurs positives, il existe un rang n_0 au-delà duquel on a $0 < u_n < u_0$. Parmi ces indices, il en existe pour lesquels $k_n \geqslant k_0$ car la suite (k_n) n'est pas bornée. Posons $\varphi(0) = 0$ et soit $\varphi(1)$ le premier indice $> \varphi(0)$ pour lequel $0 < u_{\varphi(1)} < u_{\varphi(0)}$ et $k_{\varphi(1)} \geqslant k_{\varphi(0)}$.

En réitérant, on extrait ainsi de (u_n) une suite $(u_{\varphi(n)})$ strictement décroissante, de la forme $u_{\varphi(n)} = -k_{\varphi(n)}\beta + 2l_{\varphi(n)}\pi$ avec $k_{\varphi(n)}$ croissante. Posons alors $v_n = u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n+1)}$; c'est une suite à termes > 0, de la forme $r_n\beta + 2s_n\pi$, avec $r_n = k_{\varphi(n+1)} - k_{\varphi(n)} \in \mathbb{N}$ et $s_n = l_{\varphi(n)} - l_{\varphi(n+1)} \in \mathbb{Z}$.

Cette suite (v_n) est donc une suite sur S_β. Comme $u_{\varphi(n)}$ et $u_{\varphi(n+1)}$, elle converge vers 0.

$$\boxed{\text{Il existe une suite de } S_\beta \text{ qui converge vers 0.}}$$

d) D'après b), 0 est adhérent à S_β ou à S'_β et d'après c) , si 0 est adhérent à S'_β, il est aussi adhérent à S_β. Dans tous les cas 0 est adhérent à S_β. Soit maintenant un réel $x > 0$ quelconque et u_n une suite de S_β convergeant vers 0. On ne peut plus, comme dans 6.c), utiliser la division euclidienne mais on peut s'en inspirer : Intercalons x entre deux multiples de u_n : il existe un entier d_n (positif comme x et u_n) tel que puisque $a_n \in \mathbb{N}$, $a_n u_n$ est une suite sur S_β. ... encadrement, $a_n u_n$ converge vers x. Or,

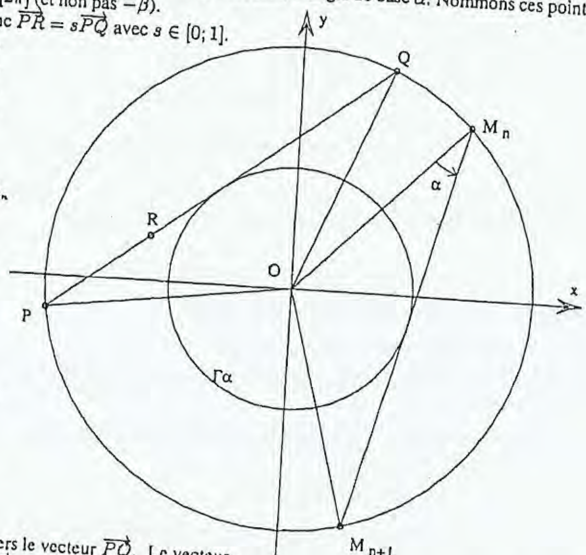
$\boxed{\text{Tout nombre réel positif est un point adhérent à } S_\beta.}$

8. Reprenons les notations de la première partie. Notamment $\beta = 2\alpha + \pi$. β n'est pas de la forme $\dfrac{2k\pi}{n}$ avec k et n entiers puisque le mouvement n'est pas périodique. $\dfrac{\beta}{2\pi}$ n'est donc pas rationnel et $\dfrac{\beta}{\pi}$ non plus. On peut donc appliquer 7.

a) Soit z un point de Γ, donc, comme z_0, de module 1. Soit $\varphi \in \mathbb{R}$ un des arguments de $\dfrac{z}{z_0}$, qu'on peut supposer positif. D'après 7, il existe une suite de la forme $k_n\beta + 2l_n\pi$ tendant vers φ, avec $k_n \in \mathbb{N}$, $l_n \in \mathbb{Z}$ et $k_n\beta + 2l_n\pi > 0$. Par continuité de l'exponentielle, $z_0e^{i(k_n\beta+2l_n\pi)}$ converge vers $z_0e^{i\varphi} = z$. Mais $z_0e^{i(k_n\beta+2l_n\pi)} = z_0e^{ik_n\beta} = z_{k_n}$.

$\boxed{\text{Pour tout } z \in \Gamma, \text{ il existe une suite } k_n \text{ sur } \mathbb{N} \text{ telle que } z_{k_n} \text{ converge vers } z.}$

b) Dans la première partie, on a vu que tous les triangles OM_nM_{n+1} sont isocèles, d'angle de base α. Ils ont donc tous pour hauteur $|\sin\alpha|$. Ils sont donc tous tangents au cercle $\Gamma\alpha$ de centre O et rayon $|\sin\alpha|$ qui délimite, avec le cercle Γ, la couronne C_α et les segments M_nM_{n+1} sont tous contenus dans cette couronne. Soit R un point de cette couronne, d'affixe z. Menons par ce point la tangente à $\Gamma\alpha$. Elle coupe Γ en deux points P et Q formant avec O un triangle isocèle, d'angle de base α. Nommons ces points de sorte que $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) = \beta[2\pi]$ (et non pas $-\beta$). R est sur le segment PQ donc $\overrightarrow{PR} = s\overrightarrow{PQ}$ avec $s \in [0;1]$.



Soit Z l'affixe de P. L'affixe de Q est donc $e^{i\beta}Z$, d'après la première partie. Utilisons la suite k_n mise en évidence dans a) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_{k_n} = Z$

D'après la première partie, M_{k_n} est atteint au bout du temps $2k_n\cos\alpha$. A l'instant $2k_n\cos\alpha + 2s\cos\alpha$ la boule est au point R_n du segment $M_{k_n}M_{k_n+1}$ défini par $\overrightarrow{M_{k_n}R_n} = s\overrightarrow{M_{k_n}M_{k_n+1}}$. Posons donc $t_n = 2k_n\cos\alpha + 2s\cos\alpha$. $z(t_n)$ est donc l'affixe du point R_n. Quand $n \to +\infty$, z_{k_n} tend vers Z donc $e^{i\beta}z_{k_n}$ tend vers $e^{i\beta}Z$, autrement dit M_{k_n} tend vers P et $M_{k_{n+1}}$ tend vers Q. Le vecteur $\overrightarrow{M_{k_n}M_{k_n+1}}$ tend donc vers le vecteur $\overrightarrow{PQ}$. Le vecteur $s\overrightarrow{M_{k_n}M_{k_n+1}}$ tend donc vers $s\overrightarrow{PQ}$. Le point R_n, défini par $\overrightarrow{OR_n} = \overrightarrow{OM_{k_n}} + s\overrightarrow{M_{k_n}M_{k_n+1}}$, tend donc vers le point R, qui est défini par $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{PQ}$. En terme d'affixes :

$\boxed{\text{En prenant } t_n = 2k_n\cos\alpha + 2s\cos\alpha, \text{ on a : } \lim\limits_{n\to+\infty} z(t_n) = z.}$

c) Tout point de la couronne est donc limite d'une suite de points de la trajectoire, donc est adhérent à la trajectoire. Si maintenant on prend un point z hors de la couronne, on a $|z| > 1$ ou $|z| < |\sin\alpha|$. En prenant $r > 0$ suffisamment petit, le disque de centre z et de rayon r ne contient aucun point de la couronne, donc a fortiori aucun point de la trajectoire. z ne peut donc être limite de points de la trajectoire. Donc :

$\boxed{\text{Les points du billard adhérents à la trajectoire de } M_0 \text{ sont donc les points de la couronne } C_\alpha.}$

***

Semaine 7 : Normes et algèbre linéaire

Nous continuons, cette semaine, l'étude des espaces vectoriels normés en nous attachant au cas où ces espaces sont des espaces de matrices ou d'applications linéaires, ce qui fait apparaître la notion de norme subordonnée, importante pour étudier les suites et séries matricielles.

• Sujet 20 : Concours Mines-Ponts 1993 Mathématiques 1 Options M et P'

Dans la première partie, on étudie un endomorphisme φ d'un espace vectoriel dont les puissances successives sont bornées, ce qui fait manipuler abondamment des normes d'applications linéaires.

Dans la deuxième partie, on utilise les résultats obtenus pour étudier les applications affines d'un plan qui transforment un triangle T, fixé une fois pour toutes, en un triangle contenu dans T. Cela permet de réviser les propriétés élémentaires des applications affines. On passe souvent d'un point de l'espace dans lequel est plongé le triangle au triplet de ses coordonnées, qui est un élément de $\mathbb{R}^3$. Il faut adapter la rédaction pour ne pas avoir à répéter dix fois la même phrase.

Ce problème est plutôt court, d'une difficulté moyenne.

• Sujet 21 : Concours Mines-Ponts 2000 Mathématiques 1 Filières MP et PSI

Le sujet proposé dans la filière PSI était en fait extrait celui proposé en MP : on avait, de ce dernier, supprimé la question sur l'exponentielle de matrice et aussi toute la troisième partie.

Ce problème vous entraînera à manipuler les matrices « formellement » c'est-à-dire en détaillant le moins possible le contenu de ces matrices, de façon à alléger les calculs. Il y a d'ailleurs, dans la version MP, un peu trop de ces calculs « formels » : cela finit par fatiguer.

On voit apparaître aussi la notion, somme toute délicate, d'espace vectoriel complexe considéré comme espace vectoriel réel. Attention aux notions de « base » et de « dimension » !

On utilise souvent une norme, sur un espace vectoriel de matrices, qui est associée à un produit scalaire, notion que nous n'avons pas encore étudiée cette année mais les allusions aux espaces euclidiens sont très légères et les connaissances de Sup suffisent ici (sauf pour une question sur l'adjoint, où nous avons donné des indications).

• Sujet 22 : École Polytechnique et E.S.P.C.I. 2000 Mathématiques 2 Filière PC

Encore un problème où l'on obtient des résultats d'analyse par des méthodes matricielles. Il s'agit ici d'approcher, par un découpage de l'intervalle, une certaine solution d'une équation différentielle.

Dans la première moitié du problème, on établit des propriétés de matrices d'une certaine forme et c'est là qu'on a recours à une norme.

L'équation différentielle en elle-même arrive assez loin dans le problème et, pour son étude, les connaissances acquises en Sup, avec une indication supplémentaire, sont suffisantes. Malgré cela, la fin du problème est difficile.

MINES - PONTS 1993	Options M et P'
Mathématiques 1	Durée : 4 heures

La première partie de ce problème est consacrée à l'étude d'endomorphismes φ d'un espace vectoriel E de dimension finie dont les puissances φ^n sont bornées.

La seconde partie est une illustration géométrique de l'étude faite dans la première : on y étudie un exemple de transformation géométrique d'un espace affine E de dimension 3 dans lui-même.

Les résultats de la première partie sont utilisés dans la recherche des points fixes de cette transformation.

Première partie

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ (égal à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$) de dimension finie k ; on le munit d'une norme quelconque notée $\| \ \|$.

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est convergente s'il existe un élément x de E tel que le réel $\|x_n - x\|$ tende vers 0 quand n tend vers l'infini. De même, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est bornée si et seulement si la suite des réels $\|x_n\|$ est bornée. Toutes les normes dans E dont équivalentes ; il est alors clair que ces définitions sont indépendantes de la norme choisie dans E.

Ces définitions s'appliquent dans l'espace $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E. Une norme $\| \ \|$ étant choisie dans E, on peut en particulier lui associer la norme dans $\mathcal{L}(E)$ définie par la relation

$$\|\varphi\| = \sup\{\|\varphi(x)\| \,|x \in E, \|x\| = 1\}.$$

I.1 Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}(E)$. Démontrer que les trois énoncés suivants sont équivalents :

a) La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathcal{L}(E)$.

b) Pour tout vecteur x, élément de E, la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans E.

c) Étant donnée une base $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ de E, les k suites $(\varphi_n(e_i))_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes dans E.

I.2 De manière analogue, trouver deux énoncés équivalents à l'énoncé suivant : la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{L}(E)$; établir l'équivalence de ces énoncés.

I.3 Soit φ un endomorphisme de E. Soit $(\varphi^n), n \in \mathbb{N}^*$, l'endomorphisme obtenu en composant n fois φ avec lui-même. Montrer que, si la suite $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, toutes les valeurs propres de φ sont de module inférieur ou égal à 1.

Dans les deux questions qui suivent (I.4 et I.5), φ est un endomorphisme de E tel que la suite $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

I.4 a) Soit λ une valeur propre de φ de module 1. Soit x un élément du noyau de l'endomorphisme $(\varphi - \lambda I_E)^2$, noté $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda I_E)^2$; I_E est l'endomorphisme identité de E.

Calculer le vecteur $\varphi^n(x)$ en fonction du vecteur x et du vecteur y défini par $y = \varphi(x) - \lambda x$; en déduire que x est un élément du noyau de l'endomorphisme $\varphi - \lambda I_E$.

Démontrer que E est la somme directe du noyau et de l'espace image de l'endomorphisme $\varphi - \lambda I_E$.

I.4 b) Application dans le cas où E est un $\mathbb{C}$−espace vectoriel.

On suppose que φ admet au moins une valeur propre de module égal à 1.

Démontrer que la matrice M associée à φ dans une base appropriée s'exprime à l'aide d'une matrice diagonale D d'ordre p et, généralement, d'une matrice carrée A d'ordre $k - p$; les éléments λ_i, $1 \leqslant i \leqslant p$ de la matrice D sont des nombres complexes de module égal à 1 ; les valeurs propres ont toutes un module strictement inférieur à 1.

La relation liant la matrice M aux matrices D et A est :

$$M = \begin{pmatrix} D & O \\ O & A \end{pmatrix}.$$

D est la matrice suivante : $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

I.5 Étude d'une suite d'endomorphismes déduits de l'endomorphisme φ.

Soit θ_n, $n \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme défini par la relation

$$(1) \qquad \theta_n = \frac{1}{n+1}\{I_E + \varphi + \varphi^2 + \dots + \varphi^n\}.$$

I.5 a) On suppose que 1 n'est pas valeur propre de l'endomorphisme φ. Démontrer que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathcal{L}(E)$.

I.5 b) On suppose que 1 est valeur propre de l'endomorphisme φ. Démontrer que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathcal{L}(E)$ et que sa limite est un projecteur ; préciser le sous-espace image de ce projecteur.

Deuxième partie

Illustration géométrique des propriétés précédentes

Dans cette partie, E est un espace affine attaché à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$; considérons dans cet espace affine E quatre points O, A, B, C non coplanaires ; posons :

$$i = \overrightarrow{OA};\ j = \overrightarrow{OB};\ k = \overrightarrow{OC}.$$

Le couple $(O; i, j, k)$ est un repère de E. Désignons par :

- H le plan affine passant par les trois points A, B et C ;
- T l'ensemble des points de H qui sont des barycentres des trois points A, B et C avec des coefficients positifs ou nuls ;
- U_1, U_2, U_3 trois points de E ; leurs coordonnées dans le repère $(O; i, j, k)$ seront désignées par $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3)$;
- Φ l'application affine définie par les relations :

$$\Phi(O) = O;\ \Phi(A) = U_1;\ \Phi(B) = U_2;\ \Phi(C) = U_3.$$

Convention de notation : Soit θ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, soit A la matrice associée à θ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$; désignons par Θ l'application affine qui fait correspondre au point de E de coordonnées (x, y, z) le point de de coordonnées (X, Y, Z) définies par la relation

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

II.1 Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les trois points U_1, U_2, U_3 pour que $\Phi(H)$ soit inclus dans H.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les trois points U_1, U_2, U_3 pour que $\Phi(T)$ soit inclus dans T.

Dans toutes les questions qui suivent, on suppose que l'inclusion $\Phi(T) \subset T$ a lieu et on se propose de prouver que l'application Φ possède au moins un point fixe dans T.

$$\Phi(H_0) \subset H_0.$$

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à Φ suivant la convention ci-dessus ; démontrer que l'espace image de l'application $\varphi - I_{\mathbb{R}^3}$ est de dimension inférieure ou égale à 2.

En déduire que l'endomorphisme φ a une valeur propre égale à 1.

II.3 On désigne par Φ^n l'application composée de Φ avec elle-même n fois ; démontrer que les trois suites de termes généraux $\Phi^n(A)$, $\Phi^n(B)$ et $\Phi^n(C)$ sont des suites bornées dans E.

En déduire que la suite des endomorphismes $\varphi^n, n \in \mathbb{N}$ est bornée dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.

II.4 Soit Θ_n l'élément de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ construit à partir de l'endomorphisme φ défini ci-dessus selon la relation (1) (question I.5).

II.4 a) Démontrer pour tout entier naturel n l'inclusion $\Theta_n(T) \subset T$.

II.4 b) Soit W un point quelconque de T ; démontrer que la suite de terme général $\Theta_n(W)$, $n \in \mathbb{N}$, est convergente. Soit L_W la limite de cette suite ; que dire de l'image par Φ de ce point L_W ? Soit $\mathscr{L}$ l'ensemble des limites L_W des suites $\Theta_n(W)$ pour tout point W de T. Quelle relation simple existe-t-il entre l'ensemble $\mathscr{I}$ des points de T invariants par Φ et l'ensemble $\mathscr{L}$?

Étude de l'application Φ suivant la dimenson de l'espace image de l'endomorphisme $\varphi - I_{\mathbb{R}^3}$.

II.5) L'espace image de l'endomorphisme $\varphi - I_{\mathbb{R}^3}$ est supposé égal au vecteur nul : $\operatorname{Im}(\varphi - I_{\mathbb{R}^3}) = \{0\}$.
Quels sont les points fixes de l'application Φ contenus dans T ?

II.6 Dans cette question l'espace image de l'endomorphisme $\varphi - I_{\mathbb{R}^3}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 et le point U_1 est distinct du point A.

II.6 a) Déterminer les positions possibles des deux points U_2 et U_3 ; on discutera suivant la position du point U_1 dans T en envisageant les trois cas :

- U_1 n'appartient ni au segment $[AB]$ ni au segment $[AC]$;
- U_1 appartient au segment $[AB]$;
- U_1 appartient au segment $[AC]$.

II.6.b) L'objet de cet alinéa est l'étude des deux premiers cas définis ci-dessus.

1er cas

Déterminer l'ensemble $\mathscr{I}$ des points de T qui sont invariants par l'application affine Φ.

Démontrer que la suite des points $A, \Phi(A), \ldots, \Phi^n(A), \ldots$ est une suite convergente en calculant les coordonnées de $\Phi^n(A)$. Soit Λ le point limite de cette suite.

Placer les points A, U_1, $\Phi^n(A)$ et Λ dans l'ensemble T. Démontrer que pour tout point W de T la suite $(\Phi^n(W))_{n\in\mathbb{N}}$, est convergente ; soit $L(W)$ sa limite.

Soit W un point de T qui n'est pas aligné avec les points A et U_1 ; donner une construction de l'image $\Phi(W)$ en supposant connu le point U_1 dans T ; donner une construction de l'image $\Phi^n(W)$ du point W en supposant connu le point $\Phi^n(A)$ dans T.

En déduire une construction du point $L(W)$. Déduire des résultats précédents la limite de la suite $(\Theta_n(W))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n croît indéfiniment

2ème cas

Déterminer l'ensemble $\mathscr{I}$ des points de T qui sont invariants par l'application affine Φ. Préciser en particulier l'intersection de de cet ensemble avec le segment $[AB]$. En supposant connus les points U_1 et U_2 et l'ensemble $\mathscr{I}$, construire l'image d'un point W de T par Φ.

II.7 L'espace image de l'endomorphisme $\varphi - I_{\mathbb{R}^3}$ est supposé être un sous-espace vectoriel de dimension 2. Quels sont le ou les points fixes de l'application Φ contenus dans T ? En déduire pour tout point W de T la limite de la suite $(\Theta_n(W))_{n\in\mathbb{N}}$.

***

MINES - PONTS 1993	Options M et P'
Mathématiques 1	**CORRIGÉ**

Première partie

Rappelons que la norme proposée $\|\varphi\|$ est la norme usuelle sur $\mathscr{L}(E)$, associée (ou : subordonnée) à celle de E, E étant de dimension finie. Si $x \neq 0$, on a $\left\|\dfrac{x}{\|x\|}\right\| = 1$ donc $\left\|\varphi\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant \|\varphi\|$ donc

$$\boxed{\|\varphi(x)\| \leqslant \|\varphi\|.\|x\|.}$$

Ce résultat est encore valable pour $x = 0$.

I.1

a $\Rightarrow$ b : Supposons que $\varphi_n \to \varphi$ quand $n \to +\infty$ autrement dit $\|\varphi - \varphi_n\|$tend vers 0.
Soit x fixé dans E. Alors $\|\varphi(x) - \varphi_n(x)\| = \|(\varphi - \varphi_n)(x)\| \leqslant \|\varphi - \varphi_n\|\,\|x\|$, qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

b $\Rightarrow$ c : Il suffit d' appliquer b) aux vecteurs de base.

c $\Rightarrow$ a : On suppose que pour tout $i \in [1,k]$, $\varphi_n(e_i)$ tend vers u_i quand n tend vers $+\infty$.

Alors, pour $x = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i \in E$, et en prenant comme norme : $\|x\| = \sup_{1\leqslant i\leqslant k} |x_i|$,

on a $\left\|\varphi_n(x) - \sum_{i=1}^{k} x_i u_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |x_i|\,\|\varphi_n(e_i) - u_i\| \leqslant \|x\| \sum_{i=1}^{k} \|\varphi_n(e_i) - u_i\|$.

On définit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ sur la base (e_i) pour $i \in [1,k]$, par $\varphi(e_i) = u_i$, de sorte que pour tout x de norme 1, l'inégalité précédente donne : $\|(\varphi - \varphi_n)(x)\| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \|\varphi_n(e_i) - u_i\|$, et en passant à la borne supérieure :

$$\|\varphi - \varphi_n\| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \|\varphi_n(e_i) - u_i\|,$$

qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui assure la convergence de φ_n vers φ.

$$\boxed{\text{Les trois énoncés sont équivalents.}}$$

I.2 Considérons les trois énoncés :

a) $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathscr{L}(E)$.

b) Pour tout $x \in E$, $(\varphi_n(x))$ est bornée dans E.

c) Étant donnée une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$, les k suites $\left(\varphi_n(e_i)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées pour $i = 1, 2, \ldots, k$.

Montrons l'équivalence de ces trois énoncés.

a $\Rightarrow$ b : $\forall x \in E$, $\|\varphi_n(x)\| \leqslant \|\varphi_n\|.\|x\|$; pour x fixé, la suite de terme général $\varphi_n(x)$ est bornée.

b $\Rightarrow$ c : On applique a) aux vecteurs de base.

c $\Rightarrow$ a : On prend comme norme sur E, à nouveau, la norme « sup » . Pour tout $x \in E$, on a :

$\|\varphi_n(x)\| \leqslant \|x\| \sum_{i=1}^{k} \|\varphi_n(e_i)\|$, ce qui prouve, en prenant $\|x\| = 1$ puis en passant à la borne supérieure :

$\|\varphi_n\| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \|\varphi_n(e_i)\|$: La suite de terme général $\|\varphi_n\|$ est bornée.

$$\boxed{\text{Les trois énoncés sont équivalents.}}$$

I.3 Soit λ une valeur propre de φ et $x \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé, donc $\varphi(x) = \lambda x$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^n(x) = \lambda^n x$. Si M est un majorant de la suite de terme général $\|\varphi^n\|$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |\lambda|^n\,\|x\| = \|\varphi^n(x)\| \leqslant \|\varphi^n\|\,\|x\| \leqslant M\,\|x\|,$$

ce qui prouve que la suite $|\lambda|^n$ est majorée, ce qui ne peut se faire que si

$$\boxed{|\lambda| \leqslant 1.}$$

I.4

I.4 a) Soit $x \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{I_E})^2$. On pose $y = \varphi(x) - \lambda x$, donc $\varphi(x) = y + \lambda x$.
On a : $(\varphi^2 - 2\lambda\varphi + \lambda^2 I_E)(x) = 0$, donc pour $n = 2$, $\varphi^2(x) = 2\lambda\,\varphi(x) - \lambda^2 x = 2\lambda\, y + \lambda^2 x$.
Si $\varphi^{n-1}(x) = (n-1)\,\lambda^{n-2}\,y + \lambda^{n-1}\,x$ et $\varphi^n(x) = n\,\lambda^{n-1}\,y + \lambda^n\,x$ on a
$\varphi^{n+1}(x) = 2\lambda\varphi^n(x) - \lambda^2\varphi^{n-1}(x) = (n+1)\,\lambda^n\,y + \lambda^{n+1}\,x$, ce qui prouve, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\boxed{\varphi^n(x) = n\,\lambda^{n-1}\,y + \lambda^n\,x}$$

On en déduit que
$n\,\|y\| = n\,\|\lambda^{n-1}\,y\| = \|n\lambda^{n-1}\,y\| = \|\varphi^n(x) - \lambda^n\,x\| \leqslant \|\varphi^n(x)\| + \|\lambda^n\,x\| = \|\varphi^n(x)\| + \|x\|$, soit, si $\|\varphi^n\|$ est majoré par M : $\forall n \geqslant 2$, $\|y\| \leqslant \frac{1}{n}\,(M+1)\|x\|$ nécessitant $y = 0$ donc $\varphi(x) = \lambda x$ donc :

$$\boxed{x \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{I_E}).}$$

Pour tout endomorphisme u de E, on a $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u^2$. Ici on a en plus l'inclusion inverse $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\mathrm{I_E})^2 \subset \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\mathrm{I_E})$, donc l'égalité $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\mathrm{I_E})^2 = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\mathrm{I_E})$.
Si $z \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\mathrm{I_E}) \cap \mathrm{Im}(\varphi - \lambda\mathrm{I_E})$, alors $(\varphi - \lambda\mathrm{I}_E)(z) = 0$, et il existe $x \in E$ tel que $z = (\varphi - \lambda\mathrm{I}_E)(x)$, donc : $x \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\mathrm{I_E})^2$. Comme $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\mathrm{I_E})^2 = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\mathrm{I_E})$, on a $x \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\mathrm{I_E})$ donc $z = 0$. On a donc $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\mathrm{I_E}) \cap \mathrm{Im}(\varphi - \lambda\mathrm{I_E}) = \{0\}$.
Comme de plus $\dim \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\mathrm{I_E}) + \dim \mathrm{Im}(\varphi - \lambda\mathrm{I_E}) = \dim \mathrm{E}$ d'après le théorème du rang, on a donc :

$$\boxed{E = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\mathrm{I_E}) \oplus \mathrm{Im}(\varphi - \lambda\mathrm{I_E}).}$$

I.4 b) Soit λ une valeur propre de module 1 de φ. On peut donc appliquer ce qui précède.
La restriction de $\varphi - \lambda I_E$ à $\mathrm{Im}(\varphi - \lambda I_E)$, qui est un supplémentaire du noyau est, on le sait, un isomorphisme entre ce supplémentaire du noyau et l'image de $\varphi - \lambda I_E$. Ici, cette restriction est donc un automorphisme de $\mathrm{Im}(\varphi - \lambda I_E)$.
$\mathrm{Im}(\varphi - \lambda I_E)$ est donc stable par $\varphi - \lambda I_E$, de même, bien sûr que $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\mathrm{I_E})$. Ces deux sous-espaces sont donc aussi stables par φ. (Si x appartient au sous-espace G, $\varphi(x) - \lambda x$ appartient à G donc $\varphi(x)$ appartient à G)
Les valeurs propres de φ sont les valeurs propres de ses deux restrictions aux deux sous-espaces stables supplémentaires $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\mathrm{I_E})$ et $\mathrm{Im}(\varphi - \lambda I_E)$. Le premier étant précisément le sous-espace propre associé à λ, la première restriction n'admet que λ comme valeur propre et la deuxième n'admet pas λ comme valeur propre.
La restriction de φ à $\mathrm{Im}(\varphi - \lambda I_E)$ a donc les mêmes valeurs propres que φ, à l'exception de λ.
Formons alors une base de E en concaténant une base de $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\mathrm{I_E})$ et une base de $\mathrm{Im}(\varphi - \lambda I_E)$. Sur cette base, la matrice de φ a la forme $\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix} & O \\ O & A_1 \end{bmatrix}$, où A_1 est matrice de la restriction de φ à $\mathrm{Im}(\varphi - \lambda I_E)$. Les puissances successives de cette restriction sont, comme celles de φ, bornées. On peut donc lui appliquer ce qui précède.
Si elle n'a que des valeurs propres de module < 1, alors A_1 n'a que des valeurs propres de module < 1 ; on a atteint notre objectif.
Si elle admet une valeur propre λ' de module 1, on décompose $\mathrm{Im}(\varphi - \lambda I_E)$ en somme directe du sous-espace (sous-espace du sous-espace dans lequel on s'est placé) propre associé à λ' et d'un autre sous-espace stable par φ et on recommence. Quand on a épuisé la liste $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ des valeurs propres de module 1, on a une décomposition de E sous la forme $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_m} \oplus F$ où les E_{λ_i} sont les sous-espaces propres qui sont apparus successivement et où le sous-espace F est stable par φ, la restriction de φ à F n'admettant pas 1 comme valeur propre. En concaténant des bases de ces $m+1$ sous-espaces on obtient une base de E sur laquelle

$$\boxed{\text{la matrice de } \varphi \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} D & O \\ O & A \end{pmatrix},\ D \text{ et } A \text{ ayant les formes requises.}}$$

Il se peut qu'une même valeur propre soit répétée plusieurs fois sur la diagonale. On n'a donc pas forcément $m = p$.

I.5

I.5 a) Après développement, on obtient $(\mathrm{I}_E - \varphi) \circ \theta_n = \frac{1}{n+1}\,(\mathrm{I}_E - \varphi^{n+1})$.

Puisque 1 n'est pas valeur propre de φ, $\mathrm{I}_E - \varphi$ est inversible et $\theta_n = \frac{1}{n+1}(\mathrm{I}_E - \varphi)^{-1} \circ (\mathrm{I}_E - \varphi^{n+1})$.
On utilise toujours notre norme subordonnée qui, on le sait, vérifie $\|\varphi \circ \psi\| \leqslant \|\varphi\|.\|\psi\|$.
On a donc : $\|\theta_n\| \leqslant \frac{1}{n+1}\,\|(\mathrm{I}_E - \varphi)^{-1}\|\,(\|\mathrm{I}_E\| + \|\varphi^{n+1}\|) \leqslant \frac{1}{n+1}\,\|(\mathrm{I}_E - \varphi)^{-1}\|\,(\|\mathrm{I}_E\| + M)$ où M est un majorant de la suite $\|\varphi^n\|$, qui est bornée. $\|\theta_n\|$ tend donc vers 0 quand n tend vers l'infini.

$$\boxed{\text{La suite } (\theta_n) \text{ est convergente (vers l'endomorphisme nul) dans } \mathscr{L}(E).}$$

I.5 b) D'après 4), $E = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{I}_E) \oplus \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{I}_E)$, et les deux sous-espaces sont stables par φ, donc par θ_n.
Pour $x \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{I}_E)$, on a $\varphi(x) = x$ donc $\theta_n(x) = \frac{1}{n+1}(x + \ldots + x) = x$: la restriction de θ_n à $\mathrm{Ker}\,(\varphi - \mathrm{I}_E)$ est, pour tout n, égale à l'identité.
La restriction de φ à $\mathrm{Im}\,(\varphi - \mathrm{I}_E)$, n'admet pas 1 comme valeur propre ; elle relève donc de a) et la restriction de θ_n à $\mathrm{Im}\,(\varphi - \mathrm{I}_E)$ tend donc vers l'endomorphisme nul.
Tout x de E s'écrit $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{I}_E)$ et $x_2 \in \mathrm{Im}\,(\varphi - \mathrm{I}_E)$ donc $\theta_n(x) = \theta_n(x_1) + \theta_n(x_2)$. Or on a vu dans 1.1 que la suite ψ_n d'endomorphismes de E converge vers l'endomorphisme l si et seulement si, pour tout x dans E, $\psi_n(x)$ converge vers $l(x)$.
On en déduit ici que $\theta_n(x_1)$ converge vers x_1 et $\theta_n(x_2)$ converge vers le vecteur nul. La somme des limites étant la limite de la somme, $\theta_n(x)$ converge donc vers $x_1 + 0 = x_1 = p(x)$ où p désigne la projection sur $\mathrm{Ker}\,(\varphi - I_E)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(\varphi - I_E)$. Comme c'est vrai pour tout x :

$$\boxed{(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers la projection sur } \mathrm{Ker}\,(\varphi - I_E) \text{ parallèlement à } \mathrm{Im}\,(\varphi - I_E).}$$

Deuxième partie

Il existe une application affine de E et une seule transformant quatre points donnés non coplanaires en quatre points donnés. L'application Φ est donc bien définie.
II.1 Remarque : T est l'enveloppe convexe du triplet (A, B, C), autrement dit le triangle fermé ABC.
Si l'on veut que $\Phi(H) \subset H$, il est déjà nécessaire que les images U_1, U_2, U_3 de A, B, C, points de H, soient dans H. Réciproquement, s'il en est ainsi, soit M un point de H ; puisque A, B, C sont non alignés dans le plan H, M peut être considéré comme barycentre de A, B, C affectés de coefficients convenables.
L'image du barycentre par une application affine étant le barycentre des images, $\Phi(M)$ est barycentre des U_i, donc, comme eux, dans H. Finalement,

$$\boxed{\Phi(H) \subset H \iff U_1, U_2 \text{ et } U_3 \in H.}$$

De même, pour que $\Phi(T) \subset T$, il est déjà nécessaire que les images U_1, U_2, U_3 de A, B, C, points de T, soient dans T. Réciproquement, si les U_i sont dans T, donc barycentres de A, B, C avec des coefficients positifs soit M un point de T, donc barycentre de A, B, C avec des coefficients positifs α, β, γ. Son image par Φ est barycentre des U_i avec les mêmes coefficients positifs α, β, γ, donc barycentre de A, B, C avec des coefficients positifs, donc dans T. Finalement,

$$\boxed{\Phi(T) \subset T \iff U_1, U_2 \text{ et } U_3 \in T.}$$

II.2 On sait qu'une application affine transforme deux plans parallèles en deux plans parallèles ou, éventuellement, si elle n'est pas bijective, en deux droites parallèles ou en deux points.
Ici H_0 est parallèle à H donc $\Phi(H_0)$ (plan, droite ou point) est parallèle à $\Phi(H)$.
En plus $\Phi(H) \subset H$. Cela nécessite que $\Phi(H_0)$ soit contenu dans un plan H' parallèle à H. Comme O est invariant par Φ, O doit être dans ce plan H', qui est donc H_0.

$$\boxed{\Phi(H_0) \subset H_0.}$$

de E de coordonnées (x, y, z) dans le repère défini au départ, les coordonnées (X, Y, Z) de $\Phi(M)$ vérifient ... que si M est le point

$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Cela permet de préciser la définition de l'endomorphisme φ qui apparaît, de façon peu claire, dans cette question : φ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice sur la base canonique est A.
Le plan affine H passe par A, B, C ; il a donc pour équation $x + y + z = 1$. et $\Phi(H) \subset H$. Si les coordonnées x, y, z du vecteur v de $\mathbb{R}^3$ vérifient $x + y + z = 1$, les coordonnées de $\varphi(v)$ vérifient la même relation. En particulier, φ transforme chaque vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, en un vecteur dont la somme des composantes est 1. L'application $\varphi - I_{\mathbb{R}^3}$ transforme donc les vecteurs de la base canonique en des vecteurs de l'hyperplan $x + y + z = 0$, qui contient donc l'image de cette application $\varphi - I_{\mathbb{R}^3}$.

L'espace image de l'application $\varphi - I_{\mathbb{R}^3}$ est de dimension inférieure ou égale à 2.

Cette application n'est donc pas bijective. Autrement dit :

φ admet 1 pour valeur propre.

II.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Phi^n(A), \Phi^n(B)$ et $\Phi^n(C)$ sont dans T, qui est une partie bornée de E (c'est un triangle) donc

les trois suites de termes généraux $\Phi^n(A), \Phi^n(B)$ et $\Phi^n(C)$ sont bornées.

Les coordonnées de $\Phi^n(A)$ dans le repère sont celles de $\varphi^n(e_1)$ dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.
Cette suite est donc bornée. De même pour $\varphi^n(e_2)$ et $\varphi^n(e_3)$.
Il en résulte, d'après I.2) que

la suite $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

II.4

II.4 a) La définition de Θ_n à partir de θ_n en utilisant la *convention de notation* est plus claire que ne l'était celle de φ à partir de celle de Φ.
Pour tout entier n, $\Phi^n(A), \Phi^n(B)$ et $\Phi^n(C)$ sont dans T donc, puisque T est convexe, les trois points $\Theta_n(A), \Theta_n(B), \Theta_n(C)$ sont aussi dans T car chacun de ces trois points est barycentre de $n + 1$ points de T avec des coefficients tous égaux à $\dfrac{1}{n+1}$. Il en résulte, d'après II-1, en remplaçant U_1, U_2, U_3 par $\Theta_n(A), \Theta_n(B), \Theta_n(C)$, que :

$\Theta_n(T)$ est inclus dans T pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.4 b) On peut appliquer I-5-b à φ puisque la suite $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Cela va nous donner des propriétés de suites de points de E.
Pour alléger, **nous dirons dorénavant** qu'un point M de l'espace affine E et un vecteur v de $\mathbb{R}^3$ se **correspondent** si les coordonnées de M sur le repère choisi dans E sont égales aux composantes de v sur la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
La suite (θ_n) converge dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ vers la projection p sur $\mathrm{Ker}(\varphi - I_{\mathbb{R}^3})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(\varphi - I_{\mathbb{R}^3})$.
Si W est un point de T et w son correspondant dans $\mathbb{R}^3$ le vecteur $\theta_n(w)$ tend donc d'après I.1. vers $p(w)$.
Soit L_W le point correspondant à $p(w)$. Comme $w \in \mathrm{Ker}(\varphi - I_{\mathbb{R}^3})$, on a $\varphi(w) = w$. Donc, en passant aux points,

La suite $\Theta_n(W)$ est convergente et sa limite L_W est invariante par Φ.

De plus cette limite est un élément de T puisque T est fermé. Pour éviter d'utiliser la notion de fermé dans un espace affine, on peut dire :
Les trois coordonnées du point $\Theta_n(W)$ sont positives et de somme 1 puisque $\Theta_n(W) \in T$. Leurs trois limites, qui sont les coordonnées du point limite L_W ont aussi ces propriétés. Donc $L_W \in T$.
Si $\mathscr{L}$ est l'ensemble des L_W, on a donc déja $\mathscr{L} \subset \mathscr{I}$, ensemble des points de T invariants par Φ.
Réciproquement, si l'on prend pour W un point de $\mathscr{I}$, il va nous donner une suite constante, donc $L_W = W$, donc W appartient à $\mathscr{L}$. Finalement $\boxed{\mathscr{L} = \mathscr{I}.}$

II.5) Ici $\varphi = I_{\mathbb{R}^3}$. Quel que soit le point W de T dont on part, la suite est constante donc converge vers W, donc :

$$\boxed{\mathscr{I} = T.}$$

II.6

II.6 a) Nous désignons toujours par (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Les points U_1, U_2, U_3 correspondent aux vecteurs $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$.
Les composantes sur $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{k} = \overrightarrow{OC}$ de $\overrightarrow{AU_1}, \overrightarrow{BU_2}, \overrightarrow{CU_3}$ sont donc celles, sur (e_1, e_2, e_3), de $\varphi(e_1) - e_1$, $\varphi(e_2) - e_2$ et $\varphi(e_3) - e_3$. Ces trois vecteurs sont dans l'image de $\varphi - I_{\mathbb{R}^3}$, qui est, dans ce II.6, une droite vectorielle.
Les vecteurs $\overrightarrow{AU_1}, \overrightarrow{BU_2}, \overrightarrow{CU_3}$ sont donc dans une même droite vectorielle. Comme $A \neq U_1$, le vecteur $\overrightarrow{AU_1}$ n'est pas nul. Les deux autres lui sont donc colinéaires. U_2 doit être sur la droite parallèle à AU_1 passant par B. U_3 doit être sur la droite parallèle à AU_1 passant par C. Comme U_1, U_2, U_3 doivent être à l'intérieur du triangle ABC ou sur son contour, cela limite beaucoup les possibilités pour U_2 et U_3. Pour abréger, nous nous contenterons de lire les conclusions sur une figure.
1er cas : si $U_1 \notin [AB] \cup [AC]$, alors $U_2 = B$ et $U_3 = C$,
2ème cas : si $U_1 \in [AB]$, alors U_2 peut être n'importe où sur $[AB]$ et $U_3 = C$,
3ème cas : si $U_1 \in [AC]$, de même $U_3 \in [AC]$ et $U_2 = B$.

II.6.b) Puisque l'image de $\varphi - I_{\mathbb{R}^3}$ est une droite vectorielle, le noyau de $\varphi - I_{\mathbb{R}^3}$ est de dimension 2. Ce noyau est l'ensemble des vecteurs invariants par φ ; c'est un plan vectoriel donc l'ensemble des points invariants par Φ est un plan affine passant par O, et son intersection avec H est une droite affine $\mathscr{D}$. $\mathscr{I}$ est donc l'intersection de cette droite et du triangle (fermé) T.
1er cas : Dans ce cas, B et C sont invariants, donc $\mathscr{D}$ est la droite (BC), donc

$$\boxed{\mathscr{I} = [BC].}$$

Le point U_1 est barycentre de A,B et C avec des coefficients positifs a, b, c de somme 1. Il correspond au vecteur $u_1 = ae_1 + be_2 + ce_3$. Comme U_1 n'est ni sur $[AB]$ ni sur $[AC]$, c et b sont non nuls. Comme $U_1 = \Phi(A)$, on a $\varphi(e_1) = ae_1 + be_2 + ce_3$.
B et C correspondent à e_2 et e_3. Comme ils sont invariants par Φ, on a $\varphi(e_2) = e_2$ et $\varphi(e_3) = e_3$.
On a donc
$\varphi^2(e_1) = a\varphi(e_1) + be_2 + ce_3 = a^2e_1 + b(1 + a)e_2 + c(1 + a)e_3$,
$\varphi^3(e_1) = a^2\varphi(e_1) + b(1 + a)e_2 + c(1 + a)e_3 = a^3\varphi(e_1) + b(1 + a + a^2)e_2 + c(1 + a + a^2)e_3$
et par récurrence :
$\varphi^n(e_1) = a^n\varphi(e_1) + b(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1})e_2 + c(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1})e_3$, qui tend, quand n tend vers $+\infty$, vers $\dfrac{b}{1-a}e_2 + \dfrac{c}{1-a}e_3$.

Pour les points correspondants cela donne :

$$\overrightarrow{O\Phi^n(A)} = a^n\overrightarrow{OA} + (1 + a + \cdots + a^{n-1})\, b\overrightarrow{OB} + (1 + a + \cdots + a^{n-1})\, c\overrightarrow{OC}$$

et le point $\Phi^n(A)$ tend vers le point Λ défini par : $\overrightarrow{O\Lambda} = \dfrac{b}{1-a}\overrightarrow{OB} + \dfrac{c}{1-a}\overrightarrow{OC}$
Le vecteur $\overrightarrow{AU_1}$ et tous ses itérés sont dans la droite vectorielle $\mathrm{Im}(\varphi - I_{\mathbb{R}^3})$ donc

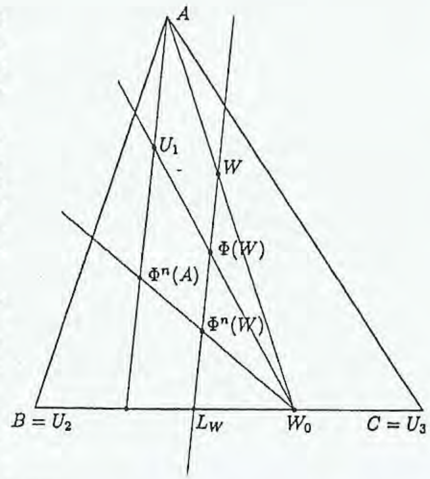
Les points $A, U_1, \ldots, \Phi^n(A), \Lambda$ sont alignés et Λ est dans $[BC]$,

puisqu'il est barycentre de B et C avec des coefficients positifs de somme $\dfrac{b+c}{1-a} = 1$.
(On peut aussi dire que la limite de $\varphi^n(e_1)$ est un vecteur invariant par φ donc le point correspondant est invariant par Φ, donc il est sur $[BC]$).
Plus généralement, si $W = xA + yB + zC$, avec $x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$ et $x + y + z = 1$, on a, puisque B et C sont invariants :

$\Phi^n(W)$ tend vers $L(W)$ défini par $\overrightarrow{OL_W} = x\overrightarrow{O\Lambda} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$.

On peut aussi écrire $\overrightarrow{OL_W} = \left(y + x\dfrac{b}{1-a}\right)\overrightarrow{OB} + \left(z + x\dfrac{c}{1-a}\right)\overrightarrow{OC}$.

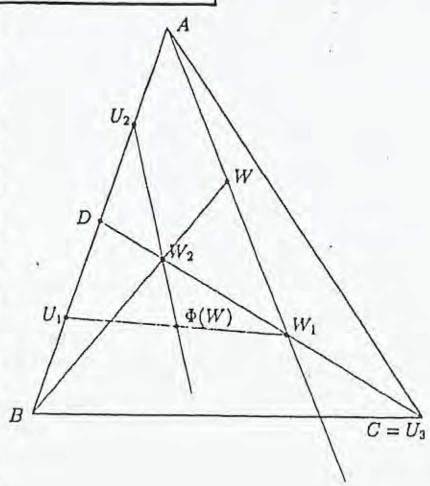
Construction géométrique : Le début de II.6.a) montre que le vecteur $\overrightarrow{W\Phi(W)}$ correspond à un vecteur de l'image de $\varphi - I_{\mathbb{R}^3}$, qui est une droite vectorielle. La droite $W\Phi(W)$ est donc parallèle à la droite AU_1.
Par ailleurs, si W_0 est l'intersection des droites (AW) et (BC), W_0 est fixe. La droite AW_0 est transformée par l'application affine Φ en une droite qui doit passer par $\Phi(A) = U_1$ et par $\Phi(W)$. On en déduit une construction géométrique de $\Phi(W)$ comme intersection de deux droites.
On construira de même $\Phi^n(W)$ si l'on connaît la position de $\Phi^n(A)$ sur la droite AU_1, car les points $\Phi^2(W), \dots, \Phi^n(W), \dots$ sont, de même que $\Phi(W)$, sur la parallèle à la droite AU_1 passant par W.
Leur limite L_W doit donc être aussi sur cette droite et, comme L_W est invariant par Φ, il est sur $[B, C]$, d'où sa construction comme intersection de deux droites.



Si le point W correspond au vecteur w, le point $\Theta_n(W)$ correspond au vecteur $\theta_n(w)$. D'après I.5 b), la suite de terme général $\theta_n(w)$ converge, donc la suite de points $\Theta_n(W)$ converge. La limite de $\theta_n(w)$ est un vecteur de $\mathrm{Ker}(\varphi - I_E)$, donc un vecteur invariant par φ. La limite de $\Theta_n(W)$ est donc un point invariant par Φ donc un point de $[BC]$. De plus, les points $\Theta_n(W)$, barycentres de points $\Phi_n(A)$ sont tous sur la droite qui porte les $\Phi_n(A)$, donc leur limite aussi. On voit que, nécessairement,

$$\boxed{\text{la limite de la suite } \Theta_n(W) \text{ est le point } L_W.}$$

2ème cas : Dans ce cas, le point C est invariant par Φ et on peut trouver sur $[A, B]$ un autre point D invariant :
Si L, U_1, U_2 sont barycentres de A et B avec les coefficients $(x, 1-x)$, $(a, 1-a)$ et $(b, 1-b)$, $\Phi(L)$ est barycentre de A et B avec les coefficients $(ax + b(1-x), x(1-a) + (1-x)(1-b))$ (barycentre de U_1 et U_2 avec les coefficients $(x, 1-x)$.) Pour que ce point soit confondu avec L, il faut et suffit que $x = ax + b(1-x)$ soit $x = \dfrac{b}{1-a+b}$, ce qui fournit bien un point car $a < 1$ et $b \geqslant 0$. L'ensemble $\mathscr{T}$ est maintenant le segment $[CD]$.
Construction géométrique : Si la droite (AW) rencontre la droite (CD) en W_1, le point W_1 est invariant par Φ. Le point $\Phi(W)$ doit donc se trouver sur la droite (W_1U_1). En remplaçant A par B on trouve une deuxième droite U_2W_2 portant $\Phi(W)$ d'où sa construction par intersection.



II.7 L'ensemble des v de $\mathbb{R}$ tel que $\varphi(w) = w$ est maintenant une droite.
L'ensemble des points qui leur correspondent dans l'espace affine est une droite passant par O. Elle perce T en un point au plus. Φ a donc au plus un point fixe. En fait il y en a un puisque, quel que soit $W \in T$, la suite $\Theta_n(W)$ converge et que sa limite est un point fixe de Φ.

$$\boxed{\text{Il y a un et un seul point fixe contenu dans } T\text{, qui est la limite de la suite } (\Theta_n(W)).}$$

Ce point étant unique, $\boxed{\text{toutes les suites } (\Theta_n(W)) \text{ ont la même limite.}}$

***

MINES - PONTS 2000	Filières MP et PSI
Mathématiques 1	Durée : 3 heures

L'emploi de la calculette est interdit.

Le but de ce problème est l'étude d'endomorphismes définis par l'action d'un groupe sur un espace vectoriel de matrices complexes.

Soit M l'ensemble des matrices complexes m d'ordre 2 qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$m = \begin{pmatrix} a & i\,b \\ i\,\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}.$$

Dans cette relation, a et b sont des nombres complexes, i vérifie $i^2 = -1$, $\overline{a}$ (resp. $\overline{b}$) est le nombre complexe conjugué de a (resp. b).

Partie préliminaire

0. L'ensemble M est un espace vectoriel réel :
Démontrer qu'en munissant l'ensemble M de l'addition des matrices et de la multiplication des matrices par un réel, l'ensemble M est un espace vectoriel réel. Préciser sa dimension.
Démontrer que le produit de deux matrices m_1 et m_2 de l'espace M appartient à M.

Soit I la matrice unité d'ordre 2. Soit m une matrice appartenant à l'espace vectoriel M ; la matrice transposée de la matrice m est notée ${}^t m$. Si p est un entier naturel, m^p est le produit de la matrice m p-fois par elle-même ; classiquement $m^0 = I$.

Soit G le sous-ensemble des matrices g appartenant à l'espace M dont le déterminant est égal à 1 :

$$G = \{g \in M \mid \det g = 1\}.$$

Il est admis que l'ensemble G est, pour le produit des matrices, un groupe.

Soit U le sous-ensemble des matrices u de l'espace M antisymétriques dont le carré est égal à l'opposé de la matrice identité :

$$U = \{u \in M \mid u + {}^t u = 0,\ u^2 = -I\}.$$

Soit V le sous-ensemble des matrices symétriques v appartenant à l'espace M :

$$V = \{v \in M \mid v = {}^t v\}.$$

Il est admis que le sous-ensemble V de M est un sous-espace vectoriel réel.

Soient m_1 et m_2 deux matrices appartenant à l'espace vectoriel M ; il est admis que la trace de la matrice $\overline{m}_1 . {}^t m_2$ est réelle ; soit $(m_1 \mid m_2)$ le réel défini par la relation suivante :

$$(m_1 \mid m_2) = \frac{1}{2} Tr\,(\overline{m}_1 . {}^t m_2) = \frac{1}{2} Tr\,(m_1 . {}^t \overline{m}_2).$$

L'égalité entre les traces des matrices $\overline{m}_1 . {}^t m_2$ et $m_1 . {}^t \overline{m}_2$ est admise.
Il est admis que l'espace $(M, (. \mid .))$ est un espace euclidien. Si le produit scalaire $(m_1 \mid m_2)$, de deux matrices m_1 et m_2, est nul, ces matrices sont dites perpendiculaires. Le sous-espace vectoriel V de M est un espace euclidien lorsqu'il est muni du produit scalaire induit par celui de M.

Première partie

I.1. Propriétés élémentaires des matrices de l'espace M

Soit m une matrice de l'espace M ; démontrer que les matrices $m+{}^t\overline{m}$ et $m.{}^t\overline{m}$ s'expriment au moyen de la matrice identité I, du déterminant $\det(m)$, de la trace $Tr(m)$ de la matrice m.

Soit g une matrice appartenant à M ; déduire du résultat précédent que, pour qu'une matrice g de l'espace M appartienne au groupe G, il faut et il suffit qu'il existe une relation simple entre les matrices g^{-1} et ${}^t\overline{g}$.

Soit m une matrice de l'espace M dont la trace est nulle ($Tr(m)=0$) ; établir la relation : $m = -{}^t\overline{m}$; calculer les matrices m^2, $({}^tm)^2$ en fonction du déterminant de la matrice m et de la matrice unité I.

I.2 Matrices u

Déterminer les matrices u qui appartiennent à l'ensemble U défini ci-dessus.

Soit m une matrice de l'espace M, u une matrice de l'ensemble U. Comparer les deux produits de matrices : $m.u$ et $u.\overline{m}$. Démontrer que, lorsque la trace de la matrice m est nulle ($Tr(m)=0$), les deux matrices $m.u$ et $u.m$ appartiennent au sous-espace vectoriel V.

I.3. Norme d'une matrice m

Soit m une matrice de l'espace M ; calculer la norme de la matrice m $\left(\| m \| = \sqrt{(m \mid m)}\right)$ en fonction du déterminant de cette matrice. Comparer pour deux matrices m et w de l'espace M la norme $\| m.w \|$ du produit des matrices m et w avec le produit $\| m \| . \| w \|$ des normes de ces matrices.

I.4. Matrices appartenant à G

a. Démontrer que toute matrice g appartenant au groupe G s'écrit, de manière unique, sous la forme

$$g = I \cos\theta + m,$$

où θ est un réel appartenant au segment $[0,\pi]$ et m une matrice de trace nulle ($Tr(m)=0$) qui appartient à M.

Calculer, en fonction du réel θ, le déterminant de la matrice m, ainsi définie à partir de la matrice g, ainsi que le carré m^2 de la matrice m.

b. Soit m une matrice de l'espace M différente de 0 ($m \neq 0$) : démontrer que la matrice g_1 définie par la relation ci-dessous appartient au groupe G :

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{\det m}} m.$$

I-5 Un sous-groupe de G

Soit g_1 une matrice, de trace nulle ($Tr g_1 = 0$), appartenant à G ; soit $G(g_1)$ l'ensemble des matrices m_θ définies par la relation suivante

$$m_\theta = I \cos\theta + g_1 \sin\theta,$$

où θ est un réel quelconque appartenant au segment $[0, 2\pi]$; soit :

$$G(g_1) = \{ m_\theta = I \cos\theta + g_1 \sin\theta \mid \theta \in [0,2\pi] \}.$$

a. Démontrer que l'ensemble $G(g_1)$ est un sous-groupe commutatif du groupe G.

b. Soit m une matrice de l'espace M ; la matrice exponentielle de la matrice m est définie par la relation

$$\exp m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} m^n.$$

> On suppose connu le fait que la suite de terme général $A_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} m^n$ converge quel que soit la matrice m dans M, et que la limite de A_N quand $N \to +\infty$ est notée $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} m^n$.

Calculer la matrice $\exp(\theta.g_1)$.

Deuxième partie

Cette partie est consacrée à l'étude d'une application définie dans le sous-espace vectoriel V des matrices symétriques de M à l'aide d'une matrice du groupe G.

Dans toute cette partie, g est une matrice donnée du groupe G, de trace nulle ($Tr(g)=0$) ; étant donnée une matrice w appartenant au sous-espace vectoriel V soit $l_g(w)$ la matrice définie par la relation suivante :

$$l_g(w) = g.w + w.{}^tg.$$

II-1. L'endomorphisme l_g de V

a. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel réel V de l'espace vectoriel M. Déterminer une base de ce sous-espace vectoriel.

b. Démontrer que l'application $l_g : w \longmapsto l_g(w)$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel V. Démontrer que cet endomorphisme l_g n'est pas nul.

II-2. Propriétés de l'endomorphisme l_g

a. Comparer l'endomorphisme $l_g \circ l_g : w \longmapsto l_g(l_g(w))$ à l'endomorphisme $w \longmapsto 2g.l_g(w)$. Calculer l'expression $l_g(g.l_g(w))$ en fonction de $l_g(w)$.

Comparer les deux normes $\| l_g(w) \|$ et $\| g.l_g(w) \|$.

Calculer, pour une matrice u de l'ensemble U, l'expression $l_g(g.u)$.

b. Déterminer une relation simple qui lie, pour deux matrices quelconques v et w de l'espace V, les produits scalaires $(l_g(v) \mid w)$ et $(v \mid l_g(w))$.

En déduire l'endomorphisme adjoint de l'endomorphisme l_g,

> c'est-à-dire l'endomorphisme l_g^* –dont on justifiera plus tard dans l'année l'existence et l'unicité– tel que, pour tous u et v dans V, on ait : $(lg(v)|w) = (v|l_g^*(w))$.

c. Déduire des résultats précédents, que, pour toute matrice w de V, les matrices $l_g(w)$ et $g.l_g(w)$ sont perpendiculaires.

II-3. Une base de l'espace V

Etant données une matrice v de l'espace vectoriel V telle que son image par l'endomorphisme l_g soit différente de 0 ($l_g(v) \neq 0$), une matrice u de l'ensemble U (u appartient à M, est antisymétrique, $u^2 = -I$), soient h_0 le produit des matrices g et u, h_1 l'image de la matrice v par l'application l_g, h_2 le produit des matrices g et h_1 :

$$h_0 = g.u,\ h_1 = l_g(v),\ h_2 = g.l_g(v).$$

a. Calculer les produits scalaires de la matrice u avec chacune des matrices $h_i, 0 \leqslant i \leqslant 2$, et des matrices $h_i, 0 \leqslant i \leqslant 2$, deux à deux :

$$(u \mid h_i),\ 0 \leqslant i \leqslant 2,\ (h_k \mid h_l),\ 0 \leqslant k \leqslant l \leqslant 2.$$

b. Démontrer que la suite des matrices h_i, $0 \leqslant i \leqslant 2$, est une base de l'espace vectoriel V. Déduire de cette base une base orthonormée. Quelle est la matrice associée à l'endomorphisme l_g dans cette base ?

Déterminer la transformation géométrique associée à l'endomorphisme $\frac{1}{2} l_g$.

II-4. Un endomorphisme de l'espace vectoriel M

Soit θ un réel donné appartenant au segment $[0, 2\pi]$; soit m_θ la matrice appartenant au groupe G (question I-5) définie par la relation suivante :

$$m_\theta = I \cos\theta + g \sin\theta.$$

Soit s_θ l'application qui, à une matrice w de l'espace vectoriel M, associe la matrice $m_\theta.w$:

$$s_\theta : w \longmapsto m_\theta.w.$$

Déterminer la matrice associée à l'endomorphisme s_θ dans la base définie par les matrices u, h_0, h_1, h_2.

Troisième partie

Soit m une matrice donnée de l'espace vectoriel M. À toute matrice w du sous-espace vectoriel V de M est associée la matrice $m.w.{}^tm$.

III-1. Endomorphisme ψ_m de l'espace V

a. Démontrer que l'application $w \longmapsto m.w.{}^tm$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel V. L'endomorphisme $w \longmapsto m.w.{}^tm$ de V est noté ψ_m.
Calculer $m.u.{}^tm$ où u est une matrice de l'ensemble U.

b. Déterminer les matrices m de l'espace vectoriel M pour lesquelles l'application ψ_m est l'application identité.

III-2. Endomorphisme ψ_g

Soit g une matrice, différente des matrices I (identité) et $-I$, appartenant au groupe G.

a. Démontrer, à l'aide de la question I-4, qu'il existe un réel θ appartenant à l'intervalle ouvert $]0,\pi[$ et une matrice m, appartenant à M, différente de 0, de trace nulle, tels que la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$g = I\cos\theta + m\ ;\ \theta \in]0,\pi[,\ m \in M.$$

Soit γ la matrice définie à partir de la matrice m par la relation suivante :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\det m}}m.$$

b. Exprimer, pour toute matrice w de l'espace vectoriel V, la matrice $\psi_g(w)$ en fonction des matrices w, $l_\gamma(w)$, $\psi_\gamma(w)$ et du réel θ.

c. Soit v une matrice de l'espace vectoriel V telle que son image par l'application l_γ soit différente de 0 ($l_\gamma(v) \neq 0$). D'après la question II-3.b, la famille $\gamma.u$, $l_\gamma(v)$, $\gamma.l_\gamma(v)$ est une base de l'espace vectoriel V. Déterminer la matrice associée à l'endomorphisme ψ_g dans cette base. Calculer le déterminant de cette matrice noté $\det\psi_g$. Caractériser la transformation géométrique définie par l'endomorphisme ψ_g.

III-3. Endomorphisme ψ_m

Soit m une matrice, différente des matrices 0, I et $-I$, appartenant à l'espace vectoriel M. Démontrer qu'il existe une matrice g appartenant au groupe G telle que l'endomorphisme ψ_m soit proportionnel à l'isomorphisme ψ_g. En déduire une interprétation géométrique de l'endomorphisme ψ_m.

***

Partie préliminaire

0. Comme c'est le cas de tout espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, l'espace des matrices carrées complexes de taille 2, muni de l'addition interne et de la multiplication externe par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Notons le $\mathcal{E}$.
En écrivant a sous la forme $a_1 + ia_2$ et b sous la forme $b_1 + ib_2$, M apparaît comme l'ensemble des matrices complexes de la forme $\begin{pmatrix} a_1+ia_2 & -b_2+ib_1 \\ b_2+ib_1 & a_1-ia_2 \end{pmatrix}$ ou encore

$$a_1I_2 + a_2\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} + b_1\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0\end{pmatrix}.$$

C'est le sous-espace de $\mathcal{E}$ engendré par les quatre matrices I_2, $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0\end{pmatrix}$.
Cet espace est de dimension 4 car la famille de ces quatre matrices est une famille libre de $\mathcal{E}$. En effet si les réels a_1, a_2, b_1, b_2 sont tels que la combinaison linéaire précédente est nulle, alors la matrice $\begin{pmatrix} a_1+ia_2 & -b_2+ib_1 \\ b_2+ib_1 & a_1-ia_2 \end{pmatrix}$ est nulle, ce qui ne peut se faire que si ces quatre coefficients a_1, a_2, b_1, b_2 sont nuls.

$$\boxed{M \text{ est un espace vectoriel réel de dimension 4.}}$$

Soit m_1, associée aux complexes a_1 et b_1, et m_2, associée aux complexes a_2 et b_2 deux matrices de M.
Alors $m_1m_2 = \begin{pmatrix} a_1 & ib_1 \\ i\overline{b_1} & \overline{a_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & ib_2 \\ i\overline{b_2} & \overline{a_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1\overline{b_2} & a_1ib_2 + ib_1\overline{a_2} \\ ia_2\overline{b_1} + \overline{a_1}i\overline{b_2} & -\overline{b_1}b_2 + \overline{a_1}\overline{a_2}\end{pmatrix}$, qui est bien de la forme $\begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{Le produit de deux matrices } m_1 \text{ et } m_2 \text{ de } M \text{ appartient à } M.}$$

Première partie

I.1. Propriétés élémentaires des matrices de l'espace M

Si $m = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix}$, alors $m + {}^t\overline{m} = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{a} & -ib \\ -i\overline{b} & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\overline{a} & 0 \\ 0 & a+\overline{a}\end{pmatrix} = (a+\overline{a})I$ et

$$m.{}^t\overline{m} = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a} & -ib \\ -i\overline{b} & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\overline{a}+b\overline{b} & 0 \\ 0 & a\overline{a}+b\overline{b}\end{pmatrix} = \left(|a|^2+|b|^2\right)I$$

Comme $det(m) = |a|^2 + |b|^2$ et $Tr(m) = a + \overline{a}$, on a

$$\boxed{m + {}^t\overline{m} = Tr(m)I \quad \text{et} \quad m\,{}^t\overline{m} = det(m)I.}$$

$det(m) = 1$ équivaut à $det(m)I = I$ donc, si $g \in M$, alors $g \in G$ si et seulement si $g\,{}^t\overline{g} = I$ ou encore

$$\boxed{\text{Si } g \in M, \text{ alors } g \in G \text{ si et seulement si } g \text{ est inversible et } g^{-1} = {}^t\overline{g}.}$$

(On pourrait démontrer à partir de là la propriété admise : la partie G de M, qui est non vide, est un sous-groupe de $GL2(\mathbb{C})$. En effet, la propriété qu'on vient d'établir montre que si $g \in G$, alors $g^{-1} \in G$: G est stable par passage à l'inverse. Ensuite, si g_1 et g_2 sont dans G, g_1g_2 y est aussi car M est stable pour la multiplication et $det(g_1g_2) = det(g_1)det(g_2) = 1$.)
De $m + {}^t\overline{m} = Tr(m)I$ il résulte que

$$\boxed{\text{Si } m \text{ dans } M \text{ a une trace nulle, alors } m = -{}^t\overline{m}.}$$

On a alors $m^2 = m.m = m.(-{}^t\overline{m}) = -m{}^t\overline{m} = -det(m)I$ et $({}^tm)^2 = {}^t(m^2) = -det(m)I$.

$$\boxed{\text{Si } m \text{ dans } M \text{ a une trace nulle, alors } m^2 = ({}^tm)^2 = -det(m)I.}$$

Les matrices de U sont antisymétriques donc de la forme $u = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$ avec a nul et $b = -\overline{b}$, donc b imaginaire pur, donc u de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$, avec β réel. La clause $u^2 = -I$ impose en plus $\beta^2 = 1$.

$$\boxed{\text{Les matrices de } U \text{ sont les deux matrices } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Soit $m \in M$ et $u \in U$. $m = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$ et $u = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon = 1$ ou -1.

$m.u = \varepsilon \begin{pmatrix} -ib & a \\ -\overline{a} & i\overline{b} \end{pmatrix}$ et $u.\overline{m} = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & -i\overline{b} \\ -ib & a \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} -ib & a \\ -\overline{a} & i\overline{b} \end{pmatrix}$. Donc :

$$\boxed{\text{Si } m \in M \text{ et } u \in U, \text{ alors } m.u = u.\overline{m}.}$$

Si en plus $Tr(m) = 0$, on a $-m = {}^t\overline{m}$ d'après I.1., donc ${}^t(m.u) = {}^tu.{}^tm = -u.(-\overline{m}) = u.\overline{m} = m.u$ donc $m.u$ est symétrique. De même ${}^t(u.m) = \overline{m}.u = u.\overline{\overline{m}} = u.m$.

$$\boxed{\text{Si } m \in M \text{ et } u \in U, \text{ avec } Tr(m) = 0, \text{ alors } u.m \text{ et } m.u \text{ appartiennent à } V.}$$

I.3. Norme d'une matrice m

Pour m dans M, $(m|m) = \frac{1}{2}Tr(\overline{m}.{}^tm) = \frac{1}{2}Tr(det(m)I) = det(m)$.

$$\boxed{\text{Pour } m \in M,\ ||m|| = \sqrt{det(m)}.}$$

(Si l'on nous avait demandé de montrer qu'on avait effectivement un produit scalaire sur M, il aurait fallu montrer que, si $m \neq 0$, $(m|m) > 0$, ce qui ne pose pas de problème car $det(m)$ est de la forme $|a|^2 + |b|^2$)

Il en résulte que, si m et w sont dans M, qui est stable par multiplication, on a $||m.w||^2 = det(m.w) = det(m)det(w) = ||m||^2.||w||^2$.

$$\boxed{\text{Si } m \text{ et } w \text{ sont dans } M, \text{ on a } ||m.w|| = ||m||.||w||.}$$

I.4. Matrices appartenant à G

a. Soit $g \in G$; g s'écrit $\begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$ avec $|a|^2 + |b|^2 = det(g) = 1$. Par ailleurs, si m est une matrice de trace nulle appartenant à M, m s'écrit $\begin{pmatrix} \alpha & i\beta \\ i\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$, avec $\alpha + \overline{\alpha} = 0$, donc α imaginaire pur, et si $\theta \in [0, \pi]$, $I\cos\theta + m = \begin{pmatrix} \alpha + \cos\theta & i\beta \\ i\overline{\beta} & \overline{\alpha} + \cos\theta \end{pmatrix}$. g ne peut se mettre sous cette forme que si et seulement si θ, α, β vérifient $\alpha + \cos\theta = a$ et $\beta = b$, donc si et seulement si $\beta = b$, $\cos\theta = Re(a)$ et $\alpha = iIm(a)$. Or, puisque $|a|^2 + |b|^2 = 1$, on a $|a| \leqslant 1$ et a fortiori $-1 \leqslant Re(a) \leqslant 1$. Il existe donc un θ unique dans $[0, \pi]$ tel que $Re(a) = \cos\theta$. Finalement :

$$\boxed{\text{Toute } g \text{ de } G \text{ s'écrit de manière unique : } g = I\cos\theta + m, \text{ avec } \theta \in [0, \pi],\ m \in M \text{ et } Tr(m) = 0.}$$

On a alors $det(m) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = |Im(a)|^2 + |b|^2 = |a|^2 - |Re(a)|^2 + |b|^2 = 1 - \cos^2\theta$:

$$\boxed{det(m) = \sin^2\theta.}$$

Puisque $m \in M$ et $Tr(m) = 0$, on a $m^2 = -det(m)I$ d'après I.1., donc :

$$\boxed{m^2 = -\sin^2(\theta)I.}$$

b. Si $m \in M$ et $m \neq 0$, alors $det(m) = ||m||^2 > 0$. La matrice $g_1 = \frac{1}{\sqrt{det(m)}}m$ existe bien et est dans l'espace vectoriel M. Enfin, puisqu'il s'agit d'une matrice carrée de taille 2, $det(g_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{det(m)}}\right)^2 det(m) = 1$. Par définition de G, $\boxed{\text{cette matrice } g_1 \text{ appartient au groupe } G.}$

I.5. Un sous-groupe de G Notons d'abord que g_1 a une trace nulle et est dans G ; on a donc $g_1^2 = -det(g_1)I = -I$. On a aussi d'après I.1., ${}^t\overline{g_1} = (g_1)^{-1} = -g_1$.

a. Si m_θ et $m_{\theta'}$ sont deux éléments de $G(g_1)$,

$$\begin{aligned} m_\theta.m_{\theta'} &= (I\cos\theta + g_1\sin\theta)(I\cos\theta' + g_1\sin\theta') = I\cos\theta\cos\theta' + g_1^2\sin\theta\sin\theta' + g_1\sin(\theta+\theta') \\ &= I\cos\theta\cos\theta' - I\sin\theta\sin\theta' + g_1\sin(\theta+\theta') = I\cos(\theta+\theta') + g_1\sin(\theta+\theta') = m_{\theta+\theta'}, \end{aligned}$$

ce qui prouve déjà que $G(g_1)$ est stable par le produit matriciel et que le produit matriciel restreint à $G(g_1)$ est commutatif. (La clause $\theta_in[0, 2\pi]$ de l'énoncé est inutile car elle ne restreint pas $G(g_1)$.)

Cela prouve aussi que $m_\theta m_{-\theta} = I$: tout élément de $G(g_1)$ est inversible et son inverse est dans $G(g_1)$. $G(g_1)$, en outre non vide, est donc un sous-groupe de $GL2(\mathbb{C})$. C'est aussi une partie de M car m_θ est combinaison linéaire de deux matrices de M. Enfin $G(g_1)$ est une partie de G, car l'inverse $m_{-\theta}$ de m_θ s'écrit $I\cos\theta - g_1\sin\theta$ ou encore $I\cos\theta + {}^t\overline{g_1}\sin\theta$ ou encore ${}^t(\overline{m_\theta})$, ce qui assure, d'après I.1., que $m_\theta \in G$. Résumons

$$\boxed{\text{L'ensemble } G(g_1) \text{ est un sous-groupe commutatif du groupe } G.}$$

b. On a $g_1^2 = -I$ donc $g_1^3 = -g_1$, $g_1^4 = I$ etc... donc, en décomposant la somme de la série demandée en la somme (convergente) de la série des termes de rang pair où l'on met l'identité en facteur et la somme (convergente) de la série des termes de rang impair où l'on met g_1 en facteur, on obtient

$$\exp(\theta.g_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\theta^n.g_1^n = I\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!}\theta^{2p} + g_1\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\theta^{2p+1} = I\sin\theta + g_1\cos\theta.$$

$$\boxed{\exp(\theta.g_1) = m_\theta.}$$

Deuxième partie

II.1. L'endomorphisme l_g de V

a. Revenons à nos notations du début de la question préliminaire ; nous voyons que la matrice manipulée est symétrique si et seulement si $b_2 = 0$. V apparaît donc comme le sous-espace de M engendré par trois des vecteurs de la base.

$$\boxed{V \text{ est de dimension 3 : les matrices } I_2, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ en forment une base.}}$$

On a prouvé au passage que V est un sous-espace vectoriel de M.

b. M étant stable par somme et produit, l_g est déjà une application de V dans M.

Si $w \in V$, ${}^t(g.w + w.{}^tg) = {}^t(g.w) + {}^t(w.{}^tg) = {}^tw.{}^tg + g.{}^tw = w.{}^tg + g.w$: $l_g(w)$ est symétrique et l_g est donc une application de V dans lui-même. Cette application est linéaire :

$$\begin{aligned} l_g(\alpha w_1 + \beta w_2) &= g.(\alpha w_1 + \beta w_2) + (\alpha w_1 + \beta w_2).{}^tg = \alpha(g.w_1 + w_1.{}^tg) + \beta(g.w_2 + w_2.{}^tg) \\ &= \alpha l_g(w_1) + \beta l_g(w_2). \end{aligned}$$

Cette application est non nulle :

• Si g est antisymétrique, et, puisque, en outre, $g^2 = -I$, g est l'une des matrices de U : $g = \varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors, en prenant $w = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ on a : $g.w = \begin{pmatrix} \varepsilon i & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$ et $l_g(w) = \begin{pmatrix} 2\varepsilon i & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$ qui est non nul.

• Si g n'est pas antisymétrique, $l_g(I) = g + {}^tg$, qui n'est pas nul.

$$\boxed{l_g \text{ est un endomorphisme non nul de l'espace vectoriel } V.}$$

II.2. Propriétés de l'endomorphisme l_g

a. $l_g \circ l_g$ est un endomorphisme de M et

$$\begin{aligned} l_g \circ l_g(w) &= g.(g.w + w.{}^tg) + (g.w + w.{}^tg).{}^tg = g^2.w + 2g.w.{}^tg + w.{}^t(g^2) \\ &= -w + 2g.w.{}^tg + w.{}^t(-I) = 2g^2.w + 2g.w.{}^tg = 2g.(g.w + w.{}^tg) \end{aligned}$$

Cela prouve d'un coup que

$$\boxed{w \mapsto 2g.(g.w + w.{}^tg)(= 2g.l_g(w)) \text{ est un endomorphisme de } V, \text{ égal à } l_g \circ l_g.}$$

$g.l_g(w) = g^2w + g.w.{}^tg = -w + g.w.{}^tg$. C'est une matrice symétrique : on peut lui appliquer l_g.

$$\begin{aligned} l_g(g.l_g(w)) &= g.(-w + g.w.{}^tg) + (-w + g.w.{}^tg).{}^tg = -g.w + g^2.w.{}^tg - w.{}^tg + g.w.{}^t(g^2) \\ &= -g.w - w.{}^tg - w.{}^tg - g.w = -2(g.w + w.{}^tg) \end{aligned}$$

$$\boxed{l_g(g.l_g(w)) = -2l_g(w).}$$

D'après I.3. $||g.l_g(w)|| = ||g||.||l_g(w)||$, et $||g|| = \sqrt{det(g)} = 1$ donc $\boxed{||g.l_g(w)|| = ||l_g(w)||.}$

Soit $u \in U$. Puisque $Tr(g) = 0$, $g.u \in V$ d'après I.2.. On peut donc appliquer l_g à $g.u$:

$$l_g(gu) = g.g.u + g.u.{}^tg = -u + g.u.{}^tg.$$

D'après I.2., on a aussi $g.u = u\overline{g}$, donc $g.u.{}^tg = u.\overline{g}^tg$ et $g = -{}^t\overline{g}$ car $Tr(g) = 0$ donc $g.u.{}^tg = -u.g^2 = u$. Donc : $\boxed{l_g(g.u) \text{ est nul.}}$

b.
$$\begin{aligned} (l_g(v)|w) &= \frac{1}{2}Tr(l_g(v).{}^t\overline{w}) = \frac{1}{2}Tr\left((g.v + v.{}^tg).{}^t\overline{w}\right) = \frac{1}{2}\left[Tr(g.v.{}^t\overline{w}) + Tr(v.{}^tg.{}^t\overline{w})\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[Tr(g.v.{}^t\overline{w}) + Tr(\overline{v}.{}^t\overline{g}.{}^tw)\right] \quad \text{car ces réels sont égaux à leur conjugué} \\ &= \frac{1}{2}\left[Tr(g.v.{}^t\overline{w}) - Tr(\overline{v}.g.{}^tw)\right] \quad \text{car } {}^t\overline{g} = g^{-1} = -g \\ &= \frac{1}{2}\left[Tr({}^t\overline{w}.g.v) - Tr(\overline{v}.g.{}^tw)\right] \quad \text{car } Tr(a.b) = Tr(b.a) \\ &= \frac{1}{2}\left[Tr(\overline{w}.g.v) - Tr(\overline{v}.g.w)\right] \quad \text{car } w \text{ est symétrique.} \end{aligned}$$

En échangeant les rôles de v et w, on obtiendrait le résultat opposé, donc :

$$\boxed{\text{Pour } v \text{ et } w \text{ dans } V, \text{ on a } (l_g(v)|w) = -(l_g(w)|v) = -(v|l_g(w)).}$$

L'adjoint l_g^* étant le seul endomorphisme de V vérifiant, pour tous v et w dans V, $(l_g(v)|w) = (v|l_g^*(w))$, on a nécessairement $\boxed{l_g^* = -l_g.}$

c. $2(l_g(w)|g.l_g(w)) = (l_g(w)|l_g(l_g(w)))$ (d'après II.2.) $= -(l_g(l_g(w))|l_g(w))$ (d'après b. ci-dessus).
Cette quantité égale à son opposée est donc nulle.

$$\boxed{\text{Pour toute matrice } w \text{ de } V, \text{ les matrices } l_g(w) \text{ et } g.I_g(w) \text{ sont perpendiculaires.}}$$

II.3. Une base de l'espace vectoriel V

a. Puisque $\overline{u} = u$, ${}^tu = -u$ et $u^2 = -I$:
$(h_0|u) = (g.u|u) = Tr(g.u.{}^t\overline{u}) = -Tr(g.u.u) = +Tr(g) = 0$
$(h_1|u) = (l_g(v)|u) = Tr(l_g(v).{}^t\overline{u}) = -Tr(l_g(v).u) = -Tr((g.v + v.{}^tg).u) = -Tr(g.v.u + v.{}^tg.u)$
$= -Tr({}^tu.{}^tv.{}^tg + {}^tu.g.{}^tv) = Tr(u.v.{}^tg + u.g.v) = Tr(v.{}^tg.u + g.v.u)$ (car $Tr(a.b) = Tr(b.a)$)
Ce nombre $(h_1|u)$, égal à son opposé, est nul.
$(h_2|u) = (g.l_g(v)|u) = \frac{1}{2}(l_g(l_g(v))|u) = 0$ (dans $(l_g(v)|u) = 0$, on remplace v par $l_g(v)$, qui appartient aussi à V.)
$(h_0|h_0) = (g.u|g.u) = ||g.u||^2 = ||g||^2.||u||^2 = ||u||^2 = ||u^2|| = 1$
$(h_1|h_1) = (l_g(v)|l_g(v)) = ||l_g(v)||^2$. On ne peut en dire plus sinon que cette quantité est strictement positive puisque $l_g(v)$ n'est pas nul.
$(h_2|h_2) = ||h_2||^2 = ||g.l_g(v)||^2 = ||g||^2.||l_g(v)||^2 = ||l_g(v)||^2$; cette quantité est égale à la précédente.
$g.u \in V$ et $l_g(g.u) = 0$ donc $(h_0|h_1) = (g.u|l_g(v)) = -(l_g(g.u)|v) = 0$, en utilisant aussi le fait que l'adjoint de l_g est $-l_g$.
De même $(h_0|h_2) = (g.u|g.l_g(v)) = \frac{1}{2}(g.u|l_g \circ l_g(v)) = -\frac{1}{2}(l_g(g.u)|l_g(v)) = 0$.
Enfin $(h_1|h_2) = (l_g(v)|g.l_g(v)) = 0$ car $l_g(v)$ et $g.l_g(v)$ sont "perpendiculaires".

b. La famille h_0, h_1, h_2 est donc une famille orthogonale. Elle ne contient pas le vecteur nul puisque $(h_0|h_0)$, $(h_1|h_1)$ et $(h_2|h_2)$ sont non nuls. Cette famille est donc libre, formée de vecteurs de V qui est de dimension 3 : $\boxed{\text{Cette famille } (h_0, h_1, h_2) \text{ est une base de } V.}$

En normant cette famille, on obtient une base orthonormée (e_0, e_1, e_2) de V : $\left(h_0, \frac{h_1}{||h_1||}, \frac{h_1}{||h_1||}\right)$.

La matrice de l_g sur cette base est celle des composantes des $l_g(e_i)$ sur les e_j. Son terme général est donc $(l_g(e_i)|e_j)$ Comme $(l_g(e_i)|e_j) = -(l_g(e_j)|e_i)$, on voit que cette matrice est antisymétrique. En plus, $l_g(h_0) = l_g(g.u) = 0$: La première colonne de la matrice est donc nulle.
Il ne reste donc qu'un terme à calculer : $(l_g(e_1)|e_2)$.
$(l_g(h_1)|h_2) = (l_g \circ l_g(v)|g.l_g(v)) = 2(g.l_g(v)|g.l_g(v)) = 2||h_2||^2 = 2||h_1||^2$, comme on l'a vu plus haut.
Comme $e_1 = \frac{h_1}{||h_1||}$ et $e_2 = \frac{h_2}{||h_2||}$, on a donc $(l_g(e_1)|e_2) = 2$, ce qui nous donne le dernier terme manquant de la matrice.

$$\boxed{\text{La matrice sur la base orthonormée } (e_0, e_1, e_2) \text{ est } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}}$$

On peut l'écrire la matrice de $\frac{1}{2}l_g$ sous la forme du produit (commutatif) : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\frac{1}{2}l_g$ est donc la composée de la rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de e_0 (l'espace et l'axe étant convenablement orientés) et de la projection orthogonale sur le plan engendré par e_1 et e_2.

II.4. Un endomorphisme de l'espace vectoriel M

Puisque u, h_0, h_1, h_2 sont non nuls et orthogonaux deux à deux, ils constituent effectivement une base de M. Par ailleurs, $m_\theta.w$ est bien dans M, qui est stable par multiplication, donc s_θ est bien à valeurs dans M, et sa linéarité est évidente.
$s_\theta(w) = w\cos\theta + g.w\sin\theta$: La matrice de s_θ sur (u, h_0, h_1, h_2) est donc la somme de la matrice I_4, identité d'ordre 4, multipliée par $\cos\theta$ et de la matrice Q de l'endomorphisme $\varphi : w \mapsto g.w$, multipliée par $\sin\theta$.

- $\varphi(u) = g.u = h_0$.
- $\varphi(h_0) = g.h_0 = g^2.u = -u$
- $\varphi(h_1) = g.h_1 = g.l_g(v) = h_2$
- $\varphi(h_2) = g.h_2 = g^2.l_g(v) = -l_g(v) = -h_1$, d'où la matrice Q et par multiplication de Q par $\sin\theta$ et ajoût de $I_4\cos\theta$.

$$\boxed{\text{La matrice de } s_\theta \text{ sur la base } (u, h_0, h_1, h_2) \text{ de } M \text{ est : } \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.}$$

Troisième partie

III.1. Endomorphisme ψ_m de l'espace V

a. Si $w \in V$, ${}^t(m.w.{}^tm) = m.w.{}^tm$: ψ_m est bien à valeurs dans V.
$\psi_m(\alpha w + \beta w') = m.(\alpha w + \beta w').{}^tm = \alpha m.w.{}^tm + \beta m.w'.{}^tm$, d'où la linéarité de ψ_m :

$$\boxed{\psi_m \text{ est un endomorphisme de } V.}$$

D'après I.2., $m.u = u.\overline{m}$ donc
$m.u.{}^tm = u.\overline{m}.{}^tm = u.\overline{m.{}^t\overline{m}} = u\overline{det(m)I} = (det\ m)u.I$ (car $det(m)$ est réel) $= det(m)u$.

$$\boxed{m.u.{}^tm = (det\ m)u.}$$

b. ψ_m est l'identité de V si et seulement si $m.w.{}^tm = w$ pour tout w dans V.
En prenant $w = I$, on voit que cela nécessite que $m.{}^tm = I$. En reprenant la forme générale de m utilisée au début du problème, cela se traduit par $\begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & i\overline{b} \\ ib & \overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc par
$\{a^2 - b^2 = 1,\ -\overline{b}^2 + \overline{a}^2 = 1,\ ia\overline{b} + i\overline{a}b = 0$ et $ai\overline{b} + ib\overline{a} = 0\}$ équivalent à $\{a^2 - b^2 = 1$ et $a\overline{b} + \overline{a}b = 0\}$
En prenant $w = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, cela donne, après simplification par i :
$\begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & i\overline{b} \\ ib & \overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ou $\begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & i\overline{b} \\ -ib & -\overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou
$\{a^2 + b^2 = 1,\ -\overline{b}^2 - \overline{a}^2 = -1,\ ia\overline{b} - i\overline{a}b = 0$ et $ai\overline{b} - ib\overline{a} = 0\}$ équivalent à
$\{a^2 + b^2 = 1$ et $a\overline{b} - \overline{a}b = 0\}$. L'ensemble de ces conditions équivaut à :

Réciproquement, pour un tel choix de m, ψ_m est effectivement l'identité.

$\boxed{\psi_m \text{ est l'identité si et seulement si } m = I \text{ ou } m = -I.}$

III.2. Endomorphisme ψ_g

a. Revenons à **I.4.**, où l'on a vu la forme générale $I\cos\theta + m$ des matrices g de G. Si $\theta = 0$ ou π, $Re(a) = \cos\theta = \pm 1$. $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ne peut se faire alors que si $a = \pm 1$ et $b = 0$, donc $g = \pm I$.
De même, si m est la matrice nulle, $g = I\cos\theta$ et $det(g) = 1$ impose encore $\theta = 0$ ou π donc $g = \pm I$.

$\boxed{\text{Donc, si } g \in G, \text{ avec } g \neq \pm I, g \text{ s'écrit } I\cos\theta + m \text{ avec } \theta \in]0,\pi[\text{ et } m \in M, m \neq 0, Tr(m) = 0.}$

b. Puisque m n'est pas nulle, on sait, d'après I.4.b. que $\dfrac{1}{\sqrt{det\, m}}m$, qu'on note γ, existe et appartient à G.
D'après **I.4**, on a aussi $det(m) = \sin^2\theta$. Puisque $\sin\theta > 0$, on a donc $m = \gamma\sin\theta$. On a donc :

$$\begin{aligned}\psi_g(w) &= g.w.{}^tg = (I\cos\theta + m)w(I\cos\theta + {}^tm) = w\cos^2\theta + (m.w + w.{}^tm)\cos\theta + m.w.{}^tm \\ &= w\cos^2\theta + (\gamma.w + w.{}^t\gamma)\cos\theta\sin\theta + \gamma.w.{}^t\gamma\sin^2\theta.\end{aligned}$$

$$\boxed{\psi_g(w) = w\cos^2\theta + l_\gamma(w)\cos\theta\sin\theta + \psi_\gamma(w)\sin^2\theta.}$$

c.

$$\begin{aligned}\psi_g(\gamma.u) &= \gamma.u\cos^2\theta + l_\gamma(\gamma.u)\cos\theta\sin\theta + \gamma^2.u.{}^t\gamma\sin^2\theta = \gamma.u\cos^2\theta + 0 \text{ (d'après II.2.a)} - u.{}^t\gamma\sin^2\theta \\ &= \gamma.u\cos^2\theta - {}^t\overline{\gamma}.u\sin^2\theta \text{ (d'après I.2.)} = \gamma.u\cos^2\theta + \gamma.u\sin^2\theta \text{ (d'après I.1.)} = \gamma.u. \\ \psi_g(l_\gamma(v)) &= l_\gamma(v)\cos^2\theta + l_\gamma(l_\gamma(v))\cos\theta\sin\theta + \gamma.(\gamma.v + v.{}^t\gamma){}^t\gamma\sin^2\theta \\ &= l_\gamma(v)\cos^2\theta + 2\gamma.l_\gamma(v)\cos\theta\sin\theta - (v.{}^t\gamma + \gamma.v)\sin^2\theta \text{ (car } \gamma^2 = {}^t\gamma^2 = -I) \\ &= l_\gamma(v)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \gamma.l_\gamma(v)\sin 2\theta = l_\gamma(v)\cos 2\theta + \gamma.l_\gamma(v)\sin 2\theta.\end{aligned}$$

En utilisant à nouveau $\gamma.(\gamma.v + v.{}^t\gamma).{}^t\gamma = -l_\gamma(v)$ que l'on vient de voir au passage :

$$\begin{aligned}\psi_g(\gamma.l_\gamma(v)) &= \gamma.l_\gamma(v)\cos^2\theta + l_\gamma(\gamma.l_\gamma(v))\cos\theta\sin\theta + \gamma.\gamma.l_\gamma(v).{}^t\gamma\sin^2\theta \\ &= \gamma.l_\gamma(v)\cos^2\theta - 2l_\gamma(v)\cos\theta\sin\theta \text{ (d'après II.2.a.)} - \gamma.l_\gamma(v)\sin^2\theta \\ &= \gamma.l_\gamma(v)\cos 2\theta - l_\gamma(v)\sin 2\theta.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La matrice de } \psi_g \text{ sur la base } (\gamma.u, l_\gamma(v), \gamma.l_\gamma(v)) \text{ est } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \text{ et } \det(\psi_g) = 1.}$$

La base est orthogonale, on l'a vu, mais on ne sait pas si elle est orthonormée. Si on norme les vecteurs pour en faire une base orthonormée (e_0, e_1, e_2), on aura encore $\psi_g(e_0) = e_0$. Les deux autres vecteurs de base auront été divisés par le même scalaire, car on a vu que $||\gamma.l_\gamma(v)|| = ||l_\gamma(v)||$. On aura toujours $\psi_g(e_1) = \cos 2\theta e_1 + \sin 2\theta e_2$ et $\psi_g(e_2) = -\sin 2\theta e_1 + \cos 2\theta e_2$.
La matrice ci-dessus est donc la matrice de ψ_g sur une certaine base orthonormée. On reconnaît

$\boxed{\text{la matrice de la rotation d'angle } \pm 2\theta \text{ autour du premier vecteur de base.}}$

L'ambiguïté de signe ne pourrait être levée qu'en précisant l'orientation de l'espace et l'orientation de l'axe.

III.3. Endomorphisme ψ_m

Soit $m \in M$, m différente de 0 donc $||m|| \neq 0$ donc $det(m) \neq 0$. En posant $g = \dfrac{m}{\sqrt{det(m)}}$ on obtient une matrice de G. On peut appliquer ce qui précède si g est différente de I et $-I$ (il y a visiblement une petite faute d'énoncé).

On a alors, en revenant à la définition de ψ_m, $\psi_m = det(m)\psi_g$. $\boxed{\psi_m \text{ est proportionnel à } \psi_g.}$

ψm est donc la composée d'une rotation par une homothétie. $\boxed{\psi_m \text{ est une similitude.}}$

***

ÉCOLE POLYTECHNIQUE et E.S.P.C.I. 2000	Filière PC
Mathématiques 2	Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices est autorisée pour cette épreuve.

Le but de ce problème est l'étude d'approximations discrètes de solutions d'équations différentielles avec conditions aux extrémités de l'intervalle de définition.

Première partie

Soit n un entier fixé, $n \geqslant 1$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles à n lignes, et I la matrice identité à n lignes. On note X_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, les coefficients d'une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On identifie un vecteur V de $\mathbb{R}^n$, de composantes $v_1, \dots, v_n$, dans la base canonique, à la matrice colonne $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. On désigne par $||.||$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

1. Pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$N(X) = \sup_{V \in \mathbb{R}^n, V \neq 0} \left(\frac{||XV||}{||V||}\right).$$

a) Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Montrer que pour toutes matrices $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(XY) \leqslant N(X)N(Y)$.

Cette propriété est-elle vérifiée si l'on remplace la norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par la norme N_∞ définie par

$$N_\infty(X) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n} |X_{ij}|?$$

2) Soit $(X_p)_{p=1,2,\dots}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et X une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que X est inversible et que $\lim_{p \to +\infty} X_p = X$.

a) Montrer que, pour p assez grand, X_p est inversible.

b) Soit $V \in \mathbb{R}^n$. Montrer que, si X_p est inversible,

$$||X_p^{-1}V - X^{-1}V|| \leqslant N(X^{-1})N(X - X_p)||X_p^{-1}V||.$$

En déduire qu'il existe un entier p_0 et un nombre C indépendant de p tel que, pour $p \geqslant p_0$,

$$||X_p^{-1}V|| \leqslant C||X^{-1}V||.$$

c) Montrer que $\lim_{p \to +\infty} N(X_p^{-1} - X^{-1}) = 0$.

3) On dit qu'une matrice $X = (X_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède la propriété (P) si les trois conditions suivantes sont satisfaites

$$\begin{cases} X_{ii} > 0 & \text{pour tout } \ i = 1, \dots, n & (P_1) \\ X_{ij} \leqslant 0 & \text{pour tous } \ i, j = 1, \dots, n \text{ tels que } i \neq j & (P_2) \\ \sum_{j=1}^{n} X_{ij} > 0 & \text{pour tout } \ i = 1, \dots, n. & (P_3) \end{cases}$$

Soit X une matrice qui possède la propriété (P) et soit $V \in \mathbb{R}^n$, de composantes $v_1, \dots, v_n$.

a) Montrer que si $XV = 0$, alors $V = 0$. [On considèrera i_0 tel que $|v_{i_0}| = \max_{i=1,\dots,n} |v_i|$.]

b) On suppose que XV a toutes ses composantes positives ou nulles. Montrer que V a toutes ses composantes positives ou nulles. [On considèrera i_1 tel que $|v_{i_1}| = \min_{i=1,\dots,n} |v_i|$.]

4) Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que X est inversible et que $X = \lim_{p\to+\infty} X_p$, où chaque X_p est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui possède la propriété (P). Montrer que les coefficients de la matrice inverse X^{-1} sont positifs ou nuls.

Deuxième partie

Soit f une fonction à valeurs réelles, de classe C^2 sur l'intervalle $[0,1]$.

5.a) Montrer qu'il existe une unique fonction u de classe C^4 sur $[0,1]$ telle que

$$(1) \qquad \begin{cases} -u'' &= f \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0. \end{cases}$$

b) Montrer que si $f \geqslant 0$, alors $u \geqslant 0$.

c) On choisit pour f la fonction constante égale à 1. Déterminer la solution $\widehat{u}$ du problème (1) dans ce cas.

Soit n un entier, $n \geqslant 1$. On pose $h = \dfrac{1}{n+1}$ et l'on considère la subdivision $(x_i)_{i=0,1,\dots,n+1}$ de l'intervalle $[0,1]$ telle que $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$ et $x_{i+1} - x_i = h$, pour $i = 0, 1, \dots, n$.

a) Soit u une fonction à valeurs réelles de classe C^4 sur $[0,1]$. Montrer que, pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$\left| u''(x_i) - \frac{1}{h^2}\left(u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})\right) \right| \leqslant \frac{h^2}{12} \sup_{x\in[0,1]} \left| u^{(4)}(x) \right|,$$

où $u^{(4)}$ désigne la dérivée quatrième de u.

b) Que devient cette inégalité dans le cas où u est la fonction $\widehat{u}$ trouvée à la question 5.c) ?

7) Soit $F \in \mathbb{R}^n$, de composantes $f_1, \dots, f_n$. On désigne par U un vecteur de $\mathbb{R}^n$, de composantes $u_1, \dots, u_n$ et l'on pose $u_0 = 0$, $u_{n+1} = 0$.

a) Écrire sous forme matricielle $AU = F$ le système (2) linéaire en les inconnues $u_1, \dots, u_n$:

$$(2) \qquad \frac{1}{h^2}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) = f_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

b) Montrer que, pour tout vecteur V de $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique $(AV|V)$ peut s'écrire comme une somme de carrés de nombres réels.

c) En déduire que la matrice A est inversible.

8.a) Soit $B = A^{-1}$ l'inverse de A. Montrer que les coefficients B_{ij} de B sont positifs ou nuls.

b) Soit $\widehat{F}$ le vecteur de de composantes toutes égales à 1. Déterminer les composantes de $B\widehat{F}$ à l'aide des valeurs de la fonction $\widehat{u}$ trouvée à la question 5.c). En déduire que, pour tout $i = 0, \dots, n$,

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{n} B_{ij} \leqslant \frac{1}{8}.$$

9) On suppose que $(u_1, \dots, u_n)$ est la solution du système (2) avec $f_i = f(x_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, et l'on désigne par $u(x_1), \dots, u(x_n)$ les valeurs prises en $x_1, \dots, x_n$ par la solution u du problème (1).

a) Donner une majoration de $|u_i - u(x_i)|$ valable pour tout $i = 1, \dots, n$, en fonction de h et de la fonction f''.

b) En quel sens peut-on dire que la solution du problème linéaire (2) avec $f_i = f(x_i)$ approxime la solution du problème (1) ?

c) On choisit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{25}{\sqrt{x^4+5}}$.

Trouver une valeur de l'entier n qui assure $|u_i - u(x_i)| < 10^{-4}$, pour tout $i = 1, \dots, n$.

Troisième partie

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0,1]$ comme dans la deuxième partie. Pour tout entier $p \geqslant 1$, on considère le problème

$$(3) \qquad \begin{cases} -u'' + \dfrac{1}{p^2}u &= f \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0. \end{cases}$$

a) Montrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$, il existe une unique fonction $u^{[p]}$ de classe C^4 sur $[0,1]$ qui est solution du problème (3).

Connaissant deux solutions linéairement indépendantes u_1 et u_2 de l'équation $-u'' + \frac{1}{p^2}u = 0$, on peut poser $u(x) = u_1(x)v(x)$ ou bien chercher une solution particulière de $-u'' + \frac{1}{p^2}u = f$ sous la forme $u = \alpha u_1 + \beta u_2$ en imposant aux fonctions α et β de vérifier $\alpha' u_1 + \beta' u_2 = 0$.

b) Montrer que la suite de fonctions $(u^{[p]})_{p\geqslant 1}$ tend simplement, quand p tend vers $+\infty$, vers une fonction u de classe C^4 sur $[0,1]$ $\boxed{\text{c'est-à-dire : pour } x \text{ fixé dans } [0,1],\ u^{[p]}(x) \text{ tend vers } u(x) \text{ quand } p \to +\infty}$ et que u est solution du problème (1) de la deuxième partie.

11) On choisit pour f la fonction constante égale à 1 et l'on note $\widehat{u}^{[p]}$ la solution du problème (3) dans ce cas.

a) Déterminer $\widehat{u}^{[p]}$.

b) Pour tout entier $p \geqslant 1$, étudier les variations de la fonction $x \in [0,1] \mapsto \widehat{u}^{[p]}(x) \in \mathbb{R}$.

c) Montrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$ et pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant \widehat{u}^{[p]}(x) < \dfrac{1}{8}$.

12) On reprend les notations de la deuxième partie.

a) Montrer que pour chaque entier $p \geqslant 1$, le système linéaire

$$(4) \qquad (A + \frac{1}{p^2}I)U = F$$

a une solution unique, notée $U^{[p]}$. Que peut-on dire de $\lim_{p\to+\infty} U^{[p]}$?

b) Soit $(u_1^{[p]}, \dots, u_n^{[p]})$ la solution du système (4) avec $f_i = f(x_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Donner une majoration de $|u_i^{[p]} - u_i^{[p]}(x_i)|$, valable pour tout $i = 1, \dots, n$, en fonction de h, p, f et f''.

***

ÉCOLE POLYTECHNIQUE et E.S.P.C.I. 2000 — Filière PC

Mathématiques 2 — **CORRIGÉ**

Première partie

1.a) On sait que, si f est linéaire de E vers F, où E et F sont deux normés de dimension finie, il existe $k > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, on ait $||f(x)||_F \leqslant k||x||_E$ (et on en déduit que f est lipschitzienne sur E, donc continue en chaque point de E.)

Prenons ici $E = F = \mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne et pour f l'application linéaire $V \mapsto XV$, où X est une matrice fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Il existe donc k tel que : $\forall V \in \mathbb{R}^n$, $||XV|| \leqslant k||V||$ donc, si $V \neq 0$, $\dfrac{||X.V||}{||V||} \leqslant k$.

L'ensemble des $\dfrac{||X.V||}{||V||}$ où V est non nul est donc majoré. Comme il est non vide, il admet donc une borne supérieure. La quantité $N(X) = \sup\limits_{V \in \mathbb{R}^n; V \neq 0} \left(\dfrac{||XV||}{||V||}\right)$ introduite dans l'énoncé existe donc pour toute matrice $X \in M_n(\mathbb{R})$.

Cette quantité est positive et elle n'est nulle que si $||XV||$ est nul pour tout V non nul, autrement dit si $XV = 0$ pour tout V, ce qui équivaut à $X = 0$.

Pour $X \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et $V \in \mathbb{R}^n$, $V \neq 0$, on a $\dfrac{||(\lambda X)V||}{||V||} = |\lambda|\dfrac{||XV||}{||V||}$. Ces deux fonctions de V, égales, ont donc le même Sup, donc $N(\lambda X) = |\lambda|N(X)$.

Pour X_1 et $X_2 \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et $V \in \mathbb{R}^n$, $V \neq 0$, on a

$$\frac{||(X_1 + X_2)V||}{||V||} = \frac{||X_1V + X_2V||}{||V||} \leqslant \frac{||X_1V||}{||V||} + \frac{||X_2V||}{||V||} \leqslant N(X_1) + N(X_2).$$

$N(X_1) + N(X_2)$ est donc un majorant de l'ensemble des $\dfrac{||(X_1 + X_2)V||}{||V||}$ et est donc plus grand que leur borne supérieure : $N(X_1) + N(X_2) \geqslant N(X_1 + X_2)$. Résumons :

$$\boxed{N \text{ est une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

b) Pour $X \in M_n(\mathbb{R})$ et $V \in \mathbb{R}^n$, on a, si $V \neq 0$, $\dfrac{||XV||}{||V||} \leqslant N(X)$ donc $||XV|| \leqslant N(X)||V||$, valable aussi si $V = 0$. Si $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a de même $||XYV|| \leqslant N(X)||YV|| \leqslant N(X)N(Y)||V||$. Si $V \neq 0$, on a donc $\dfrac{||XYV||}{||V||} \leqslant N(X)N(Y)$. En passant au Sup :

$$\boxed{N(XY) \leqslant N(X)N(Y).}$$

(une telle norme est dite sous-multiplicative).
Si X et Y sont égales à la matrice dont tous les éléments sont égaux à 1 , tous les éléments de la matrice XY sont égaux à n. On a donc $N_\infty(X) = N_\infty(Y) = 1$ et $N_\infty(XY) = n$.

$$\boxed{\text{En dehors du cas } n = 1 \text{ on n'a donc pas : Pour tout } X \text{ et } Y \in M_n(\mathbb{R})\ N_\infty(XY) \leqslant N_\infty(X)N_\infty(Y).}$$

Pour $n = 1$, la norme N_∞ est la valeur absolue. Elle vérifie : $\forall x$ et $y \in \mathbb{R}$, $N_\infty(XY) = N_\infty(X)N_\infty(Y)$.

2.a) La fonction $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(X)$ est polynomiale par rapport aux composantes de X sur la base usuelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; cette fonction est donc continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ici la suite de matrices X_n converge vers la matrice X supposée inversible ; la suite $\det(X_n)$ converge donc vers $\det X \neq 0$. Cette suite est donc du signe de $\det X$ à partir d'un certain rang. Donc :

$$\boxed{\text{Pour } p \text{ suffisamment grand, } X_p \text{ est inversible.}}$$

b) Si X_p est inversible et $V \in \mathbb{R}^n$, on a
$X_p^{-1}V - X^{-1}V = X^{-1}XX_p^{-1}V - X^{-1}X_pX_p^{-1}V = X^{-1}(X - X_p)X_p^{-1}V$, donc

$||X_p^{-1}V - X^{-1}V|| = ||X^{-1}(X - X_p)X_p^{-1}V|| \leqslant N(X^{-1}(X - X_p))||X_p^{-1}V||$. En utilisant la sous-multiplicativité de N :

$$\boxed{||X_p^{-1}V - X^{-1}V|| \leqslant N(X^{-1})N(X - X_p)||X_p^{-1}V||.}$$

Cela s'applique dès que $p \geqslant p_1$, suffisamment grand pour que X_p soit inversible. On a alors aussi, par inégalité triangulaire, $||X_p^{-1}V|| - ||X^{-1}V|| \leqslant N(X^{-1})N(X - X_p)||X_p^{-1}V||$, donc

$$||X_p^{-1}V||\,(1 - N(X^{-1})N(X - X_p)) \leqslant ||X^{-1}V||.$$

$N(X - X_p) \to 0$ quand $p \to +\infty$, donc $1 - N(X^{-1})N(X - X_p) \to 1$. On peut donc trouver $p_0 \geqslant p_1$ tel que, pour $p \geqslant p_0$, on ait $1 - N(X^{-1})N(X - X_p) \geqslant \dfrac{1}{2}$. Donc :

$$\boxed{\text{Pour } p \geqslant p_0, \text{ on a } ||X_p^{-1}V|| \leqslant 2||X^{-1}V||.}$$

Nous avons donc fourni la réponse $C = 2$ mais la démarche suivie montre que n'importe quel $C > 1$ convient aussi. On remarque aussi que cette constante, numérique, ne dépend pas de la suite X_p ni du vecteur V.

c) L'entier p_0 ne dépend pas non plus de V. On a donc, pour tout $V \in \mathbb{R}^n$:
$\forall p \geqslant p_0$ $||(X_p^{-1} - X^{-1})V|| \leqslant 2N(X^{-1})N(X - X_p)||X^{-1}V|| \leqslant 2N(X^{-1})N(X - X_p)N(X^{-1})||V||$.
Si V est non nul, on peut diviser par $||V||$ et passer au Sup :
$\forall p \geqslant p_0$ $N(X_p^{-1} - X^{-1}) \leqslant 2\left(N(X^{-1})\right)^2 N(X - X_p)$, suite qui tend vers 0 quand $p \to +\infty$. Donc :

$$\boxed{\lim_{p \to +\infty} N(X_p^{-1} - X^{-1}) = 0.}$$

La suite des matrices $X_p{}^{-1}$, définie à partir d'un certain rang p_1, converge donc vers X^{-1}.

3.a) On suppose donc que $XV = 0$ et on considère, comme on nous le suggère, la composante de XV de numéro i_0, où $|v_{i_0}| = \max\limits_{i=1,\dots,n} |v_i|$. On a donc : $\sum\limits_{j=1}^{n} X_{i_0j}v_j = 0$, qu'on peut écrire $\sum\limits_{j \neq i_0} X_{i_0j}v_j = -X_{i_0i_0}v_{i_0}$. L'inégalité triangulaire donne alors : $|X_{i_0i_0}v_{i_0}| \leqslant \sum\limits_{j \neq i_0} |X_{i_0j}v_j| \leqslant \sum\limits_{j \neq i_0} |X_{i_0j}v_{i_0}|$
Comme $X_{i_0i_0}$ est positif et les autres X_{i_0j} négatifs, cela donne $X_{i_0i_0}|v_{i_0}| \leqslant -\sum\limits_{j \neq i_0} X_{i_0j}\,|v_{i_0}|$ ou $|v_{i_0}|\sum\limits_{j=1}^{n} X_{i_0j} \leqslant 0$. Comme $\sum\limits_{j=1}^{n} X_{i_0j}$ est strictement positif, ce n'est possible que si $|v_{i_0}|$ est nul ainsi que, à fortiori, les autres $|v_i|$. Résumons :

$$\boxed{\text{Si } XV = 0, \text{ alors } V = 0.}$$

Le noyau de l'application linéaire $V \mapsto XV$ est donc réduit à 0. Cette application est donc un automorphisme de $\mathbb{R}^n$, donc X est inversible.

b) Supposons que les composantes de XV sont toutes positives ou nulles.
En considérant maintenant un indice i_1 tel que $v_{i_1} = \min\limits_{i=1,\dots,n} v_i$, on a , puisque les $-X_{i_1j}$ sont positifs,
$v_{i_1}\sum\limits_{j \neq i_1}(-X_{i_1j}) \leqslant \sum\limits_{j \neq i_1}(-X_{i_1j})v_j \leqslant X_{i_1i_1}v_{i_1}$ car $\sum\limits_{j=1}^{n} X_{i_1j}v_j \geqslant 0$. Donc $v_{i_1}\sum\limits_{j \neq i_1}(-X_{i_1j}) \leqslant X_{i_1i_1}v_{i_1}$.
Donc $v_{i_1}\sum\limits_{j=1}^{n} X_{i_1j} \geqslant 0$. Comme $\sum\limits_{j=1}^{n} X_{i_1j} > 0$, cela nécessite $v_{i_1} \geqslant 0$. Les autres v_i sont à fortiori positifs.

$$\boxed{\text{Si } XV \text{ a toutes ses composantes positives ou nulles, } V \text{ a toutes ses composantes positives ou nulles.}}$$

4. Une matrice X possédant la propriété (P) est, on l'a dit, inversible. En plus, le premier vecteur colonne de la matrice X^{-1} est l'unique vecteur V_1 vérifiant $XV_1 = W_1$, où W_1 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Les composantes de W_1 sont positives (elles valent 0 ou 1). On peut donc appliquer b) ci-dessus. Tous les termes de la première colonne de X^{-1} sont positifs. De même pour tous les termes de X^{-1}.

Supposons maintenant que X est une matrice inversible dont on ne sait si elle a la propriété (P), mais qui est est limite d'une suite X_p de matrices possédant la propriété (P). On sait depuis 2. que X^{-1} est la limite de la suite X_p^{-1}, donc limite d'une suite de matrices à termes positifs ou nuls. Chaque coefficient de X^{-1} est donc limite d'une suite de réels positifs ou nuls. Il en résulte :

$$\boxed{\text{Les coefficients de } X^{-1} \text{ sont positifs ou nuls.}}$$

Deuxième partie

5.a) Soit F une primitive sur $[0,1]$ de la fonction continue f et soit G une primitive sur $[0,1]$ de la fonction continue F, par exemple $G(x) = \int_0^x F(t)dt$ (donc $G(0) = 0$). Puisque $G'' = f$ et que f est C^2 sur $[0,1]$, G est C^4 sur $[0,1]$.

Si u est C^4 sur $[0,1]$, alors $u'' = -f$ équivaut à $u'' = -G''$, donc à $u' = -G' + k_1$, où k_1 est une constante, puis $u(x) = -G(x) + k_1 x + k_2$, où k_2 est une autre constante.

Si l'on veut en plus que $u(0) = 0$, il faut et il suffit que $0 = -G(0) + k_2$, donc que $k_2 = 0$.

Si l'on veut en plus que $u(1) = 0$, il faut et il suffit que $-G(1) + k_1 = 0$, donc $k_1 = G(1) = \int_0^1 F(t)dt$. Finalement

$$\boxed{u(x) = -\int_0^x F(t)dt + x\int_0^1 F(t)dt \text{ est la seule fonction } u \text{ vérifiant les conditions imposées.}}$$

b) Si $f \geqslant 0$, $-u''(x) = f$ est négative sur $[0,1]$ donc $-u$ est convexe sur $[0,1]$. L'arc de courbe $y = -u(x)$ limité par $u = 0$ et $u = 1$ est « en-dessous » de la corde. Comme $u(0) = u(1) = 0$, on a donc $-u(x) \leqslant 0$ donc :

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ u(x) \geqslant 0.}$$

c) Si f est constante égale à 1, on peut prendre $F(x) = x$ donc $\int_0^x F(t)dt = \frac{x^2}{2}$ et

$$\boxed{\widehat{u}(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}.}$$

6.a) Puisque u est C^4 sur $[0,1]$, le nombre $\sup\limits_{x\in[0,1]} |u^{(4)}(x)|$ existe effectivement. Notons le M_4.

Soit x_i l'un des points de subdivision, distinct de 0 et 1.

Posons $\varphi(t) = u(x_i - t) - 2u(x_i) + u(x_i + t)$; φ est donc de classe C^4 sur $[0,h]$ et
$\varphi'(t) = -u'(x_i - t) + u'(x_i + t)$, $\varphi''(t) = u''(x_i - t) + u'(x_i + t), \dots, \varphi^{(4)}(t) = u^{(4)}(x_i - t) + u^{(4)}(x_i + t)$.

On peut donc majorer $|\varphi^{(4)}(t)|$ par $2M_4$ et appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à φ entre 0 et h.

Compte tenu de $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi'''(0) = 0$ et $\varphi''(0) = 2u''(x_i)$, cela donne
$\left|u(x_i - h) - 2u(x_i) + u(x_i + h) - 2\frac{h^2}{2}u''(x_i)\right| \leqslant \frac{h^4}{4!}.2M_4$, et en divisant par $h^2 > 0$:

$$\boxed{\left|u''(x_i) - \frac{1}{h^2}(u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))\right| \leqslant \frac{h^2}{12}\sup_{x\in[0,1]}\left|u^{(4)}(x)\right|.}$$

b) On peut prendre effectivement pour u la fonction $\widehat{u}$ du 5.c car elle est bien de classe C^4 sur $[0,1]$. Sa dérivée seconde est constante égale à -1 donc $\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|\widehat{u}^{(4)}(x)\right| = 0$. La formule devient

$$\boxed{-1 = \widehat{u}''(x_i) = \frac{1}{h^2}(\widehat{u}(x_{i-1}) - 2\widehat{u}(x_i) + \widehat{u}(x_{i+1})).}$$

7.a) La première et la dernière équation du système proposé se simplifient un peu car on impose $u_0 = 0 = u_{n+1}$ et

$$\boxed{\text{en posant } A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ le système (2) s'écrit } AU = F.}$$

b) Si les composantes de V sont $v_1, \dots, v_n$ et si on pose $v_0 = 0 = v_{n+1}$, la i-ième composante de AV est donc $\frac{1}{h^2}(-v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1})$ et

$$(AV|V) = \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^n v_i(-v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1}) = \frac{1}{h^2}\sum_{i=0}^n (v_i - v_{i+1})^2 \text{ (car } v_0^2 = v_{n+1}^2 = 0).$$

$$\boxed{\text{Le produit scalaire canonique } (AV|V) \text{ peut s'écrire comme une somme de carrés de nombres réels.}}$$

c) On ne peut invoquer la propriété (P) pour justifier que A est inversible car (P_3) n'est pas vérifiée : sur certaines lignes la somme des termes est nulle.

Mais on peut dire que si AV est nul, tous les carrés, dans l'expression de $(AV|V)$, sont nuls. Les v_i sont tous égaux entre eux, donc égaux à v_0, donc nuls, donc $V = 0$. Là encore

$$\boxed{A \text{ est inversible.}}$$

8.a) Si l'on ajoute $\frac{1}{p}$ à chaque terme diagonal de A, on obtient une matrice A_p qui, elle, vérifie la propriété (P) et la suite de matrices $(A_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice A. On peut donc appliquer le résultat de 4 :

$$\boxed{\text{Les coefficients } B_{ij} \text{ de } B = A^{-1} \text{ sont positifs ou nuls.}}$$

b) On a déjà vu que $\widehat{u}(x_0) = \widehat{u}(x_{n+1}) = 0$ et que, pour i de 1 à n, on a :
$\frac{1}{h^2}(-\widehat{u}(x_{i-1}) + 2\widehat{u}(x_i) - \widehat{u}(x_{i+1})) = 1$. Le vecteur $\widehat{U}$ de composantes $\widehat{u}(x_1), \dots, \widehat{u}(x_n)$ vérifie donc $A\widehat{U} = \widehat{F}$, équivalent à $\widehat{U} = B\widehat{F}$. Donc :

$$\boxed{\text{Les composantes de } B\widehat{F} \text{ sont } \widehat{u}(x_1), \dots, \widehat{u}(x_n).}$$

Mais la i-ème composante de $B\widehat{F}$, c'est aussi $\sum\limits_{j=1}^n B_{ij}$, donc $\sum\limits_{j=1}^n B_{ij} = \widehat{u}(x_i) = \frac{x_i}{2}(1 - x_i)$, qui est positif et inférieur à $\frac{1}{8}$ car $4x_i(1 - x_i) \leqslant (x_i + (1 - x_i))^2 = 1$.
(car $(a+b)^2 - 4ab = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geqslant 0$ donc $4ab \leqslant (a+b)^2$)

$$\boxed{\text{Pour tout } i \text{ de 1 à } n, \text{ on a : } 0 \leqslant \sum_{j=1}^n B_{ij} \leqslant \frac{1}{8}.}$$

9.a) Ici on a, pour i de 1 à n : $\frac{1}{h^2}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) = f(x_i)$.

On peut aussi appliquer l'inégalité de 6.a) en prenant pour fonction u la solution du problème (1). Comme $u'' = -f$, cette inégalité devient : $\left|-f(x_i) - \frac{1}{h^2}(u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))\right| \leqslant \frac{h^2}{12}M_4$.

On a donc $\frac{1}{h^2}|u_{i-1} - u(x_{i-1}) - 2(u_i - u(x_i)) + u_{i+1} - u(x_{i+1})| \leqslant \frac{h^2}{12}M_4$.

D'autre part, puisque B est l'inverse de A, on a, pour i de 1 à n :

$$u_i - u(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \left(B_{ij} \frac{1}{h^2} (u_{i-1} - u(x_{i-1}) - 2(u_i - u(x_i)) + u_{i+1} - u(x_{i+1})) \right) \text{ donc}$$

$$|u_i - u(x_i)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left(|B_{ij}| \frac{1}{h^2} |u_{i-1} - u(x_{i-1}) - 2(u_i - u(x_i)) + u_{i+1} - u(x_{i+1})| \right) \text{ donc}$$

$$|u_i - u(x_i)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |B_{ij}| h^2 \frac{M_4}{12} \leqslant \frac{M_4 h^2}{96}, \text{ puisque } \sum_{j=1}^{n} |B_{ij}| \leqslant \frac{1}{8} \text{ et } M_4 \text{ est le sup de } |u^{(4)}| \text{ donc de } |f''| :$$

$$\boxed{\text{Pour } i \text{ de 1 à } n, \text{ on a } |u_i - u(x_i)| \leqslant \frac{h^2}{96} \sup_{x \in [0,1]} |f''(x)|.}$$

b) La résolution du problème linéaire (2) fournira donc les u_i, qui sont des approximations des $u(x_i)$, approximations d'autant meilleures, d'après a), que h est petit, donc que n est grand. On aura donc ainsi une approximation de u en n points de l'intervalle (une approximation "discrète").

c) Si $f(x) = \dfrac{25}{\sqrt{x^4+5}} = 25(x^4+5)^{-\frac{1}{2}}$, f est effectivement de classe C^2 sur $[0,1]$.

Les résultats précédents s'appliquent. On a $f'(x) = -50x^3(x^4+5)^{-\frac{3}{2}}$ et
$f''(x) = -150x^2(x^4+5)^{-\frac{3}{2}} + 300x^6(x^4+5)^{-\frac{5}{2}} = 150x^2(2x^4 - x^4 - 5)(x^4+5)^{-\frac{5}{2}}$
$= 150x^2(x^4-5)(x^4+5)^{-\frac{5}{2}}$, qu'on peut majorer en valeur absolue, pour $x \in [0,1]$, par
$150 \times 5 \times 5^{-\frac{5}{2}} = 6 \times 5^{\frac{1}{2}} \leqslant 15$. Pour assurer $|u_i - u(x_i)| < 10^{-4}$ il suffit que $\dfrac{h^2}{96}.15 < 10^{-4}$.
Il suffit que $h < 2.10^{-2}$. Comme $h = \dfrac{1}{n+1}$,

$$\boxed{\text{il suffit que } n \geqslant 50 \text{ pour assurer } |u_i - u(x_i)| < 10^{-4}.}$$

Troisième partie

10. À toute fonction u de classe C^4 sur $[0,1]$, on peut associer de manière unique v de classe C^4 sur $[0,1]$ telle que : $\forall x \in [0,1], u(x) = e^{\frac{x}{p}} v(x)$. Alors $u'(x) = \frac{1}{p} e^{\frac{x}{p}} v(x) + e^{\frac{x}{p}} v'(x)$ et $-u''(x) + \frac{1}{p^2} u(x) = -\frac{2}{p} e^{\frac{x}{p}} v'(x) - e^{\frac{x}{p}} v''(x)$. L'équation différentielle $-u''(x) + \frac{1}{p^2} u(x) = f(x)$ équivaut donc à $-\frac{2}{p} e^{\frac{x}{p}} v'(x) - e^{\frac{x}{p}} v''(x) = f(x)$ ou à $e^{\frac{2x}{p}} v''(x) + \frac{2}{p} e^{\frac{2x}{p}} v'(x) = -f(x) e^{\frac{x}{p}}$ qui s'écrit $\left(e^{\frac{2x}{p}} v'(x) \right)' = -f(x) e^{\frac{x}{p}}$, équivalent à $e^{\frac{2x}{p}} v'(x) = -\int_0^x f(t) e^{\frac{t}{p}} dt + K$, où K est une constante, puis à $v'(x) = -e^{-\frac{2x}{p}} \int_0^x f(t) e^{\frac{t}{p}} dt + K e^{-\frac{2x}{p}}$ puis à

$v(x) = \int_0^x \left(-e^{-\frac{2t}{p}} \int_0^t f(u) e^{\frac{u}{p}} du \right) dt - \frac{p}{2} K e^{-\frac{2x}{p}} + K'$, où K' est une nouvelle constante.

Ensuite $u(0) = 0 = u(1)$ équivaut à $v(0) = 0 = v(1)$ donc à

$-\dfrac{pK}{2} + K' = 0 = \int_0^1 \left(-e^{-\frac{2t}{p}} \int_0^t f(u) e^{\frac{u}{p}} du \right) dt - \frac{p}{2} K e^{-\frac{2}{p}} + K'$ qui fournit

$$K = \frac{2}{p\left(e^{-\frac{2}{p}} - 1\right)} \int_0^1 \left(-e^{-\frac{2t}{p}} \int_0^t f(u) e^{\frac{u}{p}} du \right) dt \text{ et } K' = \frac{1}{e^{-\frac{2}{p}} - 1} \int_0^1 \left(-e^{-\frac{2t}{p}} \int_0^t f(u) e^{\frac{u}{p}} du \right) dt.$$

En reportant K et K' dans $u(x) = e^{\frac{x}{p}} v(x)$ et en regroupant, on voit que le problème (3) admet l'unique solution

$$\boxed{u^{[p]}(x) = -\int_0^x (\int_0^t e^{\frac{x-2t+u}{p}} f(u) du) dt + \int_0^1 (\int_0^t \frac{e^{\frac{u-2t}{p}} (e^{\frac{x}{p}} - e^{-\frac{x}{p}})}{1 - e^{-\frac{2}{p}}} f(u) du) dt.}$$

On a fait en sorte que $u^{[p]}$ soit C^2 sur $[0,1]$. Ensuite $u'' = \dfrac{1}{p^2} u - f$ est C^2, donc u est bien de classe C^4 sur $[0,1]$.

b) Si dans 5.a) on prend $F(t) = \int_0^t f(u) du$ on obtient

$u(x) = -\int_0^x \left(\int_0^t f(u) du \right) dt + \int_0^1 \left(\int_0^t x f(u) du \right) dt$. Si on utilise l'expression de $u^{[p]}(x)$ trouvée dans 10.a) on a, en majorant $|f(u)|$ par sa borne supérieure M sur $[0,1]$, et pour tout $x \in [0,1]$,

$$|u^{[p]}(x) - u(x)| \leqslant M \int_0^x \left(\int_0^t \left| e^{\frac{x-2t+u}{p}} - 1 \right| du \right) dt + M \int_0^1 \left(\int_0^t \left| \frac{e^{\frac{u-2t}{p}} (e^{\frac{x}{p}} - e^{-\frac{x}{p}})}{1 - e^{-\frac{2}{p}}} - x \right| du \right) dt.$$

Pour p, x et t fixés, les fonctions de u dont on intègre la valeur absolue sont monotones sur $[0,1]$.
Le maximum de la valeur absolue est donc atteint à l'une des extrémités de l'intervalle $[0,1]$.
Comme $0 \leqslant t \leqslant 1$, on peut majorer l'intégrale sur $[0,t]$ par ce maximum.
On en déduit une majoration de $\int_0^x$ et $\int_0^1$ par l'intégrale sur $[0,x]$, ou $[0,1]$, de la valeur absolue d'une fonction monotone, sur $[0,1]$, de t, valeur absolue qui est donc maximale en l'une des extrémités de l'intervalle $[0,1]$.
Cela nous conduit à une majoration de la forme :

$$|u^{[p]}(x) - u(x)| \leqslant M \left| e^{\frac{x+k}{p}} - 1 \right| + M \left| \frac{e^{\frac{k'}{p}} (e^{\frac{x}{p}} - e^{-\frac{x}{p}})}{1 - e^{-\frac{2}{p}}} - x \right| \text{ où } k \text{ et } k' \text{ sont des entiers entre } -3 \text{ et } 3.$$

Or, quels que soient ces entiers k et k', les deux valeurs absolues tendent vers 0 quand $p \to +\infty$. C'est clair pour $\left| e^{\frac{x+k}{p}} - 1 \right|$. Pour l'autre, on écrit que $e^{\frac{x}{p}} - e^{-\frac{x}{p}} = 2\,\mathrm{sh}(\frac{x}{p})$ est équivalent à $2\dfrac{x}{p}$ quand $p \to +\infty$ et $1 - e^{-\frac{2}{p}}$ est équivalent à $\dfrac{2}{p}$. Donc : $\dfrac{e^{\frac{k'}{p}} (e^{\frac{x}{p}} - e^{-\frac{x}{p}})}{1 - e^{-\frac{2}{p}}}$ tend vers x. Finalement

$$\boxed{\text{La suite des fonctions } u^{[p]} \text{ converge simplement vers la fonction } u \text{ trouvée au 5.a).}}$$

11.

a) Ici $\widehat{u}^{[p]}(x) = -\int_0^x (\int_0^t e^{\frac{x-2t+u}{p}} du) dt + \int_0^1 (\int_0^t \frac{e^{\frac{u-2t}{p}} (e^{\frac{x}{p}} - e^{-\frac{x}{p}})}{1 - e^{-\frac{2}{p}}} du) dt$

$$= -\int_0^x p \left[e^{\frac{x-t}{p}} - e^{\frac{x-2t}{p}} \right] dt + \frac{e^{\frac{x}{p}} - e^{-\frac{x}{p}}}{1 - e^{-\frac{2}{p}}} \int_0^1 p \left[e^{-\frac{t}{p}} - e^{-\frac{2t}{p}} \right] dt$$

$$= p^2 \left[1 - e^{\frac{x}{p}} + \tfrac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{p}} - e^{\frac{-x}{p}} \right) + \frac{e^{\frac{x}{p}} - e^{-\frac{x}{p}}}{1 - e^{-\frac{2}{p}}} \left[1 - e^{-\frac{1}{p}} + \tfrac{1}{2}(e^{-\frac{2}{p}} - 1) \right] \right]$$

$$= p^2 \left[1 - e^{\frac{x}{p}} + \frac{e^{\frac{x}{p}} - e^{-\frac{x}{p}}}{1 - e^{-\frac{2}{p}}} \left(1 - e^{-\frac{1}{p}} \right) \right]. \text{ Comme } 1 - e^{-\frac{2}{p}} = \left(1 - e^{-\frac{1}{p}} \right) \left(1 + e^{-\frac{1}{p}} \right) :$$

$$\boxed{\widehat{u}^{[p]}(x) = p^2 \left[1 - e^{\frac{x}{p}} + \frac{e^{\frac{x}{p}} - e^{-\frac{x}{p}}}{1 + e^{-\frac{1}{p}}} \right] = p^2 \frac{1 + e^{-\frac{1}{p}} - e^{\frac{x-1}{p}} - e^{-\frac{x}{p}}}{1 + e^{-\frac{1}{p}}}.}$$

En faisant un développement limité, on constate que $\widehat{u}^{[p]}(x)$ tend effectivement vers $\dfrac{x - x^2}{2}$ quand $p \to +\infty$.

b) $(\widehat{u}^{[p]})'(x)$ est du signe de $-e^{\frac{x-1}{p}} + e^{-\frac{x}{p}}$ donc du signe de $-\frac{x}{p} - \frac{x-1}{p}$ puisque l'exponentielle est croissante.

$$\boxed{\widehat{u}^{[p]} \text{ est croissante sur } [0, \tfrac{1}{2}] \text{ et décroissante sur } [\tfrac{1}{2}, 1].}$$

On sait déjà que $\widehat{u}^{[p]}(0) = \widehat{u}^{[p]}(1) = 0$ et on trouve $\widehat{u}^{[p]}(\frac{1}{2}) = p^2 \left(1 - \dfrac{2e^{-\frac{1}{2p}}}{1 + e^{-\frac{1}{p}}} \right) = p^2 \left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,\frac{1}{2p}} \right)$.

c) Compte tenu des variations de $\widehat{u}^{[p]}$, il reste à prouver que $1 - \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,\frac{1}{2p}} < \dfrac{1}{8p^2}$ ou encore, en posant $\dfrac{1}{2p} = x$, que $1 - \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,x} < \dfrac{x^2}{2}$ pour $x > 0$, ou encore $\mathrm{ch}\,x - 1 < \dfrac{x^2\,\mathrm{ch}\,x}{2}$.

Or cela est vrai car $\operatorname{ch} x - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ alors que $\frac{x^2 \operatorname{ch} x}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{2(2n)!}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier } p \geqslant 1 \text{ et tout } x \in [0,1], \text{ on a : } 0 \leqslant \widehat{u}^{[p]}(x) < \frac{1}{8}.}$$

12.

a) La matrice $A + \frac{1}{p^2} I$ a la propriété P. Elle est donc inversible. Donc :

$$\boxed{\text{Le système linéaire } (A + \frac{1}{p^2} I)U = F \text{ a donc une solution unique.}}$$

$U^{[p]} = (A + \frac{1}{p^2} I)^{-1} F$. Quand $p \to +\infty$, $A + \frac{1}{p^2} I$ converge vers A, donc, d'après 2.c), $(A + \frac{1}{p^2} I)^{-1}$ converge vers A^{-1}. L'application $M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto MF$ étant linéaire donc continue, $(A + \frac{1}{p^2} I)^{-1} F$ converge vers $A^{-1} F$. Donc :

$$\boxed{\text{Quand } p \to +\infty, U^{[p]} \text{ tend vers } U, \text{ la solution du système (2).}}$$

b) Remplaçons les exposants $[p]$ par des soulignements pour alléger les écritures. On a maintenant $\frac{1}{h^2}(-\underline{u}_{i-1} + 2\underline{u}_i - \underline{u}_{i+1}) + \frac{1}{p^2} \underline{u}_i = f(x_i)$.

Appliquons l'inégalité du 6.a) à la fonction $u^{[p]}$ notée $\underline{u}$.

Comme $\underline{u}'' = -f + \frac{1}{p^2} \underline{u}$, cette inégalité devient :

$$\left| -f(x_i) + \frac{1}{p^2} \underline{u}(x_i) - \frac{1}{h^2} (\underline{u}(x_{i-1}) - 2\underline{u}(x_i) + \underline{u}(x_{i+1})) \right| \leqslant \frac{h^2}{12} M_4.$$

On a donc $\left| -\frac{1}{p^2} (\underline{u}_i - \underline{u}(x_i)) + \frac{1}{h^2} \left(\underline{u}_{i-1} - \underline{u}(x_{i-1}) - 2(\underline{u}_i - \underline{u}(x_i)) + \underline{u}_{i+1} - \underline{u}(x_{i+1}) \right) \right| \leqslant \frac{h^2}{12} M_4$.

D'autre part, en notant $\underline{B}$ l'inverse de $A + \frac{1}{p^2} I$, on a, pour i de 1 à n :

$$\underline{u}_i - \underline{u}(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \underline{B}_{ij} \left(\frac{1}{h^2} \left(-(\underline{u}_{i-1} - \underline{u}(x_{i-1})) + 2(\underline{u}_i - \underline{u}(x_i)) - (\underline{u}_{i+1} - \underline{u}(x_{i+1})) \right) + \frac{1}{p^2} (\underline{u}_i - \underline{u}(x_i)) \right)$$

donc :

$$|\underline{u}_i - \underline{u}(x_i)| \leqslant h^2 \frac{M_4}{12} \sum_{j=1}^{n} |\underline{B}_{ij}|.$$

Comme $A + \frac{1}{p^2} I$ vérifie (P), les $\underline{B}_{ij}$ sont positifs.

Introduisons à nouveau le vecteur $\widehat{F}$ dont toutes les composantes sont égales à 1, le vecteur $\widehat{U}$ introduit au 8.b) et le vecteur $\underline{\widehat{U}} = \underline{B} \widehat{F}$. Toutes les composantes de $\underline{\widehat{U}}$ sont positives.

Comme $A\widehat{U} = \widehat{F} = (A + \frac{1}{p^2} I) \underline{\widehat{U}}$, on a $A(\widehat{U} - \underline{\widehat{U}}) = \frac{1}{p^2} \underline{\widehat{U}}$, donc $\widehat{U} - \underline{\widehat{U}} = \frac{1}{p^2} B \underline{\widehat{U}}$.

Les composantes de $\widehat{U} - \underline{\widehat{U}}$ sont donc positives. Celles de $\underline{\widehat{U}}$ sont donc inférieures à celles de $\widehat{U}$, donc à $\frac{1}{8}$.

La i-ème composante étant $\sum_{j=1}^{n} \underline{B}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} |\underline{B}_{ij}|$, on a donc encore $\sum_{j=1}^{n} |\underline{B}_{ij}| \leqslant \frac{1}{8}$.

Il nous faut maintenant trouver un majorant M_4 de $|\underline{u}^{(4)}|$.

Comme $\underline{u}^{(4)} = \frac{1}{p^2} \underline{u}'' - f'' = \frac{1}{p^4} \underline{u} - \frac{1}{p^2} f - f''$, on peut prendre $M_4 = \frac{1}{p^4} M_0 + \frac{1}{p^2} ||f|| + ||f''||$ où M_0 est un majorant de $|\underline{u}|$. En majorant bornes et fonctions dans l'expression de $\underline{u}$ trouvée dans 10.a) on obtient $\underline{u}(x) \leqslant ||f|| \left(e^{\frac{4}{p}} + 2 \frac{e^{\frac{3}{p}} \operatorname{sh}(\frac{1}{p})}{1 - e^{-\frac{2}{p}}} \right)$, peu esthétique, que nous noterons $r_p ||f||$. Finalement :

$$\boxed{\left| u_i^{[p]} - u^{[p]}(x_i) \right| \leqslant \frac{h^2}{96} \left((\frac{r_p}{p^4} + \frac{1}{p^2}) ||f|| + ||f''|| \right).}$$

***

Semaine 8 : Dérivées

Cette semaine a été consacrée aux dérivées. On a surtout révisé le cours de Sup car la partie nouvelle, qui concerne les dérivées des fonctions à valeurs vectorielles, est assez restreinte.

• Sujet 23 : Concours Mines-Ponts 2001 Mathématiques 1 Filière PC

Il s'agit de trouver les endomorphismes g de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant une relation de la forme $g \circ g = \lambda.id + D$, où D est l'endomorphisme dérivation et le problème fait, semble-t-il, le tour de la question (dimension finie ou pas, signe de λ, etc)

Après une bonne dose d'algèbre linéaire très classique, utilisant surtout le programme de Sup, vient une partie, assez longue, utilisant la dérivation de matrices fonctions d'une variable réelle.

Le problème est long mais assez facile, au moins au début. Il comporte quelques questions qui sont –presque– des questions de cours.

La fin utilise les séries entières, que nous n'avons pas encore étudiées. Nous avons mis une indication pour permettre aux 3/2 de poursuivre mais ceux qui sont fatigués pourront s'arrêter là car, avant ces questions, on a vu l'essentiel.

• Sujet 24 : Concours Mines-Ponts 1998 Mathématiques 2 Filière PSI

C'est un sujet assez court et assez facile. La dérivation n'est utilisée que dans une partie du problème, mais il s'agit bien de dérivation d'une fonction à valeurs vectorielles, en l'occurrence la dérivation d'une matrice fonction d'une variable.

On utilise aussi quelques notions non encore vues cette année : espaces euclidiens, matrices symétriques, systèmes différentiels, intégration d'une fonction vectorielle. Seules les matrices symétriques pourraient poser problème ; nous avons donné, en conséquence, des indications suffisantes.

• Sujet 25 : E.N.S. et École Polytechnique 1998 Filière PSI

L'École Polytechnique recrute encore peu d'élèves en PSI-PSI* mais, bien sûr, les veut de haut niveau, d'où l'existence de cette épreuve commune avec les Ecoles Normales Supérieures.

Ce problème étudie l'approximation d'une fonction par son polynôme d'interpolation de Lagrange, surtout pour les fonctions f de la forme $f(x) = \frac{1}{x^2 + \alpha^2}$.

Il démarre par des questions assez faciles. Ensuite, cela se complique par endroits. De toute façon, il ne requiert que des idées solides sur le programme d'analyse de Sup (accroissements finis, quelques calculs d'intégrales...).

MINES - PONTS 2001 Filière PC

Mathématiques 1

Durée : 3 heures

L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

NOTATIONS

Soit V un espace vectoriel réel ; l'espace vectoriel des endomorphismes de l'espace vectoriel V est désigné par $L(V)$. Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel V ; l'endomorphisme noté f^k, où k est un entier naturel désigne l'endomorphisme unité Id_V si l'entier k est nul, l'endomorphisme obtenu en composant f k-fois avec lui-même si l'entier k est supérieur ou égal à 1 :

$$f^0 = Id_V \quad ; \quad f^{k+1} = f^k \circ f.$$

Soit E l'espace vectoriel des polynômes réels ; étant donné un entier naturel n, soit E_n l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n :

$$E = \mathbb{R}[X] \quad ; \quad E_n = \mathbb{R}_n[X].$$

Soit D l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ qui, au polynôme Q, fait correspondre le polynôme dérivé Q'. De même, soit D_n l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ qui, au polynôme Q, fait correspondre le polynôme dérivé Q'.

L'objet et du problème est de rechercher des réels λ pour lesquels l'endomorphisme $\lambda Id_E + D$ est égal au composé d'un endomorphisme g de l'espace vectoriel E avec lui-même ; ainsi que des réels λ pour lesquels l'endomorphisme $\lambda Id_{E_n} + D_n$ est égal au composé d'un endomorphisme g de l'espace vectoriel E_n avec lui-même.

Les troisième et quatrième parties peuvent être abordées indépendamment des première et deuxième parties ainsi que des préliminaires.

PRÉLIMINAIRES

Noyaux itérés

Soient V un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de V.

a. Démontrer que la suite des noyaux des endomorphismes $f^k, k = 0, 1, 2, \ldots$ est une suite de sous-espaces vectoriels de V emboîtée croissante :

$$\ker f^0 \subset \ker f^1 \subset \ker f^2 \subset \ldots \subset \ker f^k \subset \ker f^{k+1} \subset \ldots$$

b. Démontrer que, s'il existe un entier p tel que les noyaux des endomorphismes f^p et f^{p+1} soient égaux ($\ker f^p = \ker f^{p+1}$), pour tout entier q supérieur ou égal à p, les noyaux des endomorphismes f^q et f^{q+1} sont égaux ($\ker f^q = \ker f^{q+1}$) ; en déduire la propriété suivante :

$$\text{pour tout entier } k \text{ supérieur ou égal à } p, \quad \ker f^k = \ker f^p.$$

En déduire que, si l'espace vectoriel V est de dimension finie n, la suite des dimensions des noyaux des endomorphismes f^k est constante à partir d'un rang p inférieur ou égal à la dimension n ($p \leqslant n$). En particulier les noyaux $\ker f^n$, $\ker f^{n+1}$ sont égaux.

c. Démontrer que, si l'endomorphisme u d'un espace vectoriel V de dimension finie n, est tel qu'il existe un entier q supérieur ou égal à 1 ($q \geqslant 1$) pour lequel l'endomorphisme u^q est nul ($u^q = 0$), l'endomorphisme u^n est nul ($u^n = 0$).

L'endomorphisme u est dit nilpotent.

PREMIÈRE PARTIE

Le but de cette partie est d'établir des propriétés des endomorphismes g recherchés et de donner un exemple.

I-1. Une caractérisation des sous-espaces vectoriels stables par g

Soit λ un réel donné.

a. Étant donné un entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$), soit p un entier naturel inférieur ou égal à l'entier n ($0 \leqslant p \leqslant n$).

Démontrer que, s'il existe un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$, tel que

$$g^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n$$

l'endomorphisme g commute avec D_n :

$$g \circ D_n = D_n \circ g.$$

En remarquant que le sous-espace vectoriel $E_p = \mathbb{R}_p[X]$ est égal à $\ker (D_n)^{p+1}$, démontrer que E_p est stable par l'endomorphisme g de E_n ; soit g_p la restriction de l'endomorphisme g à E_p. Démontrer la relation :

$$(g_p)^2 = \lambda Id_{E_p} + D_p.$$

b. Démontrer que, s'il existe un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$, tel que

$$g^2 = \lambda Id_E + D,$$

l'endomorphisme g commute avec D :

$$g \circ D = D \circ g.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n, le sous-espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ est stable par l'endomorphisme g et que, si g_n est la restriction de l'endomorphisme g à E_n, il vient :

$$(g_n)^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n.$$

c. Soit g un endomorphisme de l'espace des polynômes réels $E = \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$g^2 = \lambda Id_E + D.$$

i/ Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E de dimension $n+1$ stable par l'endomorphisme D. Démontrer que l'endomorphisme D_F, restriction de D à F, est nilpotent.

En déduire que le sous-espace vectoriel F est égal à $E_n = \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer ensuite tous les sous-espaces vectoriels G de E (de dimension finie ou non) stables par D.

ii/ Démontrer que, pour qu'un sous-espace vectoriel G de E soit stable par l'endomorphisme g, il faut et il suffit qu'il soit stable par D.

I-2. Une application immédiate : le cas $\lambda < 0$

a. À quelle condition nécessaire sur le réel λ existe-t-il un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_0 = \mathbb{R}_0[X]$ tel que

$$g^2 = \lambda Id_{E_0} + D_0 \ ?$$

b. Soit λ un réel strictement négatif ($\lambda < 0$), déduire des résultats précédents les deux propriétés :

- Il n'existe pas d'endomorphisme g de E tel que :

$$g^2 = \lambda Id_E + D.$$

- Il n'existe pas d'endomorphisme g de E_n tel que :

$$g^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n.$$

I-3. Une représentation matricielle simple de D_n

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 1, λ un réel.

Matrice A_λ : soit A_λ la matrice carrée d'ordre $n+1$ définie par les relations suivantes : ses coefficients a_{ij}, $i = 0, 1, \ldots n$, $j = 0, 1, \ldots, n$, sont définis par les relations :

$$a_{ii} = \lambda, \quad a_{i\,i+1} = 1, \quad a_{ij} = 0 \text{ si } j \neq i \text{ ou si } j \neq i+1.$$

C'est-à-dire :

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

a. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension finie $n+1$ tel que l'endomorphisme f^{n+1} soit nul sans que l'endomorphisme f^n le soit :

$$f^{n+1} = 0, \quad f^n \neq 0.$$

Démontrer qu'il existe un vecteur y de l'espace vectoriel V tel que la famille $B = \left(f^n(y), f^{n-1}(y), ..., y\right)$ soit libre. Quelle est la matrice associée à l'endomorphisme f dans la base B ?

b. En déduire qu'il existe une base B_n de l'espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ pour laquelle la matrice associée à l'endomorphisme D_n est la matrice A_0. Que vaut la matrice associée à l'application $\lambda Id_{E_n} + D_n$ dans cette base B_n ?

I-4. Un exemple

Dans cette question l'entier n est égal à 2.

a. Démontrer que les seuls endomorphismes h de E_2 qui commutent avec l'endomorphisme D_2 sont les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 en D_2 :

$$h = a Id_{E_2} + b D_2 + c (D_2)^2 .$$

a, b, c sont trois réels.

b. En déduire qu'il existe des endomorphismes g de E_2 qui vérifient la relation suivante :

$$g^2 = \lambda Id_{E_2} + D_2 .$$

Déterminer les matrices carrées G d'ordre 3 qui vérifient la relation suivante :

$$G^2 = A_1.$$

DEUXIÈME PARTIE

L'objet de cette partie est d'étudier le cas où le réel λ est nul. Dans cette partie l'entier n est supposé donné supérieur ou égal à 1.

II-1. Existence d'un endomorphisme g tel que $g^2 = D_n$

a. Montrer que, s'il existe un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ tel que $g^2 = D_n$, alors l'endomorphisme g est nilpotent et le noyau de l'endomorphisme g^2 a une dimension au moins égale à 2 (dim ker $g^2 \geqslant 2$).

b. En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ tel que $g^2 = D_n$.

c. En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ tel que $g^2 = D$.

II-2. Existence d'un endomorphisme g tel que $g^k = D^m$

Soit m un entier supérieur ou égal à 1 ($m \geqslant 1$) et k un entier supérieur ou égal à 2 ($k \geqslant 2$). Soit g un endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ tel que la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$g^k = D^m .$$

a. Démontrer que les deux endomorphismes D et g sont surjectifs.

b. Démontrer que les sous-espaces vectoriels de E, ker g^p ont des dimensions finies lorsque l'entier q est inférieur ou égal à l'entier k ($0 \leqslant q \leqslant k$).

c. Soit p un entier supérieur au égal à 2 et inférieur ou égal à k ($2 \leqslant p \leqslant k$). Soit Φ l'application définie dans l'espace vectoriel ker g^p par la relation :

$$\Phi : P \longrightarrow g(P) .$$

Démontrer que cette application Φ est une application linéaire de ker g^p dans l'espace vectoriel ker g^{p-1}. Quel est le noyau de l'application Φ ? Démontrer que l'application Φ est surjective (ImΦ = ker g^{p-1}).

En déduire une relation entre les dimensions des sous-espaces vectoriels ker g^p et ker g^{p-1}. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel ker g^p en fonction de la dimension de l'espace vectoriel ker g ?

d. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les entiers k et m pour qu'il existe au moins un endomorphisme g de l'espace vectoriel E tel que $g^k = D^m$. Retrouver le résultat de la question II-1.c.

TROISIÈME PARTIE

L'entier strictement positif n est supposé fixé. Dans cette partie, l'espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ est muni de la base B_n définie à la question I-3.b. La matrice associée à l'application I_{E_n} est la matrice I_{n+1} ; la matrice associée à l'endomorphisme D_n, est désignée par le même symbole D_n.

Étant donné un réel λ supposé strictement positif ($\lambda > 0$), soit L_n l'application de $\mathbb{R}$ dans l'espace des matrices carrées réelles d'ordre $n+1$, $M_{n+1}(\mathbb{R})$ qui, au réel t associe la matrice L_n définie par la relation suivante :

$$L_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k} (D_n)^k .$$

La matrice $(D_n)^k$ est le produit k-fois avec elle-même de la matrice D_n.

III-1. Dérivée de l'application $t \longrightarrow (L_n(t))^k$

a. Démontrer que, pour tout t réel, la matrice $I_{n+1} + tD_n$ est inversible et que son inverse, noté $(I_{n+1} + tD_n)^{-1}$ s'écrit sous la forme suivante :

$$(I_{n+1} + tD_n)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\ (D_n)^k .$$

Déterminer les fonctions $a_k : t \longrightarrow a_k(t)$ (bien sûr :$(D_n)^0 = I_{n+1}$).

b. Démontrer que l'application de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des matrices, réelles, carrées, d'ordre $n+1$: $t \longrightarrow (I_{n+1} + tD_n)^{-1}$ est dérivable ; exprimer sa dérivée à l'aide des matrices $(I_{n+1} + tD_n)^{-1}$ et D_n.

c. Démontrer que, pour tout réel t, la matrice $L_n(t)$, élevée à la puissance $n+1$ est nulle :

$$(L_n(t))^{n+1} = 0.$$

d. Calculer la fonction dérivée $t \longrightarrow \dfrac{d}{dt} L_n(t)$ de la fonction $t \longrightarrow L_n(t)$ au moyen des matrices D_n et $(I_{n+1} + tD_n)^{-1}$.

Étant donné un entier naturel k donné, déduire des résultats précédents l'expression de la fonction dérivée $t \longrightarrow \dfrac{d}{dt}(L_n(t))^k$ de la fonction $t \longrightarrow (L_n(t))^k$ à l'aide de l'entier k et des matrices $L_n(t)$, D_n et $(I_{n+1} + tD_n)^{-1}$.

III-2. Matrice $\varphi_u(t)$

Étant donné un réel u, soit $\varphi_u(t)$ la matrice définie par la relation suivante :

$$\varphi_u(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} (L_n(t))^k .$$

La matrice $(L_n(t))^k$ est la matrice $L_n(t)$ élevée à la puissance k.

a. Démontrer qu'étant donnés deux réels u et v le produit des matrices $\varphi_u(t)$ et $\varphi_v(t)$ est égal à la matrice $\varphi_{u+v}(t)$:

$$\varphi_u(t) \cdot \varphi_v(t) = \varphi_{u+v}(t)$$

b. Démontrer que la fonction $t \longrightarrow \varphi_u(t)$ est dérivable et que sa dérivée φ'_u est définie sur la droite réelle par la relation suivante :

$$\varphi'_u(t) = u\,(I_{n+1} + tD_n)^{-1} .D_n.\varphi_u(t)$$

c. Dans cette question le réel u est égal à 1 ; démontrer que la dérivée seconde de la fonction φ_1 est nulle : pour tout réel t , $\varphi''_1(t) = 0$. En déduire la relation :

$$\varphi_1(t) = I_{n+1} + tD_n .$$

III-3. Existence de l'endomorphisme g

a. Soit λ un réel strictement positif ($\lambda > 0$) ; en utilisant les résultats de la question précédente et en remarquant la relation suivante

$$\lambda I_{n+1} + D_n = \lambda \left(I_{n+1} + \frac{1}{\lambda} D_n \right),$$

démontrer qu'il existe une matrice carrée réelle d'ordre $n+1$ telle que

$$M^2 = \lambda I_{n+1} + D_n.$$

Exprimer cette matrice M avec une matrice $\varphi_u(t)$. En déduire l'existence d'un endomorphisme g de E_n tel que :

$$g^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n.$$

b. Retrouver les matrices obtenues à la question I-4.

QUATRIÈME PARTIE

IV-1. Un développement en série entière

a. Soit h la fonction définie sur la demi-droite $[-1, +\infty[$ par la relation :

$$h(x) = \sqrt{1+x}.$$

Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre dont une solution est cette fonction h.

b. En déduire qu'il existe un intervalle ouvert $]-R, R[$ dans lequel la fonction h est la somme d'une série entière de terme général $b_p x^p$, $p = 0, 1, 2, \dots$. Déterminer le rayon de convergence R et les coefficients b_p.

$$\text{pour tout réel } x \text{ appartenant à }]-R, R[,\ h(x) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p x^p.$$

> Les 3/2 pourront admettre l'existence d'un tel développement sur l'intervalle $]-1, 1[$, les coefficients étant les mêmes que dans le développement limité de h au voisinage de 0. Pour traiter c., il pourront faire le produit du développement limité par lui-même.

c. Déterminer les valeurs des réels c_n, $n = 0, 1, 2, \dots$définis par la relation suivante :

$$c_n = \sum_{p=0}^{n} b_p b_{n-p}.$$

IV-2. Existence d'un endomorphisme g de E tel que $g^2 = \lambda Id_E + D$ où λ est strictement positif

Soit λ un réel strictement positif donné ($\lambda > 0$).

a. Soit T l'application définie dans $E = \mathbb{R}[X]$ par la relation :

$$\text{pour tout } P \text{ de } E, \quad T(P) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{b_p}{\lambda^p} D^p P.$$

Démontrer que T est un endomorphisme de E.

b. Calculer pour tout polynôme P de E son image par l'application composée $T \circ T = T^2$.

c. En déduire l'existence d'un endomorphisme g de E qui vérifie la relation suivante :

$$g^2 = \lambda Id_E + D.$$

d. En déduire, pour tout entier naturel n, l'existence d'un endomorphisme g_n, de l'espace vectoriel $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ tel que la relation ci-dessous ait lieu :

$$(g_n)^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n.$$

Exprimer l'endomorphisme g_n comme un polynôme de l'endomorphisme D_n.
Retrouver les matrices obtenues à la question I-4.

***

MINES - PONTS 2001	Filière PC
Mathématiques 1	CORRIGÉ

PRÉLIMINAIRES : Noyaux itérés

a. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $x \in \ker f^k$, alors $f^k(x) = 0$, donc $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = 0$ donc $x \in \ker f^{k+1}$. Donc $\ker f^k \subset \ker f^{k+1}$. En rappelant au passage que $\ker f^k$ est un sous-espace vectoriel de V :

> La suite des $\ker f^k$ est emboitée croissante : $\ker f^0 \subset \ker f^1 \subset \dots \subset \ker f^k \subset \ker f^{k+1} \subset \dots$

b. Supposons que $\ker f^p = \ker f^{p+1}$. Soit $x \in \ker f^{p+2}$. Alors $f^{p+2}(x) = 0$ donc $f^{p+1}(f(x)) = 0$ donc $f(x) \in \ker f^{p+1}$ donc $f(x) \in \ker f^p$ donc $f^p(f(x)) = 0$ donc $x \in \ker f^{p+1}$ donc $\ker f^{p+2} \subset \ker f^{p+1}$. Comme on a l'inclusion inverse, on a $\ker f^{p+1} = \ker f^{p+2}$, et de même $\ker f^{p+2} = \ker f^{p+3}$ etc.

> Si $\ker f^p = \ker f^{p+1}$, alors, pour tout $q \geqslant p$, on a $\ker f^q = \ker f^{q+1}$.

(Pour éviter les « etc », on pouvait dire : Supposons que $\ker f^p = \ker f^{p+1}$ et soit $q \geqslant p$. Alors :

$x \in \ker f^{q+1}$. $\Leftrightarrow$ $f^{q+1}(x) = 0 \Leftrightarrow f^{p+1}(f^{q-p}(x)) = 0 \Leftrightarrow f^{q-p}(x) \in \ker f^{p+1} \Leftrightarrow f^{q-p}(x) \in \ker f^p$
$\Leftrightarrow$ $f^p(f^{q-p}(x)) = 0 \Leftrightarrow f^q(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker f^q$, d'où l'égalité $\ker f^q = \ker f^{q+1}$.)

Donc $\ker f^p = \ker f^{p+1} = \ker f^{p+2} = \ker f^{p+3}$ et par récurrence :

> Pour tout entier k supérieur ou égal à p, on a $\ker f^k = \ker f^p$.

On suppose maintenant V de dimension finie n. Les $\ker f^k$ sont tous de dimension finie.
Supposons que pour tout $p \leqslant n$ on ait $\ker f^p \neq \ker f^{p+1}$.
L'inclusion $\ker f^0 \subset \ker f^1$ est donc stricte donc $\dim \ker f^1 \geqslant 1 + \dim(\ker f^0)$. De même, l'inclusion $\ker f^1 \subset \ker f^2$ est stricte donc $\dim \ker f^2 \geqslant 1 + \dim(\ker f^1) \geqslant 2 + \dim(\ker f^0)$ etc.
Enfin l'inclusion $\ker f^n \subset \ker f^{n+1}$ est stricte donc
$\dim(\ker f^{n+1}) \geqslant 1 + \dim(\ker f^n) \dots \geqslant n + 1 + \dim(\ker f^0)$, ce qui est absurde.
Il existe donc $p \leqslant n$ tel que $\ker f^p = \ker f^{p+1}$. Ensuite, d'après ce qui précède, on a $\ker f^k = \ker f^p$ pour tout entier k supérieur ou égal à p.

> Si V est de dimension finie n, la suite des $\ker f^k$ est constante à partir d'un rang $p \leqslant n$.

c. En particulier, si u est un endomorphisme de V, V étant de dimension finie n et si V_1 est le sous-espace tel que, pour tout $k \geqslant p$, $\ker u^k = V_1$, on a $\ker u^n = V_1$ puisque $p \leqslant n$.
S'il existe q tel que que u^q est l'endomorphisme nul, donc $\ker u^q = V$ tout entier, on a $V \subset V_1$; comme on a évidemment $V_1 \subset V$, c'est que $V_1 = V$. Donc $\ker u^n = V$, donc

> sous les hypothèses faites, u^n est l'endomorphisme nul.

PREMIÈRE PARTIE

I-1. Une caractérisation des sous-espaces vectoriels stables par g

a. On suppose donc que g est un endomorphisme de $E_n = \mathbb{K}_n[x]$ tel que $g \circ g = \lambda Id_{E_n} + D_n$, où D_n est l'endomorphisme dérivation.
Alors $g^3 = g^2 \circ g = (\lambda Id_{E_n} + D_n) \circ g = \lambda g + D_n \circ g$ mais aussi
$g^3 = g \circ g^2 = g \circ (\lambda Id_{E_n} + D_n) = \lambda g + g \circ D_n$, donc $\lambda g + D_n \circ g = \lambda g + g \circ D_n$, donc $D_n \circ g = g \circ D_n$, donc

> l'endomorphisme g commute avec D_n.

On suppose l'entier p inférieur à n. Si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, sa dérivée $(p+1)$-ième, obtenue en lui appliquant $(p+1)$ fois l'endomorphisme D_n, est nulle si et seulement si ce polynôme est de degré inférieur ou égal à p. $\ker(D_n^{p+1})$ est donc effectivement égal à $\mathbb{R}_p[X]$.
Soit $P \in E_p = \mathbb{R}_p[X]$. Alors $D_n^{p+1}(g(P)) = (D_n^{p+1} \circ g)(P) = (g \circ D_n^{p+1})(P)$ car g commute avec D_n donc commute avec toutes les puissances de D_n. Comme $P \in E_p$, le polynôme $D_n^{p+1}(P)$ est nul. Donc $D_n^{p+1}(g(P)) = 0$ donc $g(P) \in E_p$, donc

$\boxed{E_p \text{ est stable par } g.}$

On peut donc bien considérer g_p, restriction de g à E_p et de même les restrictions λId_{E_p} et D_p de λId_{E_n} et D_n à E_p qui est stable par ces deux autres endomorphismes.
Les endomorphismes g^2 et $\lambda Id_{E_n} + D_n$ sont égaux, donc leurs restrictions sont égales.

$$\boxed{(g_p)^2 = \lambda Id_{E_p} + D_p.}$$

b. Dans la démonstration de a., on peut remplacer E_n par E, et D_n par D. On en déduit que :

$\boxed{\text{Si } g^2 = \lambda Id_E + D, \text{ alors } g \text{ commute avec } D.}$

Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $D^{n+1}(P)$ est nul, donc $(g \circ D^{n+1})(P)$ est nul. Comme $g \circ D^{n+1} = D^{n+1} \circ g$, on a $(D^{n+1} \circ g)(P) = 0$. La dérivée $(n+1)$-ième de $g(P)$ est nulle, donc $g(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ donc

$\boxed{\text{pour tout entier } n, \text{ le sous-espace } E = \mathbb{R}_n[X] \text{ de } \mathbb{R}[X] \text{ est stable par } g.}$

Là aussi, les restrictions à E_n de deux endomorphismes égaux sont égales donc :

$$\boxed{(g_n)^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n.}$$

c.

i/ F est un sous-espace de E de dimension finie ; soit $\mathcal{B}$ une base de F ; elle est formée de polynômes ; si m est le plus grand degré de ces polynômes, toute combinaison linéaire de ces polynômes de base est de degré inférieur ou égal à m. F est donc inclus dans $\mathbb{R}_m[X]$. Pour tout P dans F, on a donc $D^{m+1}(P) = 0$. De plus, on suppose que F est stable par D et on note D_F la restriction de D à F.
On a donc $D_F^{m+1} = 0$. Donc :

$\boxed{D_F \text{ est un endomorphisme nilpotent de } F.}$

D'après le c. du préliminaire, l'endomorphisme D_F^{n+1} de F est donc nul.
La dérivée $n+1$-ième de tout polynôme de F est donc nulle. Tout ces polynômes sont donc de degré inférieur ou égal à n. F est donc inclus dans $\mathbb{R}_n[X]$; comme ces deux sous-espaces sont de même dimension $n+1$, ils sont égaux.

$\boxed{\text{Le sous-espace } F \text{ est égal à } \mathbb{R}_n[X].}$

En dehors du sous-espace réduit au vecteur nul, tout sous-espace de dimension finie de E stable par D est donc un certain $\mathbb{R}_n[X]$. Réciproquement, tous les $\mathbb{R}_n[X]$ sont évidemment stables par dérivation.
Soit maintenant F un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ de dimension infinie et stable par D.
Pour tout entier n, F n'est pas inclus dans $\mathbb{R}_n[X]$, qui est de dimension finie. F contient donc un polynôme P de degré $m > n$.
Stable par dérivation, F contient les dérivées successives de P. Parmi ces dérivées figure un polynôme P_n de degré n, et ses dérivées successives $P_{n-1}, P_{n-2}, ..., P_0$. Ces $n+1$ polynômes $P_0, \ldots, P_n$, échelonnés en degré, forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Le sous-espace F contient donc, par combinaison linéaire, tous les éléments de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme c'est vrai pour tout n, F contient tous les polynômes, donc $F = \mathbb{R}[X]$.
Finalement :

$\boxed{\text{Les s.e.v de } \mathbb{R}_n[X] \text{ stables par } D \text{ sont : le s.e.v. réduit au vecteur nul, les } \mathbb{R}_n[X] \text{ et } \mathbb{R}[X] \text{ tout entier.}}$

ii/ Si G sous-espace de E est stable par D c'est donc $\{0\}$, un $\mathbb{R}_n[X]$ ou $\mathbb{R}[X]$. Dans chaque cas il est stable par g : dans le deuxième cas on utilise b. ; les deux autres cas sont évidents.

Réciproquement, si un sous-espace est stable par g, il est stable par g^2. Comme il est de toutes façons stable par λId_E, il est stable par $D = g^2 - \lambda Id_E$. Résumons :

$\boxed{\text{Un sous-espace } G \text{ de } E \text{ est stable par } g \text{ si et seulement si il est stable par } D.}$

I-2. Une application immédiate : le cas $\lambda < 0$

a. $E_0 = \mathbb{R}_0[X]$ est de dimension 1. La dérivation D_0 est l'application nulle. Les seuls endomorphismes d'un espace de dimension 1 sont les homothéties. Si g est l'homothétie de rapport μ de E_0, g^2 est l'homothétie de rapport μ^2. Elle est égale à $\lambda Id_{E_0} + D = \lambda Id_{E_0}$ si et seulement si $\mu^2 = \lambda$. Donc :

$\boxed{g \text{ existe si et seulement si } \lambda \geqslant 0.}$

b. Supposons $\lambda < 0$. S'il existait un endomorphisme g de E tel que $g^2 = \lambda Id_E + D$, E_0 devrait être stable par g et la restriction g_0 de g à E_n devrait vérifier $g_0^2 = \lambda Id_{E_0} + D_0$, d'après I-1.b). C'est impossible d'après a. puisque $\lambda < 0$.

$\boxed{\text{Si } \lambda < 0, \text{ il n'existe pas d'endomorphisme } g \text{ de } E \text{ tel que } g^2 = \lambda Id_E + D.}$

On peut remplacer E par E_n dans le raisonnement, à condition d'invoquer I-1.a) au lieu de I-1.b)

$\boxed{\text{Si } \lambda < 0, \text{ il n'existe pas d'endomorphisme } g \text{ de } E_n \text{ tel que } g^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n.}$

I-3. Une représentation matricielle simple de D_n

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix}.$$

a. Ici $\dim(V) = n+1$, $f \in L(V)$, $f^n \neq 0$ et $f^{n+1} = 0$. Puisque $f^n \neq 0$, il existe $y \in V$ tel que $f^n(y) \neq 0$.

$\boxed{\text{En choisissant } y \text{ tel que } f^n(y) \neq 0, \text{ la famille } B = (f^n(y), f^{n-1}(y), \ldots, y) \text{ est libre.}}$

En effet, supposons $\alpha_n f^n(y) + \alpha_{n-1} f^{n-1}(y) + \ldots + \alpha_1 y = 0$. Composons par f^n. Il ne reste que $\alpha_1 f^n(y) = 0$. Comme $f^n(y) \neq 0$, on a donc $\alpha_1 = 0$. Donc $\alpha_n f^n(y) + \alpha_{n-1} f^{n-1}(y) + \ldots + \alpha_2 f(y) = 0$. En composant maintenant par f^{n-1}, on arrive à $\alpha_2 = 0$. On montre ainsi de proche en proche que tous les α_k sont nuls, d'où la liberté de la famille.
Puisque cette famille B comporte $n+1$ vecteurs dans V de dimension $n+1$, c'est une base de V. L'image du premier vecteur de base est nulle. L'image de chacun des autres vecteurs de base est le vecteur qui le précède dans la base. Donc :

$$\boxed{\text{La matrice de } f \text{ sur cette base est } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}. \text{ C'est la matrice } A_0}$$

b. L'endomorphisme D_n de $\mathbb{R}_n[X]$ relève de l'étude de a) puisque D_n^{n+1} est nul alors que D_n^n ne l'est pas. Donc :

$\boxed{\text{Il existe une base } B_n \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ sur laquelle la matrice de } D_n \text{ est } A_0.}$

Pour avoir la matrice de $\lambda Id_{E_n} + D_n$ sur cette base, il faut ajouter à la matrice précédente la matrice λI_{n+1}. Donc :

$\boxed{\text{La matrice de } \lambda Id_{E_n} \text{ sur cette base est la matrice } A_\lambda.}$

I-4. Un exemple

a. Utilisons la base privilégiée exhibée dans I-3.b.
Ici, $n = 2$; cette base (e_1, e_2, e_3) vérifie : $D_2(e_1) = 0, D_2(e_2) = e_1, D_2(e_3) = e_2$.
Soit h un endomorphime de E_2 qui commute avec D_2.
Il existe trois réels a, b, c tels que $h(e_3) = ce_1 + be_2 + ae_3$, donc $h(e_3) = (cD_2^2 + bD_2 + aId)(e_3)$.
On a aussi $h(e_2) = h(D_2(e_3)) = D_2(h(e_3)) = (cD_2^3 + bD_2^2 + aD_2)(e_3) = (cD_2^2 + bD_2 + aId)(e_2)$.
On montre de même que $h(e_1) = (cD_2^2 + bD_2 + aId)(e_1)$.
Les endomorphismes h et $cD_2^2 + bD_2 + aId$ coïncident sur une base. Ils sont donc égaux.
Réciproquement, tout endomorphisme de E_2 de la forme $cD_2^2 + bD_2 + aId$ commute évidemment avec D_2.

$$\boxed{\text{Les endomorphismes qui commutent avec } D_2 \text{ sont les endomorphismes } h = aId_{E_2} + bD_2 + c(D_2)^2.}$$

b. D'après I-1.a. les endomorphismes g tels que $g^2 = \lambda Id_{E_n 2} + D_2$ commutent avec D_2.
Ils sont donc à chercher parmi les h précédents. Pour un tel h, on trouve, en tenant compte de $(D_2)^3 = 0$:
$h^2 = a^2 Id_{E_2} + 2abD_2 + (b^2 + 2ac)(D_2)^2$.
On a $h^2 = \lambda Id_{E_2} + D_2$ si et seulement si leurs matrices sont égales donc si :
$a^2 = \lambda,\ 2ab = 1$ et $b^2 + 2ac = 0$, qui ne fournit de solution réelle (a, b, c) que si et seulement si $\lambda > 0$.
Donc :

$$\boxed{\text{Il existe des endomorphismes de } E_2 \text{ tels que } g^2 = \lambda Id_{E_n 2} + D_2 \text{ si et seulement si } \lambda > 0.}$$

Les matrices carrées G d'ordre 3 qui vérifient $G^2 = A_1$ sont les matrices, sur notre base privilégiée, des g précédents, dans le cas où $\lambda = 1$.

$a^2 = 1$ donne $a = \pm 1$, $2ab = 1$ donne $b = \dfrac{1}{2a}$ et $b^2 + 2ac = 0$ donne $c = -\dfrac{b^2}{2a} = -\dfrac{1}{8a^3}$.

$$\boxed{\text{Il y a deux solutions, qui sont } G = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et son opposée.}}$$

DEUXIÈME PARTIE

II-1. Existence d'un endomorphisme g tel que $g^2 = D_n$

a. Si $g^2 = D_n$ alors $(g^2)^{n+1} = 0$, donc g est nilpotent. g n'est donc pas injectif donc $\dim(\ker g) \geqslant 1$ donc $\dim(\ker g^2) \geqslant 1$. $\dim(\ker g^2) = 1$ nécessiterait $\dim(\ker g^2) = \dim(\ker g)$ donc, d'après le préliminaire, $\ker g = \ker g^2 = \ldots = \ker g^{n+1} = E$ puisque g est nilpotent ; $\ker g$ serait l'espace entier donc g serait l'endomorphisme nul donc g^2 aussi, ce qui n'est pas puisque $g^2 = D_n$, non nul puisque $n \geqslant 1$. Résumons :

$$\boxed{g \text{ est nilpotent et le noyau de } g^2 \text{ a une dimension au moins égale à 2.}}$$

b. Or, le noyau de $g^2 = D_n$ est ensemble des constantes, qui est de dimension 1. Il y a contradiction avec ce qui précède, donc :

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } g \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } g^2 = D_n.}$$

c. S'il existait un endomorphisme g de $\mathbb{R}[X]$ tel que $g^2 = D$, d'après I.1.b., les $\mathbb{R}_n[X]$ devraient être stables par g et la restriction g_n de g à un tel sous-espace devrait vérifier $(g_n)^2 = D_n$. D'après b., ce n'est pas possible. Donc :

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } g \text{ de l'espace } \mathbb{R}[x] \text{ tel que } g^2 = D.}$$

II-2. Existence d'un endomorphisme g tel que $g^k = D^m$

a. On sait que D est surjectif : tout polynôme est la dérivée d'un autre polynôme. Donc D^m est surjectif par composition.
On sait que si la composée $g \circ f$ de deux applications est surjective, alors g est surjective. C'est le cas ici en écrivant la surjection $g^k = D^m$ sous la forme $g \circ g^{k-1}$.
Résumons :

$$\boxed{\text{Les deux endomorphismes } D \text{ et } g \text{ sont surjectifs.}}$$

b. $\ker g^k = \ker D^m$ est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{m-1}[X]$, de dimension finie.
Les $\ker g^q$ pour $0 \leqslant q \leqslant k$ sont inclus dans $\ker g^k$ d'après le préliminaire. Ils sont a fortiori de dimension finie.

$$\boxed{\text{Pour } q \text{ entre } 0 \text{ et } k,\ \ker(g^q) \text{ est de dimension finie.}}$$

c. L'application Φ, restriction d'une application linéaire, est linéaire.
Si $P \in \ker g^p$, alors $g^{p-1}(g(P)) = 0$ donc $g(P) \in \ker g^{p-1}$.
Résumons :

$$\boxed{\Phi \text{ est une application linéaire de } \ker g^p \text{ dans } \ker g^{p-1}.}$$

Le noyau de Φ est l'ensemble des polynômes qui sont à la fois dans $\ker g^p$ et dans $\ker g$. Comme le deuxième est inclus dans le premier,

$$\boxed{\text{le noyau de } \Phi \text{ est } \ker g.}$$

Soit $Q \in \ker g^{p-1}$. Comme g est surjectif, on peut trouver $P \in E$ tel que $Q = g(P)$ et
$g^p(P) = g^{p-1}(g(P)) = g^{p-1}(Q) = 0$, donc $P \in \ker g^p$ donc $Q = \Phi(P)$ donc

$$\boxed{\Phi \text{ est surjective.}}$$

Il s'agit d'une application linéaire entre espaces de dimensions finies, d'après b.
On peut donc appliquer le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Im}\Phi) + \dim(\ker \Phi) = \dim(\ker g^p)$.
Comme $\mathrm{Im}\Phi = \ker g^{p-1}$ et $\ker \Phi = \ker g$, cela donne la relation

$$\boxed{\dim(\ker g^{p-1}) + \dim(\ker g) = \dim(\ker g^p).}$$

Donc $\dim(\ker g^2) = 2.\dim(\ker g)$, $\dim(\ker g^3) = 3.\dim(\ker g), \ldots$

$$\boxed{\dim(\ker g^p) = p.\dim(\ker g).}$$

d. En particulier, $m = \dim(\mathbb{R}_{m-1}[X]) = \dim(\ker D^m) = \dim(\ker g^k) = k.\dim(\ker g)$.
L'existence de g nécessite donc que k soit un diviseur de m.
Considérons réciproquement deux entiers k et m, avec $k \geqslant 2$ et k diviseur de m ; il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $m = kq$. Soit g l'endomorphisme D^q. Alors g vérifie bien $g^k = D^m$.

$$\boxed{g \text{ existe si et seulement si l'entier } k \text{ divise l'entier } m.}$$

Dans II.1., on a $k = 2$ et $m = 1$: il n'y a pas de g solution. On retrouve le résultat de II-1.c.

TROISIÈME PARTIE

III-1. Dérivée de l'application $t \mapsto (L_n(t))^k$

a. C'est classique : on tire parti du fait que $D_n^{n+1} = 0$ et que D_n et I_{n+1} commutent pour écrire :

$$I_{n+1} = I_{n+1} - (-tD_n)^{n+1} = (I_{n+1} + tD_n)(I_{n+1} - tD_n + t^2(D_n)^2 + \ldots + (-1)^n t^n (D_n)^n).$$

($D_n^{n+1} = 0$ car D_n est la matrice sur B_n de l'endomorphisme $\bar{D}_n$). Il apparaît ainsi que :

$$\boxed{I_{n+1} + tD_n \text{ est inversible avec pour inverse : } (I_{n+1} + tD_n)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k (D_n)^k.}$$

b. Pour k entier, l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto t^k (D_n)^k$ est dérivable comme produit d'une fonction réelle dérivable et d'une matrice fixe. Donc, comme combinaison linéaire de fonctions dérivables,

$$\boxed{\text{L'application } t \mapsto (I_{n+1} + tD_n)^{-1} \text{ est dérivable.}}$$

Le produit matriciel $(A, B) \mapsto AB$ est une fonction bilinéaire de A et B. Le produit matriciel de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto B(t)$ à valeurs dans $M_n(\mathbb{R})$ est donc dérivable et

$$(A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t).$$

Appliquons cela au produit de fonctions dérivables $(I_{n+1} + tD_n)^{-1}(I_{n+1} + tD_n)$. Ce produit est constant donc sa dérivée est nulle. Donc

$$((I_{n+1} + tD_n)^{-1})' (I_{n+1} + tD_n) + (I_{n+1} + tD_n)^{-1} (I_{n+1} + tD_n)' = 0.$$

Comme $(I_{n+1} + tD_n)' = D_n$, cela donne $((I_{n+1} + tD_n)^{-1})' (I_{n+1} + tD_n) = -(I_{n+1} + tD_n)^{-1} D_n$ donc

$$\boxed{((I_{n+1} + tD_n)^{-1})' = -(I_{n+1} + tD_n)^{-2} D_n.}$$

Comme D_n commute avec $I_{n+1} + tD_n$, elle commute aussi avec son inverse. On a donc aussi $((I_{n+1} + tD_n)^{-1})' = -D_n (I_{n+1} + tD_n)^{-2}$. Ces formules évoquent, bien sûr, $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$.

c. Fixons t dans $\mathbb{R}$ et interprétons $L_n(t)$ comme matrice sur B_n d'un endomorphisme L de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $L(P)$ est une combinaison linéaire de P', P'' etc, donc $L(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. De même $L^2(P) \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ etc, et finalement $L^{n+1}(P)$ est nul. L^{n+1} est donc l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc :

$$\boxed{\text{La matrice } (L_n(t))^{n+1} \text{ est nulle.}}$$

d. Combinaison linéaire de fonctions dont on a déjà calculé les dérivées, $t \mapsto L_n(t)$ est dérivable et $L_n'(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} t^{k-1} (D_n)^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k (D_n)^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k (D_n)^{k+1}$ car $(D_n)^{n+1} = 0$. On voit que

$$\boxed{L_n'(t) = D_n (I_{n+1} + tD_n)^{-1}.}$$

La dérivation d'un produit matriciel donne $(A^2)' = AA' + A'A$. Si A commute avec sa dérivée, cela donne $(A^2)' = 2A'A$ et, par récurrence $(A^k)' = kA'A^{k-1}$. Cela s'applique à $L_n(t)$ qui commute avec sa dérivée car ce sont toutes les deux des combinaisons linéaires de puissances de D_n. Donc $\dfrac{d}{dt}(L_n(t))^k = kL_n'(t)(L_n(t))^{k-1}$. En utilisant ce qui précède :

$$\boxed{\text{Pour } k \text{ entier, } k \geqslant 1, \text{ on a : } \frac{d}{dt}(L_n(t))^k = kD_n (I_{n+1} + tD_n)^{-1} (L_n(t))^{k-1}.}$$

III-2. Matrice $\varphi_u(t)$

a. $\varphi_u(t)\varphi_v(t) = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{u^i}{i!}(L_n(t))^i \sum_{j=0}^{n} \dfrac{v^j}{j!}(L_n(t))^j$.

Développons le produit et regroupons les $(L_n(t))^{i+j}$ tels que $i + j = k$ fixé.

Pour k de 0 à n, le coefficient de $(L_n(t))^k$ est $\sum_{i=0}^{k} \dfrac{u^i}{i!} \dfrac{v^{k-i}}{(k-i)!} = \dfrac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i u^i v^{k-i} = \dfrac{(u+v)^k}{k!}$.

Pour $k \geqslant n+1$, $(L_n(t))^k$ est nul d'après III-1.c.

Donc $\varphi_u(t)\varphi_v(t) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(u+v)^k}{k!}(L_n(t))^k$. On a bien :

$$\boxed{\varphi_u(t)\varphi_v(t) = \varphi_{u+v}(t).}$$

b. u étant fixé, $\varphi_u(t)$ est une combinaison linéaire de fonctions matricielles dérivables, comme on l'a déjà vu. Dans la définition de $\varphi_u(t)$, on peut faire aller la sommation jusqu'à $n+1$, en rajoutant $\dfrac{u^{n+1}}{(n+1)!}(L_n(t))^{n+1}$ qui est nul. À l'autre bout, le terme obtenu pour $k = 0$ disparaît par dérivation. En utilisant le résultat de III-1.d., on a alors

$$\begin{aligned} \varphi_u'(t) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{u^k}{k!} \frac{d}{dt}(L_n(t))^k = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{u^k}{k!} k (I_{n+1} + tD_n)^{-1} D_n (L_n(t))^{k-1} \\ &= u (I_{n+1} + tD_n)^{-1} D_n \sum_{k=1}^{n+1} \frac{u^{k-1}}{(k-1)!}(L_n(t))^{k-1}. \end{aligned}$$

Après translation d'indice, on voit bien que

$$\boxed{\varphi_u'(t) = u (I_{n+1} + tD_n)^{-1} D_n \varphi_u(t).}$$

c. Pour $u = 1$, cela donne $\varphi_1'(t) = (I_{n+1} + tD_n)^{-1} D_n \varphi_1(t)$, elle même dérivable d'après III-1.b., avec

$$\begin{aligned} \varphi_1''(t) &= ((I_{n+1} + tD_n)^{-1})' D_n \varphi_1(t) + (I_{n+1} + tD_n)^{-1} (D_n \varphi(t))' \\ &= -(I_{n+1} + tD_n)^{-2} D_n^2 \varphi_1(t) + (I_{n+1} + tD_n)^{-1} (D_n \varphi_1(t))'. \end{aligned}$$

La formule de dérivation du produit s'applique bien sûr à la matrice $D_n \varphi_1(t)$. Comme la matrice D_n est constante, cette formule donne $(D_n \varphi_1(t))' = D_n (\varphi_1(t))' = D_n^2 (I_{n+1} + tD_n)^{-1} \varphi_1(t)$. (rappelons que D_n et $(I_{n+1} + tD_n)^{-1}$ commutent). En reportant dans $\varphi_1''(t)$, on voit que

$$\boxed{\varphi_1''(t) \text{ est nulle.}}$$

Il en résulte que $\varphi_1'(t)$ est une constante matricielle que l'on peut calculer en faisant $t = 0$.

Comme $L_n(0)$ est la matrice nulle $\varphi_1(0)$ est la matrice I_{n+1}. Donc $\varphi'(t)$ est la matrice D_n, qui est la dérivée de tD_n. Donc $\varphi_1(t) = tD_n + K$, où K est une constante matricielle que l'on peut calculer en faisant $t = 0$. On vient de voir que $\varphi_1(0)$ est la matrice I_{n+1} donc :

$$\boxed{\text{Pour tout réel } t,\ \varphi_1(t) = I_{n+1} + tD_n.}$$

III-3. Existence de l'endomorphisme g

a. D'après III-2.a. et III-2.c., on a, pour $t = \dfrac{1}{\lambda}$, $(\varphi_{1/2}(1/\lambda))^2 = \varphi_1(1/\lambda)) = I_{n+1} + \dfrac{1}{\lambda} D_n$.

$$\boxed{\text{Les matrices } M = \pm\sqrt{\lambda}\varphi_{1/2}(1/\lambda) \text{ vérifient } M^2 = \lambda I_{n+1} + D_n.}$$

L'endomorphisme g de E_n qui a M pour matrice sur la base B_n vérifie alors $g^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n$.

b. Dans I-4., on avait $n = 2$ et $\lambda = 1$; cela donne ici

$L_n(1/\lambda) = L_n(1) = D_n - \dfrac{1}{2}(D_n)^2$ et $\varphi_{1/2}(1/\lambda) = I_3 + \dfrac{1}{2}L_n(1) + \dfrac{1}{8}L_n^2(1) = I_3 + \dfrac{1}{2}D_n - \dfrac{1}{8}(D_n)^2$.

$$\boxed{\text{On retrouve les matrices obtenues à la question I-4.}}$$

QUATRIÈME PARTIE

IV-1. Un développement en série entière

a. $h(x) = \sqrt{1+x}$ donc h est dérivable sur $]-1,+\infty[$ avec $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ donc

$$\boxed{h \text{ vérifie sur }]-1,+\infty[\text{ l'équation différentielle } 2(1+x)h'(x) - h(x) = 0.}$$

b. Pour une série entière $\sum b_p x^p$ de rayon de convergence supérieur ou égal à $R > 0$, de somme f, f est dérivable sur $]-R, R[$, avec $f'(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} p b_p x^{p-1}$ donc

$$\begin{aligned} 2(1+x)f'(x) - f(x) &= \sum_{p=1}^{+\infty} 2p b_p x^{p-1} + \sum_{p=1}^{+\infty} 2p b_p x^p - \sum_{p=0}^{+\infty} b_p x^p \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} 2(p+1) b_{p+1} x^p + \sum_{p=0}^{+\infty} 2p b_p x^p - \sum_{p=0}^{+\infty} b_p x^p \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} (2(p+1)b_{p+1} + (2p-1)b_p) x^p \end{aligned}$$

Cette fonction vérifie $f(0) = 1$ et satisfait à l'équation différentielle sur $]-R, R[$ si et seulement si $b_0 = 1$ et si : $\forall p \in \mathbb{N}, b_{p+1} = -\dfrac{2p-1}{2(p+1)} b_p$. (par unicité du développement en série entière sur $]-R, R[$ de la fonction nulle).

Ces conditions définissent une unique suite de coefficients b_p donc une série entière unique. De plus, aucun des b_p n'est nul et $\left|\dfrac{b_{p+1}}{b_p}\right| = \dfrac{2p-1}{2p+2}$ tend vers 1 quand $n \to +\infty$. Le rayon de convergence de la série entière est donc 1.

Nous détenons donc là une série entière de rayon de convergence 1 et dont la fonction somme f vérifie $f(0) = 1$ et satisfait à l'équation différentielle sur $]-1, 1[$.

Or l'équation différentielle $2(1+x)y' - y = 0$ admet sur $]-1, 1[$ une seule solution vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$ car les coefficients de y et y' sont continus et celui de y' ne s'annule pas (on a vu cela en sup ; on le reverra cette année). Comme $h(x) = \sqrt{x+1}$ convient c'est que : $\forall x \in]0, 1[$, $h(x) = f(x)$.

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est, sur }]-1,1[, \text{ somme d'une série entière de rayon de convergence égal à 1.}}$$

Autre méthode :

On calcule les dérivées successives de $\sqrt{1+x}$ en 0. On en déduit la série entière de Taylor de $\sqrt{1+x}$. On montre que cette série entière a un rayon de convergence égal à 1 et que sa somme vérifie l'équation différentielle. Enfin, l'unicité de la solution de l'équation différentielle permet de conclure que, sur $]-1, 1[$, $\sqrt{1+x}$ est égal à la somme de sa série de Taylor.

Précisons maintenant les coefficients b_p : Pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$b_p = -\frac{2p-3}{2p} b_{p-1} = \frac{2p-3}{2p} \cdot \frac{2p-5}{2(p-1)} b_{p-2} = \ldots = (-1)^{p-1} \frac{(2p-3)(2p-5)\ldots(3)(1)}{2p(2(p-1))\ldots(2.2)} b_1$$

et $b_1 = \dfrac{1}{2} b_0 = \dfrac{1}{2}$: $b_p = (-1)^{p-1} \dfrac{(2p-3)(2p-5)\ldots(3)(1)}{2p(2(p-1))\ldots(2.2)(2.1)}$

En multipliant haut et bas $\dfrac{(2p-3)(2p-5)\ldots(3)(1)}{2p(2(p-1))\ldots(2.2)(2.1)}$ par $(2(p-1))(2(p-2))\ldots(2.2)(2.1)$, qui est en fait égal à $2^{p-1}(p-1)!$, on fait apparaître $(2p-2)!$ au numérateur et, au dénominateur, $2p\,(2(p-1)2(p-2)\ldots 2.1)^2 = 2^{2p-1} p!(p-1)!$.

Donc :

$$\boxed{\text{Pour } p \geqslant 1,\ b_p = (-1)^{p-1} \frac{(2p-2)!}{2^{2p-1} p!(p-1)!}}$$

c. $c_n = \sum_{p=0}^{n} b_p b_{n-p}$ est le coefficient de x^n dans la série produit de Cauchy de $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ par elle-même.

On sait que la fonction somme du produit de Cauchy de deux séries entières est, sur le plus petit des deux intervalles ouverts de convergence, égale au produit des deux fonctions sommes. Ici, on a donc $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sqrt{1+x}\sqrt{1+x} = 1 + x$ sur $]-1, 1[$. L'unicité du développement en série entière permet de conclure :

$$\boxed{c_0 = c_1 = 1 \text{ ; les autres } c_n \text{ sont nuls.}}$$

IV-2. Existence d'un endomorphisme g de E tel que $g^2 = \lambda Id_E + D$ où λ est strictement positif

a. $T(P) = \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{b_p}{\lambda^p} D^p P$. Si P est degré k, $D^p P$ est nul pour $p \geqslant k+1$. La somme précédente est donc en fait la somme finie $\sum_{p=0}^{k} \dfrac{b_p}{\lambda^p} D^p P$. L'application T est donc bien définie et $T(P)$ est un polynôme.

Si P et Q sont deux polynômes et k le plus grand de leurs degrés,

$T(\alpha P + \beta Q) = \sum_{p=0}^{k} \dfrac{b_p}{\lambda^p} D^p(\alpha P + \beta Q) = \alpha \sum_{p=0}^{k} \dfrac{b_p}{\lambda^p} D^p P + \beta \sum_{p=0}^{k} \dfrac{b_p}{\lambda^p} D^p Q$ par linéarité de la dérivation.

Donc $T(\alpha P + \beta Q) = \alpha T(P) + \beta T(Q)$. Résumons :

$$\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } E}$$

b. Nous manipulons ces sommes infinies comme des sommes finies, puisque les termes sont nuls à partir d'un certain rang.

Pour $P \in E$, on a $T \circ T(P) = \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{b_p}{\lambda^p} D^p(T(P)) = \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{b_p}{\lambda^p} D^p \left(\sum_{q=0}^{+\infty} \dfrac{b_q}{\lambda^q} D^q(P) \right) = \sum_{p,q=0}^{+\infty} \dfrac{b_p b_q}{\lambda^{p+q}} D^{p+q}(P)$.

Développons et regroupons les termes où $p+q$ a la valeur n :

$$T \circ T(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\Big(\sum_{p=0}^{n} b_p b_{n-p}\Big) \frac{1}{\lambda^n} D^n(P) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(c_n \frac{1}{\lambda^n} D^n(P) \right)$$

Il ne reste que les deux premiers termes !

$$\boxed{T \circ T(P) = P + \frac{1}{\lambda} D(P).}$$

c. L'endomorphisme $g = \sqrt{\lambda} T$ de E vérifie donc

$$\boxed{g^2 = \lambda Id_E + D.}$$

d. En se servant de I-1.b., $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par g et la restriction g_n de g à $\mathbb{R}_n[X]$ vérifie

$$\boxed{g_n^2 = \lambda Id_{E_n} + D_n.}$$

On a donc $g_n(P) = \sqrt{\lambda} T(P) = \sqrt{\lambda} \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{b_p}{\lambda^p} D_n^p P = \sqrt{\lambda} \sum_{p=0}^{n} \dfrac{b_p}{\lambda^p} D_n^p P$ car les polynômes sont dans E_n.

$$\boxed{g_n = \sqrt{\lambda} \sum_{p=0}^{n} \frac{b_p}{\lambda^p} D_n^p.}$$

Pour $n = 2$ et $\lambda = 1$, $g_2 = b_0 Id_{E_2} + b_1 D_2 + b_2 D_2^2$. Puisque $b_0 = 1$, $b_1 = \dfrac{1}{2}$, et $b_2 = -\dfrac{1}{8}$,

$$\boxed{\text{on retrouve encore une fois les résultats de I-4.}}$$

***

MINES - PONTS 1998	Filière PSI
Mathématiques 2	Durée : 3 heures

L'emploi de la calculette est interdit.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit d un nombre entier strictement positif ($d \geqslant 1$). Soit $\mathcal{M}$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées réelles d'ordre d. La matrice unité est notée I_d. Il est admis qu'il existe une application $M \mapsto ||M||_d$ de $\mathcal{M}$ dans l'ensemble $\mathbb{R}^+$ telle que le couple $(\mathcal{M}, ||\ ||_d)$ soit un espace vectoriel normé et que la norme de la matrice identité I_d soit égale à 1 : $||I_d||_d = 1$.
L'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ est muni d'un produit scalaire euclidien pour lequel la base canonique de $\mathbb{R}^d$ est orthonormée. La norme d'un vecteur x est notée $||x||$. A tout vecteur x de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$, supposé muni de sa base canonique, est associée la matrice colonne X de ses coordonnées. Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^d$ est égal à ${}^tX.Y$ (${}^tX$ désigne la transposée de la matrice X). Par abus d'écriture, la norme d'un vecteur x est notée $||X||$.

Il sera bon de revoir le cours de Sup sur les espaces euclidiens, notamment l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Systématiquement les endomorphismes de $\mathbb{R}^d$, dont les matrices associées dans la base canonique sont les matrices $A, B, \ldots$ de $\mathcal{M}$, sont désignés par $a, b, \ldots$ En particulier la matrice unité I_d de $\mathcal{M}$, est la matrice associée à l'application identique i_d de $\mathbb{R}^d$.
Les propriétés suivantes sont admises :
P.1 : La norme $||\ ||_d$ vérifie les inégalités suivantes :
- pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^d$, $||a(x)|| \leqslant ||A||_d ||x||$;
- pour tout couple de matrices A et B de $\mathcal{M}$, $||A.B||_d \leqslant ||A||_d ||B||_d$.

P.2 : Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de matrices appartenant à $\mathcal{M}$. Soient $a_{ij,n}$, $1 \leqslant i \leqslant d$, $1 \leqslant j \leqslant d$, ses coefficients. Pour que la suite des matrices A_n, $n \geqslant 1$, soit convergente et de limite une matrice $A = (a_{ij})$, il faut et il suffit que, pour tout couple d'entiers i et j ($1 \leqslant i \leqslant d, 1 \leqslant j \leqslant d$) chaque suite $(a_{ij,n})_{n\geqslant 1}$ soit convergente et de limite a_{ij}.
P.3 : Soient $t \mapsto M(t)$ une application continue d'un intervalle fermé $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}$, $m_{ij}(t), 1 \leqslant i \leqslant d, 1 \leqslant j \leqslant d$, les coefficients de la matrice $M(t)$; les coefficients de la matrice $\int_a^b M(t)dt$ sont les intégrales des coefficients de la matrice $M(t)$: $\int_a^b m_{ij}(t)dt, 1 \leqslant i \leqslant d, 1 \leqslant j \leqslant d$.
Un vecteur x de $\mathbb{R}^d$ est dit positif ($x \geqslant 0$) si et seulement si toutes ses coordonnées sont positives (pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant d$, $x_i \geqslant 0$). Étant donnés deux vecteurs x et y, le vecteur x est dit plus petit que le vecteur y ($x \leqslant y$) si et seulement si la différence $y - x$ est un vecteur positif. Enfin, étant donné un vecteur x de coordonnées x_i, $1 \leqslant i \leqslant d$, $|x|$ est le vecteur positif de coordonnées $|x_i|$, $1 \leqslant i \leqslant d$. Ce vecteur est noté aussi $|X|$.

Première partie

Résultats préliminaires

I-1°) *Inverse d'une matrice $(\lambda I_d - A)$*
Soit A une matrice de $\mathcal{M}$.

a. Démontrer que si le réel λ est une valeur propre de la matrice A, sa valeur absolue est majorée par la norme de A : $|\lambda| \leqslant ||A||$.
Dans la suite de cette question, λ est un réel strictement supérieur à la norme de la matrice A : $\lambda > ||A||$.
b. Démontrer que la matrice $\lambda I_d - A$ est inversible. Soit $(\lambda Id - A)^{-1}$ la matrice inverse. En déduire que la matrice $I_d - \frac{1}{\lambda}A$ est inversible.

c. Déterminer, lorsque le réel λ croît indéfiniment, la limite de la matrice $I_d - \frac{1}{\lambda}A$ et de son inverse $(Id - \frac{1}{\lambda}A)^{-1}$.

d. Déduire des résultats précédents la limite, lorsque le réel λ croît indéfiniment, de la matrice $(\lambda Id - A)^{-1}$.

I-2°) *Les matrices B_λ et C_λ*
Étant donnés une matrice A de $\mathcal{M}$ et un réel λ strictement supérieur à la norme de la matrice A ($\lambda > ||A||$), soient B_λ et C_λ les matrices définies par les relations suivantes :
$$B_\lambda = \lambda(\lambda I_d - A)^{-1}; \quad C_\lambda = \lambda^2(\lambda I_d - A)^{-1} - \lambda I_d.$$
Démontrer que les matrices $B\lambda - I_d$ et $C_\lambda - A$ sont égales au produit de la matrice $(\lambda Id - A)^{-1}$ et respectivement de la matrice A ou A^2. En déduire, lorsque le réel λ croît indéfiniment, qu'elles tendent vers 0. Par suite : $\lim_{\lambda\to+\infty} B_\lambda = I_d$; $\lim_{\lambda\to+\infty} C_\lambda = A$.

Deuxième partie

Soit A une matrice de $\mathcal{M}$; cette matrice est associée à un endomorphisme a dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$. La matrice A est dite positive si, pour tout vecteur x positif le vecteur $a(x)$ est positif.

II-1°) *Matrices positives*
a. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice ; déterminer une condition nécessaire et suffisante vérifiée par les coefficients a_{ij} pour que la matrice A soit positive. En déduire que, si une matrice A de $\mathcal{M}$ est la limite d'une suite de matrices positives A_n, $n \geqslant 1$, la matrice A est elle-même positive.

b. Démontrer que la matrice A est positive si et seulement si, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^d$, la relation $|a(x)| \leqslant a(|x|)$ (ou encore $|A.X| \leqslant A.|X|$) a lieu.

c. Soit A la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice inverse A^{-1}. Est-elle positive ? Soit λ un réel ; calculer, lorsqu'elle existe, l'inverse de la matrice $\lambda I_2 - A$; pour quelles valeurs de λ la matrice $(\lambda I_d - A)^{-1}$ est-elle positive ?

II-2°) *Une propriété due aux matrices positives*
Soit A une matrice pour laquelle il existe un réel M, strictement supérieur à la norme de A, tel que pour tout réel λ supérieur à M ($\lambda > M$) la matrice $(\lambda I_d - A)^{-1}$ soit positive. Établir que, pour ces réels λ et tout vecteur x de $\mathbb{R}^d$, l'inégalité
$${}^tX.C_\lambda.X \leqslant {}^t|X|.C_\lambda.|X|$$
a lieu ; C_λ est la matrice définie à la question I-2°.
Démontrer que, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^d$, l'inégalité $(x|a(x)) \leqslant (|x||a(|x|))$ a lieu (ou encore ${}^tX.A.X \leqslant {}^t|X|.A.|X|$).

Troisième partie

L'objet de cette partie est d'étudier les matrices dissipatives. Par définition une matrice A, appartenant à l'espace $\mathcal{M}$, est dissipative, si, en désignant toujours par a l'endomorphisme de matrice associée A, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^d$, le produit scalaire des vecteurs x et $a(x)$ est négatif ou nul : $(x|a(x)) = {}^tX.A.X \leqslant 0$.

III-1°) *Exemples de matrices dissipatives*
a. Est-ce que les deux matrices ci-dessous sont dissipatives ? calculer leurs valeurs propres :
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Soit A une matrice dissipative de l'espace $\mathcal{M}$ démontrer que ses valeurs propres réelles sont négatives ou nulles.

c. Démontrer que, pour qu'une matrice symétrique (${}^tA = A$), appartenant à l'espace $\mathcal{M}$, soit dissipative, il faut et il suffit que ses valeurs propres soient négatives ou nulles. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur une matrice A de $\mathcal{M}$ et sa transposée ${}^tA$ pour que la matrice A soit dissipative.

On admet qu'une matrice symétrique réelle a toutes ses valeurs propres réelles et qu'elle est diagonalisable sous la forme $A = P^{-1}DP$, avec $P^{-1} = {}^tP$.

d. Soit A une matrice quelconque de l'espace $\mathcal{M}$; démontrer que la matrice B définie par la relation $B = A - ||A||_d I_d$ est dissipative.

III-2°) *Vecteur propre de certaines matrices symétriques*
Soit A une matrice symétrique telle que, lorsque le réel λ est suffisamment grand la matrice $(\lambda I_d - A)^{-1}$ soit positive.

a. Démontrer que, si la matrice A est dissipative et si le réel 0 est une valeur propre, il existe un vecteur y positif, différent du vecteur nul, tel que le produit scalaire $(y|a(y)) = {}^tY.A.Y$ soit nul.
Il est admis que ce vecteur y est un vecteur propre de la matrice A.

b. Déduire des résultats précédents que, si $s(A)$ est la plus grande valeur propre de la matrice A, il existe un vecteur propre positif associé à la valeur propre $s(A)$.

c. Exemple : soit B la matrice définie par la relation : $B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de la matrice B et la matrice $(\lambda I_3 - B)^{-1}$ lorsque le réel λ est suffisamment grand. Rechercher un vecteur propre positif associé à la plus grande valeur propre de B.

Quatrième partie

Le but de cette partie est de rechercher des conditions pour qu'un système différentiel admette des solutions positives.
Étant donnés une matrice A de $\mathscr{M}$, associée à un endomorphisme a de $\mathbb{R}^d$, x_0 (ou X_0) un vecteur de $\mathbb{R}^d$, une fonction continûment dérivable de la demi-droite $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}^d$: $t \mapsto x(t)$ est solution du système différentiel $S(A, x_0)$ si les deux équations ci-dessous sont vérifiées :

$$S(A,x_0) : \begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = a(x(t)), \text{ pour tout réel } t \text{ positif ou nul,} \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

Dans la suite la fonction $t \mapsto x(t)$, définie sur $[0,+\infty[$ désigne la solution du système $S(A, x_0)$.

Comme l'énoncé le suggère, nous admettrons l'existence et l'unicité de cette solution. Dans ces conditions, aucune connaissance sur les systèmes différentiels n'est requise.

IV-1°) *Une propriété d'un système différentiel dont la matrice est dissipative*
Soient A une matrice de $\mathscr{M}$, $t \mapsto x(t)$ une solution du système différentiel $S(A, x_0)$, déterminer la dérivée de la fonction $t \mapsto \|x(t)\|^2$. En déduire que si la matrice A est dissipative, alors pour tout réel t positif ou nul, il vient : $\|x(t)\| \leqslant \|x_0\|$.

IV-2°) *Positivité d'une solution d'un système différentiel*
Dans cette question la matrice A de $\mathscr{M}$ est diagonalisable ; $\mathscr{B} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_d\}$ est une base de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^d$ à la base $\mathscr{B}$.

a. Déterminer l'expression de la solution $t \mapsto x(t)$ du système différentiel $S(A, x_0)$. Démontrer que la solution s'écrit : $X(t) = M(t).X_0$ où $t \mapsto M(t)$ est une application continûment dérivable de la demi-droite $[0,+\infty[$ dans $\mathscr{M}$. Donner l'expression de la matrice $M(t)$ à l'aide de la matrice de passage P, de son inverse P^{-1} et d'une matrice diagonale $\Delta(t)$.

b. Démontrer que la matrice $M(t)$ est la limite de la suite des matrices $(I_d - \frac{t}{n}A)^{-n}$, $n = 1, 2, \dots$ lorsque l'entier n croît indéfiniment. En déduire que, si, pour tout réel λ suffisamment grand, la matrice $(\lambda I_d - A)^{-1}$ est positive, alors la matrice $M(t)$ est positive.

c. Soient $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto B(t)$ deux fonctions continues définies sur la demi-droite $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathscr{M}$. Il est admis que, si A(t) et B(t) sont deux matrices semblables : $A(t) = P.B(t).P^{-1}$, où P est une matrice indépendante du réel t, la relation : $\int_0^x A(t)dt = P.\left(\int_0^x B(t)dt\right).P^{-1}$ a lieu pour tout réel x positif.
Soit toujours $M(t)$ la matrice définie à l'alinéa ci-dessus. Démontrer, pour tout réel λ strictement supérieur à la norme de A ($\lambda > \|A\|$) et pour tout réel x strictement positif, la relation :

$$\int_0^x e^{-\lambda t} M(t)dt = (\lambda I_d - A)^{-1}.(I_d - e^{-\lambda x} M(x)) .$$

d. Démontrer qu'il existe une constante c telle que la norme $\|M(t)\|$ de la matrice $M(t)$ soit majorée par $c.e^{t\|A\|}$. Déterminer, pour un réel λ strictement supérieur à la norme de A, la limite, lorsque le réel x tend vers l'infini, de l'expression suivante :

$$(\lambda I_d - A)^{-1}.(I_d - e^{-\lambda x} M(x)).$$

e. En déduire que, si la matrice $M(t)$ est positive pour tout réel t positif, la matrice $(\lambda I_d - A)^{-1}$ est positive pour des réels λ suffisamment grands .

***

Remarque préliminaire : Nous utiliserons plusieurs fois la propriété suivante : Si $M(\lambda)$ est une matrice fonction d'un réel λ qui tend vers la matrice M_0 quand $\lambda \to \lambda_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et si S est une matrice fixe telle que le produit $M(\lambda)S$ existe, alors $M(\lambda)S \to M_0S$ quand $\lambda \to \lambda_0$. Cela vient du fait que l'application $M \mapsto MS$ est linéaire entre espaces de dimensions finie, donc continue.
On a un résultat analogue pour la limite de $M_n.S$ si M_n est une suite convergente de matrices au lieu d'une matrice fonction d'une variable λ.
On a encore un résultat analogue pour $T.M(\lambda)$, $T.M_n$, $T.M(\lambda).S$ et $T.M_n.S$ quand ces produits existent, les matrices S et T étant fixes.
On a enfin des résultats analogues pour des produits de fonctions $M(\lambda).S(\lambda)$ ou de suites $M_n.S_n$ en utilisant la continuité de l'application bilinéaire $(M, S) \mapsto M.S$ (encore valable si $M(\lambda)$ ou M_n sont à valeurs réelles et non matricielles).

Première partie

L'existence de la norme d'indice d, admise dans le préambule, est en fait claire : la norme subordonnée à la norme euclidienne a en effet les propriétés requises.
Notons que, dans la suite de l'énoncé, l'indice d qui affectait cette norme a disparu.

I-1°) *Inverse d'une matrice*$(\lambda I_d - A)$
I-1°)a. Si λ est valeur propre de A et $x \in \mathbb{R}^d$ non nul est vecteur propre associé, de matrice X, on a $A.X = \lambda X$ d'où $|\lambda|.\|X\| = \|A.X\| \leqslant \|A\|.\|X\|$ et comme $\|X\| > 0$,

$$\boxed{|\lambda| \leqslant \|A\| .}$$

I-1°)b. Ici, $\lambda > \|A\|$, donc λ n'est pas valeur propre, donc n'est pas racine du polynôme caractéristique $\det(A - xI_d)$, donc $\det(\lambda I_d - A)$ n'est pas nul donc :

$$\boxed{\text{La matrice } \lambda I_d - A \text{ est inversible.}}$$

Comme $\lambda \neq 0$, $1/\lambda$ existe et est non nul. En multipliant une matrice inversible par un coefficient non nul, on obtient encore une matrice inversible. Donc :

$$\boxed{\text{La matrice } I_d - \frac{1}{\lambda}A \text{ est inversible.}}$$

I-1°)c. Produit d'une matrice constante A par un scalaire fonction de λ, la matrice $\frac{1}{\lambda}A$ tend vers la matrice nulle quand $\lambda \to +\infty$, donc $I_d - \frac{1}{\lambda}A$ tend vers I_d.
Dès que λ dépasse $\|A\|$, on peut appliquer ce qui précède et $\left(I_d - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1}$ existe. Cherchons sa limite quand $\lambda \to +\infty$, autrement dit la limite de $(I_d - \mu A)^{-1}$ quand $\mu \to 0+$.
$(I_d - \mu A)^{-1} = \dfrac{1}{\det(I_d - \mu A)} C(\mu)$, où $C(\mu)$ est la transposée de la matrice des cofacteurs de $I_d - \mu A$.
$\det(I_d - \mu A)$, ainsi que chaque cofacteur de $I_d - \mu A$, est une somme de produits de termes de $I_d - \mu A$, termes qui sont du premier degré en μ.
Par compositions évidentes, $\det(I_d - \mu A)$ et $C(\mu)$ sont donc des fonctions continues de μ sur $\mathbb{R}$.
Quand $\mu \to 0+$, $(I_d - \mu A)^{-1}$, produit d'un scalaire variable par une matrice variable, tend vers le produit des limites, soit $\dfrac{1}{\det(I_d)} C(0) = (I_d)^{-1} = I_d$.

$$\boxed{I_d - \frac{1}{\lambda}A \text{ et } \left(I_d - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} \text{ tendent vers } I_d \text{ quand } \lambda \to +\infty.}$$

I-1°)d. Puisque $(\lambda I_d - A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\left(I_d - \dfrac{1}{\lambda}A\right)^{-1}$,

$$\boxed{(\lambda I_d - A)^{-1} \text{ tend vers la matrice nulle quand } \lambda \to +\infty.}$$

I-2°) *Les matrices* B_λ et C_λ. $I_d = (\lambda I_d - A)(\lambda I_d - A)^{-1} = \lambda(\lambda I_d - A)^{-1} - A(\lambda I_d - A)^{-1}$ d'où

$$\boxed{B - I_d = A(\lambda I_d - A)^{-1}.}$$

Ensuite
$(C_\lambda - A)(\lambda I_d - A) = (\lambda^2(\lambda I_d - A)^{-1} - \lambda I_d - A)\,(\lambda I_d - A) = \lambda^2 I_d - \lambda I_d(\lambda I_d - A) - A(\lambda I_d - A) = A^2$
d'où

$$\boxed{C_\lambda - A = A^2(\lambda I_d - A)^{-1}.}$$

D'après notre remarque préliminaire, $B - I_d$ et $C_\lambda - A$ tendent vers la matrice nulle quand $\lambda \to +\infty$.
Donc

$$\boxed{\lim_{\lambda \to +\infty} B_\lambda = I_d \text{ et } \lim_{\lambda \to +\infty} C_\lambda = A.}$$

Deuxième partie

II-1°) *Matrices positives*

II-1°)a. Soit a un endomorphisme de $\mathbb{R}^d$ et A sa matrice sur la base canonique.

• Supposons A positive. Les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^d$ sont des vecteurs positifs. Leurs images par a doivent donc être des vecteurs positifs. Les coefficients de la matrice A, qui sont les n^2 composantes sur la base canonique de ces n images doivent tous être positifs.

• Réciproquement, si tous les coefficients de A sont positifs et si le vecteur x a toutes ses composantes positives, il en est de même du vecteur $a(x)$ car la matrice de ce vecteur sur la base canonique est AX, matrice dont tous les termes sont positifs. La matrice A est donc positive.

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est positive si et seulement si tous ses coefficients } a_{i,j} \text{ sont positifs.}}$$

Si on note $a_{i,j}(n)$ les coefficients de la matrice A_n et si cette suite A_n de matrices converge vers la matrice A, alors le coefficient a_{ij} de A est la limite de la suite de terme général $a_{i,j}(n)$. Si les $a_{i,j}(n)$ sont tous positifs, il en est de même de leur limite. Autrement dit :

$$\boxed{\text{Si } A \in \mathscr{M} \text{ est limite d'une suite de matrices positives } A_n, \text{ la matrice } A \text{ est elle même positive.}}$$

II-1°)b.

• Si A positive a pour terme général a_{ij} et si X est la matrice de x, de composantes $x_1, \dots ; x_n$, la i-ième composante de $|A.X|$ est $\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|$, qui est inférieur à $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j|$, i-ème composante de $A.|X|$. On a bien $|A.X| \leqslant A.|X|$, autrement dit $|a(x)| \leqslant a(|x|)$.

• Réciproquement, si a vérifie cette propriété, et si x est un quelconque vecteur positif, on a $|x| = x$ et $|a(x)| \leqslant a(|x|) = a(x)$; les composantes de $a(x)$ sont supérieures à celles de $|a(x)|$, donc positives, donc $a(x)$ est positif. A satisfait donc à la définition des matrices positives.

$$\boxed{A \text{ est positive si est seulement si, pour tout } x, \text{ on a } |a(x)| \leqslant a(|x|) \quad (\text{ou } |A.X| \leqslant A.|X|).}$$

II-1°)c. En regardant les cofacteurs, on voit que

$$\boxed{\text{Si } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ alors } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ qui n'est pas positive.}}$$

Alors $\lambda I_2 - A = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$ a pour déterminant $\lambda^2 - 3\lambda + 1$. Pour $\lambda \neq \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ elle est inversible avec $\dfrac{1}{\lambda^2 - 3\lambda + 1}\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$ pour inverse.

Les quatre termes de cette dernière matrice sont positifs si et seulement si $\begin{cases} \lambda^2 - 3\lambda + 1 > 0 \\ \lambda - 1 \geqslant 0 \\ \lambda - 2 \geqslant 0 \end{cases}$. Finalement

$$\boxed{(\lambda I_d - A)^{-1} \text{ existe et est positive pour } \lambda > \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.}$$

II-2°) *Une propriété due aux matrices positives :*

Fixons $\lambda > M$. Puisque $M > \|A\|$ on est déjà sûr que λ n'est pas valeur propre de A donc que $(\lambda I_d - A)^{-1}$ et C_λ existent. Ensuite ${}^tX.C_\lambda.X = \lambda^2.{}^tX.(\lambda I_d - A)^{-1}.X - \lambda{}^tX.X$ et
${}^t|X|.C_\lambda.|X| = \lambda^2.{}^t|X|.(\lambda I_d - A)^{-1}.|X| - \lambda{}^t|X|.|X| = \lambda^2.{}^t|X|.(\lambda I_d - A)^{-1}.|X| - \lambda{}^tX.X$
(${}^tX.X$ et ${}^t|X|.|X|$ sont égales : ce sont deux matrices à un seul élément égal à la somme des carrés des termes de X).

L'unique élément de ${}^tX.(\lambda I_d - A)^{-1}.X$ est une somme de termes de la forme $a_{ij}x_kx_l$ où les a_{ij} sont les coefficients de $(\lambda I_d - A)^{-1}$ et les x_k ceux de X. Puisque les a_{ij} sont positifs, on obtiendra une quantité plus grande en remplaçant les x_k par leur valeur absolue, c'est à dire en remplaçant X par $|X|$, donc ${}^tX.(\lambda I_d - A)^{-1}.X \leqslant {}^t|X|.(\lambda I_d - A)^{-1}.|X|$. Finalement

$$\boxed{{}^tX.C_\lambda.X \leqslant {}^t|X|.C_\lambda.|X|.}$$

et cela est vrai pour tout $\lambda > M$. D'après notre remarque préliminaire, nous pouvons passer à la limite quand $\lambda \to +\infty$. Puisque C_λ tend vers A, cela donne :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}^d, {}^tX.A.X \leqslant {}^t|X|.A.|X| \quad (\text{ou } (x|a(x)) \leqslant (|x||a(|x|)))}$$

Troisième partie

III-1°) *Exemples de matrices dissipatives :*

III-1°)a. ${}^tX.B.X = (x \quad y)\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -x^2 - y^2 + 4xy$, qui n'est pas négatif pour $x = y = 1$.

$$\boxed{B \text{ n'est pas dissipative. Elle admet 1 comme valeur propre double.}}$$

(pour une matrice triangulaire, les valeurs propres sont en évidence sur la diagonale.)
La matrice à un seul élément ${}^tX.C.X$ est égale à sa transposée ${}^tX.{}^tC.X$, et C est antisymétrique donc ${}^tC = -C$, donc ${}^tX.C.X$ est nul pour tout x :

$$\boxed{C \text{ est dissipative.}}$$

Son polynôme caractéristique est $\det(C - xI_3) = -x^3 - 3x$:

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } C \text{ sont : } 0, i\sqrt{3} \text{ et } -i\sqrt{3}.}$$

III-1°)b. Si x est un vecteur propre associé à la valeur propre réelle λ de la matrice dissipative A, on a $0 \geqslant (x|a(x)) = (x|\lambda x) = \lambda(x|x) = \lambda\|x\|^2$ donc, puisque $\|x\|^2 > 0$,

$$\boxed{\text{La valeur propre réelle } \lambda \text{ de la matrice dissipative } A \text{ est négative ou nulle.}}$$

III-1°)c. Si $A \in \mathscr{M}$ est symétrique, ses valeurs propres sont réelles. Si en outre elle est dissipative, ces réels sont négatifs.
Réciproquement, si la matrice symétrique réelle A a des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ négatives, elle se diagonalise sous la forme $A = {}^tPDP$ avec P orthogonale et D diagonale, portant sur sa diagonale les λ_k.
Alors ${}^tX.A.X = {}^tX.{}^tP.D.P.X = {}^t(P.X).D.(P.X) = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k y_k^2$ où les y_k sont les termes de $P.X$:
${}^tX.A.X$ est donc négatif ou nul pour tout X : A est dissipative.

$$\boxed{A \text{ symétrique réelle est dissipative si et seulement si ses valeurs propres sont négatives ou nulles.}}$$

En transposant ${}^tX.A.X$ on voit que ${}^tX.A.X = {}^tX.{}^tA.X$ donc

${}^tX.A.X = \frac{1}{2}({}^tX.A.X + {}^tX.{}^tA.X) = {}^tX.\frac{A + {}^tA}{2}.X = \frac{1}{2}{}^tX.(A + {}^tA).X$. A est donc dissipative si et seulement si $(A + {}^tA)$ l'est. Or cette dernière est symétrique donc relève de ce qui précède :

$\boxed{A \text{ est dissipative si et seulement si les valeurs propres de } (A + {}^tA) \text{ sont toutes négatives.}}$

III-1°)d. En utilisant l'inégalité de Schwarz, on a, pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $A \in \mathscr{M}$, ${}^tX.A.X \leqslant \|X\|.\|A.X\|$. En utilisant ensuite **P1** cela donne ${}^tX.A.X \leqslant \|A\|.\|X\|^2$ donc

$${}^tX.B.X = {}^tX.A.X - \|A\|{}^tX.I_d.X = {}^tX.A.X - \|A\|.\|X\|^2 \leqslant 0 :$$

$\boxed{\text{La matrice } B = A - \|A\|I_d \text{ est dissipative.}}$

III-2°) *Vecteur propre de certaines matrices symétriques*

III-2°)a. Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0, donc ${}^tX.A.X = 0$.
Par ailleurs, les hypothèses faites ici sur A font que cette matrice vérifie les conditions d'application de II-2) donc $0 = {}^tX.A.X \leqslant {}^t|X|.A.|X|$, qui est négatif car A est dissipative. Donc ${}^t|X|.A.|X|$ est nul.

$\boxed{\text{Le vecteur } y \text{ de matrice } Y = |X| \text{ est positif non nul tel que } {}^tY.A.Y = 0.}$

On admet que y est vecteur propre de a. Si λ est la valeur propre associée, $a(y) = \lambda y$ donc $0 = (y|a(y)) = (y|\lambda y) = \lambda\|y\|^2$. Cela n'est possible que si $\lambda = 0$.

III-2°)b. Posons $A' = A - s(A)I_d$. Alors $\det(A' - xI_d) = \det(A - (x + s(A))I_d)$: les valeurs propres de A' sont celles de A diminuées de $s(A)$. La plus grande est donc 0.
Par ailleurs A' est, comme A, symétrique. Elle est donc dissipative d'après III-1°)c.
Pour λ suffisamment grand, par exemple $\lambda \geqslant \lambda_0$, $(\lambda I_d - A)^{-1}$ est positive, donc $(\lambda I_d - A')^{-1} = ((\lambda + s(A))I_d - A)^{-1}$ est positive pour λ suffisamment grand (en l'occurrence $\lambda \geqslant \lambda_0 - s(A)$).
On peut donc appliquer à A' les résultats obtenus pour A au a. Il existe donc un vecteur propre positif y associé à la valeur propre 0 pour l'endomorphisme a'. Or $0 = a'(y) = a(y) - s(A)y$ donc $a(y) = s(A)y$.
Résumons :

$\boxed{\text{Il existe un vecteur propre positif } y \text{ associé à la valeur propre } s(A).}$

III-2°)c. La matrice B est symétrique, de déterminant -2 et trace 1 ; $B - I_3$ n'est pas inversible donc 1 est valeur propre. Les deux autres ont pour produit -2 et somme 0.

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } B \text{ sont } 1, \sqrt{2} \text{ et } -\sqrt{2}.}$

$(\lambda I_3 - B) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix}$; elle laisse stable le plan engendré par le premier et le troisième vecteur de la base canonique ainsi que la droite engendrée par le deuxième vecteur.
Quand λ n'est pas valeur propre de B, on inverse donc $(\lambda I_3 - B)$ en inversant séparément ces restrictions.
On trouve ainsi :

$$\boxed{(\lambda I_3 - B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda + 1}{\lambda^2 - 2} & 0 & \frac{1}{\lambda^2 - 2} \\ 0 & \frac{1}{\lambda - 1} & 0 \\ \frac{1}{\lambda^2 - 2} & 0 & \frac{\lambda - 1}{\lambda^2 - 2} \end{pmatrix},}$$

positive pour λ suffisamment grand (par exemple $\lambda > \sqrt{2}$). La plus grande valeur propre de B est $\sqrt{2}$. En résolvant $B.X = \sqrt{2}X$ on voit que

$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre positif de } B \text{ associé à la plus grande valeur propre de } B.}$

Quatrième partie

IV-1°. *Une propriété d'un système différentiel dont la matrice est dissipative :*
Posons $g(t) = \|x(t)\|^2 = (x(t)|x(t))$. Par bilinéarité du produit scalaire et dérivabilité de $x(t)$, $g(t)$ est effectivement dérivable sur $[0, +\infty[$ avec
$g'(t) = (x'(t)|x(t)) + (x(t)|x'(t)) = 2(x(t)|x'(t)) = 2(x(t)|a(x(t)))$, qui est négatif si la matrice A est dissipative.
La fonction positive g est alors décroissante sur $[0, +\infty[$. En particulier : $\forall t \geqslant 0, \sqrt{g(t)} \leqslant \sqrt{g(0)}$.
Résumons :

$\boxed{\text{Si } A \text{ est dissipative et si } x(t) \text{ est solution de } S(A, x_0)\text{, on a : } \forall t \geqslant 0, \|x(t)\| \leqslant \|x_0\|.}$

IV-2°. *Positivité d'une solution d'un système différentiel :*
On a donc ici $A = P.D.P^{-1}$, où P est la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres $(Y_1, \dots, Y_d)$ et où la matrice diagonale D porte sur sa diagonale les valeurs propres (implicitement supposées réelles) $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ de A.
IV-2°)a. Le système différentiel $S(A, x_0)$ s'écrit donc matriciellement $X'(t) = A.X(t) = P.D.P^{-1}.X(t)$ ou $P^{-1}.X'(t) = D.P^{-1}.X(t)$.
Introduisons la matrice variable auxiliaire inconnue $Y(t)$ définie par $Y(t) = P^{-1}.X(t)$. Elle est dérivable sur $[0, +\infty[$ avec pour dérivée $Y'(t) = P^{-1}.X'(t)$ (dérivation d'une fonction bilinéaire de deux fonctions dérivables P^{-1} et $X(t)$ dont la première est constante).
$X(t)$ vérifie donc $X'(t) = A.X(t)$ si et seulement si $Y(t)$ vérifie $Y'(t) = D.Y(t)$. Or, si $y_1(t), \dots, y_d(t)$ désignent les termes de la matrice inconnue $Y(t)$, ce système s'écrit

$$\begin{cases} y_1'(t) &= \lambda_1 y_1(t) \\ &\vdots \\ y_d'(t) &= \lambda_d y_d(t) \end{cases}$$

Sa solution générale est de la forme

$$\begin{cases} y_1(t) &= \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ &\vdots \\ y_d(t) &= \alpha_d e^{\lambda_d t} \end{cases}$$

qu'on peut écrire $Y(t) = \Delta(t).Y_0$ où $\Delta(t)$ est la matrice diagonale portant $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_d t}$ sur la diagonale et où les termes de la matrice colonne Y_0 sont $\alpha_1, \dots, \alpha_d$.
$X(t)$ vérifie donc $X'(t) = A.X(t)$ si et seulement si $X(t)$ est de la forme $P.\Delta(t).Y_0$. On veut en plus que $X(0)$ soit le vecteur X_0 imposé. Comme $\Delta(0)$ est la matrice identité, cette clause supplémentaire s'écrit $P.Y_0 = X_0$ ou $Y_0 = P^{-1}.X_0$. Finalement

$\boxed{\text{L'unique solution de } S(A, x_0) \text{ est } X(t) = M(t).X_0 \text{, où } M(t) = P.\Delta(t).P^{-1}.}$

L'application $t \mapsto M(t)$ est, comme $\Delta(t)$, continument dérivable sur $[0, +\infty[$ (et même indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$).
$M(t)$ est en fait $\exp(tA)$, mais l'utilisation de l'exponentielle de matrice, qui n'est d'ailleurs pas dans tous les programmes de Spéciales, ne simplifiait pas la résolution de la question.
IV-2°)b. Quand $\frac{n}{t}$ n'est pas valeur propre de A (ce qui, pour t fixé, n'exclut qu'un ensemble fini de valeurs de n) la matrice $I_d - \frac{t}{n}A$ est inversible, donc $(I_d - \frac{t}{n}A)^{-n}$ existe et on peut écrire
$(I_d - \frac{t}{n}A)^{-n} = (I_d - \frac{t}{n}P.D.P^{-1})^{-n} = (P.I_d.P^{-1} - \frac{t}{n}P.D.P^{-1})^{-n} = P.(I_d - \frac{t}{n}D)^{-n}.P^{-1}$.
La matrice $(I_d - \frac{t}{n}D)$ est diagonale donc la matrice $(I_d - \frac{t}{n}D)^{-n}$ aussi, avec $(1 - \frac{t}{n}\lambda_k)^{-n}$ comme terme général de la diagonale.
Quand $n \to +\infty$, $\ln(1 - \frac{t}{n}\lambda_k)$ est équivalent à $-\frac{t}{n}\lambda_k$ donc $-n\ln(1 - \frac{t}{n}\lambda_k)$ tend vers $t\lambda_k$ donc $(1 - \frac{t}{n}\lambda_k)^{-n}$ tend vers $e^{t\lambda_k}$ donc la matrice $(I_d - \frac{t}{n}D)^{-n}$ tend vers la matrice $\Delta(t)$ donc, en utilisant encore nos remarques préliminaires,

$\boxed{\text{La matrice } (I_d - \frac{t}{n}A)^{-n} \text{ tend vers } P.\Delta(t).P^{-1} = M(t) \text{ quand } n \to +\infty.}$

Si, pour tout réel $\lambda > 0$ suffisamment grand, la matrice $(\lambda I_d - A)^{-1}$ est positive, il en est de même de $(I_d - \frac{1}{\lambda}A)^{-1}$ (produit d'une matrice à coefficients positifs par un réel positifλ).

Donc, pour $t \geqslant 0$ fixé, la matrice $(I_d - \frac{t}{n}A)^{-1}$ est positive pour n suffisamment grand (même pour $t = 0$) donc $(I_d - \frac{t}{n}A)^{-n}$ aussi (produit de n matrices à coefficients positifs), donc sa limite pour n infini aussi d'après II-1°.

$$\boxed{\text{Si, pour } \lambda \text{ suffisamment grand, } (\lambda I_d - A)^{-1} \text{ est positive, il en est de même de } M(t) \text{ pour tout } t \geqslant 0.}$$

IV-2°)c. Supposons $\lambda > \|A\|$, ce qui implique que λ n'est égal à aucune des valeurs propres de A et que $\lambda I_d - A$ est inversible.

$e^{-\lambda t}\Delta(t)$ et $e^{-\lambda t}M(t) = P.\left(e^{-\lambda t}\Delta(t)\right).P^{-1}$ sont des fonctions continues de t sur $[0, +\infty[$ donc, d'après ce qui est admis dans l'énoncé, $\displaystyle\int_0^x e^{-\lambda t}M(t)\,dt = P.\left(\int_0^x \left(e^{-\lambda t}\Delta(t)\right)\,dt\right).P^{-1}$.

La matrice $\left(e^{-\lambda t}\Delta(t)\right)$ est diagonale, avec $e^{(\lambda_k - \lambda)t}$ comme terme général diagonal. Son intégrale de 0 à x est donc la matrice diagonale $U(x)$ de terme général diagonal $\dfrac{e^{(\lambda_k-\lambda)x} - 1}{\lambda_k - \lambda}$ et

$\displaystyle\int_0^x e^{-\lambda t}M(t)\,dt = P.U(x).P^{-1}$.

D'autre part $\lambda I_d - A = \lambda I_d - P.D.P^{-1} = P.(\lambda I_d - D).P^{-1}$ donc

$(\lambda I_d - A)\displaystyle\int_0^x e^{-\lambda t}M(t)\,dt = P.(\lambda I_d - D).P^{-1}P.U(x).P^{-1} = P.(\lambda I_d - D).U(x).P^{-1}$.

$(\lambda I_d - D).U(x)$ est la matrice de terme général $(\lambda - \lambda_k).\dfrac{e^{(\lambda_k-\lambda)x} - 1}{\lambda_k - \lambda} = 1 - e^{(\lambda_k - \lambda)x}$.

D'autre part $I_d - e^{-\lambda x}M(x) = I_d - e^{-\lambda x}P.\Delta(x).P^{-1} = P.(I_d - e^{-\lambda x}\Delta(x)).P^{-1}$.

La matrice diagonale $I_d - e^{-\lambda x}\Delta(x)$ a pour terme général diagonal $1 - e^{(\lambda_k - \lambda)x}$.

On voit donc que $(\lambda I_d - A)\displaystyle\int_0^x e^{-\lambda t}M(t)\,dt = I_d - e^{-\lambda x}M(x)$.

Enfin, $\lambda I_d - A$ est inversible donc

$$\boxed{\int_0^x e^{-\lambda t}M(t)\,dt = (\lambda I_d - A)^{-1}.(I_d - e^{-\lambda x}M(x)).}$$

IV-2°)d. Au point où nous en sommes, il est difficile d'éviter l'exponentielle de matrice... Sans introduire cette notion, disons hypocritement que $\Delta(t)$ de terme général diagonal $e^{\lambda_k t}$ peut s'écrire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(tD)^n}{n!}$ donc

$M(t) = P.\Delta(t).P^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P.(tD)^n.P^{-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^nA^n}{n!}$. En faisant tendre p vers $+\infty$ dans

$\displaystyle\left\|\sum_{n=0}^{p}\frac{t^nA^n}{n!}\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{p}\left\|\frac{t^nA^n}{n!}\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{p}\frac{t^n\|A\|^n}{n!}$ (car $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$) nous obtenons

$$\boxed{\|M(t)\| \leqslant e^{t\|A\|}.}$$

Donc $\|e^{-\lambda x}M(x)\| \leqslant e^{x(\|A\| - \lambda)}$ qui tend vers 0 quand $x \to +\infty$ si λ est strictement supérieur à $\|A\|$.

Donc :

$$\boxed{\text{Si } \lambda > \|A\|,\quad (\lambda I_d - A)^{-1}.(I_d - e^{-\lambda x}M(x)) \text{ tend vers } (\lambda I_d - A)^{-1} \text{ quand } x \to +\infty.}$$

IV-2°)e. Si la matrice $M(t)$ est positive pour tout t positif, les termes de la matrice $e^{-\lambda t}M(t)$ sont tous positifs pour $t \geqslant 0$. Il en est de même de la matrice $\displaystyle\int_0^x e^{-\lambda t}M(t)\,dt$, car ses termes sont les intégrales de 1 à x de fonctions positives. Pour $\lambda > \|A\|$, la matrice $(\lambda I_d - A)^{-1}.(I_d - e^{-\lambda x}M(x))$ est donc positive pour tout $x \geqslant 0$. Par passage à la limite quand $x \to +\infty$

$$\boxed{\text{La matrice } (\lambda I_d - A)^{-1} \text{ est positive pour tout } \lambda > \|A\|.}$$

***

E.N.S. et ÉCOLE POLYTECHNIQUE 1998	Filière PSI
Mathématiques	Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé pour toutes les épreuves d'admissibilité, sauf pour les épreuves de français et de langues. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Il sera accordé une grande importance à la qualité et à la précision de la rédaction de ce problème.

Chaque partie est indépendante des autres, et tout résultat énoncé dans le texte pourra être utilisé dans la suite sans nécessairement avoir été démontré par le candidat.

Ce problème est consacré à l'approximation de fonctions continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$ par des fonctions polynômes.

NOTATIONS

- Étant donnés deux réels a et b avec $a < b$, on note I l'intervalle $[a, b]$.
- L'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est désigné par C^0. Pour n entier, $n \geqslant 1$, C^n désigne l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont les dérivées k-ièmes, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, sont continues. Pour $n \geqslant 1$ et $f \in C^n$, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f. On notera aussi f'' la dérivée seconde d'un élément de C^2. L'ensemble C^∞ des fonctions de classe C^∞ est l'intersection des ensembles $C^n, n \geqslant 0$.
- Soit σ une partie finie de $[a, b]$ contenant a et b. On note

$$\sigma = \{a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1}\}$$

avec

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n < a_{n+1} = b.$$

On dit alors que σ est une subdivision de $I = [a, b]$, de longueur n. On remarque que le cardinal de σ est $n + 2$. Le pas de σ, noté $h(\sigma)$ est le réel positif $h(\sigma) = \mathrm{Max}\{(a_{j+1} - a_j), 0 \leqslant j \leqslant n\}$.

- À une subdivision $\sigma = \{a_0, \ldots, a_{n+1}\}$ de longueur n, on associe la fonction polynôme sur $\mathbb{R}$ de degré n, notée S, définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, S(t) = \prod_{i=1}^{i=n}(t - a_i).$$

PRELIMINAIRES

Dans ces questions préliminaires, le candidat démontrera certains résultats qui seront utiles dans le problème.

0.1. Montrer que si une fonction ϕ élément de C^2 possède trois zéros distincts dans l'intervalle $]a, b[$, alors ϕ'' s'annule en au moins un point de l'intervalle $]a, b[$.

0.2. Soit $I = [-1, 1]$ et f la fonction définie sur I par
- si $x = 0, f(x) = 0$,
- si $x \neq 0, f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$.

0.2.1. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_m tel que, pour tout x dans I, $x \neq 0$,

$$f^{(m)}(x) = P_m(\tfrac{1}{x})\exp(-\tfrac{1}{x^2}).$$

0.2.2. En déduire que $f^{(m)}(0) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et que f est élément de C^∞.

0.3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $(u_n/n)_{n\in\mathbb{N}, n\geqslant 1}$ converge vers une limite l lorsque n tend vers $+\infty$ et $(v_n/n)_{n\in\mathbb{N}, n\geqslant 1}$ converge vers une limite l' lorsque n tend vers $+\infty$, ces limites vérifiant $l > l'$. Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

0.4. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$, que l'on déterminera, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1,\ \forall k \in \mathbb{Z},\ |k| \leqslant n \Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{k}{n}\right| \geqslant \frac{C}{n^2}.$$

PARTIE I

L'intervalle I étant fixé, on se donne une subdivision $\sigma = \{a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ de longueur $n \geqslant 1$ et une fonction f élément de C^0.

1. Nous construisons ici un polynôme d'interpolation pour f.

1.1. Montrer qu'il existe une fonction polynôme $L(f)$ de degré au plus égal à $n-1$, vérifiant

$$\forall i, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad L(f)(a_i) = f(a_i).$$

On pourra chercher $L(f)$ comme combinaison linéaire des fonctions polynômes $S_{(i)}$ où

$$S_{(i)}(t) = \prod_{j \in \{1,\ldots,n\}, j \neq i} (t - a_j).]$$

1.2. Montrer que le polynôme $L(f)$ est unique. On dit que $L(f)$ est le polynôme d'interpolation de f associé à σ.

1.3. Soit $\sigma = \{a, a_1, a_2, b\}$ une subdivision telle que $n = 2$. Donner l'expression de $L(f)$ en fonction de $a_1, a_2, f(a_1), f(a_2)$.

1.4. Pour chaque $n \geqslant 2$ et pour toute subdivision σ de longueur n, donner un exemple de fonction f non nulle élément de C^0 telle que le polynôme $L(f)$ d'interpolation de f associé à σ soit de degré exactement égal à $n-2$.

2. On suppose que f est un élément de C^n, et l'on souhaite démontrer la propriété :

$$(P) \quad \forall x \in I, \exists \xi \in I, f(x) = L(f)(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} S(x).$$

2.1. Pourquoi peut-on supposer sans restreindre la généralité que $x \in I, x \notin \sigma \cap]a, b[$?

2.2. Justifier (P) dans le cas où $n = 1$.

2.3. Plaçons-nous maintenant dans le cas où la longueur de la subdivision est $n = 2$. Dans ce cas, $\sigma = \{a, a_1, a_2, b\}$.

2.3.a On introduit, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\phi : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(t) = f(t) - L(f)(t) - \lambda S(t).$$

On considère un point x de I qui n'appartient pas à la subdivision. Déterminer λ de sorte que $\phi(x) = 0$.

2.3.b Le point x étant fixé et le réel λ étant ainsi choisi, donner trois zéros distincts de la fonction ϕ dans l'intervalle $]a, b[$.

2.3.c Vérifier (P) en utilisant **0.1.**.

2.4. Montrer la propriété (P) dans le cas n quelconque ($n \geqslant 3$). [On pourra utiliser à nouveau la fonction ϕ introduite en **2.3.a**].[On ne cherchera pas à faire un raisonnement par récurrence sur n.]

PARTIE II

L'intervalle I est toujours fixé. On se donne une subdivision σ, à laquelle sont associées sa longueur n, son polynôme S et son pas $h(\sigma)$. On se propose de déduire de (P) une estimation de $f - L(f)$ sur I. Pour cela, on va majorer S et étudier une classe de fonctions f pour lesquelles on a une majoration de $f^{(m)}$ pour tout m.

3. Nous nous proposons de démontrer

$$(1) \qquad \forall x \in I, |S(x)| \leqslant n!(h(\sigma))^n.$$

3.1.
Vérifier la majoration (1) dans les cas $n = 1$ et $n = 2$. On considèrera désormais $n \geqslant 3$. Pour $x \in I$, x n'appartenant pas à la subdivision, soit j l'unique entier, $0 \leqslant j \leqslant n$, tel que $a_j < x < a_{j+1}$.

3.2. Démontrer la majoration (1) lorsque $j = 0$ et lorsque $j = n$.
[On poura utiliser la relation $a_p - x = a_1 - x + \sum_{2 \leqslant q \leqslant p} (a_q - a_{q-1})$.]

3.3. On suppose $0 < j < n$. Majorer $\prod_{p=1}^{j-1} (x - a_p)$ ainsi que $\prod_{q=j+1}^{q=n} (a_q - x)$.

3.4. Démontrer la majoration (1).

4. Pour $M > 0$, on définit l'ensemble

$$E_M = \{f \in C^\infty, \forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f^{(m)}(x)| \leqslant M^{m+1}\}.$$

On définit $E = \bigcup_{M>0} E_M$. On étudie l'appartenance de fonctions classiques à E.

4.1. Montrer que pour chaque ω dans $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \sin \omega x$ et la fonction $x \mapsto e^{\omega x}$ sont dans E.

4.2. Démontrer que toutes les fonctions polynômes sont dans E.

4.3. Montrer que, si $f \in E_M$, pour tout x dans I, la série $\sum_{m \geqslant 0} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m$ est absolument convergente et que sa somme vaut $f(x)$.

4.4. La fonction f étudiée en **0.2** appartient-elle à E ?

5. Soit $(\sigma_m)_{m \in \mathbb{N}, m \geqslant 1}$ une suite de subdivisions de I. On suppose que la longueur de la subdivision σ_m est m et que

$$\lim_{m \to +\infty} h(\sigma_m) = 0.$$

Soit $f \in E$. On note $L_m(f)$ le polynôme d'interpolation de f associé à la subdivision σ_m construit à la question **1.**. Démontrer que la suite $(L_m(f))$ converge uniformément vers f sur I,

c'est-à-dire qu'il existe une majoration, valable pour tout x dans I, de la forme $|f(x) - L_m(f)(x)| \leqslant u_m$, où la suite u_m, indépendante de x, converge vers 0.

PARTIE III

Nous considérons dans cette partie l'intervalle $I = [-1, 1]$, et pour α réel strictement positif, la fonction $f_\alpha(x) = (x^2 + \alpha^2)^{-1}$.

6. Soit σ une subdivision de I, de longueur n. On suppose que la subdivision est symétrique, c'est-à-dire que si $x \in \sigma$, $-x \in \sigma$. On note $L(f_\alpha)$ le polynôme d'interpolation de f associé à σ défini dans la question **1.**, vérifiant

$$\forall x \in \sigma \cap]-1, 1[, L(f_\alpha)(x) = f_\alpha(x).$$

On rappelle que toute fonction polynôme sur $\mathbb{R}$ est aussi une fonction polynôme sur $\mathbb{C}$. On désigne par i la racine carrée usuelle de -1. On établit ici une égalité d'interpolation pour f_α.

6.1. Démontrer que la fonction polynôme S est paire (respectivement impaire) lorsque n est pair (respectivement impair).

6.2. On suppose n impair. Démontrer l'égalité entre fonctions polynômes (dont on étudiera le degré) :

$$1 - (t^2 + \alpha^2) L(f_\alpha)(t) = \frac{t S(t)}{i\alpha S(i\alpha)}.$$

6.3. Etablir une égalité similaire si n est pair.

Dans les questions qui suivent, nous nous donnons, pour chaque entier $n \geqslant 1$, la subdivision π_n de $I = [-1, 1]$, constituée des points $\frac{k}{n}, k \in \mathbb{Z}, -n \leqslant k \leqslant n$. Notons alors que

$$\pi_n = \{\frac{k}{n}, k \in \mathbb{Z}, |k| \leqslant n\}.$$

Cette subdivision est de longueur $2n - 1$, impaire. On associe, comme dans les Notations, à la subdivision π_n le polynôme P_n défini par

$$P_n(t) = \prod_{k=-n+1}^{k=n-1} \left(t - \frac{k}{n}\right).$$

On note $R_n(f_\alpha)$ le polynôme d'interpolation de f_α associé à la subdivision π_n défini dans la question **1.**.

7. On étudie dans cette question un équivalent de $\frac{1}{n} \ln |P_n(i\alpha)|$.

7.1. On pose $\Phi(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \ln(t^2 + \alpha^2) dt$. Calculer $\Phi(\alpha)$ à l'aide de fonctions usuelles. Quelle est la limite de $\Phi(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 par valeurs positives ?

7.2. Démontrer que : $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \ln |P_n(i\alpha)|\right) = \Phi(\alpha)$.

[On remarquera que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(z - k/n)(z + k/n) = z^2 - k^2/n^2$.]

8. On se propose d'étudier un équivalent de $\frac{1}{n}\ln|P_n(\frac{1}{\sqrt{2}})|$.

8.1. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$. Démontrer qu'il existe $k(n) \in \mathbb{N}$ tel que $k(n) < \frac{n}{\sqrt{2}} < k(n)+1$. Démontrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N_0$, on ait $k(n)+2 \leqslant n-1$ et $k(n)-2 \geqslant -n$. On considèrera dans la suite $n \geqslant N_0$.

> Dans les questions suivantes apparaissent quelques intégrales généralisées. Si l'on n'a pas encore étudié cette notion, on pourra s'en tenir à ce qui suit :
> Si f est continue sur $[a,b[$, de signe constant au voisinage de b, elle est dite intégrable sur $[a,b[$ si $\int_a^x f(t)dt$ a une limite I quand x tend vers b par valeurs inférieures. On pose alors $\int_a^b f(t)dt = I$.
> On notera que pour $y \in [a,b[$, on a $\int_a^b f(t)dt = \int_a^y f(t)dt + \int_y^b f(t)dt$, donc $\int_y^b f(t)dt$ tend vers 0 quand y tend vers b.

8.2. Calculer, pour tout $x \in [-1,1]$, la fonction $\Psi(x) = \int_{-1}^1 \ln|t-x|dt$. Montrer que $\Psi(\frac{1}{\sqrt{2}}) > -2$.

Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\int_{(k(n)-1)/n}^{(k(n)+2)/n} \ln|t - \frac{1}{\sqrt{2}}|dt$

8.3. Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, des suites $(w'_n)_{n\in\mathbb{N},n\geqslant 1}$ et $(w''_n)_{n\in\mathbb{N},n\geqslant 1}$ définies, pour $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$, par $w'_n = \frac{1}{n}\ln\left|\frac{k(n)}{n} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right|$ et $w''_n = \frac{1}{n}\ln\left|\frac{k(n)+1}{n} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right|$.

8.4. Soit ψ une fonction continue et croissante sur $[-1,\frac{1}{\sqrt{2}}[$ et continue et décroissante sur $]\frac{1}{\sqrt{2}},1]$. On suppose que ψ est intégrable sur $[-1,\frac{1}{\sqrt{2}}]$ et sur $[\frac{1}{\sqrt{2}},1]$.

Pour $p \geqslant k(n)+1$, comparer $\int_{p/n}^{(p+1)/n}\psi(t)dt$ et les réels $\frac{1}{n}\psi(\frac{p}{n})$ et $\frac{1}{n}\psi(\frac{p+1}{n})$.
Etablir des inégalités analogues pour $p \leqslant k(n)-1$.

8.5 Donner, pour $n \geqslant N_0$, un encadrement de $\int_{(k(n)+2)/n}^1 \psi(t)dt$ et un encadrement de $\int_{-1}^{(k(n)-1)/n}\psi(t)dt$ utilisant respectivement :
$\frac{1}{n}\sum_{p=k(n)+2}^{p=n}\psi(\frac{p}{n})$, $\frac{1}{n}\sum_{p=-n}^{p=k(n)-1}\psi(\frac{p}{n})$, et les réels $\psi(\frac{k(n)+2}{n})$, $\psi(1)$, $\psi(\frac{k(n)-1}{n})$, $\psi(-1)$.

8.6 Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{p\in\mathbb{N},-n\leqslant p\leqslant n,p\neq k(n),p\neq k(n)+1}\ln\left|\frac{p}{n}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|$ converge vers $\Psi(\frac{1}{\sqrt{2}})$. [On choisira une fonction ψparticulière]. En déduire que $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\ln|Pn(\frac{1}{\sqrt{2}})|\right) = \Psi(\frac{1}{\sqrt{2}})$.

9. Démontrer qu'il existe un réel α_0, $\alpha_0 > 0$ et un point $x \in]-1,1[$ tel que la suite $(R_n(f_{\alpha_0})(x) - f_{\alpha_0}(x))_{n\geqslant 1}$ tende vers l'infini.
Est-ce que la fonction f_{α_0} appartient à l'ensemble E défini dans la question **4.**?

10. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des réels $x_0 \in [-1,1]$ tels que
$$\exists r \in \mathbb{N}, r \geqslant 2, \exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1, \forall k \in \mathbb{Z}, |k| \leqslant n, \left|x_0 - \frac{k}{n}\right| \geqslant \frac{C}{n^r}.$$
Montrer que, pour $x \in \mathcal{A}$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|P_n(x)| = \Psi(x)$.

11. Soit $\alpha > 0$. Déterminer en fonction de α le plus grand intervalle ouvert J_α, inclus dans $[-1,1]$ où la suite $(Rn(f_\alpha)(x))_{n\in\mathbb{N},n\geqslant 1}$ converge vers $f_\alpha(x)$ pour tout x de $J_\alpha \cap A$.
Déterminer l'ensemble des réels α tels que $\alpha \in J_\alpha$.

12. Soit x_0 un réel non rationnel tel qu'il existe un polynôme Q_r, de degré r, dont les coefficients sont entiers, tel que $Q_r(x_0) = 0$ et $Q'_r(x_0) \neq 0$. Démontrer que $x_0 \in \mathcal{A}$.

***

E.N.S. et ÉCOLE POLYTECHNIQUE 1998	Filière PSI
Mathématiques	**CORRIGÉ**

PRÉLIMINAIRES

0.1. Si $\phi \in C^2$ et s'il existe x_1, x_2, x_3 tels que : $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ et :
$\phi(x_1) = \phi(x_2) = \phi(x_3) = 0$, il existe, d'après le théorème de Rolle appliqué aux fonctions ϕ et ϕ' qui sont à dérivées continues sur $]a,b[$, x_4 et x_5 tels que : $x_1 < x_4 < x_2 < x_5 < x_3$ et $\phi'(x_4) = \phi'(x_5) = 0$ puis x_6 tel que : $x_4 < x_6 < x_5$ et $\phi''(x_6) = 0$.

> Si ϕ élément de C^2 possède trois zéros distincts dans $]a,b[$, alors ϕ'' s'annule en au moins un point de $]a,b[$.

0.2. Composée de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle, f est effectivement indéfiniment dérivable sur I privé de 0.
D'autre part f est continue sur I puisque c'est le prolongement par continuité en 0 d'une fonction continue sur $I - \{0\}$.

0.2.1. Pour $m = 0$, on peut bien écrire $f^{(m)}(x) = P_m(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x^2})$ en prenant pour polynôme P_0 la constante 1.
Supposons par récurrence qu'au rang m il existe un polynôme P_m tel que pour tout x dans $I - \{0\}$ on ait $f^{(m)}(x) = P_m(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x^2})$. Alors, pour tout x dans $I - \{0\}$, on a :
$$f^{(m+1)}(x) = \tfrac{-1}{x^2}P'_m(\tfrac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} + P_m(\tfrac{1}{x})\tfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} = \left(\tfrac{-1}{x^2}P'_m(\tfrac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} + P_m(\tfrac{1}{x})\tfrac{2}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},$$
qui est bien de la forme $g(x)\exp(-\frac{1}{x^2})$, avec $g(x)$ polynôme en $\frac{1}{x}$. Donc, par récurrence :

> Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_m tel que : $\forall x \in I, x \neq 0$, $f^{(m)}(x) = P_m(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x^2})$.

0.2.2. On sait que si la fonction h est continue sur l'intervalle J, dérivable sur J privé du point c et si $h'(x)$ a une limite l quand $x \to c$, alors h est dérivable (et même continûment dérivable) en c, avec $h'(c) = l$.
Cela s'applique ici à $f^{(m)}(x)$ qui tend vers 0 quand $x \to c = 0$, car c'est une combinaison linéaire de fonctions $\frac{1}{x^k}\exp(-\frac{1}{x^2})$ qui tendent vers 0 (forme indéterminée usuelle).
Pour $m = 1$, cela assure la continue dérivabilité de f sur I, puis, par récurrence immédiate sur m, cela prouve que

> f est élément de C^∞ avec $f^{(m)}(0) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Evidemment, les conclusions des questions précédentes seraient encore vraies en remplaçant I par $\mathbb{R}$.

0.3. Pour $n \geqslant 1$, écrivons $u_n - v_n = n.\frac{u_n - v_n}{n}$. Avec les hypothèses faites, $\frac{u_n - v_n}{n} \to l - l' > 0$ quand $n \to +\infty$. Par multiplication par n qui tend vers $+\infty$,

> $u_n - v_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

0.4. Pour k dans $\mathbb{Z}$ et n dans $\mathbb{N}^*$ on a : $\left|\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{k}{n}\right| = \left|\frac{n - k\sqrt{2}}{n\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{n^2 - 2k^2}{n\sqrt{2}(n + k\sqrt{2})}\right|$. On a multiplié haut et bas par $n + k\sqrt{2}$ qui n'est pas nul car $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.
Pour cette même raison ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$), l'entier $|n^2 - 2k^2|$ n'est pas nul, donc plus grand que 1. Donc
$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{k}{n}\right| \geqslant \frac{1}{n\sqrt{2}|n + k\sqrt{2}|}.$$
Si de plus on prend k entre $-n$ et n, la plus grande valeur de $|n + k\sqrt{2}|$ est $|n + n\sqrt{2}| = n(1+\sqrt{2})$, donc
$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{k}{n}\right| \geqslant \frac{1}{n^2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{n^2(\sqrt{2}+2)} = \frac{2-\sqrt{2}}{2n^2}.$$

> $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1, \forall k \in \mathbb{Z}, |k| \leqslant n \Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{k}{n}\right| \geqslant \frac{C}{n^2}$, avec $C = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

PARTIE I

1.1. C'est dans le cours (polynôme d'interpolation de Lagrange). Reprenons-le rapidement. Le polynôme $S_{(i)}(t)$ de l'énoncé, de degré $n-1$, est nul pour $t = a_j$ si $j \neq i$ et non nul pour $t = a_i$. Il est clair que

$$\boxed{\text{Le polynôme défini par } L(f)(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(a_i)}{S_i(a_i)} S_i(t) \text{ vérifie les conditions requises.}}$$

1.2. Si $T(f)$ est un autre polynôme solution, le polynôme $L(f) - T(f)$ est de degré au plus égal à $n-1$ et s'annule au moins n fois : c'est le polynôme nul, donc $L(f) = T(f)$.

$$\boxed{\text{Le polynôme } L(f) \text{ est unique.}}$$

1.3. En utilisant ce qui précède, on a ici : $\boxed{L(f)(t) = \dfrac{f(a_1)}{a_1 - a_2}(t - a_2) + \dfrac{f(a_2)}{a_2 - a_1}(t - a_1).}$

1.4. On veut ici une fonction f telle que, dans $L(f)$, le terme de degré $n-1$ soit nul et celui de degré $n-2$ ne le soit pas, ce qui conduirait à deux conditions sur les $f(a_i)$. Plus simplement, on peut remarquer que si f est un polynôme de degré au plus $n-1$, f lui-même vérifie les conditions requises dans **1.1.**, donc $L(f) = f$; en particulier

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est une fonction polynôme de degré } n-2,\ L(f) \text{ est exactement de degré } n-2.}$$

2.1. Si $x \in I$ et $x \in \sigma \cap]a, b[$, x est un certain a_i de la subdivision, donc $S(x) = 0$ et $f(x) = L(f)(x)$.
La relation $f(x) = L(f)(x) + \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!} S(x)$ est donc réalisée quel que soit le choix de ξ. Donc

$$\boxed{\text{On peut poursuivre la recherche de } \xi \text{ en supposant que } x \in I \text{ et } x \notin \sigma \cap]a, b[.}$$

2.2. Pour $n = 1$, $L(f)(x)$ est la constante $f(a_1)$ et $S(x) = x - a_1$.
La propriété (P) s'écrit : $\forall x \in I, \exists \xi \in I, f(x) = f(a_1) + f'(\xi)(x - a_1)$.

$$\boxed{\text{Elle résulte, pour } x \neq a_i \text{, de l'égalité des accroissements finis.}}$$

2.3.a Puisque x n'est pas l'un des a_i, $S(x)$ n'est pas nul.

$$\boxed{\text{En choisissant } \lambda = \frac{f(x) - L(f)(x)}{S(x)}, \text{ on a } \phi(x) = 0.}$$

2.3.b Avec ce choix de λ,

$$\boxed{\text{La fonction } \phi \text{ s'annule, dans }]a, b[\text{, aux trois points distincts } x, a_1, a_2.}$$

2.3.c f est élément de C^2 donc ϕ aussi. On peut donc appliquer **0.1.** : $\exists \xi \in]a, b[, \phi''(\xi) = 0$. Comme $n = 2$, $L(f)$ est du premier degré et S est unitaire du second degré, donc $\phi''(t) = f''(t) - 2\lambda$ donc $\lambda = \dfrac{f''(\xi)}{2}$ et, puisque $\phi(x) = 0$, $f(x) = L(f)(x) + \dfrac{f''(\xi)}{2} S(x)$.

$$\boxed{\text{La propriété } (P) \text{ est vérifiée.}}$$

2.4. Maintenant, $n \geqslant 3$. Fixons x dans I, distinct d'un point de subdivision, et essayons d'exhiber ξ vérifiant la relation de (P). Pour cela reprenons la fonction ϕ précédente en choisissant encore λ tel que $\phi(x) = 0$.
ϕ s'annule donc aux $n+1$ points distincts $x, a_1, \ldots, a_n$. Le raisonnement fait en **0.1.** se généralise immédiatement : ϕ est de classe C^n et s'annule $n+1$ fois au moins sur $]a, b[$ donc il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $\phi^{(n)}(\xi) = 0$. Donc : $\quad 0 = f^{(n)}(\xi) - L(f)^{(n)}(\xi) - \lambda S^{(n)}(\xi)$.
Comme $L(f)$ est au plus de degré $n-1$, $L(f)^{(n)}(\xi)$ est nul. Comme S est unitaire de degré n, $S^{(n)}$ est la constante $n!$. Donc $\lambda = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$. En écrivant que $\phi(x)$ est nul, on obtient la relation de (P).

$$\boxed{\text{La propriété } (P) \text{ est vraie dans le cas } n \text{ quelconque } (n \geqslant 3).}$$

PARTIE II

3.1. • Pour $n = 1$, $S(x) = x - a_1$; quand x décrit $[a, b]$, $S(x)$ croît de $a - a_1$ négatif à $b - a_1$ positif ; le maximum de la valeur absolue est donc le plus grand des deux nombres $a_1 - a$ et $b - a_1$, c'est-à-dire $h(\sigma)$, d'où l'inégalité.
• Pour $n = 2$, $S(x) = (x - a_1)(x - a_2)$.
Pour $x \in [a, a_1]$, on a $a_1 - x \leqslant a_1 - a \leqslant h(\sigma)$ et $a_2 - x = a_2 - a_1 + a_1 - x \leqslant 2h(\sigma)$. Par multiplication, on a $|S(x)| = (a_1 - x)(a_2 - x) \leqslant 2(h(\sigma))^2$. De même pour $x \in [a_2, b]$.
Pour $x \in [a_1, a_2]$, on majore $x - a_1$ et $a_2 - x$ par $h(\sigma)$, donc $|S(x)|$ par $(h(\sigma))^2$.
Dans les trois cas $|S(x)|$ est inférieur à $2(h(\sigma))^2$.

$$\boxed{\text{La majoration (1) est donc vraie dans les cas } n = 1 \text{ et } n = 2.}$$

3.2. On peut bien considérer que x appartient à un certain intervalle $[a_j, a_{j+1}]$, mais ouvrir l'intervalle comme le fait l'énoncé pose problème pour $j = 0$ et $j = n$ car $S(a)$ et $S(b)$ ne sont pas nuls.
Pour $j = 0$, les $x - a_i$ sont négatifs et $|S(x)| = (a_1 - x)(a_2 - x) \ldots (a_n - x)$.
On peut majorer $a_1 - x$ par $a_1 - a$, lui-même inférieur à $h(\sigma)$, puis, d'une façon générale, $a_p - x$, qui est égal à $(a_1 - x) + \sum\limits_{2 \leqslant q \leqslant p} (a_q - a_{q-1})$, par $ph(\sigma)$. Par multiplication, cela donne $|S(x)| \leqslant n!(h(\sigma))^n$
On procède de façon très voisine pour $j = n$.

$$\boxed{\text{La majoration est vérifiée lorsque } j = 0 \text{ ou } j = n.}$$

3.3. Pour $0 < j < n$, on peut appliquer le résultat précédent en remplaçant n par j, $[a, b]$ par $[a, a_{j+1}]$, $S(x)$ par $\prod\limits_{p=1}^{p=j} (x - a_p)$ et σ par $\sigma_1 = \{a_0, \ldots, a_{j+1}\}$. x est alors dans le dernier intervalle de la subdivision σ_1 ; le résultat précédent s'applique et donne : $\prod\limits_{p=1}^{p=j} (x - a_p) \leqslant j!(h(\sigma_1))^j$. Comme $h(\sigma_1) \leqslant h(\sigma)$, on a :

$$\boxed{\prod_{p=1}^{p=j} (x - a_p) \leqslant j!(h(\sigma))^j.}$$

La petite faute d'énoncé est claire : on ne voit pas pourquoi, puisque x est au-dela de a_j le dernier terme du produit serait $x - a_{j-1}$ et non $x - a_j$.
De même, on peut remplacer $[a, b]$ par $[a_j, b]$ de façon à ce que x soit sur le premier intervalle de la subdivision et utiliser **3.2.**. On arrive à

$$\boxed{\prod_{p=j+1}^{p=n} (a_p - x) \leqslant (n-j)!(h(\sigma))^{n-j}.}$$

3.4. Par multiplication, cela donne : $|S(x)| \leqslant j!(n-j)!((h(\sigma))^n$. Or $j!(n-j)! = \dfrac{n!}{C_n^j}$ et $C_n^j \geqslant 1$

$$\boxed{\text{La majoration (1) en résulte.}}$$

4.1. Les fonctions proposées appartiennent effectivement à C^∞.
Pour chacune d'elles, $|f^{(m)}(x)|$ est de la forme $|\omega|^m g(x)$ où $g(x) = |\cos \omega x|, |\sin \omega x|$ ou $e^{\omega x}$. g est continue, donc majorée, sur I qui est un segment, et ce majorant k est indépendant de m. Donc :
$$\forall x \in I, |f^{(m)}(x)| \leqslant k|\omega|^m.$$
En prenant $M = \max(k, |\omega|)$, on a $|f^{(m)}(x)| \leqslant M^{m+1}$ donc $f \in E_M$.

$$\boxed{\text{Les fonctions proposées appartiennent à } E}$$

4.2. Si f est une fonction polynôme, elle est continue sur I, donc bornée, ainsi que ses dérivées successives, qui sont nulles à partir d'un certain rang. Si M_m est un majorant de $|f^{(m)}|$ sur I, nul pour $m \geqslant m_0$, appelons M le max des $M_m^{\frac{1}{m+1}}$. On a bien $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f^{(m)}(x)| \leqslant M^{m+1}$ donc $f \in E_M$.

$$\boxed{\text{Les fonctions polynômes appartiennent à } E}$$

4.3. Rajoutons l'hypothèse, visiblement oubliée : $0 \in I$ et fixons x dans I.

On peut majorer $\left|\frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m\right|$ par $M\frac{(M|x|)^m}{m!}$, terme général d'une série exponentielle convergente. Cela assure la convergence absolue de la série proposée.
Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre 0 et un point x quelconque de I, à f qui est C^∞ sur I puisque nous disposons d'un majorant de $|f^{(m+1)}|$:

$$\left|f(x) - \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m\right| \leqslant M^{n+2}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

La suite de terme général $M\frac{(M|x|)^{n+1}}{(n+1)!}$, terme général d'une série exponentielle convergente, converge vers 0.
Cela prouve à la fois la convergence de la série et la valeur $f(x)$ de la somme de cette série.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ dans } I, \text{ la série proposée est absolument convergente et } \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m = f(x).}$$

Remarque : En majorant $|x|$, la suite de terme général $\frac{(M|x|)^{n+1}}{(n+1)!}$ peut être majorée par une suite indépendante de x qui converge vers 0. Cela prouve que la série proposée, série de fonctions de x, converge vers $f(x)$ uniformément sur I.

4.4. La fonction f étudiée en **0.2.** appartient à C^∞. Si elle appartenait à E, on pourrait lui appliquer ce qui précède : Pour tout x dans $I = [-1, 1]$, $f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m$. Puisque f et toutes ses dérivées sont nulles en 0, la somme de la série serait nulle. f serait nulle sur $[-1, 1]$, ce qui n'est pas.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ étudiée en } \mathbf{0.2.} \text{ n'appartient pas à } E.}$$

5. Soit $x \in I$. Nous disposons, pour tout entier m, de la propriété (P) :
$\exists \xi \in I, f(x) - L_m(f)(x) = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}S_m(x)$, où S_m est le polynôme S associé à la subdivision σ_m.
Utilisant aussi la majoration (1), nous obtenons : $|f(x) - L_m(f)(x)| \leqslant \frac{|f^{(m)}(\xi)|}{m!}m!(h(\sigma_m))^m$.
Puisque f appartient à un certain E_M : $|f(x) - L_m(f)(x)| \leqslant M^{m+1}(h(\sigma_m))^m = M(Mh(\sigma_m))^m$.
La suite de terme général $Mh(\sigma_m)$ converge vers 0. Il en est de même de la suite $(Mh(\sigma_m))^m$, qui est plus petite (à partir d'un certain rang), et positive.
Comme cette suite ne dépend pas de x :

$$\boxed{\text{La suite } L_m(f) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } I.}$$

PARTIE III

6. Regardons σ de plus près. Cette subdivision est symétrique et les points utilisés $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ (avec $a_0 = -1$ et $a_{n+1} = 1$) forment une suite strictement croissante : on a nécessairement $a_n = -a_1, a_{n-1} = -a_2$ etc.. Les premiers a_i sont strictement négatifs et les derniers, en nombre égal, sont leurs opposés, strictement positifs. 0 ne figure donc dans la subdivision que si et seulement si n est impair.
Notons p le nombre d'indices i entre 1 et n tels que $a_i < 0$; p est égal à $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$ suivant la parité de n.

6.1. Si n est pair, $S(x) = \prod_{i=1}^{p}(x-a_i).\prod_{i=1}^{p}(x+a_i) = \prod_{i=1}^{p}(x^2-a_i^2)$. Si n est impair, $S(x) = x\prod_{i=1}^{p}(x^2-a_i^2)$.
Donc

$$\boxed{\text{La fonction } S \text{ est paire (respectivement impaire) lorsque } n \text{ est pair (respectivement impair).}}$$

6.2. Le polynôme $1 - (t^2 + \alpha^2)L(f_\alpha)(t)$ est de degré au plus égal à $n+1$; il s'annule pour $t = a_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ car $L(f_\alpha)(a_i) = f_\alpha(a_i) = (a_i^2 + \alpha^2)^{-1}$; il prend la valeur 1 pour $t = \pm i\alpha$.

Le polynôme $\frac{tS(t)}{i\alpha S(i\alpha)}$ est de degré $n+1$, s'annule aussi pour $t = a_i$, prend la valeur 1 pour $t = i\alpha$ et aussi pour $t = -i\alpha$ car S est impair. Ces polynômes de degré au plus $n+1$ prenant la même valeur pour $n+2$ valeurs complexes différentes de t sont donc égaux

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}\text{)}, \ 1 - (t^2 + \alpha^2)L(f_\alpha)(t) = \frac{tS(t)}{i\alpha S(i\alpha)}.}$$

6.3. Si n est pair, on arrive de façon analogue à l'égalité entre deux polynômes qui prennent la même valeur en $i\alpha, -i\alpha, a_1, \ldots, a_n$:

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}\text{)}, \ 1 - (t^2 + \alpha^2)L(f_\alpha)(t) = \frac{S(t)}{S(i\alpha)}.}$$

7.1. On intègre par parties :

$$\int_{-1}^{+1} \ln(t^2+\alpha^2)dt = \left[t\ln(t^2+\alpha^2)\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} t.\frac{2t}{t^2+\alpha^2}dt = 2\ln(1+\alpha^2) - \int_{-1}^{+1}\left(2 - \frac{2\alpha^2}{t^2+\alpha^2}\right)dt$$
$$= 2\ln(1+\alpha^2) - 4 + \left[2\alpha \operatorname{Arctan}\frac{t}{\alpha}\right]_{-1}^{+1} = 2\ln(1+\alpha^2) - 4 + 4\alpha \operatorname{Arctan}\tfrac{1}{\alpha}$$

Puisque $\alpha > 0$, on sait que $\operatorname{Arctan}\alpha + \operatorname{Arctan}\frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2}$ donc

$$\boxed{\Phi(\alpha) = \ln(1+\alpha^2) - 2 + 2\alpha\operatorname{Arctan}\tfrac{1}{\alpha} = \ln(1+\alpha^2) - 2 + \pi\alpha - 2\alpha\operatorname{Arctan}\alpha.}$$

$$\boxed{\Phi(\alpha) \text{ tend vers } -2 \text{ quand } \alpha \text{ tend vers 0 par valeurs positives.}}$$

7.2. En regroupant les facteurs : $P_n(t) = t\prod_{k=1}^{k=n-1}\left(t - \frac{k}{n}\right)\left(t + \frac{k}{n}\right) = t\prod_{k=1}^{k=n-1}\left(t^2 - \frac{k^2}{n^2}\right)$ donc

$P_n(i\alpha) = i\alpha\prod_{k=1}^{k=n-1}\left(-\alpha^2 - \frac{k^2}{n^2}\right)$ et $\frac{1}{n}\ln|P_n(i\alpha)| = \frac{1}{n}\ln\alpha + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n-1}\ln\left(\alpha^2 + \frac{k^2}{n^2}\right)$, qui a même limite, quand $n \to +\infty$, que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\ln\left(\alpha^2 + \frac{k^2}{n^2}\right)$. Ceci est une somme de Riemann relative à la fonction $\ln(t^2+\alpha^2)$ sur l'intervalle $[0, 1]$, somme qui converge, vers $\int_0^{+1}\ln(t^2+\alpha^2)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\ln(t^2+\alpha^2)dt = \Phi(\alpha)$ (la fonction intégrée est paire.)

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\ln|P_n(i\alpha)|\right) = \Phi(\alpha).}$$

8.1.

$$\boxed{\text{En prenant pour } k(n) \text{ la partie entière de } \frac{n}{\sqrt{2}}, \text{ on a } k(n) < \frac{n}{\sqrt{2}} < k(n) + 1.}$$

($\sqrt{2}$ est irrationnel donc $\frac{n}{\sqrt{2}}$ n'est pas un entier donc la première inégalité est stricte.)
Ensuite, on a : $(k(n)+2) - (n-1) = k(n) - n + 3 < \frac{n}{\sqrt{2}} - n + 3 = n\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) + 3$ donc $(k(n)+2) - (n-1)$ tend vers $-\infty$ quand $n \to +\infty$ et est donc négatif à partir d'un certain rang.
Par ailleurs $k(n)$ est positif donc $k(n) - 2 \geqslant -n$ dès que $n \geqslant 2$. Finalement

$$\boxed{\text{À partir d'un certain rang } N_0, \text{ on a : } k(n) + 2 \leqslant n - 1 \text{ et } k(n) - 2 \leqslant -n.}$$

(on pouvait aussi utiliser le résultat de 0.3.)

8.2. L'intégrale proposée est généralisée car $\ln|t-x| \to -\infty$ quand $t \to x$. Sous réserve d'existence de toutes les intégrales écrites, $\Psi(x) = \int_{-1}^{x} \ln|t-x|dt + \int_{x}^{1} \ln|t-x|dt = \int_{-1}^{x} \ln(x-t)dt + \int_{x}^{1} \ln(t-x)dt$.

$\int_x^1 \ln(t-x)dt$ est la limite, si elle existe, quand $u \to x+$, de

$$\int_u^1 \ln(t-x)dt = [(t-x)\ln(t-x) - t]_u^1 = (1-x)\ln(1-x) - 1 - (u-x)\ln(u-x) + u.$$

Cette limite existe et vaut $(1-x)\ln(1-x)-1+x$. De même : $\int_{-1}^{x} \ln(x-t)dt = (1+x)\ln(1+x)-x-1$.

Finalement

$$\boxed{\Psi(x) = (1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x) - 2.}$$

La fonction $g : u \mapsto u \ln u$ est strictement convexe puisque sa dérivée $1 + \ln u$ est strictement croissante. Donc, pour $x \in]0,1[$, on a $(1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x) = g(1+x) + g(1-x) > 2g(1) = 0$. Donc $\Psi(x) > -2$. En particulier :

$$\boxed{\Psi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > -2.}$$

Le raisonnement prouvant l'existence de l'intégrale de -1 à 1 se généralise à l'intégrale de y à z, pourvu que $y < x < z$: $\int_y^z \ln|t-x|dt$ existe et est égale à $\int_y^x + \int_x^z$. En particulier, si a_n et b_n sont deux suites tendant vers x, avec, pour tout n, $a_n < x < b_n$, alors $\int_{a_n}^{b_n} \ln|t-x|dt = \int_{a_n}^{x} \ln|t-x|dt + \int_{x}^{b_n} \ln|t-x|dt$, qui tendent vers 0 quand $n \to +\infty$.

On peut appliquer cela à $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a_n = \frac{k(n)-1}{n}$ et $b_n = \frac{k(n)+2}{n}$. (Pour prouver que ces suites tendent vers $\frac{1}{\sqrt{2}}$, on encadre $k(n)$ entre $\frac{n}{\sqrt{2}} - 1$ et $\frac{n}{\sqrt{2}}$.) On en déduit que

$$\boxed{\int_{\frac{k(n)-1}{n}}^{\frac{k(n)+2}{n}} \ln\left|t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| dt \text{ tend vers 0 quand } n \to +\infty.}$$

8.3. On a trouvé au **0.4.** une constante C telle que $\left|\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{k}{n}\right| \geqslant \frac{C}{n^2}$. En appliquant cela à $k = k(n)$ et $k = k(n)+1$, cela donne w_n' et w_n'' supérieurs à $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{C}{n^2}\right) = \frac{1}{n}(\ln C - 2\ln n)$, qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Comme w_n' et w_n'' sont négatifs à partir d'un certain rang (les deux "ln" tendent vers $-\infty$), on en déduit par encadrement que

$$\boxed{w_n' \text{ et } w_n'' \text{ tendent vers 0 quand } n \to +\infty.}$$

8.4. Nous admettrons, ce qui est implicite dans l'énoncé, que p est entier et suffisamment petit en valeur absolue pour que $\frac{p}{n}$ et $\frac{p+1}{n}$ soient entre -1 et 1 (donc p entre $-n$ et $n-1$).

Si $p \geqslant k(n)+1 > \frac{n}{\sqrt{2}}$, on a donc $1 \geqslant \frac{p+1}{n} > \frac{p}{n} > \frac{1}{\sqrt{2}}$: ψ est décroissante sur $\left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right]$.

En intégrant l'inégalité : $\forall t \in \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right]$, $\psi\left(\frac{p}{n}\right) \geqslant \psi(t) \geqslant \psi\left(\frac{p+1}{n}\right)$, on obtient

$$\boxed{\frac{1}{n}\psi\left(\frac{p}{n}\right) \geqslant \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} \psi(t)dt \geqslant \frac{1}{n}\psi\left(\frac{p+1}{n}\right).}$$

De même, pour $p \leqslant k(n)-1$, ψ est croissante sur $\left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right]$. On arrive à la double inégalité inverse de la précédente.

8.5. Ajoutons membre à membre les encadrements obtenus pour p variant de $k(n)+2$ à $n-1$.

Nous obtenons : $\frac{1}{n}\sum_{p=k(n)+2}^{n-1} \psi\left(\frac{p}{n}\right) \geqslant \int_{\frac{k(n)+2}{n}}^{1} \psi(t)dt \geqslant \frac{1}{n}\sum_{p=k(n)+2}^{n-1} \psi\left(\frac{p+1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{p=k(n)+3}^{n} \psi\left(\frac{p}{n}\right)$.

En ajoutant et retranchant aux sommes des termes convenables on obtient

$$\boxed{-\frac{\psi(1)}{n} + \frac{1}{n}\sum_{p=k(n)+2}^{n} \psi\left(\frac{p}{n}\right) \geqslant \int_{\frac{k(n)+2}{n}}^{1} \psi(t)dt \geqslant -\frac{\psi(\frac{k(n)+2}{n})}{n} + \frac{1}{n}\sum_{p=k(n)+2}^{n} \psi\left(\frac{p}{n}\right).}$$

De même, en faisant varier p de $-n$ à $k(n)-2$:

$\frac{1}{n}\sum_{p=-n}^{k(n)-2} \psi\left(\frac{p}{n}\right) \leqslant \int_{-1}^{\frac{k(n)-1}{n}} \psi(t)dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{p=-n}^{k(n)-2} \psi\left(\frac{p+1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{p=-n+1}^{k(n)-1} \psi\left(\frac{p}{n}\right)$, puis :

$$\boxed{-\frac{\psi(\frac{k(n)-1}{n})}{n} + \frac{1}{n}\sum_{p=-n}^{k(n)-1} \psi\left(\frac{p}{n}\right) \leqslant \int_{-1}^{\frac{k(n)-1}{n}} \psi(t)dt \leqslant -\frac{\psi(-1)}{n} + \frac{1}{n}\sum_{p=-n}^{k(n)-1} \psi\left(\frac{p}{n}\right)}$$

8.6. On peut appliquer ce qui précède à $\psi(x) = \ln\left|x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right|$ car cette fonction ψ a les propriétés de continuité, monotonie et intégrabilité requises par **8.4.**. La somme qui nous est proposée est la somme de $\frac{1}{n}\sum_{p=-n}^{k(n)-1} \psi\left(\frac{p}{n}\right)$ et de $\frac{1}{n}\sum_{p=k(n)+2}^{n} \psi\left(\frac{p}{n}\right)$. De **8.5.** on déduit un encadrement de la première par deux suites qui convergent, comme $\int_{-1}^{\frac{k(n)-1}{n}} \psi(t)dt$, vers $\int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \psi(t)dt$.

De même, quand $n \to +\infty$, la deuxième somme tend vers $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \psi(t)dt$. Par addition, on en déduit que

$$\boxed{\text{La suite proposée converge vers } \int_{-1}^{1} \psi(t)dt, \text{ soit } \Psi(\sqrt{2}).}$$

$\frac{1}{n}\ln\left|P_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|$ est la somme de la suite précédente (privée de son premier et de son dernier terme, qui convergent vers 0) et de $w_n' + w_n''$, qui converge vers 0, donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\left|P_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|\right) = \Psi(\sqrt{2}).}$$

9. On peut appliquer l'égalité de **6.2.**. Dans notre cas particulier, S s'appelle P_n et $L(f_\alpha)$ s'appelle $R_n(f_\alpha)$, donc :

$1-(t^2+\alpha^2)R_n(f_\alpha)(t) = \frac{tP_n(t)}{i\alpha P_n(i\alpha)}$, donc : $f_\alpha(t) - R_n(f_\alpha)(t) = \frac{tP_n(t)}{i\alpha P_n(i\alpha)(t^2+\alpha^2)}$. Pour $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$|f_\alpha(t) - R_n(f_\alpha)(t)| = \frac{|P_n(\frac{1}{\sqrt{2}})|}{\sqrt{2}\alpha|P_n(i\alpha)|(\alpha^2+\frac{1}{2})}$. En utilisant les équivalents trouvés précédemment :

$|f_\alpha(t) - R_n(f_\alpha)(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha(\alpha^2+\frac{1}{2})}\exp\left(n(\Psi(\frac{1}{\sqrt{2}}) - \Phi(\alpha) + \varepsilon(n))\right)$, où $\varepsilon(n)$ converge vers 0.

On a vu que $\Psi(\frac{1}{\sqrt{2}}) > -2$ et que $\lim_{\alpha\to0+}\Phi(\alpha) = -2$. Choisissons donc pour α un α_0 suffisamment petit pour que $\Psi(\frac{1}{\sqrt{2}}) - \Phi(\alpha)$ soit strictement positif. La suite de terme général $\exp\left(n(\Psi(\frac{1}{\sqrt{2}}) - \Phi(\alpha) + \varepsilon(n))\right)$ tend donc vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{Avec ce choix de } x \text{ et } \alpha_0, \text{ la suite } |f_{\alpha_0}(x) - R_n(f_{\alpha_0})(x)| \text{ tend vers } +\infty.}$$

Si la fonction f_{α_0} appartenait à E, on aurait toutes les hypothèses de **5**, puisque $h(\sigma_n)$ tend vers 0. On pourrait exhiber une suite u_n de limite nulle, indépendante de x et vérifiant $|f_{\alpha_0}(x) - R_n(f_{\alpha_0})(x)| \leqslant u_n$. Ceci est incompatible avec ce qui précède.

$$\boxed{\text{La fonction } f_{\alpha_0} \text{ n'appartient pas à } E.}$$

10. Le préliminaire **0.4.** montre que $\frac{1}{\sqrt{2}}$ appartient à $\mathcal{A}$ (avec $r = 2$). Il s'agit donc maintenant de généraliser **8.**. On reprend donc les diverses questions de **8.** en remplaçant $\frac{1}{\sqrt{2}}$ par x_0. Tous les raisonnements sont inchangés, sauf au début de **8.3** où il faut, non pas invoquer **0.4**, mais l'appartenance de x_0 à $\mathcal{A}$ (le remplacement de 2 par r ne pose pas problème).

$$\boxed{\text{Pour } x \in \mathcal{A}, \ \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln |P_n(x)| = \Psi(x).}$$

11. On peut donc encore écrire, pour $x \in \mathcal{A}$:

$|f_\alpha(x) - R_n(f_\alpha)(x)| = \dfrac{|x|}{\alpha(\alpha^2 + x^2)} \exp\left(n(\Psi(x) - \Phi(\alpha) + \varepsilon(n))\right)$, où $\varepsilon(n)$ converge vers 0.

L'expression trouvée en **8.2.** montre que Ψ est paire ; $\Psi'(x) = -\ln(1-x) + \ln(1+x)$, est positif sur $[0, 1[$.
Quand x croît de 0 à 1, Ψ croît donc de -2 à $2\ln 2 - 2$.
De son côté, $\Phi(\alpha)$ croît de -2 à $+\infty$ quand α croît de 0 à $+\infty$.
Il existe donc un α_1 tel que $\Phi(\alpha_1) = 2\ln 2 - 2$.

• Si $\alpha < \alpha_1$, on a $-2 < \Phi(\alpha) < 2\ln 2 - 2$. Il existe alors un x_1 tel que pour $x = x_1$ on ait $\Psi(x) = \Phi(\alpha)$. Pour $x \in]-x_1, +x_1[\cap \mathcal{A}$, la suite $\psi(x) - \phi(\alpha) + \varepsilon(n)$ a donc une limite strictement négative ; la suite de terme général $R_n(f_\alpha)(x)$ converge donc vers $f_\alpha(x)$. Ce n'est plus le cas pour $x > x_1$ ni pour $x < -x_1$.

$$\boxed{\text{Dans ce cas, } J_\alpha =]-x_1, x_1[.}$$

• Si $\alpha \geqslant \alpha_1$, $\Phi(\alpha) \geqslant 2\ln 2 - 2$. Pour tout $x \in \mathcal{A} \cap]-1, 1[$, la suite $\psi(x) - \phi(\alpha) + \varepsilon(n)$ a donc une limite strictement négative.

$$\boxed{\text{Dans ce cas, } J_\alpha =]-1, 1[.}$$

$\alpha \in J_\alpha$ nécessite déjà : $\alpha \in]0, 1[$. Supposons donc α ainsi choisi. Si $\alpha \geqslant \alpha_1$, $J_\alpha =]-1, 1[$ donc $\alpha \in J_\alpha$.
Si $\alpha < \alpha_1$, il s'agit de savoir si $\alpha < x_1$, donc si $\Psi(\alpha) < \Psi(x_1)$ donc si $\Psi(\alpha) < \Phi(\alpha)$. Or cela est vrai puisque

$$\Psi(\alpha) = \int_{-1}^{1} \ln|t - \alpha| dt = \int_{-1}^{1} \ln|-t - \alpha| dt = \int_{-1}^{1} \ln|t + \alpha| dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \ln|t^2 - \alpha^2| dt$$
$$< \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \ln|t^2 + \alpha^2| dt = \Phi(\alpha).$$ Finalement

$$\boxed{\text{L'ensemble des } \alpha \text{ tels que } \alpha \in J_\alpha \text{ est l'intervalle }]-1, 1[.}$$

12. Inspirons-nous de **0.4**, où $\frac{1}{\sqrt{2}}$ annule le polynôme $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}$, qui n'est pas annulé par $\frac{k}{n}$ ce qui, en chassant le dénominateur, conduit à un entier naturel non nul, donc plus grand que 1, ce qui fournit l'inégalité précieuse.
Ici, le travail se complique car Q_r peut avoir, outre x_0, des racines de la forme $\frac{k}{n}$. Prenons donc $n > n_0$ suffisamment grand pour que, sur $[x_0 - \frac{1}{n_0}, x_0 + \frac{1}{n_0}]$, Q_r n'ait pas d'autre racine que x_0. Soit $k_1 - 1$ la partie entière de nx_0. On a donc : $x_0 - \frac{1}{n} \leqslant \frac{k_1 - 1}{n} < x_0 < \frac{k_1}{n} \leqslant x_0 + \frac{k_1}{n}$, donc $Q_r(\frac{k_1}{n}) \neq 0$. L'entier $|n^r Q_r(\frac{k_1}{n})|$ est non nul donc plus grand que 1.
Nous voulons passer d'une minoration de $|Q_r(\frac{k_1}{n})| = |Q_r(\frac{k_1}{n}) - Q_r(x_0)|$ à une minoration de $|\frac{k_1}{n} - x_0|$.
Utilisons donc l'égalité des accroissements finis : $|Q_r(\frac{k_1}{n}) - Q_r(x_0)| = |\frac{k_1}{n} - x_0| . |Q_r'(c)|$. Il nous faudrait une minoration de $|Q_r'(c)|$ indépendante de k_1 et n. Convenons donc que notre n_0 est suffisamment grand pour que, sur $[x_0 - \frac{1}{n_0}, x_0 + \frac{1}{n_0}]$, Q_r' ne s'annule pas ; c'est possible car Q_r' est continue non nulle en x_0.
Le minimum μ de $|Q_r'|$ sur $[x_0 - \frac{1}{n_0}, x_0 + \frac{1}{n_0}]$ est strictement positif et $|\frac{k_1}{n} - x_0| \geqslant \dfrac{1}{\mu n^r}$. On obtient la même minoration pour $|\frac{k_1 - 1}{n} - x_0|$.
Cette minoration par un nombre $\dfrac{C}{n^r}$, valable à partir de n_0 est aussi valable pour les premiers rangs (en nombre fini) à condition de prendre C suffisamment petit.
Cette minoration de $|x_0 - \dfrac{k}{n}|$ valable pour les deux fractions $\frac{k}{n}$ les plus proches de x_0 est a fortiori valable pour toute valeur de k quand n est fixé. Finalement

$$\boxed{x_0 \in \mathcal{A}.}$$

***

Semaine 9 : **Espaces préhilbertiens**

Nous revenons, cette semaine, à l'algèbre linéaire proprement dite pour commencer l'étude des espaces préhilbertiens réels ou complexes, essentiellement lorsqu'ils sont de dimension finie. On les appelle alors espaces euclidiens ou espaces hermitiens.

• Sujet 26 : Concours Mines-Ponts 1998 Mathématiques 1 Filière MP

Ce problème vous fera faire une bonne révision des propriétés générales des espaces euclidiens (projection orthogonale sur un sous-espace, procédé de Schmidt...).

Le thème est un peu mince ; il s'agit de la recherche, par la méthode des moindres carrés, d'une droite approchant au plus près un nuage de points. On se ramène à un calcul de distance dans $\mathbb{R}_n[X]$ muni d'un produit scalaire adéquat et d'une base orthogonale pour ce produit scalaire. C'est pratiquement une question de cours sur le procédé de Schmidt, ce qui met un peu dans l'embarras pour rédiger : il ne faut bien sûr pas se contenter de répondre sèchement « C'est du cours », mais donner quelques détails.

On rallonge ensuite quelque peu le problème en faisant établir une formule permettant d'obtenir, de proche en proche, les polynômes de la base orthogonale en question.

Malgré cette rallonge, le problème est assez court et facile.

• Sujet 27 : Concours Mines-Ponts 2000 Mathématiques 1 Filière PC

Ce sujet utilise abondamment les notions d'algèbre linéaire et de topologie vues antérieurement ; il utilise aussi, de façon assez substantielle, la notion, nouvelle cette semaine, de produit scalaire hermitien.

On y étudie la valeur maximale prise, sur la boule unité, par le déterminant de Vandermonde vu comme une fonction des n complexes qu'il fait intervenir. La norme d'où vient cette boule unité n'est pas la norme hermitienne. On manipule ainsi deux normes différentes ; cela requiert un peu d'attention, sans trop compliquer la situation. En dimension 2, par exemple, il faut se méfier du vocabulaire géométrique : la boule unité n'est pas ronde !

Cela donne au bout du compte un problème très cohérent, assez court et pas trop difficile.

• Sujet 28 : Concours Centrale-Supélec 1999 Mathématiques 2 Filière PSI

On utilise dans ce problème la matrice de Gram de n vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ d'un espace euclidien, c'est-à-dire la matrice dont le terme général est le produit scalaire $\vec{u}_i . \vec{u}_j$.

On établit d'abord des propriétés de cette matrice et de son déterminant puis on passe à des applications. Dans la première, on munit l'espace d'un deuxième produit scalaire, situation qui nécessite une gymnastique intellectuelle intense. L'étude, élégante, de l'ellipse qui en résulte récompense un peu des efforts faits.

Dans la deuxième application, on prend un produit scalaire particulier, issu de l'analyse et on fait apparaître tout polynôme comme limite d'une suite remarquable pour la norme de la convergence uniforme.

Ce problème est long et parsemé de quelques difficultés. Des ruses permettent de limiter les calculs.

MINES - PONTS 1998 Filière MP

Mathématiques 1 Durée : 3 heures

Sujet mis à la disposition du concours E.N.T.P.E., suite à l'arrêté du 9 décembre 1997.

L'emploi de la calculette est interdit.

Ajustement polynomial par la méthode des moindres carrés

Dans tout le problème, n est un entier naturel différent de 0, $(y_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une suite finie de $n+1$ nombres réels ; l'objet du problème est de déterminer, pour tout entier naturel k, les polynômes P de degré inférieur ou égal à k, tels que le réel $\Delta_k(P)$ défini par la relation suivante

$$\Delta_k(P)=\sum_{i=0}^{n}(y_i-P(i))^2$$

soit minimum et de préciser la valeur m_k de ce minimum.

1°) *Application φ_k*

Pour tout entier naturel k, soit φ_k l'application de $\mathbb{R}_k[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui, à un polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_k[X]$ fait correspondre le vecteur $(P(0),P(1),\dots,P(n))$ de $\mathbb{R}^{n+1}$: $\varphi_k(P)=(P(0),P(1),\dots,P(n))$. Il est admis que cette application φ_k est linéaire.

a. Déterminer le noyau de l'application φ_k, en discutant suivant les valeurs de l'entier k par rapport à l'entier n ; préciser la dimension du noyau ; établir l'expression des polynômes du noyau lorsque celui-ci n'est pas réduit à $\{0\}$.

b. Étudier, suivant les valeurs de l'entier k, le rang de φ_k. Pour quelles valeurs de l'entier k est-elle surjective ? Pour quelle valeur de l'entier k est-elle un isomorphisme ?

2°) *Étude préliminaire*

L'entier n est toujours donné ; soit $(y_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une suite de $n+1$ réels.

a. Déduire des questions précédentes l'existence et l'unicité d'un polynôme Y appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$, tel que, pour tout i compris entre 0 et n, $0\leqslant i\leqslant n$, la relation $Y(i)=y_i$ ait lieu.
Cette notation du polynôme Y associé à la suite $(y_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est conservée dans la suite.

b. Étant donné un entier p compris entre 0 et n, $0\leqslant p\leqslant n$, soit l_p la suite de $n+1$ réels tous nuls sauf celui de rang $p=1$; il vient :

$$l_0=(1,0,\dots,0);\quad l_p=(0,\dots,1,\dots,0);\quad l_n=(0,0,\dots,1).$$

Démontrer l'existence et l'unicité d'une base $\mathcal{L}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\mathcal{L}=(L_0,L_1,\cdots,L_n)$$

telle que pour tout couple d'indices i et j compris entre 0 et n, $0\leqslant i\leqslant n, 0\leqslant j\leqslant n$, la relation

$$L_i(j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{si } i=j,\\ 0, & \text{si } i\neq j,\end{cases}\quad \text{, ait lieu.}$$

Quelles sont les coordonnées d'un polynôme P quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base $\mathcal{L}$? du polynôme Y dans la base $\mathcal{L}$?

c. Soit k un entier supérieur ou égal à n ; déterminer la valeur du minimum m_k du réel $\Delta_k(P)$ défini par la relation

$$\Delta_k(P)=\sum_{i=0}^{n}(y_i-P(i))^2$$

où P est un polynôme de $\mathbb{R}_k[X]$. Quels sont les polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ pour lesquels l'expression $\Delta_k(P)$ est nulle ?

Dans toute la suite l'entier k est supposé inférieur ou égal à l'entier n ; $k\leqslant n$.

3°) *Interprétation de m_k pour $k\leqslant n$*

a. Structure euclidienne de $\mathbb{R}_n[X]$

Prouver l'existence et l'unicité dans $\mathbb{R}_n[X]$ d'un produit scalaire, noté $<.,.>$ tel que la base $\mathcal{L}$ définie à la question 2°.b soit orthonormale. Préciser pour deux polynômes P et Q quelconques de $\mathbb{R}_n[X]$ la valeur de $<P,Q>$.

Le résultat : $6\sum_{p=1}^{n}p^2=n(n+1)(2n+1)$ étant admis, calculer les produits scalaires

$$<1,1>,\quad <1,X>\text{ et }<1,X^2>.$$

Dans tout ce qui suit, l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est muni de ce produit scalaire ; dans cet espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, $<.,.>$ la norme d'un polynôme P est alors : $\|P\|=\sqrt{<P,P>}$.

b. Étant donnée une suite $(y_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, soit Y le polynôme de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ associé à cette suite (question 2°.a). Déduire des conventions précédentes la relation suivante : $\Delta_k(P)=\|Y-P\|^2$.

Démontrer l'existence et l'unicité d'un polynôme P_k appartenant à $\mathbb{R}_k[X]$ pour lequel le réel $\Delta_k(P)$ est égal à son minimum m_k : $m_k=\|Y-P_k\|^2$.

Définir le polynôme P_k au moyen de Y et de $\mathbb{R}_k[X]$

Que dire du polynôme $Y-P_k$ et du sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_k[X]$? Faire un croquis.

c. Exemples

i/ $k=0$; déterminer, pour un polynôme Y, image d'une suite donnée $(y_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ $(n\geqslant 1)$, les expressions de P_0 et m_0. Comparer $\|Y\|^2-\|P_0\|^2$ et m_0.

ii/ $k=1$; l'entier n est supposé impair : $n=2q-1$; la suite $(y_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ définie par la relation :

$$y_i=\begin{cases}1, & \text{si } 0\leqslant i\leqslant q-1,\\ -1, & \text{si } q\leqslant i\leqslant 2q-1.\end{cases}\qquad \text{Déterminer le polynôme } P_1.$$

4°) *Détermination de m_k à l'aide d'une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$:*

a. Le but de cette question est de construire une suite unique de polynômes $B_0,B_1,\dots,B_n$ tels que :

i/ le polynôme B_0 soit égal à 1 ;

ii/ pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n $(k\leqslant n)$, la suite $(B_0,B_1,\dots,B_k)$ soit une base du sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_k[X]$ telle que les polynômes B_i, $0\leqslant i\leqslant k$, soient deux à deux orthogonaux ;

iii/ pour k supérieur ou égal à 1, le coefficient du terme de plus haut degré du polynôme B_k soit égal au coefficient du binôme C_{2k}^k.

Déterminer les polynômes B_1 et B_2. La relation $<1,X^3>=(<1,X>)^2$ est admise.

Déterminer le polynôme B_k, lorsque l'entier k varie de 1 à n, à l'aide des polynômes X^k et Q_k, projection du monôme X^k sur $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Faire un croquis.

En déduire l'existence et l'unicité d'une base $\mathcal{B}=(B_0,B_1,\dots,B_n)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant les propriétés i, ii et iii.

b. Démontrer, lorsque l'entier k est compris entre 1 et n, $1\leqslant k\leqslant n$, que le polynôme $B_k(n-X)$ (associé à la fonction polynomiale $x\mapsto B_k(n-X)$) est orthogonal au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. En déduire une relation simple entre les polynômes $B_k(n-X)$ et B_k.

c. Déterminer les coordonnées du polynôme P_k, défini à la question 3°.b $(k\leqslant n)$, dans la base $\mathcal{B}$. Que vaut P_n ? En déduire, pour tout entier k compris entre 1 et n $(1\leqslant k\leqslant n)$, les relations :

$$P_k=P_{k-1}+\frac{<B_k,Y>}{\|B_k\|^2}B_k;\qquad m_k=m_{k-1}-\frac{(<B_k,Y>)^2}{\|B_k\|^2}$$

5°) *Étude de la famille des polynômes B_k, $k=0,1,\dots,n$*

a. Soient k un entier compris entre 2 et n, $2\leqslant k\leqslant n$ et j un entier compris entre 0 et $k-2$, $0\leqslant j\leqslant k-2$; démontrer l'orthogonalité des polynômes $X.B_k$ et B_j : $<X.B_k,B_j>=0$.

b. En déduire, pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$, $1\leqslant k\leqslant n-1$, l'existence de réels α_k,β_k et γ_k tels que :

$$X.B_k=\alpha_kB_{k-1}+\beta_kB_k+\gamma_kB_{k+1}.$$

c. Déterminer, à l'aide de la question 4°.b, la valeur du réel β_k.

d. Que vaut γ_k ? En déduire la valeur du produit scalaire $<X.B_k,B_{k+1}>$ en fonction de l'entier k et du réel $\|B_{k+1}\|^2$.

e. Déterminer le réel α_k en fonction de l'entier k et des réels $\|B_{k-1}\|^2$ et $\|B_k\|^2$. Déduire des résultats précédents la relation : $B_{k+1}=\dfrac{2k+1}{k+1}\left\{B_1.B_k-\dfrac{k}{2k-1}\dfrac{\|B_k\|^2}{\|B_{k-1}\|^2}B_{k-1}\right\}$.

***

MINES - PONTS 1998	Filière MP
Mathématiques 1	CORRIGÉ

Ajustement polynomial par la méthode des moindres carrés

À $P \in \mathbb{R}_k[X]$, l'application ϕ_k associe $(P(0), P(1), \dots, P(n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

1°) a. $\mathrm{Ker}(\phi_k)$ est formé des $P \in \mathbb{R}_k[X]$ tels que P s'annule en $0, 1, \dots, n$ donc des $P \in \mathbb{R}_k[X]$ tel qu'on peut, dans P, factoriser $(X-0)(X-1)\dots(X-n)$.

$\mathrm{Ker}(\phi_k)$ est donc égal à l'ensemble des multiples de $(X-0)(X-1)\dots(X-n)$ qui sont de degré $\leqslant k$.

- Si $k \leqslant n$, alors $\mathrm{Ker}(\phi_k) = \{0\}$ car seul le polynôme nul de $\mathbb{R}_k[X]$ est de la forme précédente.
- Si $k > n$, alors $\mathrm{Ker}(\phi_k)$ est formé des $X(X-1)\dots(X-n)Q(X)$, où degré$(Q) \leqslant k-n-1$.

$$\boxed{P \in \mathrm{Ker}(\phi_k) \iff \exists Q \in \mathbb{R}_{k-n-1}[X] \,/\, P = X(X-1)\dots(X-n)Q(X).}$$

Les polynômes Q sont les polynômes de la forme $Q(X) = \sum_{i=0}^{k-n-1} a_i X^i$ Une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(\phi_k)$ est donc : $(X(X-1)\dots(X-n), X^2(X-1)\dots(X-n), \dots, X^{k-n}(X-1)\dots(X-n))$, et elle est libre car il s'agit de polynômes échelonnés en degré.

C'est donc une base de $\mathrm{Ker}(\phi_k)$ et elle comporte $k-n$ éléments. Résumons :

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}\,\phi_k) = 0, \text{ si } k \leqslant n \text{ et } k-n \text{ si } k \geqslant n+1.}$$

b. D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}\,(\phi_k) = (k+1) - \dim(\mathrm{Ker}\ \phi_k)$ donc

$$\boxed{\mathrm{rg}\,(\phi_k) = k+1 \text{ si } k \leqslant n \text{ et } n+1 \text{ si } k \geqslant n+1.}$$

ϕ_k est surjective si et seulement si son rang est égal à la dimension $n+1$ de l'espace d'arrivée. Donc :

$$\boxed{\phi_k \text{ est surjective si et seulement si } k \geqslant n.}$$

ϕ_k est en outre injective si et seulement si son noyau est réduit à 0 donc si $k \leqslant n$. Donc :

$$\boxed{\phi_k \text{ est un isomorphisme si et seulement si } k = n.}$$

2°) *Étude préliminaire*

a. ϕ_n est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}^{n+1}$, donc, pour tout élément $y = (y_0, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, il existe un et un seul polynôme Y de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $y = \phi_n(Y)$, autrement dit :

$$\boxed{\text{Il existe un et un seul polynôme } Y \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que : } \forall i \text{ de } 0 \text{ à } n, \text{ on ait } y_i = Y(i).}$$

b. La famille $(l_0, \dots, l_n)$ est en fait la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. La relation « $\forall j, L_i(j) = \delta_{i,j}$ » peut s'écrire : $\phi_n(L_i) = l_i$. Dire que cela est vrai pour tout i de 0 à n équivaut à dire que $(l_0, \dots, l_n)$ est l'image de $(L_0, \dots, L_n)$ par ϕ_n. D'où, puisque ϕ_n est un isomorphisme,

$$\boxed{\text{l'existence et l'unicité de la base } \mathscr{L} \text{ cherchée.}}$$

ϕ_n étant un isomorphisme, les coordonnées d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base $\mathscr{L}$ sont celles de $\phi_n(P)$ dans $\phi_n(\mathscr{L})$, base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Or $\phi_n(P)$ est l'élément $(P(0), \dots, P(n))$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

$$\boxed{\text{Les coordonnées de } P \text{ dans la base } \mathscr{L} \text{ sont donc } P(0), \dots, P(n). \text{ En particulier : } Y = \sum y_i L_i.}$$

c. On suppose $k \geqslant n$. On sait qu'il existe un polynôme Y dans $\mathbb{R}_n[X]$, donc dans $\mathbb{R}_k[X]$, tel que : $\forall i = 0, 1, \dots, n, Y(i) = y_i$, donc $\Delta_k(Y) = 0$.

$$\boxed{\text{Le minimum sur } \mathbb{R}_k[X] \text{ de la fonction positive } \Delta_k \text{ est donc nul.}}$$

Ensuite : $\Delta_k(P) = 0 \iff \forall i = 0, \dots, n, P(i) = y_i$. On a vu que, si l'on impose à P d'être dans $\mathbb{R}_n[X]$, il n'y a pas d'autre solution que $P = Y$, donc :

$$\boxed{Y \text{ est le seul polynôme de } \mathbb{R}_n[X] \text{ annulant la fonction } \Delta_k.}$$

3°) *Interprétation de m_k pour $k \leqslant n$*

a. D'une façon générale, sur un espace vectoriel réel de dimension finie, il existe un produit scalaire et un seul pour lequel une base imposée à l'avance est orthonormale. Revoyons cela dans notre cas particulier.

Si la base $\mathscr{L}$ est orthonormale pour le produit scalaire $<.,.>$, alors nécessairement, en écrivant $P = \sum_{i=0}^{n} P(i)\,L_i$ et $Q = \sum_{j=0}^{n} Q(j)\,L_j$, on doit avoir, en utilisant la bilinéarité puis $<L_i, L_j> = \delta_{ij}$:

$$<P, Q> = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} (P(i)\,Q(j)\,<L_i, L_j>) = \sum_{i=0}^{n} P(i)\,Q(i).$$

Réciproquement, considérons $<.,.>$ définie par : $<P, Q> = \sum_{i=0}^{n} P(i)\,Q(i)$.

C'est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}_n[X]$. Elle est de plus définie positive car $<P, P> = \sum_{i=0}^{n} (P(i))^2$ est positif, et n'est nul que si $\forall i = 0, \dots, n, P(i) = 0$, donc si P est nul, car il est de degré $\leqslant n$ et s'annule $n+1$ fois. Enfin $\mathscr{L}$ est bien orthonormale pour ce produit scalaire puisque

$<L_p, L_j> = \sum_{i=0}^{n} L_p(i)\,L_j(i) = \sum_{i=0}^{n} \delta_{ip}\delta_{ij} = \delta_{pj}$. En résumé,

$$\boxed{<.,.> \text{ défini par } <P, Q> = \sum_{i=0}^{n} P(i)\,Q(i) \text{ est le seul produit scalaire sur } \mathbb{R}_n[X] \text{ pour lequel la base } \mathscr{L} \text{ soit orthonormale.}}$$

La formule $<P, Q> = \sum_{i=0}^{n} P(i)\,Q(i)$ donne immédiatement

$$\boxed{<1,1> = n+1; \quad <1, X> = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}; \quad <1, X^2> = \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

b. En revenant à la définition de $\Delta_k(P)$, $\Delta_k(P) = \sum_{i=0}^{n} (Y(i) - P(i))^2 = \sum_{i=0}^{n} ((Y-P)(i))^2$, donc :

$$\boxed{\Delta_k(P) = \|Y - P\|^2.}$$

$\sqrt{\Delta_k(P)}$ est donc la distance euclidienne de Y à P. On sait (cours) que, quand P décrit $\mathbb{R}_k[X]$, sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$\boxed{\text{cette distance admet un minimum, atteint une fois et une seule en un point } P_k \text{ de } \mathbb{R}_k[X] \text{ qui est la projection orthogonale de } Y \text{ sur } \mathbb{R}_k[X].}$$

Autrement dit $m_k = \|Y - P\|^2$ et $Y - P_k$ est orthogonal à $\mathbb{R}_k[X]$.

c. Exemples

i/ $k = 0$. P_0 est la projection orthogonale de Y sur $\mathbb{R}_0[X]$, donc P_0 est une constante a.

On détermine a en écrivant que $Y - P_0$ est orthogonal au vecteur 1, base de $\mathbb{R}_0[X]$:

$0 = <Y - P_0, 1> = \sum_{i=0}^{n} (Y(i) - a).1 = \left(\sum_{i=0}^{n} y_i\right) - (n+1)a$. On a donc

$$\boxed{P_0 \text{ est la constante } m = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} y_i \text{ (moyenne arithmétique des } y_i \text{).}}$$

et en utilisant b. on a :

$$\boxed{m_0 = \|Y - P_0\|^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i - m)^2.}$$

Y est la somme des deux polynômes orthogonaux $(Y - P_0)$ et P_0, donc, en utilisant le théorème de Pythagore : $\|Y\|^2 = \|Y - P_0\|^2 + \|P_0\|^2 = m_0 + \|P_0\|^2$:

$$\boxed{\|Y\|^2 - \|P_0\|^2 = m_0 .}$$

ii/ $k = 1$ et les $y_i = Y(i)$ sont donnés dans l'énoncé. Nous aurons besoin de $\sum_i^n Y(i)$, qui est nul, et de $\sum_{i=0}^n iY(i) = \sum_{i=0}^{q-1} i - \sum_{i=q}^{2q-1} i = \sum_{i=0}^{q-1} i - \sum_{i=0}^{q-1}(i+q) = -\sum_{i=0}^{q-1} q = -q^2$.

Nous obtenons P_1 en écrivant que $Y - P_1$ est orthogonal aux deux vecteurs de base 1 et X de $\mathbb{R}_1[X]$:

- $0 = < Y - P_1, 1 > = \sum_{i=0}^n Y(i) - \sum_{i=0}^n P_1(i)$ qui donne $\sum_{i=0}^n P_1(i) = 0$;
- $0 = < Y - P_1, X > = \sum_{i=0}^n iY(i) - \sum_{i=0}^n iP_1(i)$ qui donne $\sum_{i=0}^n iP_1(i) = -q^2$.

Cherchons P_1 sous la forme $aX + b$.

Alors $\sum_{i=0}^n P_1(i) = \frac{n(n+1)a}{2} + b(n+1)$ et $\sum_{i=0}^n iP_1(i) = \frac{n(n+1)(2n+1)a}{6} + \frac{n(n+1)b}{2}$.

Les conditions précédentes donnent $b = -\frac{na}{2}$ et

$$-\frac{(n+1)^2}{4} = -q^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)a}{6} - \frac{n^2(n+1)a}{4} = \frac{n(n+1)a}{24}(8n+4-6n) = \frac{n(n+1)(n+2)a}{12}$$

d'où $a = -\frac{3(n+1)}{n(n+2)}$ et $b = \frac{3(n+1)}{2(n+2)}$. Finalement

$$\boxed{P_1 = -\frac{3(n+1)}{2n\,(n+2)}\,(2X - n) .}$$

Autre solution : en posant $x_i = i$, il s'agit de trouver a et b qui minimisent la quantité

$\Delta = \sum_{i=0}^n (y_i - ax_i - b)^2$. C'est le problème bien connu de la droite qui approche au mieux le nuage de points (x_i, y_i). Pour le résoudre, on introduit d'abord les moyennes arithmétiques $\overline{x}$ et $\overline{y}$ des x_i et des y_i. On pose ensuite $X_i = x_i - \overline{x}$ et $Y_i = y_i - \overline{y}$, si bien que Δ s'écrit

$$\Delta = \sum_{i=0}^n (Y_i - aX_i + \overline{y} - a\overline{x} - b)^2 = \sum_{i=0}^n (\overline{y} - a\overline{x} - b)^2 + \sum_{i=0}^n (Y_i - aX_i)^2.$$

La somme des doubles produits, non écrite, est nulle car la somme des Y_i est nulle, ainsi que celle des X_i.

$\sum_{i=0}^n (Y_i - aX_i)^2$ est un trinôme en a qu'on peut mettre sous la forme réduite $(\alpha a + \beta)^2 + \gamma$.

α, β et γ sont indépendants de a et b, et γ est positif.

$\Delta = (n+1)(\overline{y} - a\overline{x} - b)^2 + (\alpha a + \beta)^2 + \gamma$. Pour rendre Δ minimum il est clair qu'il faut choisir $a = -\frac{\beta}{\alpha}$ puis $b = \overline{y} - a\overline{x}$. Dans notre problème, les calculs se simplifieraient vu le choix des x_i et y_i.

4°) *Détermination de m_k à l'aide d'une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$*

a. Nous sommes très près du cours sur le procédé de Schmidt, mais pas exactement. Ne pouvant invoquer directement le programme, faisons une démonstration (inspirée du cours).

On cherche B_1 sous la forme $B_1 = C_2^1 X + a = 2X + a$.

L'orthogonalité de B_0 et B_1 donne $2 < 1, X > + a < 1, 1 > = 0$, d'où $a = -n$ et

$$\boxed{B_1 = 2X - n .}$$

Ensuite, on cherche B_2 sous la forme $C_4^2 X^2 + aB_1 + cB_0 = 6X^2 + aB_1 + cB_0$.

Pour que B_2 et B_1 soient orthogonaux, il faut et il suffit que :

$0 = < 6X^2, B_1 > + a < B_1, B_1 > + c < B_0, B_1 > = < 6X^2, B_1 > + a < B_1, B_1 >$
$= < 6X^2, 2X - n.1 > + a < 2X - n.1, 2X - n.1 >$.

Développons par bilinéarité en remarquant que $< X^p, X^q > = < 1, X^{p+q} >$:

$0 = 12 < 1, X^3 > - 6n < 1, X^2 > + a(4 < 1, X^2 > - 4n < 1, X > + n^2 < 1, 1 >)$.

En admettant $< 1, X^3 > = (< 1, X >)^2$ puis utilisant les expressions trouvées pour $< 1, 1 >$, $< 1, X >$ et $< 1, X^2 >$ et enfin en simplifiant par $n(n+1)$, il reste $0 = 3n + a$ donc $a = -3n$.

L'orthogonalité de B_2 et B_0 donne, plus facilement, $c = -n(2n+1)$. Donc

$$\boxed{B_2 = 6X^2 - 6nX + n(n-1) .}$$

On n'a donc qu'une possibilité pour les polynômes B_0, B_1, B_2. Réciproquement, on a fait en sorte –c'est clair– que ces polynômes vérifient les conditions i/ ii/ et iii/ imposées par l'énoncé.

Supposons par récurrence l'existence d'une unique suite de polynômes $B_0, B_1, \dots, B_{k-1}$ deux à deux orthogonaux de degrés respectifs $0, 1, \dots, k-1$ et de coefficients dominants $1, 2, \dots, C_{2k-2}^{k-1}$.

Ces polynômes étant échelonnés en degrés, ils forment une base de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

On cherche alors B_k sous la forme $C_{2k}^k X^k - S_k$, avec $S_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, et on veut B_k orthogonal à $B_0, \dots, B_{k-1}$, autrement dit orthogonal à tout élément de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$, c'est à dire $< B_k, T > = 0$ pour tout T dans $\mathbb{R}_{k-1}[X]$, ou encore $< C_{2k}^k X^k - S_k, T > = 0$.

On sait qu'il existe un polynôme unique S_k vérifiant ces conditions et c'est la projection orthogonale de $C_{2k}^k X^k$ sur $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Si Q_k est la projection de X^k, on a donc $S_k = C_{2k}^k Q_k$ et

$$\boxed{B_k = C_{2k}^k (X^k - Q_k) .}$$

Il n'y a donc qu'un choix possible pour B_k. Réciproquement, l'unique suite $(B_0, B_1, \dots, B_k)$ trouvée est bien formée de polynômes deux à deux orthogonaux de degrés respectifs $0, 1, \dots, k$ et de coefficients dominants $1, 2, \dots, C_{2k}^k$. En poursuivant jusqu'au rang n, on prouve donc l'existence et l'unicité d'une suite $(B_0, B_1, \dots, B_n)$ de polynômes deux à deux orthogonaux de degrés respectifs $0, 1, \dots, k$ et de coefficients dominants $1, 2, \dots, C_{2k}^k$.

Ce qui manque de la condition ii/ : «Pour k de 0 à n, $(B_0, \dots, B_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$» est automatiquement vérifié car les polynômes sont échelonnés en degrés. On en déduit

$$\boxed{\text{l'existence et l'unicité d'une base } \mathscr{B} = (B_0, \dots, B_n) \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ vérifiant i/, ii/ et iii/.}}$$

b. Pour k entre 1 et n et pour $S \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ on a

$$< B_k(n-X), S > = \sum_{i=0}^n B_k(n-i)S(i) = \sum_{j=0}^n B_k(j)S(n-j) = < B_k, S(n-X) > = 0$$

car $S(n-X) \in \mathbb{R}_{k-1}[X] = \mathrm{Vect}(B_0, \dots, B_{k-1})$, donc B_k lui est orthogonal.

$$\boxed{B_k(n-X) \text{ est orthogonal au sous espace } \mathbb{R}_{k-1}[X] .}$$

$B_k(n-X)$, vu comme vecteur de l'espace euclidien $\mathbb{R}_k[X]$ de dimension $k+1$, est donc dans l'orthogonal de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$, sous-espace de dimension k de $\mathbb{R}_k[X]$. Cet orthogonal est une droite qui contient déjà le vecteur non nul $B_k(X)$. $B_k(n-X)$ est donc colinéaire à $B_k(X)$. Le rapport des termes de plus haut degré donne le coefficient de colinéarité :

$$\boxed{\text{Pour } k \text{ de } 0 \text{ à } n \text{, on a } B_k(n-X) = (-1)^k B_k .}$$

c. On a vu que P_k est la projection orthogonale de Y sur $\mathbb{R}_k[X]$. Puisque $Y \in \mathbb{R}_n[X]$, Y est sa propre projection sur $\mathbb{R}_n[X]$ donc :

$$\boxed{P_n = Y.}$$

Plus généralement, pour k fixé $\leqslant n$, P_k est de la forme $P_k = \sum_{i=0}^k a_i B_i$. $Y - P_k$ est orthogonal aux B_j, pour $0 \leqslant j \leqslant k$, si et seulement si $< B_j, Y > - a_j < B_j, B_j > = 0$. Donc $a_j = \frac{< B_j, Y >}{\|B_j\|^2}$ et :

$$\boxed{P_k = \sum_{i=0}^k \frac{< B_i, Y >}{\|B_i\|^2} B_i . \quad \text{D'où, pour } k \text{ entre 1 et } n : \; P_k = P_{k-1} + \frac{< B_k, Y >}{\|B_k\|^2} B_k .}$$

Posons $C_k = \frac{< B_k, Y >}{\|B_k\|^2} B_k$. On a : $m_{k-1} = \|Y - P_{k-1}\|^2 = \|(Y - P_k) + C_k\|^2 = \|Y - P_k\|^2 + \|C_k\|^2$

car B_k et $Y - P_k$ sont orthogonaux. Donc : $\boxed{m_k = m_{k-1} - \frac{(< B_k, Y >)^2}{\|B_k\|^2} .}$

5°) *Étude de la famille des polynômes* $(B_0, B_1, \ldots, B_n)$

a. Si $0 \leqslant j \leqslant k-2$ et $2 \leqslant k \leqslant n-1$ (pour assurer $X.B_k \in \mathbb{R}_n[X]$) alors

$< X.B_k, B_j >= \sum_{i=0}^{n} i\, B_k(i)\, B_j(i) =< B_k, X.B_j >= 0$ car $X.B_j \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ et B_k est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

$$\boxed{< X.B_k, B_j >= 0.}$$

b. Pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$, $X.B_k \in \mathbb{R}_{k+1}[X]$. Son écriture sur la base $(B_0, \ldots, B_k, B_{k+1})$ de $\mathbb{R}_{k+1}[X]$ est de la forme : $\quad X.B_k = \alpha_k\, B_{k-1} + \beta_k\, B_k + \gamma_k\, B_{k+1} + \sum_{i=0}^{k-2} \gamma_i\, B_i$.

Pour $0 \leqslant j \leqslant k-2$, le produit scalaire de $\alpha_k\, B_{k-1} + \beta_k\, B_k + \gamma_k\, B_{k+1} + \sum_{i=0}^{k-2} \gamma_i\, B_i$ par B_j se réduit à $\gamma_j < B_j, B_j >$, qui est donc nul d'après a., donc : $\forall j = 0, 1, \ldots, k-2, \quad \gamma_j = 0$ et il reste :

$$\boxed{X.B_k = \alpha_k\, B_{k-1} + \beta_k\, B_k + \gamma_k\, B_{k+1}.}$$

Une telle écriture existe aussi quand $k = 1$ (en décomposant $X.B_1$ sur la base B_0, B_1, B_2 de $\mathbb{R}_2[X]$).

c. En composant par $n - X$, cela donne l'égalité entre polynômes :

$$(n-X).B_k(n-X) = \alpha_k\, B_{k-1}(n-X) + \beta_k\, B_k(n-X) + \gamma_k\, B_{k+1}(n-X),$$

et en utilisant 4°)b. :

$$(-1)^k(n-X).B_k = (-1)^{k-1}\alpha_k\, B_{k-1} + (-1)^k \beta_k\, B_k + (-1)^{k+1}\gamma_k\, B_{k+1}.$$

ou : $\quad X.B_k = \alpha_k\, B_{k-1} + (n - \beta_k)\, B_k + \gamma_k\, B_{k+1}$.

La décomposition $X.B_k = \alpha_k\, B_{k-1} + \beta_k\, B_k + \gamma_k\, B_{k+1}$ est unique car la famille B_{k-1}, B_k, B_{k+1} est libre, donc : $\beta_k = n - \beta_k$, donc :

$$\boxed{\beta_k = \frac{n}{2}.}$$

d. Le monôme dominant de $X.B_k$ est $C_{2k}^{k} X^{k+1}$; il est égal à celui de $\gamma_k\, B_{k+1}$, qui est $\gamma_k C_{2k+2}^{k+1} X^{k+1}$ donc :

$$\boxed{\gamma_k = \frac{k+1}{2\,(2k+1)}.}$$

Puisque B_{k+1} est orthogonal à B_k et B_{k-1}, l'égalité du b. donne $< X.B_k, B_{k+1} >= \gamma_k \|B_{k+1}\|^2$:

$$\boxed{< X.B_k, B_{k+1} >= \frac{k+1}{2\,(2k+1)} \|B_{k+1}\|^2.}$$

e. Puisque B_{k-1} est orthogonal à B_k et B_{k+1}, l'égalité du b. donne $< X.B_k, B_{k-1} >= \alpha_k \|B_{k-1}\|^2$.

On a vu aussi que $< X.B_k, B_{k-1} >=< B_k, X.B_{k-1} >$

D'après d. pris au rang $k-1$, on a $< X.B_{k-1}, B_k >= \dfrac{k}{2\,(2k-1)} \|B_k\|^2$ pour $k \geqslant 2$. On vérifie directement que c'est vrai aussi pour $k = 1$. On déduit de tout cela :

$$\boxed{\alpha_k = \frac{k}{2\,(2k-1)} \frac{\|B_k\|^2}{\|B_{k-1}\|^2}.}$$

Or $\dfrac{n + B_1}{2}.B_k = X.B_k = \alpha_k\, B_{k-1} + \beta_k\, B_k + \gamma_k\, B_{k+1}$, donc

$\gamma_k\, B_{k+1} = \dfrac{B_1 B_k}{2} + \left(\dfrac{n}{2} - \beta_k\right) B_k - \alpha_k B_{k-1} = \dfrac{B_1 B_k}{2} - \alpha_k B_{k-1}$ puisque $\beta_k = \dfrac{n}{2}$. Finalement :

$$\boxed{B_{k+1} = \frac{2k+1}{k+1}\left(B_1.B_k - \frac{k}{2k-1} \frac{\|B_k\|^2}{\|B_{k-1}\|^2} B_{k-1}\right).}$$

•••

MINES - PONTS 2000	Filière PC
Mathématiques 1	Durée : 3 heures

L'emploi de la calculette est interdit.

Dans tout le problème n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 ($n \geqslant 2$). Soit $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^n$. A un vecteur X de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$, est associée la matrice $V(X)$ dont les éléments $V(X)_{p,q}$, $1 \leqslant p \leqslant n, 1 \leqslant q \leqslant n$, sont définis par la relation :

$$V(X)_{p,q} = (x_p)^{q-1}.$$

Le déterminant $\nu(X)$ de la matrice $V(X)$ est un déterminant de Vandermonde ; il est admis que sa valeur est donnée par la relation suivante :

$$\nu(X) = \det\, V(X) = \prod_{1 \leqslant p < q \leqslant n} (x_q - x_p).$$

Il est admis que l'application $\|.\|$ de l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R}^+$:

$$X \mapsto \|X\| = \sup_{1 \leqslant p \leqslant n} |x_p|,$$

est une norme. Soit E_n l'espace vectoriel normé $(\mathbb{C}^n, \|.\|)$.

Le but du problème est de montrer qu'à cette application ν de E_n dans $\mathbb{C}$ peut être associé un réel ρ tel que, pour tout vecteur X de E_n la relation suivante a lieu :

$$|\nu(X)| \leqslant \rho \|X\|^{n(n-1)/2},$$

où le réel ρ est une valeur prise pour un vecteur unitaire particulier W :

$$\rho = |\nu(W)|, \text{ avec : } \|W\| = 1.$$

I. Définition du réel ρ

L'entier n est fixé ($n \geqslant 2$).

a. Comparer pour tout vecteur X de l'espace vectoriel normé E_n et tout nombre complexe λ les deux expressions $\nu(\lambda.X)$ et $\nu(X)$.

En particulier, étant donné un vecteur X de E_n, soit Y un vecteur de E_n de norme unité vérifiant la relation : $X = \|X\|.Y$; exprimer le nombre complexe $\nu(X)$ en fonction de $\nu(Y)$ et de $\|X\|$.

b. Démontrer que l'application ν de l'espace vectoriel normé E_n dans $\mathbb{C}$ est continue. En déduire que l'application continue $X \mapsto |\nu(X)|$ admet un maximum sur la sphère unité S,

$$S = \{X \in E_n \mid \|X\| = 1\},$$

atteint pour au moins un vecteur W. Soit ρ le maximum de cette fonction sur la sphère unité :

$$\rho = \max_{\|X\|=1} |\nu(X)|.$$

c. Démontrer les deux relations :

i. pour tout vecteur X de E_n, $|\nu(X)| \leqslant \rho \|X\|^{\frac{n(n-1)}{2}}$;

ii. il existe au moins un vecteur unitaire W de E_n tel que $|\nu(W)| = \rho$.

2. Cas $n = 2$

Caractériser les vecteurs qui appartiennent à la sphère unité S :

$$S = \{X \in E_2 \mid \|X\| = 1\}.$$

Déterminer le maximum ρ de la fonction $X \mapsto |\nu(X)|$ sur la sphère unité. Démontrer que les vecteurs unitaires qui rendent maximum $|\nu(X)|$ sont proportionnels à un même vecteur X_1 dont la première coordonnée est égale à 1. Les déterminer.

3. Cas $n = 3$

a. Etant donnés trois réels positifs ou nuls t_1, t_2 et t_3, ($t_i \geqslant 0, 1 \leqslant i \leqslant 3$) démontrer l'inégalité suivante :

$$t_1.t_2.t_3 \leqslant \frac{1}{27}(t_1 + t_2 + t_3)^3.$$

Démontrer que l'égalité a lieu si et seulement si les trois réels t_1, t_2 et t_3 sont égaux.

b. Etant donnés trois nombres complexes x_1, x_2 et x_3, soient A, B et C les trois fonctions des variables x_1, x_2 et x_3 définies par les relations suivantes :

$$A = |x_1 - x_2|^2 + |x_2 - x_3|^2 + |x_3 - x_1|^2$$

$$B = \sum_{k=1}^{3} |x_k|^2 \; ; \quad C = |\sum_{k=1}^{3} x_k|^2.$$

Démontrer que A est une combinaison linéaire de B et de C.

c. Caractériser les vecteurs qui appartiennent à la sphère unité S :

$$S = \{X \in E_3 \mid \|X\| = 1\}.$$

d. Calculer pour un vecteur X quelconque de l'espace E_3, l'expression $|\nu(X)|^2$. En déduire une valeur possible pour le réel ρ. Déterminer les équations que vérifient les coordonnées x_1, x_2 et x_3 d'un vecteur W unitaire rendant $|\nu(W)|$ maximum. Exhiber une solution à l'aide des racines cubiques de l'unité. En déduire le réel ρ.

4. Une minoration du réel ρ

Soit Ω le vecteur unitaire dont les coordonnées ω_p, $1 \leqslant p \leqslant n$, sont définies par la relation :

$$\omega_p = e^{2i(p-1)\pi/n} = \exp\left(\frac{2i(p-1)\pi}{n}\right).$$

a. $V(\Omega)$ est la matrice définie à partir du vecteur Ω ; $\overline{V(\Omega)}$ est la matrice complexe conjuguée. Démontrer que la matrice produit $\overline{V(\Omega)}.V(\Omega)$ est une matrice proportionnelle à la matrice identité.

b. En déduire la valeur du module $|\nu(\Omega)|$ du déterminant de la matrice $V(\Omega)$ et une minoration du réel ρ.

5. Une inégalité de Hadamard

Dans cette question il est admis que l'application de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$ qui, à deux vecteurs $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $Y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, fait correspondre le nombre complexe $(X \mid Y)$, défini par la relation suivante

$$(X \mid Y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}.y_i,$$

est un produit scalaire hermitien. Soit F_n l'espace préhilbertien $(\mathbb{C}^n, (.\mid.))$. La norme déduite de ce produit scalaire est notée $\|.\|_2$; elle est définie par la relation :

$$\|X\|_2 = \sqrt{(X \mid X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

Etant donnée une suite de n vecteurs indépendants V_1, V_2, ..., V_n de l'espace préhilbertien F_n, soit $M(V_1, V_2, ..., V_n)$ la matrice carrée d'ordre n dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs V_1, V_2, ..., V_n.

a. Déterminer, lorsque les vecteurs V_1, V_2, ..., V_n sont deux à deux orthogonaux, le produit B de la matrice transposée de la matrice complexe conjuguée de la matrice $M(V_1, V_2, ..., V_n)$ avec la matrice $M(V_1, V_2, ..., V_n)$:

$$B = {}^t\overline{M(V_1, V_2, ..., V_n)}.M(V_1, V_2, ..., V_n).$$

Que vaut le module du déterminant de la matrice $M(V_1, V_2, ..., V_n)$?

b. Soit U_1, U_2, ..., U_n les vecteurs de l'espace F_n définis de la manière suivante :

- $U_1 = V_1$,
- $U_2 = V_2 - proj_1(V_2)$; $proj_1(V_2)$ est le vecteur projection du vecteur V_2 sur la droite vectorielle engendrée par V_1,
- pour tout entier i compris entre 3 et $n (3 \leqslant i \leqslant n)$: $U_i = V_i - proj_{i-1}(V_i)$; $proj_{i-1}(V_i)$ est le vecteur projection du vecteur V_i sur l'espace vectoriel engendré par les vecteurs V_1, V_2, ..., V_{i-1}.

Démontrer l'égalité entre les déterminants des deux matrices $M(V_1, V_2, ..., V_n)$ et $M(U_1, U_2, ..., U_n)$:

$$\det M(U_1, U_2, ..., U_n) = \det M(V_1, V_2, ..., V_n).$$

c. Déduire des résultats précédents l'inégalité :

$$|\det M(V_1, V_2, ..., V_n)| \leqslant \|V_1\|_2.\|V_2\|_2...\|V_n\|_2.$$

Démontrer, lorsque les vecteurs V_1, V_2, ..., V_n sont tous différents de 0, qu'il y a égalité entre les deux membres de cette relation si et seulement si les vecteurs V_1, V_2, ..., V_n sont deux à deux orthogonaux.

6. Une majoration du réel ρ

Démontrer que pour tout vecteur X de l'espace vectoriel E_n, de coordonnées x_1, x_2, ..., x_n l'inégalité suivante :

$$|\nu(X)|^2 \leqslant \prod_{q=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} |x_q|^{2(p-1)}.$$

Déterminer pour un vecteur X unitaire ($\|X\| = 1$) de l'espace vectoriel E_n une majoration du module $|\nu(X)|$. En déduire la valeur du réel ρ.

7. Recherche des vecteurs W

Soit W un vecteur unitaire de l'espace E_n, de coordonnées x_p, $1 \leqslant p \leqslant n$, pour lequel le déterminant $\nu(W)$ de la matrice $V(W)$ a un module égal au réel $\rho = n^{n/2}$:

$$|\nu(W)| = n^{n/2}.$$

a. Démontrer que les coordonnées x_p, $1 \leqslant p \leqslant n$ de ce vecteur W sont deux à deux différentes l'une de l'autre :

pour tout couple d'entiers p et q, $p \neq q$, $x_p \neq x_q$.

b. Démontrer, en utilisant par exemple l'inégalité de Hadamard, que les coordonnées x_1, x_2, ..., x_n, de ce vecteur ont toutes un module égal à 1 et vérifient les $n-1$ relations suivantes :

$$\sum_{p=1}^{n} x_p = 0, \quad \sum_{p=1}^{n} (x_p)^2 = 0, \ldots, \sum_{p=1}^{n} (x_p)^{n-1} = 0.$$

A ce vecteur W est associé le polynôme P_W défini par la relation suivante : pour tout réel t,

$$P_W(t) = \prod_{p=1}^{n} (t - x_p).$$

Ce polynôme P_W peut aussi être écrit sous la forme :

$$P_W(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k t^k.$$

c. Que vaut le coefficient α_n ? Démontrer qu'il est possible de poser $\alpha_0 = -e^{i\theta_0}$ où θ_0 est un réel.

Soit F_W la fraction rationnelle définie par la relation :

$$F_W(t) = \frac{P'_W(t)}{P_W(t)}.$$

$P'_W(t)$ est le polynôme dérivée du polynôme P_W.

d. Démontrer que, sur l'ensemble de définition de la fraction rationnelle F_W, la relation ci-dessous a lieu :

$$F_W(t) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{t - x_p}.$$

En déduire qu'il existe un réel R ($R > 0$) tel que sur l'intervalle ouvert $]-R, R[$ la fonction F_W est développable en série entière,

c'est-à-dire trouver un intervalle $]-R, R[$ tel que, pour tout $t \in]-R, R[$, on puisse mettre $F_W(t)$ sous la forme $\sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k$, la suite complexe de terme général f_k ne dépendant pas de t. On utilisera : $\dfrac{1}{t - x_p} = -\dfrac{1}{x_p}.\dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{t}{x_p}\right)}$.

Déterminer un minorant du réel R.

La fonction F_W est donc dans l'intervalle $]-R, R[$ la somme d'une série entière qui s'écrit :

$$F_W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k.$$

e. Déterminer les coefficients f_k, $k = 0, 1, .., $ à l'aide des coordonnées du vecteur W. Quelle conclusion en tirer sur les $n-1$ premiers coefficients $f_0, f_1, ..., f_{n-2}$?

f. Déduire des résultats précédents l'expression du polynôme P'_W, polynôme dérivée du polynôme P_W. Déterminer le polynôme P_W, puis les coordonnées x_p, $1 \leqslant p \leqslant n$ du vecteur W. Calculer, à titre de vérification, les normes de ce vecteur dans E_n et dans F_n c'est-à-dire $\|W\|$ et $\|W\|_2$.

Les 3/2 admettront que $P'_W(t) = nt^{n-1}$.

g. Combien y-a-t-il de vecteurs W dont une moins des coordonnées est égal à 1 ?

***

MINES - PONTS 2000	Filière PC
Mathématiques 1	**CORRIGÉ**

1. Définition du réel ρ $\quad V(X) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{bmatrix}$

a.
Quand on remplace X par λX, la deuxième colonne est multipliée par λ, la troisième par λ^2 etc. Donc :

$$\boxed{\nu(\lambda X) = \lambda.\lambda^2.\ldots.\lambda^{n-1}\nu(X) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}\nu(X).}$$

En particulier si $X = ||X||.Y$:

$$\boxed{\nu(X) = ||X||^{\frac{n(n-1)}{2}}\nu(Y).}$$

b. $\nu(X)$ est une fonction polynomiale des coordonnées de X sur la base canonique de $\mathbb{C}^n$ donc

$$\boxed{\nu \text{ est continue de } E_n \text{ dans } \mathbb{C}.}$$

Par composition par la fonction module, qui est continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$, l'application $|\nu|$ est continue de E_n dans $\mathbb{R}$. La sphère unité S est bornée et fermée (c'est l'image réciproque du singleton $\{0\}$, qui est un fermé de $\mathbb{R}$, par la fonction norme, qui est continue sur E_n) ; c'est donc un compact de E_n.

$$\boxed{\text{L'application continue } X \mapsto |\nu(X)| \text{ admet un maximum } \rho \text{ sur } S, \text{ atteint pour au moins un vecteur } W.}$$

c. Soit $X \in E_n$.

i. On peut toujours trouver Y tel que $||Y|| = 1$ et $X = ||X||.Y$: si $X = 0$ on prend Y quelconque de norme 1 ; sinon on prend $Y = \dfrac{X}{||X||}$.
On a donc $|\nu(X)| = ||X||^{\frac{n(n-1)}{2}}|\nu(Y)|$ et $|\nu(Y)| \leqslant \rho$ puisque $Y \in S$. Donc

$$\boxed{\forall X \in E_n, |\nu(X)| \leqslant \rho ||X||^{\frac{n(n-1)}{2}}.}$$

ii. On a déjà dit que ρ est atteint sur la sphère unité :

$$\boxed{\text{Il existe au moins un vecteur unitaire } W \text{ de } E_n \text{ tel que } |\nu(W)| = \rho.}$$

2. Cas $n = 2$ $\quad$ Si $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ est un vecteur de E_2, X est sur la sphère unité S si et seulement si l'une de ses composantes a un module égal à 1 et l'autre a un module inférieur ou égal à 1.
On a alors $\nu(X) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$ et $|\nu(X)| = |x_2 - x_1| \leqslant |x_2| + |x_1| \leqslant 2$.
La valeur 2 est atteinte, par exemple pour $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ donc :

$$\boxed{\rho = 2.}$$

Si, pour $X \in S$, on a $2 = |\nu(X)| = |x_2 - x_1| \leqslant |x_2| + |x_1| \leqslant 2$, on doit avoir $|x_1| + |x_2| = 2$.
Compte tenu de $|x_1| \leqslant 1$ et $|x_2| \leqslant 2$, cela nécessite $|x_1| = |x_2| = 1$.
On doit avoir aussi $|x_2 - x_1| = |x_2| + |-x_1|$ et on sait que le module d'une somme de complexes non nuls n'est égal à la somme des modules que si le quotient de ces complexes est un réel positif. Ici on doit donc avoir $x_2 = k.(-x_1)$ avec k réel positif. Comme $|x_1| = |x_2| = 1$, on a nécessairement $k = 1$ donc $x_2 = -x_1$. X doit donc être de la forme $\begin{bmatrix} \mu \\ -\mu \end{bmatrix}$, avec $|\mu| = 1$.

Réciproquement, un tel vecteur X est dans S et $|\nu(X)| = |-\mu - \mu| = |2\mu| = 2|\mu| = 2 = \rho$.
Résumons :

$$\boxed{\text{Les } X \text{ tels que } |\nu(X)| = \rho \text{ sont les vecteurs } \begin{bmatrix} \mu \\ -\mu \end{bmatrix}, \text{ avec } |\mu| = 1, \text{ tous colinéaires à } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.}$$

3. Cas $n = 3$

a. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$; l'inégalité de convexité donne, pour tous réels u_1, u_2, u_3 : $e^{\frac{u_1+u_2+u_3}{3}} \leqslant \dfrac{1}{3}(e^{u_1} + e^{u_2} + e^{u_3})$ ou : $e^{u_1}.e^{u_2}.e^{u_3} \leqslant \dfrac{1}{27}(e^{u_1} + e^{u_2} + e^{u_3})^3$. En appliquant cela aux trois réels $u_i = \ln(t_i)$ si t_1, t_2, t_3 sont strictement positifs, cela donne, (et le résultat est évidemment vrai aussi si l'un des réels est nul, les autres étant positifs ou nuls) :

$$\boxed{t_1.t_2.t_3 \leqslant \frac{1}{27}(t_1 + t_2 + t_3)^3}$$

Pour fixer les idées, supposons que $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3$.
Si $t_1 = t_2 = t_3$, l'inégalité devient égalité.
Réciproquement, supposons que t_1, t_2 et t_3 ne soient pas tous égaux. Si t_1 est nul, on ne peut avoir l'égalité.
Sinon on a $0 < t_1 < t_3$, donc $u_1 < u_3$ puisque la fonction ln est strictement croissante.
Sur $[u_1, u_3]$, Le graphe de l'exponentielle est strictement « sous la corde » donc $e^{\frac{u_1+u_3}{2}} < \dfrac{1}{2}(e^{u_1} + e^{u_3})$.
L'inégalité de convexité donne ensuite :

$$e^{\frac{u_1+u_2+u_3}{3}} = e^{\frac{u_2}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{u_1+u_3}{2}\right)} \leqslant \tfrac{1}{3}e^{u_2} + \tfrac{2}{3}e^{\frac{u_1+u_3}{2}} < \tfrac{1}{3}e^{u_2} + \tfrac{2}{3}.\tfrac{1}{2}(e^{u_1} + e^{u_3}) = \tfrac{1}{3}(e^{u_1} + e^{u_2} + e^{u_3})$$

donc $\quad e^{u_1+u_2+u_3} < \dfrac{1}{27}(e^{u_1} + e^{u_2} + e^{u_3})^3 \quad$ puis $\quad t_1 t_2 t_3 < \dfrac{1}{27}(t_1 + t_2 + t_3)^3$.

$$\boxed{\text{L'inégalité ne devient égalité que si } t_1 = t_2 = t_3}$$

On a redémontré dans un cas particulier un résultat plus général, mais qui ne semble pas être au programme :
Si f est strictement convexe sur l'intervalle I, l'inégalité de convexité appliquée à des points de I affectés de coefficients strictement positifs ne peut être une égalité que si ces points sont tous confondus.

b. $A = (x_1 - x_2)(\overline{x_1} - \overline{x_2}) + (x_2 - x_3)(\overline{x_2} - \overline{x_3}) + (x_3 - x_1)(\overline{x_3} - \overline{x_1})$
$A = 2(x_1\overline{x_1} + 2 \text{ analogues}) - (x_1\overline{x_2} + 5 \text{ analogues})$.
$B = x_1\overline{x_1} + 2 \text{ analogues} \quad$ et $\quad C = (x_1 + x_2 + x_3)(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3})$
$C = (x_1\overline{x_1} + 2 \text{ analogues}) + (x_1\overline{x_2} + 5 \text{ analogues})$.
On voit que

$$\boxed{A = 3B - C}$$

c. Les vecteurs de S sont ceux dont les trois composantes sont en module inférieures à 1, l'une au moins étant de module 1. Que dire de plus ?

d. Si $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, on a $\quad \nu(X) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$ donc

$$\boxed{|\nu(X)|^2 = |x_2 - x_1|^2|x_3 - x_1|^2|x_3 - x_2|^2.}$$

D'après 3.a., ceci est inférieur à $\dfrac{1}{27}\left(|x_2 - x_1|^2 + |x_3 - x_1|^2 + |x_3 - x_2|^2\right)^3$ lui-même égal à
$\dfrac{1}{27}\left(3\displaystyle\sum_{k=1}^{3}|x_k|^2 - \left|\sum_{k=1}^{3}x_k\right|^2\right)^3$ lui-même inférieur à $\dfrac{1}{27}\left(3\displaystyle\sum_{k=1}^{3}|x_k|^2\right)^3 = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{3}|x_k|^2\right)^3$.
Comme chacun des $|x_k|^2$ est inférieur à 1, si $||X|| = 1$, on a donc $|\nu(X)|^2 \leqslant 27$ donc $\rho \leqslant \sqrt{27}$.

$$\boxed{\text{On peut présumer que } \rho = \sqrt{27}.}$$

Pour le prouver, il faut exhiber un X de norme 1 tel que $|\nu(X)|^2 = 27$ donc exhiber x_1, x_2, x_3 tels que $|x_1|, |x_2|$ et $|x_3|$ soient $\leqslant 1$ et tels que les inégalités précédentes soient des égalités.

D'après 3.a., $|\nu(X)|^2 = \frac{1}{27}\left(|x_2-x_1|^2+|x_3-x_1|^2+|x_3-x_2|^2\right)^3$ si et seulement si les trois nombres $|x_2-x_1|, |x_2-x_3|$ et $|x_3-x_1|$ sont égaux. Ensuite l'inégalité

$$\frac{1}{27}\left(3\sum_{k=1}^{3}|x_k|^2 - \left|\sum_{k=1}^{3}x_k\right|^2\right)^3 \leqslant \frac{1}{27}\left(3\sum_{k=1}^{3}|x_k|^2\right)^3 \quad \text{n'est une égalité que si } \sum_{k=1}^{3}x_k = 0.$$

Enfin $\sum_{k=1}^{3}|x_k|^2 = 3$ si et seulement si $|x_1| = |x_2| = |x_3| = 1$ (compte tenu du fait qu'on veut $|x_1|, |x_2|$ et $|x_3| \leqslant 1$.)

Finalement, $|\nu(X)|^2 = 27$ si et seulement si ses trois composantes (x_1, x_2, x_3) vérifient :

$$\boxed{|x_2-x_1| = |x_2-x_3| = |x_3-x_1|,\ |x_1| = |x_2| = |x_3| = 1 \ \text{ et } \ x_1+x_2+x_3 = 0.}$$

Cela équivaut à dire que, dans le plan complexe, les points d'affixes x_1, x_2, x_3 forment un triangle équilatéral, sont sur le cercle unité et leur centre de gravité (isobarycentre) est O. Un tel triplet existe

$$\boxed{\text{Il suffit de prendre } x_1 = 1, x_2 = j \text{ et } x_3 = j^2,}$$

où j est la racine cubique usuelle de l'unité.
On a donc bien :

$$\boxed{\rho = \sqrt{27}.}$$

4. Une minoration du réel ρ

a. Le terme général a_{pq} de la matrice $V(\Omega)$ est : $a_{pq} = (\omega_p)^{q-1} = e^{2i(p-1)(q-1)\pi/n}$.
Le terme général b_{mk} de la matrice $\overline{V(\Omega)}V(\Omega)$ est donc :

$$\begin{aligned} b_{mk} &= \sum_{s=1}^{n}\overline{a_{ms}}a_{sk} = \sum_{s=1}^{n}e^{-2i(m-1)(s-1)\pi/n}.e^{2i(s-1)(k-1)\pi/n} = \sum_{s=1}^{n}e^{2i(s-1)(k-1-m+1)\pi/n} \\ &= \sum_{s=1}^{n}e^{2i(s-1)(k-m)\pi/n}. \end{aligned}$$

Il s'agit de la somme des termes d'une progression géométrique de raison $r = e^{2i(k-m)\pi/n}$; r vaut 1 si et seulement si $\frac{k-m}{n}$ est un entier; cela ne peut se faire, puisque m et k sont entre 1 et n, que si $k = m$.
On a alors $b_{mk} = \sum_{s=1}^{n}1 = n$.
Si $k \neq m$, on a $b_{mk} = \frac{1-r^n}{1-r} = 0$, puisque r est une racine n-ième de l'unité. Finalement :

$$\boxed{\overline{V(\Omega)}V(\Omega) = nI_n.}$$

b. On a donc $\det\left(\overline{V(\Omega)}\right).\det(V(\Omega)) = \det(nI_n) = n^n$. Comme $\det\left(\overline{V(\Omega)}\right) = \overline{\det(V(\Omega))}$, cela donne

$$\boxed{|\det(V(\Omega))| = n^{n/2}.}$$

Puisque les ω_p sont de module 1, Ω est de norme 1. Comme $|\nu(\Omega)| = n^{n/2}$, on a donc

$$\boxed{\rho \geqslant n^{n/2}.}$$

5. Une inégalité de Hadamard

a. Si $V_p = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $V_q = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, on trouve, sur la p-ième ligne de ${}^T\overline{M}$, les $\overline{x_i}$ et, sur la q-ième colonne de M, les y_i.

Le terme général b_{pq} de ${}^T\overline{M}.M$ est donc $\sum_{i=1}^{n}\overline{x_i}y_i$, qui est donc nul si $p \neq q$, puisque $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sont deux à deux orthogonaux. Par contre, $b_{pp} = \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 = \|V_p\|_2^2$.

$$\boxed{\text{Si } V_1, V_2, \ldots, V_n \text{ sont deux à deux orthogonaux, } B = {}^T\overline{M}.M \text{ est diagonale, de termes diagonaux } \|V_1\|_2^2, \ldots, \|V_n\|_2^2.}$$

On a : $\det B = \det{}^T\overline{M}.\det M = \det\overline{M}.\det M = |\det M|^2$ et aussi : $\det B = \|V_1\|_2^2.\cdots.\|V_n\|_2^2$.
Donc :

$$\boxed{|\det M| = \|V_1\|_2.\cdots.\|V_n\|_2.}$$

Nous présumons que les projections dont il est question maintenant sont des projections orthogonales.
b. Puisque $U_1 = V_1$, on a : $\det M(U_1, U_2, \ldots, U_n) = \det M(V_1, U_2, \ldots, U_n)$.
Ensuite $\det M(V_1, U_2, U_3, \ldots, U_n) = \det M(V_1, V_2, U_3, \ldots, U_n)$ car on ne change pas $\det M(V_1, U_2, U_3, \ldots, U_n)$ en ajoutant à la deuxième colonne le vecteur $\mathrm{proj}_1(V_2)$, qui est colinéaire à la première colonne.
Supposons par récurrence (limitée au rang n) que
$\det M(U_1, U_2, \ldots, U_n) = \det M(V_1, V_2, \ldots, V_{i-1}, U_i, \ldots, U_n)$. On ne change pas ce dernier déterminant en ajoutant à la i-ième colonne le vecteur $proj_{i-1}(V_i)$, qui est combinaison linéaire des $i-1$ premières colonnes. Donc $\det M(V_1, V_2, \ldots, V_{i-1}, U_i, \ldots, U_n) = \det M(V_1, V_2, \ldots, V_i, U_{i+1}, \ldots, U_n)$.
On continue jusqu'au rang n :

$$\boxed{\det M(U_1, U_2, \ldots, U_n) = \det M(V_1, V_2, \ldots, V_n).}$$

c. $(V_1, \ldots, V_n)$ sont supposés linéairement indépendants dans F_n de dimension n (il n'était pas nécessaire de préciser qu'aucun n'est nul). Ces vecteurs forment donc une base de F_n et $(U_1, \ldots, U_n)$ n'est autre que la base orthogonale qu'on obtient à partir de la précédente par le procédé de Schmidt. Les U_i sont donc deux à deux orthogonaux.
D'après a., on a donc $\det M(V_1, V_2, \ldots, V_n) = \det M(U_1, U_2, \ldots, U_n) = \|U_1\|_2.\cdots.\|U_n\|_2$.
V_i est la somme des deux vecteurs U_i et $W_i = proj_{i-1}(V_i)$. Par définition de la projection orthogonale, U_i et W_i sont orthogonaux. Pythagore donne alors : $\|V_i\|_2^2 = \|U_i\|_2^2 + \|W_i\|_2^2$. Donc $\|U_i\|_2 \leqslant \|V_i\|_2$.
Donc $\|U_1\|_2.\cdots.\|U_n\|_2 \leqslant \|V_1\|_2.\cdots.\|V_n\|_2$. En rassemblant :

$$\boxed{|\det M(V_1, V_2, \ldots, V_n)| \leqslant \|V_1\|_2.\cdots.\|V_n\|_2.}$$

En multipliant membre à membre les inégalités $0 < \|U_i\|_2 \leqslant \|V_i\|_2$, on obtient ci-dessus une inégalité stricte sauf si toutes les inégalités $\|U_i\|_2 \leqslant \|V_i\|_2$ sont des égalités donc si les W_i sont tous nuls.
Or W_i est nul si et seulement si V_i est orthogonal à $V_1, \ldots, V_{i-1}$. Donc :

$$\boxed{|\det M(V_1, V_2, \ldots, V_n)| = \|V_1\|_2.\cdots.\|V_n\|_2 \iff V_1, \ldots, V_n \text{ sont deux à deux orthogonaux.}}$$

6. Une majoration du réel ρ Notons que l'inégalité $|\det M(V_1, V_2, \ldots, V_n)|^2 \leqslant \|V_1\|_2^2.\cdots.\|V_n\|_2^2$ est vraie même si la famille $V_1, \ldots, V_n$ est liée, car alors $|\det M(V_1, V_2, \ldots, V_n)|^2 = 0$.
Appliquons cette inégalité en prenant : $V_1 = (1, x_1, \ldots, x_1^{n-1}), \ldots, V_n = (1, x_n, \ldots, x_n^{n-1})$.
$M(V_1, \ldots, V_n)$ est alors la transposée de $V(X)$, où $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et donc
$|\det M(V_1, \ldots, V_n)| = |\nu(X)|$. Comme $\|V_q\|_2^2 = \sum_{p=1}^{n}|x_q|^{2(p-1)}$, l'inégalité donne :

$$\boxed{|\nu(X)|^2 \leqslant \prod_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}|x_q|^{2(p-1)}.}$$

Pour X unitaire, les $|x_q|$ sont tous inférieurs à 1 et $\sum_{p=1}^{n}|x_q|^{2(p-1)} \leqslant n$. Donc $|\nu(X)|^2 \leqslant n^n$ et

$$\boxed{|\nu(X)| \leqslant n^{\frac{n}{2}}.}$$

En particulier pour W unitaire tel que $|\nu(W)| = \rho$, cela donne : $\rho \leqslant n^{\frac{n}{2}}$. Comme on a obtenu auparavent l'inégalité inverse, on en déduit

$$\boxed{\rho = n^{\frac{n}{2}}.}$$

7. Recherche des vecteurs W

a. Si X a deux coordonnées égales, $|\nu(X)|$ est nul donc $|\nu(W)| = \rho = n^{\frac{n}{2}}$ nécessite que W n'ait pas deux coordonnées égales.

$$\boxed{\text{Pour tout couple d'entiers } p \text{ et } q,\ p \neq q,\ x_p \neq x_q.}$$

b. Reprenons 6 :

$$\rho^2 = |\nu(W)|^2 \leqslant \|V_1\|_2^2 \times \cdot \times \|V_n\|_2^2 = \prod_{q=1}^{n}\left(1 + |x_q|^2 + \cdot + |x_q|^{2(n-1)}\right) \leqslant \prod_{q=1}^{n}(1 + \cdots + 1) = n^n = \rho^2.$$

Les inégalités sont donc toutes des égalités.

Notamment $\prod_{q=1}^{n}\left(1 + |x_q|^2 + \cdots + |x_q|^{2(n-1)}\right) = \prod_{q=1}^{n}(1 + \cdots + 1)$ ne peut se faire que si et seulement si

$$\boxed{x_1, \ldots, x_n \text{ ont toutes un module égal à } 1.}$$

On peut aussi appliquer l'inégalité de Hadamard à la matrice de Vandermonde $V(W)$ elle-même, au lieu de sa transposée :

Si $(S_1, \ldots, S_n)$ sont ses colonnes, on a : $\rho^2 = |\nu(W)|^2 = |\det V(W)|^2 \leqslant \|S_1\|_2^2 \cdot \ldots \cdot \|S_n\|_2^2$.

Or $S_k = (x_1^{k-1}, \ldots, x_n^{k-1})$. Puisque tous les x_i sont de module 1, on a : $\|S_k\|_2 = \sqrt{n}$. Donc $\rho^2 = |\det V(W)|^2 \leqslant \|S_1\|_2^2 \times \ldots \times \|S_n\|_2^2 = n^n = \rho^2$. On est donc dans le cas d'égalité de Hadamard :

Les S_i sont donc orthogonaux deux à deux.

En particulier, $S_2, \ldots, S_n$ sont tous orthogonaux à $S_1 = (1, \ldots, 1)$, ce qui se traduit par

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n} x_p = 0,\quad \sum_{p=1}^{n}(x_p)^2 = 0, \ldots, \sum_{p=1}^{n}(x_p)^{n-1} = 0.}$$

c. Petite faute d'énoncé : lire $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$ au lieu de $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k t^k$. Cela dit : $P_W(t) = \prod_{p=1}^{n}(t - x_p)$ est un polynôme unitaire, donc :

$$\boxed{\alpha_n = 1.}$$

$\alpha_0 = P_W(0) = \prod_{p=1}^{n}(-x_p)$: c'est un complexe de module 1.

$$\boxed{\text{On peut poser } \alpha_0 = -e^{i\theta_0} \text{ avec } \theta_0 \text{ réel.}}$$

d. $P_W(t) = (t - x_1)(t - x_2)\cdots(t - x_n)$ donc

$P'_W(t) = (t - x_2)\cdots(t - x_n) + (t - x_1)(t - x_3)\cdots(t - x_n) + \cdots + (t - x_1)(t - x_2)\cdots(t - x_{n-1})$

donc :

$$\text{Pour } t \neq x_1, \ldots, x_n : F_W(t) = \frac{P'_W(t)}{P_W(t)} = \frac{1}{t - x_1} + \frac{1}{t - x_2} + \cdots + \frac{1}{t - x_n}.$$

$$\boxed{\text{Sur l'ensemble de définition de } F_W, \text{ on a : } F_W(t) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{t - x_p}.}$$

Puisque x_p n'est pas nul, on a : $\dfrac{1}{t - x_p} = -\dfrac{1}{x_p} \times \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{t}{x_p}\right)}$. Pour $\left|\dfrac{1}{x_p}\right| < 1$, autrement dit pour $|t| < 1$

et en particulier pour t réel $\in]-1, 1[$, on peut écrire $\dfrac{1}{1 - \dfrac{t}{x_p}} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k}{x_p^k}$, donc $\dfrac{1}{t - x_p} = -\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k}{x_p^{k+1}}$.

Par addition, F_W est développable en série entière sur $]-1, 1[$. On peut dire aussi :

$$\boxed{\text{Il existe } R \geqslant 1 \text{ tel que } F_W \text{ soit développable en série entière sur }]-R, R[.}$$

(on peut même préciser que $R = 1$, car on peut montrer que le cercle de convergence du développement en série entière d'une fraction rationnelle passe par le pôle de cette fraction, pôle réel ou complexe, qui est le plus proche de O).

e. En ajoutant les développements, on obtient : $F_W(t) = -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{x_p^{k+1}}\right) t^k$. Avec les notations de l'énoncé :

$$\boxed{f_k = -\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{x_p^{k+1}}.}$$

x_p étant de module 1, $\dfrac{1}{x_p}$ est le conjugué de x_p, donc $\overline{f_k} = -\sum_{p=1}^{n} x_p^{k+1}$, qui est nul, d'après b., pour $k = 0, \ldots, n-2$. Donc

$$\boxed{\text{Les coefficients } f_0, f_1, \ldots, f_{n-2} \text{ sont nuls.}}$$

f. P'_W, fonction polynôme de degré $n-1$, est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-1, 1[$.

L'unicité du développement fait que le coefficient de t^k est nul pour $k \geqslant n$.

Par ailleurs $P'_W(t) = P_W(t).F_W(t)$: P'_W apparaît comme produit de deux fonctions développables en séries entières sur $]-1, 1[$.

Le développement de P'_W est donc le produit de Cauchy des deux développements mais, les coefficients $f_0, f_1, \ldots, f_{n-2}$ des premiers termes de F_W étant nuls, il en est de même des coefficients dans P'_W.

P'_W est donc un monôme de degré $n-1$. Comme P_W est unitaire :

$$\boxed{P'_W(t) = nt^{n-1} \quad \text{et} \quad P_W(t) = t^n + \alpha_0.}$$

On a donc $P_W(t) = t^n - e^{i\theta_0}$. $x_1, \ldots, x_n$, qui sont les différents zéros de P_W, sont donc les diverses racines n-ièmes de $e^{i\theta_0}$, dans un ordre qu'on ne peut préciser puisque, de toute façon, si W est un vecteur répondant au problème posé, tout vecteur obtenu à partir de W par permutation des composantes convient aussi. Retenons :

$$\boxed{\text{L'ensemble } \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ est égal à l'ensemble } \{e^{i(\theta_0 + 2k\pi)/n}, k = 1, \ldots, n\}.}$$

Un tel vecteur a toutes ses composantes de module 1. On retrouve donc $\|W\| = 1$. $\|W\|_2^2$ est la somme des carrés des modules des composantes de W donc $\|W\|_2 = \sqrt{n}$.

g. On ne s'est pas encore préoccupé de savoir si, réciproquement, les vecteurs W trouvés conviennent quel que soit le choix de θ_0 dans $\mathbb{R}$.

En fait, on sait depuis le début qu'il y a au moins une solution. Il existe donc un θ'_0 dans $\mathbb{R}$ tel que le vecteur $W' = (x'_1, \ldots, x'_n)$, où $x'_k = e^{i(\theta'_0 + 2k\pi)/n}$, soit solution.

Pour θ_0 réel quelconque, les composantes $e^{i(\theta_0 + 2k\pi)/n}$ du vecteur $W = (x_1, \ldots, x_n)$ sont obtenues par multiplication de celles de W' par le même complexe $e^{i(\theta_0 - \theta'_0)/n}$, dont le module est 1.

En revenant à la formule, admise dans l'énoncé et qui donne la valeur du déterminant de Vandermonde, on voit que $|\nu(W)| = |\nu(W')| = \rho$. Le vecteur W est donc solution du problème, ainsi que tous ceux qui s'en déduisent par permutation des coordonnées, quel que soit le choix de θ_0.

Les coordonnées de W, élevées à la puissance n, donnent toutes $e^{i\theta_0}$. Si 1 figure parmi elles, c'est que $e^{i\theta_0} = 1^n = 1$. Les coordonnées de W, qui sont toutes différentes, sont donc les racines n-ièmes de l'unité, écrites dans un certain ordre.

$$\boxed{\text{Il y a donc } n! \text{ vecteurs } W \text{ dont l'une des coordonnées est égale à } 1.}$$

***

CENTRALE - SUPÉLEC 1999	Filière PSI
Mathématiques 2	Durée : 4 heures

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.
Le produit scalaire de deux vecteurs u et v est noté $u \cdot v$, la norme $\|u\|$.
De plus, dans les parties I et II, E désigne un espace euclidien de dimension n ($n \geqslant 2$).

Partie I

I.A - Soient u et v deux vecteurs quelconques de E. On note $\mathrm{Gram}(u, v)$ la matrice définie par :

$$\mathrm{Gram}(u,v) = \begin{bmatrix} u\cdot u & u\cdot v \\ v\cdot u & v\cdot v \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G(u,v) = \det[\mathrm{Gram}(u,v)]$$

I.A.1) Montrer que : $G(u,v) \geqslant 0$.

I.A.2) On note P un sous-espace vectoriel de dimension 2 de E contenant u et v et B une base orthonormale de P. Vérifier que : $G(u,v) = [\det_B(u,v)]^2$

I.A.3) À quelle condition a-t-on $G(u,v) = 0$?

I.B - Dans toute la suite de la partie I, **n est égal à 3 et E est orienté.** Si u, v, w sont trois vecteurs quelconques de E, on note $\mathrm{Gram}(u,v,w)$ la matrice définie par :

$$\mathrm{Gram}(u,v,w) = \begin{bmatrix} u\cdot u & u\cdot v & u\cdot w \\ v\cdot u & v\cdot v & v\cdot w \\ w\cdot u & w\cdot v & w\cdot w \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G(u,v,w) = \det[\mathrm{Gram}(u,v,w)]$$

I.B.1) Calculer $G(u,v,w)$ si u, v, w sont trois vecteurs deux à deux orthogonaux.

I.B.2) On suppose w orthogonal à u et v. Exprimer $G(u,v,w)$ en fonction de $G(u,v)$.

I.C -

I.C.1) u, v, w sont trois vecteurs quelconques de E. Montrer qu'il existe t et n, vecteurs de E, vérifiant :
$w = t + n$, $u \cdot n = v \cdot n = 0$, (u,v,t) liée, n orthogonal à u, v et t.
Montrer que, dans ces conditions, on a : $G(u,v,w) = G(u,v,t) + G(u,v,n)$

I.C.2) Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe un triplet (x,y,z) de réels différent de $(0,0,0)$ tel que $xu + yv + zw$ soit orthogonal à u, v et w.

b) $G(u,v,w) = 0$

I.C.3) En déduire que : $G(u,v,w) = 0 \iff (u,v,w)$ liée

I.C.4) Montrer que $G(u,v,w)$ est un réel positif.

I.D -

I.D.1) u, v, w sont trois vecteurs de E et B une base orthonormale de E. Montrer que le réel $|\det_B(u,v,w)|$ ne dépend pas du choix de B.

I.D.2) Soit P un plan de E contenant u et v et n_1 un vecteur unitaire orthogonal à P. On désigne par B_1 une base orthonormée de P et on note $B = B_1 \cup \{n_1\}$. En utilisant ces deux bases, montrer que : $G(u,v,w) = [\det_B(u,v,w)]^2$

I.E - Pour u, v vecteurs quelconques de E, $u \wedge v$ désigne le produit vectoriel de u par v.

Rappels

- Si B est une base orthonormée directe de E, pour tout élément y de E on a :
$\det_B(u,v,y) = (u \wedge v)\cdot y$.
- P et P', deux plans de E de vecteurs normaux respectifs n et n' (n et n' non nuls) sont dits orthogonaux si $n \cdot n' = 0$.

I.E.1) Montrer que $\|u \wedge v\|^2 = G(u,v)$

I.E.2) Soient P_1, P_2 et P_3 des plans de E orthogonaux deux à deux et p, q, r les projections orthogonales sur ces trois plans. Montrer que :

$$\forall (a,b) \in E^2, \quad \|a \wedge b\|^2 = G(p(a),p(b)) + G(q(a),q(b)) + G(r(a),r(b))$$

Partie II

Soient $u, \dots, u_n$ n vecteurs de E. Pour tout i, tout j, entiers de $[\![1,n]\!]$, on note $g_{i,j} = u_i \cdot u_j$
On note $\mathrm{Gram}(u_1, \dots, u_n)$ la matrice d'élément général $g_{i,j}$ et le déterminant de cette matrice est noté $G(u_1,\dots,u_n) = \det[\mathrm{Gram}(u_1,\dots,u_n)]$

II.A - Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. On pose, pour tout entier j de $[\![1,n]\!]$

$$u_j = \sum_{k=1}^{n} u_{k,j} e_k$$

II.A.1) Exprimer, pour tout i, tout j, $g_{i,j}$ en fonction des coordonnées des vecteurs $u_1, \dots, u_n$ dans la base B.

II.A.2) Soit $A = (u_{i,j})$, A élément de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\mathrm{Gram}(u_1,\dots,u_n) = {}^tAA$$

II.A.3) En déduire que $G(u_1,\dots,u_n)$ est un réel positif. Montrer que

$$G(u_1,\dots,u_n) \neq 0 \iff (u_1,\dots,u_n) \text{ libre}$$

II.B - On munit E d'un autre produit scalaire noté f_1.
Soit $(u_1,\dots,u_n)$ **une base orthonormale pour f_1** et $G_1 = \mathrm{Gram}(u_1,\dots,u_n)$.

II.B.1) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D, élément de $M_n(\mathbb{R})$, et une matrice P orthogonale telles que : $D = {}^tPG_1P$.

II.B.2) Soit $(v_1,\dots,v_n)$ la famille de vecteurs de E de matrice P dans la base $(u_1,\dots,u_n)$. Montrer que : $\mathrm{Gram}(v_1,\dots,v_n) = D$.
En déduire que $(v_1,\dots,v_n)$ est une base orthogonale pour le produit scalaire $(x,y) \mapsto x\cdot y$ et orthonormale pour f_1.

II.B.3) Montrer que tous les éléments diagonaux de D sont strictement positifs.

II.C - Soit $(u_1,\dots,u_n)$, $(u'_1,\dots,u'_n)$ **deux bases orthonormales pour f_1.**

II.C.1) Montrer qu'il existe S, matrice orthogonale, telle que :
$G_2 = {}^tSG_1S$ avec $G_1 = \mathrm{Gram}(u_1,\dots,u_n)$ et $G_2 = \mathrm{Gram}(u'_1,\dots,u'_n)$.

II.C.2) Montrer que : $\det(G_1) = \det(G_2)$ et que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u'_i\|^2$.

II.D - $\mathcal{E}$, désigne ici un espace affine euclidien de dimension 2 et E l'espace vectoriel associé. $(O; i, j)$ est un repère orthonormé de ce plan. On considère deux nombres réels strictement positifs a et b et on définit la courbe $\mathcal{C}$ d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$ où x et y désignent les coordonnées dans le repère $(O ; i, j)$.

II.D.1) Pour u et v, vecteurs de E, de coordonnées (x, y) et (x', y') dans la base (ij) on note

$$f_1(u, v) = \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2}$$

Montrer qu'on définit ainsi un nouveau produit scalaire dans E.

II.D.2) Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}$ et T la tangente à $\mathcal{C}$ en M. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par O et parallèle à T et M' un élément de $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.
Montrer que $f_1(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 0$.

II.D.3) Montrer que $OM^2 + OM'^2 = a^2 + b^2$ et que $G(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = a^2b^2$.

Partie III

Dans toute la suite E n'est plus forcément de dimension finie. Si $u_1, \dots, u_r$ sont r vecteurs de E, on note, comme dans la Partie II, $G(u_1, \dots, u_r)$ le déterminant de la matrice de $M_r(\mathbb{R})$ de terme général $u_i \cdot u_j$ (G est un déterminant de *Gram*).

III.A - Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de p vecteurs de E et $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Pour tout x élément de E, on note x_F le projeté orthogonal de x sur F et $x^\perp$ le vecteur tel que : $x = x^\perp + x_F$.

III.A.1) Exprimer x_F en fonction des vecteurs $e_1, \dots, e_p$.

III.A.2) Exprimer simplement le réel $d(x, F)$ défini par

$$d(x, F) = \inf\{\|x - f\| ; f \in F\}$$

III.A.3) Montrer que $$d(x, F) = \sqrt{\frac{G(x, e_1, \dots, e_p)}{G(e_1, \dots, e_p)}}$$

III.B - Dans toute la suite du problème, E désigne l'ensemble des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire

$$f.g = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$

Pour λ réel strictement positif, on note p_λ l'élément de E défini par :

$$\forall t \in]0 1], \quad p_\lambda(t) = t^\lambda, \ p_\lambda(0) = 0.$$

Soit $(\lambda_j)_{j \geq 1}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs vérifiant :

$$\lim_{j \to +\infty} \lambda_j = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\lambda_j} \text{ est une série divergente.}$$

III.B.1) Pour n entier non nul, on note $E_n = \mathrm{Vect}(p_{\lambda_1}, \dots, p_{\lambda_n})$. Vérifier que E_n est un sous-espace vectoriel de E de dimension n.

III.B.2) Soit k un entier fixé pour toute la suite du problème.
Pour n entier non nul, on note :

$$u_n^k = \inf\left\{ \int_0^1 \left(t^k - \sum_{i=1}^n a_i t^{\lambda_i}\right)^2 dt ; (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

En interprétant u_n^k comme le carré d'une distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de E, exprimer u_n^k en fonction de déterminants de *Gram*.

III.C - Soit p un entier non nul, $(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)$ des réels strictement positifs tels que, pour tout i, pour tout j, $i \neq j \Rightarrow b_i \neq b_j$

Le but de cette question est de calculer le déterminant de la matrice de $M_p(\mathbb{R})$ de terme général $\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)$. Ce déterminant sera noté $C(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)$.

III.C.1) Soit $F(X) = \frac{(X - a_1)\dots(X - a_{p-1})}{(X + b_1)\dots(X + b_p)}$. Expliciter la décomposition en éléments simples de F.

III.C.2) On note D le déterminant d'ordre p :

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_{p-1}} & F(a_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{a_p + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_p + b_{p-1}} & F(a_p) \end{vmatrix}$$

Montrer, à l'aide de III.C.1, et en calculant D par deux méthodes différentes que :

$$F(a_p)\, C(a_1, \dots, a_{p-1}, b_1, \dots, b_{p-1}) = \frac{\prod_{i=1}^{p-1} (a_i + b_p)}{\prod_{i=1}^{p-1} (b_p - b_i)} C(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)$$

III.C.3) En déduire :

$$C(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p) = \frac{\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant p} (a_j - a_i) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant p} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leqslant i, j \leqslant p} (a_i + b_j)}$$

III.D -

III.D.1) En notant $\lambda_0 = k$ et, pour i entier élément de $[\![0, n]\!]$, $\mu_i = \lambda_i + \frac{1}{2}$, exprimer u_n^k à l'aide d'un déterminant du type précédent.

III.D.2) En déduire :

$$u_n^k = \frac{1}{1 + 2k} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{2k + 1}{1 + \lambda_i + k}\right)^2$$

III.E - On suppose que : $\forall i \geqslant 1, \ k \neq \lambda_i$.

III.E.1) Montrer qu'il existe un entier non nul N tel que :

$$\forall i \geqslant N, \quad 1 - \frac{2k + 1}{1 + \lambda_i + k} > 0$$

III.E.2) Quelle est la nature de la série $\sum_{i \geqslant N} \ln\left(1 - \frac{2k + 1}{1 + \lambda_i + k}\right)$?

En déduire que u_n^k tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

III.E.3) Démontrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n \in \mathbb{N}^*, \ \exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \quad / \quad \left\| p_k - \sum_{i=1}^n a_i p_{\lambda_i} \right\| \leqslant \varepsilon$$

III.E.4) En déduire, à l'aide du théorème d'approximation de Weierstrass, que toute fonction f de E est limite d'une suite d'éléments de $\bigcup_{n \geqslant 1} E_n$.

***

CENTRALE - SUPÉLEC 1999 — Filière PSI

Mathématiques 2 — CORRIGÉ

Partie I

I.A -

I.A.1) $G(u,v) = \det[\mathrm{Gram}(u,v)] = \begin{vmatrix} u\cdot u & u\cdot v \\ v\cdot u & v\cdot v \end{vmatrix} = \|u\|^2\|v\|^2 - (u\cdot v)^2$. D'après l'inégalité de Schwarz :

$$\boxed{G(u,v) \geqslant 0.}$$

I.A.2) Soit $B = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormale du plan P. Alors $u = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $v = c\vec{i} + d\vec{j}$.
D'un côté : $G(u,v) = \|u\|^2\|v\|^2 - (u\cdot v)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2 = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd$
et de l'autre : $\det_B(u,v) = ad - bc$. On a bien :

$$\boxed{G(u,v) = [\det_B(u,v)]^2.}$$

I.A.3) Donc : $G(u,v) = 0 \iff \det_B(u,v) = 0$:

$$\boxed{G(u,v) = 0 \text{ si et seulement si la famille } (u,\ v) \text{ est liée.}}$$

I.B -

I.B.1) Si $u,\ v,\ w$ sont deux à deux orthogonaux, $\mathrm{Gram}(u,v,w) = \begin{bmatrix} \|u\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \|v\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \|w\|^2 \end{bmatrix}$ donc :

$$\boxed{G(u,v,w) = \|u\|^2\|v\|^2\|w\|^2}$$

I.B.2) Si w est orthogonal à u et v, on a : $\mathrm{Gram}(u,v,w) = \begin{bmatrix} u\cdot u & u\cdot v & 0 \\ v\cdot u & v\cdot v & 0 \\ 0 & 0 & w\cdot w \end{bmatrix}$.
En développant le déterminant suivant la dernière ligne :

$$\boxed{G(u,v,w) = \|w\|^2\, G(u,v).}$$

I.C -

I.C.1) Si la famille (u,v) est libre, soit P le plan vectoriel engendré par u et v. Alors (u,v,t) est liée si et seulement si t est dans P et $u\cdot n = v\cdot n = 0$ si et seulement si n est dans $P^\perp$.
La décompositon demandée $w = \underbrace{t}_{\in P} + \underbrace{n}_{\in P^\perp}$ existe donc et est unique.
Si la famille (u,v) est liée, on prend pour P un plan quelconque contenant u et v.
La décomposition $w = \underbrace{t}_{\in P} + \underbrace{n}_{\in P^\perp}$ fait encore l'affaire.

$$\boxed{\text{Il existe } t \text{ et } n \text{ vérifiant : } w = t + n,\ u\cdot n = v\cdot n = 0,\ (u,v,t) \text{ liée, } n \text{ orthogonal à } u, v \text{ et } t.}$$

Remplaçons w par $t+n$ dans $G(u,v,w)$ et simplifions en tenant compte de la nullité de certains produits scalaires.

$$\begin{aligned} G(u,v,w) &= \begin{vmatrix} u\cdot u & u\cdot v & u\cdot(t+n) \\ v\cdot u & v\cdot v & v\cdot(t+n) \\ (t+n)\cdot u & (t+n)\cdot v & (t+n)\cdot(t+n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u\cdot u & u\cdot v & u\cdot t \\ v\cdot u & v\cdot v & v\cdot t \\ t\cdot u & t\cdot v & t\cdot t + n\cdot n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u\cdot u & u\cdot v & u\cdot t \\ v\cdot u & v\cdot v & v\cdot t \\ t\cdot u & t\cdot v & t\cdot t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u\cdot u & u\cdot v & 0 \\ v\cdot u & v\cdot v & 0 \\ t\cdot u & t\cdot v & n\cdot n \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

après dédoublement de la dernière colonne.

En développant par rapport à la troisième colonne on constate que :

$$\begin{vmatrix} u\cdot u & u\cdot v & 0 \\ v\cdot u & v\cdot v & 0 \\ t\cdot u & t\cdot v & n\cdot n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u\cdot u & u\cdot v & 0 \\ v\cdot u & v\cdot v & 0 \\ 0 & 0 & n\cdot n \end{vmatrix} = G(u,v,n)$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{G(u,v,w) = G(u,v,t) + G(u,v,n).}$$

I.C.2) $G(u,v,w)$ est nul si et seulement si il existe une combinaison linéaire nulle des colonnes, les coefficients étant non tous nuls, autrement dit, s'il existe $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ tel que :

$$\left.\begin{aligned} x(u\cdot u) + y(u\cdot v) + z(u\cdot w) &= 0 \\ x(v\cdot u) + y(v\cdot v) + z(v\cdot w) &= 0 \\ x(w\cdot u) + y(w\cdot v) + z(w\cdot w) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ qui peut encore s'écrire } \left\{\begin{aligned} u\cdot(xu+yv+zw) &= 0 \\ v\cdot(xu+yv+zw) &= 0 \\ w\cdot(xu+yv+zw) &= 0 \end{aligned}\right.$$

qui traduit l'orthogonalité de $xu+yv+zw$ avec les trois vecteurs u, v et w.

$$\boxed{\text{Les deux propositions a) et b) de l'énoncé sont équivalentes.}}$$

I.C.3)

- Si la famille $(u,\ v,\ w)$ est liée, il existe un triplet non nul $(x,\ y,\ z)$ de réels tels que $xu+yv+zw = 0$. Ce vecteur nul est orthogonal aux trois vecteurs $u,\ v,\ w$, ce qui assure, d'après I.C.2), la nullité de $G(u,v,w)$.
- Si $G(u,v,w) = 0$, il existe un triplet $(x,\ y,\ z)$ non nul de réels tel que le vecteur $xu+yv+zw$ soit orthogonal aux trois vecteurs $u,\ v,\ w$.

Si $(u,\ v,\ w)$ était libre, ce vecteur $xu+yv+zw$ serait non nul et cependant orthogonal aux trois vecteurs de la base $(u,\ v,\ w)$ de E ($\dim(E) = 3$), ce qui est absurde. Donc $(u,\ v,\ w)$ est liée.

$$\boxed{G(u,v,w) = 0 \iff (u,v,w) \text{ est liée.}}$$

I.C.4) Reprenons la conclusion de I.C.1) qui, maintenant, se simplifie puisque $G(u,v,t) = 0$:

$$G(u,v,w) = G(u,v,n).$$

Puisque n est orthogonal à u et v, on peut appliquer I.B.2) : $G(u,v,w) = \|n\|^2\, G(u,v)$, et $G(u,v)$ est positif d'après I.A.2). Finalement :

$$\boxed{G(u,v,w) \text{ est un réel positif.}}$$

I.D -

I.D.1) Rappelons que si B et B' sont deux bases de E on a : $\det_{B'}(u,v,w) = \det_B(u,v,w) \times \det_{B'}(B)$.
Si de plus B et B' sont orthonormales, alors la matrice $Mat_{B'}(B)$ de passage de B' à B est orthogonale et donc
$\det_{B'}(B) = \det(Mat_{B'}(B)) = \pm 1$. Il en résulte : $|\det_{B'}(u,v,w)| = |\det_B(u,v,w)|$:

$$\boxed{\text{Le réel } |\det_B(u,v,w)| \text{ ne dépend pas du choix de la base orthonormale } B.}$$

I.D.2) L'énoncé reprend en fait le plan P que nous avions introduit au I.C.1).
Puisque n est orthogonal à ce plan, on a $n = \alpha n_1$ et, d'après I.C.4),
$G(u,v,w) = \|n\|^2\, G(u,v) = \alpha^2 G(u,v)$. Puisque B_1 est orthonormale dans P, on a aussi, d'après I.A.2), $G(u,v) = [\det_{B_1}(u,v)]^2$.

La matrice de (u,v,n_1) sur $B = B_1 \cup \{n_1\}$ s'obtient en bordant par un 1 la matrice de (u,v) sur B_1 : ces deux matrices ont le même déterminant, donc $G(u,v) = [\det_B(u,v,n_1)]^2$.
Donc $G(u,v,w) = \alpha^2 G(u,v) = [\det_B(u,v,\alpha n_1)]^2 = [\det_B(u,v,n)]^2$.
Enfin $\det_B(u,v,w) = \det_B(u,v,t) + \det_B(u,v,n) = \det_B(u,v,n)$ puisque (u,v,t) est liée. Finalement :

$$\boxed{G(u,v,w) = [\det_B(u,v,w)]^2.}$$

I.E -

I.E.1) Utilisons encore le plan P, contenant u et v, et sa base orthonormale B_1.
Il est bien connu que $||u \wedge v||^2 = [\det_{B_1}(u,v)]^2$. D'après I.A.2), c'est égal à $G(u,v)$. Finalement :

$$\boxed{||u \wedge v||^2 = G(u,v).}$$

I.E.2) Soient $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ trois vecteurs unitaires respectivement normaux à P_1, P_2, P_3.
Puisque P_1, P_2, P_3 sont orthogonaux deux à deux, ces vecteurs $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont deux à deux orthogonaux ; ils forment donc une base orthonormale de E. Quitte à remplacer $\vec{k}$ par $-\vec{k}$, on peut la supposer directe.
Si x_a, x_b etc.. désignent les composantes de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sur cette base, la première composante de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ sur cette base est $y_a.z_b - z_a.y_b$.
y_a et z_a sont les composantes de $\vec{r}(a)$ où r est la projection orthogonale sur P_3 =Vect$(\vec{i},\vec{j})$.
De même y_b et z_b sont les composantes de $\vec{r}(b)$. la quantité $(y_a.z_b - z_a.y_b)^2$ peut donc s'interpréter comme $||\vec{r}(a) \wedge \vec{r}(b)||^2$, et c'est encore égal d'après I.E.1) à $G(r(a),r(b))$.
Interprétation analogue pour les deux autres carrés des composantes de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ et finalement :

$$\boxed{||\vec{a} \wedge \vec{b}||^2 = G(p(a),p(b)) + G(q(a),q(b)) + G(r(a),r(b)).}$$

Partie II

II.A -

II.A. 1) Puisque $u_j = \sum_{k=1}^{n} u_{k,j} e_k$ et que la base des e_k est orthonormale,

$$\boxed{g_{i,j} = u_i \cdot u_j = \sum_{k=1}^{n} u_{k,i} u_{k,j}.}$$

II.A.2) $g_{i,j}$ est donc le terme de ${}^tAA$ situé à la i-ème ligne, j-ième colonne, donc

$$\boxed{\text{Gram}(u_1,\dots,u_n) = {}^tAA.}$$

II.A.3) $G(u_1,\dots,u_n) = \det[\text{Gram}(u_1,\dots,u_n)] = \det {}^tAA = (\det A)^2$ donc

$$\boxed{\text{Le réel } G(u_1,\dots,u_n) \text{ est positif.}}$$

De plus : $G(u_1,\dots,u_n) \neq 0 \iff \det A \neq 0$. Or A est la matrice sur B des composantes des u_j donc

$$\boxed{G(u_1,\dots,u_n) \neq 0 \iff (u_1,\dots,u_n) \text{ libre.}}$$

II.B -

II.B.1) G_1 est une matrice symétrique réelle, donc elle est diagonalisable avec une matrice de passage P orthogonale : $G_1 = PD\,{}^tP$. En multipliant à gauche par ${}^tP = P^{-1}$ et à droite par P, on voit que :

$$\boxed{\text{Il existe } D \text{ diagonale et } P \text{ orthogonale telles que } D = {}^tPG_1P.}$$

II.B.2) Soit B une base orthonormale pour le produit scalaire initial et A la matrice de passage de cette base à la base $(u_1,\dots,u_n)$.
D'après ce qu'on a vu en II.A.2), G_1 =Gram$(u_1,\dots,u_n) = {}^tAA$ donc $D = {}^tP\,{}^tAAP = {}^t(AP)AP$.
De par ce même II.A.2) D est donc la matrice de Gram de la famille F de vecteurs qui a AP comme matrice sur B.
Comme A est la matrice de passage de B à $(u_1,\dots,u_n)$ et P la matrice de passage de $(u_1,\dots,u_n)$ à $(v_1,\dots,v_n)$, cette famille F n'est autre que $(v_1,\dots,v_n)$, donc

$$\boxed{\text{Gram}(v_1,\dots,v_n) = D.}$$

Puisque cette matrice est diagonale, $v_i \cdot v_j$ est nul pour $i \neq j$: cette base $(v_1,\dots,v_n)$ est orthogonale pour le produit scalaire initial.
$(u_1,\dots,u_n)$ est orthonormale pour le nouveau produit scalaire et la matrice de passage de $(u_1,\dots,u_n)$ à $(v_1,\dots,v_n)$ est orthogonale : $(v_1,\dots,v_n)$ est donc aussi orthonormale pour le nouveau produit scalaire.
Résumons :

$$\boxed{(v_1,\dots,v_n) \text{ est orthogonale pour } (x,y) \mapsto x \cdot y \text{ et orthonormale pour } f_1 \text{, le nouveau produit scalaire.}}$$

II.B.3) Le i-ième terme diagonal de D est $v_i \cdot v_i = ||v_i||^2$. Puisque $v_i \neq 0$,

$$\boxed{\text{il est strictement positif.}}$$

II.C -

II.C.1) Soit S la matrice de passage de la base $(u_1,\cdots,u_n)$ à la base $(u'_1,\cdots,u'_n)$. Puisque ces deux bases sont orthonormales pour un même produit scalaire, cette matrice S est orthogonale.
Si A est la matrice de $(u_1,\cdots,u_n)$ sur une base B orthonormale pour le produit scalaire initial, celle de $(u'_1,\cdots,u'_n)$ sur B est AS (formule usuelle de changement de base).
D'après II.A.2), les matrices de Gram de $(u_1,\cdots,u_n)$ et $(u'_1,\cdots,u'_n)$ sont donc respectivement $G_1 = {}^tA.A$ et $G_2 = {}^t(AS)AS = {}^tS\,{}^tAAS = {}^tSG_1S$.

$$\boxed{\text{On a bien } G_2 = {}^tSG_1S \text{, avec } S \text{ orthogonale.}}$$

II.C.2) Puisque ${}^tS$ et S sont inverses l'une de l'autre, le produit de leurs déterminants vaut 1. Donc :

$$\boxed{\det G_2 = \det({}^tSG_1S) = \det {}^tS \times \det G_1 \times \det S = \det G_1.}$$

D'autre part, $||u_i||^2 = u_i \cdot u_i$ est le i-ième terme diagonal de G_1. $\sum_{i=1}^{n} ||u_i||^2$ est donc la trace de G_1.
De même, $\sum_{i=1}^{n} ||u'_i||^2$ est la trace de G_2. Puisque ${}^tS = S^{-1}$, G_1 et G_2 sont semblables et ont donc même trace :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} ||u_i||^2 = \sum_{i=1}^{n} ||u'_i||^2.}$$

II.D -

Notons que la courbe C est une ellipse de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$.

II.D.1) Si u a pour coordonnées (x,y) dans la base (i,j), ses coordonnées dans la base (I,J), où $I = ai$ et $J = bj$, sont $X = \dfrac{x}{a}$ et $Y = \dfrac{y}{b}$.
Pour u et v quelconques, on a donc $f_1(u,v) = XX' + YY'$:

$$\boxed{f_1 \text{ est le produit scalaire qui rend orthonormale la base } (I,J).}$$

II.D.2) Dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$, la courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $X^2 + Y^2 = 1$. Puisque ce repère est orthonormé pour le produit scalaire f_1, $\mathcal{C}$ est un cercle pour ce nouveau produit scalaire. La tangente T en M à ce cercle est orthogonale (toujours pour le produit scalaire f_1) au rayon OM. Puisque OM' est parallèle à T, cette droite OM' est orthogonale à OM. Donc

$$\boxed{f_1(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 0.}$$

II.D.3) M et M' sont sur le «cercle unité pour f_1» et $f_1(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 0$: $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ est donc une base orthonormale pour f_1.
On dispose de deux bases orthonormales pour f_1 : on peut appliquer II.C.2) :
$\|\overrightarrow{OM}\|^2 + \|\overrightarrow{OM'}\|^2 = \|\vec{I}\|^2 + \|\vec{J}\|^2$ (où les normes sont celles associées au produit scalaire initial).
On en déduit

$$\boxed{OM^2 + OM'^2 = a^2 + b^2.}$$

Toujours d'après II.C.2), on a aussi $G(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = G(\vec{I}, \vec{J})$ et le déterminant de Gram de $(\vec{I}, \vec{J})$ est $\begin{vmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{vmatrix}$ donc :

$$\boxed{G(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = a^2 b^2}$$

Partie III

III.A -

III.A.1) Cherchons x_F, qui est dans F, sous la forme : $\displaystyle x_F = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j e_j$.

Puisque x_F est le projeté orthogonal de x sur F, $x^\perp = x - x_F$ est donc orthogonal à F, donc à tous les vecteurs de la base $(e_1, \dots, e_p)$ de F.

On a donc : $(x - x_F) \perp e_i$ pour i de 1 à p, soit : $\displaystyle \sum_{j=1}^{p} \alpha_j (e_i \cdot e_j) = e_i \cdot x_F = e_i \cdot x$ pour tout i de 1 à p.

Les $(e_i \cdot e_j)$ et les $(e_i \cdot x)$ étant connus, les α_j sont donc donnés par un système carré d'ordre p dont la matrice M a pour terme général $(e_i \cdot e_j)$. Ce système s'écrit $MX = B$, où la matrice colonne X porte les inconnues α_i et la matrice colonne B porte les données $e_i.x$.
Cette matrice M est la matrice de Gram de $(e_1, \dots, e_p)$, qui est une famille libre.
La matrice M est donc inversible (on l'a vu dans II).
Le système est donc de Cramer, de déterminant $G(e_1, \dots, e_p)$. On peut le résoudre par les formules de Cramer :

$$\boxed{x_F = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j e_j, \quad \text{avec } \alpha_j = \frac{\Delta_j}{G(e_1, \dots, e_p)},}$$

où Δ_j est le déterminant obtenu en remplaçant, dans $G(e_1, \dots, e_p)$, la j-ème colonne par la matrice colonne B, qui contient $(e_1 \cdot x), \dots, (e_p \cdot x)$.

III.A.2) C'est du cours :

$$\boxed{d(x, F) = \|x - x_F\| = \|x^\perp\|.}$$

Est-ce la «formule simple» attendue ? Il y en a une autre :
$\|x - x_F\|^2 = (x - x_F) \cdot (x - x_F) = x \cdot (x - x_F) - x_F \cdot (x - x_F) = x \cdot (x - x_F)$ car x_F est orthogonal à $x - x_F$:

$$\boxed{d(x, F)^2 = x \cdot (x - x_F) = x \cdot x^\perp.}$$

III.A.3) L'espace E n'est pas forcément de dimension finie mais quand nous traiterons une question faisant intervenir seulement une famille finie de vecteurs, nous pourrons nous placer dans l'espace de dimension finie engendré par ces vecteurs.

Ainsi, comme la formule du I.B.2 se généralise immédiatement à un espace de dimension finie, nous pouvons dire que si w est orthogonal à $(e_1, \cdots, e_p)$, alors $G(w, e_1, \cdots, e_p) = \|w\|^2 G(e_1, \cdots, e_p)$.
Appliquons la ici : $G(x^\perp, e_1, \cdots, e_p) = \|x^\perp\|^2 G(e_1, \cdots, e_p) = (d(x, F))^2\, G(e_1, \cdots, e_p)$.
De même, la formule du I.C.1) se généralise immédiatement : Si $w = t + n$ avec $t \in F$ et $n \in F^\perp$, alors

$$G(w, e_1, \cdots, e_p) = G(t, e_1, \cdots, e_p) + G(n, e_1, \cdots, e_p) = G(n, e_1, \cdots, e_p),$$

puisque $G(t, e_1, \cdots, e_p) = 0$ (la famille est liée).
Ici, cela donne $G(x, e_1, \cdots, e_p) = G(x^\perp, e_1, \cdots, e_p)$. Rassemblons :
$G(x, e_1, \cdots, e_p) = (d(x, F))^2\, G(e_1, \cdots, e_p)$, et, puisque $G(e_1, \cdots, e_p) \neq 0$,

$$\boxed{d(x, F) = \sqrt{\frac{G(x, e_1, \cdots, e_p)}{G(e_1, \cdots, e_p)}}.}$$

III.B -

III.B.1) Les fonctions p_{λ_i} sont continues sur $[0, 1]$, donc appartiennent à E. $\mathrm{Vect}(p_{\lambda_1}, \dots, p_{\lambda_n})$ est donc bien un sous-espace de E.
Reste à prouver qu'il est de dimension n, autrement dit que $(p_{\lambda_1}, \dots, p_{\lambda_n})$ est un système libre de E.
Supposons donc que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$. Alors
$(\alpha_1 p_{\lambda_1} + \cdots + \alpha_n p_{\lambda_n})(t) = \alpha_1 t^{\lambda_1} + \cdots + \alpha_n t^{\lambda_n} \underset{t \to 0}{\sim} \alpha_k t^{\lambda_k}$, où α_k est le premier α_i non nul. La fonction $\alpha_1 p_{\lambda_1} + \cdots + \alpha_n p_{\lambda_n}$ n'est donc pas la fonction nulle : $(p_{\lambda_1}, \dots, p_{\lambda_n})$ est un système libre de E.

$$\boxed{E_n \text{ est un sous-espace vectoriel de } E, \text{ de dimension } n.}$$

III.B.2) Avec le produit scalaire utilisé, $\displaystyle \int_0^1 \left(t^k - \sum_{i=1}^{n} a_i t^{\lambda_i}\right)^2 dt$ est le carré de la distance de la fonction p_k de E à la fonction $\displaystyle f = \sum_{i=1}^{n} a_i p_{\lambda_i}$ de E_n.
Donc $u_n^k = \inf\left\{\|p_k - f\|^2 \;/\; f \in E_n\right\}$ est le carré de la distance de p_k à E_n. Donc, d'après III.A.3) :

$$\boxed{u_n^k = \frac{G(p_k, p_{\lambda_1}, \dots, p_{\lambda_n})}{G(p_{\lambda_1}, \dots, p_{\lambda_n})}.}$$

III.C -

III.C.1) Puisque la partie entière de $F(X)$ est nulle (le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur) et que les pôles sont simples (les b_i sont deux à deux distincts) on a une décomposition en éléments simples de la forme :

$$F(X) = \frac{(X - a_1)\dots(X - a_{p-1})}{(X + b_1)\dots(X + b_p)} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\gamma_i}{X + b_i}.$$

On obtient γ_i en remplaçant X par $-b_i$ dans $F(X) \times (X + b_i)$: $\displaystyle \gamma_i = \frac{\prod_{1 \leqslant j \leqslant p-1} (-b_i - a_j)}{\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ j \neq i}} (-b_i + b_j)}$

$$\boxed{F(X) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\prod_{1 \leqslant j \leqslant p-1} (a_j + b_i)}{\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ j \neq i}} (b_i - b_j)} \cdot \frac{1}{X + b_i}}$$

III.C.2)

- Premier calcul de D : Dans la dernière colonne de D, les $p-1$ premiers éléments sont nuls. Développons donc D par rapport à cette dernière colonne : $D = F(a_p)\,C(a_1,\dots,a_{p-1},b_1,\dots,b_{p-1})$.
- Deuxième calcul de D : $F(a_q) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{\gamma_j}{a_q+b_j}$. Retranchons donc de la dernière colonne de D la première multipliée par γ_1, etc.., la $p-1$-ième multipliée par γ_{p-1} :

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{p-1}} & \frac{\gamma_p}{a_1+b_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{a_q+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_q+b_{p-1}} & \frac{\gamma_p}{a_q+b_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{a_p+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_p+b_{p-1}} & \frac{\gamma_p}{a_p+b_p} \end{vmatrix} = \gamma_p\, C(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p)$$

En écrivant l'égalité des deux expressions de D et utilisant l'expression de γ_p trouvée au III.C.1) on obtient bien :

$$\boxed{F(a_p)\,C(a_1,\dots,a_{p-1},b_1,\dots,b_{p-1}) = \frac{\prod_{i=1}^{p-1}(a_i+b_p)}{\prod_{i=1}^{p-1}(b_p-b_i)}\,C(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p)}$$

III.C.3) En utilisant la définition de $F(a_p)$, cela donne la formule de récurrence :

$$C(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p) = C(a_1,\dots,a_{p-1},b_1,\dots,b_{p-1}) \times \frac{\prod_{i=1}^{p-1}(b_p-b_i)}{\prod_{i=1}^{p-1}(a_i+b_p)} \times \frac{\prod_{i=1}^{p-1}(a_p-a_i)}{\prod_{j=1}^{p}(a_p+b_j)}$$

Examinons la formule à démontrer :

- Pour $p=1$, elle s'écrit, en convenant qu'un produit vide est égal à 1 :
  $C(a_1,b_1) = \dfrac{1}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant 1}(a_i+b_j)} = \dfrac{1}{a_1+b_1}$ ce qui est juste, puisque $C(a_1,b_1)$ est le déterminant à un seul terme $\dfrac{1}{a_1+b_1}$.
- Supposons-la vraie à l'ordre $p-1$ ($p\geqslant 2$) ; alors, en utilisant la formule de récurrence :

$$C(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p) = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant p-1}(a_j-a_i)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant p-1}(b_j-b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant p-1}(a_i+b_j)} \times \frac{\prod_{i=1}^{p-1}(b_p-b_i)}{\prod_{i=1}^{p-1}(a_i+b_p)} \times \frac{\prod_{i=1}^{p-1}(a_p-a_i)}{\prod_{j=1}^{p}(a_p+b_j)}$$

C'est bien $\dfrac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant p}(a_j-a_i)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant p}(b_j-b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant p}(a_i+b_j)}$ car, dans les deux produits indexés par $1\leqslant i<j\leqslant p-1$, il manque les termes obtenus pour $j=p$ et i variant de 1 à $p-1$ et, dans le produit indexé par $1\leqslant i,j\leqslant p-1$, il manque tous les termes où l'un des deux indices i ou j est égal à p.

On a bien prouvé par récurrence que :

$$\boxed{C(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p) = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant p}(a_j-a_i)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant p}(b_j-b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant p}(a_i+b_j)}.}$$

III.D -

III.D.1) On a, pour i de 0 à n, $p_{\lambda_i}\cdot p_{\lambda_j} = \displaystyle\int_0^1 t^{\lambda_i+\lambda_j}\,dt = \frac{1}{\lambda_i+\lambda_j+1} = \frac{1}{\mu_i+\mu_j}$, puisqu'on a posé $\mu_i = \lambda_i + \frac{1}{2}$.

Les déterminants de Gram $G(p_k,p_{\lambda_1},\dots,p_{\lambda_n})$ et $G(p_{\lambda_1},\dots,p_{\lambda_n})$ sont donc respectivement égaux à $C(\mu_0,\mu_1,\dots,\mu_n,\mu_0,\mu_1,\dots,\mu_n)$ et $C(\mu_1,\dots,\mu_n,\mu_1,\dots,\mu_n)$, même si k est égal à l'un des λ_j, en remarquant, dans III.C-, que, si deux des b_j sont égaux, le déterminant de la matrice de terme général $\dfrac{1}{a_i+b_j}$ est nul et en convenant, dans un tel cas, que $C(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_p)$ est nul.

La formule du III.B.2) donne alors

$$\boxed{u_n^k = \frac{C(\mu_0,\mu_1,\dots,\mu_n,\mu_0,\mu_1,\dots,\mu_n)}{C(\mu_1,\dots,\mu_n,\mu_1,\dots,\mu_n)}}$$

III.D.2) En appliquant la formule du III.C.3), on obtient :

$$\begin{aligned} u_n^k &= \frac{\left[\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(\mu_j-\mu_i)\right]^2}{\prod_{0\leqslant i,j\leqslant n}(\mu_j+\mu_i)} \times \frac{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(\mu_j+\mu_i)}{\left[\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\mu_j-\mu_i)\right]^2} \\ &= \frac{\left[\prod_{1\leqslant j\leqslant n}(\mu_j-\mu_0)\right]^2}{\left[\prod_{1\leqslant i\leqslant n}(\mu_0+\mu_i)\right]\times\left[\prod_{1\leqslant j\leqslant n}(\mu_j+\mu_0)\right]\times(\mu_0+\mu_0)} \\ &= \frac{\left[\prod_{1\leqslant j\leqslant n}(\mu_j-\mu_0)\right]^2}{(2\mu_0)\left[\prod_{1\leqslant j\leqslant n}(\mu_0+\mu_j)\right]^2} = \frac{\left[\prod_{1\leqslant j\leqslant n}(\lambda_j-k)\right]^2}{(2k+1)\left[\prod_{1\leqslant i\leqslant n}(1+k+\lambda_j)\right]^2} = \frac{1}{2k+1}\prod_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\lambda_j-k}{1+k+\lambda_j}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_n^k = \frac{1}{2k+1}\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1+2k}{1+\lambda_i+k}\right)^2}$$

III.E -

III.E.1) $1-\dfrac{2k+1}{1+\lambda_i+k}$ tend vers 1 quand $i\to+\infty$ donc

$$\boxed{\text{Il existe } N>0 \text{ tel que : } \forall i\geqslant N,\ 1-\frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}>0}$$

III.E.2) Il en résulte que $\ln\left(1-\dfrac{2k+1}{1+\lambda_i+k}\right)$ est bien défini pour $i\geqslant N$ et

$$\ln\left(1-\frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}\right) \underset{i\to+\infty}{\sim} -\frac{2k+1}{1+\lambda_i+k} \underset{i\to+\infty}{\sim} -(2k+1)\times\frac{1}{\lambda_i}$$

terme général d'une série divergente par hypothèse.

La suite des sommes partielles diverge donc vers $-\infty$. On en déduit :

$$\boxed{\sum_{i=N}^{n}\ln\left(1-\frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}\right) \text{ tend vers } -\infty \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty.}$$

La formule de III.D - permet de mettre u_n^k sous la forme :

$$u_n^k = \frac{1}{2k+1} \prod_{1\leqslant i<N} \left(1 - \frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}\right) \times \exp\left\{\sum_{i=N}^{n} \ln\left(1 - \frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}\right)\right\}$$

On voit que :

$$\boxed{u_n^k \text{ tend vers } 0 \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty.}$$

III.E.3) Soit $\varepsilon > 0$, on peut, d'après ce qui précède, trouver n tel que $u_n^k < \varepsilon^2$.
Or : $u_n^k = \left\|p_k - \sum_{i=1}^{n} a_i p_{\lambda_i}\right\|^2$ où $\sum_{i=1}^{n} a_i p_{\lambda_i}$ est le projeté orthogonal de p_k sur E_n. Donc :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists a_1, \ldots, a_n \ / \ \left\|p_k - \sum_{i=1}^{n} a_i p_{\lambda_i}\right\| \leqslant \varepsilon}$$

III.E.4) Soit m fixé dans $\mathbb{N}^*$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe un polynôme P_m vérifiant :

$$\|f - P_m\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |f(t) - P_m(t)| \leqslant \frac{1}{m}.$$

En reprenant notre norme euclidienne $\|.\|$, on a, pour une fonction g de E :

$$\|g\| = \sqrt{\int_0^1 |g(t)|^2 dt} \leqslant \sqrt{\|g\|_\infty{}^2} = \|g\|_\infty$$

donc, ici : $\|f - P_m\| \leqslant \dfrac{1}{m}$.

P_m est de la forme : $P_m = \sum_{k=0}^{q} a_k p_k$ (les p_k sont les fonctions monômes.) Pour chaque k qui ne figure pas parmi les λ_i, on peut trouver, d'après III.E.3), un q_k dans l'un des E_n tel que $\|p_k - q_k\|$ soit aussi petit qu'on veut ; si k qui figure parmi les λ_i, on prend $q_k = p_k$.

Par combinaison linéaire, on peut de même rendre $\sum_{k=0}^{q} |a_k|\|p_k - q_k\|$ aussi petit qu'on veut par un bon choix des q_k dans les E_n, et la combinaison linéaire $\sum_{k=0}^{q} a_k q_k$ appartient encore à l'un des E_n (celui qui contient tous les q_k). $\|P_m - \sum_{k=0}^{q} a_k q_k\|$ peut donc être rendu aussi petit qu'on veut par un bon choix des q_k.

En particulier, on peut trouver S_m appartenant à l'un des E_n tel que $\|P_m - S_m\| \leqslant \dfrac{1}{m}$.

Par inégalité triangulaire, cela donne : $\|f - S_m\| \leqslant \dfrac{2}{m}$, qui tend vers 0 quand $m \to +\infty$. La fonction f est, pour la norme euclidienne sur E, limite de la suite S_m et S_m est dans l'un des E_n :

$$\boxed{\text{Toute } f \in E \text{ est limite d'une suite d'éléments de } \bigcup_{n\geqslant 1} E_n.}$$

***

Semaine 10 : Automorphismes orthogonaux

Nous continuons, cette semaine, l'étude des espaces préhilbertiens et nous en venons aux endomorphismes remarquables de tels espaces. Nous étudions essentiellement les automorphismes orthogonaux et les matrices orthogonales. Nous révisons au passage ce qui a été vu en Sup sur la question (principalement ce qui se passe en dimensions 2 et 3).

• **Sujet 29 : Concours Centrale-Supélec 1997 Mathématiques 2 Filière PSI**

Le problème est construit sur le thème des matrices magiques (ou carrés magiques) en commençant par l'utilisation d'un algorithme, simple et efficace, qui permet de remplir un tel carré lorsqu'il est d'ordre impair. On demande de tester cet algorithme sur un exemple simple puis d'écrire un programme permettant de mécaniser le remplissage.

On étudie ensuite la dimension de l'espace des matrices magiques. Un « truc » classique vous permettra d'abréger les calculs : faire apparaître une partie d'un espace vectoriel comme le noyau d'une forme linéaire permet de conclure que cette partie est elle-même un espace vectoriel et donne facilement la dimension.

Après cette étude, classique, de la dimension, le problème vous conduit, et cette partie est sans doute originale, à la détermination complète des matrices magiques orthogonales d'ordre 3, en commençant par les matrices de rotations.

Ce problème, plaisant et assez concret, n'est pas très difficile.

• **Sujet 30 : Concours Communs Polytechniques (« E.N.S.I. ») 1996 Mathématiques 1 Options M et P**

La rédaction du sujet est parfois désagréable car elle comporte beaucoup de digressions, pas toujours très nettes, sur ce qu'on vient de faire, sur ce qu'on va faire, sur ce que l'on sait etc. De plus, l'enchaînement des questions fait penser parfois à un jeu de piste où l'on a l'impression de passer plusieurs fois au même endroit...

Il n'en reste pas moins que le sujet est fort intéressant ; il vise à trouver une forme réduite pour les automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien de dimension 4, en commençant par étudier soigneusement certains d'entre eux (les quarts de tour).

De plus, le problème utilise une bonne partie du programme d'algèbre linéaire. Il vous obligera aussi à faire le point sur la question de l'orientation d'un espace vectoriel réel, question facile et pourtant souvent mal digérée.

La formulation est, nous l'avons dit, parfois déroutante mais il n'y a pas d'erreur dans l'énoncé. L'ensemble du problème est assez difficile.

• **Sujet 31 : École Polytechnique et E.S.P.C.I. 1998 Mathématiques 1 Filière PC**

Ce problème est assez court, progressif dans la difficulté, mais plutôt difficile dans l'ensemble.

On y étudie une forme bilinéaire symétrique, qui n'est pas nécessairement un produit scalaire ; au départ, donc, on a un problème qui serait plus dans l'esprit MP que dans l'esprit PC, puisque, dans cette dernière filière, on ne s'attarde pas sur les formes bilinéaires et l'on en vient vite aux produits scalaires.

En fait, les restrictions, à certains plans, de la forme bilinéaire utilisée sont des produits scalaires et l'on utilise alors des rotations de ces plans ; sans que cela diminue la difficulté, on se retrouve alors sur un terrain mieux connu.

CENTRALE - SUPÉLEC 1997	Filière PSI
Mathématiques 2	Durée : 4 heures

Dans tout le problème, n est un entier strictement supérieur à 1 et $M_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Si M est une telle matrice, ${}^tM$ désigne la matrice transposée.

À une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ de coefficients $m_{i,j}$, on associe les $2n$ sommes

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} \quad \text{et} \quad \beta_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$$

obtenues pour i et j variant de 1 à n (γ_j est la somme des éléments de la j-ème colonne et β_i celle des éléments de la i-ème ligne). Si ces $2n$ sommes sont égales, M est dite «pseudo-magique». On notera $s(M)$ la valeur commune à ces $2n$ sommes.

Si M est pseudo-magique et si

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,i} = s(M)$$

M est dite «quasi-magique». Enfin, si M est quasi-magique et si

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,n-i+1} = s(M)$$

M est dite «magique».

Partie I - Exemples de matrices magiques d'ordre impair

On propose ici un algorithme permettant d'obtenir une matrice magique d'ordre n impair quelconque et dont les coefficients sont les entiers $1, 2, 3, \ldots, n^2$.

On place l'entier 1 au milieu de la première ligne. On suppose par récurrence que les k premiers entiers ont été placés et que l'entier k a été placé en i-ème ligne et j-ème colonne. On place alors l'entier $k+1$ en respectant les règles suivantes :

- on pose $I = i - 1$ (sauf si $i = 1$ auquel cas on pose $I = n$) et $J = j + 1$ (sauf si $j = n$, auquel cas on pose $J = 1$) ;
- si aucun nombre n'a encore été placé à la I-ème ligne et J-ème colonne, on y place $k+1$;
- si cet emplacement est pris, on pose $I = i + 1$ (sauf si $i = n$, auquel cas on pose $I = 1$) et $J = j$ et on place $k+1$ en I-ème ligne et J-ème colonne.

I.A - Pour $n = 5$, construire une matrice magique en utilisant l'algorithme précédent.

I.B - La constante impaire n étant supposée prédéfinie, écrire un programme qui construise, en suivant l'algorithme précédent, une matrice magique d'ordre n. Le langage utilisé pour la programmation est au choix du candidat.

Partie II - Matrices magiques d'ordre n

II.A - Montrer que, pour définir une matrice pseudo-magique, on peut choisir arbitrairement les coefficients $m_{i,j}$ pour tout i et tout j entre 1 et $n-1$ ainsi que le coefficient $m_{1,n}$.

II.B - Montrer que l'ensemble des matrices pseudo-magiques forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont on déterminera la dimension.

II.C - Exhiber une matrice pseudo-magique qui ne soit pas quasi-magique.

II.D - Montrer que l'ensemble des matrices quasi-magiques forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont on déterminera la dimension en utilisant le résultat de la question II.B. On remarquera que l'application qui, à une matrice M, associe

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,1} - \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$$

est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

II.E - Exhiber de même une matrice quasi-magique qui ne soit pas magique et montrer que l'ensemble des matrices magiques forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont on déterminera la dimension.

Partie III - Matrices magiques d'ordre 3

Dans les parties III et IV, E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormée directe $\mathscr{E} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et M est une matrice magique. On note u l'endomorphisme de E qui admet M comme matrice dans la base $\mathscr{E}$. On désigne par $\vec{v}$ le vecteur de composantes $(1, 1, 1)$ dans la base $\mathscr{E}$.

III.A - Montrer que les matrices magiques d'ordre 3 sont les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} x+z & -x+y+z & -y+z \\ -x-y+z & z & x+y+z \\ y+z & x-y+z & -x+z \end{pmatrix},$$

où x, y et z sont des réels quelconques. Montrer qu'il existe une et une seule matrice magique dont la première ligne est $(3, 4, 5)$, et écrire cette matrice M_0.

III.B - Montrer que le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur propre de M. Préciser la valeur propre associée λ_1.

III.C - On note λ_2 et λ_3 les deux autres valeurs propres (réelles ou complexes, distinctes ou non) de la matrice M. Écrire les termes de degrés 3 et 2 du polynôme caractéristique de M ; calculer la somme des trois valeurs propres de M en fonction des coefficients diagonaux de M. En déduire que λ_2 et λ_3 sont opposées.

III.D - Former une équation cartésienne du plan vectoriel Π orthogonal à $\vec{v}$ et montrer que ce plan est stable par u.

III.E -

III.E.1) - Préciser la direction du vecteur $u(\vec{\imath} - \vec{k})$ par rapport à celle de $\vec{v}$.

III.E.2) - Montrer que $u(\vec{\imath} - \vec{k})$ est orthogonal à $\vec{\imath} - \vec{k}$.

Partie IV - Étude de certaines matrices magiques d'ordre 3

Pour W, sous-espace vectoriel de E, on note $W^{\perp}$ l'orthogonal de W dans E, l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de W ; $W^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E supplémentaire de W. Par définition la symétrie orthogonale par rapport à W est la symétrie par rapport à W parallèlement à $W^{\perp}$. Un retournement (ou demi-tour) est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

IV.A - *Étude préliminaire des symétries orthogonales*
Soient f un endomorphisme de E et S la matrice de f dans $\mathscr{E}$.

On pourra admettre que, si S est symétrique, les sous-espaces propres de f, s'il y en a plusieurs, sont deux à deux orthogonaux (on verra cela dans le cours de la semaine prochaine.)

IV.A.1) Montrer que, pour que f soit une symétrie orthogonale par rapport à un certain sous-espace vectoriel W, il faut et il suffit que S soit à la fois symétrique et orthogonale.

IV.A.2) On suppose que f est une symétrie orthogonale. Quelles sont les valeurs propres possibles (réelles ou complexes) pour S ? Montrer que la symétrie orthogonale f est un retournement si et seulement si la trace de S est -1.

IV.B - *Étude préliminaire des rotations*

Soit $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ une autre base orthonormée directe de E ; soient θ un réel de l'intervalle $]-\pi, +\pi[$ et ρ la rotation d'angle θ autour de $\vec{K}$.

IV.B.1) Écrire la matrice R de ρ sur la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. Quelles sont ses valeurs propres (réelles ou complexes) ?

IV.B.2) Pour quelles valeurs de θ deux de ces valeurs propres sont-elles opposées ? Pour chacune de ces valeurs de θ, donner la liste des valeurs propres de la matrice R avec leur ordre de multiplicité.

IV.B.3) Soit $\vec{w}$ un vecteur quelconque.

IV.B.3)a) Pour $\theta = \pi/2$, montrer que $\rho(\vec{w})$ est le vecteur $(\vec{w}.\vec{K})\,\vec{K} - (\vec{w} \wedge \vec{K})$ où $\vec{w}.\vec{K}$ désigne le produit scalaire de $\vec{w}$ et de $\vec{K}$, et $\vec{w} \wedge \vec{K}$ leur produit vectoriel.

IV.B.3)b) Trouver une écriture analogue dans le cas $\theta = -\pi/2$.

IV.C - *Matrices magiques de rotation*

On suppose que u est une rotation mais n'est pas un retournement.

IV.C.1) Montrer que l'axe de cette rotation u est nécessairement la droite dirigée par $\vec{v}$. Quelles sont les valeurs possibles de l'angle θ de u ?

IV.C.2) En utilisant IV.B.3., chercher, suivant la valeur de θ, l'image par u du vecteur dont les composantes sur $\mathscr{E}$ sont (x_1, x_2, x_3). En déduire toutes les matrices magiques pour lesquelles u est une rotation mais n'est pas un retournement.

IV.D - *Matrices magiques orthogonales*

IV.D.1) Trouver toutes les matrices magiques M telles que u est un retournement. On cherchera M sous la forme vue en III.A en déterminant les nombres x, y et z.

IV.D.2) Préciser l'ensemble des matrices magiques orthogonales de déterminant égal à 1.

IV.D.3) Préciser l'ensemble des matrices magiques orthogonales de déterminant égal à -1 (on remarquera que si M est magique, $-M$ l'est aussi).

Partie V - Matrices magiques symétriques d'ordre n

On suppose maintenant que M est une matrice magique symétrique de $M_n(\mathbb{R})$.

V.A - Montrer que le vecteur colonne dont les n coefficients sont égaux à 1 est vecteur propre de M. Quelle est la valeur propre associée ?

V.B - Déterminer un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ stable par l'endomorphisme u associé à M.

V.C - Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D ayant les propriétés suivantes :

- les termes de la première colonne de P sont tous égaux entre eux ;
- le premier terme diagonal de D est $s(M)$ et la trace de D est aussi $s(M)$;
- $M = P\,D\,{}^tP$.

On pourra laisser cette question V.C - de côté tant qu'on n'a pas étudié les matrices symétriques réelles.

***

CENTRALE - SUPÉLEC 1997	Filière PSI
Mathématiques 2	**CORRIGÉ**

Partie I - Exemples de matrices magiques d'ordre impair

I.A - Pour $n = 5$, on obtient

$$M = \begin{pmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

M est bien magique avec $s(M) = 65$.

I.B - On a écrit le programme sous forme d'une procédure Maple. On pourra le tester en tapant «evalm(magique(5)) ;».

```
magique : =proc(n)
local M, i, j, I, J, k;
M : = matrix(n, n, 0);
i : = 1; j : = (n + 1)/2;
for k to n^2 do
    M[i, j] : = k;
    if i = 1 then I : = n else I : = i - 1 fi ;
    if j = n then J : = 1 else J : = j + 1 fi ;
    if M[I, J] = 0 then i : = I; j : = J else i : = i + 1 fi ;
    if i = n + 1 then i : = 1 fi ;
    od ;
RETURN(M);
end ;
```

Remarques

- L'appel de «$matrix(n, n, 0)$» crée une matrice nulle. Cette initialisation de la matrice est indispensable si l'on veut ultérieurement tester la non-occupation d'un emplacement.
- On pourrait simplifier le programme, mais cela le rendrait moins lisible, en utilisant judicieusement «$irem(x, n)$», qui donne le reste de la division euclidienne de x par n, ce qui éviterait les tests sur i et j.

Partie II - Matrices magiques d'ordre n

II.A - Si $m_{i,j}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1, 1 \leqslant j \leqslant n-1)$ et $m_{1,n}$ sont fixés, alors $\beta_1 = \sum_{j=1}^{n} m_{1,j}$ est fixé.

Pour que γ_j soit égal à β_1 pour tout j de 1 à $n-1$, il faut fixer les $m_{n,j}$ à la valeur $\beta_1 - \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,j}$.

Ensuite, pour que β_i soit égal à β_1 pour tout i de 2 à n, il faut fixer les $m_{i,n}$ à la valeur $\beta_1 - \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,j}$.

On a alors $m_{i,n} = \beta_1 - \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,j}$, y compris pour $i = 1$.

La matrice M est alors complètement déterminée. Il ne reste plus à vérifier, pour s'assurer qu'elle est pseudo-magique, que $\gamma_n = \beta_1$.

Or $\gamma_n = \sum_{i=1}^{n} m_{i,n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\beta_1 - \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,j}\right) = n\beta_1 - \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} m_{i,j}\right) = n\beta_1 - \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}\right)$.

On a choisi les $m_{n,j}$ pour que, pour tout j de 1 à $n-1$, $\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}$ soit égal à β_1.

On a donc $\gamma_n = n\beta_1 - (n-1)\beta_1 = \beta_1$, ce qu'on voulait.

Pour définir une matrice pseudo-magique, on peut choisir arbitrairement les coefficients $m_{i,j}$ pour tout i et tout j entre 1 et $n-1$, ainsi que $m_{1,n}$.

II.B - Pour une matrice M quelconque, notons $\gamma_j(M)$ la somme des termes de la j-ième colonne et $\beta_i(M)$ la somme des termes de la i-ième ligne.
Pour tous i et j de 1 à n, on a clairement $\gamma_j(M+N) = \gamma_j(M) + \gamma_j(N)$ et $\gamma_j(\alpha M) = \alpha\gamma_j(M)$: les γ_j sont des formes linéaires sur $M_n(\mathbb{R})$, de même pour les β_i donc pour les $\gamma_j - \beta_i$.
D'autre part, M est pseudo-magique si et seulement si $\gamma_j(M) = \beta_i(M)$ pour tous i et j de 1 à n, donc si M appartient à l'intersection des noyaux des diverses formes $\gamma_j - \beta_i$, ce qui assure déjà la structure d'espace vectoriel pour l'ensemble des matrices pseudo-magiques.
Ensuite, l'application qui à une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ associe l'élément de $\mathbb{R}^{(n-1)^2+1}$ formé des $m_{i,j}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1, 1 \leqslant j \leqslant n-1)$ et de $m_{1,n}$ est visiblement linéaire. D'après II.A, la restriction de cette application au sous-espace de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices pseudo-magiques est bijective ; c'est donc un isomorphisme entre cet espace et $\mathbb{R}^{(n-1)^2+1}$. Il résulte de tout cela que

$$\boxed{\text{L'ensemble des matrices pseudo-magiques est un espace vectoriel sur } \mathbb{R}\text{, de dimension } n^2-2n+2.}$$

II.C - Pour la matrice identité d'ordre n, la somme des termes d'une même ligne ou d'une même colonne vaut 1.
Par contre la somme des termes diagonaux vaut n, qui est différent de 1.

$$\boxed{\text{La matrice identité d'ordre } n \text{ est pseudo-magique mais pas quasi-magique.}}$$

II.D - Reprenons les notations de II.B et introduisons une nouvelle forme linéaire t, la trace (ou somme des termes diagonaux), sur $M_n(\mathbb{R})$. Parmi les matrices pseudo-magiques, les matrices quasi-magiques sont celles pour lesquelles les $\gamma_j(M)$ et $\beta_i(M)$, déjà égaux entre eux, sont en outre égaux à $t(M)$, donc vérifient $\gamma_1(M) - t(M) = 0$. L'ensemble des matrices quasi-magiques est donc le noyau de la forme linéaire φ, restriction de la forme $\gamma_1 - t$ à l'espace des pseudo-magiques, ce qui assure déjà la structure d'espace vectoriel pour l'ensemble des matrices quasi-magiques.
De plus, le noyau de φ n'est pas l'espace des pseudo-magiques tout entier puisqu'il existe des matrices pseudo-magiques qui ne sont pas quasi-magiques. φ n'est donc pas la forme nulle. Son noyau est donc un hyperplan de l'espace des pseudo-magiques. Résumons :

$$\boxed{\text{L'ensemble des matrices quasi-magiques forme un espace vectoriel sur } \mathbb{R} \text{ de dimension } n^2-2n+1.}$$

II.E - Traitons à part le cas $n = 2$. La matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est quasi-magique si et seulement si $a+b = c+d = a+c = b+d = a+d$ ce qui ne peut se faire que si $a = b = c = d$; la matrice est alors magique. Il n'y a donc pas de matrice quasi-magique non magique. Les deux espaces sont confondus, de dimension 1.
Supposons maintenant $n \geqslant 3$ et introduisons encore une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$, notée a (« l'antitrace »), où $a(M)$ est la somme des termes de M situés sur la deuxième diagonale. Parmi les matrices quasi-magiques, les magiques sont celles pour lesquelle $t(M) = a(M) (= s(M))$. Si ψ est la restriction à l'espace vectoriel des quasi-magiques de la forme linéaire $t - a$, l'ensemble des matrices magiques est donc le noyau de ψ, ce qui assure déjà la structure d'espace vectoriel pour l'ensemble des matrices magiques.
Donnons maintenant un exemple de matrice quasi-magique qui ne soit pas magique.

Pour $n = 3$, on peut fournir l'exemple $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, visiblement quasi-magique et non magique.

Pour $n \geqslant 4$, on peut fournir $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. Il n'y a que des zéros sur la diagonale, donc la somme des termes d'une même ligne, d'une même colonne et la trace sont nulles ; par contre l'antitrace n'est pas nulle. Cette matrice est quasi-magique et non magique.
Pour $n \geqslant 3$, la forme ψ est donc non nulle : L'ensemble des matrices magiques est donc un hyperplan de l'espace des quasi-magiques. Donc

$$\boxed{\text{Pour } n \geqslant 3\text{, l'ensemble des matrices magiques forme un espace vectoriel sur } \mathbb{R} \text{ de dimension } n^2-n.}$$

Partie III - Matrices magiques d'ordre 3

III.A - L'ensemble de matrices proposé est le sous-espace de $M_3(\mathbb{R})$ engendré par les trois matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ces trois matrices forment une famille libre. En effet, la nullité de $xA + yB + zC$, qui est la matrice proposée, nécessite $z = 0$ (à cause du terme central) puis $x = 0$ et $y = 0$ (à cause du premier et du dernier terme de la première ligne).
Ces trois matrices étant effectivement magiques, cet ensemble est donc un sous-espace vectoriel de l'espace des matrices magiques, de dimension 3. Comme l'espace des matrices magiques d'ordre 3 est de dimension 3, ce sous-espace est l'espace entier.

$$\boxed{\text{Les matrices magiques d'ordre 3 sont les matrices } \begin{pmatrix} x+z & -x+y+z & -y+z \\ -x-y+z & z & x+y+z \\ y+z & x-y+z & -x+z \end{pmatrix},}$$

où x, y et z sont des réels quelconques.

On cherche maintenant x, y et z tels que $\begin{cases} x+z &= 3 \\ -x+y+z &= 4 \\ -y+z &= 5 \end{cases}$. En ajoutant membre à membre les équations, on voit que cela nécessite $3z = 12$, donc $z = 4$, puis $x = -1$ et $y = -1$, d'où

$$\boxed{\text{l'unique possibilité } M_0 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \text{ qui est effectivement magique.}}$$

III.B - Si $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $u(\vec{v})$ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ d+e+g \\ g+h+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(M) \\ s(M) \\ s(M) \end{pmatrix} = s(M) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ matrice de } s(M)\vec{v} \text{ donc}$$

$$\boxed{\text{le vecteur } \vec{v} \text{ est un vecteur propre de } M\text{, associé à la valeur propre } \lambda_1 = s(M),}$$

c'est-à-dire $3z$ si l'on prend M sous la forme vue dans III.A -.

III.C - On sait que, d'une façon générale, le polynôme caractéristique $\det(XI_n - M)$ d'une matrice M carrée d'ordre n est de la forme $X^n - (\text{trace}(M))X^{n-1} + \ldots$
Ici $n = 3$ et M est magique, donc $\text{trace}(M) = s(M)$ donc

$$\boxed{\text{Le polynôme caractéristique de } M \text{ est } X^3 - (s(M))X^2 + \ldots.}$$

On sait aussi que :

$$\boxed{\text{La somme des trois valeurs propres de } M \text{ est la somme des coefficients diagonaux de } M.}$$

Si on note λ_2 et λ_3 les deux autres valeurs propres (réelles ou complexes, distinctes ou non) de la matrice M, on a donc $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{trace}(M) = s(M) = \lambda_1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \lambda_2 \text{ et } \lambda_3 \text{ sont opposées.}}$$

III.D - Le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées X, Y, Z dans la base orthonormée $\mathscr{E}$ est orthogonal à $\vec{v}$ si et seulement si son produit scalaire $X + Y + Z$ avec $\vec{v}$ est nul.

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan vectoriel } \Pi \text{ orthogonal à } \vec{v} \text{ est donc : } X+Y+Z=0.}$$

En reprenant la notation de III.B pour la matrice magique M, l'image par u du vecteur $\vec{w}$, de coordonnées X, Y, Z, a pour coordonnées $aX + bY + cZ, dX + eY + fZ$ et $gX + hY + iZ$. La somme des coordonnées de $u(\vec{w})$ est donc $(a+d+g)X+(b+e+h)Y+(c+f+i)Z = s(M)(X+Y+Z)$. Si $\vec{w} \in \Pi$, alors la somme $X+Y+Z$ de ses coordonnées est nulle. La somme des coordonnées de $u(\vec{w})$ est donc nulle aussi donc $u(\vec{w}) \in \Pi$.

$$\boxed{\text{Ce plan } \Pi \text{ est stable par } u.}$$

III.E - Sur la base $\mathscr{E}$, $\vec{\imath}-\vec{k}$ a pour matrice $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. Si l'on utilise la forme de M vue dans III.A, $u(\vec{\imath}-\vec{k})$ a pour matrice $\begin{pmatrix}x+z & -x+y+z & -y+z\\ -x-y+z & z & x+y+z\\ y+z & x-y+z & -x+z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\-2(x+y)\\x+y\end{pmatrix}$, colinéaire au vecteur de matrice $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, lui-même orthogonal à $\vec{v}$ et $\vec{\imath}-\vec{k}$, donc

$$\boxed{u(\vec{\imath}-\vec{k}) \text{ est orthogonal à } \vec{v} \text{ et à } \vec{\imath}-\vec{k}.}$$

On pouvait aussi utiliser le fait que $\vec{\imath}-\vec{k}$ appartient à Π et que Π est stable par u.

Partie IV - Étude de certaines matrices magiques d'ordre 3

IV.A - *Étude préliminaire des symétries orthogonales*

Soient f un endomorphisme de E et S la matrice de f dans la base orthonormée $\mathscr{E}$.

IV.A.1) Pour que f soit une symétrie, il faut et il suffit que sa matrice S vérifie $S^2 = I$, ou encore $S^{-1} = S$.

Pour que f soit un endomorphisme orthogonal, il faut et il suffit, puisque la base est orthonormée, que S soit une matrice orthogonale, c'est-à-dire que $S\,{}^tS = I$, ou encore $S^{-1} = {}^tS$.

- Si f est une symétrie orthogonale (donc en particulier un endomorphisme orthogonal), on a donc $S = S^{-1} = {}^tS$ donc $S = {}^tS$. La matrice S est à la fois symétrique et orthogonale.
- Supposons réciproquement que S soit à la fois symétrique et orthogonale. On a donc $S = {}^tS = S^{-1}$ donc $S = S^{-1}$ donc f est une symétrie. Les deux sous-espaces supplémentaires W et W' associés à cette symétrie sont, s'ils ne sont pas réduits au vecteur nul, sous-espaces propres de f (associés aux valeurs propres 1 et -1) ; mais f est en outre autoadjoint car sa matrice S dans une base orthonormée est symétrique ; les sous-espaces propres sont donc deux à deux orthogonaux. W' est donc le supplémentaire orthogonal de W ; f est donc une symétrie orthogonale. Résumons :

$$\boxed{f \text{ est une symétrie orthogonale si et seulement si } S \text{ est à la fois symétrique et orthogonale.}}$$

IV.A.2) On suppose que f est une symétrie orthogonale, par exemple par rapport au sous-espace W. Concaténons une base orthonormée de W et une base orthonormée de $W^\perp$ pour obtenir une base orthonormée $\mathscr{B}'$ de E.

La matrice D de f sur cette base est diagonale, avec des 1 puis des -1 sur la diagonale. Puisque D et S sont semblables,

$$\boxed{\text{les seules valeurs propres possibles (réelles ou complexes) pour } S \text{ sont } 1 \text{ et } -1.}$$

Si k est la dimension de W (de 0 à 3), la trace de D (donc de f et de S) est $k.1+(3-k).(-1) = 2k-3$; elle vaut -1 si et seulement si $k=1$, donc si W est une droite, donc si f est un retournement.

$$\boxed{f \text{ est un retournement si et seulement si la trace de } S \text{ est } -1.}$$

IV.B - *Étude préliminaire des rotations*

Soit $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ une autre base orthonormée directe de E ; soient θ un réel de l'intervalle $]-\pi,+\pi[$ et ρ la rotation d'angle θ autour de $\vec{K}$.

IV.B.1) C'est du cours : La matrice demandée est

$$\boxed{R = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \text{ Ses valeurs propres sont : } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = e^{i\theta} \text{ et } \lambda_3 = e^{-i\theta}.}$$

IV.B.2) Puisque $\theta \in]-\pi,+\pi[$, on ne peut avoir ni $\lambda_2 = -\lambda_1$, ni $\lambda_3 = -\lambda_1$. Par contre, $\lambda_2+\lambda_3 = 0$, qui équivaut à $e^{i\theta}+e^{-i\theta} = 0$ donc à $\cos\theta = 0$, est possible pour $\theta = \pi/2$ et $\theta = -\pi/2$. Dans l'un ou l'autre des deux cas, on obtient trois valeurs propres distinctes 1, i et $-i$, qui sont donc de multiplicité 1.

$$\boxed{R \text{ a deux valeurs propres opposées pour } \theta = \pi/2 \text{ et } \theta = -\pi/2, \text{ égales à } 1, i \text{ et } -i \text{ ; elles sont simples.}}$$

IV.B.3) Soit $\vec{w}$ un vecteur quelconque.

IV.B.3)a) Si $\theta = \pi/2$ et si $\vec{w} = a\vec{I}+b\vec{J}+c\vec{K}$, on a

d'une part $\rho(\vec{w}) = a\rho(\vec{I})+b\rho(\vec{J})+c\rho(\vec{K}) = a\vec{J}-b\vec{I}+c\vec{K}$

et d'autre part $(\vec{w}.\vec{K})\,\vec{K}-(\vec{w}\wedge\vec{K}) = c\vec{K}-\left(a\vec{I}\wedge\vec{K}+b\vec{J}\wedge\vec{K}+c\vec{K}\wedge\vec{K}\right) = c\vec{K}+a\vec{J}-b\vec{I}$:

$$\boxed{\rho(\vec{w}) \text{ est le vecteur } (\vec{w}.\vec{K})\,\vec{K}-(\vec{w}\wedge\vec{K}).}$$

IV.B.3)b) Si $\theta = -\pi/2$, on a

d'une part $\rho(\vec{w}) = a\rho(\vec{I})+b\rho(\vec{J})+c\rho(\vec{K}) = -a\vec{J}+b\vec{I}+c\vec{K}$

et d'autre part $(\vec{w}.\vec{K})\,\vec{K}+(\vec{w}\wedge\vec{K}) = c\vec{K}+\left(a\vec{I}\wedge\vec{K}+b\vec{J}\wedge\vec{K}+c\vec{K}\wedge\vec{K}\right) = c\vec{K}-a\vec{J}+b\vec{I}$:

$$\boxed{\rho(\vec{w}) \text{ est le vecteur } (\vec{w}.\vec{K})\,\vec{K}+(\vec{w}\wedge\vec{K}).}$$

IV.C - *Matrices magiques de rotation*

IV.C.1) u est une rotation et sa matrice M sur $\mathscr{E}$ est magique : d'après III.C, elle a donc deux valeurs propres opposées. u n'est pas un retournement, donc on peut considérer que l'angle θ de u est dans $]-\pi,+\pi[$; on peut donc appliquer IV.B : les deux valeurs propres opposées sont nécessairement i et $-i$, l'angle ne peut être que $\pi/2$ ou $-\pi/2$, 1 est valeur propre simple et c'est la seule valeur propre réelle de M. Le sous-espace propre pour u associé à la valeur propre 1, c'est-à-dire l'axe de la rotation, est donc de dimension 1 et c'est le seul sous-espace propre. Il est nécessairement dirigé par $\vec{v}$, dont on sait qu'il est vecteur propre. Résumons :

$$\boxed{\text{L'axe de l rotation } u \text{ est la droite dirigée par } \vec{v}. \text{ L'angle } \theta \text{ de } u \text{ vaut } \pi/2 \text{ ou } -\pi/2.}$$

IV.C.2) $\vec{K}$ est l'un des deux vecteurs normés dans la direction de $\vec{v}$.

- Si l'on prend $\vec{K} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k})$, $u(\vec{w})$ a pour matrice : $\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}x_2-x_3\\x_3-x_1\\x_1-x_2\end{pmatrix}$;

(on a appliqué les formules de IV.B.3) En regroupant les x_1, les x_2 et les x_3, on fait apparaître la matrice de u. Il y a deux résultats possibles suivant le choix du « $\pm$ », c'est-à-dire le choix de θ :

$$M_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3}\\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3}\\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1\end{pmatrix} \quad\text{et}\quad M_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3}\\ 1-\sqrt{3} & 1 & 1+\sqrt{3}\\ 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$$

- Si l'on prend $\vec{K} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k})$, il faut remplacer $\vec{K}$ par $-\vec{K}$, ce qui revient à changer le signe du « $\pm$ » ; on va donc retrouver globalement les deux mêmes matrices.

On a fait en sorte que ce soient des matrices de rotations non retournements ; il n'y a donc pas de vérification à faire à cet égard ; par contre, il faut vérifier qu'elles sont magiques, ce qui est facile. Résumons :

$$\boxed{\text{Les matrices magiques telles que } u \text{ est une rotation mais pas un retournement sont } M_1 \text{ et } M_2 \text{ précédentes.}}$$

On pouvait trouver ces deux matrices d'une autre façon, rendant inutile la question IV.B.3), en cherchant x, y et z pour que la matrice magique « générale » convienne : déjà, l'unique valeur propre réelle est 1, ce qui fournit z ; ensuite on écrit, en utilisant les calculs de III.E, que $u(\vec{\imath}-\vec{k})$ et $u\circ u(\vec{\imath}-\vec{k})$ ont la même norme que $\vec{\imath}-\vec{k}$, ce qui fournit $x+y$ et $x-y$. On en déduit deux matrices magiques et III.E nous assure que ce sont des matrice de rotations. Il n'y a donc plus de vérification à faire.

IV.D - *Matrices magiques orthogonales*

IV.D.1) Si la matrice magique M est telle que u est un retournement, on a, d'après IV.A.2), $\mathrm{tr}(M) = 3z = -1$ donc $z = -1/3$. D'après IV.A.1, M est symétrique, donc $y = 0$, et orthogonale, ce qui se traduit par l'unique condition : $(x-1/3)^2+(-x-1/3)^2+(-1/3)^2 = 1$, qui équivaut à $x = \pm\sqrt{3}/3$.

Grâce aux réciproques de IV.A, ces choix nous assurent que les deux matrices magiques obtenues sont bien des matrices de retournements.
D'où les matrices magiques de retournements :

$$\boxed{M_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 & -\sqrt{3}-1 & -1 \\ -\sqrt{3}-1 & -1 & \sqrt{3}-1 \\ -1 & \sqrt{3}-1 & -\sqrt{3}-1 \end{pmatrix} \text{ et } M_4 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\sqrt{3}-1 & \sqrt{3}-1 & -1 \\ \sqrt{3}-1 & -1 & -\sqrt{3}-1 \\ -1 & -\sqrt{3}-1 & \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}}$$

IV.D.2) Les matrices orthogonales de déterminant égal à 1 sont les matrices de rotations (retournements ou pas) donc :

> Les matrices magiques orthogonales de déterminant égal à 1 sont M_1, M_2 M_3 et M_4.

IV.D.3) Il est clair que si M est magique de somme s, $-M$ est aussi magique, et de somme $-s$.
On sait aussi que si M est orthogonale, $-M$ l'est aussi.
Enfin, $\det(-M) = (-1)^n \det(M) = -\det(M)$ puisque $n = 3$.
En rassemblant tout cela, on voit que M est magique orthogonale de déterminant -1 si et seulement si $-M$ est magique orthogonale de déterminant 1 donc si et seulement si $-M$ est l'une des quatre matrices précédentes. Donc :

> Les matrices magiques orthogonales de déterminant égal à -1 sont $-M_1$, $-M_2$, $-M_3$ et $-M_4$.

Partie V - Matrices magiques symétriques d'ordre n

On suppose maintenant que M est une matrice magique symétrique de $M_n(\mathbb{R})$.

V.A - Si V le vecteur colonne dont les n coefficients sont égaux à 1, la matrice colonne MV a sur sa i-ème ligne la somme β_i des termes de la i-ème ligne, soit $s(M)$ puisque M est magique. Donc $MV = s(M)V$ donc :

> V vecteur propre de M associé à la valeur propre 1.

V.B - Considérons l'hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ d'équation $x_1 + \ldots + x_n = 0$. Un vecteur X de $\mathbb{R}^n$ appartient donc à H si et seulement si la somme de ses coefficients $x_1 + \ldots + x_n$ est nulle.
Un tel vecteur est transformé par u en le vecteur MX, dont les coefficients sont
$m_{11}x_1 + \ldots + m_{1n}x_n, \ldots, m_{n1}x_1 + \ldots + m_{nn}x_n$.
En factorisant $x_1, \ldots, x_n$ dans la somme de ces coefficients, on obtient $s(M)x_1 + \ldots + s(M)x_n$, égal à $s(M)(x_1 + \ldots + x_n)$, qui est nul. Le vecteur MX est donc lui aussi dans H :

> L' hyperplan H est stable par l'endomorphisme u associé à M.

V.C - La matrice M est symétrique réelle donc diagonalisable sous la forme $M = PD\,{}^tP$, où P est matrice orthogonale dont les colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et sont des vecteurs propres de M.
De plus, cette base orthonormée peut être obtenue en concaténant, dans un ordre quelconque, des bases orthonormées quelconques de chacun des sous-espaces propres. On peut ainsi s'arranger pour que le premier vecteur de base soit le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}$ qui est normé et vecteur propre de M. Il formera la première colonne de P, qui aura donc tous ses termes égaux.
Le premier terme de D sera la valeur propre $s(M)$ associée à ce vecteur propre.
Enfin, les matrices M et D étant semblables, D aura pour trace la trace de M, qui est $s(M)$ puisque M est magique.

> On peut mettre M sous la forme $PD\,{}^tP$, où P et D ont les propriétés requises.

***

Groupe Concours Polytechniques («E.N.S.I.») 1996	Options M et P
Mathématiques 1	Durée : 4 heures

Présentation du problème

Ce problème a pour but d'étudier le groupe G des endomorphismes orthogonaux de déterminant $+1$ d'un espace euclidien de dimension 4 sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. La méthode choisie pour cette étude est fondée sur les propriétés des quarts de tour, dont la définition est donnée au début de la partie A de ce problème ; la partie B est consacrée à des propriétés des quarts de tour plus subtiles que celles déjà traitées dans A ; et leurs conséquences pour le groupe G apparaissent dans la partie finale C.

Les notations suivantes sont utilisées tout au long du problème. L'application identique de E est notée id, tandis que la matrice unité d'ordre 4 est notée I ; Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $x.y$; la norme (ou longueur) $\sqrt{x.x}$ du vecteur x est notée $||x||$. L'ensemble des vecteurs normés (ou unitaires) u est noté U ; il est clair que $g(U) = U$ pour tout g dans G. L'ensemble des bases orthonormées de E est noté $\mathscr{B}$. Les sous-espaces vectoriels de dimensions $1, 2, 3$ sont respectivement appelés droites, plans, hyperplans.

Vous pouvez considérer les assertions suivantes comme connues ou évidentes et vous dispenser de toute démonstration à leur sujet. Un sous-espace vectoriel E' de E est dit invariant par l'endomorphisme orthogonal g si $g(E') = E'$; cette égalité est équivalente à l'inclusion $g(E') \subset E'$, puisque g est bijectif ; si g laisse E' invariant, il laisse aussi invariant son orthogonal E'', et son déterminant est égal au produit des déterminants de ses restrictions à E' et E''. L'orthogonal d'une droite (resp. d'un plan, d'un hyperplan) est un hyperplan (resp. un plan, une droite). Étant données deux bases orthonormées, il existe un unique endomorphisme orthogonal qui transforme la première en la seconde.

On vous recommande de faire des calculs clairs et lisibles, d'autant plus qu'il n'est nulle par indispensable de faire de longs calculs. On préfère que vous ne recopiez aucune partie de l'énoncé, mais que vous mettiez en évidence les numéros des questions traitées, en les écrivant en entier, c'est-à-dire A1, A2a,A2b,A3a,A3b, etc.

A) Les quarts de tour

> La notion d'adjoint d'un endomorphisme facilite la résolution des questions A1) et A4a). Si l'on n'a pas encore vu cette notion, on pourra admettre les réponses à ces deux questions.

Un endomorphisme q de E est appelé un quart de tour si $q^2 = -id$; on note Q l'ensemble des quarts de tour de E.

A1) Démontrer qu'un quart de tour transforme tout vecteur x en un vecteur orthogonal à x.

A2) Dans tout ce problème la lettre M désigne la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A2a) Soit q un endomorphisme de E dont la matrice dans une base orthonormée est égale à M ; démontrer que q est un quart de tour.

A2b) Si q est un quart de tour, on note $\mathscr{B}(q)$ l'ensemble des bases orthonormées de E dans lesquelles la matrice de q est égale à M. Démontrer que quel que soit u dans U, il existe (b_1, b_2, b_3, b_4) dans $\mathscr{B}(q)$ tel que $b_1 = u$.

A3) Soient q dans Q et u dans U ; on note P le plan engendré par u et $q(u)$; il est clair que $(u, q(u))$ est une base orthonormée de P.

A3a) Démontrez que le plan P est invariant par q ; quelle est la nature géométrique de la restriction de q à P ?

A3b) Si v est un vecteur normé dans P, il existe un nombre réel θ tel que $v = u\cos\theta + q(u)\sin\theta$; quelles sont les matrices de passage de la base $(u, q(u))$ à la base $(v, q(v))$ et vice-versa ?

A4) Soient q dans Q et α dans $\mathbb{R}$; on pose $f = id\cos\alpha + q\sin\alpha$.

A4a) Démontrez que f est un endomorphisme orthogonal.

A4b) Démontrez que tout vecteur normé u est contenu dans un plan P invariant par f ; quelle est la nature géométrique de la restriction de f à P ?

A4c) Quel est le déterminant de f ?

A5) Soit α un nombre réel tel que $\sin\alpha \neq 0$; on pose $L = I\cos\alpha + M\sin\alpha$, et l'on s'intéresse à l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ (espace vectoriel de dimension 4 sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes) dont la matrice dans la base canonique est égale à L.

A5a) Trouvez un polynôme $A(\lambda)$ de degré 2 tel que $A(L) = 0$. Déduisez-en les valeurs propres de L (dans le corps $\mathbb{C}$) et son polynôme caractéristique.

A5b) Déduisez-en encore les dimensions des sous-espaces propres.

B) Orientations et commutations

Le fait que les endomorphismes orthogonaux de E ont un déterminant égal tantôt à $+1$ et tantôt à -1, permet de décomposer $\mathscr{B}$ en réunion disjointe de deux sous-ensembles $\mathscr{B}^+$ et $\mathscr{B}^-$, de la façon suivante : on choisit arbitrairement (e_1, e_2, e_3, e_4) dans $\mathscr{B}$, et l'on définit $\mathscr{B}^+$ comme l'ensemble des bases $(g(e_1), g(e_2), g(e_3), g(e_4))$, où g est un élément quelconque de G ; ensuite $\mathscr{B}^-$ est le complémentaire de $\mathscr{B}^+$ dans $\mathscr{B}$.

Le choix de la base (e_1, e_2, e_3, e_4) peut être compris comme le choix d'une orientation de E, comme cela se fait habituellement pour des espaces euclidiens de dimension $\leqslant 3$.

L'objectif de cette partie B est de démontrer les deux théorèmes suivants :

Premier théorème : l'ensemble $\mathscr{B}(q)$ défini dans A2b est tout entier contenu dans $\mathscr{B}^+$ ou dans $\mathscr{B}^-$.

On notera Q^+ (resp. Q^-) l'ensemble des quarts de tour q tels que $\mathscr{B}(q)$ est contenu dans $\mathscr{B}^+$ (resp. $\mathscr{B}^-$).

Second théorème : tout élément p de Q^+ commute avec tout élément q de Q^- (c'est-à-dire $p \circ q = q \circ p$) ; mais deux éléments du même sous-ensemble Q^+ ou Q^- ne commutent jamais, sauf s'ils sont égaux ou opposés.

Les deux théorèmes seront démontrés simultanément.

B1) Soient q dans Q et u dans U ; soient (b_1, b_2, b_3, b_4) et (c_1, c_2, c_3, c_4) deux éléments de $\mathscr{B}(q)$ tels que $b_1 = c_1 = u$; démontrez qu'ils sont tous les deux dans $\mathscr{B}^+$ ou dans $\mathscr{B}^-$. Ceci justifie la définition d'une application S de $Q \times U$ dans l'ensemble $\{+1, -1\}$, qui à (q, u) associe $+1$ ou -1 selon que les éléments (b_1, b_2, b_3, b_4) de $\mathscr{B}(q)$ tels que $b_1 = u$, sont tous dans $\mathscr{B}^+$ ou tous dans $\mathscr{B}^-$; $S(q, u)$ est appelé le signe de q en u, et le fait que ce signe ne dépend pas de u, apparaîtra seulement en B7.

B2) On va établir quelques propriétés simples de l'application S définie ci-dessus.

B2a) Soient u et v deux vecteurs normés orthogonaux ; démontrez l'existence de quarts de tour q et q' tels que
$$q(u) = v \quad \text{et} \quad S(q, u) = 1,$$
$$q'(u) = v \quad \text{et} \quad S(q', u) = -1.$$

B2b) Il est évident que $-q$ est un quart de tour chaque fois que q en est un ; comparez $S(q, u)$ et $S(-q, u)$.

B2c) Soit toujours (q, u) dans $Q \times U$ et soit v un vecteur normé dans le plan engendré par u et $q(u)$; comparez $S(q, u)$ et $S(q, v)$.

B3) Dans les sections B3,B4 et B5 on considère deux quarts de tour p et q, on suppose connus $S(p, u)$ et $S(q, u)$ pour un certain élément u de U, et l'on cherche à savoir si p et q commutent.
Ici, dans B3, on trate le cas où $p(u) = q(u)$.

B3a) Démontrez que ceci implique $p = q$ si $S(p, u) = S(q, u)$.

B3b) Si au contraire $S(p, u) = -S(q, u)$, démontrez que E est somme directe orthogonale de deux plans P et P' invariants par p et q, tels que $p(x) = q(x)$ pour tout x dans P, et $p(x) = -q(x)$ pour tout x dans P' ; est-ce que p et q commutent ?

B4) Soient encore p et q dans Q et u dans U ; on suppose ici que $p(u) = -q(u)$.
Quels résultats analogues à ceux de B3 pouvez-vous énoncer maintenant ? On vous suggère d'utiliser B2b.

B5) Soient encore p et q dans Q et u dans U ; on suppose $u, p(u)$ et $q(u)$ linéairement indépendants (hypothèse contraire de celles de B3 et B4).

B5a) démontrez qu'il existe (b_1, b_2, b_3, b_4) dans $\mathscr{B}(p)$ et (c_1, c_2, c_3, c_4) dans $\mathscr{B}(q)$ tels que $b_1 = c_1 = u$ et $b_3 = c_3$; démontrez l'existence d'un nombre réel α tel que $c_2 = b_2\cos\alpha + b_4\sin\alpha$ avec $\sin\alpha \neq 0$, $c_4 = \pm(-b_2\sin\alpha + b_4\cos\alpha)$;
précisez le signe $\pm$ dans l'égalité précédente selon que $S(p, u)$ et $S(q, u)$ sont égaux ou opposés.

B5b) Comparez $p(q(u))$ et $q(p(u))$ lorsque $S(p, u) = S(q, u)$.

B5c) Lorsque $S(p, u) = -S(q, u)$, démontrez l'existence de vecteurs normés v tels que $p(v) = q(v)$; on vous suggère de chercher un tel vecteur v parmi ceux de la forme $b_1\cos\theta + b_3\sin\theta$.
Est-ce que p et q commutent ?

B6) Soient p et q deux quarts de tour qui ne commutent pas, et soit u dans U ; comparez $S(p, u)$ et $S(q, u)$.

B7) La démonstration des deux théorèmes énoncés au début de cette partie B s'achève avec la démonstration du fait que $S(q, u)$ ne dépend pas de u. L'égalité $S(q, u) = S(q, v)$ a dû être démontrée dans B2c lorsque v est dans le plan engendré par u et $q(u)$.
Supposez maintenant u, v et $q(u)$ linéairement indépendants, construisez un quart de tour p tel que $S(q, u) = S(p, u) = S(p, v)$,
et utilisez B6 pour comparer $S(q, u)$ et $S(q, v)$.

C) Les sous-groupes F^+ et F^-

On note F^+ (resp. F^-) l'ensemble des endomorphismes f de E qui peuvent s'écrire $id\cos\alpha + q\sin\alpha$, où α est un nombre réel et q un élément de Q^+ (resp. Q^-). Le fait que F^+ et F^- sont des sous-ensembles de G, a dû être démontré dans A4.

C1) Démontrez que tout élément de F^+ commute avec tout élément de F^-.

C2) Soient u et v dans U ; démontrez l'existence de f dans F^+ et de f'dans F' tels que

$f(u) = f'(u) = v$; rappelez-vous que ceci a déjà été démontré dans B2a lorsque u et v sont orthogonaux ; par ailleurs ne vous souciez pas ici de l'unicité de f et f' (u et v étant donnés), car elle sera démontrée plus loin dans C4.

C3) Si F est un sous-ensemble non vide de G, on note $C(F)$ l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous ceux de F ; $C(F)$ s'appelle le commutant de F dans G.

C3a) Démontrez que $C(F)$ est un sous-groupe de G.

C3b) Soit u un élément fixé dans U ; on dit que F est transitif à partir de u, si quel que soit v dans U, il existe f dans F tel que $f(u) = v$. Démontrez que si F est transitif à partir de u, deux éléments f' et f'' de $C(F)$ tels que $f'(u) = f''(u)$, sont nécessairement égaux.

C3c) On suppose que F et F' sont deux sous-ensembles de G transitifs à partir de u, et que tout élément de F commute avec tout élément de F'. Démontrez que $C(F) = F'$ et $C(F') = F$.

C4) Démontrez que F^+ et F^- sont des sous-groupes de G, et que, quels que soient u et v dans U, il existe un unique f dans F^+ et un unique f' dans F^- tels que $f(u) = f'(u) = v$.

C5) Soit $F^+ \circ F^-$ le sous-ensemble de G formé par les produits (commutatifs) d'un élément de F^+ et d'un élément de F^- ; le prochain objectif est de démontrer que $F^+ \circ F^- = G$.

C5a) Soit (b_1, b_2, b_3, b_4) dans $\mathscr{B}^+$, et soient q et q' les quarts de tour qui ont pour matrice M dans les bases (b_1, b_2, b_3, b_4) et $(b_1, b_2, b_3, -b_4)$ respectivement ; on pose

$$g = (id \cos\alpha + q \sin\alpha) \circ (id \cos\alpha - q' \sin\alpha);$$

démontrez que E est somme directe orthogonale de deux plans invariants par g ; quelles sont les restrictions de g à ces deux plans ?

C5b) On suppose qu'un élément g de G laisse invariant un certain vecteur normé u ; démontrez que g laisse invariants tous les vecteurs d'un plan contenant u, et que g est dans $F^+ \circ F^-$.

C5c) Démontrez que tout élément g de G est dans $F^+ \circ F^- = G$; on vous suggère de démontrer qu'il existe f dans F^+ tel que $f \circ g$ laisse invariant un vecteur normé u.

C6) Soit g dans G et soit (φ, ψ) dans $F^+ \times F^-$ tel que $g = \varphi \circ \psi$; le prochain objectif est de trouver tous les couples (f, f') dans $F^+ \times F^-$ tels que $g = f \circ f'$; il est clair qu'on obtient un tel couple (f, f') en posant $f = \varphi \circ h$ et $f' = h^{-1} \circ \psi$, chaque fois que h est dans l'intersection de F^+ et F^-.

C6a) Quels sont les éléments h de cette intersection ?

C6b) Quels sont les couples (f, f') dans $F^+ \times F^-$ tels que $g = f \circ f'$?

***

Groupe Concours Polytechniques («E.N.S.I.») 1996	Options M et P
Mathématiques 1	**CORRIGÉ**

A) Les quarts de tour

A1) Rappelons que, si q est un endomorphisme de E, q est un endomorphisme orthogonal si et seulement si son adjoint q^* est égal à q^{-1}. En plus la condition $q^2 = -id$ peut se traduire par $q^{-1} = -q$. Un quart de tour est donc caractérisé par : $q^* = q^{-1} = -q$.
Soit donc q un quart de tour de E. Pour tout $x \in E$, on a : $x.q(x) = q^*(x).x = -q(x).x = -x.q(x)$ donc $x.q(x) = 0$, d'où

$$\boxed{\text{Un quart de tour transforme tout vecteur } x \text{ en un vecteur orthogonal à } x.}$$

A2a) M est la matrice de q dans une certaine base orthonormée $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de E.
$q(B) = (e_2, -e_1, e_4, -e_3)$ est la base B, à l'ordre près et à un signe près pour les vecteurs.
C'est donc une base orthonormée de E, donc $q \in O(E)$.
De même, $q^2(B) = (-e_1, -e_2, -e_3, -e_0)$ donc $q^2 = -id$.

$$\boxed{q \text{ est un quart de tour de } E.}$$

A2b) Soit q un quart de tour de E, et soit u un vecteur unitaire. D'après 1), $q(u)$ est orthogonal à u, et aussi unitaire (car $q \in O(E)$). Posons $b_1 = u$ et $b_2 = q(u)$.

Puisque $q(b_1) = b_2$ et $q(b_2) = q^2(b_1) = -b_1$, ce plan est stable par q. Son orthogonal $P^\perp$ est donc stable aussi. Choisissons un vecteur unitaire b_3 dans ce plan $P^\perp$, et posons $b_4 = q(b_3)$. b_4 est donc dans $P^\perp$. La famille $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ est donc constituée de vecteurs unitaires et orthogonaux deux-à-deux ; c' est une famille orthonormale, donc libre ; c'est donc une base orthonormée de E ; puisque l'on a $q(b_1) = b_2$, $q(b_2) = -b_1$, $q(b_3) = b_4$ et $q(b_4) = q^2(b_3) = -b_3$, la matrice de q sur cette base est M.

$$\boxed{\text{Quel que soit } u \in U, \text{ il existe une base } (b_1, b_2, b_3, b_4) \text{ dans } \mathscr{B}(q) \text{ telle que } b_1 = u.}$$

A3a) On a déjà prouvé dans A2.b) que $P = \mathrm{Vect}(u, q(u))$ est bien un plan et que ce plan est stable par q.
La matrice de la restriction de q à P est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est celle de la rotation de P, d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ si on oriente P de sorte que la base $(u, q(u))$ soit directe et de mesure $-\frac{\pi}{2}$ si on choisit l'autre orientation.

$$\boxed{P \text{ est invariant par } q \text{ et la restriction de } q \text{ à } P \text{ est une rotation de } \pm\frac{\pi}{2}.}$$

A3b) L'énoncé note $u \cos\theta$ le produit du vecteur u par le scalaire θ, contrairement à l'usage qui veut qu'on place le scalaire avant le vecteur.

Puisque $(u, q(u))$ est une base orthonormée de P et v un vecteur normé de ce plan, il existe effectivement un réel θ tel que $v = u\cos\theta + q(u)\sin\theta$. On a alors : $q(v) = q(u)\cos\theta - u\sin\theta$. D'où la matrice de passage de la base orthonormée $(u, q(u))$ à la base orthonormée $(v, q(v))$: $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Cette matrice est orthogonale ; son inverse est sa transposée.

D'où la matrice de passage de la base $(v, q(v))$ à la base $(u, q(u))$: $P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Les matrices de passage demandées sont } \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.}$$

A4a) Par linéarité de l'adjoint, $f^* = id^* \cos\alpha + q^* \sin\alpha = id \cos\alpha - q \cos\alpha$.
Donc $f \circ f^* = (id \cos\alpha + q \sin\alpha) \circ (id \cos\alpha - q \sin\alpha) == id \cos^2\alpha - q^2 \sin^2\alpha = id(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = id$, donc $f^* = f^{-1}$ donc

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme orthogonal.}}$$

A4b) Soit u dans U. Répétons que $P = \mathrm{Vect}(u, q(u))$, est un plan stable par q. Il est aussi stable par f, qui est combinaison linéaire de id et de q. En plus f est bijective (endomorphisme orthogonal) donc $f(P)$ est un plan, donc $f(P) = P$.

$$\boxed{\text{On a trouvé } P \text{ invariant par } f \text{ et contenant } u.}$$

La fin de la question n'est pas claire : quand on nous demande la nature de la restriction de f à P, s'agit-il du plan P que nous avons exhibé comme solution ou, plus généralement, de n'importe quel plan P contenant u et stable par f ? Essayons de répondre à la question générale. Supposons donc que P est n'importe quel plan contenant u et stable par f.

Si $\sin\alpha = 0$, alors $f = id$ ou $f = -id$. La restriction de f à P est id ou $-id$.
Si $\sin\alpha \neq 0$, comme P doit contenir $f(u) = u\cos\alpha + q(u)\sin\alpha$ et u, il doit aussi contenir
$q(u) = \dfrac{1}{\sin\alpha}(f(u) - u\cos\alpha)$. P est donc le plan $\mathrm{Vect}(u, q(u))$ que nous avions proposé comme solution.

Comme $f(u) = u\cos\alpha + q(u)\sin\alpha$ et $f(q(u)) = q(u)\cos\alpha + q^2(u)\sin\alpha = q(u)\cos\alpha - u\sin\alpha$,

la matrice de la restriction de f à P sur $(u, q(u))$, base orthonormée de P, est $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.
On en déduit (et la conclusion englobe le premier cas) que

$$\boxed{\text{la restriction de } f \text{ à } P \text{ est une rotation de } P, \text{ de mesure } \alpha \text{ ou } -\alpha \text{ suivant l'orientation de } P.}$$

A4c) Soit $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ dans $\mathscr{B}(q)$. La matrice de q dans cette base est M donc celle de f

est : $\cos\alpha I + \sin\alpha M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Lorsque l'espace entier est somme directe

de deux sous-espaces stables par un endomorphisme, le déterminant de l'endomorphisme est le produit des déterminants des restrictions. C'est le cas ici. Les deux restrictions ont la même matrice, dont le déterminant vaut 1. Donc :

$$\boxed{\det(f) = 1.}$$

A5a) La matrice L est justement celle qu'on vient d'écrire.
Exprimons L^2 en fonction de L et de I en tenant compte de $M^2 = -I$ et $M\sin\alpha = L - I\cos\alpha$:
$L^2 = I\cos^2\alpha + 2M\cos\alpha\sin\alpha + M^2\sin^2\alpha = I\cos^2\alpha + 2\cos\alpha(L - I\cos\alpha) - I\sin^2\alpha = 2L\cos\alpha - I$.

$$\boxed{\text{Le polynôme défini par } A(\lambda) = \lambda^2 - 2\cos\alpha\lambda + 1 \text{ vérifie } A(L) = 0.}$$

La matrice A vue comme matrice de taille 4 sur $\mathbb{C}$, admet 4 valeurs propres complexes, en comptant chacune avec son ordre de multiplicité comme racine du polynôme caractéristique.

On sait aussi que, puisque A est un polynôme annulateur de L, les valeurs propres réelles ou complexes de L sont à chercher parmi les zéros de A, qui sont $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$, deux complexes conjugués qui ne sont pas réels, sauf si $\alpha = k\pi$.

Enfin, L étant réelle, son polynôme caractéristique est à coefficients réels ; s'il admet une racine non réelle, sa conjuguée est aussi racine, avec le même ordre de multiplicité. En dehors des cas particuliers $\alpha = k\pi$ où $L = I$ ou $-I$, cela ne peut se faire que si

$$\boxed{\begin{array}{l} L \text{ admet } e^{i\alpha} \text{ et } e^{-i\alpha} \text{ comme valeurs propres doubles, et son polynôme} \\ \text{caractéristique est : } \det(L - \lambda I) = (\lambda - e^{i\alpha})^2(\lambda - e^{-i\alpha})^2 = (A(\lambda))^2. \end{array}}$$

A5b) Si $\alpha \neq k\pi$, L annule un polynôme scindé et à racines simples ; elle est donc diagonalisable (dans $M_4(\mathbb{C})$). La dimension de chaque sous-espace propre est donc égale à la multiplicité de la valeur propre associée. Ici, en dehors des cas particuliers $L = I$ et $L = -I$,

$$\boxed{\text{les sous-espaces propres de } L \text{ (ou d'un endomorphisme de matrice } L) \text{ sont donc de dimension 2.}}$$

B) Orientations et commutations

Rappelons l'existence d'une partition de l'ensemble $\mathscr{B}$ des bases orthonormées de E en deux classes d'équivalence. Orienter l'espace, c'est mettre l'étiquette « directe » sur l'une des deux classes, notée $\mathscr{B}^+$ l'ensemble des autres bases orthonormées (les indirectes) étant noté $\mathscr{B}^-$.

Si l'on oriente l'espace en convenant, comme dans l'énoncé, que la base orthonormée (e_1, e_2, e_3, e_4) est directe, alors on sait que la base orthonormée (v_1, v_2, v_3, v_4) est directe si et seulement si la matrice de passage de l'une à l'autre (qui est orthogonale) a un déterminant égal à 1, ou encore que la deuxième base est l'image de la première par une isométrie positive.
Il revient au même de dire, comme dans l'énoncé, que cette deuxième base est de la forme
$(g(e_1), g(e_2), g(e_3), g(e_4))$, avec $g \in G$.

B1) Soient B et C les deux bases proposées. Sur chacune d'elles q admet M pour matrice.
Puisque $b_1 = u = c_1$, on a aussi, d'après la forme de la matrice M, $b_2 = q(u) = c_2$. De plus, les bases B et C sont orthonormées, donc (b_3, b_4) et (c_3, c_4) sont deux bases orthonormées d'un même plan ($P^\perp$ orthogonal du plan $P = \mathrm{Vect}(u, q(u))$), et la matrice M impose $b_4 = q(b_3)$ et $c_4 = q(c_3)$. Il en résulte d'après A3b) que la matrice de passage de (b_3, b_4) à (c_3, c_4) est une matrice de rotation.

La matrice de passage de B à C est donc de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, dont le déterminant vaut 1. Il en résulte que

$$\boxed{\text{les deux bases } B \text{ et } C \text{ sont toutes les deux dans la même classe } \mathscr{B}^+ \text{ ou } \mathscr{B}^-.}$$

On convient donc d'affecter à (u, q) le nombre $+1$ ou le nombre -1 suivant que les bases de $\mathscr{B}(q)$ qui ont u pour premier vecteur sont toutes directes ou toutes indirectes.

B2a) On peut toujours compléter la famille orthonormale (u, v) en une base orthonormale (u, v, w, z). De plus, parmi les deux bases orthonormales (u, v, w, z) et (u, v, z, w) qui sont d'orientations inverses (puisque le déterminant de la matrice de passage vaut -1), l'une est dans $\mathscr{B}^+$ et l'autre dans $\mathscr{B}^-$; supposons par exemple que (u, v, w, z) soit dans $\mathscr{B}^+$. Considérons alors les deux quarts de tour q et q' ayant M pour matrice, l'un sur (u, v, w, z), l'autre sur (u, v, z, w) ; on a fait en sorte qu'ils répondent à la question :

$$\boxed{q(u) = v,\ q'(u) = v,\ S(q, u) = 1 \text{ et } S(q', u) = -1.}$$

B2b) La forme de M montre que, si M est la matrice de q sur la base orthonormée (b_1, b_2, b_3, b_4), avec $u = b_1$, M est aussi la matrice de $-q$ sur la base orthonormée $(b_1, -b_2, b_3, -b_4)$, qui est de même sens que la première et admet aussi u pour premier vecteur. $S(q, u)$ et $S(-q, u)$ valent 1 ou -1 suivant que ces bases sont directes ou indirectes. Il en résulte que :

$$\boxed{S(q, u) = S(-q, u).}$$

B2c) Soit (b_1, b_2, b_3, b_4) dans $\mathscr{B}(q)$ avec $b_1 = u$. v étant unitaire et dans le plan $\mathrm{Vect}(u, q(u))$ dont $(u, q(u))$ est une base orthonormale, on sait que $(v, q(v))$ est une autre base orthonormée de ce plan. $(v, q(v), b_3, b_4))$ est donc une base orthonormée de E, et elle appartient à $\mathscr{B}(q)$. D'après A3b), la matrice de passage de $(u, q(u))$ à $(v, q(v))$ est une matrice de rotation. On en déduit comme dans B1) que (b_1, b_2, b_3, b_4) et $(v, q(v), b_3, b_4))$ sont de même orientation. Ces deux bases commençant respectivement par u et v, on a donc

$$\boxed{S(q, u) = S(q, v)}$$

B.3) On suppose qu'il existe u unitaire tel que $p(u) = q(u)$.
Posant $b_1 = u$, $b_2 = p(u) = q(u)$, et fixant b_3 unitaire dans le plan P' orthogonal à P=Vect(b_1, b_2)) on a vu dans A2b) qu'on peut trouver b_4 dans P' tel que Vect(b_3, b_4)) soit une base orthonormée de P' et que la matrice de p sur (b_1, b_2, b_3, b_4) soit M.
On peut trouver de même une base orthonormée (b_1, b_2, b_3, b'_4) telle que la matrice de q sur (b_1, b_2, b_3, b'_4) soit M.
(b_1, b_2, b_3, b_4) et (b_1, b_2, b_3, b'_4) étant orthonormées, on a nécessairement $b'_4 = b_4$ ou $b'_4 = -b_4$. La première éventualité donne deux bases égales, la deuxième donne deux bases de sens contraire.

B3a) Si $S(p,u) = S(q,u)$, les deux bases (b_1, b_2, b_3, b_4) et (b_1, b_2, b_3, b'_4) doivent être de même sens. Nécessairement, $b'_4 = b_4$. Puisqu'ils ont la même matrice M sur une même base,

$\boxed{p \text{ et } q \text{ sont alors égaux.}}$

B3b) Si $S(p,u) = -S(q,u)$, les deux bases (b_1, b_2, b_3, b_4) et (b_1, b_2, b_3, b'_4) doivent être de sens contraire. Nécessairement, $b'_4 = -b_4$, donc $q(b_3) = b'_4 = -b_4 = -p(b_3)$ et $q(b_4) = -q(b'_4) = -q^2(b_3) = b_3 = -p(b_4)$. Les restrictions de p et q à P'= Vect(b_3, b_4) donnent donc des vecteurs de base b_3 et b_4 des images opposées ; ce sont donc des endomorphismes opposés de ce plan.
Quant aux restrictions à P =Vect(b_1, b_2), elles donnent, comme dans l'autre cas, la même image $(b_2, -b_1)$ de la base (b_1, b_2). Ces restrictions sont donc égales. Résumons :

Si $S(p,u) = -S(q,u)$, E est somme directe de deux plans orthogonaux P et P', avec : $\forall x \in P, p(x) = q(x)$ et $\forall x \in P', p(x) = -q(x)$ et p et q commutent,

puisque leurs restrictions aux deux sous-espaces supplémentaires P et P' commutent.

B4) Si $p(u) = -q(u)$, on peut appliquer B3) au couple (p, q') en posant $q' = -q$.
Si $S(p,u) = S(q,u)$, on a $S(p,u) = S(q',u)$ car $S(q,u) = S(-q,u)$ comme on l'a vu dans B2b). Donc $p = q' = -q$.

$\boxed{\text{Si } S(p,u) = S(q,u), \text{ on a } p = -q.}$

Si $S(p,u) = -S(q,u)$, on a donc $S(p,u) = -S(q',u)$, d'où l'existence de deux plans orthogonaux invariants par p et q' (donc par q), les restrictions de p et q' étant égales sur l'un, opposées sur l'autre ; les restrictions de p et q sont donc opposées sur l'un, égales sur l'autre.
Dans les deux cas p et $-q$ commutent donc p et q commutent.

B5) Puisque u et $p(u)$) sont orthogonaux et unitaires, ils forment une famille libre donc $(u, p(u), q(u))$ est liée si et seulement si $q(u)$ est dans Vect$(u, p(u))$.
Comme $q(u)$ et $p(u)$ sont unitaires et orthogonaux à u, on ne peut avoir $q(u)$ dans Vect$(u, p(u))$ que si et seulement si $q(u) = p(u)$ ou $q(u) = -p(u)$.
Donc $(u, p(u), q(u))$ libre est bien l'hypothèse contraire de celles de B3 et B4.

B5a) Prenons bien sûr $b_1 = c_1 = u$, $b_2 = p(u)$, et $c_2 = q(u)$. Ensuite, comme Vect$(u, p(u), q(u))$ est un hyperplan par hypothèse, son orthogonal est une droite de E.
Soit b_3 un vecteur unitaire de cette droite. b_3 est unitaire et orthogonal à b_1 et b_2.
On sait depuis A2b) qu'on peut trouver b_4 tel que (b_1, b_2, b_3, b_4) soit base orthonormée de E et que la matrice de p sur cette base soit M.
De même, en prenant $c_3 = b_3$, on peut trouver c_4 tel que (c_1, c_2, c_3, c_4) soit base orthonormée de E et que la matrice de q sur cette base soit M.

$\boxed{(b_1, b_2, b_3, b_4) \text{ est dans } \mathscr{B}(p) \text{ et } (c_1, c_2, c_3, c_4) \text{ dans } \mathscr{B}(q), \text{ avec } b_1 = c_1 = u \text{ et } b_3 = c_3.}$

De plus (b_2, b_4) et (c_2, c_4) sont deux bases orthonormées du plan orthogonal à Vect(b_1, b_3). On en déduit l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$\boxed{c_2 = b_2 \cos\alpha + b_4 \sin\alpha \text{ et } c_4 = \pm(-b_2 \sin\alpha + b_4 \cos\alpha).}$

$b_2 = p(u)$ et $c_2 = q(u)$ sont non colinéaires, donc on a $\sin\alpha \neq 0$.
Si $c_4 = +(-b_2 \sin\alpha + b_4 \cos\alpha)$, on passe de (b_2, b_4) à (c_2, c_4) par une rotation plane, donc de (b_1, b_2, b_3, b_4) à (c_1, c_2, c_3, c_4) par une isométrie positive.

Ces deux bases sont donc de même sens et $S(p,u) = S(q,u)$.
La conclusion est inversée si $c_4 = -(-b_2 \sin\alpha + b_4 \cos\alpha)$.

B5b) On a $p(q(u)) = p(c_2) = p(b_2)\cos\alpha + p(b_4)\sin\alpha = -b_1\cos\alpha - b_3 \sin\alpha$ et
$q(p(u)) = q(b_2) = q(c_2 \cos\alpha - c_4 \sin\alpha$ car on est dans le cas $S(p,u) = S(q,u)$ et on passe de (c_2, c_4) à (b_2, b_4) par la rotation inverse de la précédente. Donc
$q(p(u)) = q(c_2)\cos\alpha - q(c_4)\sin\alpha = -c_1 \cos\alpha + c_3 \sin\alpha = -b_1 \cos\alpha + b_3 \sin\alpha$. Puisque $\sin\alpha \neq 0$,

$\boxed{p(q(u)) \neq q(p(u)) \text{ donc } p \text{ et } q \text{ ne commutent pas.}}$

B5c) On est ici dans le cas : $c_2 = b_2 \cos\alpha + b_4 \sin\alpha$, $c_4 = b_2 \sin\alpha - b_4 \cos\alpha$. Cherchons v normé tel que $p(v) = q(v)$ sous la forme : $v = b_1 \cos\theta + b_3 \sin\theta$, comme le suggère l'énoncé.
Pour un tel v, qui est effectivement normé puisque b_1 et b_3 sont unitaires et orthogonaux, on a :

$$p(v) = b_2 \cos\theta + b_4 \sin\theta \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} q(v) &= c_2 \cos\theta + c_4 \sin\theta = b_2(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha) + b_4(\cos\theta\sin\alpha - \sin\theta\cos\alpha) \\ &= b_2\cos(\alpha - \theta) + b_4 \sin(\alpha - \theta). \end{aligned}$$

On a donc $p(v) = q(v)$ dès que $\cos\theta = \cos(\alpha - \theta)$ et $\sin\theta = \sin(\alpha - \theta)$, ce qui est possible en prenant $\theta = \dfrac{\alpha}{2}$. Donc

$\boxed{v = b_1 \cos(\alpha/2) + b_3 \sin(\alpha/2) \text{ vérifie } p(v) = q(v).}$

Notons qu'on ne peut avoir $p = q$ puisque $S(p,u) = -S(q,u)$. Cela dit, en appelant u le vecteur v qu'on vient de trouver, on est donc ramené au début de B3), où $p(u) = q(u)$. On ne peut être dans les hypothèses de B3a) puisqu'elles impliquent $p = q$, donc c'est B3b) qui s'applique et

$\boxed{p \text{ et } q \text{ commutent.}}$

B6) On a envisagé tous les cas possibles pour p et q. Le seul pour lequel p et q ne commutent pas est celui du B5b). Donc :

$\boxed{\text{Si les quarts de tours } p \text{ et } q \text{ ne commutent pas, on a : } S(p,u) = S(q,u).}$

B7) On veut démontrer que, pour tous u et v unitaires, on a $S(p,u) = S(p,v)$. On l'a fait dans B2c) quand v est dans le plan engendré par u et $q(u)$. Reste à envisager le cas où $v \notin$Vect$(u, q(u))$, autrement dit, on suppose $(u, v, q(u))$ libre.

Soit w l'un des deux vecteurs unitaires du plan Vect(u, v) qui sont orthogonaux à u.
Le vecteur $q(u) \notin$ Vect(u, v), donc ce vecteur w n'est ni $q(u)$ ni $-q(u)$. Comme ces deux vecteurs sont les deux vecteurs unitaires du plan Vect$(u, q(u))$ qui sont orthogonaux à u, on est sûr que $w \notin$Vect$(u, q(u))$.
w étant unitaire et orthogonal à u, d'après B2a), parmi les deux quarts de tours construits transformant u en w, on peut trouver un quart de tour p tel que $p(u) = w$ et $S(p,u) = S(q,u)$.
De plus, $p(u) = w$ donc $v \in$Vect$(u, p(u))$, donc, d'après B2c), on a aussi $S(p,u) = S(p,v)$.

$\boxed{\text{On a construit } p \in Q \text{ tel que } S(q,u) = S(p,u) = S(p,v).}$

On peut aussi appliquer B5 : $(u, q(u), p(u))$ est libre (c'est $(u, q(u), w)$)). Puisque $S(p,u) = S(q,u)$, B5b) nous dit que p et q ne commutent pas. Donc, d'après B6), on a $S(p,v) = S(q,v)$; par suite : $S(q,u) = S(p,u) = S(p,v) = S(q,v)$, et finalement :

$\boxed{S(q,u) = S(q,v) \text{ pour tous } u \text{ et } v \text{ dans } U.}$

$S(q,u)$ ne dépend donc pas du choix de u dans U. Si on a $S(q,u) = 1$ pour tout u, $\mathscr{B}(q)$ est tout entier dans $\mathscr{B}^+$. D'où le premier théorème et la définition, licite, de Q^+ et Q^-.
Ensuite, si $p \in Q^+$ et $q \in Q^-$, on a $S(p,u) = 1 = -S(q,u)$, donc p et q commutent d'après B6). Si p et q sont tous les deux dans Q^+ ou Q^-, on a $S(p,u) = S(q,u)$. En reprenant B), on voit qu'il n'y a que dans les cas particuliers $p = q$ de B3a) et $p = -q$ de B4) que p et q commutent, ce qui termine la démonstration du second théorème.

C) Les sous-groupes F^+ et F^-

C1) Si $f = id\cos\alpha + q\sin\alpha$ et $g = id\cos\beta + p\sin\beta$, avec q et p pris respectivement dans Q^+ et Q^-, alors f et g commutent puisque, d'après B, p et q commutent, et ils commutent aussi avec id. Donc

$$\boxed{\text{si } f \in Q^+ \text{ et } g \in Q^-, \text{ alors } fog = gof.}$$

C2) Soient u et v dans U. Il existe au moins un plan P contenant u et v. Soit (u, w) une base orthonormée de ce plan. D'après B2a), il existe q dans Q^+ et q' dans Q^- tels que : $q(u) = w$ et $q'(u) = w$.
v normé, se décompose dans la base orthonormée (u, w) de P sous la forme : $v = u\cos\alpha + w\sin\alpha$.
Alors

$$\boxed{f = id\cos\alpha + q\sin\alpha \text{ et } f' = id\cos\alpha + q'\sin\alpha \text{ transforment } u \text{ en } v, \text{ avec } f \in F^+ \text{ et } f' \in F^-.}$$

C3a) $C(F)$ est par définition inclus dans G, et non vide puisqu'il contient l'identité.
Soient f et g dans $C(F)$. Pour tout h dans F, on a :
$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ (h \circ g) = (f \circ h) \circ g = (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g)$, donc $f \circ g \in C(F)$.
Soit f dans $C(F)$; on a, pour tout $h \in F$, $f \circ h = h \circ f$; en composant à droite et à gauche par f^{-1} qui existe et est dans G, on a : $h \circ f^{-1} = f^{-1} \circ h$, donc $f^{-1} \in C(F)$.
Cela prouve bien que :

$$\boxed{C(F) \text{ est un sous-groupe de } (G, \circ).}$$

C3b) Supposons F transitif à partir de u, et soient f' et f'' dans $C(F)$ tels que $f'(u) = f''(u)$.
Pour tout v de U, on peut trouver f dans F tel que $f(u) = v$, donc
$f'(v) = f'of(u) = fof'(u) = fof''(u) = f''of(u) = f''(v)$
Ensuite, x étant quelconque dans E, on peut toujours l'écrire λv, avec $v \in U$ et λ réel donc, par linéarité de f' et f'', :
$f'(x) = f'(\lambda v) = \lambda f'(v) = \lambda f''(v) = f''(\lambda v) = f''(x)$. On en déduit : $f'(x) = f''(x)$ pour tout $x \in E$, donc

$$\boxed{\text{sous les hypothèses faites } f' = f''.}$$

C3c) Puisque tout élément de F commute avec tout élément de F', on a déjà $F' \subset C(F)$.
Réciproquement, soit $f' \in C(F)$. Posons $w = f'(u)$; w est dans U (car $f' \in O(E)$) et, puisque F' est transitif à partir de u, on peut trouver f'' dans F' (donc $f'' \in C(F)$) tel que $f''(u) = w = f'(u)$.
Puisque f' et f'' sont tous les deux dans $C(F)$, on déduit de C3.b que $f' = f''$. Donc $f' \in F'$. D'où

$$\boxed{C(F) = F' \text{ et, de même, on a aussi } C(F') = F.}$$

C4) D'après A4), les éléments de F^+ et F^- sont dans G ; ces parties F^+ et F^- de G sont non vides car elles contiennent id. D'après C2), ce sont des ensembles transitifs à partir de u (quelconque).
D'après C3c), on a $C(F^+) = F^-$ et $C(F^-) = F^+$. Alors, d'après C3a), ce sont des sous-groupes de G.
Pour u et v dans U, il existe, d'après C2), $f \in F^+$ et de $f' \in F^-$ tels que $f(u) = f'(u) = v$; ce f est unique, car si f_1 et f_2 dans $F^+ = C(F^-)$ vérifient $f_1(u) = f_2(u)$, f_1 et f_2 sont égaux d'après C3b) (puisque F^- est transitif à partir de u). On a de même l'unicité de f'.
Résumons :

$$\boxed{F^+ \text{ et } F^- \text{ sont des sous-groupes de } G \text{ et } \forall u, v \in U, \exists! f \in F^+, \exists! f' \in F^-, f(u) = f'(u) = v.}$$

C5a) Soit $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ dans $\mathscr{B}^+$. Soient q et q' les quarts de tour définis dans l'énoncé.
Posons $f = id\cos\alpha + q\sin\alpha$, et $f' = id\cos\alpha - q'\sin\alpha$.
À l'évidence, $P = \mathrm{Vect}(b_1, b_2)$ et $P' = \mathrm{Vect}(b_3, b_4)$ sont stables par f et f', donc stables par $g = f \circ f'$.
Orientons ces deux plans de sorte que (b_1, b_2) et (b_3, b_4) en soient des bases directes.
Les restrictions de f et $f' = id\cos(-\alpha) + q'\sin(-\alpha)$ à $\mathrm{Vect}(b_1, b_2)$ sont, on l'a vu, les rotations d'angles α et $-\alpha$, donc la restriction de g est l'identité.

La restriction de f à $\mathrm{Vect}(b_3, b_4)$ est la rotation d'angle α. La restriction de f' à $\mathrm{Vect}(b_3, b_4)$ a pour matrice $\begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$ sur la base $(b_3, -b_4)$, qui est indirecte. La restriction de f' est donc la rotation d'angle α. La restriction de g est donc la rotation d'angle 2α.
Résumons :

$$\boxed{\mathrm{Vect}(b_1, b_2) \text{ et } \mathrm{Vect}(b_3, b_4) \text{ sont stables par } g. \text{ Les restrictions de } g \text{ sont : id et la rotation d'angle } 2\alpha.}$$

C5b) La droite engendrée par u est stable par g, donc son orthogonal L est aussi stable par g, car g est un automorphisme orthogonal.
Soit l l'endomorphisme de l'espace euclidien L, obtenu en restreignant g à L ; restriction d'un endomorphisme orthogonal à un sous-espace stable, c'est un endomorphisme orthogonal de L.
Le déterminant de g vaut 1, et c'est le produit des déterminants des restrictions à $\mathrm{Vect}(u)$ et à L. Donc $\det(l)=1$, et l est une rotation de L, espace euclidien de dimension 3. Il existe donc dans L un vecteur b_2, que l'on peut choisir normé, invariant par g.
Posons $b_1 = u$. Le plan $P = \mathrm{Vect}(b_1, b_2)$ est un plan contenant u et tous ses vecteurs sont invariants par g car ils sont combinaisons linéaires de (b_1, b_2) invariants par g.
Le plan P' orthogonal à P est aussi stable par g, et la restriction de g à P' est un endomorphisme orthogonal de déterminant 1 (toujours le même argument sur le produit des déterminants des restrictions) donc une rotation plane. On peut donc compléter (b_1, b_2) en $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ base orthonormale directe de E.
Orientons $\mathrm{Vect}(b_3, b_4)$ de sorte que la base (b_3, b_4) en soit directe. Choisissons α réel de sorte que 2α soit l'angle de la rotation restriction de g à $\mathrm{Vect}(b_3, b_4)$.
Introduisons les quarts de tours q et q' comme dans C5b). On s'aperçoit alors que les « g » de C5a) et C5b) sont les mêmes, puisqu'ils ont les mêmes restrictions à deux supplémentaires.
De plus $(b_1, b_2, b_3, -b_4) \in \mathscr{B}^-$. Les quarts de tours q et q' introduits dans C5a) sont donc respectivement dans Q^+ et Q^- ; f et f' introduits sont donc dans F^+ et F^-, donc g est dans $F^+ \circ F^-$.
Résumons :

$$\boxed{g \text{ laisse invariants tous les vecteurs d'un plan contenant } u, \text{ et } g \in F^+ \circ F^-.}$$

C5c) Soit donc g fixé dans G. Fixons aussi u dans U ; le vecteur $v = g(u)$ est aussi dans U.
Il existe, d'après C4), f dans F^+ tel que : $f(v) = u$, donc $f \circ g(u) = u$. De plus $f \circ g$ est dans G (car f et g y sont). On peut donc appliquer C5b) à $f \circ g$; il existe donc f' dans F^+ et f'' dans F^- tels que $f \circ g = f'of''$. Donc $g = (f^{-1} \circ f') \circ f''$, avec $f^{-1} \circ f'$ dans le groupe F^+ et f'' dans F^-.

$$\boxed{g \text{ est bien dans } F^+oF^-.}$$

On obtient ainsi une bonne « description » des éléments de G.

C6a) Soit $h \in F^+ \cap F^-$; on peut donc l'écrire de deux façons :
$$h = id\cos\alpha + p\sin\alpha = id\cos\beta + q\sin\beta, \text{ avec } p \text{ dans } Q^+ \text{ et } q \text{ dans } Q^-.$$
Appliquons cette égalité d'endomorphismes à un vecteur v unitaire tel que $p(v) = q(v)$ (v existe d'après B5c)). Cela donne $v\cos\alpha + p(v)\sin\alpha = v\cos\beta + p(v)\sin\beta$. Comme la famille $(v, p(v))$ est libre, cela nécessite $\cos\alpha = \cos\beta$ et $\sin\alpha = \sin\beta$.
En revenant aux deux écritures de h, cela nécessite $p\sin\alpha = q\sin\alpha$. Comme $p \neq q$, cela nécessite $\sin\alpha = 0$, donc $h = id$ ou $h = -id$.
Donc :

$$\boxed{\text{Les éléments de } F^+ \cap F^- \text{ sont } id \text{ et } -id.}$$

C6b) Soit g dans G, et φ dans F^+, ψ dans F^- tels que $g = \varphi \circ \psi$.
Soit f dans F^+ et f' dans F^- tels que : $g = f \circ f'$. On a donc : $f^{-1} \circ \varphi = f' \circ (\psi)^{-1}$. Ces deux endomorphismes égaux sont respectivement dans F^+ et F^-, qui sont des groupes. Donc, d'après C6a), $f^{-1} \circ \varphi$ est id ou -id et $(f, f') = (\varphi, \psi)$ ou $(f, f') = (-\varphi, -\psi)$. Réciproquement ces deux couples vérifient bien $g = f \circ f'$. Donc :

$$\boxed{\text{Les couples } (f, f') \text{ tels que } g = f \circ f' \text{ sont } (\varphi, \psi), \text{ et } (-\varphi, -\psi).}$$

***

ÉCOLE POLYTECHNIQUE et E.S.P.C.I. 1998 — Filière PC

Mathématiques 1 — Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Soit E un espace vectoriel réel, de dimension n, $n \geqslant 2$. Soit B une forme bilinéaire symétrique sur E, c'est-à-dire une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tous $v, v', w \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $B(v,v') = B(v',v)$ et $B(\lambda v + \mu w, v') = \lambda B(v,v') + \mu B(w,v')$.

On suppose qu'il existe une base $(e_1, ..., e_n)$ de E telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$B(e_i, e_i) = 1 .$$

Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on pose

$$B(e_i, e_j) = b_{ij} .$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, et pour tout $v \in E$, on définit

$$\sigma_i(v) = v - 2B(v, e_i)\, e_i .$$

On désigne par 1_E l'application identique de E dans E, par $\sigma\sigma'$ la composée de deux endomorphismes σ, σ' de E, et par $\sigma^k (k \in \mathbb{N}^*)$ les puissances d'un endomorphisme σ.

Première partie

1. On fixe $i \in \{1, \dots, n\}$.

a) Montrer que σ_i est une application linéaire de E dans E.

b) Calculer σ_i^2.

c) Déterminer la dimension du noyau F_i de la forme linéaire sur E définie par $v \mapsto B(v, e_i)$.

d) Déterminer les valeurs propres de σ_i et les sous-espaces propres associés. Quelle est la nature géométrique de σ_i ?

e) Montrer que $B(\sigma_i(v), \sigma_i(v')) = B(v, v')$ pour tous $v, v' \in E$.

2. On fixe i et j dans $\{1, \dots, n\}$, tels que $i \neq j$. Soit E_{ij} le sous-espace vectoriel de E engendré par e_i et e_j.

a) Montrer que E_{ij} est stable par $\sigma_i\sigma_j$. On notera ρ_{ij} l'endomorphisme de E_{ij} défini par restriction de $\sigma_i\sigma_j$.

b) Etudier ρ_{ij} lorsque $|b_{ij}| = 1$: valeurs propres, sous-espaces propres. Est-il diagonalisable ?

c) Montrer que, si $|b_{ij}| = 1$, il n'existe pas d'entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\sigma_i\sigma_j)^k = 1_E$.

3. On suppose que $|b_{ij}| < 1$.

a) Montrer que la restriction B_{ij} de B à $E_{ij} \times E_{ij}$ est un produit scalaire.

b) Montrer que E est somme directe de E_{ij} et de $F_i \cap F_j$.

4. On suppose dans la suite de cette partie que, pour $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$, il existe un entier $N_{ij} \geqslant 2$ tel que

$$b_{ij} = -\cos \frac{\pi}{N_{ij}} .$$

Le plan E_{ij} muni du produit scalaire B_{ij} est alors un plan euclidien. On y choisit l'orientation telle qu'une mesure de l'angle orienté (e_i, e_j) soit comprise entre 0 et π.

a) Montrer que ρ_{ij} est un automorphisme orthogonal, que l'on précisera, du plan E_{ij}.

b) Montrer que $(\sigma_i\sigma_j)^{N_{ij}} = 1_E$ et que, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k < N_{ij}$, $(\sigma_i\sigma_j)^k \neq 1_E$.

5. On se place dans le cas où $n = 2$ et l'on pose

$$N_{12} = N .$$

a) Montrer que si $N \in \{2, 3, 4, 6\}$, il existe une base (e_1, f_2) de E, où $f_2 = \mu e_2$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $1 \leqslant \mu < 2$, telle que σ_1 et σ_2 aient dans cette base des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Discuter l'unicité d'une telle base.

b) Dans chacun des cas $N = 2, 3, 4, 6$, faire une figure soignée où l'on indiquera e_1 et f_2 et leurs images par les endomorphismes σ_1 et σ_2.

c) S'il existe une base de E telle que σ_1 et σ_2 aient dans cette base des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$, a-t-on nécessairement $N \in \{2, 3, 4, 6\}$? [On considérera la trace de $\sigma_1\sigma_2$.]

Deuxième partie

Dans cette partie n et B sont quelconques.

6.a) On pose $\varepsilon_1 = e_1$ et, pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$,

$$\varepsilon_i = \sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(e_i) .$$

Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$e_i = \varepsilon_i + 2 \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}\, \varepsilon_k .$$

La famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est-elle une base de E ?

b) On considère l'endomorphisme de E, $\tau = \sigma_1 \dots \sigma_n$.

Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\tau(e_i) = -\varepsilon_i - 2 \sum_{k=i+1}^{n} b_{ik}\, \varepsilon_k .$$

c) Soit $C = (C_{ij})$ la matrice carrée d'ordre n définie par

$$C_{ij} = \begin{cases} 2\, b_{ij} & \text{si } i < j ,\\ 0 & \text{si } i \geqslant j . \end{cases}$$

Soit ${}^tC$ la matrice transposée de C et soit I_n la matrice identité d'ordre n.

Montrer que la matrice $I_n + C$ est inversible et que la matrice T de l'endomorphisme τ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est $-(I_n + C)^{-1}(I_n + {}^tC)$.

d) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\text{dét}\,(\lambda I_n - T) = \text{dét}\,\big((\lambda + 1)I_n + \lambda C + {}^tC\big) .$$

7. [Cette question est indépendante des précédentes.] Soient $(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n)$ une famille de nombres réels et λ un nombre réel.

On considère, pour $n \geqslant 3$, le déterminant d'ordre n, noté $P_{(\beta_1,\dots,\beta_{n-1},\beta_n)}(\lambda)$, défini de la manière suivante :

- les termes diagonaux sont égaux à $\lambda + 1$,
- pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, le terme en position $(i+1, i)$ est β_i et le terme en position $(i, i+1)$ est $\lambda\beta_i$,
- le terme en position $(n, 1)$ est β_n,
- le terme en position $(1, n)$ est $\lambda\beta_n$,
- les autres termes sont nuls.

Pour $n \geqslant 4$, ce déterminant s'écrit donc :

$$P_{(\beta_1,\dots,\beta_{n-1},\beta_n)}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & \lambda\beta_1 & 0 & . & \lambda\beta_n \\ \beta_1 & \lambda+1 & \lambda\beta_2 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & \lambda+1 & \lambda\beta_{n-1} \\ \beta_n & 0 & . & \beta_{n-1} & \lambda+1 \end{vmatrix}.$$

a) Calculer $P_{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}(\lambda)$.

b) Calculer le coefficient $a_{(\beta_1,\dots,\beta_{n-1},\beta_n)}$ du terme de degré $n-1$ du polynôme en λ, $P_{(\beta_1,\dots,\beta_{n-1},\beta_n)}(\lambda)$. [On considérera d'abord le cas où $\beta_n = 0$.]

Troisième partie

On suppose encore que $n \geqslant 3$ et que, pour $i \neq j$, $b_{ij} = -\cos\dfrac{\pi}{N_{ij}}$, où les entiers N_{ij} sont tels que $N_{1n} \in \{3, 4, 6\}$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $N_{i,i+1} \in \{3, 4, 6\}$, tous les autres coefficients N_{ij} étant égaux à 2.

On désigne par p (resp. q) le nombre de couples (i, j), $1 \leqslant i < j \leqslant n$, tels que $N_{ij} = 4$ (resp. $N_{ij} = 6$).

8. On suppose que p et q sont pairs. Montrer qu'il existe une famille $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ de nombres réels non nuls tels que, dans la base $(\mu_1 e_1, \dots, \mu_n e_n)$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la matrice de σ_i soit à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

9. La condition «p et q pairs» est-elle une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une base de E telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la matrice de σ_i soit à coefficients dans $\mathbb{Z}$?
[On étudiera la trace de l'endomorphisme τ défini à la question 6.b) et l'on utilisera les résultats de la deuxième partie.]

***

ÉCOLE POLYTECHNIQUE et E.S.P.C.I. 1998	Filière PC
Mathématiques 1	CORRIGÉ

Première partie

1.a) σ_i est une application de E dans E telle que, pour v et w dans E et α dans $\mathbb{R}$, on ait :
$\sigma_i(\alpha v + w) = \alpha v + w - 2B(\alpha v + w, e_i)e_i = \alpha v + w - 2(\alpha B(v, e_i) + B(w, e_i))e_i = \alpha\sigma_i(v) + \sigma_i(w)$:

$$\boxed{\sigma_i \text{ est une application linéaire de } E \text{ dans } E.}$$

1.b)
$$\begin{aligned} \sigma_i(\sigma_i(v)) &= \sigma_i(v) - 2B(\sigma_i(v), e_i)e_i \\ &= v - 2B(v, e_i)e_i - 2B(v - 2B(v, e_i)e_i, e_i)e_i \\ &= v - 2B(v, e_i)e_i - 2B(v, e_i)e_i + 4B(v, e_i)B(e_i, e_i)e_i \\ &= v \end{aligned}$$

$$\boxed{\sigma_i^2 \text{ est l'identité. } \sigma_i \text{ est donc une symétrie.}}$$

1.c) La forme linéaire $v \to B(v, e_i)$ est non nulle, puisque $B(e_i, e_i) = 1$; son noyau est donc un hyperplan de E. Donc :

$$\boxed{\text{La dimension de } F_i \text{ est } n-1.}$$

1.d)
• $\sigma_i(v) = v \;\Leftrightarrow\; B(v, e_i)e_i = 0 \;\Leftrightarrow\; B(v, e_i) = 0 \;\Leftrightarrow\; v \in F_i$ donc 1 est valeur propre de σ_i et le sous-espace propre associé est F_i, de dimension $n-1$.
•$\sigma_i(e_i) = e_i - 2B(e_i, e_i)e_i = -e_i$ donc -1 est valeur propre et e_i dans le sous-espace propre.
La dimension de celui-ci ne peut dépasser 1 sinon la somme des dimensions des sous-espaces propres dépasserait n. Pour la même raison, il ne peut y avoir d'autre valeur propre.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les valeurs propres sont 1 et } -1 \text{ ; les sous-espaces propres sont } F_i \text{ et } \mathrm{Vect}(e_i). \\ \sigma_i \text{ est donc la symétrie par rapport à } F_i \text{ parallèlement à } \mathrm{Vect}(e_i).\end{array}}$$

1.e) En développant par bilinéarité,
$$\begin{aligned} B(\sigma_i(v), \sigma_i(v')) &= B(v - 2B(v, e_i)e_i, v' - 2B(v', e_i)e_i) \\ &= B(v, v') - 2B(v, e_i)B(e_i, v') - 2B(v', e_i)B(v, e_i) + 4B(v, e_i)B(v', e_i)B(e_i, e_i). \end{aligned}$$
Compte tenu de $B(e_i, e_i) = 1$, il reste

$$\boxed{B(\sigma_i(v), \sigma_i(v')) = B(v, v').}$$

2.a) Si $v \in E_{ij}$ on a
$$\begin{aligned} \sigma_i.\sigma_j(v) &= \sigma_i(v - 2B(v, e_j)e_j) \\ &= v - 2B(v, e_i)e_i - 2B(v, e_j)(e_j - 2B(e_j, e_i)e_i) \\ &= v - 2B(v, e_i)e_i - 2B(v, e_j)e_j + 4B(v, e_j)B(e_i, e_j)e_i \\ &= v - 2B(v, e_i)e_i - 2B(v, e_j)e_j + 4b_{ij}B(v, e_j)e_i, \end{aligned}$$
qui est donc combinaison linéaire de vecteurs de $E_{i,j}$:

$$\boxed{E_{ij} \text{ est stable par } \sigma_i.\sigma_j.}$$

2.b) En particulier $\sigma_i.\sigma_j(e_i) = e_i - 2e_i - 2b_{ij}e_j + 4b_{ij}^2 e_i$ et $\sigma_i.\sigma_j(e_j) = e_j - 2b_{ij}e_i - 2e_j + 4b_{ij}e_i$, ce qui nous permet d'écrire la matrice de la restriction p_{ij} de $\sigma_i.\sigma_j$ sur la base (e_i, e_j) de $E_{i,j}$:
$$M = \begin{pmatrix} 4b_{ij}^2 - 1 & 2b_{ij} \\ -2b_{ij} & -1 \end{pmatrix}$$
La trace de M, somme des valeurs propres, est égale à $4b_{ij}^2 - 2$ et le déterminant, produit des valeurs propres, est égal à 1.

Pour $|b_{ij}| = 1$, $M = \begin{pmatrix} 3 & 2b_{ij} \\ -2b_{ij} & -1 \end{pmatrix}$, de trace 2 et déterminant 1. Il en résulte que 1 est valeur propre double. p_{ij} ne peut être diagonalisable : s'il l'était, sa matrice M devrait être semblable à l'identité, donc devrait être l'identité, ce qui n'est pas (pour la même raison, cette matrice n'est pas non plus diagonalisable dans $\mathbb{C}$). Le sous-espace propre associé à l'unique valeur propre est donc de dimension 1.

On en cherche un vecteur directeur de composantes (x, y) en résolvant $(M - I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 2 & 2b_{ij} \\ -2b_{ij} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ou encore $\begin{cases} 2x + 2b_{ij}y &= 0 \\ -2b_{ij}x - 2y &= 0 \end{cases}$.
Le vecteur $x = -b_{ij}$, $y = 1$ vérifie les deux équations car $b_{ij}^2 = 1$. Résumons :

$\boxed{\text{$p_{ij}$ n'est pas diagonalisable, la seule valeur propre est 1, le sous-espace propre est dirigé par $-b_{ij}e_i + e_j$.}}$

2.c) On est encore dans les même hypothèses. S'il existait $k \in \mathbb{N}$ tel que $(\sigma_i\sigma_j)^k = 1_E$, la matrice M annulerait le polynôme $X^k - 1$ qui est, dans $\mathbb{C}$, scindé et à racines simples. Cette matrice serait diagonalisable dans $\mathbb{C}$, ce qui n'est pas.

$\boxed{\text{Il n'existe pas $k \in \mathbb{N}$ tel que $(\sigma_i\sigma_j)^k = 1_E$.}}$

3.a) Ici $|b_{ij}| < 1$. Pour tout v de E_{ij}, $B(v, v)$ est positif car, si $v = \alpha e_i + \beta e_j$, on a $B(v, v) = \alpha^2 B(e_i, e_i) + 2\alpha\beta B(e_i, e_j) + \beta^2 B(e_j, e_j) = \alpha^2 + 2\alpha\beta b_{ij} + \beta^2 = (\alpha + \beta b_{ij})^2 + (1 - b_{ij}^2)\beta^2$, et pour que $B(v, v) = 0$, il faut que $(1 - b_{ij}^2)\beta^2$ et $(\alpha + \beta b_{ij})^2$ soient nuls ce qui nécessite, puisque $(1 - b_{ij}^2) \neq 0$, que $\alpha = \beta = 0$ donc $v = 0$. La restriction de B à $E_{ij} \times E_{ij}$ est donc définie positive.

$\boxed{\text{Cette restriction est un produit scalaire.}}$

3.b)
- Soit $w \in E_{ij} \bigcap (F_i \cap F_j)$. Puisque $w \in F_i$, $B(w, e_i) = 0$ donc w est orthogonal à e_i pour le produit scalaire précédent. De même w est orthogonal à e_j. Orthogonal à tous les vecteurs d'une base, ce vecteur w de E_{ij} est donc nul. La somme de E_{ij} et $(F_i \cap F_j)$ est donc directe.
- E_{ij}, plan vectoriel, est de dimension 2. D'autre part $2n - 2 = \dim(F_i) + \dim(F_j) = \dim(F_i + F_j) + \dim(F_i \cap F_j) \leqslant n + \dim(F_i \cap F_j)$ donc $\dim(F_i \cap F_j) \geqslant n - 2$ donc $\dim(F_i \cap F_j) \oplus E_{ij} \geqslant n$ donc $\dim(F_i \cap F_j) \oplus E_{ij} = n$ et $(F_i \cap F_j) \oplus E_{ij} = E$.

$\boxed{\text{$F_i \cap F_j$ et E_{ij} sont supplémentaires dans E.}}$

4.a) E_{ij} est stable par σ_i et σ_j et les restrictions $\widehat{\sigma}_i$ et $\widehat{\sigma}_j$ de σ_i et σ_j à E_{ij} «conservent» le produit scalaire comme on l'a vu dans 1.c). : ce sont donc des automorphorphismes orthogonaux, plus précisément des symétries axiales puisqu'elles sont involutives et différentes de id et $-id$.
Leur composée p_{ij} est donc une rotation. Son angle est le double de l'angle orienté de l'axe de la symétrie $\widehat{\sigma}_j$ vers l'axe de la symétrie $\widehat{\sigma}_i$. Cet angle de droites (donc modulo π) est aussi l'angle (modulo π) de e_j vers e_i car ces deux vecteurs, transformés en leurs opposés par $\widehat{\sigma}_j$ et $\widehat{\sigma}_i$, sont orthogonaux aux axes des symétries.
L'angle (modulo 2π) de e_i vers e_j est entre 0 et π d'après l'énoncé. Son cosinus, égal à $B_{ij}(e_i, e_j) = B(e_i, e_j) = b_{ij} = -\cos(\frac{\pi}{N_{ij}})$, est négatif donc cet angle est en fait entre $\pi/2$ et π. C'est donc $\pi - \frac{\pi}{N_{ij}}$. L'angle de e_j vers e_i modulo π est donc $\frac{\pi}{N_{ij}}$.

$\boxed{\text{$p_{ij}$ est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{N_{ij}}$.}}$

4.b) p_{ij}^k est donc la rotation d'angle $\frac{2k\pi}{N_{ij}}$. C'est donc l'identité de E_{ij} pour $k = N_{ij}$ et différent de l'identité pour $1 \leqslant k < N_{ij}$. On est donc renseigné sur la nature de la restriction de $(\sigma_i\sigma_j)^k$ à E_{ij}.
Quant aux vecteurs de $F_i \cap F_j$, qui est un supplémentaire de E_{ij} d'après 3.b), ils sont tous invariants par $(\sigma_i\sigma_j)^k$, car ils sont invariants par σ_i et σ_j.
Un endomorphisme étant complètement défini par ses restrictions à deux supplémentaires,

$\boxed{\text{$(\sigma_i\sigma_j)^k$ est l'identité de E pour $k = N_{ij}$ et différent de l'identité pour $1 \leqslant k < N_{ij}$.}}$

5.a) Ici, $n = 2$. Soit $\mu \in [1; 2[$ et $f_2 = \mu e_2$.
On a $\sigma_1(e_1) = -e_1$ et $\sigma_1(f_2) = \mu\sigma_1(e_2) = \mu e_2 - 2B(e_1, e_2)\mu e_1 = f_2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\mu e_1$.

La matrice de σ_1 sur la base (e_1, f_2) est donc $\begin{pmatrix} -1 & 2\mu\cos\left(\frac{\pi}{N}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De même, la matrice de σ_2 sur cette base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{\mu}\cos\left(\frac{\pi}{N}\right) & -1 \end{pmatrix}$.
- Pour $N = 2$, ces matrices sont à coefficients entiers quel que soit le choix de μ.
- Pour $N = 3$, $2\cos\left(\frac{\pi}{N}\right) = 1$. On veut donc μ et $\frac{1}{\mu}$ entiers. Seul $\mu = 1$ convient (n'oublions pas : $1 \leqslant \mu < 2$).
- Pour $N = 4$ on veut $\mu\sqrt{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{\mu}$ entiers. Seul $\mu = \sqrt{2}$ convient.
- Pour $N = 6$ on veut $\mu\sqrt{3}$ et $\frac{\sqrt{3}}{\mu}$ entiers. Seul $\mu = \sqrt{3}$ convient.

$\boxed{\text{Dans chaque cas il existe une base (e_1, f_2) convenable. Elle est unique sauf pour $N = 2$.}}$

5.b) Figures sans problème, puisqu'on a dans chaque cas l'angle $\pi - \frac{\pi}{N}$ de e_1 vers e_2, que e_1 et e_2 sont unitaires et que l'on connaît le coefficient μ tel $f_2 = \mu e_2$.

5.c) D'après 2.b), la trace de $\sigma_1\sigma_2$ est $4b_{ij}^2 - 2 = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{N}\right) - 2 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)$. S'il existe une base sur laquelle σ_1 et σ_2 ont des matrices à coefficients entiers, le produit de ces deux matrices est aussi à coefficients entiers. Sa trace doit être entière et $2\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)$ doit donc être entier ; ce ne peut être que -2, -1, 0, 1 ou 2. $\frac{2\pi}{N}$ doit être dans $]0; \pi]$ et avoir un cosinus égal à $0, \pm 1$ ou $\pm\frac{1}{2}$. $\frac{2\pi}{N}$ ne peut être autre que $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$. Finalement :

$\boxed{\text{Si dans une base, σ_1 et σ_2 ont des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$, on a nécessairement $N \in \{2, 3, 4, 6\}$.}}$

Deuxième partie

6.a) La formule proposée $e_i = \varepsilon_i + 2\sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}\varepsilon_k$ est d'abord valable pour $i = 1$, puisque $\varepsilon_1 = e_1$, à condition de considérer que la somme vide qui apparaît alors est nulle.
Continuons avec i entre 2 et n. Pour k entre 2 et n, on a :

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k(e_i) &= \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{k-1}(e_i - 2b_{ik}e_k) = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{k-1}(e_i) - 2b_{ik}\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{k-1}(e_k) \\ &= \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{k-1}(e_i) - 2b_{ik}\varepsilon_k. \quad (1) \end{aligned}$$

Ajoutons ces égalités (1) membre à membre pour k de 2 à $i - 1$ (on suppose toujours qu'une somme vide est nulle) ; il reste après réductions $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{i-1}(e_i) = \sigma_1(e_i) - 2\sum_{k=2}^{i-1} b_{ik}\varepsilon_k$.

Comme $\sigma_1(e_i) = e_i - 2b_{1i}e_1 = e_i - 2b_{1i}\varepsilon_1$ on a en regroupant $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{i-1}(e_i) = e_i - 2\sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}\varepsilon_k$.
Comme $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{i-1}(e_i) = \varepsilon_i$, cela donne bien

$$\boxed{e_i = \varepsilon_i + 2\sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}\varepsilon_k.}$$

La famille des ε_k est donc génératrice de E. Comme son cardinal est la dimension de E

$\boxed{\text{Cette famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base de E.}}$

6.b) Ajoutons maintenant membre à membre les égalités (1) pour k de $i+1$ à n (avec toujours la convention de la somme vide) ; il reste après réductions

$$\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n(e_i) = \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_i(e_i) - 2\sum_{k=i+1}^{n} b_{ik}\varepsilon_k.$$

Comme $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_i(e_i) = \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{i-1}(-e_i) = -\varepsilon_i$ et $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n(e_i) = \tau(e_i)$, on a bien

$$\boxed{\tau(e_i) = -\varepsilon_i - 2\sum_{k=i+1}^{n} b_{ik}\varepsilon_k.}$$

6.c) Dans la i-ème colonne de $I_n + C$ on trouve $(2b_{1i}, 2b_{2i}, \dots, 2b_{i-1,i}, 1, 0, \dots, 0)$. Cette matrice est donc la matrice de passage de la base des ε_k à la base des e_i, ce qui prouve déjà qu'elle est inversible.
Ensuite, si T est la matrice de τ sur la base des e_i, on obtient, en multipliant T à gauche par $I_n + C$, la matrice M qui donne les composantes de $(\tau(e_1), \dots, \tau(e_n))$ sur la base des ε_k, mais on peut lire aussi ces composantes dans la réponse de 6.b).
On y voit que cette matrice M est $-(I_n + {}^tC)$ donc $(I_n + C)T = -(I_n + {}^tC)$. Résumons :

$$\boxed{I_n + C \text{ est inversible et } T = -(I_n + C)^{-1}(I_n + {}^tC).}$$

6.d) La matrice $I_n + C$ est triangulaire avec des 1 sur la diagonale, donc son déterminant est égal à 1 donc

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_n - T) &= \det(I_n + C)\det(\lambda I_n - T) = \det((I_n + C)(\lambda I_n - T)) \\ &= \det(\lambda(I_n + C) - (I_n + C)T) = \det(\lambda I_n + \lambda C + I_n + {}^tC).\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ on a } \det(\lambda I_n - T) = \det((\lambda + 1)I_n + \lambda C + {}^tC).}$$

7.a)

$$P_{\beta_1,\beta_2,\beta_3} = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & \lambda\beta_1 & \lambda\beta_3 \\ \beta_1 & \lambda + 1 & \lambda\beta_2 \\ \beta_3 & \beta_2 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

En développant par la règle de Sarrus, on trouve

$$\boxed{P_{\beta_1,\beta_2,\beta_3} = (\lambda + 1)^3 + \lambda(\lambda + 1)\beta_2\beta_2\beta_3 - \lambda(\lambda + 1)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2).}$$

7.b) Dans le cas $n \geqslant 4$, les manipulations que nous allons décrire seront plus faciles à suivre si l'on a sous les yeux le déterminant dessiné dans l'énoncé.

• On suppose $\beta_n = 0$. Retranchons de l'avant-dernière ligne la dernière multipliée par β_{n-1} puis de l'antépénultième l'avant-dernière multipliée par β_{n-2} etc.. et enfin de la première la deuxième multipliée par β_1. On obtient un déterminant où λ ne figure plus en dehors de la diagonale, et sur la diagonale on trouve

$$\lambda + 1 - \beta_1^2, \lambda + 1 - \beta_2^2, \dots, , \lambda + 1 - \beta_{n-1}^2, \lambda + 1.$$

Ce déterminant est donc de la forme $\det(\lambda I_n - P)$, où P est une certaine matrice carrée ; c'est donc le polynôme caractéristique de cette matrice P ; le terme de degré $n-1$ a pour coefficient la trace de $-P$, soit $n - (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_{n-1}^2)$.

• Supposons maintenant que β_n soit quelconque. Reprenons les manipulations précédentes. Les colonnes autres que la première et la dernière ne sont pas affectées par le fait que $\beta_n \neq 0$.
Dans la première colonne, les manipulations font apparaître :
$-\beta_{n-1}\beta_n$ en $(n-1)$-ième position, $+\beta_{n-2}\beta_{n-1}\beta_n$ en $(n-2)$-ième position, etc
$(-1)^{n-1}\beta_3\dots\beta_{n-1}\beta_n$ en troisième position $\beta_1 - (-1)^{n-1}\beta_2\beta_3\dots\beta_{n-1}\beta_n$ en deuxième position et enfin $\lambda + 1 - \beta_1^2 + (-1)^{n-1}\beta_1\beta_2\dots\beta_{n-1}\beta_n$ en première position.
Dans la dernière colonne, en dehors de termes indépendants de λ, il subsiste encore le $\lambda\beta_n$ qu'on avait au départ sur la première ligne. Pour le faire disparaître, faisons maintenant une manipulation supplémentaire en retranchant de la première ligne la dernière multipliée par β_n.
On se retrouve encore avec un déterminant de la forme $\det(\lambda I_n - P)$ et on reprend le raisonnement du cas particulier. Seul le premier terme diagonal de $-P$ a changé :
Au lieu de $1 - \beta_1^2$, on a maintenant $1 - \beta_1^2 - \beta_n^2 + (-1)^{n-1}\beta_1\beta_2\dots\beta_{n-1}\beta_n$ (le $-\beta_n^2$ vient de la toute dernière manipulation). Finalement, dans le cas général

$$\boxed{\text{Le coefficient de } \lambda^{n-1} \text{ est } n + (-1)^{n-1}\beta_1\beta_2\dots\beta_{n-1}\beta_n - (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_n^2).}$$

Troisième partie

8. Fixons $\mu_1, \dots, \mu_n$ non nuls.
Puisque $\sigma_i(\mu_i e_i) = -\mu_i e_i$ et $\sigma_i(\mu_j e_j) = \mu_j e_j - 2b_{ij}\dfrac{\mu_j}{\mu_i}\mu_i e_i$, la matrice de σ_i dans la base $(\mu_1 e_1, \dots, \mu_n e_n)$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ -2b_{i,1}\frac{\mu_1}{\mu_i} & \cdots & -1 & \cdots & -2b_{i,n}\frac{\mu_n}{\mu_i} \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & 1 \end{pmatrix}$$

On veut donc :
$\forall i \neq j,\ -2b_{i,j}\dfrac{\mu_j}{\mu_i} \in \mathbb{Z}$, soit, en ne conservant que les cas où $b_{i,j} \neq 0 (\Longleftrightarrow N_{i,j} \neq 2)$:
$2\cos\left(\dfrac{\pi}{N_{i,i+1}}\right)\dfrac{\mu_{i+1}}{\mu_i} \in \mathbb{Z}$ et $2\cos\left(\dfrac{\pi}{N_{i,i+1}}\right)\dfrac{\mu_i}{\mu_{i+1}} \in \mathbb{Z}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$
et aussi : $2\cos\left(\dfrac{\pi}{N_{1,n}}\right)\dfrac{\mu_n}{\mu_1} \in \mathbb{Z}$ et $2\cos\left(\dfrac{\pi}{N_{1,n}}\right)\dfrac{\mu_1}{\mu_n} \in \mathbb{Z}$.
Posons : $\beta_i = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{N_{i,i+1}}\right)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et $\beta_n = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{N_{1,n}}\right)$:
Les contraintes s'écrivent :
$\beta_i\dfrac{\mu_{i+1}}{\mu_i} \in \mathbb{Z}$ et $\beta_i\dfrac{\mu_i}{\mu_{i+1}} \in \mathbb{Z}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et aussi : $\beta_n\dfrac{\mu_n}{\mu_1} \in \mathbb{Z}$ et $\beta_n\dfrac{\mu_1}{\mu_n} \in \mathbb{Z}$.
Suivant que $N = 3, 4$ ou 6 on obtient $\beta = 1, \sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$.
Choisissons donc $\mu_1 = 1$ et les autres μ_i tels que : $\dfrac{\mu_{i+1}}{\mu_i} = \beta_i^{\varepsilon_i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$ à notre convenance.
Les contraintes pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ sont toutes satisfaites, car $\beta_i\dfrac{\mu_{i+1}}{\mu_i}$ et $\beta_i\dfrac{\mu_i}{\mu_{i+1}}$ valent 1, 2, ou 3.
Cela nous donne au bout du compte $\mu_n = \beta_1^{\varepsilon_1}\cdots\beta_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}$.
Prenons enfin $\varepsilon_n = \pm 1$ à notre convenance.
On peut toujours s'arranger pour que le produit $\beta_1^{\varepsilon_1}\cdots\beta_n^{\varepsilon_n}$ soit égal à 1. En effet, comme p est pair, $\sqrt{2}$ figure un nombre pair de fois dans ce produit ; en choisissant la moitié des puissances ε_i associées égales à -1 et l'autre à 1, les $\sqrt{2}$ se simplifient. De même on peut faire disparaître les $\sqrt{3}$. Il ne reste donc plus que des 1.
On a alors $\mu_n = \beta_n^{-\varepsilon_n}$ si bien que les deux dernières contraintes sont satisfaites.

$$\boxed{\text{Il existe donc une base } (\mu_1 e_1, \dots, \mu_n e_n) \text{ sur laquelle les matrices des } \sigma_i \text{ sont à coefficients dans } \mathbb{Z}.}$$

9. Si la condition est réalisée dans une certaine base de E, dans cette base la matrice de $\tau = \sigma_1\cdots\sigma_n$ est aussi à coefficients entiers et donc sa trace est dans $\mathbb{Z}$.
Or celle-ci, égale à la somme des valeurs propres de τ, est aussi égale à l'opposé du coefficient du terme en λ^{n-1} dans le polynôme caractéristique de τ, soit :
$\det(\lambda I_n - T) = \det((\lambda + 1)I_n + \lambda C + {}^tC) = P_{(-\beta_1,\dots,-\beta_n)}(\lambda)$ où les valeurs β_i ont été définies dans la question précédente.
On a ainsi

$$\operatorname{Tr}(T) = \sum_{k=1}^{n}\beta_k^2 + \prod_{k=1}^{n}\beta_k - n \in \mathbb{Z}.$$

Comme les β_k^2 sont entiers, cela nécessite que le produit des β_k soit dans $\mathbb{Z}$.
Si l'un des nombres p ou q est impair, ce produit sera de l'une des formes $n\sqrt{2}$, $n\sqrt{3}$ ou $n\sqrt{6}$ avec n entier.
Or un tel nombre n'est pas entier car $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$ (c'est bien connu...)
Finalement :

$$\boxed{\text{La condition "}p\text{ et }q\text{ pairs" est une C.N.S. pour qu'une base ayant les propriétés imposées existe.}}$$

***

Semaine 11 : Matrices symétriques réelles

Nous avons étudié, cette semaine, les endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien et les matrices symétriques réelles. Ces notions apparaissent dans de nombreux problèmes de concours. Il faut donc bien les connaître, d'autant plus que le volume de cours correspondant est assez réduit.

• Sujet 32 :
Concours Communs Polytechniques (« E.N.S.I. ») 2001 Mathématiques 1 Filière PC

On considère un système d'équations qui s'écrit $AX = H$, où les matrices A et H sont données. On suppose que ce système n'a pas de solution et on se pose la question : comment choisir X pour que AX soit « le plus près possible » de H ?

C'est la question qu'on essaie de résoudre dans ce problème. Le but poursuivi n'apparaissant qu'à la toute dernière question, il serait bon d'essayer de le faire en entier (le problème étant long, on peut penser que, le jour du concours, beaucoup de candidats n'ont pas vu le but poursuivi...)

Celui qui sait bien son cours sur la diagonalisation, l'orthogonalité, les matrices symétriques trouvera faciles de nombreuses questions.

Il y a quelques imperfections dans l'énoncé : certaines questions arrivent alors qu'on y a déjà répondu, mais il faut bien s'entraîner, aussi, sur des énoncés mal posés...

• Sujet 33 : Concours Centrale-Supélec 2000 Mathématiques 2 Filière MP

Une matrice symétrique réelle A étant donnée, il s'agit de construire une suite de matrices semblables à A, suite qui converge vers une matrice diagonale ; c'est donc un algorithme de calcul approché des valeurs propres de A (méthode de Jacobi).

On en vient à l'étude de cette suite, c'est-à-dire aux questions de topologie, vers le milieu du problème. Avant cela, on a établi, par des méthodes purement matricielles, parfois un peu calculatoires, les résultats d'algèbre linéaire nécessaires.

Tout au long du problème, la progression dans la difficulté est bonne. L'ensemble n'est pas trop difficile.

• Sujet 34 : Concours Centrale-Supélec 2001 Mathématiques 2 Filière TSI

Nous avons choisi ce problème posé dans la filière TSI car il est assez difficile, largement au niveau des problèmes posés en MP, PC ou PSI.

On y étudie une quantité qu'on peut rattacher à toute matrice carrée inversible A et qu'on appelle le conditionnement de A. Cette quantité permet de mesurer l'incertitude dans la résolution d'un système de Cramer dont les données ne sont pas exactes.

Cette étude utilise les propriétés des matrices symétriques et bien d'autres notions d'algèbre linéaire. Une grande partie du problème est consacrée à des applications (matrices de Vandermonde et de Hankel).

Ce problème est, nous l'avons déjà dit, assez difficile.

Groupe Concours Polytechniques («E.N.S.I.») 2001	Filière PC
Mathématiques 1	Durée : 4 heures

Les calculatrices ne sont pas autorisées

Notations

Soit n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant n lignes et p colonnes. On identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ respectivement à $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ que l'on supposera munis de leurs produits scalaires canoniques notés respectivement $\langle\cdot|\cdot\rangle_n$ et $\langle\cdot|\cdot\rangle_p$. Les normes associées à ces produits scalaires seront notées respectivement $\|\cdot\|_n$ et $\|\cdot\|_p$.

On notera $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $(F_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ celle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Lorsque $p=n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est muni de sa structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité.

$0_{n,p}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour A appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A : c'est un élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

$\ker A$ est le noyau de A défini par

$$\ker A = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) | AX = 0\}$$

$\operatorname{Im} A$ est l'image de A définie par

$$\operatorname{Im} A = \{AX | X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$$

Enfin, on adopte la notation $F^\perp$ pour désigner l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F d'un espace euclidien.

Partie I

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

I.1. Montrer que ${}^tAA$ est nulle si et seulement si A est nulle.
Dans toute la suite du problème A sera supposée non nulle.

I.2. Montrer que les matrices ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ sont diagonalisables au moyen de matrices orthogonales.

I.3. a) X, Y désignant deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, exprimer le produit scalaire $\langle X|Y\rangle_n$ sous la forme d'un produit matriciel.

b) Si W est un vecteur propre de ${}^tAA$ associé à la valeur propre λ, exprimer $\|AW\|_n^2$ en fonction de λ et $\|W\|_p$.

c) En déduire que les valeurs propres de ${}^tAA$ sont réelles, positives ou nulles.

I.4. a) Pour x réel, calculer les produits matriciels par bloc suivants :

$$\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,p} \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0_{p,n} & -xI_p \end{pmatrix}$$

b) En déduire que les matrices ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ ont les mêmes valeurs propres non nulles avec le même ordre de multiplicité.

c) En déduire également que les matrices ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ ont même rang.

I.5. Montrer que si $n > p$, 0 est valeur propre de $A\,{}^tA$ et que si $n < p$, 0 est valeur propre de ${}^tAA$.

I.6. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de ${}^tAA$, chaque valeur propre apparaissant dans cette liste un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et on pose $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout i élément de $\{1,2,\dots,p\}$.

Les réels μ_i sont appelés valeurs singulières de A.

On suppose les réels λ_i ordonnés tels que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_p \geqslant 0$.

a) Montrer que λ_1 est non nul.

On définit alors un unique entier naturel r appartenant à $\{1,2,\dots,p\}$ comme suit : si toutes les valeurs propres de ${}^tAA$ sont non nulles, $r=p$, sinon r est tel que pour tout $i \leqslant r$, $\lambda_i > 0$ et pour tout $i > r$, $\lambda_i = 0$.

Soit $(V_1, V_2, \dots, V_p)$ une base orthonormale de vecteurs propres de ${}^tAA$ respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$; $V_1, V_2, \dots, V_r$ désignent les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles et lorsque r est strictement inférieur à p, $V_{r+1}, \dots, V_p$ désignent les vecteurs propres associés à la valeur propre 0.

b) Montrer que $r \leqslant n$ et que la dimension de $\ker A\,{}^tA$ est égale à $n - r$.

Pour tout $i \in \{1,2,\dots,r\}$, on pose $U_i = \dfrac{1}{\mu_i} AV_i$ et si $n > r$, on désigne par $(U_{r+1},\dots,U_n)$ une base orthonormale de $\ker A\,{}^tA$.

c) Montrer que pour tout $i \in \{1,2,\dots,r\}$, $AV_i = \mu_i U_i$ et que si r est strictement inférieur à p, pour tout $i \in \{r+1,\dots,p\}$, $AV_i = 0$.

d) Montrer que pour tout $i \in \{1,2,\dots,r\}$, ${}^tAU_i = \mu_i V_i$.

e) Montrer que si $n > r$, pour tout $i \in \{r+1,\dots,n\}$, ${}^tAU_i = 0$.

f) En déduire que le système de vecteurs $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ constitue une base orthonormale de vecteurs propres de $A\,{}^tA$ et préciser la valeur propre associée à chaque vecteur U_i.

I.7. On note V la matrice carrée réelle d'ordre p dont le $i^{\text{ème}}$ vecteur colonne est le vecteur V_i, U la matrice carrée réelle d'ordre n dont le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne est le vecteur U_j et $({}^tUAV)_{i,j}$ l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice ${}^tUAV$.

a) Montrer que :

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\dots,n\} \times \{1,2,\dots,p\},\ ({}^tUAV)_{i,j} = \mu_j \delta_{i,j} \quad \text{où } \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

b) On note Δ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments $\Delta_{i,j}$ sont nuls sauf $\Delta_{11}, \Delta_{22}, \dots, \Delta_{rr}$ respectivement égaux à $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$. Montrer que $A = U\Delta\,{}^tV$.

La factorisation de A ainsi obtenue est dite décomposition de A en valeurs singulières.

c) Trouver une décomposition en valeurs singulières de chacune des matrices :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

I.8. Montrer que le rang de A est égal à r.

I.9. a) Montrer que $V = \sum_{i=1}^{p} V_i\,{}^tE_i$.

b) En déduire :

$$A = \sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i\,{}^tV_i \quad , \quad {}^tAA = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i V_i\,{}^tV_i \quad , \quad A\,{}^tA = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i\,{}^tU_i$$

c) Déterminer les sous-espaces vectoriels suivants : $\ker A$, $\ker {}^tA$, $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im} {}^tA$.

d) Montrer que $\ker {}^tAA = \ker A$ et $\ker A\,{}^tA = \ker {}^tA$.

Partie II

Avec les notations de la partie I, pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ admettant une décomposition en valeurs singulières $A = U\Delta\,{}^tV$, on appelle Δ^+ la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments $\Delta^+_{i,j}$ sont nuls sauf $\Delta^+_{11}, \Delta^+_{22}, \dots, \Delta^+_{rr}$ respectivement égaux à $\dfrac{1}{\mu_1}, \dfrac{1}{\mu_2}, \dots, \dfrac{1}{\mu_r}$ et on pose $A^+ = V(\Delta^+)\,{}^tU$.

Δ^+ (resp. A^+) est appelée pseudo-inverse de Δ (resp. de A). A priori, la matrice A^+ ainsi définie dépend de la décomposition en valeurs singulières choisie pour la matrice A, mais il sera montré à la question **II.9** *qu'il n'en est rien et que A^+ est uniquement déterminée à partir de A.*

II.1. Déterminer les matrices A_0^+, $A_0A_0^+$, $A_0^+A_0$, $A_0A_0^+A_0$ et $A_0^+A_0A_0^+$.

II.2. Déterminer $(A_0^+)^+$.

II.3. Evaluer $\Delta^+\Delta$ et $\Delta\Delta^+$.

II.4. Montrer que si A est une matrice carrée inversible ($n = p = r$), alors $A^+ = A^{-1}$.

II.5. Montrer que :

$$A^+ = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\mu_i} V_i {}^tU_i \quad , \quad AA^+ = \sum_{i=1}^{r} U_i {}^tU_i \quad , \quad A^+A = \sum_{i=1}^{r} V_i {}^tV_i$$

II.6. **a)** Evaluer AA^+U_j pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ et en déduire que AA^+ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur $\operatorname{Im} A$.

b) Montrer de même que A^+A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^p$ sur $(\ker A)^\perp$.

II.7. Etablir les identités suivantes :

$$(1) \qquad AA^+ = {}^t(AA^+) \quad , \quad A^+A = {}^t(A^+A) \quad , \quad AA^+A = A \quad , \quad A^+AA^+ = A^+$$

II.8. Etablir les résultats suivants :

i) $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} AA^+ \quad , \quad \ker A^+ = \ker AA^+ \quad , \quad \operatorname{Im} A^+ = \operatorname{Im} A^+A \quad , \quad \ker A = \ker A^+A$.

ii) $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} A \oplus \ker A^+ \quad , \quad \mathbb{R}^p = \operatorname{Im} A^+ \oplus \ker A$.

II.9. Soit B une matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$AB = {}^t(AB) \quad , \quad BA = {}^t(BA) \quad , \quad ABA = A \quad , \quad BAB = B$$

a) Montrer que B vérifie les identités suivantes :

i) $B = B {}^tB {}^tA = {}^tA {}^tB B$

ii) $A = A {}^tA {}^tB = {}^tB {}^tA A$

iii) ${}^tA = {}^tA A B = B A {}^tA$

b) En déduire que $B = A^+$, autrement dit que A^+ est l'unique matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ vérifiant les relations (1).

II.10. Montrer que $(A^+)^+ = A$ et ${}^t(A^+) = ({}^tA)^+$.

II.11. Evaluer $(A_0B_0)^+$ et $B_0^+A_0^+$. A-t-on l'égalité ?

II.12. Soit $H \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\overline{H} = A^+H$. On note $\mathrm{d}(H, \operatorname{Im} A)$ la distance de H au sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} A$.

a) Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $AX - AA^+H$ et $H - AA^+H$ sont orthogonaux et en déduire :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \,, \quad \| A\overline{H} - H \|_n \leqslant \| AX - H \|_n$$

Que vaut alors $\mathrm{d}(H, \operatorname{Im} A)$?

b) Montrer que s'il existe $\widetilde{H} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $\| A\widetilde{H} - H \|_n = \| A\overline{H} - H \|_n$ avec $\widetilde{H} \neq \overline{H}$, alors $\| \overline{H} \|_p < \| \widetilde{H} \|_p$.

c) Si $H = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, déterminer $\inf_{X \in \mathbb{R}^2} \| A_0X - H \|_3$.

***

Groupe Concours Polytechniques («E.N.S.I.») 2001	Filière PC
Mathématiques 1	**CORRIGÉ**

Partie I

I.1 Notons que le nombre de colonnes de ${}^tA$ est égal au nombre de lignes de A : le produit ${}^tAA$ existe quelle que soit la matrice A ; de même pour $A{}^tA$.
Pour i entre 1 et p, à la i-ième ligne et i-ième colonne de ${}^tAA$ on trouve la somme des produits deux par deux des termes de la i-ième ligne de ${}^tA$ par ceux de la i-ième colonne de A donc, en fait, la somme $\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2$ des carrés des termes de la i-ième colonne de A. Si le produit ${}^tAA$ est nul, cette somme de carrés est nulle et comme il s'agit de réels, ils sont tous nuls. Comme c'est vrai pour tout i de 1 à p, on en déduit que A est nulle. La réciproque est évidente.

$$\boxed{\text{La matrice } {}^tAA \text{ est nulle si et seulement si la matrice } A \text{ est nulle.}}$$

On aurait une démonstration plus directe en utilisant I.3.a) : si ${}^tAA = 0$, on a pour tout X, ${}^t(AX)AX = {}^tX{}^tAAX = 0$; AX orthogonal à lui-même est donc nul ; comme c'est vrai pour tout X, c'est que A est nulle.

I.2 Les matrices ${}^tAA$ et $A{}^tA$ sont carrées d'ordres p et n et symétriques car ${}^t({}^tAA) = {}^tA{}^t({}^tA) = {}^tAA$ et ${}^t(A{}^tA) = A{}^tA$. Elles sont réelles. On sait qu'alors leurs valeurs propres sont réelles et que

$$\boxed{\text{ces matrices sont diagonalisables (dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathscr{M}_p(\mathbb{R})\text{) au moyen de matrices orthogonales.}}$$

I.3 a) Si X et Y sont dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, Le produit scalaire $< X|Y >$ est la somme des produits deux à deux des termes des deux matrices colonnes X et Y.

$$\boxed{\text{C'est donc l'unique terme de la matrice } {}^tXY.}$$

Identifiant cette matrice à un seul terme avec ce terme, nous conviendrons que $< X|Y >= {}^tXY$. En particulier, $||X||_n^2 = {}^tXY$.

I.3 b) Si $W \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de ${}^tAA$ associé à la valeur propre λ, on a donc ${}^tAAW = \lambda W$. En multipliant cette égalité à gauche par la matrice ligne ${}^tW$, cela donne :
${}^tW{}^tAAW = \lambda{}^tWW$, (l'associativité du produit matriciel nous dispense de mettre des parenthèses)
ou encore ${}^t(AW)(AW) = \lambda{}^tWW$, donc

$$\boxed{||AW||_n^2 = \lambda ||W||_p^2.}$$

I.3 c) On a déjà dit que les valeurs propres de ${}^tAA$ sont réelles (la question précédente serait d'ailleurs très ambiguë s'il n'en était pas ainsi). Compte tenu du fait que $||W||_p^2$ est strictement positif car W, vecteur propre, n'est pas nul et que $||AW||_n^2$ est positif ou nul, l'égalité de b) montre que

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } {}^tAA \text{ sont des réels positifs ou nuls.}}$$

I.4 a) Puisque $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on vérifie immédiatement que les matrices qui nous sont proposées par blocs existent effectivement et que les produits par blocs demandés sont effectivement possibles. On trouve ainsi :

$$\boxed{\begin{aligned} &\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & O_{n,p} \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xI_n + A{}^tA & A \\ O_{p,n} & I_p \end{pmatrix} \text{ et} \\ &\qquad \begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & A \\ O_{p,n} & -xI_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xI_n & O_{n,p} \\ -{}^tA & {}^tAA - xI_p \end{pmatrix}. \end{aligned}}$$

I.4 b) Toutes ces matrices sont carrées d'ordre $n + p$. Les relations ci-dessus nous donnent des relations entre leurs déterminants.

Notons $P(x)$ le déterminant de $\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix}$. Les autres déterminants sont triangulaires (leurs déterminants sont alors le produit des termes diagonaux) ou se développent sans problème suivant lignes ou colonnes.
On arrive ainsi aux relations :
$P(x).(-1)^n = \det(-xI_n + A\,{}^tA)$ et $P(x).(-1)^{n+p}x^p = (-1)^n x^n \det({}^tAA - xI_p)$.
On en déduit $(-1)^n x^n \det({}^tAA - xI_p) = (-1)^p x^p \det(A\,{}^tA - xI_n)$
Mise à part peut-être la racine $x = 0$, les polynômes caractéristiques $\det({}^tAA - xI_p)$ et $\det(A\,{}^tA - xI_n)$ de ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ ont donc les mêmes racines, avec le même ordre de multiplicité :

$\boxed{{}^tAA \text{ et } A\,{}^tA \text{ ont les mêmes valeurs propres non nulles, avec le même ordre de multiplicité}}$

I.4 c) Le rang d'une matrice diagonale D est égal au nombre k des éléments diagonaux non nuls : aucune des colonnes non nulles n'est combinaison linéaire des autres colonnes non nulles ; la famille des colonnes non nulles est donc de rang k. Accoler ensuite des colonnes nulles ne modifie pas le rang.
Une matrice diagonalisable M est semblable à une matrice diagonale D, portant sur la diagonale les valeurs propres de M répétées avec leur ordre de multiplicité. Le rang de D est donc le nombre de valeurs propres non nulles de M éventuellement répétées.
Enfin, deux matrices semblables ont le même rang.
Le rang d'une matrice diagonalisable est donc égal au nombre de ses valeurs propres non nulles, chacune étant comptée avec son ordre de multiplicité. Comme ici ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ sont diagonalisables, on déduit de b) que :

$\boxed{{}^tAA \text{ et } A\,{}^tA \text{ ont le même rang.}}$

I.5 Comme ${}^tAA \in M_p(\mathbb{R})$, on a : $\operatorname{rang}({}^tAA) \leqslant p$ donc $\operatorname{rang}(A\,{}^tA) \leqslant p$. Si $n > p$, le rang de $A\,{}^tA$ ne peut être égal à sa taille n donc cette matrice $A\,{}^tA$ n'est pas inversible. Autrement dit :

$\boxed{\text{Si } n > p, 0 \text{ est valeur propre de } A\,{}^tA.}$

Le cas $n < p$ est symétrique.

I.6 Comme on l'a déjà dit, ${}^tAA$ est symétrique réelle de taille p donc il existe une base orthonormale $(V_1, V_2, \dots, V_p)$ de $\mathbb{R}^p$ formée de vecteurs propres de ${}^tAA$. L'énoncé suppose, un peu plus loin, cette base rangée de telle façon que les valeurs propres associées aux vecteurs de base soient, dans l'ordre, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$. Si P est la matrice de passage (orthogonale) de la base canonique de $\mathbb{R}^p$ à cette base $(V_1, V_2, \dots, V_p)$, on a donc

$${}^tAA = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{bmatrix} P^{-1}.$$

I.6 a) On a ordonné les λ_k de sorte que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_p \geqslant 0$. Si λ_1 était nul, tous les autres λ_k seraient nuls. La matrice diagonale D ci-dessus serait nulle donc ${}^tAA$ serait nulle, ce qui n'est pas depuis I.1.

$\boxed{\lambda_1 \text{ est non nul.}}$

I.6 b) L'entier r est le nombre de valeurs propres non nulles de ${}^tAA$, chacune étant répétée avec son ordre de multiplicité. Comme ${}^tAA$ est diagonalisable, r est le nombre de termes diagonaux non nuls d'une matrice diagonale D semblable à A donc de même rang que A.
r est donc le rang de ${}^tAA$, donc de $A\,{}^tA$. r est donc inférieur à la taille de $A\,{}^tA$:

$\boxed{r \text{ est inférieur ou égal à } n.}$

Le théorème du rang nous dit que $\operatorname{rang}(A\,{}^tA) + \dim(\ker(A\,{}^tA)) = n$, car la taille de $A\,{}^tA$ est n. Comme $\operatorname{rang}(A\,{}^tA) = r$:

$\boxed{\text{La dimension de } \ker(A\,{}^tA) \text{ est égale à } n - r.}$

I.6 c) Pour i de 1 à r on pose donc $U_i = \dfrac{1}{\mu_i}AV_i$. Cela a un sens puisque $\mu_i = \sqrt{\lambda_i} \neq 0$ et que le produit AV_i existe.
L'égalité $AV_i = \mu_i U_i$ résulte immédiatement de $U_i = \dfrac{1}{\mu_i}AV_i$ et ne mérite pas d'être encadrée.

Si $r < p$ et si i est entre $r+1$ et p, V_i est vecteur propre de ${}^tAA$ associé à la valeur propre $\lambda_i = 0$; donc ${}^tAAV_i$ est le vecteur nul de $\mathbb{R}^p$. Donc le réel ${}^tV_i\,{}^tAAV_i$ est nul. Comme c'est $||AV_i||^2$, on en déduit que

$\boxed{AV_i \text{ est nul pour } i \text{ entre } r+1 \text{ et } p, \text{ si } r < p.}$

I.6 d) Soit i entre 1 et r. Puisque V_i est vecteur propre de ${}^tAA$ associé à la valeur propre λ_i, on a :
${}^tAU_i = \dfrac{1}{\mu_i}{}^tAAV_i = \dfrac{\lambda_i}{\mu_i}V_i = \dfrac{\mu_i^2}{\mu_i}V_i = \mu_i V_i$.

$\boxed{\text{Pour } i \text{ entre 1 et } r \text{ on a } {}^tAU_i = \mu_i V_i.}$

I.6 e) Si $n > r$ et si i est entre $r+1$ et n, U_i est, par définition, dans $\ker A\,{}^tA$ donc $A\,{}^tAU_i = 0$ donc (méthode déjà employée) $||\,{}^tAU_i||^2 = {}^tU_iA\,{}^tAU_i = 0$ donc ${}^tAU_i = 0$

$\boxed{\text{Si } n > r \text{ et si } i \text{ est entre } r+1 \text{ et } n, \text{ alors } {}^tAU_i = 0.}$

Remarque : Plus généralement, si $W \in \ker A\,{}^tA$, on a $A\,{}^tAW = 0$ donc ${}^tWA\,{}^tAW = 0$ donc $||\,{}^tAW||^2 = 0$, donc ${}^tAW = 0$ donc $W \in \ker {}^tA$. Comme l'inclusion inverse est évidente, on a $\ker A\,{}^tA = \ker {}^tA$.

En remplaçant A par ${}^tA$, on a de même $\ker {}^tAA = \ker A$.

I.6 f) Pour i de 1 à r, on a $A\,{}^tAU_i = \mu_i AV_i$ (d'après d)) $= \mu_i^2 U_i = \lambda_i U_i$: U_i est vecteur propre de $A\,{}^tA$ associé à la valeur propre λ_i (non nulle).

Si $r < n$ et si i est entre $r+1$ et n, on a déjà dit que $A\,{}^tAU_i = 0$: U_i est vecteur propre de $A\,{}^tA$ associé à la valeur propre 0.

Pour i et j entre 1 et n on a, en utilisant le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$, $< U_i|U_j >= \delta_{i,j}$. En effet :

- Si i et j sont tous deux entre $r+1$ et n, $< U_j|U_i >= \delta_{i,j}$ car $(U_{r+1}, \dots, U_n)$ est une base orthonormale de $\ker A\,{}^tA$.

- Si i et j sont tous deux entre 1 et r,

$< U_j|U_i >= {}^tU_jU_i = \dfrac{1}{\mu_i\mu_j}({}^tV_j\,{}^tA)(AV_i) = \dfrac{1}{\mu_i\mu_j}{}^tV_j({}^tAAV_i) = \dfrac{\lambda_i}{\mu_i\mu_j}{}^tV_jV_i$ (par définition de V_i)
$= \dfrac{\mu_i}{\mu_j}{}^tV_jV_i$. C'est encore $\delta_{i,j}$ car la famille $(V_1, \dots, V_r)$ est orthonormée.

- Si l'un, j par exemple, est entre 1 et r et l'autre, i, entre $r+1$ et n, alors

vskip 3mm $< U_j|U_i >= {}^tU_jU_i = \dfrac{1}{\mu_j}({}^tV_j\,{}^tA)U_i = \dfrac{1}{\mu_j}{}^tV_j({}^tAU_i) = 0$ d'après c).

Rassemblons ces résultats :

$\boxed{\begin{array}{l} (U_1, \dots, U_n) \text{ constitue une base orthonormale de } \mathbb{R}^n \text{ formée de vecteurs propres de } A\,{}^tA. \\ \text{Pour } i \text{ de 1 à } r, U_i \text{ est associé à } \lambda_i. \text{ Pour } i \text{ de } r+1 \text{ à } n, (\text{si } r < n)\ U_i \text{ est associé à 0.} \end{array}}$

I.7 V est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^p$ à la base $(V_1, \dots, V_p)$ qui est orthonormale. Cette matrice V est donc orthogonale.

Il en est de même de U, matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $(U_1, \dots, U_n)$.

I.7 a) La matrice ${}^tUAV$ existe effectivement et c'est une matrice à n lignes et p colonnes.
La j-ième colonne de AV est AV_j ; la i-ème ligne de ${}^tU$ est ${}^tU_i$, donc $({}^tUAV)_{i,j} = {}^tU_iAV_j$.

• Si j est entre 1 et r, $AV_j = \mu_j V_j$ d'après c) ; ${}^tU_iAV_j = \mu_j {}^tU_iU_j = \mu_j\delta_{i,j}$ puisque $(U_1, \dots, U_n)$ est une base orthonormale.
• Si j est entre $r+1$ et p, AV_j est nul d'après c), donc ${}^tU_iAV_j$ est nul ; comme d'autre part $\mu_j = 0$, on peut encore écrire ${}^tU_iAV_j = \mu_j\delta_{i,j}$.
Dans les deux cas :

$$\boxed{({}^tUAV)_{i,j} = \mu_j\delta_{i,j}.}$$

I.7 b) Telle qu'on nous la donne, la matrice Δ a pour terme général $\mu_j\delta_{i,j}$, puisque $\mu_j = 0$ pour $j > r$; d'après a), on a donc $\Delta = {}^tUAV$. Il s'agit donc de montrer que $A = U{}^tUAV{}^tV$. Or cela est vrai car U et V sont orthogonales, donc : $U{}^tU = I_n$ et $V{}^tV = I_p$.

$$\boxed{\text{On a donc } A = U\Delta{}^tV.}$$

I.7 c) Pour $A = A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ on a ${}^tAA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$. Elle est diagonale mais les valeurs propres 2 et 6 ne sont pas dans le bon ordre ; on prendra donc pour (V_1, V_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ rangée à l'envers, si bien que la matrice V est $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ensuite, on a $\mu_1 = \sqrt{6}$ et $\mu_2 = \sqrt{2}$. Donc :

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}AV_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ et } U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}AV_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On a déjà vu, dans I.6.e) que le noyau de $A{}^tA$ est le noyau de ${}^tA$.

Cherchons donc U_3 dans le noyau de ${}^tA$. Comme $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ -x+y+2z \end{bmatrix}$, prenons donc comme base du noyau le vecteur normé $U_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

On vérifie au passage que (U_1, U_2, U_3) sont normés et deux à deux orthogonaux. On obtient la décomposition demandée :

$$\boxed{A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.}$$

Pour $A = B_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ on a ${}^tAA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = [2]$ donc $V = [1]$ et $U_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.
Le vecteur normé $U_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ dirige le noyau de ${}^tA$. On a ainsi la décomposition :

$$\boxed{A = B_0 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}[1].}$$

I.8 On a déjà justifié que Δ, qui porte r éléments non nuls sur la diagonale et des 0 ailleurs, est de rang r. Le produit de Δ à gauche et à droite par U et ${}^tV$ inversibles ne change pas son rang, donc :

$$\boxed{\text{Le rang de } A \text{ est } r.}$$

On aurait pu aussi utiliser le théorème du rang et le fait, déja signalé, que $\ker A = \ker {}^tAA$.

I.9 a) Le i-ème vecteur de la base canonique, E_i, a pour transposé :
${}^tE_i = [0, \ \dots \ 0, \ 1, \ 0, \ \dots \ 0]$, où le 1 est en i-ème position.
Si $V_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{pi} \end{bmatrix}$, alors $V_i{}^tE_i$ est la matrice carrée : $\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & x_{1i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x_{pi} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$, dont la i-ème colonne, la seule non nulle, est V_i. En revenant à la définition de V donnée dans I.7 il est clair que

$$\boxed{V = \sum_{i=1}^{p} V_i{}^tE_i.}$$

I.9 b) On a donc :
• D'une part $AV = \sum_{i=1}^{p} AV_i{}^tE_i = \sum_{i=1}^{r} \mu_iU_i{}^tE_i$ en utilisant I.6 .
• D'autre part $\left(\sum_{i=1}^{r}\mu_iU_i{}^tV_i\right)V = \left(\sum_{i=1}^{r}\mu_iU_i{}^tV_i\right)\sum_{j=1}^{p}V_j{}^tE_j = \sum_{i=1}^{r}\left(\mu_iU_i\sum_{j=1}^{p}{}^tV_iV_j{}^tE_j\right)$

Comme $(V_1, \dots, V_p)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^p$, $\sum_{j=1}^{p}{}^tV_iV_j{}^tE_j$ se réduit à ${}^tE_i$.

On a donc $AV = \left(\sum_{i=1}^{r}\mu_iU_i{}^tV_i\right)V$. En multipliant à droite les deux membres de l'égalité par V^{-1} (rappelons que V est inversible) :

$$\boxed{A = \sum_{i=1}^{r}\mu_iU_i{}^tV_i.}$$

Donc ${}^tAA = \sum_{i=1}^{r}\mu_i{}^tAU_i{}^tV_i$. On a vu que ${}^tAU_i = \mu_iV_i$ donc :

$$\boxed{{}^tAA = \sum_{i=1}^{r}\mu_i^2V_i{}^tV_i = \sum_{i=1}^{r}\lambda_iV_i{}^tV_i.}$$

En transposant A : ${}^tA = \sum_{i=1}^{r}\mu_iV_i{}^tU_i$, donc $A{}^tA = \sum_{i=1}^{r}\mu_iAV_i{}^tU_i = \sum_{i=1}^{r}\mu_i^2U_i{}^tU_i$ par définition de U_i, donc

$$\boxed{A{}^tA = \sum_{i=1}^{r}\lambda_iU_i{}^tU_i.}$$

I.9 c) La question n'est pas très claire ; nous présumons devoir donner une réponse utilisant les V_i et U_i.
Cherchons les vecteurs de $\ker A$ par leurs composantes $a_1, \dots, a_p$ sur la base $(V_1, \dots, V_p)$ de $\mathbb{R}^n$. L'image d'un tel vecteur est $a_1\mu_1U_1 + \dots + a_r\mu_rU_r$. Elle n'est nulle que si et seulement si $a_1 = \dots, a_r = 0$ (la famille $(U_1, \dots, U_r)$ est libre et $\mu_1, \dots, \mu_r$ sont non nuls) donc si et seulement si le vecteur est dans $V_{r+1}, \dots, V_p)$.
Même chose dans l'autre sens en partant de la base $(U_1, \dots, U_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{\ker A = \mathrm{Vect}(V_{r+1}, \dots, V_p) \text{ et } \ker {}^tA = \mathrm{Vect}(U_{r+1}, \dots, U_n)}$$

Puisque $(V_1, \dots, V_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, l'image de A est le sous-espace de $\mathbb{R}^p$ engendré par $AV_1, \dots, AV_n$, en fait par $AV_1, \dots, AV_r$ car les autres AV_k sont nuls. $AV_1, \dots, AV_r$ étant $U_1, \dots, U_r$ à des coefficients multiplicatifs non nuls près, l'image de A est donc $\mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_r)$. Même chose dans l'autre sens en partant de la base $(U_1, \dots, U_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
Finalement,

$$\boxed{\mathrm{Im}(A) = \mathrm{vect}(U_1, \dots, U_r) \text{ et } \mathrm{Im}({}^tA) = \mathrm{vect}(V_1, \dots, V_r).}$$

I.9 d) Nous avons été amenés, assez naturellement, à résoudre cette question bien plus tôt... Nous aurions pu, d'ailleurs, nous servir de son résultat pour simplifier un peu la solution de la question précédente.

Partie II

II.1 A^+ est obtenue en remplaçant dans Δ les éléments non nuls par leurs inverses et en transposant le résultat final. On trouve ainsi

$$\boxed{A_0^+ = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix},\ A_0A_0^+ = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \text{ et } A_0^+A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.}$$

Le dernier résultat est fort intéressant, il donne aussitôt :

$$\boxed{A_0A_0^+A_0 = A_0 \text{ et } A_0^+A_0A_0^+ = A_0^+.}$$

II.2 Sans calcul : $(A^+)^+$ est obtenu en remplaçant dans Δ^+, les éléments non nuls par leurs inverses, ce qui revient à remplacer Δ^+ par Δ, et on transpose le résultat final, ce qui restaure A.

$$\boxed{(A^+) \doteq A.}$$

II.3 En introduisant la matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_r(\mathbb{R})$ qui a sur la diagonale $\mu_1, \dots, \mu_r$, on peut écrire, par blocs, $\Delta = \begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix}$ et $\Delta^+ = \begin{pmatrix} D^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}$, en utilisant des blocs de zéros de tailles convenables. En faisant des produits par blocs, on obtient alors que

$$\boxed{\Delta^+\Delta \text{ et } \Delta\Delta^+ \text{ sont les deux matrices carrées de tailles } p \text{ et } n \text{ de la forme } \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.}$$

II.4 En particulier, si $n = p = r$, $\Delta^+\Delta$ et $\Delta\Delta^+$ sont égaux à I_r. Comme Δ^+ et Δ sont carrées de taille r,

$$\boxed{\text{elles sont inverses l'une de l'autre.}}$$

II.5 On peut reprendre les calculs de I.9 b) en remplaçant les μ_k par des $\dfrac{1}{\mu_k}$ et en transposant le résultat final. On arrive donc à

$$\boxed{A^+ = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\mu_i} V_i {}^tU_i.}$$

donc $AA^+ = \sum_{i=1}^{r} \dfrac{1}{\mu_i} AV_i {}^tU_i$. Comme $AV_i = \mu_i U_i$, cela donne bien

$$\boxed{AA^+ = \sum_{i=1}^{r} U_i {}^tU_i.}$$

De même $A^+A = \sum_{i=1}^{r} \dfrac{1}{\mu_i} V_i {}^tU_i A$. Comme ${}^tAU_i = \mu_i V_i$, on a ${}^tU_i A = \mu_i {}^tV_i$ donc

$$\boxed{A^+A = \sum_{i=1}^{r} V_i {}^tV_i.}$$

II.6 a) On a donc, pour j de 1 à n : $AA^+U_j = \sum_{i=1}^{r} U_i {}^tU_iU_j$. La matrice ${}^tU_iU_j$ a un seul élément, qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon car $(U_1, \dots, U_n)$ est orthonormale. Il y a au plus un terme non nul dans la somme $\sum_{i=1}^{r} U_i {}^tU_iU_j$ et plus précisément :

$$\boxed{\text{Si } j \text{ est entre 1 et } r,\ AA^+U_j = U_j, \text{ sinon } AA^+U_j \text{ est nul.}}$$

La base $(U_1, \dots, U_n)$ de $\mathbb{R}^n$ étant orthonormée, la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_r)$ laisse invariants les vecteurs $(U_1, \dots, U_r)$ et transforme en 0 les vecteurs $(U_{r+1}, \dots, U_n)$. L'application dont la matrice sur la base canonique est AA^+ et cette projection orthogonale sont donc égales puisqu'elles coïncident sur une base. Or, on a vu en I.9 c) que $\mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_r) = \mathrm{Im}(A)$ donc

$$\boxed{AA^+ \text{ est la matrice dans la base canonique de } \mathbb{R}^n \text{ de la projection orthogonale de } \mathbb{R}^n \text{ sur } \mathrm{Im}(A).}$$

II.6 b) De même $A^+AV_j = \sum_{i=1}^{r} V_i {}^tV_iV_j = V_i$ si $j \leqslant r$ et $A^+AV_j = 0$ si $j \geqslant r+1$ donc A^+A est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(V_1, \dots, V_r)$, qui est l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(V_{r+1}, \dots, V_p)$, lui-même égal à $\ker A$:

$$\boxed{A^+A \text{ est la matrice dans la base canonique de } \mathbb{R}^p \text{ de la projection orthogonale de } \mathbb{R}^p \text{ sur } (\ker A)^\perp.}$$

II.7 Les projections orthogonales sont des endomorphismes autoadjoints et la matrice d'un endomorphisme autoadjoint sur une base orthonormale est symétrique. C'est le cas ici de AA^+ et A^+A, donc

$$\boxed{AA^+ = {}^t(AA^+) \text{ et } A^+A = {}^t(A^+A).}$$

(On pouvait remarquer aussi que AA^+ et A^+A sont sommes de matrices symétriques (les $U_i {}^tU_i$ et les $V_i {}^tV_i$) et sont donc symétriques.) De $A^+A = \sum_{i=1}^{r} V_i {}^tV_i$ on déduit $AA^+A = \sum_{i=1}^{r} AV_i {}^tV_i = \sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i {}^tV_i$. On reconnaît l'expression de A trouvée au I.9 b). donc $AA^+A = A$. En remplaçant A par A^+ et tenant compte de $A^{++} = A$ déjà établi, cela donne $A^+AA^+ = A^+$.

$$\boxed{AA^+A = A \text{ et } A^+AA^+ = A^+.}$$

II.8

i) D'une façon générale, si M et N sont deux matrices telles que le produit MN existe, on a $\mathrm{Im}(MN) \subset \mathrm{Im}(M)$ et $\ker N \subset \ker MN$. Ici on a donc $\mathrm{Im}A = \mathrm{Im}AA^+A \subset \mathrm{Im}AA^+ \subset \mathrm{Im}A$, $\ker A^+ \subset \ker AA^+ \subset \ker A^+AA^+ = \ker A^+$ et les deux autres sont analogues. Par doubles inclusions,

$$\boxed{\mathrm{Im}A = \mathrm{Im}AA^+,\ \ker A^+ = \ker AA^+,\ \mathrm{Im}A^+ = \mathrm{Im}A^+A \text{ et } \ker A = \ker A^+A.}$$

On pouvait dire aussi que, puisque AA^+ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathrm{Im}(A)$, son image est $\mathrm{Im}(A)$.

ii) Comme AA^+ est un projecteur de $\mathbb{R}^n$, son image et son noyau sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$. Comme cette image et ce noyau sont $\mathrm{Im}A$ et $\ker A^+$, on a donc

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}A \oplus \ker A^+ \text{ et de même } \mathbb{R}^p = \mathrm{Im}A^+ \oplus \ker A.}$$

II.9 a) Avec les hypothèses faites,
$B = BAB = B(AB) = B{}^t(AB) = B{}^tB{}^tA$; $B = BAB = (BA)B = {}^t(BA)B = {}^tA{}^tBB$;
$A = ABA = A(BA) = A{}^t(BA) = A{}^tA{}^tB$; $A = ABA = (AB)A = {}^t(AB)A = {}^tB{}^tAA$. D'où :

$$\boxed{B = B{}^tB{}^tA,\ B = {}^tA{}^tBB,\ A = A{}^tA{}^tB,\ A = {}^tB{}^tAA,\ {}^tA = {}^tAAB,\ {}^tA = B{}^tAA,}$$

les deux dernières étant obtenues en transposant les deux précédentes.

II.9 b) On a vu dans I.6 que $\mathrm{Im}A{}^tA = \mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_r)$ et $\ker {}^tA = \mathrm{Vect}(U_{r+1}, \dots, U_n)$ donc $\mathbb{R}^n = \ker {}^tA \oplus \mathrm{Im}A{}^tA$. Si $X \in \ker {}^tA$, alors $BX = B{}^tB{}^tAX = 0$, d'après II.9 a)i).
Si $X \in \mathrm{Im}A{}^tA$, X peut s'écrire $A{}^tAY$ avec $Y \in \mathbb{R}^n$ et $BX = BA{}^tAY = {}^tAY$, d'après II.9 a)iii).
Les restrictions de $X \mapsto BX$ aux deux sous-espaces supplémentaires $\ker {}^tA$ et $\mathrm{Im}A{}^tA$ ne peuvent donc avoir qu'une valeur possible. Sachant que B vérifie les relations (1), l'application $X \mapsto BX$ ne peut donc avoir qu'une valeur possible. Or A^+ vérifie les relations (1), donc :

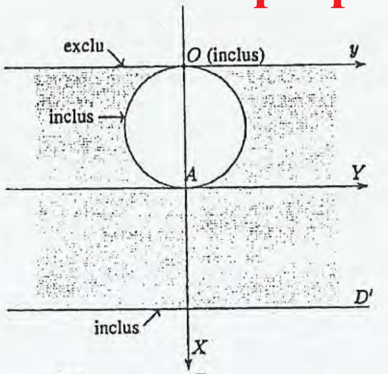
$$\boxed{B = A^+}$$

II.10 On a déjà justifié que $(A^+)^+ = A$. A étant donnée sous la forme $U\Delta{}^tV$, ${}^tA = V{}^t\Delta{}^tU$ donc $({}^tA)^+ = U(({}^t\Delta)^+){}^tV$, alors que ${}^t(A^+) = U({}^t(\Delta^+)){}^tV$. On passe de Δ à $({}^t\Delta)^+$en transposant puis en remplaçant les éléments non nuls de ${}^t\Delta$ par leurs inverses. Il est clair qu'on pourrait commencer par la deuxième opération, donc $({}^t\Delta)^+ = {}^t(\Delta^+)$. Résumons :

$$\boxed{(A^+)^+ = A \text{ et } ({}^tA)^+ = {}^t(A^+).}$$

I.6.a)

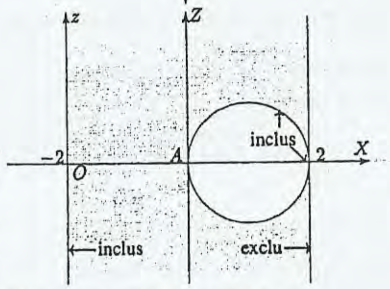
• La projection orthogonale de S sur le plan « horizontal » $(A; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est la réunion des projections de l'axe Oz, projection qui est le point O, et des projections des cercles C, projections qui sont les diamètres QR de ces cercles. Quand θ décrit $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, ce diamètre balaie la zone délimitée par l'axe Oy (exclu), le cercle Γ (compris sauf O) et la droite D' (comprise). D'où le dessin ci-contre.



• Le point $M_1(X, O, Z)$ appartient à la projection orthogonale de S sur le plan « vertical » $(A; \vec{\imath}, \vec{k})$ si et seulement si il existe Y tel que
$Z^2(X+2)+Y^2(X-2)+X(X^2-4)=0$.
Cette équation en Y, de la forme $aY^2+b=0$, avec

$$a = X-2 \text{ et } b = Z^2(X+2)+X(X^2-4) = (X+2)(Z^2+X^2-2X),$$

a des solutions si et seulement si $a = b = 0$ ou si $a \neq 0$ et b de signe contraire à a.
$a = b = 0$ donne le point $(X=2, Z=0)$.
b de signe contraire à a équivaut à
$(X-2)(X+2)(Z^2+X^2-2X) \leqslant 0$.
Un point est ou non dans cette zone suivant sa position par rapport aux droites $X = 2$ et $X = -2$ et sa position par rapport au cercle $X^2+Z^2-2X=0$. On doit enlever la droite $X = 2$ de la zone pour respecter la clause $a \neq 0$. D'où le dessin ci-contre :

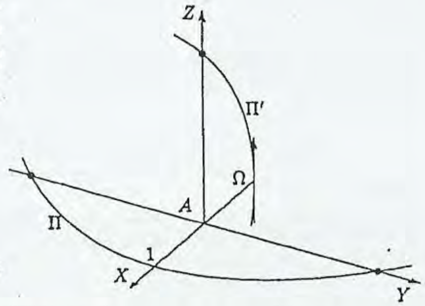


On pouvait prévoir, intuitivement, que les points de « l'étranglement circulaire » de la surface, dont on a parlé plus haut ne seraient projections orthogonales sur XAZ d'aucun point de cette surface.
Autre solution : S est symétrique par rapport à la droite $(A, \vec{\jmath}+\vec{k})$ et le plan XAZ est symétrique du plan XAY par rapport à cette même droite. On en déduit le deuxième dessin à partir du premier par symétrie par rapport à cette droite $(A, \vec{\jmath}+\vec{k})$.

I.6.b) Le point $M_2(0, Y, Z)$ appartient à la projection orthogonale de S sur le plan $(A; \vec{\jmath}, \vec{k})$ si et seulement si il existe X tel que $Y^2(X-2)+Z^2(X+2)+X(X^2-4)=0$. Pour Y et Z fixés, cette équation du troisième degré en X admet une solution au moins, donc :

$$\boxed{\text{La projection orthogonale de } S \text{ sur le plan } (A; \vec{\jmath}, \vec{k}) \text{ est ce plan tout entier.}}$$

I.7. La surface S privée de D et D' est laissée globalement invariante par la symétrie orthogonale d'axe $(A, \vec{\jmath}+\vec{k})$. L'ensemble des normales à cette surface est aussi laissé globalement invariant par cette symétrie. Puisque ces normales rencontrent toute la parabole Π, elles rencontrent aussi toutes la courbe Π' symétrique de Π par rapport à $(A, \vec{\jmath}+\vec{k})$. Π est paramétrée par : $X = 1-\frac{t^2}{8}$; $Y = t$; $Z = 0$.
Π' est donc paramétrée par :
$X = -1+\frac{t^2}{8}$; $Y = 0$; $Z = t$.
C'est donc la parabole $X = -1+\frac{Z^2}{8}$ du plan $Y = 0$. Son foyer est donc le point $(1, 0, 0)$; c'est donc le sommet de Π.
La directrice est la droite $(Y = 0, X = -3)$.



$$\boxed{\text{La normale en un point de } S \text{ privée de } D \text{ et } D' \text{ rencontre les deux paraboles } \Pi \text{ et } \Pi'.}$$

La normale à S en un point R de D' est la droite RN parallèle à Ox. Elle rencontre effectivement Π (en N) mais ne rencontre pas Π'. Par symétrie, la normale à S en un point de D rencontrera Π' mais pas Π.

Deuxième Partie

II.1.

II.1.a) Par hypothèse, les composantes de $\overrightarrow{N(u)P(v)}$ sont des fonctions de (u, v) qui sont C^2 sur $I \times J$. Il en est de même de $\|\overrightarrow{N(u)P(v)}\|^2$, qui est la somme de leurs carrés. En outre, cette quantité ne s'annule pas sur $I \times J$ (les trois vecteurs $\overrightarrow{N(u)P(v)}$, $\overrightarrow{N'(u)}$ et $\overrightarrow{P'(v)}$ sont linéairement indépendants donc non nuls). Par composition par la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est C^∞ sur $]0, +\infty[$, on voit que :

$$\boxed{\text{La fonction } (u, v) \mapsto l(u, v) = \|\overrightarrow{N(u)P(v)}\| \text{ est } C^2 \text{ sur } I \times J.}$$

Il en est de même de la fonction $\frac{1}{l}$ puisque l ne s'annule pas sur $I \times J$. Enfin $K(u, v) = \frac{1}{l(u,v)}\overrightarrow{N(u)P(v)}$ est le produit d'une fonction scalaire et d'une fonction vectorielle toutes les deux de classe C^2 sur $I \times J$, donc :

$$\boxed{\text{La fonction } K \text{ est } C^2 \text{ sur } I \times J.}$$

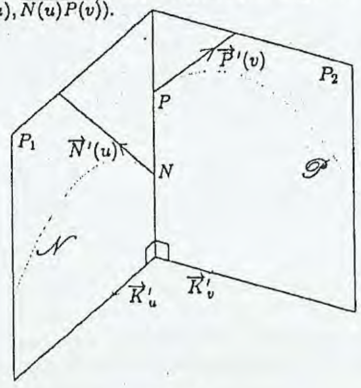
II.1.b) Les dérivations partielles qui suivent sont donc licites et peuvent être faites dans un ordre quelconque.
$\overrightarrow{ON}(u) = \overrightarrow{OP}(v) - l(u, v)\vec{K}(u, v)$ donc $\vec{N}'(u) = -l'_u\vec{K} - l\vec{K}'_u$. $\vec{K}$ est unitaire donc $\vec{K}.\vec{K}'_u = 0$ donc $\vec{K}.\vec{N}'(u) = -l'_u\vec{K}^2$, donc :

$$\boxed{\vec{K}.\vec{N}'(u) = -l'_u \text{ et, de même, } \vec{K}.\vec{P}'(v) = l'_v.}$$

De $\vec{N}'(u) = -l'_u\vec{K} - l\vec{K}'_u$ on déduit, par dérivation par rapport à v : $0 = -l''_{uv}\vec{K} - l'_u\vec{K}'_v - l\vec{K}''_{uv}$, puis, par produit scalaire par $\vec{K}$: $0 = -l''_{uv} - l\vec{K}.\vec{K}''_{uv}$.
Par ailleurs $\vec{K}.\vec{K}'_u = 0$ donne par dérivation par rapport à v : $\vec{K}'_v.\vec{K}'_u + \vec{K}.\vec{K}''_{uv} = 0$. D'où :

$$\boxed{\vec{K}'_u.\vec{K}'_v = -\vec{K}.\vec{K}''_{uv} = \frac{l''_{uv}}{l}.}$$

II.2. Rappelons que les plans tangents à une courbe en un point M de cette courbe sont les divers plans qui contiennent la tangente à la courbe.
Ici, la tangente à $\mathcal{N}$ en N est dirigée par $\vec{N}'(u)$ puisque ce vecteur est non nul et $P(v)$ n'est pas sur cette tangente puisque $\overrightarrow{N(u)P(v)}$ n'est pas colinéaire à $\vec{N}'(u)$. Il passe donc par $P(v)$ un plan tangent en $N(u)$ à $\mathcal{N}$ et un seul, et c'est le plan $P_1 = (N(u); \vec{N}'(u), \overrightarrow{N(u)P(v)})$.
De $\vec{N}'(u) = -l'_u\vec{K} - l\vec{K}'_u$ on déduit
$\vec{K}'_u = -\frac{l'_u}{l}\vec{K} - \frac{1}{l}\vec{N}'(u) = -\frac{l'_u}{l^2}\overrightarrow{NP} - \frac{1}{l}\vec{N}'(u)$.
Le vecteur $\vec{K}'_u$ est donc dans la direction du plan tangent en $N(u)$ à $\mathcal{N}$ et non nul car $\overrightarrow{NP}$ et $\vec{N}'(u)$ sont linéairement indépendants et $\frac{1}{l}$ n'est pas nul. Enfin, il est orthogonal à $\overrightarrow{NP}$ car $\overrightarrow{NP}$ est colinéaire à $\vec{K}$.
De même $\vec{K}'_v$ est orthogonal à $\overrightarrow{NP}$ et il est dans la direction du plan tangent P_2 en P à $\mathcal{P}$ et passant par N.
Le dessin montre alors clairement que les deux plans tangents sont orthogonaux si et seulement si les vecteurs $\vec{K}'_u$ et $\vec{K}'_v$ sont eux-mêmes orthogonaux, donc si $\vec{K}'_u.\vec{K}'_v$ est nul. D'après II.1.b) :



$$\boxed{\text{Cela est vrai si et seulement si : } \forall (u, v) \in I \times J,\ l''_{uv} = 0.}$$

Le dessin permet aussi de comprendre pourquoi le couple de courbes $(\mathcal{N}, \mathcal{P})$ est alors qualifié d'orthoptique : quels que soient les points N et P sur $\mathcal{N}$ et sur $\mathcal{P}$, l'observateur placé très loin sur la droite NP a l'illusion que les deux courbes se coupent à angle droit.

Dire que : $\forall(u,v)\in I\times J,\ l''_{uv}=0$ équivaut à dire que, pour u_0 fixé dans I, la fonction $v\in J\mapsto l'_u(u_0,v)$ est constante sur J, donc de la forme $A(u_0)$.
Il existe donc une fonction A définie sur I et telle que : $\forall(u,v)\in I\times J,\ l'_u(u,v)=A(u)$ et A doit être, comme l'_u à v fixé, de classe C^1 sur I. A doit donc admettre des primitives de classe C^2 sur I. Soit α l'une d'elles. On doit avoir : $\forall(u,v)\in I\times J,\ l'_{u,v}=\alpha'(u)$. Pour v_0 fixé dans J, il doit exister une constante β_0 telle que $\forall u\in I,\ l(u,v_0)=\alpha(u)+\beta_0$. β_0 est fonction de v_0. Il existe donc une fonction β définie sur J et telle que : $\forall(u,v)\in I\times J,\ l(u,v)=\alpha(u)+\beta(v)$. A u fixé, $l(u,v)$ doit être une fonction de classe C^2 sur J. Il doit en être de même de β.
La réciproque étant évidente :

l''_{uv} nulle équivaut à : $l(u,v)=\alpha(u)+\beta(v)$, avec α de classe C^2 sur I et β de classe C^2 sur J.

II.3.

II.3.a) Ici $\overrightarrow{N(u)P(v)}$ a pour composantes : $2(v^2+u^2-1)$, $-4u$ et $4v$. Un calcul immédiat donne $\overrightarrow{N(u)P(v)}^2=4(u^2+v^2+1)^2$ donc $l(u,v)=2(u^2+v^2+1)$, qui est de la forme requise dans II.2.
Par ailleurs, $(\overrightarrow{N(u)P(v)},\overrightarrow{N}'(u),\overrightarrow{P}'(v))$ sont linéairement indépendants car le déterminant

$$\begin{vmatrix}2(v^2+u^2-1) & -4u & 4v\\ -4u & 4 & 0\\ 4v & 0 & 4\end{vmatrix}=32(u^2+v^2-1)-64u^2-64v^2=-32(u^2+v^2+1)\neq 0.$$

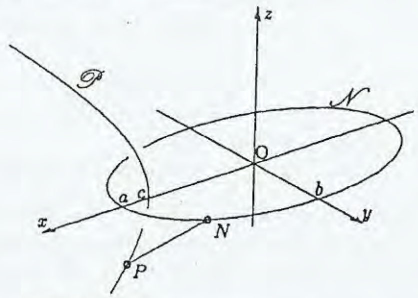
Enfin, les fonctions N et P sont C^∞ sur $\mathbb{R}$. Résumons :

Les courbes $\mathscr{N}$ et $\mathscr{P}$ forment un couple orthoptique.

$\mathscr{N}$ est la courbe $X=1-\dfrac{Y^2}{8}$ du plan $Z=0$ et $\mathscr{P}$ est la courbe $X=-1+\dfrac{Z^2}{8}$ du plan $Y=0$.
À un changement de repère près,

on retrouve les paraboles Π et Π' du I.7.

II.3.b)
La courbe $\mathscr{N}$ est évidemment une ellipse.
Le point $(a,0,0)$ en est un sommet ; le point $(c,0,0)$ en est un foyer.
Quand v décrit $\mathbb{R}$, $\operatorname{sh} v$ décrit $\mathbb{R}$. $\mathscr{P}$ est donc exactement la demi-hyperbole
$\dfrac{X^2}{c^2}-\dfrac{Z^2}{b^2}=1,\ X\geqslant 0$ du plan $Y=0$.
Elle admet pour sommet $(c,0,0)$, foyer de l'ellipse.
Comme la demi-distance focale de l'hyperbole est $\sqrt{b^2+c^2}=a$, elle admet pour foyer le point $(a,0,0)$, sommet de l'ellipse.



Les fonctions N et P sont C^∞ sur $\mathbb{R}$; les vecteurs $\overrightarrow{NP},\overrightarrow{N}'(u),\overrightarrow{P}'(v)$ sont linéairement indépendants car

$$\begin{vmatrix}c\operatorname{ch}v-a\cos u & -a\sin u & c\operatorname{sh}v\\ -b\sin u & b\cos u & 0\\ b\operatorname{sh}v & 0 & b\operatorname{ch}v\end{vmatrix}=b^2\cos u\operatorname{ch}v(c\operatorname{ch}v-a\cos u)-b^2c\operatorname{sh}^2v\cos u-b^2a\sin^2u\operatorname{ch}v$$

$$=b^2c\cos u-b^2a\operatorname{ch}v\leqslant b^2c-b^2a<0.$$

Enfin

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NP}^2 &= c^2\operatorname{ch}^2v+a^2\cos^2u-2ac\operatorname{ch}v\cos u+b^2\sin^2u+b^2\operatorname{sh}^2v\\ &= c^2\operatorname{ch}^2v+a^2\cos^2u-2ac\operatorname{ch}v\cos u+b^2-b^2\cos^2u-b^2+b^2\operatorname{ch}^2v\\ &= a^2\operatorname{ch}^2v+c^2\cos^2u-2ac\operatorname{ch}v\cos u=(a\operatorname{ch}v-c\cos u)^2\end{aligned}$$

$l(u,v)=a\operatorname{ch}v-c\cos u$ est bien de la forme $\alpha(u)+\beta(v)$ et α,β sont C^∞ sur $\mathbb{R}$. Rassemblons :

$\mathscr{N}$ et $\mathscr{P}$ forment un couple orthoptique.

II.4. Le vecteur $\overrightarrow{N}'(u)$ est non nul ; il dirige donc la tangente en N à $\mathscr{N}$. Pour u fixé dans I et v décrivant J, le point P décrit $\mathscr{P}$; le vecteur $\overrightarrow{NP}$ est dirigé par le vecteur unitaire $\overrightarrow{K}$ et $\overrightarrow{K}.\overrightarrow{N}'(u)=-l'_u=-\alpha'(u)$, qui est indépendant de v.
Le vecteur $\overrightarrow{NP}$ fait donc un angle constant avec $\overrightarrow{N}'(u)$. Il en résulte que :

P reste sur un cône de révolution dont l'axe passe par N et est dirigé par $\overrightarrow{N}'(u)$.

Le cosinus du demi-angle au sommet est $|\alpha'(u)|/\|\overrightarrow{N}'(u)\|$; il peut être nul. On ne peut plus parler de cône ; P reste alors dans un plan.

II.5.a) $\overrightarrow{OM}'_u=\overrightarrow{ON}'(u)+\overrightarrow{NM}'_u=\overrightarrow{N}'(u)+\alpha'(u)\overrightarrow{K}+(\alpha(u)+\lambda)\overrightarrow{K}'_u=-l\overrightarrow{K}'_u+(\alpha(u)+\lambda)\overrightarrow{K}'_u$
car, d'après II.1., $\overrightarrow{N}'(u)=-l'_u\overrightarrow{K}-l\overrightarrow{K}'_u=-l'_u\overrightarrow{K}-(\alpha(u)+\beta(v))\overrightarrow{K}'_u$ et $l'_u=\alpha'(u)$. Donc :
$\overrightarrow{M}'_u=(\lambda-l+\alpha(u))\overrightarrow{K}'_u=(\lambda-\beta(v))\overrightarrow{K}'_v$. Puisque $N(u)$ ne dépend pas de v, on a $\overrightarrow{M}'_v=\overrightarrow{N(u)M}'_v$:

$\overrightarrow{M}'_u=(\lambda-\beta(v))\overrightarrow{K}'_u$ et $\overrightarrow{M}'_v=(\alpha(u)+\lambda)\overrightarrow{K}'_v$.

II.5.b) Les vecteurs $\overrightarrow{K}'_u$ et $\overrightarrow{K}'_v$ sont non nuls et orthogonaux. Ils forment donc une famille libre. Si M est différent de N et P, λ est différent de $-\alpha(u)$ et de $\beta(v)$. La famille $(\overrightarrow{M}'_u,\overrightarrow{M}'_v)$ est donc libre. Il existe donc un plan tangent en M à la surface S_λ, qui est une surface paramétrée par (u,v).
De plus, la normale en M à ce plan est dirigée par $\overrightarrow{M}'_u\wedge\overrightarrow{M}'_v$, donc par $\overrightarrow{K}'_u\wedge\overrightarrow{K}'_v$, qui a la direction de $\overrightarrow{K}$, donc de $\overrightarrow{NP}$; comme la droite NP passe par M,

la droite NP est la normale en M à S_λ.

II.5.c) Pour u_0 fixé dans I et v décrivant J, $\overrightarrow{N(u_0)M}$ reste colinéaire à $\overrightarrow{K}(u_0,v)$. M reste donc sur le cône de révolution vu dans II.4. De plus, la projection de M sur l'axe de ce cône est fixe puisque l'axe est dirigé par $\overrightarrow{N}'(u_0)$ et que le produit scalaire $\overrightarrow{N(u_0)M}.\overrightarrow{N}'(u_0)$ est constant (il est égal à $-(\alpha(u_0)+\lambda)\alpha'(u_0)$, indépendant de v). Il en résulte que

M reste sur un cercle dont l'axe est $(N(u_0),\overrightarrow{N}'(u_0))$.

De même, pour v_0 fixé et u variable, M reste sur un cercle dont l'axe est $(P(v_0),\overrightarrow{P}'(v_0))$.
Les courbes $u=u_0$ et $v=v_0$ (ce que l'on appelle aussi les courbes-coordonnées de S_λ) sont donc des cercles (ou des arcs de cercles). En $M(u_0,v_0)$ il en passe une de chaque sorte. Les deux tangentes sont dirigées respectivement par $\overrightarrow{M}'_u$ et $\overrightarrow{M}'_v$, qui sont, on l'a vu, deux vecteurs orthogonaux.

Les deux cercles se coupent à angle droit en $M(u_0,v_0)$.

II.6. On a déjà vu un lien entre ce qui précède et I, puisque les paraboles Π et Π' forment un couple orthoptique. En prenant le même repère que dans II.3., qui est le repère $AXYZ$ de la figure de I.2., on peut les paramétrer respectivement par u et v, leur associer deux fonctions $\alpha(u)$ et $\beta(v)$, par exemple $\alpha(u)=2u^2$ (donc $\beta(v)=2v^2+2$) et leur appliquer tous les résultats de II.4 et II.5.
Pour un λ donné, la surface S_λ du II.5. sera décrite par le point M défini par
$$\overrightarrow{NM}=(\alpha(u)+\lambda)\overrightarrow{K}=(2u^2+\lambda)\overrightarrow{K}.$$
(Tout laisse à penser que la surface S du I est une surface S_λ du II : S contient une double famille de cercles et, quand on ampute S de D et D', la normale en M à S rencontre Π et Π'. De plus l'intersection de cette normale avec Π s'appelait déjà N, comme par hasard !)
Reprenons donc notre point M de la surface S de I. La normale en M à S rencontre Π en un certain point N. Soit u son paramètre. La normale en M à S rencontre Π' en un certain point P. Soit v son paramètre.
Soit encore $\overrightarrow{K}$ le vecteur unitaite de $\overrightarrow{NP}$.
On sait, d'après II.3.a), que l'ordonnée de N est $4u$. La distance NM, égale à la distance NR (voir I.2), est la différence des abscisses de R et N, soit $2-(1-2u^2)=2u^2+1$, donc $\overrightarrow{NM}=(2u^2+1)\overrightarrow{K}$.
On voit donc que S est la surface S_λ, en choisissant $\lambda=1$!

La surface S (privée de D et D') vue dans I entre dans le cadre de la question précédente.

La question étant imprécise, nous nous dispenserons de justifier que S privée de D et D' est la surface S_1 tout entière !

II.7. Supposons que la courbe $\mathscr{P}$ soit incluse dans une droite D. La fonction $u \mapsto P(u)$ étant de classe C^2 sur J intervalle ouvert et $\vec{P}'(u)$ ne s'annulant pas, cette portion de droite est nécessairement non réduite à un point et, pour tout $u \in I$, $\vec{P}'(u)$ est dans la direction de D. Soient $P_1(u_1)$ et $P_2(u_2)$ deux points distincts de $\mathscr{P}$. La courbe $\mathscr{N}$ est, on l'a vu, contenue dans un cône de révolution de sommet P_1 et d'axe dirigé par $\vec{P}'(u_1)$. Cet axe est donc la droite D. De même, $\mathscr{N}$ est contenue dans un cône de révolution de sommet P_2 et d'axe D.
Ces deux cônes de révolution coaxiaux et de sommets distincts se coupent suivant des cercles contenus dans des plans perpendiculaires à l'axe. (On pourrait prouver qu'il n'y en a pas plus de 2).
La courbe continue $\mathscr{N}$ ne peut avoir des points sur deux de ces cercles. Elle est donc en entier contenue dans un seul cercle, d'axe D. Comme elle est continue sur I ouvert, c'est un arc de cercle.
Réciproquement si $\mathscr{N}$ et $\mathscr{P}$ sont deux arcs paramétrés vérifiant les clauses du préambule de II et contenus, l'un dans un cercle, et l'autre dans l'axe de ce cercle, soit N un point de $\mathscr{N}$ et P un point de $\mathscr{P}$. Le plan tangent en N à $\mathscr{N}$ et passant par P et le plan tangent en P à $\mathscr{P}$ et passant par N contiennent l'arête NP d'un certain cône. L'un est tangent au cône le long de cette arête et l'autre contient l'axe du cône. Ils sont bien orthogonaux et le couple $(\mathscr{N}, \mathscr{P})$ est orthoptique.

> Les solutions sont les couples formés d'un arc de cercle ouvert et d'une portion de droite contenue dans l'axe du cercle.

Considérons un tel couple. Soit O le centre du cercle et R son rayon. Pour N sur le cercle et P sur l'axe, on a $||\overrightarrow{MN}||^2 = R^2 + OP^2$ (d'après Pythagore). On peut donc prendre $\alpha(u) = 0$ et $\beta(v) = \sqrt{R^2 + OP^2}$.
La relation $\overrightarrow{N(u)M} = (0 + \lambda)\overrightarrow{K(u,v)}$ définit donc un point M du plan ONP à distance fixe ($|\lambda|$) de N.
Pour u fixé, v variable, ce point M reste sur le cercle de centre $N(u)$, de rayon $|\lambda|$, contenu dans le plan défini par $N(u)$ et l'axe du cercle. Quand u varie, ce cercle engendre, par rotation autour de l'axe, un tore.

> Toute surface S_λ est contenue dans un tore.

II.8.a) On a déjà vu que $\vec{N}'(u) = -l'_u\vec{K} - l\vec{K}'_u$, donc $\vec{N}'(u).\vec{P}'(v) = -l'_u\vec{K}.\vec{P}'(v) - l\vec{K}'_u.\vec{P}'(v)$.
Puisque $\vec{K}'_u.\vec{P}'(v)$ est nul (cf II.2.) et $\vec{K}.\vec{P}'(v) = l'_v$ (cf II.1.b), il reste $\vec{N}'(u).\vec{P}'(v) = -l'_u l'_v$.
De plus $l = \alpha(u) + \beta(v)$ donc $l'_u = \alpha'(u)$ et $l'_v = \beta'(v)$. Finalement :

$$\boxed{\vec{N}'(u).\vec{P}'(v) = -\alpha'(u)\beta'(v).}$$

II.8.b) Soit $v_1 \in J$. Les conditions du préambule de II impliquent que $\vec{W} = \vec{P}'(v_1)$ n'est pas nul.
Si, pour tout $v \in J$, $\vec{P}'(v)$ et $\vec{P}'(v_1)$ sont liés, la fonction $\vec{P}'(v)$ est de la forme $\varphi(v)\vec{W}$, avec φ continue sur J ; donc, en désignant par Φ une primitive de φ sur J, $\overrightarrow{OP}(v)$ est de la forme $\Phi(v)\vec{W} + \vec{W}_0$. Cela impose que $\mathscr{P}$ soit contenue dans une droite, ce qui n'est pas.

> On peut donc trouver v_2 tel que $\vec{P}'(v_1)$ et $\vec{P}'(v_2)$ soient linéairement indépendants.

On ne peut avoir $\beta'(v_1) = \beta'(v_2) = 0$ sinon $\vec{N}'(u)$ serait orthogonal aux deux vecteurs linéairement indépendants $\vec{P}'(v_1)$ et $\vec{P}'(v_2)$; il garderait une direction fixe ce qui impliquerait, comme ci-dessus, l'inclusion de $\mathscr{N}$ dans une droite. La combinaison linéaire $\vec{H} = \beta'(v_1)\vec{P}'(v_2) - \beta'(v_2)\vec{P}'(v_1)$ des deux vecteurs linéairement indépendants $\vec{P}'(v_1)$ et $\vec{P}'(v_2)$ n'est donc pas nulle.
Par ailleurs $\vec{N}'(u).\vec{H} = -\alpha'(u)(\beta'(v_1)\beta'(v_2) - \beta'(v_2)\beta'(v_1)) = 0$.

> On a trouvé un vecteur $\vec{H}$ non nul tel que : $\forall u \in I$, $\vec{N}'(u).\vec{H} = 0$.

II.8.c) Soit $u_0 \in I$. La fonction $u \in I \mapsto (\vec{N}(u) - \vec{N}(u_0))\vec{H}$ a donc une dérivée nulle sur I. Cette fonction est donc constante. Comme elle est nulle en u_0 elle est nulle partout. La courbe $\mathscr{N}$ est donc dans le plan passant par $N(u_0)$ et orthogonal à $\vec{H}$. Les deux courbes jouant le même rôle, la courbe $\mathscr{P}$ est également plane. La direction du plan contenant $\mathscr{P}$ doit contenir $\vec{P}'(v_1)$ et $\vec{P}'(v_2)$ donc $\vec{H}$, qui en est une combinaison linéaire. Comme $\vec{H}$ est orthogonal à la direction du plan de $\mathscr{N}$, les plans des deux courbes ont des directions orthogonales. Résumons :

> $\mathscr{N}$ et $\mathscr{P}$ sont deux courbes planes, situées dans deux plans perpendiculaires.

II.9.a) Le produit scalaire $\vec{N}'(u).\vec{P}'(v)$ est égal à $x'_1(u)x'_2(v)$, et aussi à $-\alpha'(u)\beta'(v)$ d'après II.8.a).
On a déjà dit que β' n'est pas la fonction nulle. Fixons v tel que $\beta'(v) \neq 0$ et posons $\mu = -x'_2(v)/\beta'(v)$.
On a donc : $\forall u \in I$, $\alpha'(u) = \mu x'_1(u)$. α' n'est pas non plus la fonction nulle, donc μ ne peut pas être nul.
On a aussi $\forall (u,v)$, $x'_1(u)x'_2(v) = -\mu x'_1(u)\beta'(v)$. En fixant u tel que $\alpha'(u) \neq 0$, on a $x'_1(u) \neq 0$, ce qui autorise la simplification. Donc : $\forall v$, $x'_2(v) = -\mu\beta'(v)$. Résumons :

> Il existe $\mu \neq 0$ tel que : $\forall u \in I$, $\alpha'(u) = \mu x'_1(u)$ et $\forall v \in J$, $\beta'(v) = -\dfrac{1}{\mu}x'_2(v)$.

II.9.b) Si $|\mu| > 1$, $|\frac{1}{\mu}| < 1$. On pose $\mu' = -\frac{1}{\mu}$ donc $g'(v) = \mu' x'_2(v)$. En échangeant les rôles des deux courbes, on se ramène au cas $|\mu| \leqslant 1$. Si $-1 \leqslant \mu < 0$, on se place dans le repère symétrique du précédent par rapport à O. La première composante x_3 de $N(u)$ est égale à $-x_1(u)$. On a donc $\alpha'(u) = -\mu x'_3(u)$ qui nous ramène au cas $0 < \mu \leqslant 1$.

> On peut se limiter au cas où $0 < \mu \leqslant 1$.

II.9.c) Si $\varphi(u) = \psi(v)$ pour tout $(u,v) \in I \times J$, on voit, en fixant u, que ψ est constante sur J. De même, φ est constante sur I. Enfin $\varphi(u) = \psi(v)$ entraîne aussi l'égalité des constantes.

> Si $\varphi(u) = \psi(v)$ pour tout $(u,v) \in I \times J$, les fonctions φ et ψ sont deux constantes de même valeur.

II.9.d) De a) on déduit que $l(u,v) = \alpha(u) + \beta(v) = \mu x_1(u) - \frac{1}{\mu}x_2(v) + K$, où K est une constante.
Si l'on fait une translation des axes de $\gamma\vec{i}$, on a, si X désigne la nouvelle abscisse d'un point :
$l(u,v) = \mu(\gamma + X_1(u)) - \frac{1}{\mu}(\gamma + X_2(v)) + K$. Choisissons γ tel que $\gamma(\mu - \frac{1}{\mu}) = K$, ce qui est possible car $\mu - \frac{1}{\mu}$ est non nul. Cela fait disparaître la constante d'intégration et nous ramène au cas où $\alpha(u) + \beta(v) = \mu x_1(u) - \frac{1}{\mu}x_2(v)$.
Les fonctions α et β étant à notre convenance pourvu que leur somme soit $l(u,v)$ on peut décider que

$$\boxed{\alpha(u) = \mu x_1(u) \text{ et } \beta(v) = -\frac{1}{\mu}x_2(v).}$$

On a alors pour tout (u,v) dans $I \times J$:
$(x_2(v) - x_1(u))^2 + y_1^2(u) + z_2^2(v) = \overrightarrow{N(u)P(v)}^2 = (\alpha(u) + \beta(v))^2 = (\mu x_1(u) - \frac{1}{\mu}x_2(v))^2$.
Après réductions : $(1-\mu)^2 x_1^2(u) + y_1^2(u) = (\frac{1}{\mu^2} - 1)x_2^2(v) - z_2^2(v)$. D'après c) cela nécessite que les deux membres soient égaux à une même constante A, strictement positive puisque le premier membre l'est.
$\mathscr{N}$ est donc contenue dans l'ellipse $(1-\mu^2)x^2 + y^2 = A$ du plan $z = 0$. En posant $a = \sqrt{\frac{A}{1-\mu^2}}$ et $b = \sqrt{A}$, cette équation prend la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. $\mathscr{P}$ est contenue dans l'hyperbole $\frac{1-\mu^2}{\mu^2}x^2 - z^2 = A$ du plan $y = 0$. En posant $c = \sqrt{\frac{A\mu^2}{1-\mu^2}}$, cette équation prend la forme $\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$.

> On retrouve exactement le couple ellipse-hyperbole du II.3.b

II.9.e) On a maintenant $\alpha(u) + \beta(v) = x_1(u) - x_2(v) + K$. L'identification des deux expressions de $\overrightarrow{N(u)P(v)}^2$ conduit à $2Kx_1(u) - y_1^2(u) + K^2 = A = z_2^2(v) + 2Kx_2(v)$. $\mathscr{N}$ est donc contenue dans la parabole $x = \frac{y^2}{2K} + \frac{A-K^2}{2K}$ du plan $z = 0$ et $\mathscr{P}$ dans la parabole $x = \frac{A}{2K} - \frac{z^2}{2K}$ du plan $y = 0$.

> Pour $k = -4$ et $A = 8$, on retrouve le couple de paraboles de II.3.a)

D'une façon plus générale, il s'agit de deux paraboles de même paramètre $p = |K|$, de même axe Ox situées dans les deux plans perpendiculaires $z = 0$ et $y = 0$. L'une tourne sa concavité vers les $x > 0$, l'autre vers les $x < 0$. La distance des sommets est $\frac{|K|}{2}$. Le foyer de l'une est donc le sommet de l'autre.

***

TABLE DES MATIÈRES