Chapitre 1 : Combinatoire, Dénombrement et Récurrence.

Prof : M. Mba Obiang

Table des matières

Question :
quelles sont les deux conditions pour que tous les dominos se renversent ?

1 Le raisonnement par récurrence

1.1 Propriétés héréditaires

Définition

Soit n un entier naturel, une propriété $\mathcal{P}(n)$ est dite héréditaire s'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

☞ **Remarque** : Attention, une propriété peut être héréditaire et toujours fausse.

Exemple

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 10^n + 1 \quad \text{et} \quad v_n = 10^n - 1$$

1. Calculer les 4 premiers termes des suites (u_n) et (v_n).
2. Montrer que pour tout n entier naturel :

$$u_{n+1} - u_n = 9 \times 10^n \quad \text{et} \quad v_{n+1} - v_n = 9 \times 10^n$$

3. On considère pour tout n entier naturel les propriétés :

   $\mathcal{P}(n)$: « u_n est divisible par 9 » et $Q(n)$: « v_n est divisible par 9 »

   Montrer que chaque propriété est héréditaire.
4. À l'aide de la calculatrice, conjecturer si les propriétés semblent vraies ou fausse.

Solution.

....

....

....

....

....

....

....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

1.2 Le raisonnement par récurrence

En mathématiques, le **raisonnement par récurrence** (ou raisonnement par induction, ou par induction complète) est une forme de raisonnement visant à démontrer une propriété $\mathcal{P}(n)$ portant sur tous les entiers naturels $n \geqslant n_0$. Le raisonnement par récurrence consiste à démontrer les points suivants :

1 la propriété est satisfaite par l'entier n_0 ;

2 chaque fois que cette propriété est satisfaite par un certain nombre entier naturel $k \geqslant n_0$, elle est également satisfaite par son successeur, c'est-à-dire par le nombre entier $k+1$.

3 Une fois cela établi, on en conclut que cette propriété est vraie pour tous les nombres entiers naturels. Cela grâce à théorème suivante :

Théorème (principe de récurrence). Admis

Soit n_0 un entier naturel.

On considère la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$.

Si la propriété $\mathcal{P}(n)$ vérifie les deux conditions suivantes :

• **Initialisation** : $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie

• **Hérédité** : Si pour un entier naturel $k \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(k)$ vraie implique $\mathcal{P}(k+1)$ vraie ;

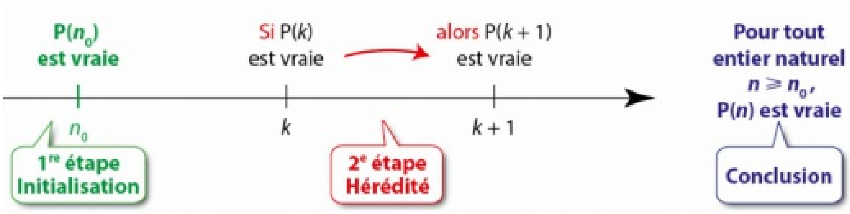
alors **pour tous les entiers $\boldsymbol{n \geqslant n_0}$**, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

☞ **Remarques**

- La propriété $\mathcal{P}(n)$ peut être une égalité, une inégalité, une propriété exprimée par une phrase, etc..

- La condition d'hérédité est une implication : on suppose $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout nombre entier naturel k supérieur ou égal à n_0(c'est **l'hypothèse de récurrence**) et on montre qu'alors $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie elle aussi. Une propriété $\mathcal{P}(n)$ qui vérifie cette deuxième condition est dite héréditaire à partir du rang n_0.

Résumé :



Exemple 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite démontrer la propriété $\mathcal{P}(n)$:

$$0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2 \;=\; \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1. Montrer que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
2. Supposons qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.
   a. Ecrire $\mathcal{P}(k+1)$
   b. Montrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
3. Conclure.

Solution.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exemple 2

Soit (a_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{10} \end{cases}$$

1. A l'aide d'un tableur afficher les 8 premiers termes de la suite (a_n). Que peut-on conjecturer ?
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$

Solution.

2 Exercices d'entraînement

2.1 Rappels : Généralités sur les suites

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par son terme général $u_n = n^2 - 4n + 3$ (pour $n \geqslant 0$).

1 Quelle est la fonction f associée à la suite (u_n) ?

2 La suite (u_n) est-elle définie explicitement ou par récurrence ?

3 Calculer les termes u_0, u_1 et u_{25}, u_{2020}.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 2$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$.

1 Quelle est la fonction f associée à la suite (u_n) ?

2 La suite (u_n) est-elle définie explicitement ou par récurrence ?

3 Calculer les termes u_2, u_3 et u_4. Peut-on calculer immédiatement u_{2020}?

4 Ecrire un programme qui affiche la valeur du terme de rang n puis le tester pour donner la valeur du terme u_{2020}.

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

a (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sqrt{n} + 17$$

b (u_n) est la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{u_n}}{n} \text{ pour } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

a (u_n) est la suite définie pour $n \geqslant 2$ par :

$$u_n = \frac{-5n}{n-1}$$

b (u_n) est la suite des nombres impairs.

c (u_n) est la suite des décimales du nombre π.

Exercice 5

On considère l'algorithme suivant :

Initialisation
 u prend la valeur 3
Traitement
Pour i allant de 1 jusqu'à 8
 | u prend la valeur $u^2 + 25u$
 | Afficher u
FinPour

1 Décrire la suite utilisée dans cet algorithme.

2 Que calcul cet algorithme ?

3 Traduire cet algorithme en langage Python ou d'une calculatrice, puis le tester.

2.2 Raisonnement par récurrence

Exercice 6

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2 \end{cases}$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = n(n+1)$.

Exercice 7

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 3(1 - 2^n)$.

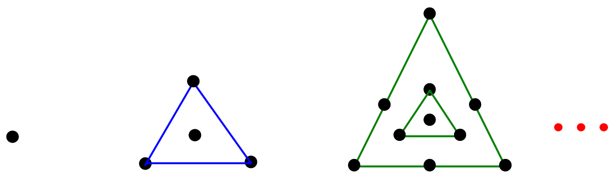
Exercice 8

Voici les premières étapes d'une construction.

Etape 0 Etape 1 Etape 2

On note u_n le nombre de points présents sur la figure à l'étape n.

Ainsi $u_0 = 1$.



a Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n + 3(n+1)$$

b Complète la fonction U ci-dessous écrite en langage Python de paramètre un nombre entier naturel n et qui affiche les n premiers termes de la suites (u_n). La saisir et la tester pour $n = 100$.

```
from pylab import *

def U(n) :
    u=1
    plot (0,u,'r.')
    for i in rang(n) :
        u=..............
        plot (i+1,u,'r.')
    show ()
    return
```

c Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$$

Exercice 9

Soit (u_n) la suite définie pour n entier naturel par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

1 Calculer les premiers termes de la suite. Est-elle arithmétique ? géométrique ?

2 Émettre une conjecture sur l'expression u_n en fonction de n.

3 Démontrer cette formule par récurrence.

Exercice 10

Soit $a \in [0;1]$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n(1-u_n)$.

1 Montrer que, pour tout $x \in [0;1]$, $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.

2 Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.

3 ROC

3.1 Inégalité de Bernoulli

Propriété

Soit α un réel strictement positif, alors pour tout entier naturel n.

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$$

Démonstration.

□

4 Ensemble finis

4.1 Principes additif et multiplicatif

4.1.1 Principes additif

Soit n, m et k des entiers naturels.

Définition

Un **ensemble fini** est un ensemble qui possède un nombre fini d'éléments.

On note alors le plus souvent Card (A) « cardinal de A » le nombre d'éléments de l'ensemble A, mais aussi |A| ou #A.

Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments que contient un ensemble fini, c'est à dire en déterminer le cardinal.

Exemple

Dans une classe de 32 élèves se répartit comme suit :

- 15 élèves ont choisi l'option musique ;
- 17 élèves ont choisi loption danse ;
- 3 élèves ont choisi les deux options.

On note respectivement M, D et S les ensembles formés des élèves qui ont choisi l'option musique, l'option danse et les deux options.

a) Déterminer Card (M), Card (D) et Card (S).

b) Déterminer le nombre d'élèves qui n'ont choisi aucune de ces options.

c) Déterminer le nombre d'élèves qui n'ont choisi l'option danse mais pas l'option musique.

Solution.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

☞ **Remarque**

Le cardinal de l'ensemble vide $\emptyset$ est 0 soit Card $(\emptyset) = 0$.

4.1.2 Propriété (Principe additif)

Soit A et B deux ensembles finis de cardinaux m et n.

Propriété

Si les ensembles A et B sont disjoints (donc d'intersection l'ensemble vide) alors le **nombre** d'éléments de **la réunion A∪B** est la **somme** $\boldsymbol{m+n}$.

☞ **Notation et cas général**

Pour toutes parties A et B d'un ensemble fini E :

$$\mathbf{card(A \cup B) \; = \; card(A) + card(B) - card(A \cap B)}$$

En effet,

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exemple

Dans une classe de 25 élèves, 15 élèves s'inscrivent à l'atelier théâtre, 8 élèves s'inscrivent à l'atelier musique et 4 élèves s'inscrivent à ces deux ateliers.

1. Déterminer le nombre d'élèves s'inscrivant dans au moins l'un de deux ateliers.

2. Combien d'élèves ne s'inscrivent ni à l'atelier théâtre ni à l'atelier musique ?

Solution.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4.1.3 Principe multiplicatif

Définition(couples,triplets)

Soit E un ensemble de cardinal n ($n \geqslant 3$)

- **Couples ou 2-uplets**.

  Un couple de E est la donnée de deux éléments a et b de E dans un ordre particulier. On le note $(a\,;\,b)$.

  ☞ Attention les couples $(a\,;\,b)$ et $(b\,;\,a)$ sont différents

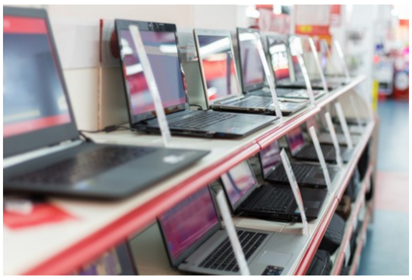
- **Triplets ou 3-uplets**.

  Un triplet de E est la donnée de trois éléments a, b et c de E dans un ordre particulier. On le note $(a\,;\,b\,;\,c)$.

  ☞ Attention les triplets $(a\,;\,b\,;\,c)$ et $(a\,;\,c\,;\,b)$ sont différents.

Exemple - produit cartésien

Pierre se rend dans un magasin pour acheter un ordinateur portable et un sac pour le protéger.
On lui propose le choix entre 4 ordinateurs portables de mêmes dimensions et entre 7 sacs.



$E_1 = \{\text{Portable 1; Portable 2; Portable 3; Portable 4}\}$

$E_2 = \{\text{Sac1; Sac2; Sac3; Sac4; Sac 5; Sac6; Sac7}\}$

On appelle produit cartésien $E_1 \times E_2$ l'ensemble de tous les couples formés d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2.

Définition

Soit A et B deux ensembles de cardinaux n et m.

Le produit cartésien de deux ensembles finis A et B est l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ où x est un élément de A et y un élément de A.

☞ **Notation et cas général**

Si on effectue un produit cartésien d'un ensemble sur lui-même, on note $E^2 = E \times E$ et dans le cas général, E^k est le produit cartésien de k ensembles E.

Exemple 1 : Utilisation d'un tableau ou un arbre pour représenter le produit cartésien $E \times F$.

On lance deux dés à six faces. On note $E^2 = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$ l'ensemble des résultats possibles pour un dé. Alors E^2 est l'ensemble des couples possibles pour deux dés.

Déterminer les nombre de couples appartenants à E^2.

Solution.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exemple 2

On considère les ensembles $E = \{a; b\}$ et $F = \{1; 2; 3\}$.

a) Déterminer le nombre d'éléments de $E \times F$.

b) Déterminer ses éléments.

Propriété

Si A et B sont deux ensembles finis constitués respectivement de n et m éléments, alors $A \times B$ est un ensemble dont le **nombre** d'éléments est la **produit** $\boldsymbol{m \times n}$.

☞ En effet, un tableau avec n lignes et m colonnes contient $n \times m$ cases.

Exercices à faire : 23 à 28 page 44 du manuel.

Définition ($\boldsymbol{n}$-uplet)

Soit A un ensemble et n un entier naturel non nul.

On appelle **$\boldsymbol{n}$-uplet** de A un élément de A^n.

Propriété

Soit A un ensemble fini et n un entier naturel non nul.

Alors :

$$\text{Card}(A^n) = [\text{card}(A)]^n$$

Démonstration.

Soit A un ensemble fini et n un entier naturel non nul.

Soit $\mathcal{P}(n)$ le propriété « pour tout entier naturel n non nul, $\text{Card}(A^n) = [\text{card}(A)]^n$»

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

.... □

Exemple 1

1. Déterminer quatre 3-uplets de $E=\{0;1\}$.
2. Combien en existe-t-il ?

Solution.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exemple 2

Un immeuble est protégé par un digicode. Ce code peut être constitué de quatre, cind ou six chiffres allant de 0 à 9, puis d'une lettre sélectionnée parmi les lettres A, B et C.

Combien de codes peut-on former avec ce système ?

Solution.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

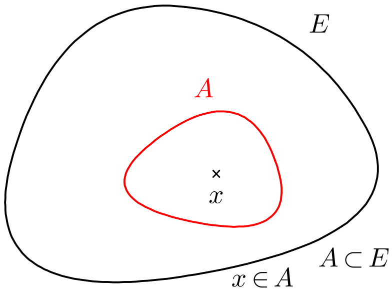
....

5 Nombre parties d'un ensemble

5.1 Ensemble de parties d'un ensemble

A et E désignent deux ensembles.

On dit que A est **une partie** (ou sous - ensemble) de E lorsque tout élément de A appartient à E. On note :
$A \subset E$ (lire « A est inclus dans E).
L'ensemble des parties de E se note $\mathscr{P}(E)$.
L'ensemble vide, noté $\varnothing$, est une partie de tout ensemble.



Exemple 1
Soit $E = \{a; b\}$. Déterminons l'ensemble des parties de E.

- Parties à 0 élément : $\varnothing$
- Parties à 1 élément : $\{a\}$, $\{b\}$
- Parties à 2 éléments : $\{a; b\}$

Donc E a 4 parties et $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}\}$.

Exemple 2

Soit E $= \varnothing$, alors l'ensemble des parties de E est lui-même. Il ne comporte qu'un seul élément :

$$\mathscr{P}(E) \;=\; \{\varnothing\}$$

Exemple 3

Si E $= \{x\}$, alors l'ensemble des parties de E est lui-même et $\emptyset$. Il ne comporte que deux éléments :

$$\mathscr{P}(E) \;=\; \{\{x\}; \varnothing\}$$

Exercice

Soit $E = \{a; b; c\}$. Déterminer $\mathscr{P}(E)$ puis son cardinal.

Solution.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5.2 Nombre de parties d'un ensemble

On peut légitimement se demander quel est le nombre de sous-ensembles d'un ensemble de cardinal n, c'est à dire quel est le cardinal de $\mathscr{P}(E)$?

Propriété

Soit n un entier naturel.
Un ensemble fini E à éléments possède $\mathbf{2^n}$ **parties**, c'est-à-dire **Card(**$\boldsymbol{\mathscr{P}(E)}$**)=**$\mathbf{2^n}$.

Démonstration.

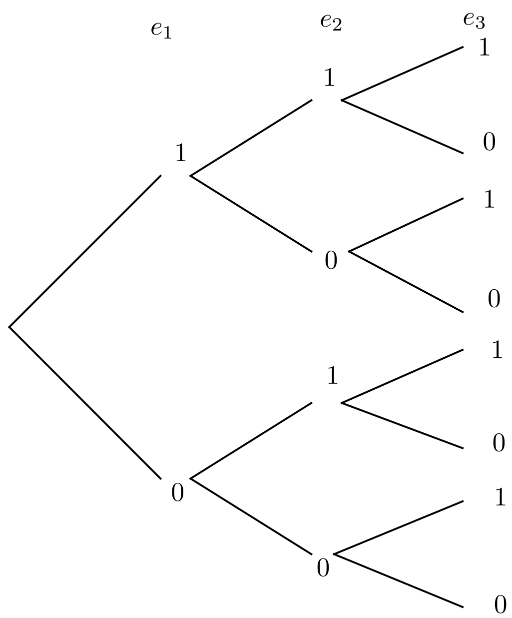
Soit $E = \{e_1; e_2; ......; e_n\}$ l'ensemble à n éléments, avec $n \in \mathbb{N}$.

A chaque partie P de E correspond un unique n-uplet de $\{0; 1\}$, et inversement de la manière suivante :

- si e_1 appartient à la partie, on affecte 1 en 1re position du n-uplet et 0 sinon;
- si e_2 appartient à la partie, on affecte 1 en 2e position du n-uplet et 0 sinon;
- et ainsi de suite jusqu'à e_n et la n-ième position.

Par exemple, le n-uplet (1;0;1;0;......;0) correspond à la partie $(e_1; e_3)$;
le n-uplet (0;0;0;0;......;0) correspond à $\varnothing$.
Ainsi, il y a autant de parties de l'ensemble de E que de n-uplets de l'ensemble $\{0; 1\}$, c'est-à-dire 2^n.
D'où Card($\mathscr{P}(E)$)=2^n.

En exercice
Démontrer par récurrence :
pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est : « Un ensemble à n éléments a 2^n parties »



Exemple : Relier deux situations de dénombrement □

Situation 1 : $E = \{x_1; x_2; x_3; x_4;; x_5\}$.

- Combien cet ensemble a-t-il de parties ?

Situation 2 : On écrit des mots de 5 lettres prises dans l'alphabet $\{A; B\}$.

- Combien de mots différents peut-on écrire ?

Solution.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6 Exercices d'entraînement : Acquérir des automatismes

Exercice 1

Les numéros de téléphone commençant par 06 sont constitués des couples $(0;6)$ que l'on complète par un 8-uplets de l'ensemble $E=\{0;1;2;...;9\}$.

1 Déterminer le nombre de numéros de téléphone possibles commençant par 06.

2 Combien de numéros de téléphone commençant par 06 ou 07 sont possibles?

Exercice 2

$E=\{0;1;2;3\}$ et $F=\{0;1;2;3;4\}$.

1 Déterminer le nombre d'éléments de $E\times F$.

2 Dans un repère du plan, on considère l'ensemble G des points de coordonnées $(x;y)$ avec $x\in E$ et $y\in F$.

- *a* Déterminer le nombre de points de l'ensemble G.
- *b* Représenter cet ensemble.

Exercice 3

E est l'ensemble $\{M;A;T;H;S\}$.

1 Déterminer un triplet d'éléments de E.

2 Combien de triplets peut-on former ?

Exercice 4

On donne $E=\{a;b;1;2\}$.

1 Combien y a -t-il de 5-uplets de E ?

2 Combien y a -t-il de 5-uplets de E commençant par b?

Exercice 5

On considère l'agorithme ci-dessous, où n est un entier naturel non nul.

1 Déterminer ce que contient la variable f en fin d'algorithme pour $n=4$.
2 Quel est le rôle de cet algorithme ?

```
f ← 1
Pour i allant de 1 à n
  | f ← f*i
Fin pour
```

Exercice 6

On considère deux ensembles A et B de cardinaux respectifs n et p. On souhaite montrer que :

$$\mathrm{Card}(A \times B) = np$$

1 Cette formule est-elle vraie si A ou B est vide ?

2 On note a_1, ..., a_n les éléments de A et b_1, ..., b_p les éléments de B. De plus, pour entier naturel i inférieur ou égal à p, on note A_i l'ensemble $A \times \{b_i\}$.

- *a* Décrire les éléments de l'ensemble A_i. Combien y en a-t-il ?
- *b* Les ensembles A_i sont-ils disjoints ? Justifier.
- *c* Que vaut l'union de tous les A_i, pour i variant de 1 à p ?
- *d* Conclure.

Exercice 7

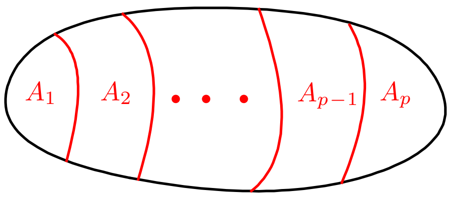
Soit E un ensemble fini de n éléments.

On se propose de dénombrer les différentes façons de partitionner E.

Définition.

Soit E un ensemble fini de n éléments.

Une partition de E est la donnée de p partities non vides A_1, A_2,......, A_p de E qui vérifient les deux propritées ci-dessus :
- *ces parties sont disjointes deux à deux : pour tous i et j distincts et inférieurs ou égaux à p, $A_i \cap A_j = \varnothing$;*
- *$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p = E$.*



Pour tout entier naturel p tel que $1 \leqslant p \leqslant n$, on note $\mathcal{S}_n^p$ le nombre de particition de l'ensemble E en p parties.

Dans chacun des cas suivants déterminer $\mathcal{S}_n^p$ pour p variant de 1 à n.

1 $E = \{a; b\colon c\}$.

2 $E = \{a; b\colon c; d\}$

7 Arrangements et permutations

7.1 Arrangements d'un ensemble

7.1.1 Factorielle d'un nombre entier naturel

Définition

Soit n un entier naturel non nul. On appelle **factorielle** de n le nombre :

$$n! \;=\; n\times(n-1)\times\ldots\times 2\times 1$$

On peut noter ce produit avec le symbole $\prod$.

$$n! \;=\; \prod_{k=1}^{n} k$$

Par convention : $0! \;=\; 1$.

Exemple

- $6! = \prod_{k=1}^{6} k = 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 720$
- $\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{3!}=\dfrac{1}{4!}-\dfrac{4}{4!}=-\dfrac{3}{4!}=-\dfrac{1}{4\times 2\times 1}=-\dfrac{1}{8}$. Plus généralement pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}=\frac{1-(n+1)}{(n+1)!}=\frac{-n}{(n+1)!}=-\frac{1}{(n+1)(n-1)!}$$

Utilisation de la calculatrice

Toutes les calculatrices disposent d'une touche factorielle :

- directement sur le clavier via la touche $\boxed{\text{alpha}}$ et la touche $\boxed{.}$ sur la Numworks;
- ou par l'intermédiaire de menus :
  - $\boxed{8}$ $\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{\text{F6}}$ $\boxed{\text{F3}}$ $\boxed{\text{F1}}$ sur les CASIO.
  - $\boxed{8}$ $\boxed{\text{math}}$ $\boxed{\text{PROB}}$ $\boxed{4:!}$ $\boxed{\text{F1}}$ sur les Ti.

7.1.2 *k*-arrangements de E ou *k*-ulets d'éléments distincts de E

Définition

Soit E un ensemble fini non vide à n éléments et k un entier naturel inférieur ou égal à n.

Un **arrangement** de k éléménts de E (ou ***k*-arrangement**) est un k-uplet d'éléments distincts de E.

Exemple

Si $E=\{0;1;2;3;4\}$, alors $(0;1;4)$ et $(2;1;4)$ sont deux arrangements de trois éléments de E : ce sont deux 3-arrangements de E.

Le quadruplet $(1;0;2;1)$ n'est pas un arrangement de E car des éléments se répètent.

☞ **Remarque**

Un arrangement de E peut-être interprété comme un tirage avec ordre et sans remise des éléments de E.

Propriété

Soient E un ensemble fini non vide à n éléments et k un entier naturel inférieur ou égal à n.

Le nombre de k-arrangements de E est égal à :

$$\mathcal{A}_n^k = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Démonstration.

Soit E un ensemble fini non vide à n éléments et k un entier naturel inférieur ou égal à n.

....

....

....

....

....

....

....

....

.... □

Exemples

1. Le nombre de 3-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à 7 éléments est :

   ....

   ....

2. Lors d'une course du 100 mètres disputées par 8 athlètes, le nombre de podiums possibles correspond au nombre ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

☞ **Remarque**

Si $E = \varnothing$, alors $n = k = 0$ et $\mathcal{A}_n^k = 1$: il n'y a qu'un seul sous ensemble possible pour E : lui-même.

D'où l'importance d'avoir $0! = 1$.

7.2 Permutation des éléments d'un ensemble *E*

Définition

Soit E un ensemble fini non vide à n éléments.

Une **permutation** des éléménts de E est un n-uplet d'éléments distincts de E.

☞ **Remarque**

- Lister toutes les permutations de E, c'est écrire les éléments de E dans toutes les ordres possibles.

> **Propriété**
>
> Soient E un ensemble fini non vide à n éléments.
>
> Le nombre de permutation de E est égal à $n!$

Exemple

8 athlètes s'élancent au départ d'une course de 100 m.

• Combien a y-il d'ordres d'arrivée possibles en supposant qu'il n'y a ni abandon ni ex-aequo ?

Solution.

....

....

....

....

....

8 Exercices d'entraînement : Acquérir des automatismes

Exercice 1

Soit n un entier naturel. Simplifier les écritures suivantes :

$$n \times (n+1) \times (n-1)! \quad ; \quad \frac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)} \quad ; \quad \frac{(n+5)!}{(n+7)!}$$

Exercice 2

Pendant le cours d'art platisque les élèves de la classe de 6e verte ont 8 objets distincts posés sur leur table. Ils doivent en choisir cinq et les ranger par ordre de préférence.

Combien de rangements différents peuvent-ils effectuer ?

Exercice 3

Sur le solfège ci-contre, Luc utilise sept notes : $E = \{\text{Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si}\}$
Combien de mélodies différentes Luc peut-il jouer s'il utilise cinq notes distinctes de l'ensemble E ?

Exercice 4

Zofia a cinq devoirs à faire dans cinq matières différentes.

Déterminer le nombre d'organisations différentes qu'elle peut adopter pour faire ces cinq devoirs.

9 Combinaisons

9.1 Combinaison de k éléments parmi n

Définition

Soit E un ensemble fini non vide à n éléments et k un entier naturel avec $0 \leqslant k \leqslant n$.

Une **combinaison** de k éléménts de E est une **partie** (ou sous-ensemble) de k éléments de E. Le nombre de combinaison de k éléments parmi les n éléments de E est noté $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$(lire « k parmi n»).

☞ **Remarques**

- l'ordre n'intervient pas *exemple* : $\{a; b\} = \{b; a\}$
- il n'y a pas de répétitions *exemple* : $\{a; a\} = \{a\}$

Exemple

On veut former des petits groupes d'étude constitués de cinq éléments en classe de terminale A spécialité mathématiques.

- Combien de groupes différents peut-on former ?

Solution.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

9.1.1 Cas particuliers

Soit n un entier naturel.

- $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} =$

- $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} =$

- $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} =$

9.2 Nombres de combinaisons

Propriété

Pour tous entiers naturels n et k.

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}{k!} \quad \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n$$

Démonstration.

Soit k un entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.

Soit E est un ensemble à n éléments $\{x_1; x_2; \ldots\ldots; x_n\}$.

L'ensemble $F = \{x_1; x_2; \ldots\ldots; x_k\}$ est une combinaison de E à k élements par suite, pour chaque combinaison F de k éléments de E on associe $k!$ permutations de F; on obtient donc k-uplets d'éléments distincts de F. En faisant de même pour toutes les combinaisons à k éléments de E, on obtient tous les k-uplets d'éléments distincts de E.

Ainsi, $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \times k! = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)$ soit $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}{k!}$. $\square$

☞ **Représentation en termes de chemins dans un arbre**

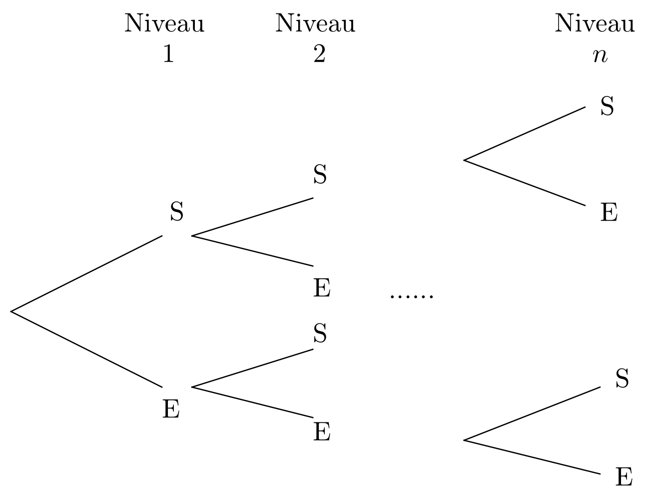
De chaque noeud de cet arbre partent deux branches : $\mathcal{S}$ (succès) et E (échec).

Un chemin peut être représenté par une succession de n cases où l'on inscrit $\mathcal{S}$ ou E.

$$\square\square\cdots\square$$

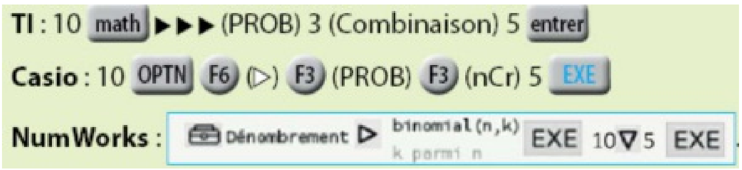
Le nombre de chemins avec k succès ($0 \leqslant k \leqslant n$) est le nombre de choix de k cases parmi n(pas de répétition et pas d'ordre).
Dans un arbre « succès-échec» à n niveaux, le nombre de chemins avec k succès est :

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$



Utilisation de la calculatrice

Calculer $\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$.



9.3 Proprités des combinaisons

9.3.1 Symétrie des nombres de combinaisons

Propriété

Pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$;

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$$

Démonstration.

Dans un arbre « succès-échec » à n niveaux, il y a autant de chemins qui réalisent k succès que de chemins qui réalisent k échecs, c'est-à-dire qui réalisent $n-k$ succès. □

9.3.2 ROC : somme des coefficients binomiaux

Propriété

Soit n un entier naturel.

Le nombre de sous-ensemble de E est égal à :

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 2^n$$

Démonstration

Si $\text{card}(E) = n$ alors $\text{card}\,\mathscr{P}(E) = 2^n$.
Par ailleurs pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$ notons E_k l'ensemble des parties de E de cardinal k, alors $\mathscr{P}(E)$ est la réunion disjointes des ensembles E_k ainsi, le nombre de sous-ensemble de E est égal à la somme des sous-ensembles à 0 éléments, à 1 éléments, à 2 éléments, ..., à n éléments.
Soit $\text{card}\,\mathscr{P}(E) = \sum_{k=0}^{n} \text{card}(E_k) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$. Par suite :

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$

Exemple

Soit $E = \{a; b; c\}$

Alors toutes les parties de E sont : $\varnothing$; $\{a\}$; $\{b\}$; $\{c\}$; $\{a; b\}$; $\{a; c\}$; $\{b; c\}$; $\{a; b; c\}$.

Elle sont au nombre de 8 et en effet : $2^3 = 8$.

9.3.3 ROC : Triangle de pascal

Propriété (La relation de Pascal)

Pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n-1$;

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Démonstration.

Dans un arbre « succès-échec » à n niveaux, le nombre de chemins qui réalisent k succès est $\binom{n}{k}$. Parmi ces chemins, on peut distinguer ceux qui commencent par :

- un succès ; il faut donc $k-1$ succès en $n-1$ épreuves. Leur nombre est $\binom{n-1}{k-1}$;
- un échec ; il faut donc enseuite k succès en $n-1$ épreuves. Leur nombre est $\binom{n-1}{k}$.

Donc $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Le triangle de Pascal

On appelle triangle de Pascal la disposition ci-contre :

$$\begin{array}{ccc} \binom{n}{k} & + & \binom{n}{k+1} \\ & & \| \\ & & \binom{n+1}{k+1} \end{array}$$

□

En remarque de plus que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ on obtient le traingle de Pascal ci-dessous :

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	7	8	$\cdots$	
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1
$\vdots$									

Exemple

On sait que $\binom{10}{1} = 10$ et $\binom{10}{2} = 45$. En déduire la valeur de :

a) $\binom{11}{2}$ b) $\binom{11}{9}$