

O.G.1 : UTILISER LES OUTILS MATHÉMATIQUES DANS L'ÉTUDE DES PHÉNOMÈNES PHYSIQUES

O.S.1-1 : Faire des calculs vectoriels, trigonométriques et sur les dérivées

I. OPERATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES VECTEURS

1. Addition vectorielle

$$\vec{S} = \vec{U} + \vec{V} \text{ ou } \vec{U} // \vec{V}; \vec{U} \perp \vec{V}$$

2. Soustraction vectorielle

$$\vec{S} = \vec{U} - \vec{V}$$

3. Multiplication d'un vecteur par un scalaire

$$a(\vec{U} + \vec{V}) = a\vec{U} + a\vec{V}$$

$$\vec{U}(a + b) = \vec{U}a + \vec{U}b$$

4. Produit scalaire

On appelle produit scalaire de deux vecteurs non nuls \vec{U} et \vec{V} ; le nombre algébrique réel noté $\vec{U} \cdot \vec{V}$ tels que : $\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{U}; \vec{V}}) \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{U}; \vec{V}}) = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{\|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\|}$

a. **Angle nul** : $\alpha = (\widehat{\vec{U}; \vec{V}}) = 0$; \vec{U} et \vec{V} sont parallèle et même sens $\vec{U} \cdot \vec{V} > 0 \Rightarrow \cos \alpha = +1$

b. **Angle aigu** : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\cos \alpha > 0 \Rightarrow \vec{U} \cdot \vec{V} > 0$

c. **Angle droit** : $\alpha = \frac{\pi}{2}$; \vec{U} et \vec{V} sont perpendiculaires

$$\cos \alpha = 0 \Rightarrow \vec{U} \cdot \vec{V} = 0 \quad \vec{U} \perp \vec{V}$$

d. **Angle obtus** : $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\cos \alpha < 0 \Rightarrow \vec{U} \cdot \vec{V} < 0$

e. **Angle plat** : $\alpha = \pi$; $\cos \alpha = -1 \Rightarrow \vec{U} \cdot \vec{V} < 0$

5. Produit vectoriel

On appelle produit vectoriel de deux vecteurs quelconques non nuls \vec{U} et \vec{V} le vecteur $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$. son module est :

$$\|\vec{W}\| = \|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \cdot |\sin(\widehat{\vec{U}; \vec{V}})| \Rightarrow |\sin(\widehat{\vec{U}; \vec{V}})| = \frac{\|\vec{U} \wedge \vec{V}\|}{\|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\|}$$

Remarque : Le produit scalaire de deux vecteurs est nul dans les cas suivants :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \Rightarrow \vec{U} \parallel \vec{V} \text{ même sens} \\ \alpha = \pi \Rightarrow \vec{U} \parallel \vec{V} \text{ sens contraire} \end{cases} \text{ avec } \vec{U} \neq 0 \text{ et } \vec{V} \neq 0$$

II. DERIVÉES ET PRIMITIVES DES FONCTIONS A VARIABLE t

1. Dérivées :

a) $f(t) = t^n \Rightarrow f'(t) = nt^{n-1}$

b) $f(t) = \sin(at + b) \Rightarrow f'(t) = a \cos(at + b)$

c) $f(t) = \cos(at + b) \Rightarrow f'(t) = -a \sin(at + b)$

2. Primitives :

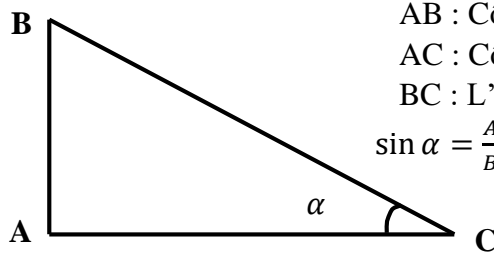
$$a) f(t) = t^n \Rightarrow F(t) = \int f(t)dt = \int t^n dt = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + cst$$

$$b) f(t) = \sin(at + b) \Rightarrow F(t) = \int \sin(at + b)dt = -\frac{1}{a} \cos(at + b) + cst$$

$$c) f(t) = \cos(at + b) \Rightarrow F(t) = \int \cos(at + b)dt = \frac{1}{a} \sin(at + b) + cst$$

III. TRIGONOMETRIE

1. Triangle rectangle



$$\sin \alpha = \frac{AB}{BC}; \quad \cos \alpha = \frac{AC}{BC}; \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{AB}{AC}$$

2. Périodicité :

$$a) \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

N.B : le nombre 2π est appelé la période des fonctions circulaires $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$.

3. Relation fondamentale de la trigonométrie

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

4. Angles opposés : angle de forme α et $-\alpha$

$$a) \cos(-\alpha) = \cos \alpha \text{ fonction paire}$$

$$b) \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \text{ fonction impaire}$$

5. Angles de différences π : angle de la forme α et $\pi - \alpha$

$$a) \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$b) \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

6. Angles supplémentaires : angles de la forme α et $\pi - \alpha$

$$a) \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = \cos(\pi + \alpha)$$

$$b) \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

7. Angles des différences $\frac{\pi}{2}$: angle de la forme α et $\frac{\pi}{2} + \alpha$

$$a) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$b) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

8. Angles complémentaires : angle de la forme α et $\frac{\pi}{2} - \alpha$

$$a) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$b) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

9. Formule d'addition

- a) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- b) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- c) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- d) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Remarque : cas particulier $a = b$:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\cos 2a = 1 - \sin^2 a$$

10. Transformation d'un produit en une somme ou en une différence

- a) $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$
- b) $\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a + b) - \cos(a - b)] = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$
- c) $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$
- d) $\cos a \cdot \sin b = -\frac{1}{2} [\sin(a - b) - \sin(a + b)] = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)]$

11. Transformation en produit de sinus et cosinus d'une somme en une différence de $2\sin$ ou $2\cos$.

$$\text{Posons } \begin{cases} a + b = p \\ a - b = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{p+q}{2} \\ b = \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

- a) $\cos p + \cos q = 2\cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$
- b) $\cos p - \cos q = -2\sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$
- c) $\sin p + \sin q = 2\sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$
- d) $\sin p - \sin q = 2\cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

O.S.1-2 : Déterminer les incertitudes à partir des grandeurs mesurées.

LES INCERTITUDES

I. Valeurs approchées et valeurs exactes d'une grandeur physique

On désigne par grandeur physique, tout ce qui est susceptible (capable) de varier c'est-à-dire augmenté ou diminué, en longueur, en volume, en intensité ou tout ce qu'on mesure.

Exemple : longueur, la température, la masse, la force...

1. Valeurs approchées

C'est la moyenne entre la valeur supérieure et la valeur inférieure d'une mesure :

$$X_a = \frac{X_{sup} + X_{inf}}{2}$$

2. Valeurs exactes

C'est la valeur réelle de la grandeur physique que l'on cherche à évaluer.

II. Erreurs et incertitudes absolues, relatives, précision d'une mesure

1) Erreurs sur les grandeurs mesurées

On distingue deux groupes d'erreurs : les erreurs à caractères qualitatives (non mesurables) et les erreurs à caractère quantitative (mesurables).

a) Les erreurs à caractères qualitatives

- ❖ Les erreurs systématiques : elles sont provoquées par les instruments de mesure
- ❖ Les erreurs accidentelles : elles sont imputables (attribué) aux humains

b) Les erreurs à caractères quantitatives

- ❖ Erreurs absolues : c'est l'écart entre la valeur approchée et la valeur exacte :

$$E_a = X_a - X_e \quad \left\{ \begin{array}{l} E_a: \text{erreurs absolue} \\ X_a: \text{valeurs approchées} \\ X_e: \text{valeurs exactes} \end{array} \right.$$

c) Les erreurs relatives : c'est le quotient de l'erreur absolue à la valeur exacte :

$$E_r = \frac{E_a}{E_e}$$

N.B : L'erreur peut être positive (par excès) ; négative (par défaut) ou nulle

2) Incertitude absolue :

On appelle incertitude absolue d'une mesure, la valeur limite supérieure des erreurs acceptables au cours de cette mesure, elle est notée ΔX telle-que :

$$\Delta X \geq |E_a| \text{ avec } E_a = X_a - X_e$$

N.B : L'incertitude absolue est une valeur concrète (réelle) toujours positive

3) Incertitude relative

C'est le rapport de l'incertitude absolue par la valeur approchée, elle est notée $\frac{\Delta X}{X_a}$ encore appelée précision de la mesure. L'incertitude relative est un nombre abstrait (sans unité)

4) Présentation d'un résultat

On présente un résultat par formule suivante : $X = (X_a \pm \Delta X) \text{unité}$.

III. Opérations sur les incertitudes

1. Addition et soustraction des valeurs incertaines

Si a et b sont deux valeurs incertaines puis n et m deux réels, on peut écrire :

$$S = an + bm \Rightarrow \Delta S = |n|\Delta a + |m|\Delta b$$

$$\text{si } S = an - bm \Rightarrow \Delta S = |n|\Delta a + |m|\Delta b$$

2. Multiplication et division des valeurs incertaines

Si a ; b et c sont des valeurs incertaines puis k ; n ; m et p des réels. On peut écrire :

$$G = \frac{k \cdot a^n \cdot b^m}{c^p} \Rightarrow \frac{\Delta G}{G} = |n| \frac{\Delta a}{a} + |m| \frac{\Delta b}{b} + |p| \frac{\Delta c}{c}$$
$$\Rightarrow \Delta G = G \left(|n| \frac{\Delta a}{a} + |m| \frac{\Delta b}{b} + |p| \frac{\Delta c}{c} \right)$$

Avec k une constante.

3. Formule d'approximations

Soient ε et $\varepsilon' \leq 10^{-2}$

$$\text{alors } (1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon') \approx 1 + \varepsilon + \varepsilon' ;$$

$$(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon$$

$$\text{pour } \theta \leq 0,24 \text{ rad domaine des petits angles } \cos\theta = \frac{\theta^2}{2} ; \sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$$

OG2 : LES PRINCIPAUX MOUVEMENTS ETUDIES EN CINEMATIQUE

1

O.S.2-1 I-LES GRANDEURS CINEMATIQUES DU MOUVEMENT

1-Définition de la cinématique

C'est une branche de la Physique consacrée à l'étude des mouvements en fonction du temps sans tenir compte des forces qui produisent ou provoquent ces mouvements.

2- Caractère relatif du mouvement

2-1-Expérience

Charles et **Pascal** sont dans une voiture qui les emmène en gare et aperçoivent au bord de la voie un palmier. **Charles** est immobile par rapport à **Pascal** car ils sont entraînés par la même voiture en mouvement mais ils sont en mouvement par rapport au palmier situé au bord de la voie car le palmier n'est pas lié à la voiture en mouvement. Le palmier est-il au repos ? Par rapport à la Terre, oui, mais pas par rapport au Soleil.

2-2-Conclusion

Le mouvement a donc un **caractère relatif** c'est-à-dire qu'il s'étudie par à un solide d'observation, de référence, appelé **référentiel**.

3-Référentiel d'un mouvement

Un référentiel est un solide (système indéformable) par rapport auquel on étudie le mouvement d'un mobile (objet en mouvement). L'étude du mouvement dépend donc du référentiel choisi. On distingue plusieurs types de référentiels parmi lesquels :

- Le référentiel **terrestre** ou de **laboratoire** ou **Galiléen** dont l'objet de référence se trouve à la surface de la Terre.
- Le référentiel **géocentrique** dont l'objet de référence est le centre de la Terre. C'est dans ce référentiel qu'on étudie les mouvements des satellites et de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles.
- Le référentiel de **Copernic** pour comprendre le déroulement des saisons et qui utilise le centre du système solaire et des étoiles lointaines.

4-Repere d'espace

C'est un système d'axes que l'on rattache au référentiel pour décrire avec précision la trajectoire d'un mobile. Il comprend :

- Un point **O** fixé au référentiel (origine du repère).
- Une base composée de trois vecteurs unitaires. Il s'écrit donc : $(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

N.B. : Un repère à un seul axe convient pour l'étude d'un **mouvement rectiligne** dont la trajectoire est une **droite**, celui à deux axes convient pour l'étude d'un mouvement dont la trajectoire est contenue dans un **plan** et celui à trois axes pour l'étude d'un mouvement dont la trajectoire est contenue dans **l'espace**. Le repérage d'un mobile se fait de deux manières :

a-Par le vecteur position

Il permet de repérer la **position** d'un mobile c'est-à-dire l'endroit où il se trouve par rapport à l'origine du repère. C'est un vecteur dont l'origine est celle du repère et l'extrémité est le point M qui indique la position du mobile à l'instant t. Dans un repère R ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) il est de la forme :

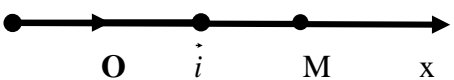
$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

où **x, y** et **z** sont les coordonnées du point M et s'exprime en **mètres (m)** dans le SI.

Si M est en mouvement, les coordonnées sont des fonctions du temps : x (t), y (t), z (t). D'où :

$$\vec{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

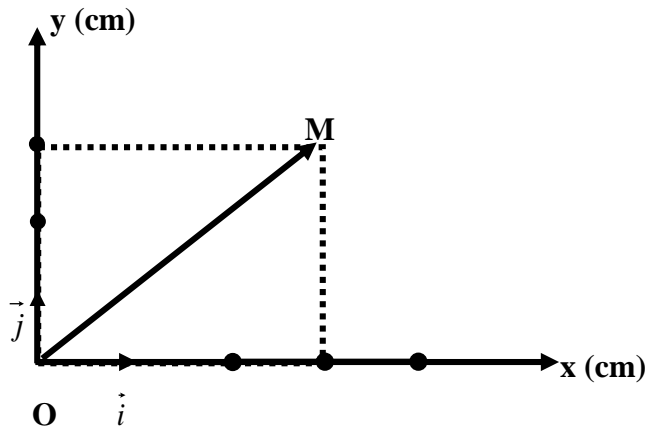
2

■ Si M est repéré suivant un axe (*repère à une dimension*)  (cm)

Le vecteur position est : $\vec{OM} = xi$ Sa norme ou module est de la forme $OM = \|\vec{OM}\| = x$

Dans notre cas par exemple : $\vec{OM} = 3\vec{i}$ et son module : $OM = 3\text{cm}$.

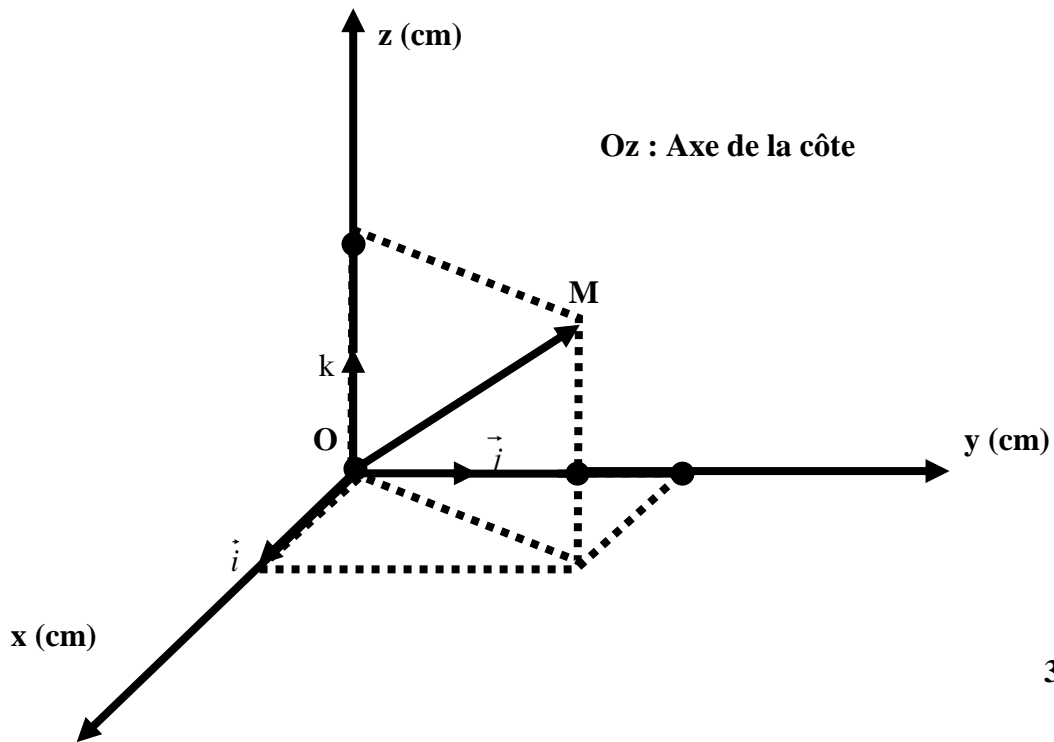
■ Si M est repéré dans un plan (*repère à deux dimensions*) :



Son vecteur position est : $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ Son module est : $OM = \|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Dans notre cas par exemple : $\vec{OM} = 3\vec{i} + 3\vec{j} = 3(\vec{i} + \vec{j})$ et son module : $OM = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$ cm

■ Si M est repéré dans l'espace (*repère à trois dimensions*) :



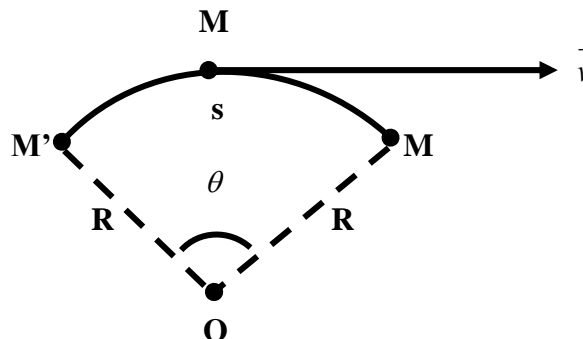
Le vecteur position est de la forme : $\vec{OM} = xi + yj + zk$ et sa norme :

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Dans notre cas par exemple : $\vec{OM} = i + 3j + 2k$ et son module vaut : $OM = \|\vec{OM}\| = \sqrt{14}cm$

b-Par l'abscisse curviligne

Quand la trajectoire du mobile M est un cercle ou arc de cercle, la position de M à l'instant t est donnée par la valeur algébrique de l'abscisse curviligne $s = f(t) = M'M = R\theta$ où la relation $s = f(t)$ s'appelle **équation horaire du mouvement**.



N.B. : La relation $s = f(t)$ est la primitive de la norme de la vitesse : $s = \int \|\vec{v}\| dt$

5-Equation horaire ou paramétrique

C'est une équation dans laquelle les coordonnées x, y, z dépendent du paramètre temps. Elle est de la forme :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = f(t) \\ z = f(t) \end{cases} \text{ avec } t \in D$$

Remarques : a-) Si les coordonnées (x, y, z) sont **constantes**, on dit que le point est **immobile**.

b-) Si l'une au moins des coordonnées varie en fonction du temps, le point est **mobile**.

6-Equation de la trajectoire

La trajectoire est l'ensemble des différentes positions occupées par le mobile M pendant son mouvement. Son équation s'obtient en éliminant le paramètre t de l'équation horaire. Elle est de la forme : $y = f(x)$.

Remarques : a-) Si l'équation de la trajectoire est de la forme $y = ax + b$, le mouvement est **rectiligne**.

b-) Si elle est de la forme $y = ax^2 + bx + c$, le mouvement est **parabolique**.

c-) Si elle est de la forme $x^2 + y^2 = R^2$, le mouvement est **circulaire**.

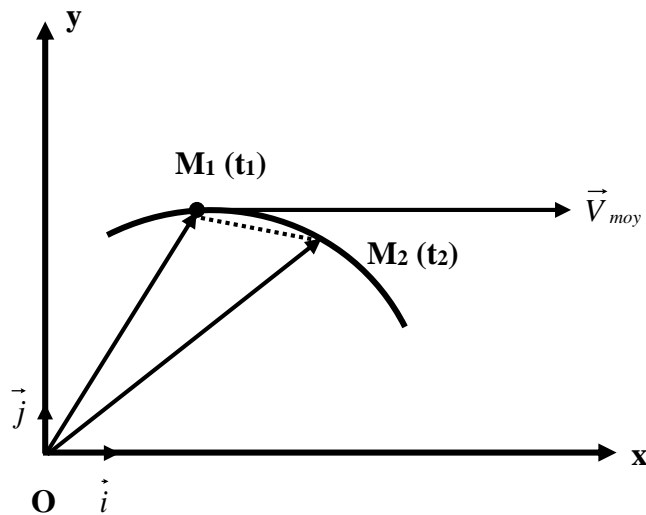
4

7-Notion de vitesse

La vitesse est une grandeur qui traduit la variation de position en fonction du temps. Elle s'exprime en **m/s**

7-1-Vecteur vitesse moyenne

Considérons la trajectoire plane d'un mobile M évoluant par rapport au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit M_1 la position du mobile à l'instant t_1 et M_2 sa position à l'instant t_2 .



On définit le vecteur vitesse moyenne \vec{V}_{moy} par la relation :

$$\vec{V}_{moy} = \frac{\Delta \vec{OM}}{\Delta t} = \frac{\vec{OM}(t_2) - \vec{OM}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

7-2- Vecteur vitesse instantanée

C'est la dérivée par rapport au temps du vecteur position \vec{OM} . Il est donné par la relation :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$$


a- Expression du vecteur vitesse instantanée en coordonnées cartésiennes :

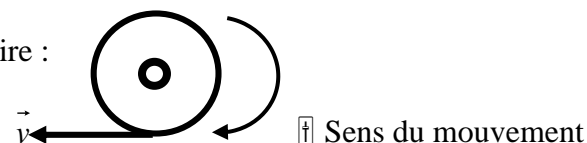
$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \Rightarrow \vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

où v_x, v_y et v_z sont les composantes de \vec{v} . Sa norme est :

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Remarque : Le vecteur vitesse est **toujours tangent** à la trajectoire et à **le même sens que le mouvement**.

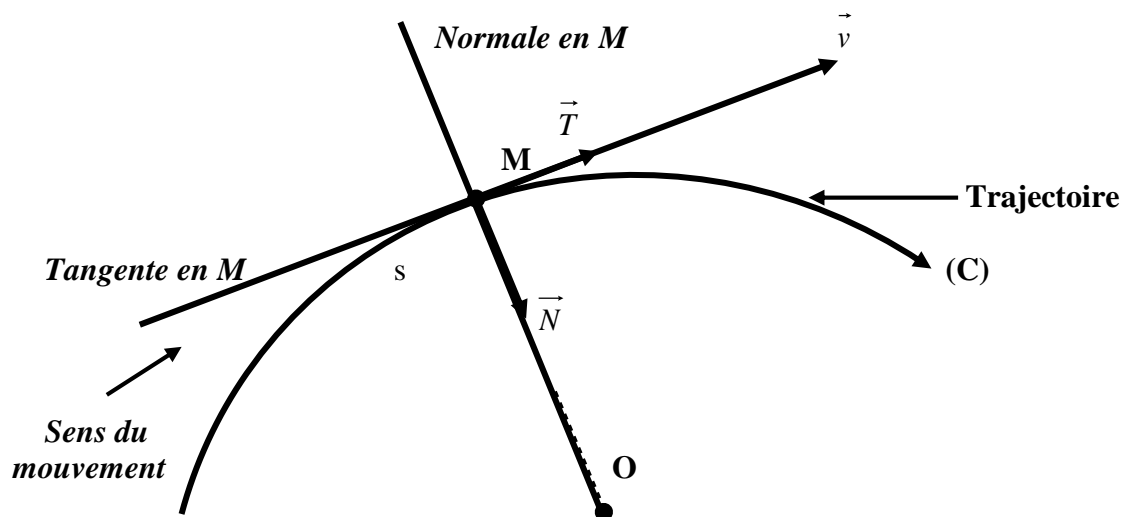
■ Pour une trajectoire rectiligne : 

■ Pour une trajectoire circulaire : 

b-Expression du vecteur vitesse instantanée dans la base de FRENET

La base locale de **Frenet** est constituée de deux vecteurs de base :

- \vec{T} , vecteur tangent à la trajectoire en M et orienté dans le sens des abscisses curvilignes s croissantes ;
- \vec{N} , vecteur normal à la trajectoire en M et orienté vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire.



Le vecteur vitesse \vec{v} du mobile M dans la base de **Frenet** est porté par la tangente (vecteur \vec{T}).
 A l'instant t, dans la base de **Frenet**, il est donné par la relation : $\vec{v} = v_T \vec{T} + v_N \vec{N} = \frac{ds}{dt} \vec{T}$ car la
 composante de \vec{v} sur la direction de \vec{N} est : $\vec{v}_N = O \cdot \vec{N} = \vec{0}$ parce que \vec{v} est perpendiculaire à
 \vec{N} .

D'où :

$$\vec{v} = v_T \vec{T}$$

Sa norme est de la forme : $v = \frac{ds}{dt}$ or $s = R\theta \Rightarrow v = R \frac{d\theta}{dt}$. Soit $v = R\dot{\theta} = R\omega$ avec v

en m/s, R en m et $\dot{\theta}$ en rad/s.

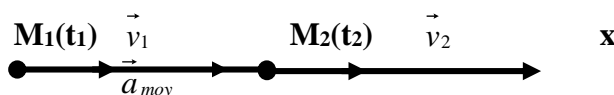
N.B. : Dans la base de **Frenet**, la vitesse v est la dérivée par rapport au temps de l'**abscisse Curviligne**.

8-Notion d'accélération

L'accélération est une grandeur qui renseigne sur la variation de la vitesse en fonction du temps.
 Elle s'exprime en m/s^2 .

8-1-Vecteur accélération moyenne

Elle caractérise la variation de la vitesse du mobile M entre deux instants t_1 et t_2 . Soit \vec{v}_1 la
 vitesse de M à t_1 et soit \vec{v}_2 sa vitesse à t_2 .



On appelle vecteur accélération moyenne l'expression :

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

8-2-Vecteur accélération instantanée

C'est la dérivée première du vecteur vitesse par rapport au temps ou la dérivée seconde du vecteur position par rapport au temps.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

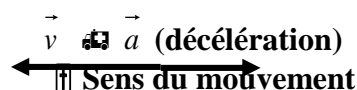
a-Expression du vecteur accélération instantanée en coordonnées cartésiennes:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} \Rightarrow \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \text{ où } a_x, a_y, a_z \text{ sont les}$$

composantes de \vec{a} . Sa norme est :

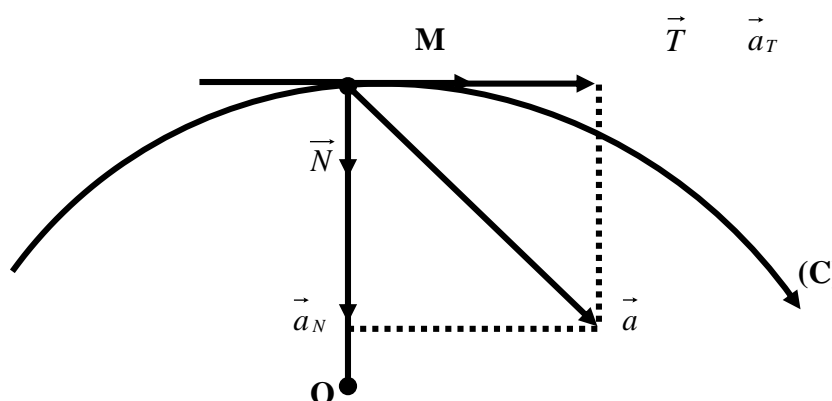
$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Remarque : Pour une trajectoire rectiligne, le vecteur accélération est **tangent à la trajectoire** mais n'a pas forcément le même sens que le mouvement.



a-Expression du vecteur accélération instantanée dans la base de FRENET

<



Dans la base de **FRENET** (\vec{T}, \vec{N}) et par rapport au repère d'espace (O, \vec{i}, \vec{j}) on a : $\vec{a} = a_T \vec{T} + a_N \vec{N}$ où a_T et a_N sont respectivement **l'accélération (ou composante) tangentielle** et **l'accélération (composante) normale** de l'accélération du mouvement \vec{a} du mobile.

7

Or $a_T = \frac{dv}{dt}$ et $a_N = \frac{v^2}{R}$, d'où l'expression du vecteur accélération instantanée dans la base de

FRENET sera donc :
$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N}$$
 où R est une longueur appelée **rayon de**

courbure de la trajectoire en **M** et s'exprime en **mètre (m)** dans le SI.

Le module du vecteur accélération instantanée est : $a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$ or

$v = R\dot{\theta} = R\omega$ car $\dot{\theta} = \omega$ et $a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\dot{\theta})}{dt} = R \frac{d\dot{\theta}}{dt} = R\ddot{\theta} \Rightarrow a = \sqrt{R^2(\ddot{\theta}^2 + \dot{\theta}^4)}$, on aura donc :

$$a = R\sqrt{\ddot{\theta}^2 + \dot{\theta}^4} = R\sqrt{\ddot{\theta}^2 + \omega^4}$$

Dans le SI, R s'exprime en **m**, $\dot{\theta} = \omega$ en **rad/s** et $\ddot{\theta}$ en **rad/s²**.

Remarque : ■ Si la trajectoire est un cercle de rayon constant (fixe) R , alors : $a = a_N = \frac{v^2}{R}$ car

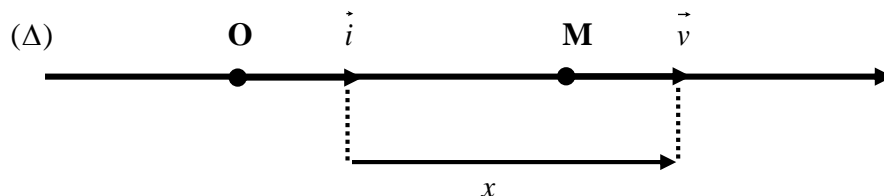
$v = cste$ (**mouvement uniforme**) $\Rightarrow a_T = \frac{dv}{dt} = 0$.

■ Si la trajectoire est une droite (**mouvement rectiligne**), R tend vers l'infini (∞), a_N est alors nulle car si $R \rightarrow \infty \Rightarrow a_N = \frac{v^2}{\infty} = 0$. D'où $a = a_T = \frac{dv}{dt} = R\ddot{\theta}$.

O.S.2.2 II-ETUDE CINEMATIQUE DE QUELQUES MOUVEMENTS

II-1-MOUVEMENT RECTILIGNE

C'est un mouvement dans lequel la trajectoire du mobile est une **droite**. Supposons un mobile en mouvement suivant un axe (axe des abscisses par exemple).



Les caractéristiques (vecteurs position, vitesse et accélération) de **M** sont définies par :

$$\vec{OM} = x\vec{i} ; \vec{v} = v_x\vec{i} ; a = a_x\vec{i} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} = \ddot{x}\vec{i}$$

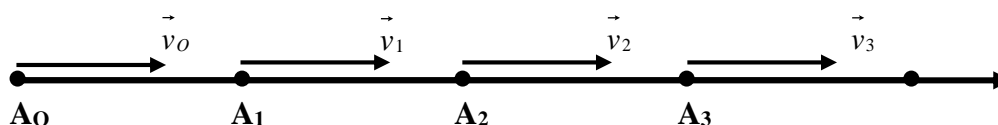
C'est ainsi qu'on distingue deux types de mouvements rectilignes : **mouvement rectiligne uniforme** et **mouvement rectiligne uniformément varié**.

8

1-Mouvement rectiligne uniforme (MRU)

a-Définition

C'est un mouvement dans lequel la trajectoire du mobile est une **droite (fonction affine du temps)**, sa vitesse est **constante** (la norme et la direction du vecteur vitesse sont constantes) et son accélération **nulle**.



$$\vec{v}_0 = \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_3 = \dots = \vec{v}_i = cste$$

b-Equation horaire (ou équation cinématique)

$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v.dt \Rightarrow x = \int_0^t v.dt = [vt]_0^t = vt + A$ où A est la valeur de x à t = 0 (abscisse initiale). A t = 0, $x = x_0 = A$. D'où l'équation horaire d'un mouvement rectiligne uniforme est :

$$x = vt + x_0$$

v : vitesse à l'instant t quelconque.

x_0 : abscisse ou distance à l'instant initial t = 0 (**élongation initiale** ou **abscisse initiale**).

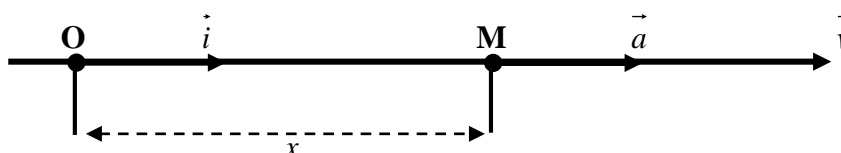
x : abscisse ou distance à l'instant quelconque t.

N.B. : Dans un MRU, l'abscisse du mouvement de **M** est une fonction affine du temps car il est de la forme $y = ax + b$.

2-Mouvement rectiligne uniformément varié (MRUV)

a-Définition

Un mobile est animé d'un MRUV si sa trajectoire est une **droite**, sa vitesse est **variable** (le vecteur vitesse garde sa direction, mais sa norme n'est pas constante) et son accélération est **non nulle**.



b-Equation horaire (ou équation cinématique)

$a = \frac{dv}{dt} = cste \Rightarrow dv = a.dt \Rightarrow v = \int_0^t a.dt = [at]_0^t = at + A$. Or à t = 0, $v = v_0 = A \Rightarrow$

$$v = at + v_0$$

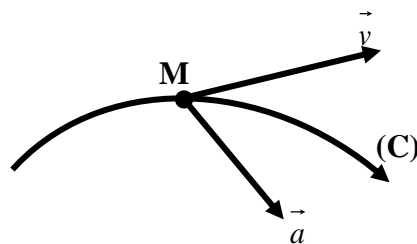
Par définition : $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt \Rightarrow x = \int_0^t (at + v_0) dt = [at + v_0]_0^t \Rightarrow x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + B$
 . Or à $t = 0 \Rightarrow x = x_0 = B$. D'où l'équation cinématique d'un mouvement rectiligne uniformément varié est :

$$x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0$$

c- Différents types de mouvements rectilignes uniformément variés

■ **Mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA)**

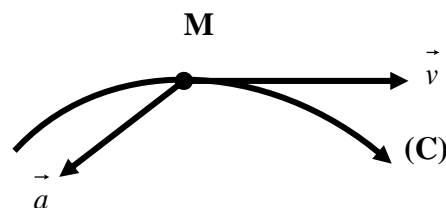
Il s'observe lorsque le produit scalaire $a \cdot v$ est **positif** ($a \cdot v > 0$) c'est-à-dire a et v sont de même signe.



Exemple : Démarrage d'une voiture.

■ **Mouvement rectiligne uniformément retardé ou freiné (MRUR)**

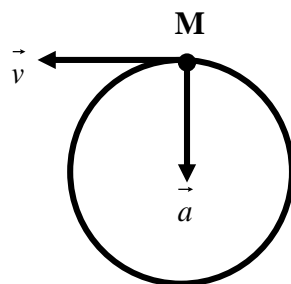
Il s'observe lorsque le produit scalaire $a \cdot v$ est **négatif** ($a \cdot v < 0$) c'est-à-dire a et v sont de signe contraire.



Exemple : Le freinage.

N.B. : Si à chaque instant $a \cdot v = 0$, le mouvement est **uniforme**. Ceci correspond aux cas suivants :

- $a = 0$: Le mouvement est **rectiligne uniforme**.
- a est perpendiculaire à v : Le mouvement est **circulaire uniforme**.



- Dans un **MRUV**, les distances parcourues à des intervalles de temps successifs égaux θ forment une suite arithmétique de raison r telle que : $r = a\theta^2$.
- Dans un **MRUR**, l'accélération est qualifiée de **décélération** et est **négative**.

d-Relation indépendante du temps (RIT) ou relation espace vitesse (REV)

Les expressions de x et de v dans un MRUV sont respectivement : $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$ (1)

et

$v = at + v_0$ (2). Dans (1) : $t = \frac{v - v_0}{a}$ (3) que nous remplaçons dans (1). On aura ce qui suit :

$$x = \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + x_0 \quad \Rightarrow$$

$$2a(x - x_0) = (v - v_0)^2 + 2v_0(v - v_0) = (v - v_0)(v - v_0 + 2v_0)$$

$$\Rightarrow 2a(x - x_0) = (v - v_0)(v + v_0) = v^2 - v_0^2 \Rightarrow$$

$$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2$$

v_0 : Vitesse initiale ; v : vitesse finale ; x_0 : abscisse initiale ; x : abscisse finale.

10

II-2-MOUVEMENT CIRCULAIRE

C'est un mouvement dans lequel la trajectoire du mobile est un **cercle** ou un **arc de cercle** de centre **fixe** et de rayon **constant**.

Exemple : Le plateau d'un tourne-disque.

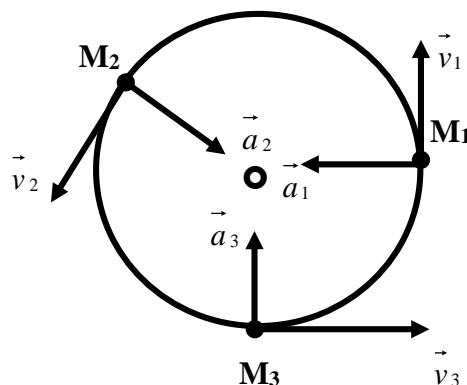
Dans ce mouvement les grandeurs sont : θ (**abscisse angulaire** ou **angle balayé**), $\dot{\theta}$ (**vitesse angulaire** ou **pulsation**) et $\ddot{\theta}$ (**accélération angulaire**). On distingue deux types de mouvements circulaires : **mouvement circulaire uniforme** et **mouvement circulaire uniformément varié**.

1-Mouvement circulaire uniforme (MCU)

a-Définition

C'est un mouvement dans lequel la vitesse linéaire v et angulaire (de rotation) $\dot{\theta}$ sont **constantes** et la trajectoire est un **cercle** de rayon **fixe**.

Exemple : Le mouvement de rotation de la Terre autour du soleil, ou mouvement de l'extrémité de l'aiguille d'une montre.



$$\vec{v}_0 = \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_3 = \dots = \vec{v}_i = \text{cste}$$

Au cours d'un MCU, le vecteur vitesse change de **direction** à chaque instant, mais sa norme reste **constante**.

b-Equation horaire (ou équation cinématique)

$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \dot{\theta}dt \Rightarrow \theta = \int_0^t \dot{\theta}dt = [\dot{\theta}]_0^t = \dot{\theta}t + A$ où A est la valeur de θ à $t = 0$ (abscisse angulaire initiale). A $t = 0$, $\theta = \theta_0 = A$. D'où l'équation horaire d'un mouvement circulaire uniforme est :

$$\theta = \dot{\theta}t + \theta_0$$

$\dot{\theta}$: vitesse angulaire à l'instant t quelconque.

θ_0 : abscisse angulaire à l'instant initial $t = 0$ (abscisse **angulaire initiale**).

θ : abscisse angulaire à l'instant quelconque t.

c-Relation entre v et $\dot{\theta}$

L'abscisse curviligne s a pour expression : $s = R\theta$ or $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta}$. Soit v et

$\dot{\theta}$ sont reliés par la relation : $v = R\dot{\theta} = R\omega = 2\pi NR$

Dans le SI, v s'exprime en **m/s**, R en **m**, $\dot{\theta} = \omega$ en **rad/s**, N (fréquence) en **Hertz (Hz)**.

11

d-Période et fréquence d'un mouvement circulaire uniforme

■ La période **T** d'un **MCU** est la durée que met le mobile pour effectuer un tour complet.

Pour 1 tour : $\theta = 2\pi$ et $t = T$. Or $\theta = \dot{\theta}t + \theta_0$. A $t = 0$, $\theta_0 = 0 \Rightarrow 2\pi = \dot{\theta}T = \omega T \Rightarrow$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Dans le SI, **T** s'exprime en **seconde (s)**.

■ La fréquence **N** d'un **MCU** est le nombre de tours effectués pendant une seconde.

$$N = \frac{n}{t} \text{ or pour 1 tour complet : } n=1 \text{ et } t=T \Rightarrow N = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Dans le SI, **N** s'exprime en **Hertz (Hz)**.

2-Mouvement circulaire uniformément varié (MCUV)

a-Définition

C'est un mouvement dans lequel la trajectoire du mobile est un **cercle** de centre **fixe** et de rayon **constant**. La vitesse linéaire v et la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ sont **variables** ; l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ est **non nulle**.

b-Equation horaire (ou équation cinématique)

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = cste \Rightarrow d\dot{\theta} = \ddot{\theta}.dt \Rightarrow \dot{\theta} = \int_0^t \ddot{\theta}dt = [\dot{\theta}]_0^t = \dot{\theta}t + A. \text{ Or à } t = 0, \dot{\theta} = \dot{\theta}_0 = A \Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0$$

Par définition : $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \dot{\theta}dt \Rightarrow \theta = \int_0^t (\ddot{\theta} + \dot{\theta}_o)dt = [\dot{\theta}t + \theta_o]_0^t \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_ot + B$
 . Or à $t = 0 \Rightarrow \theta = \theta_o = B$. D'où l'équation cinématique d'un mouvement circulaire uniformément varié est :

$$\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_ot + \theta_o$$

c-Relation écart angulaire-vitesse angulaire

Les expressions de θ et de $\dot{\theta}$ dans un MCUV sont respectivement : $\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_ot + \theta_o$ (1)

et

$\dot{\theta} = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_o$ (2). Dans (1) : $t = \frac{\dot{\theta} - \dot{\theta}_o}{\ddot{\theta}}$ (3) que nous remplaçons dans (1). On aura ce qui suit :

$$\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}\left(\frac{\dot{\theta} - \dot{\theta}_o}{\ddot{\theta}}\right)^2 + \dot{\theta}_o\left(\frac{\dot{\theta} - \dot{\theta}_o}{\ddot{\theta}}\right) + \theta_o \Rightarrow 2\ddot{\theta}(\theta - \theta_o) = (\dot{\theta} - \dot{\theta}_o)^2 + 2\dot{\theta}_o(\dot{\theta} - \dot{\theta}_o) = \dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_o^2.$$

Soit :

$$2\ddot{\theta}(\theta - \theta_o) = \dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_o^2 = \omega^2 - \omega_o^2$$

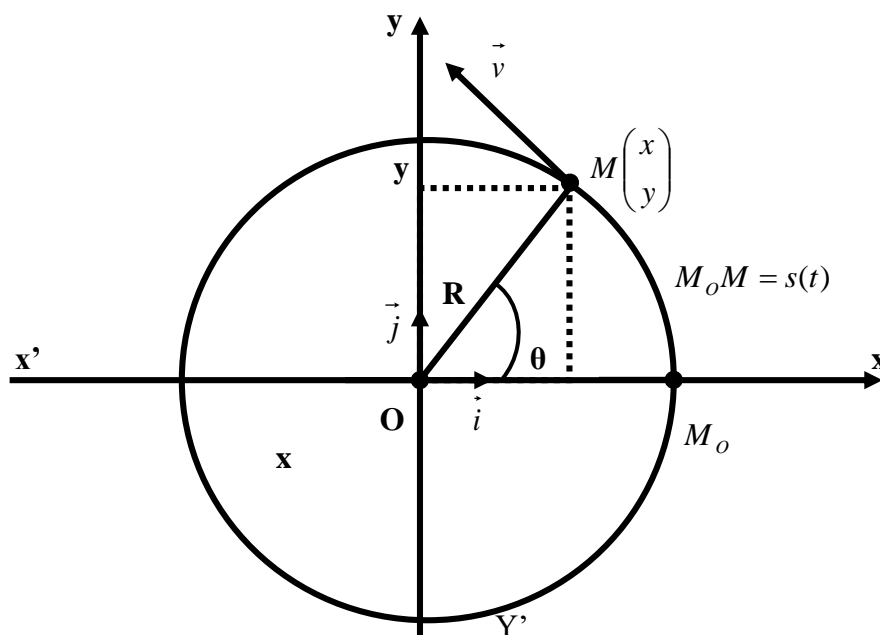
$\dot{\theta}_o$: Vitesse angulaire initiale ; $\dot{\theta}$: vitesse angulaire finale ; θ_o : abscisse angulaire initiale ;
 θ : abscisse angulaire finale.

Or $\dot{\theta} = 2\pi N$ et $\dot{\theta}_o = 2\pi N_o$. D'autre part : $\theta - \theta_o = \Delta\theta = 2\pi n \Rightarrow 4\pi^2(N^2 - N_o^2) = 4\ddot{\theta}n$. Soit :

$$\pi(N^2 - N_o^2) = n\ddot{\theta} \quad n : \text{Nombre de tours effectués}$$

3-Repérage de la position du mobile

3-1-Repérage par l'abscisse curviligne s de M



a-Pour un mouvement circulaire uniforme

$s = R\theta$ or $\theta = \dot{\theta}t + \theta_o \Rightarrow s = R\dot{\theta}t + R\theta_o$. Or d'un côté $R\dot{\theta} = v$ et de l'autre $R\theta_o = s_o$. On a :

$$s = vt + s_o$$

Dans le SI, s s'exprime en mètre (m).

b-Pour un mouvement circulaire uniformément varié

$$s = R\theta = R\left(\frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_o t + \theta_o\right) = \frac{R}{2}\ddot{\theta}t^2 + R\dot{\theta}_o t + R\theta_o \text{ or } R\ddot{\theta} = a_T ; R\dot{\theta}_o = v_o \text{ et } R\theta_o = s_o.$$

D'où :

$$s = \frac{1}{2}a_T t^2 + v_o t + s_o$$

3-2-Repérage par les coordonnées polaires de M

■ Vecteur position

En se référant à la figure du paragraphe 3-1 on a : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ or $x = R\cos\theta$ et $y = R\sin\theta$

$$\overrightarrow{OM} = R(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})$$

■ Vecteur vitesse

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \text{ or } x = R\cos\theta \text{ et } \theta = \dot{\theta}t \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \text{ et } \frac{dx}{d\theta} = -R\sin\theta. \text{ Soit : } \frac{dx}{dt} = -R\dot{\theta}\sin\theta$$

et par analogie : $\frac{dy}{dt} = R\dot{\theta}\cos\theta$. D'où le vecteur vitesse est : $\vec{v} = R\dot{\theta}(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$

13

■ Vecteur accélération

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = -R\dot{\theta}^2(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) = -\dot{\theta}^2 \overrightarrow{OM}$$

Les vecteurs \vec{a} et \overrightarrow{OM} ont même direction et des sens contraires

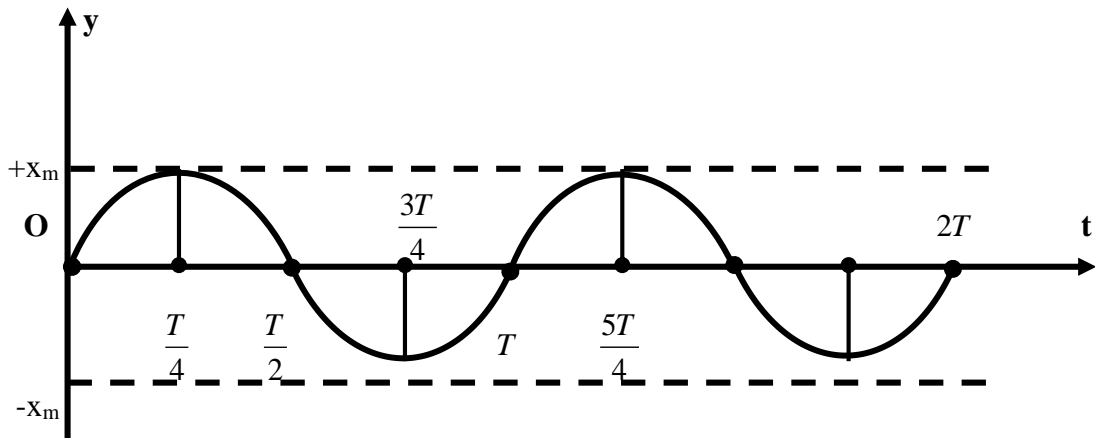
II-3-MOUVEMENT SINUSOIDAL

C'est un mouvement dans lequel la trajectoire est une **sinusoïde** du temps. On distingue deux types de mouvements sinusoïdaux : **mouvement rectiligne sinusoïdal** et **mouvement sinusoïdal de rotation**.

1-Mouvement rectiligne sinusoïdal

a-Définition

C'est un mouvement rectiligne dans lequel la trajectoire est une **sinusoïde** et dont l'élongation x est une fonction sinusoïdale du temps.



b-Equation horaire (ou équation cinématique)

L'équation horaire d'un tel mouvement est de la forme : $x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$ ou $x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$

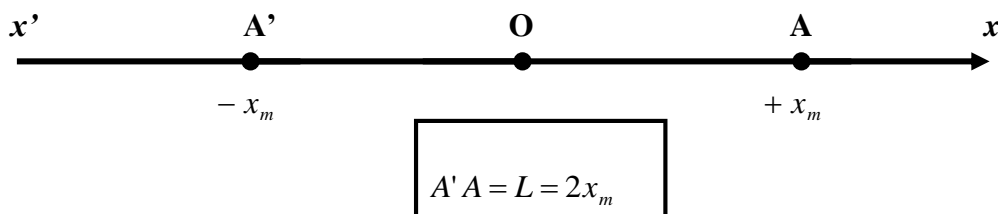
x_m : Amplitude maximale du mouvement, elle est toujours **positive** et s'exprime dans la même unité que x .

ω : Pulsation du mouvement et s'exprime en **rad/s**.

$\omega t + \varphi$: Phase du mouvement à l'instant t .

φ : Phase à l'origine $t = 0$.

N.B. : Au cours d'un tel mouvement, le mobile parcourt le segment de longueur $2x_m$ alternativement dans un sens et dans l'autre : On dit qu'il **oscille de part et d'autre de l'origine O**.



2-Mouvement sinusoïdal de rotation

a-Définition

C'est un mouvement sinusoïdal dans lequel la trajectoire est un **cercle** ou **arc de cercle** et dont l'élongation x est une fonction sinusoïdale du temps.

Exemple : Le mouvement d'une balançoire.

b-Equation horaire

Elle est de la forme : $\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$ ou $\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$

θ_m : Amplitude angulaire maximale du mouvement, elle est toujours **positif** et s'exprime dans la même unité que θ (abscisse angulaire ou **angle balayé**)

ω : Pulsation du mouvement et s'exprime en **rad/s**.

$\omega t + \varphi$: Phase du mouvement à l'instant t .

φ : Phase à l'origine $t = 0$.

O.S.3.1 I – DEFINITION DE LA DYNAMIQUE

C'est une partie de la Physique qui a pour but l'étude des mouvements des corps en tenant compte des causes génératrices que sont les **forces**. Elle met donc en évidence le rapport entre la force et le mouvement.

II – ELEMENTS DE LA DYNAMIQUE

1 – Point matériel

C'est un objet de dimensions assez petites c'est-à-dire assimilable à un point géométrique.

Exemple : Une bille de très faible rayon.

N.B. : Cette notion de point matériel est relative car :

- L'homme est un point matériel par rapport au soleil ou par rapport à la Terre.
- La fourmi est considérée comme point matériel par rapport à l'homme.

2 – Système matériel

C'est un ensemble de points matériels sur lequel porte l'étude. Il peut être **déformable** ou **indéformable**.

Exemple : Un solide constitue un système matériel car il résulte de la réunion de petites portions de matière assimilables à des points matériels.

a-Système déformable

C'est un système dans lequel les distances entre les points matériels qui le constituent sont variables sous l'effet d'une contrainte (force) ou au cours du temps.

Exemple : Un ressort, un fil de torsion.

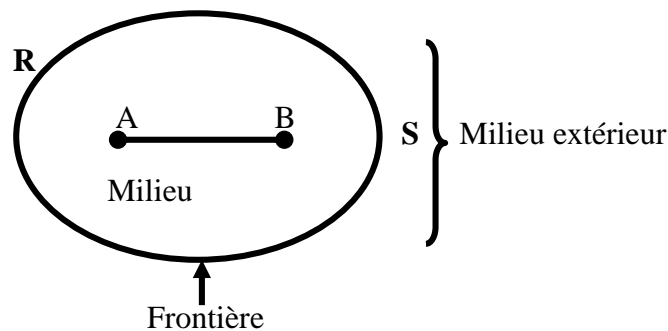
b-Système indéformable

C'est un système dans lequel les distances entre ses points matériels restent invariables (constantes) sous l'effet d'une contrainte ou au cours du temps.

Exemple : Une boule d'acier, une balle de fusil, une automobile, un astre...

3 – Milieu extérieur et intérieur

- Un **milieu extérieur** constitue un ensemble de points qui n'appartient pas au système matériel car ce dernier est limité par une frontière.
- Un **milieu intérieur** constitue l'ensemble des points faisant partie du système matériel.



A et B appartiennent au milieu intérieur, R et S appartiennent au milieu extérieur.

N.B. : Choisir un système matériel consiste à identifier son milieu intérieur et son milieu extérieur.

4 – Forces extérieure et intérieure

a–Forces extérieures

Les **forces extérieures** \vec{F}_{ext} sont celles exercées sur le système matériel par des corps ou des agents extérieurs c'est-à-dire qui ne font pas partie du système. On distingue deux types de forces extérieures :

- **Les forces extérieures à distance** : La force gravitationnelle ($\vec{F} = G \frac{m.m'}{d^2}$),

Le poids ($\vec{P} = m.g \vec{v}$), la force électrique ($\vec{F} = qE \vec{v}$), la force magnétique ($\vec{f} = qv \wedge B \vec{v}$)

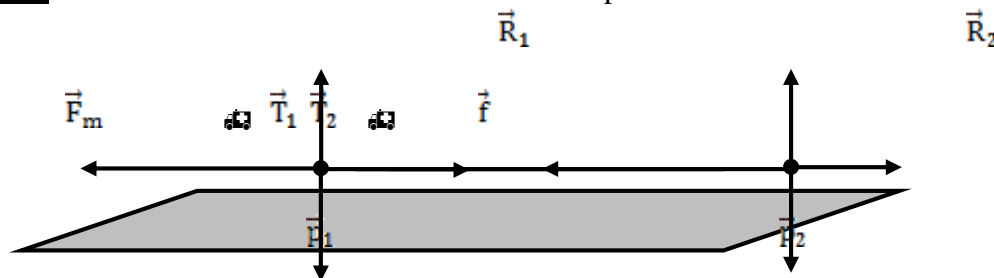
...

- **Les forces extérieures de contact** : la réaction, la force de frottement, la tension...

b–Forces intérieures

Les **forces intérieures** \vec{F}_{int} sont celles que chaque point matériel du système matériel exerce sur les autres points matériels : **Elles sont deux à deux opposées et se compensent entre elles.**

Exemple : Soit une ambulance tractant une autre en panne.



Forces extérieures : $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{f}, \vec{F}_m$.

Forces intérieures : \vec{T}_1, \vec{T}_2 .

5 – Propriétés barycentriques du centre d'inertie

Tout solide possède un **centre d'inertie G** (ou **centre de gravité**) : c'est le point unique qui, lorsque le solide évolue dans un référentiel galiléen, a un mouvement rectiligne uniforme.

Dans le cas des systèmes homogènes, si le système possède un **axe de symétrie**, le centre de gravité **G** se situe sur cet axe, et s'il possède un **centre de symétrie**, **G** coïncide avec ce centre de symétrie. La relation barycentrique déterminant **G** est de la forme :

$$\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i \vec{OG}_i}{M} \quad \text{Où } M = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \text{ est la masse totale du système.}$$

Exercice d'application

On dispose d'une barre homogène AB de milieu O, de longueur l et de masse m sur laquelle se trouvent deux masses ponctuelles fixes, l'une, de masse $2m$, située au point C distant de A

de $\frac{l}{4}$, l'autre, de masse $3m$, située au point D distant de B de $\frac{l}{4}$. A quelle distance de O se trouve le centre d'inertie du système barre-masses ?

6 – Vecteur quantité de mouvement
a–Pour un point matériel

Pour un point matériel de masse m et dont le vecteur vitesse est \vec{v}_G , le vecteur quantité de mouvement \vec{p} s'obtient par la relation vectorielle :

$$\vec{p} = m\vec{v}_G$$

\vec{p} a même direction et même sens que \vec{v}_G (car $m > 0$), sa norme p porte le nom de **quantité de mouvement** du point matériel.

$$p = mv_G \quad \text{Dans le SI, } m \text{ s'exprime en } \mathbf{Kg}, v_G \text{ en } \mathbf{m/s} \text{ et } p \text{ en } \mathbf{Kg.m/s}.$$

Exercice d'application

Calculer la quantité de mouvement de chacun des mobiles suivants : cycliste de masse 70Kg se déplaçant à la vitesse de 30Km/h et avion de masse 100t se déplaçant à la vitesse de 800Km.

b–Pour un système matériel

C'est la somme des quantités de mouvement des différents points matériels qui le constituent.

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \vec{v}_i = M \vec{V}_G \quad \text{avec } \sum_{i=1}^{i=n} m_i = M \text{ (masse totale) et } \vec{v}_i = \vec{V}_G \text{ (vitesse d'ensemble)}$$

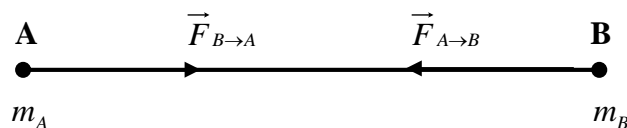
Exercice d'application

Une locomotive de mass 10t tracte une caravane de 5t et l'ensemble roulant à une vitesse de 20Km/h. Calculer la quantité de mouvement du système.

O.S.3.2 III – PRINCIPES DE LA DYNAMIQUE

1 – Principe des actions mutuelles (action et réaction)

Si un corps **A** exerce sur un corps **B** une force $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ (appelée **action**), simultanément le corps **B** exerce sur **A** une force $\vec{F}_{B \rightarrow A}$ (appelée **réaction**) et les deux forces ont la même ligne d'action, de sens contraire et la même intensité.



$$F_{A \rightarrow B} = F_{B \rightarrow A} = G \frac{m_A m_B}{AB^2} \quad G = 6,67.10^{-11} \text{ USI (Constante de}$$

gravitation)

2 – Principe d’inertie

C’est le principe selon lequel le centre d’inertie d’un système **isolé** ($\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$) est soit immobile ($\vec{v}_G = \vec{0}$), soit en **MRU** ($\vec{v}_G = cste \neq 0$). Réciproquement, lorsque le centre d’inertie d’un système est immobile ou en MRU, la somme des forces extérieures qui agissent sur lui est nulle.

N.B. : ▪ Un système est **isolé** quand il n’est soumis à aucune action extérieure.

▪ Un système est **pseudo-isolé** si la somme des forces agissant sur celui-ci se compense à chaque instant.

3 – Relation fondamentale de la dynamique (RFD)

Elle est applicable dans le cas des systèmes non-isolés. La variation du vecteur quantité de mouvement détermine cette relation qui stipule que : « la somme des forces extérieures appliquées au système non-isolé est égale à la dérivée du vecteur quantité de mouvement par rapport au temps ».

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Cette relation conduit au **théorème du centre d’inertie (TCI)** ou **2^{ème} loi de Newton** qui stipule que : « Dans un système en mouvement, la somme de toutes les forces extérieures est égale au produit de la masse du système par le vecteur accélération ».

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M \frac{d\vec{V}_G}{dt} \quad \text{or} \quad \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \vec{a}_G \quad \Rightarrow \quad \sum \vec{F}_{ext} = M \vec{a}_G$$

4 – Validité des principes : Mécanique classique et relativiste

a– Mécanique classique

Les formules que nous avons établies : $\vec{p} = M\vec{V}_G$ et $\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_G$ sont des formules de la **mécanique classique**, encore appelée mécanique Newtonienne qui est une partie de la Physique qui étudie le mouvement dont la masse M est constante et la vitesse V_G négligeable devant la célérité $C = 3.10^8 \text{ m/s}$. Une vitesse est considérée comme négligeable devant C si et seulement si $\frac{V_G}{C} < 0,14$ c’est-à-dire $V_G < 0,14C \Rightarrow V_G < 42.10^6 \text{ m/s}$.

Remarque : On peut utiliser la mécanique classique tant que la vitesse des solides considérés reste inférieure à $0,14C = 42.10^6 \text{ m/s}$. Donc la RFD est valable c’est-à-dire applicable pour $V_G < 42.10^6 \text{ m/s}$.

b- Mécanique relativiste

Elle s'applique pour le mouvement dont V_G n'est plus négligeable devant $C = 3.10^8 \text{ m/s}$ ou $\frac{V_G}{C} > 0,14$ et la masse M est variable. Donc, lorsque $V_G > 0,14C = 42.10^6 \text{ m/s}$, les formules $\vec{p} = M\vec{V}_G$ et $\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_G$ deviennent fausses et l'erreur commise est d'autant plus grande que V_G se rapproche davantage de C .

Dans ces conditions, c'est une autre mécanique qui doit s'appliquer : la **Mécanique relativiste**. Elle permet, par exemple d'étudier le mouvement de particules très rapides dans les accélérateurs ou bien les chocs entre de telles particules.

Enfin, la mécanique relativiste montre qu'aucun solide ne peut se déplacer à une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière C .

Pour des particules très rapides, la masse M n'est plus constante :
$$M = \frac{M_o}{\sqrt{1 - \frac{V_G^2}{C^2}}} = \frac{M_o}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

avec $\beta = \frac{V_G}{C}$ et la quantité de mouvement sera donc :
$$p = \frac{M_o}{\sqrt{1 - \beta^2}} V_G$$
 avec M_o masse

du solide au repos.

5 – Plan de résolution des exercices de dynamique : Etude dynamique

- a- Définir le système d'étude.
- b- Définir le référentiel d'étude.
- c- Faire la représentation schématique du système étudié et sur celle-ci sont indiqués les axes du repère, le sens du mouvement et toutes les forces extérieures appliquées au système.
- d- Inventorier toutes les forces extérieures appliquées au système (Bilan des forces).
- e- Appliquer le théorème ou le principe qui convient.
- f- Faire la projection des forces soit selon les axes ou soit par rapport au sens du mouvement.

Exercice d'application

Faites l'étude dynamique du système suivant : Une automobile de masse M_1 tire une caravane dont la masse vaut M_2 . Les forces de résistance dues à l'avancement équivalent pour chacune des véhicules à des forces \vec{f}_1 et \vec{f}_2 parallèles à la route, dirigées en sens inverse du mouvement. Le convoi roule à vitesse constante.

O.S.3.3 IV – APPLICATION DES PRINCIPES DE LA DYNAMIQUE AUX MOUVEMENTS DE TRANSLATION ET DE ROTATION

A- Mouvement de translation

A-1- Mouvement de translation rectiligne

Un solide est animé d'un mouvement de translation rectiligne quand la trajectoire de son centre de gravité est une **droite**. C'est quand le mouvement se fait par exemple sur un *plan horizontal*, sur un *plan incliné* ou en *chute libre verticale*, ...

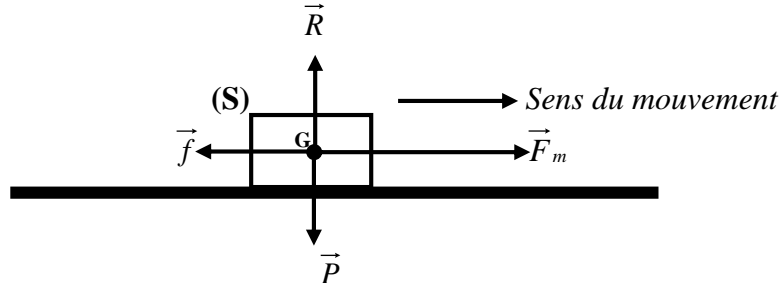
1- Mouvement d'un solide sur un plan horizontal avec frottements

Considérons un solide **S** de masse m en mouvement de translation sur un plan horizontal grâce à une force motrice \vec{F}_m . Sachant qu'il démarre avec une vitesse initiale \vec{V}_0 , déterminer :

a- L'accélération de son centre d'inertie.

b- L'équation horaire caractérisant son mouvement. En déduire sa vitesse à un instant quelconque

t .



a- Accélération du centre du centre d'inertie

Référentiel : *Terrestre supposé Galiléen (TSG)*

Système : *Solide S de masse m*

Bilan des forces : $\vec{P}, \vec{f}, \vec{F}_m, \vec{R}$.

TCI : $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a} = \vec{P} + \vec{f} + \vec{F}_m + \vec{R}$

Projection suivant le sens du mouvement : $ma = 0 - f + F_m + 0$

D'où l'expression de l'accélération : $a = \frac{F_m - f}{m}$

N.B. :

- Si $F_m > f \Rightarrow a > 0$: On a un **MRUA**
- Si $f = 0 \Rightarrow a = \frac{F_m}{m} > 0$: On a un **MRUA**
- Si $F_m = 0 \Rightarrow a = -\frac{f}{m} < 0$: On a un **MRUR** (freinage)
- Si $f = 0$ et $F_m = 0 \Rightarrow a = 0$ ($v = cste$) : On a un **MRU**

b- Equation horaire du mouvement

Elle est de la forme : $x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0$. Or à $t = 0 \Rightarrow V_0 \neq 0$ et posons $x_0 = 0$. D'où :

$$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t = \frac{1}{2}\left(\frac{F_m - f}{m}\right)t^2 + V_0t$$

▪ Vitesse finale à l'instant t

En dérivant l'équation horaire cette vitesse aura pour expression : $V = \left(\frac{F_m - f}{m}\right)t + V_0$

N.B. : La vitesse finale (à l'arrivée) est donnée par la forme :

D'après la RIT : $V^2 - V_0^2 = 2a(x - x_0)$. Or à $t = 0$, $x_0 = 0$ et posons que $x = d$. On aura donc :

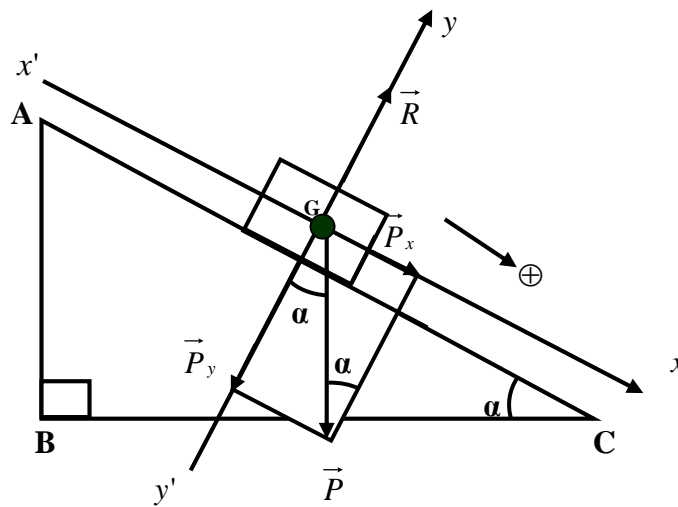
$$V = \sqrt{V_0^2 + 2\left(\frac{F_m - f}{m}\right)d}$$

2- Mouvement d'un solide sur un plan incliné

a- Sans force de frottement

Considérons un solide de masse m glissant le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Il est abandonné sans vitesse initiale.

- Etablir l'expression de l'accélération de son centre d'inertie et en déduire la nature de son mouvement.
- Quelle est alors l'équation horaire de son mouvement ?
- Donner l'expression de la réaction du plan incliné.



▪ Expression de l'accélération

Référentiel : *Terrestre supposé Galiléen (TSG)*

Système : *Solide de masse m*

Bilan des forces : \vec{P}_x (suivant $x'x$)

TCI : $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a} = \vec{P}_x$

Projection suivant $x'x$: $ma = P_x = mg \sin \alpha$

D'où l'expression de l'accélération du mouvement du solide : $a = g \sin \alpha$

Nature du mouvement : $a > 0$: le solide a un **MRUA**.

N.B. : ▪ En présence de la force motrice \vec{F}_m , on aura : $F_m + P_x = F_m + mg \sin \alpha = ma$. Soit :

$$a = \frac{F_m + mg \sin \alpha}{m} = \frac{F_m}{m} + g \sin \alpha$$

- Si le solide monte (gravite) le plan incliné : $a = -g \sin \alpha$ ou $a = \frac{F_m}{m} - g \sin \alpha$ avec $F_m \neq 0$

▪ **Equation horaire du mouvement**

Elle est de la forme : $x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0$. Or à $t = 0$, $x_0 = 0$ et $V_0 = 0$. Soit :

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(g \sin \alpha)t^2$$

▪ **Expression de la réaction du plan incliné**

Bilan des forces : \vec{P}_y, \vec{R} (suivant $y'y$)

$$\text{TCI} : \Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a} = \vec{P}_y + \vec{R}$$

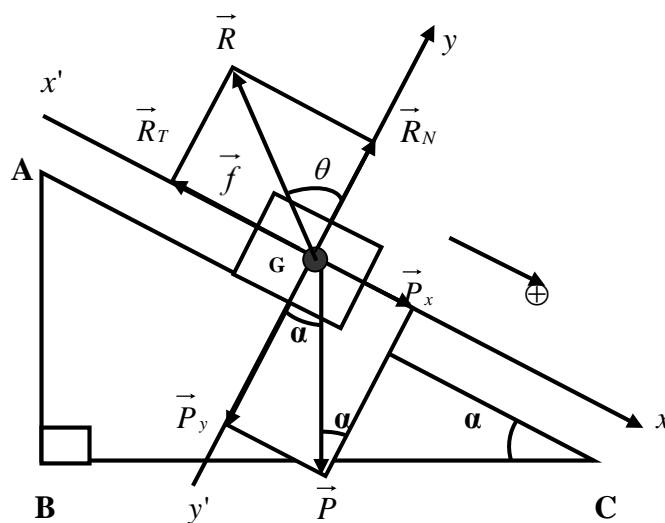
Projection suivant $y'y$: $0 = -P_y + R$. Or $P_y = mg \cos \alpha$. Soit :

$$R = mg \cos \alpha$$

N.B. : En l'absence des forces de frottement, la réaction \vec{R} du plan incliné est sur l'axe $y'y$.

b- Avec force de frottement

Répondre aux mêmes questions posées dans le cas précédent (glissement sans frottement).



En présence des forces de frottement, la réaction \vec{R} a deux composantes : une composante **tangentielle** \vec{R}_T suivant l'axe $x'x$ (parallèle au plan et à la même intensité que la force de frottement) et une composante **normale** \vec{R}_N suivant l'axe $y'y$ (perpendiculaire au plan).

▪ **Expression de l'accélération**

Référentiel : *Terrestre supposé Galiléen (TSG)*

Système : *Solide de masse m*

Bilan des forces : \vec{P}_x, \vec{f} (suivant $x'x$)

TCI : $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a} = \vec{P}_x + \vec{f}$

Projection suivant $x'x$: $ma = P_x - f = mg \sin \alpha - f$. Soit :

$$a = g \sin \alpha - \frac{f}{m}$$

Nature du mouvement : $a > 0$: le solide a un **MRUA**.

N.B. : ▪ Si le corps monte : $a = -g \sin \alpha - \frac{f}{m}$

▪ En présence de la force motrice, $a = \frac{F_m - f}{m} + g \sin \alpha$ (si le solide descend le long du plan incliné) et $a = \frac{F_m - f}{m} - g \sin \alpha$ (si le solide gravite le plan incliné).

▪ **Expression de la réaction du plan incliné**

Elle est la somme des deux composantes : $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$. En module on aura :

$$R = \sqrt{R_N^2 + R_T^2} = \sqrt{(mg \cos \alpha)^2 + f^2} \quad \text{Avec } R_N = mg \cos \alpha \text{ et } R_T = f$$

N.B. : $\tan \theta = \frac{R_T}{R_N} = \frac{f}{mg \cos \alpha} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left(\frac{f}{mg \cos \alpha} \right)$

3- Mouvement de chute libre verticale

3-1- Définition

On appelle **chute libre** le mouvement de chute d'un corps soumis à la seule action de son poids.

3-2- Lois de chute libre

a- Première loi : Expérience de Newton (1642–1727)

Dans le vide, tous les corps ont le même mouvement de chute (Expérience du tube de Newton).

b- Deuxième loi

La trajectoire du mouvement d'un corps en chute libre est **rectiligne** et **verticale**.

c- Troisième loi : Expérience de Galilée¹ (1564–1642)

Le mouvement d'un corps en chute libre est un mouvement uniformément accéléré du haut vers le bas, d'accélération \vec{a} égale à celle de la pesanteur \vec{g} du lieu considéré.

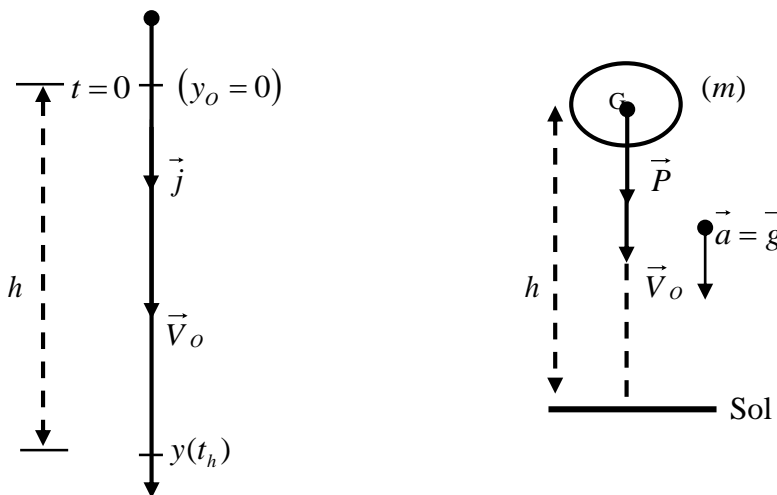
$$\vec{a} = \vec{g} \Rightarrow a = g$$

3-3- Etude dynamique de la chute libre

a- Si le corps est lâché vers le bas

Soit une bille A de masse m en chute libre sans vitesse initiale ($\vec{V}_o = \vec{0}$).

- Déterminer son accélération et donner la nature de son mouvement.
- Ecrire l'équation horaire de ce mouvement.
- Donner l'expression de la durée et celle de la vitesse correspondant à une hauteur de chute.



N.B. : Le vecteur accélération $\vec{a} = \vec{g}$ est **toujours** dirigé vers le bas tandis que \vec{V}_o peut être dirigé vers le bas ou vers le haut.

▪ Accélération du mouvement

Référentiel : *Terrestre supposé Galiléen (TSG)*

Système : *bille de masse m*

Bilan des forces : \vec{P}

TCI : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

Projection suivant $(O\vec{j})$: $a = g$

Soit :

$$a = g$$

$a = g = cste > 0$: On a un **MRUA**.

¹ Physicien et astronome Italien.

▪ **Equation horaire du mouvement**

Elle est de la forme : $y = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + y_0$. Or à $t = 0$, $V_0 = 0$ et $y_0 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}gt^2$

N.B. : Si $V_0 \neq 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}at^2 + V_0t = \frac{1}{2}gt^2 + V_0t$

▪ **Durée de chute libre**

L'équation horaire est : $y = h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

▪ **Vitesse de chute libre**

Première méthode : $h = \frac{1}{2}gt^2$. En dérivant : $V = gt = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh} \Rightarrow V = \sqrt{2gh}$

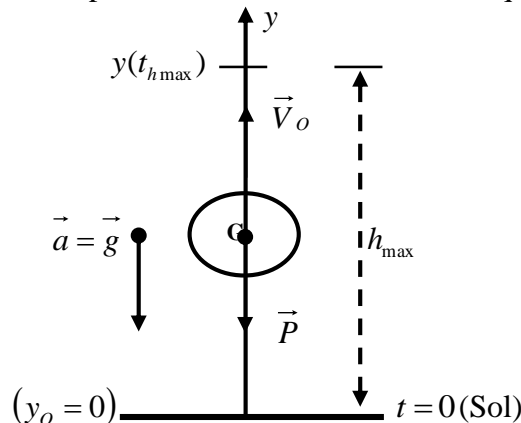
Deuxième méthode : D'après le RIT : $V^2 - V_0^2 = 2g(y - y_0)$. Or à $t = 0$, $V_0 = 0$ et $y_0 = 0$ et avec

$y = h \Rightarrow V = \sqrt{2gh}$

b- Si le corps est lancé vers le haut

Soit une bille A de masse m en lancée vers le haut avec une vitesse initiale \vec{V}_0 .

- Déterminer l'accélération de son mouvement en déduire sa nature.
- Ecrire l'équation horaire de ce mouvement.
- Donner l'expression de la hauteur maximale atteinte par la bille avant de descendre.
- Au bout de combien de temps atteindra-t-elle cette hauteur maximale.
- Au bout de combien de temps atteindra-t-elle le sol ? Avec quelle vitesse ?



▪ **Accélération du mouvement**

Référentiel : *Terrestre supposé Galiléen (TSG)*

Système : *bille de masse m*

Bilan des forces : \vec{P}

TCI : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

Projection suivant $(O\vec{j})$: $a = -g$

Soit : $a = -g$ $a = g = cste < 0$: On a un MRUR.

▪ **Equation horaire du mouvement**

Elle est de la forme : $y = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + y_0$. Or $a = -g$ et à $t = 0$, $V_0 \neq 0$ et posons que $y_0 = 0$.

$$\text{Soit : } y = \frac{1}{2}at^2 + V_0t = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0t$$

▪ **Hauteur maximale avant de descendre**

D'après le RIT : $V^2 - V_0^2 = 2g(y - y_0)$. Au sommet : $V = 0$ et $y = h_{\max}$. A $t = 0$, $V_0 \neq 0$ et

$$y_0 = 0 \Rightarrow -V_0^2 = -2gh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{V_0^2}{2g}$$

▪ **Temps pour atteindre h_{\max}**

$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0t$. En dérivant cette équation horaire : $V = -gt + V_0$. Or au sommet $V = 0$.

D'où :

$$t = \frac{V_0}{g}$$

▪ **Temps pour atteindre le sol**

$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0t$. Au sol : $y = 0 \Rightarrow t\left(-\frac{1}{2}gt + V_0\right) = 0 \Rightarrow t = 0$ (instant initial de lancement) et

$$-\frac{1}{2}gt + V_0 = 0 \Rightarrow t = \frac{2V_0}{g}$$

▪ **Vitesse au sol**

$V = -gt + V_0$. Or $t = \frac{2V_0}{g} \Rightarrow V = -\frac{2V_0}{g}g + V_0 \Rightarrow V = -V_0$ C'est la même vitesse qu'au départ mais dans le sens contraire.

A-2- Mouvement de translation curviligne

Un solide est soumis à un mouvement de translation curviligne quand la trajectoire de son centre de gravité est un arc de cercle.

1- Pendule de conique

1-1- Description

C'est un système formé d'une bille de masse m suspendue par l'intermédiaire d'un fil de masse négligeable à une tige verticale (Δ) relié à un moteur. L'expérience montre que si on lance le moteur pour une vitesse angulaire $\omega > \omega_{\max}$, l'ensemble bille-fil de suspension s'écarte de la tige décrivant un cône de révolution d'axe (Δ) et de demi-angle au sommet α .

1-2- Application

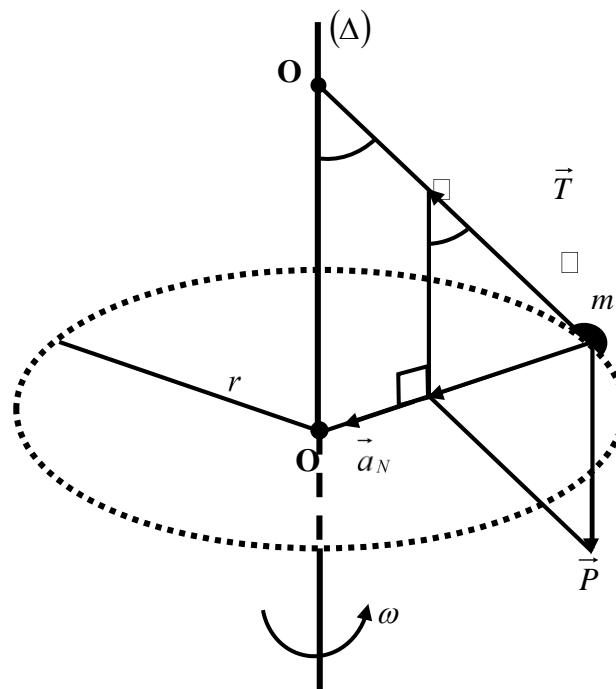
Un solide métallique de faibles dimensions et de masse $m = 20g$ est suspendu à l'extrémité d'un fil de masse négligeable et de longueur $l = 50cm$. L'autre extrémité du fil est fixée en un point O d'un axe vertical. Lorsque cet axe tourne à une vitesse angulaire ω suffisante, le fil s'incline et le centre d'inertie G du solide prend un MCU sur le cercle de centre O et de rayon r .

a- Déterminer la mesure de l'angle α formé par le fil et la verticale si la vitesse angulaire vaut

$$\omega = 7,33 \text{ rad/s. Prendre } g = 9,8 \text{ m/s}^2.$$

b- Calculer dans ces conditions la tension T du fil.

c- Quelle est la valeur minimale ω_{\min} de la vitesse angulaire qui permet au pendule de prendre une inclinaison par rapport à la verticale ?



a- Valeur de l'angle α

Référentiel : *Terrestre supposé Galiléen (TSG)*

Système : *solide de masse m*

Bilan des forces : \vec{P}, \vec{T} ou \vec{F}_C (Force centripète)

TCI : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{F}_C = \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_N$

Projection suivant la normale : $F_C = ma_N = m \frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$ car $v = r\omega$.

Or d'après la figure : $\tan \alpha = \frac{F_C}{P} = \frac{m\omega^2 r}{mg}$ et $\sin \alpha = \frac{r}{l} \Rightarrow r = l \sin \alpha$. Soit :

$$\tan \alpha = \frac{m\omega^2 l \sin \alpha}{g \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\omega^2 l}{g} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 l} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \left(\frac{g}{\omega^2 l} \right)$$

A.N. : $\alpha = 68,6^\circ$

N.B. : La valeur de m n'intervient pas et l'angle augmente avec ω .

b- Tension du fil

Première méthode : $\cos\alpha = \frac{P}{T} \Rightarrow \boxed{T = \frac{mg}{\cos\alpha}}$ **A.N.** : $T = 0,54N$

Deuxième méthode : $\sin\alpha = \frac{F_C}{T} = \frac{m\omega^2 l \sin\alpha}{T} \Rightarrow \boxed{T = m\omega^2 l}$ **A.N.** : $T = 0,54N$

N.B. : Si ce fil est un ressort de longueur à vide l_0 et qui s'allonge de Δl sous l'action de la masse m .

$T = k\Delta l = m\omega^2 l$ Or $l = \Delta l + l_0 \Rightarrow k\Delta l = m\omega^2 (l_0 + \Delta l) = m\omega^2 l_0 + m\omega^2 \Delta l \Rightarrow \boxed{\Delta l = \frac{m\omega^2 l_0}{k - m\omega^2}}$

Avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

c- Valeur de la vitesse angulaire minimale

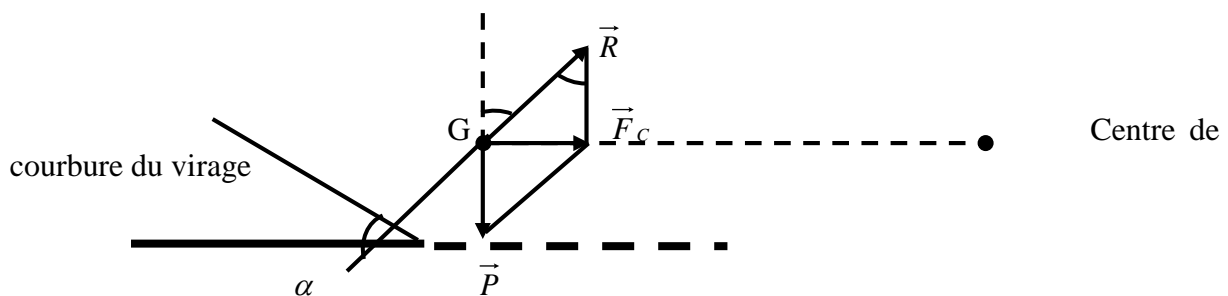
$\cos\alpha = \frac{g}{l\omega^2}$ or $\cos \leq 1 (0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \frac{g}{l\omega^2} \leq 1 \Rightarrow g \leq l\omega^2 \Rightarrow \omega^2 \geq \frac{g}{l} \Rightarrow \boxed{\omega \geq \omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{l}}}$

A.N. : $\omega_{\min} = 4,43 \text{ rad/s}$

N.B. : Physiquement, on constate que, tant que ω reste inférieur à ω_{\min} , le fil demeure vertical.

1-2- Mouvement d'un mobile dans un virage

Considérons un cycliste de masse m qui aborde en roue libre (c'est-à-dire sans pédaler), un virage circulaire de rayon r . Soit le système (homme-vélo) de masse totale M , et de centre d'inertie G .



Référentiel : *Terrestre supposé Galiléen (TSG)*

Système : *Cycliste de masse m*

Bilan des forces : \vec{P}, \vec{R} ou \vec{F}_C (Force centripète)

TCI : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_C = \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_N$

Projection suivant la normale : $F_C = ma_N = m \frac{v^2}{r}$

La piste est inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale : $\tan \alpha = \frac{F_C}{P} = \frac{ma_N}{mg} = \frac{V^2}{rg}$.

D'où l'angle :

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{V^2}{rg}\right)$$

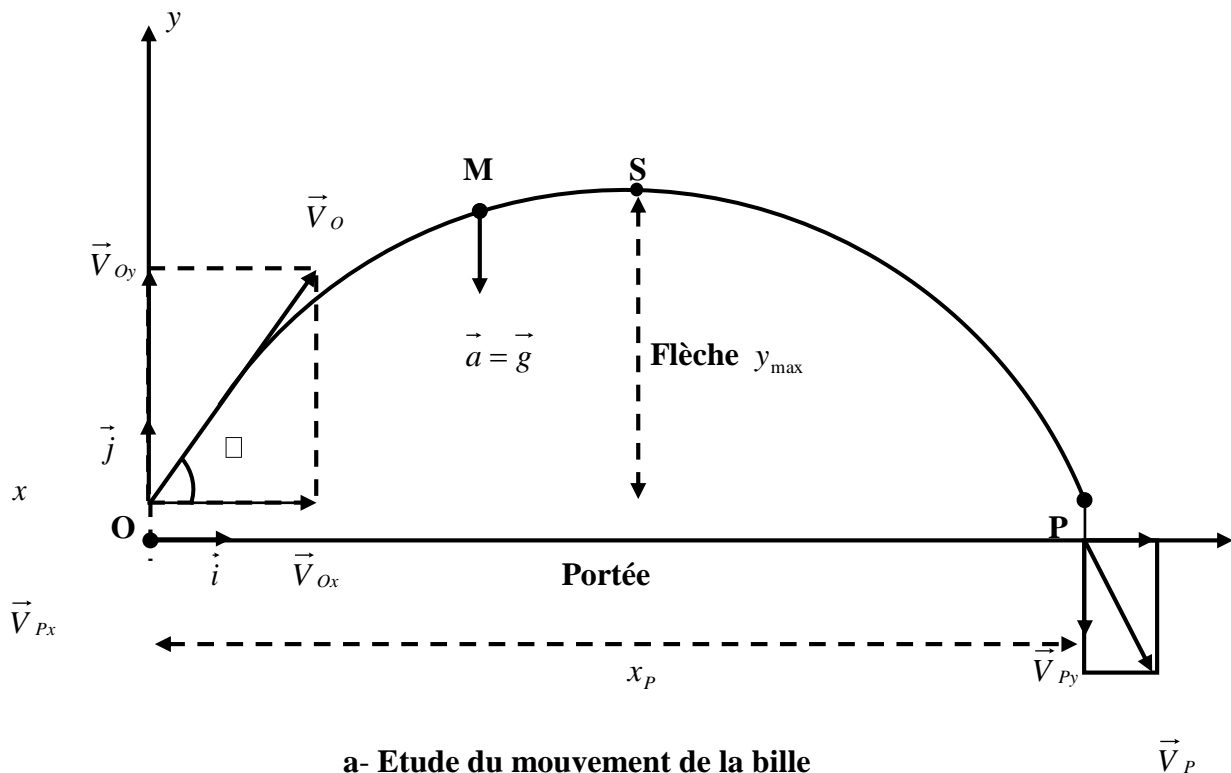
2- Mouvement d'un projectile : Chute libre parabolique

Une bille (projectile) assimilée à un point matériel de masse m est lancée d'un point O dans un champ de pesanteur \vec{g} avec une vitesse initiale \vec{V}_0 dont la direction fait un angle α appelé **angle de tir** avec le plan horizontal.

a- Etudier le mouvement de la bille.

b- Donner l'équation de la trajectoire du mouvement de la bille.

c- Calculer :
 ▪ La portée du tir.
 ▪ La flèche du tir.
 ▪ La vitesse du projectile à l'impact c'-à-d lorsqu'elle frappe le sol.



a- Etude du mouvement de la bille

Référentiel : *Terrestre supposé Galiléen (TSG)*

Système : *Bille de masse m*

Bilan des forces : \vec{P}

TCI : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Le mouvement d'un projectile est indépendant de sa masse dans un champ de pesanteur uniforme et son vecteur accélération \vec{a} est constante et égal au vecteur champ de pesanteur \vec{g} .

▪ Projection suivant (Ox)

$P = ma_x$ or $a_x = 0$ et $m \neq 0 \Rightarrow a_x = \frac{dV_{Ox}}{dt} = 0 \Rightarrow V_{Ox} = cste$, on a un **MRU**. D'où l'équation

horaire suivant cet est :

$$x = V_{Ox}t = V_o(\cos\alpha)t \quad (1) \text{ avec } V_{Ox} = V_o \cos\alpha$$

▪ Projection suivant (Oy)

$P = -ma_y = mg \Rightarrow a_y = -g$, on a un **MRUR**. D'où l'équation horaire suivant cet axe est :

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2 + V_{Oy}t + y_o. \text{ Or } V_{Oy} = V_o \sin\alpha \text{ et } y_o = 0, a_y = -g \Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_o \sin\alpha)t$$

(2)

b- Equation de la trajectoire

De la relation (1) : $t = \frac{x}{V_o \cos\alpha}$ dans (2), on a l'expression suivante comme étant l'équation

de la trajectoire du mouvement de la bille dans le champ de pesanteur \vec{g} :

$$y = -\frac{g}{2V_o^2 \cos^2\alpha} x^2 + x \tan\alpha$$

C'est l'équation d'une **parabole** passant par l'origine **O** : la trajectoire est **parabolique**.

c- Portée du tir

C'est la distance horizontale $x_p = OP$ allant du point de lancement **O** au point d'impact **P** où la bille perce le plan horizontal contenant le point d'impact $y = 0$.

$$-\frac{g}{2V_o^2 \cos^2\alpha} x_p^2 + x_p \tan\alpha = 0 \Rightarrow \frac{g}{2V_o^2 \cos^2\alpha} x_p = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow x_p = \frac{2V_o^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} \text{ or } 2\sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha$$

D'où :

$$x_p = \frac{V_o^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Le point **P** est atteint à l'instant t_p tel que : $x_p = V_o(\cos\alpha)t_p \Rightarrow t_p = \frac{x_p}{V_o \cos\alpha}$ or

$$x_p = \frac{2V_o^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}, \text{ soit } t_p = \frac{2V_o \sin\alpha}{g}$$

N.B. : La portée est maximale lorsque $\sin 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$. C'est le tir à 45° qui permet d'atteindre le point le plus éloigné.

▪ **Flèche du tir**

C'est la hauteur maximale atteinte par la bille. En **S** (point le plus élevé de la trajectoire), y change de sens de variation ; sa dérivée par rapport au temps s'annule :

$$\frac{dy}{dt} = V_y = -gt + V_o \sin \alpha = 0. \text{ D'où l'instant } t_s \text{ de passage en } \mathbf{S} \text{ est : } -gt_s + V_o \sin \alpha = 0, \text{ soit :}$$

$$t_s = \frac{V_o \sin \alpha}{g}. \text{ En remplaçant } t_s \text{ dans } y \text{ on a la hauteur maximale } y_{\max} \text{ telle que :}$$

$$y_{\max} = -g \left(\frac{V_o \sin \alpha}{g} \right)^2 + V_o \sin \alpha \cdot \frac{V_o \sin \alpha}{g} \Rightarrow \boxed{y_{\max} = \frac{V_o^2 \sin^2 \alpha}{2g}}$$

N.B. : Le temps mis pour aller de **O** à **S** est le même que pour aller de **S** à **P** et $t_s = \frac{1}{2} t_p$

▪ **Vitesse à l'impact**

$$\begin{cases} x = V_o (\cos \alpha) t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + (V_o \sin \alpha) t \end{cases} \text{ Les coordonnées de } \vec{V}_P \text{ sont : } \begin{cases} V_{Px} = V_o \cos \alpha \quad (1) \\ V_{Py} = -gt_p + V_o \sin \alpha \end{cases}$$

(2)

$$\text{Or } t_p = \frac{2V_o \sin \alpha}{g} \Rightarrow \text{ dans (2) } \Rightarrow \text{ et } V_{Py} = -V_o \sin \alpha.$$

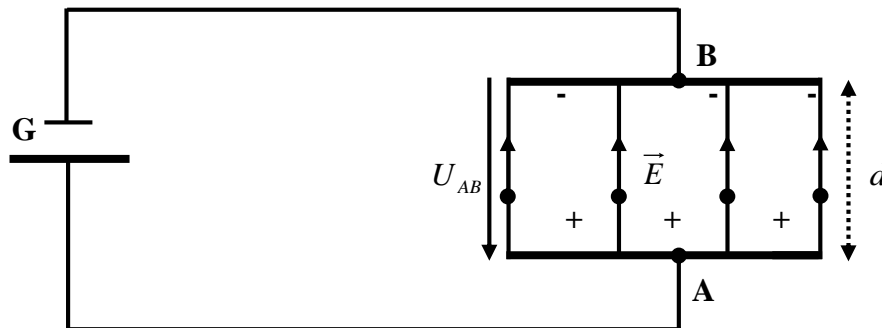
$$\text{La norme de } \vec{V}_P \text{ est donc : } V_P = \sqrt{V_{Px}^2 + V_{Py}^2} = \sqrt{(V_o \cos \alpha)^2 + (-V_o \sin \alpha)^2} \Rightarrow \boxed{V_P = V_o}$$

La vitesse à l'impact au sol est **la même** qu'au départ.

3- Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme \vec{E}

On a un champ électrique uniforme en appliquant une tension constante $U_{AB} = V_A - V_B$ entre les deux plaques métalliques planes et parallèles séparées par un isolant (air par exemple). Le vecteur champ électrique \vec{E} est :

- Perpendiculaire aux plaques.
- Dirigé de la plaque positive vers la plaque négative.



$$\text{La force électrique entre les deux plaques parallèles a pour module : } F_e = |q|E = \frac{|q|U_{AB}}{d}$$

Référentiel : *Terrestre supposé Galiléen (TSG)*
 Système : *Particule de charge q et de masse m*
 Bilan des forces : $\vec{F}_e (\vec{P} \ll \vec{F}_e)$
 TCI : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{F}_e = m\vec{a}$
 Projection : $F_e = ma = \frac{|q|U_{AB}}{d}$

D'où l'accélération acquise par la particule : $a = \frac{|q|U_{AB}}{md} = cste$

Dans un champ électrique uniforme, l'accélération d'une particule chargée est constante.

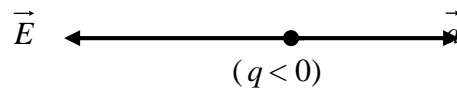
L'équation horaire est de la forme : $x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0$. A $t = 0$, $x_0 = 0$ et $V_0 = 0$

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \frac{|q|U_{AB}}{md} t^2$$

N.B. : ▪ Si $q > 0$: \vec{a} et \vec{E} ont même direction et même sens.



▪ Si $q < 0$: \vec{a} et \vec{E} ont même direction mais des sens inverses.



3-1 – Cas où le vecteur vitesse initiale \vec{V}_0 est parallèle (colinéaire) au vecteur champ électrique \vec{E}

Une particule de masse m et de charge q ($q > 0$) pénètre en **O** dans une région où règne un champ électrique uniforme \vec{E} avec une vitesse initiale \vec{V}_0 . Les plaques A et B ont une longueur l et sont distantes entre elles de d . Elles sont soumises à une tension $U_{AB} > 0$.

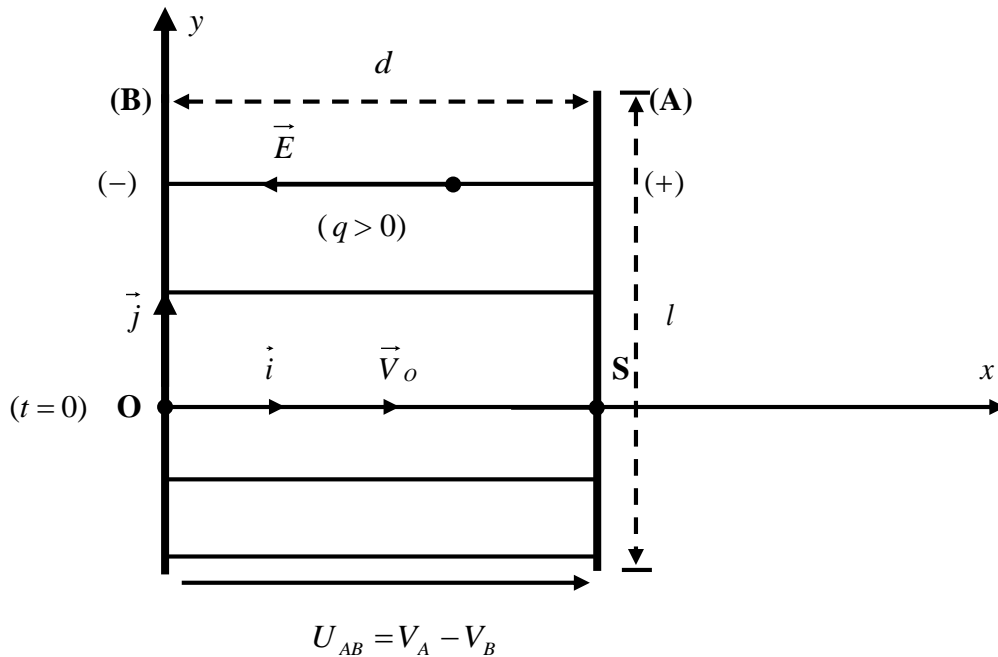
a-Quelle est la nature de la trajectoire de la particule ?

b-Donner l'équation horaire du mouvement de la particule.

c-Quelle est la distance maximale parcourue par la charge dans \vec{E} ?

d-Au bout de combien de temps parcourra-t-elle cette distance maximale ?

e-Quel est le temps de repassage au point d'entrée en **O** ? A quelle vitesse ?



a- Nature de la trajectoire

Elle est une droite car le mouvement se fait suivant un seul axe ($\vec{V}_0 // \vec{E}$)

b- Equation horaire du mouvement de la particule

Référentiel : *Terrestre supposé Galiléen (TSG)*

Système : *Particule de charge $q > 0$ et de masse m*

Bilan des forces : $\vec{F}_e (\vec{P} \ll \vec{F}_e)$

$$\text{TCI} : \Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{F}_e = m\vec{a} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

▪ Projection suivant (Oy)

$E_y = 0 \Rightarrow a_y = 0 \Rightarrow V_{Oy} = cste \Rightarrow y = 0$. Pas de mouvement de la particule chargée suivant Oy.

▪ Projection suivant (Ox)

$a_x = \frac{qE_x}{m}$ or d'après la figure $E_x = -E \Rightarrow a_x = -\frac{qE}{m} = cste$. On a un **MRUR** suivant cet axe.

D'où l'équation horaire : $x = \frac{1}{2} a_x t^2 + V_{Ox} t + x_0$. Or à $t = 0$, $x_0 = 0$ et $V_{Ox} = V_0$, d'où on aura :

$$x = -\frac{qU_{AB}}{2md} t^2 + V_0 t$$

c- Distance maximale parcourue dans \vec{E}

D'après le RIT : $V_x^2 - V_{Ox}^2 = 2a_x(x - x_0)$. Or à $t = 0$, $x_0 = 0$ et $V_{Ox} = V_0$. Pour une distance maximale avant de rebrousser chemin : $V_x = 0$ et $x = d_{\max} \Rightarrow -V_0^2 = -2 \frac{qE}{m} d_{\max}$. Soit :

$$d_{\max} = \frac{mV_0^2}{2qE} = \frac{mV_0^2 d}{2qU_{AB}}$$

d- Temps de parcours

D'après l'équation horaire : $x = -\frac{qE}{2m}t^2 + V_0t$. En dérivant par rapport au temps on aura :

$V = -\frac{qE}{m}t + V_0$. Avant le repassage la particule s'arrête : $V = 0$, d'où on aura le temps :

$$t = \frac{mV_0}{qE} = \frac{mV_0 d}{qU_{AB}}$$

e- Temps de repassage

$x = -\frac{qE}{2m}t^2 + V_0t$. Au point O, $x = 0 \Rightarrow t \left(-\frac{qE}{2m}t_0 + V_0 \right) = 0$ où $t = 0$ est l'instant initial et

$$-\frac{qE}{2m}t_0 + V_0 = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{2mV_0}{qE} = \frac{2mV_0 d}{qU_{AB}}$$

▪ Vitesse au point O

Première méthode : $x = -\frac{qE}{2m}t^2 + V_0t \Rightarrow V = -\frac{qE}{m}t + V_0$. Au point O, $t_0 = \frac{2mV_0}{qE}$. Donc :

$$V = -\frac{qE}{m} \cdot \frac{2mV_0}{qE} + V_0 \Rightarrow V = -2V_0 + V_0. \text{ D'où la vitesse :}$$

$$V = -V_0$$

Deuxième méthode : D'après le RIT : $V_x^2 - V_{Ox}^2 = 2a_x(x - x_0)$ Or à $t = 0$, $x_0 = 0$ et $V_{Ox} = V_0$.

Posons $V_x = V \Rightarrow V^2 - V_0^2 = 2a_x x$. En O, $x = 0 \Rightarrow V^2 - V_0^2 = 0 \Rightarrow V = \pm V_0$. D'où la vitesse :

$$V = -V_0$$

3-2 - Cas où le vecteur vitesse initiale \vec{V}_0 est perpendiculaire au vecteur champ électrique \vec{E}

On lance une particule de charge q ($q > 0$) avec une vitesse initiale \vec{V}_0 parallèlement aux plaques A et B.

a- Etudier le mouvement de cette particule dans le champ. Quelle est la nature du mouvement à l'extérieur des armatures ?

b-Donner l'équation de la trajectoire du mouvement de la particule et en déduire les coordonnées

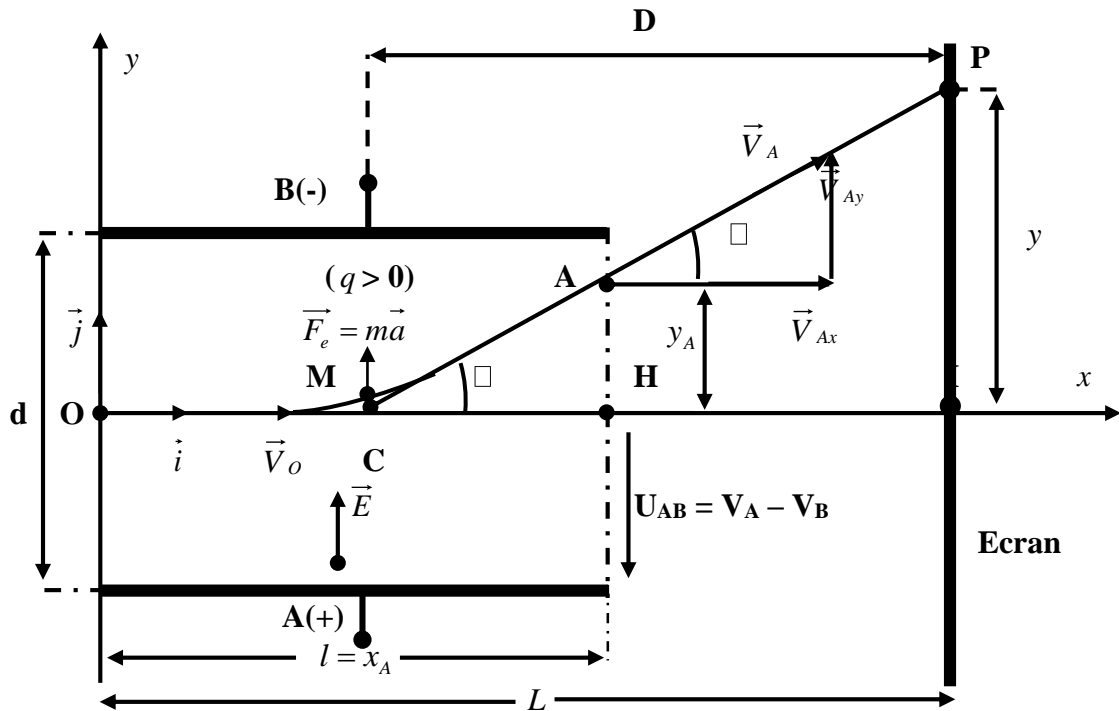
du point de sortie de la particule.

c-Quelle est la condition pour que la particule sorte du champ ?

d-Calculer :
 ▪ La vitesse de la particule à la sortie des armatures.

▪ La déviation électrostatique α .

▪ La déflection électrostatique y .



N.B. : On néglige le poids de la particule devant la force électrique ($\vec{P} \ll \vec{F}_e$)

a-1- Etude du mouvement de la particule

Référentiel : *Terrestre supposé Galiléen (TSG)*

Système : *Particule de charge $q > 0$ et de masse m*

Bilan des forces : $\vec{F}_e (\vec{P} \ll \vec{F}_e)$

$$\text{TCI} : \Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{F}_e = m\vec{a} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

▪ Projection suivant (Ox)

$F_e = ma_x = 0$ car $a_x = 0 (m \neq 0)$. On a un **MRU** suivant cet axe. L'équation horaire est donc :

$$\boxed{x = V_{ox}t = V_o t} \quad (1)$$

▪ Projection suivant (Oy)

$F_e = ma_y = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} = \text{cste}$. On a un **MRUA** suivant cet axe. L'équation horaire est :

$$y = \frac{1}{2}at^2 + V_{oy}t + y_o. \text{ A } t = 0, y_o = 0 \text{ et } V_{oy} = 0 \Rightarrow \boxed{y = \frac{qE}{2m}t^2} \quad (2)$$

a-2- Nature du mouvement

Au-delà du point de sortie **A**, la particule chargée n'est plus soumise à aucune force puisque le champ \vec{E} est nul. Elle se comporte comme une particule isolée et son mouvement devient **rectiligne uniforme** ; la particule suit alors la tangente en **A** à la parabole, direction de sa vitesse en **A**.

b-1- Equation de la trajectoire

$$x = V_o t \Rightarrow t = \frac{x}{V_o} \text{ dans (2) on aura l'équation de la trajectoire suivante : } \boxed{y = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \frac{x^2}{V_o^2}}$$

C'est l'équation d'un **arc de parabole** : le mouvement est **parabolique**.

b-2- Coordonnées du point de sortie

Quand la particule sort des armatures au point **A**, elle parcourt une distance $x_A = l$ en un temps

$$t_A = \frac{l}{V_o}. \text{ L'ordonnée du point } \mathbf{A} \text{ est donc : } y_A = \frac{qE}{2m} t_A^2 = \frac{qEl^2}{2mV_o^2}. \text{ Les coordonnées sont donc :}$$

$$\boxed{A \left(x_A = l; y_A = \frac{qEl^2}{2mV_o^2} \right)}$$

N.B. : y_A est aussi la distance verticale de la déviation de la particule

c- Condition de sortie de la particule

Pour que la particule sorte du champ, il faut que $y_A < \frac{d}{2}$ ou encore : $\frac{qEl^2}{2mV_o^2} < \frac{d}{2}$ c'est-à-

dire

$$\frac{qU_{AB}l^2}{2mdV_o^2} < \frac{d}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{qU_{AB}l^2}{md^2V_o^2} < 1} \text{ ou encore : } \boxed{U_{AB} < U_{\max} = \frac{md^2V_o^2}{ql^2}}$$

d-1- Vitesse de la particule en A

A est le point où la particule sort du champ. Les coordonnées de \vec{V}_A en ce point sont :

$$V_{Ax} = \frac{dx}{dt} = V_o \text{ et } V_{Ay} = \frac{dy}{dt} = \frac{qE}{m} t_A = \frac{qEl}{mV_o} \text{ car } t_A = \frac{l}{V_o}. \text{ La norme de } \vec{V}_A \text{ est}$$

$$V_A = \sqrt{V_{Ax}^2 + V_{Ay}^2}$$

D'où la vitesse au point de sortie est :

$$\boxed{V_A = \sqrt{V_o^2 + \left(\frac{qEl}{mV_o} \right)^2}}$$

N.B. : $V_A > V_o$: La particule a subi une accélération.

d-2- Déviation électrostatique α

C'est l'angle α formé par la trajectoire rectiligne avant de pénétrer dans le champ (direction \vec{V}_O) et après être sorti du champ (direction \vec{V}_A).

D'après la figure $\tan \alpha = \frac{V_{Ay}}{V_{Ax}}$ or $V_{Ax} = V_O$ et $V_{Ay} = \frac{qEl}{mV_O} \Rightarrow \boxed{\tan \alpha = \frac{qEl}{mV_O^2} \Rightarrow}$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{qEl}{mV_O^2} \right)$$

d-3- Déflexion électrostatique y

C'est la distance $y = IP$ qui sépare le point **I** où vient la particule en l'absence du champ ($\vec{E} = \vec{0}$) et le point **P** où elle frappe l'écran fluorescent.

D'après la figure $\tan \alpha = \frac{y}{D}$ or $D = L - \frac{l}{2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{y}{L - \frac{l}{2}} = \frac{qEl}{mV_O^2} = \frac{qU_{AB}l}{mdV_O^2}$. D'où on

aura :

$$\boxed{y = \frac{qU_{AB}l}{mdV_O^2} \left(L - \frac{l}{2} \right) = kU_{AB}} \quad \text{Avec } k = \frac{ql}{mdV_O^2} \left(L - \frac{l}{2} \right)$$

4- Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme \vec{B}

Une particule de charge q animée d'un mouvement de vitesse \vec{V} subit une force magnétique appelée **force de LORENTZ**² s'exprimant sous forme d'un produit vectoriel telle que :

$$\boxed{\vec{f}_m = |q|\vec{V} \wedge \vec{B}}$$

Les caractéristiques de \vec{f}_m sont :

- Sa direction est perpendiculaire au plan formé par \vec{V} et \vec{B} .
- Il a le sens de $\vec{V} \wedge \vec{B}$ si $q > 0$ et le sens inverse si $q < 0$.
- Son intensité est : $\boxed{f_m = |q|VB \sin \alpha}$ avec $\alpha = (\vec{V}, \vec{B})$. Lorsque \vec{V} est perpendiculaire à \vec{B} , la

Valeur de la force magnétique vaut : $\boxed{f_m = |q|VB}$ car $\alpha = 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha = 1$

f_m s'exprime en newtons (N), q en coulombs (C), V en m/s et B en teslas (T).

Dans un champ magnétique uniforme ($V = V_O = cste$), le mouvement d'une particule chargée est **toujours uniforme** et le poids \vec{P} de la particule est négligeable devant la force magnétique \vec{f}_m .

² Hendrick Anton LORENTZ (1853-1928), physicien Hollandais.

N.B. : La force magnétique est sans action sur :

- Une particule chargée au repos ($\vec{V}_o = \vec{0}$) contrairement à la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$ qui existe même quand la particule chargée est au repos.

- Une particule chargée se déplaçant dans la direction de \vec{B} ($\vec{V} // \vec{B}$), dans ce cas $\alpha = 0$

ou

$\alpha = \pi \Rightarrow \sin \alpha = 0.$

- Une particule neutre ($q = 0$) même en mouvement.

4-1 – Cas où le vecteur vitesse initiale \vec{V}_o à la même direction que le vecteur champ magnétique \vec{B}

Si \vec{B} est colinéaire à \vec{V}_o ($\vec{B} // \vec{V}_o$) $\Rightarrow \alpha = 0^\circ \Rightarrow f_m = 0 \Rightarrow a = 0 (m \neq 0) \Rightarrow V = cste.$ Quand $\vec{B} // \vec{V}_o$, la particule chargée est animée d'un MRU, sa trajectoire est **rectiligne**. La force magnétique n'a aucune influence sur la particule.

4-2 – Cas où le vecteur vitesse initiale \vec{V}_o est perpendiculaire au vecteur champ magnétique \vec{B}

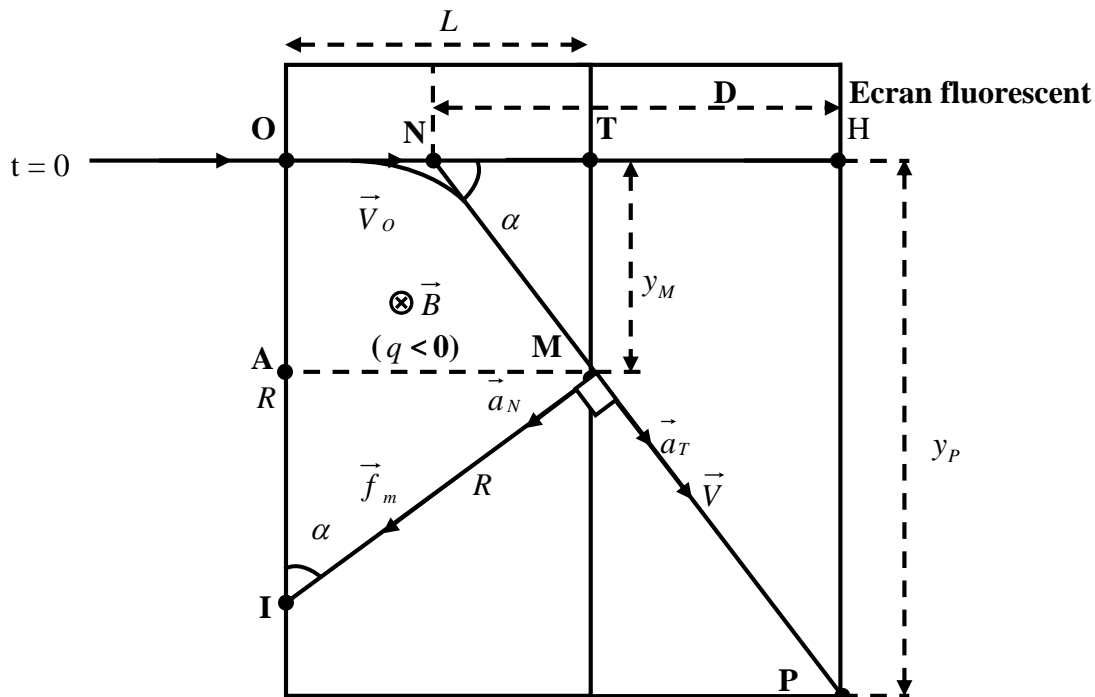
Soit une particule de masse m et de charge $q (q < 0)$ qui pénètre en **O** dans un champ magnétique (à l'instant $t = 0$) à la vitesse initiale \vec{V}_o qui est perpendiculaire à \vec{B} . Ce champ se trouve dans une région de l'espace L .

a- Etudier le mouvement de la particule dans le champ. Quelle est sa nature ?

b- Donner l'expression de sa période, fréquence, vitesse angulaire et sa quantité de mouvement.

c- Calculer la déviation magnétique α ainsi que la déflexion magnétique y .

d- Quelles sont les coordonnées du point de sortie et celles du point d'impact sur l'écran ?



N.B. : ▪ Si $q < 0$ et $\otimes \vec{B}$: La déviation se fait vers le bas.

▪ Si $q < 0$ et $\odot \vec{B}$: La déviation se fait vers le haut.

- Si $q > 0$ et $\otimes \vec{B}$: La déviation se fait vers le haut.
- Si $q > 0$ et $\odot \vec{B}$: La déviation se fait vers le bas.

a-1- Etude du mouvement de la particule

Référentiel : *Terrestre supposé Galiléen (TSG)*

Système : *Particule de charge $q < 0$ et de masse m*

Bilan des forces : $\vec{f}_m (\vec{P} \ll \vec{f}_m)$

$$\text{TCI} : \Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{f}_m = m\vec{a} = |q|VB\vec{N} \Rightarrow \vec{a} = \frac{|q|VB}{m}\vec{N}$$

$$\text{Or } \vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} = \frac{dV}{dT}\vec{T} + \frac{V^2}{R}\vec{N} = \frac{|q|VB}{m}\vec{N}. \text{ Par identification :}$$

- $\frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow V = V_0 = \text{cste}$: Le mouvement de la particule est **uniforme**.
- $\frac{|q|V_0B}{m} = \frac{V_0^2}{R} \Rightarrow \boxed{R = \frac{mV_0}{|q|B} = \text{cste}}$

Le rayon de courbure de la trajectoire étant constant, celle-ci est un **cercle**.

a-2- Nature du mouvement de la particule

Dans un champ magnétique uniforme tel que $\vec{B} \perp \vec{V}_0$, une particule chargée a un mouvement **circulaire uniforme**.

N.B. : Au-delà du point de sortie **M**, la particule n'est plus soumise à aucune force car le champ \vec{B} est nul. Son mouvement devient donc **rectiligne uniforme**. Elle suit alors la tangente en **M** à l'arc du cercle.

b-1- Période du mouvement de la particule

$$\text{Par définition } T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ or } V = R\omega \Rightarrow T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi}{V} \frac{mV_0}{|q|B}. \text{ Soit : } \boxed{T = \frac{2\pi m}{|q|B}} \text{ car } V = V_0$$

b-2- Fréquence du mouvement de la particule

$$\text{Par définition la fréquence est l'inverse de la période. Soit : } \boxed{N = \frac{1}{T} = \frac{|q|B}{2\pi m}} \text{ (En Hertz : Hz)}$$

b-3- Vitesse angulaire du mouvement de la particule

$$\text{Elle est donnée par la relation : } \omega = 2\pi N = \frac{2\pi|q|B}{2\pi m} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{|q|B}{m}} \text{ (s'exprime en rad/s)}$$

b-4- Quantité de mouvement de la particule

Elle équivaut à : $p = mV$ or dans $R = \frac{mV_o}{|q|B}$, $V = V_o = \frac{RB|q|}{m} \Rightarrow p = RB|q|$ (En **Kg.m/s**)

c-1- Déviation magnétique (ou déviation angulaire)

Longueur de l'arc $OM = R\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{OM}{R}$ (α en rad.). Si la déviation est faible, la longueur de

l'arc $OM \approx L$. Soit la déviation : $\alpha = \frac{L}{R} = \frac{BL|q|}{mV_o}$ (α en rad.)

c-2- Déflexion magnétique

Soit $\Delta(N, P, H) \Rightarrow \tan \alpha = \frac{y_P}{D}$, α petit $\Rightarrow \tan \alpha \approx \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{y_P}{D} = \frac{B|q|L}{mV_o} \Rightarrow y_P = \frac{B|q|LD}{mV_o}$

d-1- Cordonnées du point de sortie

- L'abscisse du point de sortie en **M** est : $x_M = L$
- L'ordonnée est : $y_M = OI - OA = r - r \cos \alpha = r(1 - \cos \alpha)$. D'où les coordonnées de **M** sont :

$$M \left[x_M = L, y_M = r(1 - \cos \alpha) \right]$$

d-2- Cordonnées du point d'impact

- L'abscisse du point d'impact en **P** est : $x_p = D$
- L'ordonnée est : $\tan \alpha = \frac{y_p}{D} \Rightarrow y_p = D \tan \alpha \approx D\alpha = \frac{D|q|LB}{mV_o}$. D'où les coordonnées de **P**

sont :

$$P \left[x_p = D, y_p = \frac{D|q|LB}{mV_o} \right]$$

5- Mouvement d'un satellite

5-1- Définition et rôle d'un satellite

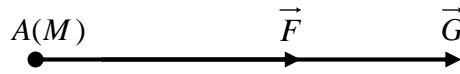
Les satellites³ sont des **engins lancés dans l'espace** par l'homme à l'aide d'une fusée (ou de la navette spatiale). Ils sont destinés à **tourner autour de la Terre** ou **d'un autre objet de l'Univers** (planètes, étoiles, etc.) sous la seule action d'une force, son \vec{P} qui s'identifie à la **force gravitationnelle** \vec{F} passant par le centre du corps autour duquel ils tournent (Terre, planètes, étoiles...) (**force centripète**) : $P = F$

Ils sont équipés d'antennes (pour communiquer avec la Terre), de **panneaux solaires** (pour l'alimentation en électricité) et d'**instruments sophistiqués dédiés à la mission** (caméra, magnétomètre, détecteurs de particules...). C'est ainsi qu'ils permettent aux hommes **d'explorer l'univers** (sonde spatiale), de **communiquer** (téléphone, radio, télévision, internet), de se déplacer (système de navigation GPS) et **d'observer la Terre** (observations météorologiques, surveillance militaire).

³ Il s'agit ici des satellites artificiels.

5-2- Notion de champ gravitationnel \vec{G}

On dit qu'en un point de l'espace il existe un **champ gravitationnel** si, amenant une masse quasi-ponctuelle en ce point, celle-ci est soumise à une **force gravitationnelle** \vec{F} .

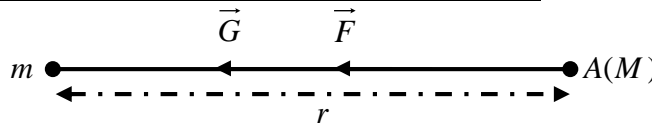


Vectoriellement le champ gravitationnel vaut : $\vec{G} = \frac{\vec{F}}{M}$ En module : $G = \frac{F}{M}$ avec F en N,

M en Kg et G en N/Kg.

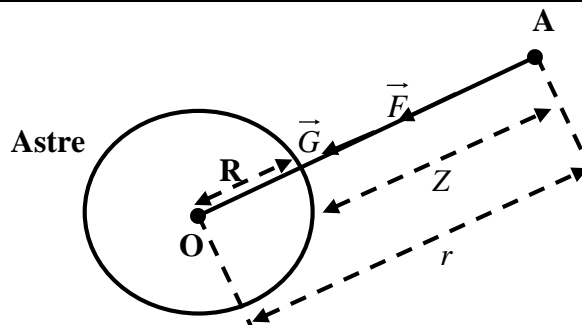
N.B. : M étant positive, \vec{F} et \vec{G} sont toujours de même sens et de même direction.

a- Champ gravitationnel crée par une masse ponctuelle



D'après la loi de **Newton**, $F = K' \frac{mM}{r^2} = MG \Rightarrow G = K' \frac{m}{r^2}$ m en Kg, r en m, G en N/Kg, et $K' = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{USI}$ (constante gravitationnelle).

b- Champ gravitationnel crée par une masse à symétrie sphérique



A une distance r le champ gravitationnel vaut : $G = K' \frac{m_a}{r^2}$ or $r = R + Z \Rightarrow$

$$G = K' \frac{m_a}{(R + Z)^2}$$

R : rayon de la Terre, **Z** : altitude du point A.

La répartition de la masse de la Terre est sensiblement sphérique. Le champ gravitationnel à l'extérieur de la Terre s'écrit :

$$G = K' \frac{m_T}{r^2} = K' \frac{m_T}{(R + Z)^2}$$

▪ A la surface de la Terre $r = R$ et $Z = 0$, d'où le champ gravitationnel :

$$G_0 = K' \frac{m_T}{R^2}$$

- A l'altitude Z , le champ gravitationnel dépend de Z , soit : $G(z) = K' \frac{m_T}{(R+Z)^2}$ or

$$G_o = K' \frac{m_T}{R^2}$$

Soit $K'm_T = G_o R^2$. D'où :

$$G(z) = G_o \frac{R^2}{(R+Z)^2}$$

Dans l'environnement terrestre, le champ de pesanteur \vec{g} se confond pratiquement avec le champ de gravitation \vec{G} . Ainsi $G \approx g$ et $G_o \approx g_o$.

- Champ de pesanteur au sol : $g_o = K' \frac{m_T}{R^2}$

- Champ de pesanteur $g(z)$ à l'altitude Z : $g(z) = g = g_o \frac{R^2}{(R+Z)^2}$

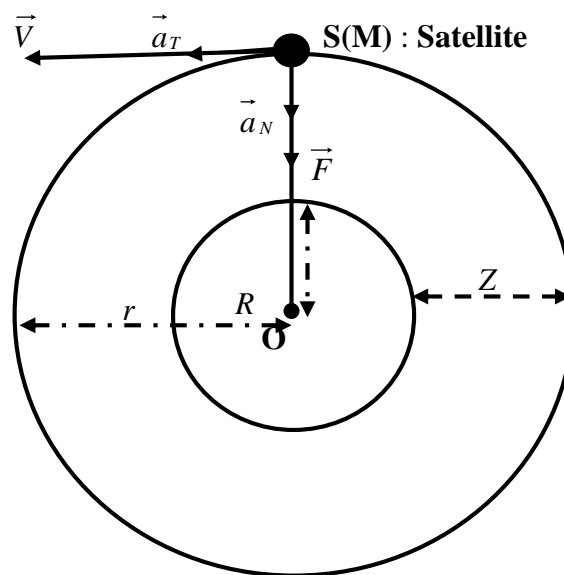
5-3- Etude du mouvement d'un satellite

Un satellite de masse M évolue sur une orbite circulaire à la distance r du centre de la Terre et à l'altitude Z de la surface de celle-ci. Le référentiel est **géocentrique**⁴.

a-Déterminer la nature du mouvement du satellite.

b-Donner les expressions de sa vitesse V et de la vitesse angulaire ω .

c-En déduire sa période de révolution T .



a- Nature du mouvement

Référentiel : *Géocentrique supposé Galiléen*

Système : *Satellite de masse M*

Bilan des forces : \vec{F} (*Force gravitationnelle*)

⁴ Dit de *Coriolis*, c'est un solide formé par le centre de la Terre et les centres de 3 étoiles lointaines.

$$\text{TCI} : \Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{F} = M \vec{a}_N = M a_N \vec{N}$$

Projection suivant la normale : $F = M a_N$.

Or la force appliquée au satellite est **normale** à la trajectoire ; il n'existe aucune force **tangentielle**. D'où : $a_T = \frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{V = cste}$

Le mouvement du satellite en orbite est **circulaire uniforme**

b-1- Expression de la vitesse linéaire

$$F = P = M a_N \Rightarrow M g = M \frac{V^2}{r} \Rightarrow V^2 = r g . \text{ Or } r = R + Z \text{ et } g(z) = g = g_0 \frac{R^2}{(R + Z)^2}$$

$$\text{On aura donc : } V^2 = r g = (R + Z) \frac{g_0 R^2}{(R + Z)^2} \Rightarrow \boxed{V = R \sqrt{\frac{g_0}{R + Z}}}$$

La vitesse linéaire d'un satellite est **indépendante de sa masse** et qu'elle diminue lorsque l'altitude Z augmente : Ce sont les satellites de plus basse altitude qui tournent vite.

N.B. : On peut aussi exprimer la masse du satellite en fonction de la masse de la Terre m_T .

$$F = M a_N \Rightarrow \frac{F}{M} = \frac{V^2}{r} = \frac{V^2}{R + Z} . \text{ Or d'après Newton : } F = K' \frac{m_T M}{(R + Z)^2} \Rightarrow K' \frac{m_T}{(R + Z)^2} = \frac{V^2}{R + Z}$$

$$\text{D'où : } \boxed{V = R \sqrt{\frac{K' m_T}{R + Z}}}$$

b-2- Vitesse angulaire du satellite

$$V = r \omega \Rightarrow \omega = \frac{V}{r} = \frac{V}{R + Z} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{R}{R + Z} \sqrt{\frac{g_0}{R + Z}} = \frac{R}{R + Z} \sqrt{\frac{K' m_T}{R + Z}}}$$

c- Période de révolution du satellite

C'est le temps que met un satellite pour effectuer une révolution complète sur sa trajectoire.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi(R + Z)}{V} = 2\pi(R + Z) \frac{\sqrt{R + Z}}{R \sqrt{g_0}} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{R} \sqrt{\frac{(R + Z)^3}{g_0}}}$$

La période T est indépendante de la masse du satellite : des satellites de masses différentes évoluant à la même altitude ont la **même période**.

$$T = \frac{2\pi}{R \sqrt{g_0}} (R + Z)^{\frac{3}{2}} = \frac{2\pi}{R \sqrt{g_0}} r^{\frac{3}{2}} . \text{ Elevons les deux membres au carré : } T^2 = \frac{4\pi^2}{R^2 g_0} r^3$$

$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{R^2 g_0} = cste} \quad (3^{\text{ème}} \text{ loi de Kepler}^5)$$

⁵ **Johannes KEPLER (1571-1630)**, astronome et physicien Allemand.

N.B. : On peut aussi exprimer la 3^{ème} loi de **Kepler** en fonction de la masse de la Terre :

$$g_o = K' \frac{m_T}{R^2} \Rightarrow R^2 g_o = K' m_T \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{K' m_T} = cste}$$

5-4- Satellite géostationnaire

C'est un satellite situé dans le plan équatorial terrestre c'est-à-dire tourne à la même vitesse que la Terre, donc à la même période de révolution que celle-ci (**T=24h = 86400s**). Son mouvement s'effectue donc dans un **référentiel terrestre** où il paraît être immobile. Calculons alors l'altitude à laquelle tourne un satellite géostationnaire du centre de la Terre.

$$T = \frac{2\pi}{R\sqrt{g_o}} (R+Z)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow (R+Z)^{\frac{3}{2}} = \frac{RT\sqrt{g_o}}{2\pi} . \text{ Elevons les deux membres au carré :}$$

$$(R+Z)^3 = \frac{R^2 T^2 g_o}{4\pi^2} \Rightarrow R+Z = \sqrt[3]{\frac{R^2 T^2 g_o}{4\pi^2}} \Rightarrow \boxed{Z = \sqrt[3]{\frac{R^2 T^2 g_o}{4\pi^2}} - R}$$

$$\text{A.N. : } Z = \sqrt[3]{\frac{(64 \cdot 10^5)^2 \cdot (86400)^2 \cdot 9,8}{4(3,14)^2}} - 64 \cdot 10^5 \Rightarrow \boxed{Z \approx 36.000Km}$$

Tous les satellites géostationnaires tournent à une altitude de **36.000Km** de la surface de la Terre !

B- Mouvement de rotation

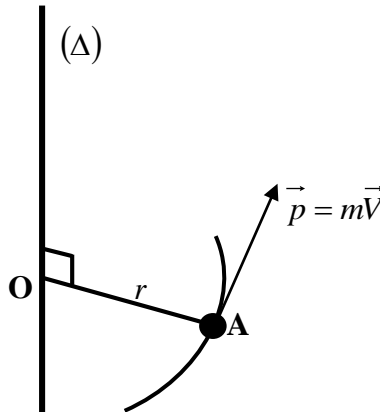
1- Définition

Un système est en mouvement de rotation lorsqu'il tourne autour d'un axe fixe décrivant une trajectoire **circulaire**.

Exemples : Les aiguilles d'une montre, le plateau d'un tourne-disque, le volant d'un véhicule...

2- Moment cinétique d'un point matériel

Soit un point matériel **A** de masse m en mouvement de rotation autour d'un axe (Δ), dont il est distant de r .



On appelle **moment cinétique** σ du point matériel **A** par rapport à l'axe (Δ) , le moment par rapport cet axe de son vecteur quantité de mouvement \vec{p} tel que :

$\vec{\sigma} = \vec{OA} \wedge \vec{p}$ De module $\sigma = OA.p.\sin(\vec{OA}, \vec{p}) = r.m.V \sin(\vec{OA}, \vec{p})$ car $OA=r$ et $p = mV$. Or $\sin(\vec{OA}, \vec{p}) = \sin 90^\circ = 1$ et $V = r\dot{\theta} \Rightarrow \boxed{\sigma = mr^2\dot{\theta}}$ avec m en **Kg**, r en **m**, $\dot{\theta}$ en **rad/s**, σ en **Kg.m².rad/s**.

Posons $J_\Delta = mr^2$: moment d'inertie du solide (point matériel) par rapport à l'axe (Δ) , soit :

$$\boxed{\sigma = J_\Delta \dot{\theta}} \quad (J_\Delta \text{ S'exprime en } \mathbf{Kg.m^2})$$

3- Théorèmes des moments

Dans un système solide en rotation, la variation en fonction du temps de son moment cinétique est égale à la valeur algébrique de la somme des moments des forces extérieures appliquées à ce système :

$$\sum \mu_\Delta(\vec{F}_{ext}) = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d(J_\Delta \dot{\theta})}{dt} = J_\Delta \frac{d\dot{\theta}}{dt}. \text{ Or } \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta} \Rightarrow \boxed{\sum \mu_\Delta(\vec{F}_{ext}) = J_\Delta \ddot{\theta}}$$

Nous obtenons ainsi le **théorème de l'accélération angulaire (TAA)** qui stipule que : « Dans un système en mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ) , la somme des de toutes les forces extérieures est égale au produit du moment d'inertie de ce système par rapport à l'axe (Δ) par l'accélération angulaire qu'il acquiert ».

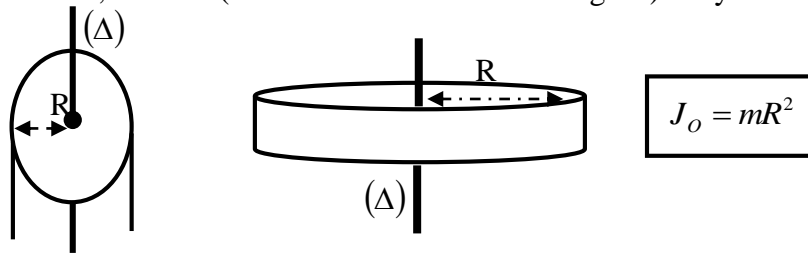
4- Notion de moment d'inertie

Le moment d'inertie J_Δ d'un objet ponctuel (point matériel) par rapport à un axe (Δ) est mr^2 , si r est la distance de l'objet à l'axe et m sa masse.

$$\boxed{J_\Delta = mr^2} \quad m \text{ En } \mathbf{Kg}, r \text{ en } \mathbf{m^2}, J_\Delta \text{ en } \mathbf{Kg.m^2}$$

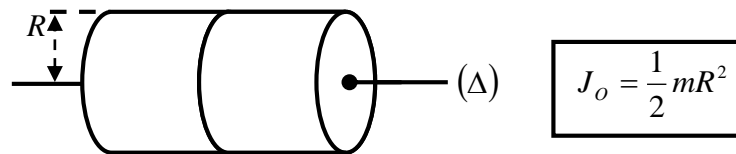
4-1- Moments d'inertie propres de quelques solides par rapport à l'axe de symétrie

a- Masse ponctuelle m , cerceau (roue ou circonférence homogène) et cylindre homogène creux.

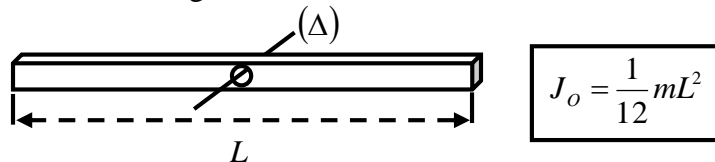


m est la masse du solide et R le rayon par rapport à l'axe de rotation

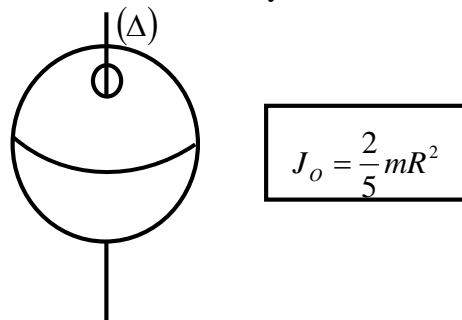
b- Disque circulaire homogène ou cylindre homogène plein.



c- Tige homogène de masse m et de longueur L .



d- Sphère homogène pleine de masse m et de rayon R .



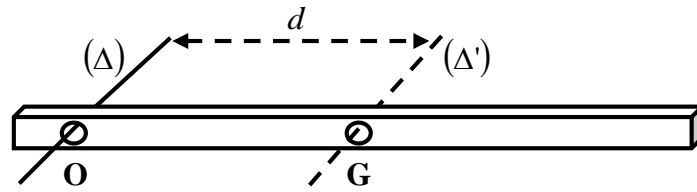
e- Sphère homogène creuse de masse m et de rayon R

$$J_o = \frac{2}{3}mR^2$$

N.B. : Pour un solide de masse négligeable en rotation autour d'un axe (Δ) : $J_o = 0$

4-2- Théorème d'HUYGENS⁶ (Christiaan, 1629-1695)

Considérons une tige homogène de longueur L et de masse m en rotation autour d'un axe (Δ) situé à une distance d de l'axe (Δ') passant par le centre de gravité appelé **axe de symétrie** ou **axe de révolution G**.



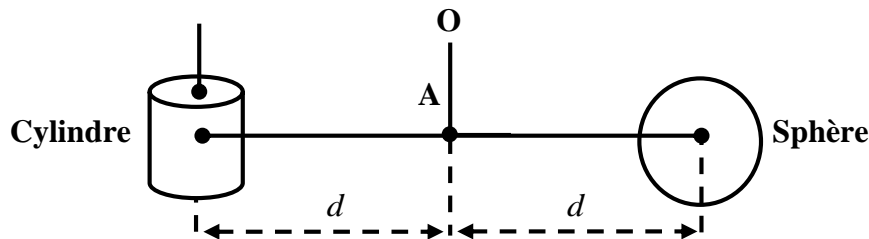
Le moment d'inertie d'un tel solide obéit au **théorème d'Huygens** : « Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe quelconque (Δ) est égal au moment d'inertie du solide par rapport à un axe (Δ') passant par son centre de gravité (**axe de symétrie**), augmenté du produit de la masse m du solide par le carré de la distance d séparant les deux axes ».

$$J_{\Delta} = J_{\Delta'} + md^2 \text{ Or } J_{\Delta'} = J_O \Rightarrow \boxed{J_{\Delta} = J_O + md^2}$$

Exercice d'application

Trouver les moments d'inertie des systèmes suivants :

- 1- Une tige homogène verticale, de masse m , de longueur L , oscillant autour de son extrémité Supérieure **O**.
- 2- Un fil de torsion, vertical, fixe en un point **A** d'une barre de masse négligeable qui supporte à l'une de ses extrémités un cylindre plein, homogène, d'axe parallèle **OA**, de masse $m_1=2\text{Kg}$, et de rayon $r_1=4\text{cm}$; et à l'autre extrémité une sphère de rayon $r_2=5\text{cm}$, de masse $m_2=2\text{Kg}$. Les centres de gravité du cylindre et de la sphère sont à égale distance d de **A** ($d=20\text{cm}$).



5- Tableau de correspondance entre mouvement de translation et mouvement de rotation

Mouvement de translation	Mouvement de rotation
Elongation linéaire x	Elongation angulaire θ
Vitesse linéaire V	Vitesse angulaire $\dot{\theta}$ ou ω
Accélération linéaire a	Accélération angulaire $\ddot{\theta}$
Masse inerte m	Moment μ
TCI : $\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_G$	TAA : $\sum \mu_{\Delta}(\vec{F}_{ext}) = J_{\Delta}\ddot{\theta}$

⁶ Astronome, mathématicien et physicien Hollandais.

6-Application des deux mouvements : Machine d'ATWOOD⁷

6-1- Description de la machine

C'est une machine formée d'une poulie très légère et très mobile supportant un fil aux extrémités duquel sont attachés deux masses identiques A et B. Si on place une surcharge sur l'une d'elle, par exemple sur A, l'équilibre est rompu et la machine se met en mouvement.

6-2- Description de la machine

Une machine d'ATWOOD est constituée de deux solides S_1 et S_2 de masses respectives m_1 et m_2 reliées par un fil inextensible de masse négligeable passant sur la gorge d'une poulie de rayon R et de moment d'inertie J_Δ tournant sans frottement autour d'un axe horizontal (Δ) passant par son milieu. On place une surcharge de masse m sur S_1 et on abandonne le système sans vitesse initiale.

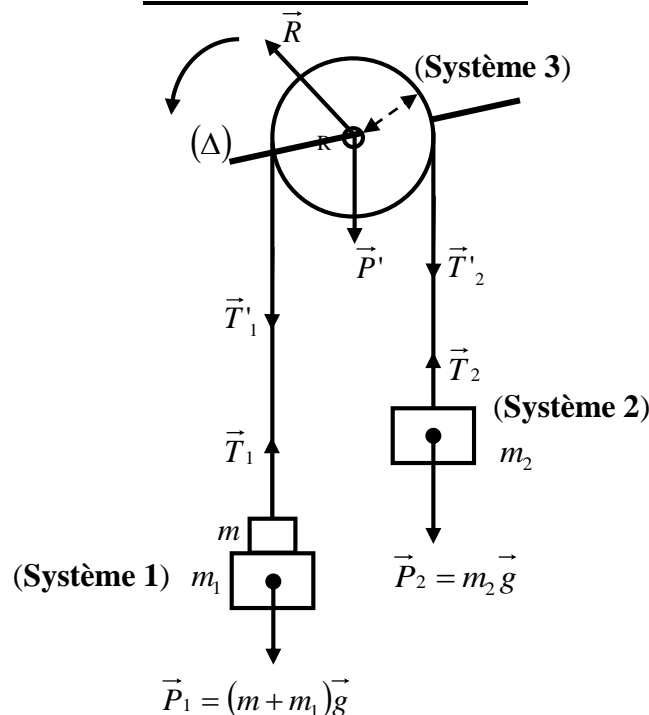
a-Quelle est l'accélération acquise par le système ?

b-En déduire la vitesse de chacune des masses au bout du temps t , temps écoulé depuis l'instant du lâcher.

c-Calculer les tensions des deux fils.

A.N. : $m_1 = m_2 = 50g$, $J_\Delta = 3,5 \cdot 10^{-4} Kg.m^2$, $R = 10cm$, $t = 10s$, $g = 10m/s^2$, $m = 15g$.

a- Accélération du mouvement



Référentiel : *Terrestre supposé Galiléen (TSG)*

Système 1 : *Solides de masses m_1 et m .*

Bilan des forces : \vec{T}_1, \vec{P}_1

$$\text{TCI} : \Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P}_1 + \vec{T}_1 = (m_1 + m)\vec{a}_1$$

⁷ **George ATWOOD (1745-1807)**, physicien Anglais, connu par la machine qui porte son nom.

Projection : $T_1 = (m + m_1)g - (m_1 + m)a_1$ (1)

Système 2 : Solide de masse m_2 .

Bilan des forces : \vec{T}_2, \vec{P}_2

TCI : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_2$

Projection : $T_2 = m_2g + m_2a_2$ (2)

Système 3 : Poulie de moment d'inertie J_o

Bilan des forces : $\vec{R}, \vec{P}', \vec{T}_1', \vec{T}_2'$

TAA : $\sum \mu_{\Delta}(\vec{F}_{ext}) = J_{\Delta} \ddot{\theta} = \mu_{\Delta}(\vec{R}) + \mu_{\Delta}(\vec{P}') + \mu_{\Delta}(\vec{T}_1') + \mu_{\Delta}(\vec{T}_2')$

Projection : $\mu_{\Delta}(\vec{R}) = 0$ et $\mu_{\Delta}(\vec{P}') = 0$ car \vec{R} et \vec{P}' croisent l'axe de rotation

D'où on aura : $J_{\Delta} \ddot{\theta} = \mu_{\Delta}(\vec{T}_1') + \mu_{\Delta}(\vec{T}_2') = T_1' R - T_2' R \Rightarrow J_{\Delta} \frac{a}{R^2} = T_1' - T_2'$ or le fil étant inextensible :

$T_1' = T_1$ Et $T_2' = T_2$ et pour les accélérations aussi on aura ce qui suit : $a_1 = a_2 = a \Rightarrow$

$a_1 = a_2 = a \Rightarrow T_1 = (m + m_1)g - (m_1 + m)a - m_2g - m_2a = J_{\Delta} \frac{a}{R^2}$. Soit on a :

$$(m + m_1 - m_2)g = \left(m + m_1 + m_2 + \frac{J_{\Delta}}{R^2} \right) a \Rightarrow a = \frac{(m + m_1 - m_2)g}{\left(m + m_1 + m_2 + \frac{J_{\Delta}}{R^2} \right)} \quad \underline{\text{A.N.}} :$$

$a = 1,26 \text{ m/s}^2$

b- Vitesse de chacune des masses

Toutes les masses sont animées d'une même vitesse linéaire. Soit l'équation horaire suivante :

$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0$. Or à $t = 0 \Rightarrow V_0 = 0$ et posons $x_0 = 0$. D'où : $x = \frac{1}{2}at^2$. En dérivant on

a :

$V = at \quad \underline{\text{A.N.}} : V = 12,6 \text{ m/s}$

c- Tensions des fils

$T_2 = m_2g + m_2a = (g + a)m_2 \quad \underline{\text{A.N.}} : T_2 = 5,63 \text{ N}$ et $T_1 = (m + m_1)(g - a)$

$\underline{\text{A.N.}} T_1 = 5,68 \text{ N}$

O.S.3-4 LES ENERGIES DES SYSTEMES MECANIQUES

A. L'ENERGIE CINETIQUE

I. Rappels et compléments sur les notions de travail, puissance et énergie

1. Le travail d'une force constante en translation

Le travail d'une force \vec{F} au cours d'un déplacement rectiligne AB de son point d'application est égal au produit scalaire des vecteurs force et déplacement

$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \cdot AB \cdot \cos(\widehat{\vec{F}; \overrightarrow{AB}}) \quad \begin{cases} * F \text{ en Newtons (N)} \\ * AB \text{ en mètres (m)} \\ * W \text{ en Joules (J)} \end{cases}$$

Remarque: Le travail d'une force est une grandeur algébrique, elle peut être négatif ; positif ou nul.

S'il est positif, il est **moteur**. S'il est négatif, il est **résistant**.

Le travail d'une force \vec{F} ne dépend pas du chemin suivi, mais du point de départ et du point d'arrivé.

2. Le travail du poids d'un corps

$$W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} = P \cdot AB \cdot \cos(\widehat{\vec{P}; \overrightarrow{AB}})$$

Remarque: Le travail du poids est **moteur** à la descente et **résistant** à la montée.

Le travail d'une force \vec{F} ne dépend pas du chemin suivi, mais du point de départ et du point d'arrivé.

3. Le travail d'une force constante en rotation

$$W_{AB}(\vec{F}) = M_{\Delta}(\vec{F}) \cdot \theta \quad \begin{cases} * M_{\Delta}(\vec{F}) \text{ en N.m} \\ * W_{AB}(\vec{F}) \text{ en J} \\ * \theta \text{ en rad} \end{cases}$$

N.B : En fonction du nombre n de tours effectués, $\theta = 2\pi n$.

4. La puissance d'une force

a. La puissance moyenne

C'est le quotient du travail effectué par la force par la durée de son action

$$P_m = \frac{W}{t} \quad \begin{cases} * w \text{ en J} \\ * t \text{ en s} \\ * P_m \text{ en watts} \end{cases}$$

b. La puissance instantanée

- Cas d'un solide en translation

$$P = \vec{F} \cdot \vec{V} = F \cdot V \cdot \cos(\widehat{\vec{F}; \vec{V}}) \quad \begin{cases} * F \text{ en N} \\ * V \text{ en m.s}^{-1} \\ * P \text{ en watts (w)} \end{cases}$$

- Cas d'un solide mobile autour d'un axe fixe

$$P = M_{\Delta}(\vec{F}) \cdot \omega \quad \begin{cases} * M_{\Delta}(\vec{F}) \text{ en N.m} \\ * P \text{ en watts (w)} \\ * \omega \text{ en rad.s}^{-1} \end{cases} \quad \text{Rappel : } \omega = 2\pi N \text{ où } \begin{cases} * \omega: \text{vitesse angulaire} \\ * N: \text{vitesse de rotation} \end{cases}$$

5. La notion d'énergie

a. Définition de l'énergie cinétique

On appelle énergie cinétique, l'énergie qu'un corps possède à cause de sa vitesse.

b. Expression de l'énergie cinétique

• Cas d'un point matériel

L'énergie cinétique d'un point matériel, de masse m , animé de la vitesse \vec{V} est :

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot V^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} * E_C \text{ en joule (J)} \\ * m \text{ en kilogramme (Kg)} \\ * V \text{ en mètre par seconde (m.s}^{-1}\text{)} \end{array} \right.$$

• Cas d'un système de points matériels en translation

L'énergie cinétique d'un système de points matériels, de masse M , en translation, animé d'une vitesse \vec{V} est : $E_C = \frac{1}{2} M \cdot V^2$ avec $M = \sum_{i=1}^n m_i$

• Cas d'un solide en rotation autour d'un axe

L'énergie cinétique d'un point matériel, de masse m en rotation autour d'un axe fixe (Δ) est :

$$E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \omega^2 \quad \text{avec } \omega = \dot{\theta} \quad \left\{ \begin{array}{l} * \omega \text{ en rad.s}^{-1} \\ * J_{\Delta} \text{ en kg.m}^2 \\ * E_C \text{ en J} \end{array} \right.$$

• Cas d'un solide animé d'un mouvement quelconque

L'énergie cinétique d'un solide animé d'un mouvement quelconque est égale à la somme de l'énergie cinétique de translation et de l'énergie cinétique de rotation.

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot V^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \omega^2$$

Exercice d'application :

Une boule sphérique de masse $m=2\text{kg}$ roule sans glisser sur une table horizontale. Son centre d'inertie d'un mouvement de translation de vitesse $V_G=4\text{m/s}$. calculer son énergie cinétique

II. Théorème de l'énergie cinétique

Enoncé : La variation d'énergie cinétique d'un solide dans un intervalle de temps donné est égale à la somme algébrique des travaux de toutes les forces appliquées au solide pendant cet intervalle.

$$\Delta E_C = E_{Cf} - E_{Ci} = \sum W(\vec{F}_{ext})$$

III. Choc élastique

Un choc est dit parfaitement **élastique** quand il y a conservation de l'énergie cinétique des corps qui y participent. Dans le cas contraire il est dit **mou**

Dans le cas d'un choc élastique on écrira :

- La conservation de la quantité de mouvement du système : la quantité de mouvement du système avant le choc est égale à la quantité de mouvement après le choc.
- La conservation de l'énergie cinétique : l'énergie cinétique du système avant le choc est égale à l'énergie cinétique du système après le choc.

B. L'énergie potentielle

1. Définition :

On appelle énergie potentielle d'un système, l'énergie que ce système peut libérer en modifiant les positions relative des éléments.

2. L'énergie potentielle de pesanteur

a. Définition :

L'énergie potentielle de pesanteur d'un système est l'énergie que possède le système (corps + Terre) du fait de leurs positions relatives.

b. Expression :

L'énergie potentielle de pesanteur du système formé par la terre et un corps de masse m est

donnée par la relation : $E_{pp} = mgz + k$ où z est la différence d'altitude entre la

position du centre d'inertie du corps et le niveau de référence (monte).

Z est compté **positivement** si le corps est au-dessus du niveau de référence et **négativement** si le corps se trouve au-dessous du niveau de référence (descend). On choisit souvent le niveau de référence tel que $k=0$

Remarque : L'énergie potentielle de pesanteur d'un corps dépend de la référence choisie. Elle est nulle si le corps se trouve au niveau de référence.

3. L'énergie potentielle élastique

a. Définition

L'énergie potentielle élastique d'un système est l'énergie que possède le système du fait de sa déformation. C'est le cas d'un ressort, d'un fil de torsion.

b. Cas d'un ressort :

L'énergie potentielle élastique d'un système (ressort-solide) a pour expression :

$E_{pe} = \frac{1}{2} kx^2$ où k est la constante de raideur du ressort et x la

déformation (allongement ou raccourcissement) du ressort par rapport à sa longueur à vide.

c. Cas d'un fil de torsion

L'énergie potentielle élastique d'un système (fil-tige) a pour expression :

$E_{pe} = \frac{1}{2} C\theta^2$ où C est la constante de torsion et θ l'angle de torsion

4. Théorème de l'énergie potentielle

Enoncé : La variation de l'énergie potentielle d'un système est égale à l'opposé de la somme algébrique des travaux des forces extérieures.

$$\Delta E_p = E_{pf} - E_{pi} = - \sum W(\vec{F}_{ext})$$

C. L'énergie mécanique

1. Définition

L'énergie mécanique E d'un système est égale, à chaque instant, à la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle $E = E_c + E_p$

2. Théorème de l'énergie mécanique

Énoncé : La variation d'énergie mécanique d'un système est égale à la somme algébrique des travaux des forces extérieures.

$$\Delta E = E_f - E_i = \sum W(\vec{F}_{ext})$$

3. Loi de conservation de l'énergie mécanique d'un système

Énoncé : L'énergie mécanique d'un système isolé ou pseudo isolé est constante : $E = \text{constante}$, soit $\Delta E = 0$

Un système est dit **conservatif** lorsque l'énergie mécanique du système reste constante au cours de son évolution.

O.S.3.5. LES OSCILLATEURS MECANIQUES

I – DEFINITION

Un oscillateur mécanique est un système qui effectue des *oscillations* de part et d'autre de sa position d'équilibre quand il est légèrement écarté de celle-ci.

Exemples : ■ Un point d'une branche de diapason que l'on a frappé avec un petit marteau et qui produit un son.

- Un point d'une masse accrochée à un ressort et que l'on a écarté de sa position d'équilibre, puis lâché.

N.B. : ■ Un **battement** est une **demi-oscillation**.

- Si $T = 2s$, la durée d'un battement est une seconde : On dit que l'oscillateur « *bat la seconde* ».

II – OSCILLATEURS MECANIQUES HARMONIQUES

1-Définition

Un oscillateur mécanique est **harmonique** si son abscisse par rapport à sa position d'équilibre est une fonction sinusoïdale du temps. Cette abscisse x s'écrira par exemple :

$$x = x_m \sin(\omega_o t + \varphi).$$

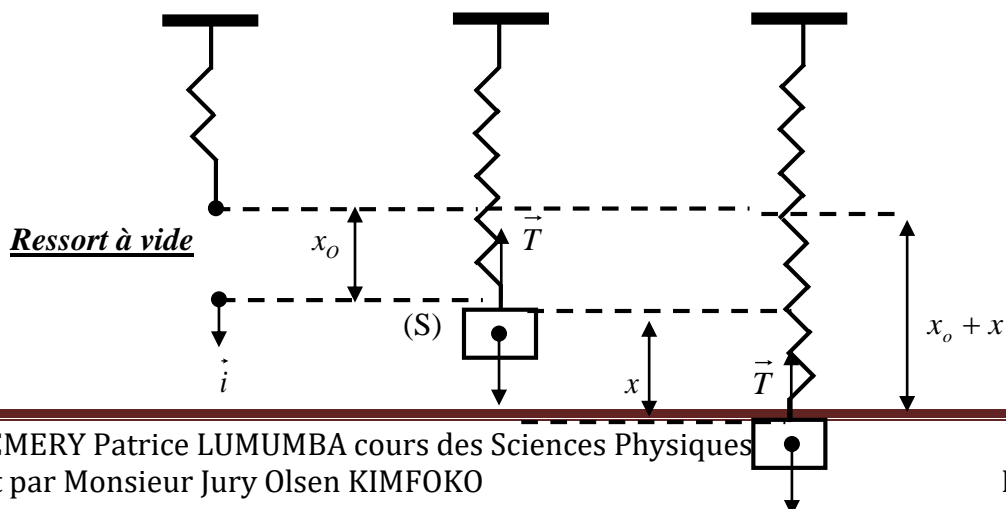
- x_m : Amplitude maximale (m), elle **toujours positive**.
- φ : Phase à l'instant initial ($t = 0$), dépend des conditions initiales.
- $\omega_o t + \varphi$: Phase à l'instant quelconque t .
- ω_o : Pulsation (rad/s).

2-Etude des mouvements harmoniques

2-1-Mouvement rectiligne sinusoïdal : Pendule élastique

Un pendule élastique est un système constitué d'un solide accroché à l'extrémité d'un ressort à spires non jointives. Ce système effectue des oscillations de translation autour de sa position d'équilibre. C'est ainsi qu'on distingue : *le pendule élastique vertical* et *le pendule élastique horizontal*.

2-1-1-Pendule élastique vertical





Faisons l'étude du mouvement de cet oscillateur par deux méthodes :
a-Méthode dynamique

- Référentiel : *Terrestre supposé Galiléen (TSG)*
- Système : *Solide de masse m + ressort*
- Bilan des forces : \vec{P}, \vec{T}
- TCI : $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$
- Projection : $P - T = ma$
- A l'équilibre : $P - T = 0 \Rightarrow P = T = Kx_0$
- En mouvement : $P - T = ma (a \neq 0)$

Or le ressort s'est allongé de $x_0 + x \Rightarrow P - K(x_0 + x) = ma$. Posons $a = \ddot{x} \Rightarrow$

$$P - Kx_0 - Kx = m\ddot{x} \text{ or } P = Kx_0 \text{ (équilibre)} \Rightarrow m\ddot{x} = -Kx \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0}$$

ou encore $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ avec $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$.

C'est l'équation différentielle du second degré sans second membre d'un mouvement oscillatoire dont l'une des solutions est de la forme $x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$. Le solide (S) est animé d'un **mouvement de translation sinusoïdal**.

■ **Pulsation propre des oscillations**

Symbolisée par ω_0 , elle s'exprime en **rad/s**. Elle est de la forme : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}}$
 avec ω_0 en rad/s, K constante de raideur du ressort en $N / m (N.m^{-1})$

et m en Kg.

■ **Période propre des oscillations**

La période propre ou tout simplement période T_0 d'un pendule élastique est le temps d'une oscillation complète. Elle s'exprime en **seconde**.

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}}$$

■ **Fréquence propre des oscillations**

Symbolisée par N_0 , elle représente le nombre d'oscillations complètes effectuées en une seconde. Elle s'exprime en **Hertz (Hz)**.

$$N_o = \frac{1}{T_o} = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

b-Méthode énergétique

Pendant le mouvement oscillatoire l'énergie mécanique du système masse + ressort se conserve. Soit pour un système isolé : $E_M = E_C + E_P = cste \Rightarrow E_M = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = cste$

Dérivons les deux membres par rapport au temps : $\frac{dE_M}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + Kx\dot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x}(m\ddot{x} + Kx) = 0$

. Le système est en mouvement $\dot{x} \neq 0 \Rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$ ou

encore $\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0$ avec $\omega_o^2 = \frac{K}{m}$.

N.B. : L'énergie potentielle d'un système est la somme de son énergie potentielle élastique et de son énergie potentielle de pesanteur : $E_P = E_{Pe} + E_{Pp}$. L'énergie mécanique du système masse + ressort vaut selon la définition habituelle : $E_M = E_C + E_P = E_C + E_{Pe} + E_{Pp} = cste$

- L'énergie cinétique de S dont la vitesse est $V = \dot{x}$ vaut $E_C = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$.
- L'énergie potentielle élastique du ressort est $E_{Pe} = \frac{1}{2}K(x_o + x)^2$ car le ressort est allongé de $x_o + x$.
- L'énergie potentielle de pesanteur de S vaut $E_{Pp} = mgz$ avec $z = -x$ car, sur un axe orienté vers le haut $(G_o, -i)$, l'abscisse de G est bien $-x$. D'où $E_{Pp} = -mgx$

$$E_M = E_C + E_P = E_C + E_{Pe} + E_{Pp} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}K(x_o + x)^2 - mgx = cste$$

$$E_M = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx_o^2 + Kx_o x + \frac{1}{2}Kx^2 - mgx = cste. \text{ Or à l'équilibre } mg = Kx_o, \text{ donc}$$

$$E_M = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx_o^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = cste. \text{ Calculons la dérivée de } E_M \text{ par rapport au temps :}$$

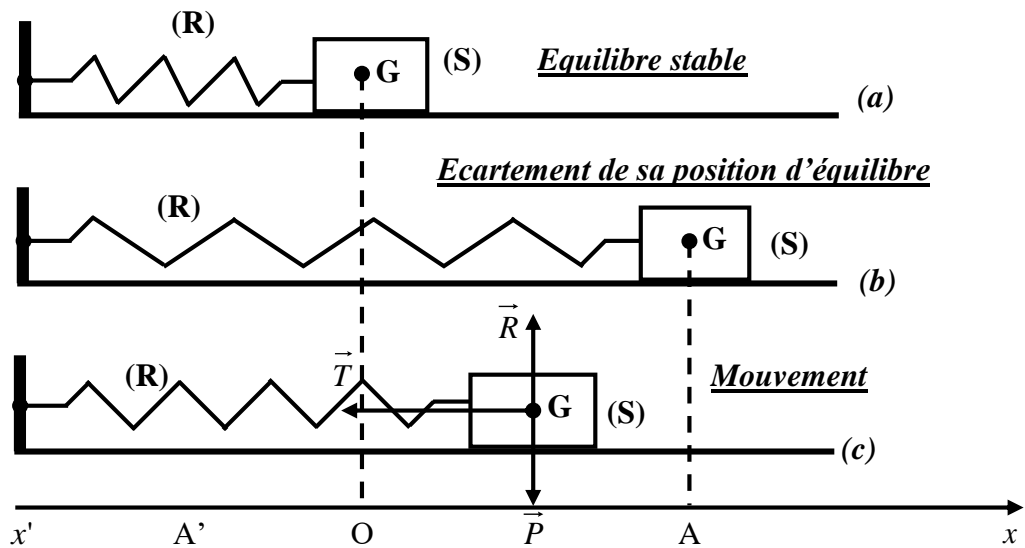
$$\frac{dE_M}{dt} = \frac{1}{2}m.2\dot{x}\ddot{x} + 0 + \frac{1}{2}K.2x\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + Kx) = 0 \Rightarrow \dot{x} \neq 0 \Rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

Ou encore $\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0$ avec $\omega_o^2 = \frac{K}{m}$

2-1-1-Pendule élastique horizontale

A une extrémité d'un ressort (R) horizontal, dont l'autre extrémité est fixe, est accroché un solide (S) qui peut se déplacer *sans frottement* sur un plan horizontal dans la direction du ressort, grâce à un guidage approprié. Le ressort, de masse négligeable, est à spires non jointives de sorte qu'il peut être étiré que comprimé.



Faisons l'étude dynamique du mouvement de cet oscillateur par deux méthodes :
a-Méthode dynamique

Référentiel : *Terrestre supposé Galiléen (TSG)*

Système : *Solide de masse m + ressort*

Bilan des forces : \vec{P} , \vec{T} , \vec{R} .

TCI : $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R}$

Projection suivant $x'x$: $ma = m\ddot{x} = 0 - T + O = -T = -Kx$

$$m\ddot{x} = -Kx \Rightarrow \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0} \text{ ou encore } \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0} \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{K}{m}.$$

b-Méthode énergétique

Pendant le mouvement oscillatoire l'énergie mécanique du système masse + ressort se conserve. Soit pour un système isolé : $E_M = E_C + E_P = cste \Rightarrow E_M = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = cste$

Dérivons les deux membres par rapport au temps : $\frac{dE_M}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + Kx\dot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x}(m\ddot{x} + Kx) = 0$

.Le système est en mouvement $\dot{x} \neq 0 \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} + Kx = 0} \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0}$ ou

encore $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$.

N.B. : Pendant le mouvement oscillatoire de la masse autour de sa position d'équilibre, pour tout pendule élastique (vertical ou horizontal) :

■ L'énergie mécanique se conserve c'est-à-dire reste constante. Elle est proportionnelle au carré de l'amplitude linéaire.

$$E_M = E_C + E_P = cste \Rightarrow E_M = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} K x^2 = cste \text{ or } x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi), \text{ en}$$

dérivant :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = x_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow E_M = \frac{1}{2} m x_m^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} K x_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = cste$$

Or

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \text{ donc } E_M = \frac{1}{2} K x_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} K x_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = cste.$$

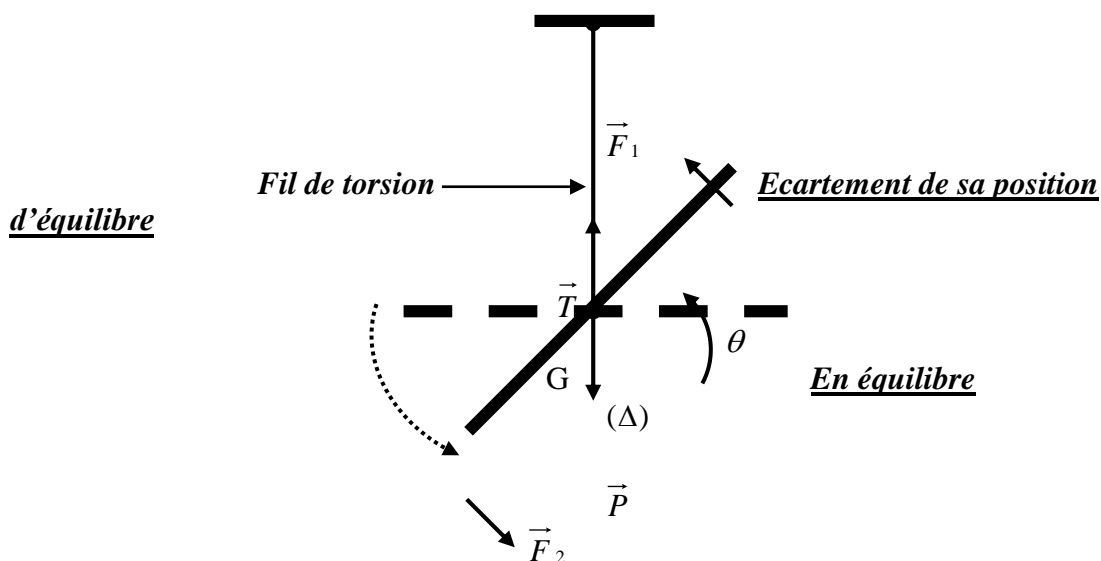
$$E_M = \frac{1}{2} K x_m^2 [\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)] = cste. \text{ D'où : } \boxed{E_M = \frac{1}{2} K x_m^2 = cste}$$

- **L'énergie cinétique** de la masse **se transforme en énergie potentielle** du ressort et vice versa. $E_M = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} K x_m^2$. Ce qui permet de trouver la vitesse linéaire de la masse au Passage par la position d'équilibre :

$$\boxed{V = x_m \sqrt{\frac{K}{m}} = x_m \omega_0}$$

2-1-Mouvement circulaire sinusoïdal : Pendule de torsion

Il est constitué par une barre (ou tige) suspendue en son centre de gravité G à un fil de torsion de constante de torsion C. Ce système effectue des oscillations de rotation autour de la position d'équilibre vers laquelle il est constamment rappelé par le couple de torsion (appelé pour cette raison **couple de rappel**). Le système est en équilibre quand le fil n'est pas tordu. Tournons la tige d'un angle θ par rapport à cette position. Aussitôt elle revient vers la position d'équilibre grâce au couple de torsion dont le moment est $-C\theta$.



Faisons l'étude du mouvement de cet oscillateur par deux méthodes :

a-Méthode dynamique

Référentiel : *Terrestre supposé Galiléen (TSG)*

Système : *Tige*

Bilan des forces : \vec{P}, \vec{T} , couple de torsion de moment μ

TAA : $\Sigma \mu_{\Delta}(\vec{F}ext) = J_{\Delta} \ddot{\theta} \Rightarrow \mu_{\Delta}(\vec{P}) + \mu_{\Delta}(\vec{T}) + \mu = J_{\Delta} \ddot{\theta}$

Projection : \vec{P} et \vec{T} rencontrent l'axe (Δ), $\mu_{\Delta}(\vec{P}) = 0$ et $\mu_{\Delta}(\vec{T}) = 0$

Ce qui conduit à : $\Sigma \mu_{\Delta}(\vec{F}ext) = \mu = J_{\Delta} \ddot{\theta} = -C\theta \Rightarrow J_{\Delta} \ddot{\theta} + C\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{C}{J_{\Delta}} \theta = 0$ ou

encore

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2 \theta = 0 \quad \text{avec } \omega_o^2 = \frac{C}{J_{\Delta}}.$$

C'est l'équation différentielle du second degré sans second membre d'un mouvement oscillatoire dont l'une des solutions est de la forme $\theta = \theta_m \sin(\omega_o t + \varphi)$: La tige est animée d'un **mouvement sinusoïdal de rotation**.

■ Pulsation propre des oscillations

Symbolisée par ω_o , elle s'exprime en **rad/s**. Elle est de la forme :

$$\omega_o = \sqrt{\frac{C}{J_{\Delta}}}$$

avec ω_o en rad/s, **C constante de torsion du fil** en $N.m.rad^{-1}$ et J_{Δ} **moment d'inertie de la tige** en **Kg.m²**.

■ Période propre des oscillations

La période propre ou tout simplement période T_o d'un pendule de torsion est le temps d'une oscillation complète. Elle s'exprime en **seconde**.

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{C}}$$

■ Fréquence propre des oscillations

Symbolisée par N_o , elle représente le nombre d'oscillations complètes effectuées en une seconde. Elle s'exprime en **Hertz (Hz)**.

$$N_o = \frac{1}{T_o} = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{J_{\Delta}}}$$

b-Méthode énergétique

Pendant le mouvement oscillatoire l'énergie mécanique du système tige + fil se conserve. Soit pour un système isolé : $E_M = E_C + E_{Pe} = cste \Rightarrow E_M = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \theta^2 = cste$. Dérivons les

deux membres par rapport au temps : $\frac{dE_M}{dt} = J_{\Delta} \dot{\theta} \ddot{\theta} + C \dot{\theta} \theta = 0 \Rightarrow \dot{\theta} (J_{\Delta} \ddot{\theta} + C \theta) = 0$. Le

système est en mouvement $\dot{\theta} \neq 0 \Rightarrow \boxed{J_{\Delta} \ddot{\theta} + C \theta = 0} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{C}{J_{\Delta}} \theta = 0}$ Soit :

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_o^2 = \frac{C}{J_{\Delta}}.$$

N.B. : Pendant le mouvement oscillatoire de la tige autour de sa position d'équilibre, l'énergie mécanique se conserve c'est-à-dire reste constante. Elle est proportionnelle au carré de l'amplitude angulaire.

$$E_M = E_C + E_{Pe} = cste \Rightarrow E_M = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \theta^2 = cste \text{ or } \theta = \theta_m \sin(\omega_o t + \varphi) \text{ en}$$

dérivant :

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \theta_m \omega_o \cos(\omega_o t + \varphi) \Rightarrow$$

$$E_M = \frac{1}{2} J_{\Delta} \theta_m^2 \omega_o^2 \cos^2(\omega_o t + \varphi) + \frac{1}{2} C \theta_m^2 \sin^2(\omega_o t + \varphi) = cste$$

$$\text{or } \omega_o^2 = \frac{C}{J_{\Delta}} \text{ donc } E_M = \frac{1}{2} C \theta_m^2 \cos^2(\omega_o t + \varphi) + \frac{1}{2} C \theta_m^2 \sin^2(\omega_o t + \varphi) = cste.$$

$$E_M = \frac{1}{2} C \theta_m^2 [\cos^2(\omega_o t + \varphi) + \sin^2(\omega_o t + \varphi)] = cste. \text{ D'où : } \boxed{E_M = \frac{1}{2} C \theta_m^2 = cste}$$

III – OSCILLATEURS MECANIQUE NON HARMONIQUES

1-Définition

Un oscillateur mécanique non harmonique est un oscillateur dont l'équation différentielle est fonction de $\sin \theta$ pour des grandes oscillations.

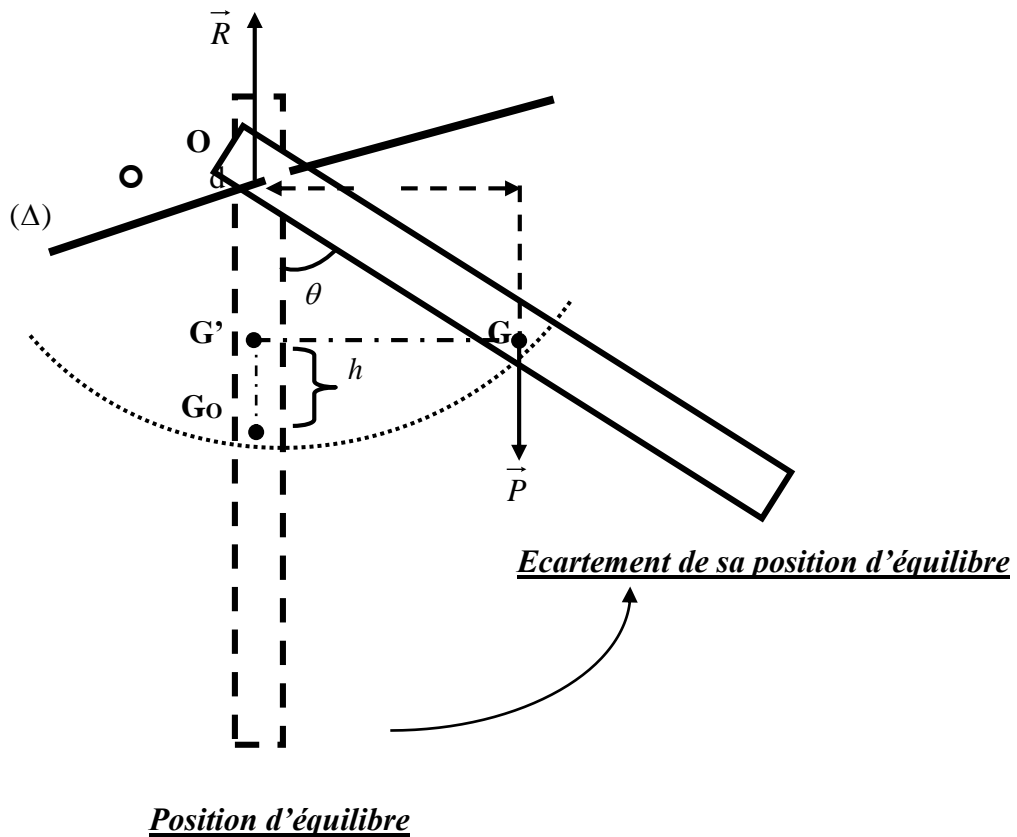
2-Etude des mouvements non harmoniques

2-1-Cas du pendule pesant

Il est constitué par un solide mobile autour d'un axe horizontal (Δ) ne passant pas par son centre de gravité G. Au cours de ses oscillations, le centre de gravité G décrit un **arc de cercle** de centre O et de rayon OG.

Exemples : Le balancier d'une horloge, une balançoire.

2-2-Étude du mouvement d'un pendule pesant



Faisons l'étude du mouvement de cet oscillateur par deux méthodes :

a-Méthode dynamique

Référentiel : *Terrestre supposé Galiléen (TSG)*

Système : *Tige de masse m*

Bilan des forces : \vec{P}, \vec{R} .

TAA : $\Sigma \mu_{\Delta}(\vec{F}_{ext}) = J_{\Delta} \ddot{\theta} \Rightarrow \mu_{\Delta}(\vec{P}) + \mu_{\Delta}(\vec{R}) = J_{\Delta} \ddot{\theta}$

Projection : \vec{R} croise l'axe $\mu_{\Delta}(\vec{R}) = 0$

Ce qui conduit à : $\Sigma \mu_{\Delta}(\vec{F}_{ext}) = \mu_{\Delta}(\vec{P}) = J_{\Delta} \ddot{\theta} = -PG'G$. Posons $G'G = d$, distance du poids à l'axe de rotation. On aura : $J_{\Delta} \ddot{\theta} = -Pd = -mgd$. Or $d = OG \cdot \sin \theta$

$$J_{\Delta} \ddot{\theta} = -Pd = -mgd = -mgOG \sin \theta \Rightarrow J_{\Delta} \ddot{\theta} + mgOG \sin \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgOG}{J_{\Delta}} \sin \theta = 0$$

ou encore $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{mgOG}{J_{\Delta}}$.

C'est l'équation différentielle du mouvement. Cette équation, dont le second terme comporte $\sin \theta$ et non θ , n'admet pas comme solution $\theta(t)$ une fonction sinusoïdale : les oscillations sont **non harmoniques**.

Si θ est petit ($< 8^\circ$) (petites oscillations ou oscillations de faibles amplitudes), on peut alors confondre $\sin\theta$ et θ exprimé en **radians** : $\sin\theta \approx \theta$. L'équation différentielle devient alors :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{mgOG}{J_\Delta} \theta = 0} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\ddot{\theta} + \omega_o^2 \theta = 0} \quad \text{avec} \quad \omega_o^2 = \frac{mgOG}{J_\Delta}$$

C'est l'équation différentielle du second degré sans second membre d'un mouvement oscillatoire dont l'une des solutions $\theta(t)$ est de la forme $\theta = \theta_m \sin(\omega_o t + \varphi)$. Le pendule pesant est animé d'un **mouvement sinusoïdal de rotation**.

■ Pulsation propre des oscillations

Symbolisée par ω_o , elle s'exprime en **rad/s**. Elle est de la forme :

$$\boxed{\omega_o = \sqrt{\frac{mgOG}{J_\Delta}}}$$

avec ω_o en rad/s, OG **distance de l'axe de rotation au centre de gravité** en **m**, J_Δ **moment d'inertie du pendule** en **Kg.m²** et **m**, **masse du pendule** en **Kg**.

■ Période propre des oscillations

La période propre ou tout simplement période T_o d'un pendule pesant est le temps d'une oscillation complète. Elle s'exprime en **seconde**.

$$\boxed{T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{mgOG}}}$$

■ Fréquence propre des oscillations

Symbolisée par N_o , elle représente le nombre d'oscillations complètes effectuées en une seconde. Elle s'exprime en **Hertz (Hz)**.

$$\boxed{N_o = \frac{1}{T_o} = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgOG}{J_\Delta}}}$$

N.B. : Si ce pendule est **composé** c'est-à-dire sur lequel on a fixé plusieurs masses, alors on a :

$$m = \Sigma m = m_1 + m_2 + m_3 + \dots m_n = \sum_{i=1}^{i=n} m_i$$

$$OG = \frac{m_1 d_1 \pm m_2 d_2 \pm m_3 d_3 \pm \dots \pm m_n d_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i d_i}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i} \text{ (Loi barycentrique)}$$

b-Méthode énergétique

Pendant le mouvement oscillatoire l'énergie mécanique du système tige +fil se conserve. Soit pour un système isolé : $E_M = E_C + E_{PP} = cste \Rightarrow E_M = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + mgh = cste$. Or

$h = OG_o - OG' \Rightarrow$
 $h = OG - OG \cos\theta$ car $OG_o = OG$ et $OG' = OG \cos\theta \Rightarrow$

$E_M = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + mgOG(1 - \cos\theta) = cste$.

En développant : $E_M = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + mgOG - mgOG \cos\theta = cste$. En dérivant les deux

membres : $\frac{dE_M}{dt} = J_{\Delta} \dot{\theta} \ddot{\theta} + mgOG \dot{\theta} \sin\theta = 0 \Rightarrow \dot{\theta} (J_{\Delta} \ddot{\theta} + mgOG \sin\theta) = 0$. La

barre étant en mouvement $\dot{\theta} \neq 0 \Rightarrow J_{\Delta} \ddot{\theta} + mgOG \sin\theta = 0 \Rightarrow$

$\ddot{\theta} + \frac{mgOG}{J_{\Delta}} \sin\theta = 0$ $\omega_o^2 = \frac{mgOG}{J_{\Delta}}$	\Rightarrow ou encore :	$\ddot{\theta} + \omega_o^2 \sin\theta = 0$	avec
---	---------------------------	---	------

C'est l'équation différentielle du mouvement. Cette équation, dont le second terme comporte $\sin\theta$ et non θ , n'admet pas comme solution $\theta(t)$ une fonction sinusoïdale : les oscillations sont **non harmoniques**.

Si θ est petit ($< 8^\circ$) (petites oscillations ou oscillations de faibles amplitudes), on peut alors confondre $\sin\theta$ et θ exprimé en **radians** : $\sin\theta \approx \theta$. L'équation différentielle devient alors :

$\ddot{\theta} + \frac{mgOG}{J_{\Delta}} \theta = 0$	ou encore	$\ddot{\theta} + \omega_o^2 \theta = 0$	avec $\omega_o^2 = \frac{mgOG}{J_{\Delta}}$
--	-----------	---	---

C'est l'équation différentielle du second degré sans second membre d'un mouvement oscillatoire dont l'une des solutions $\theta(t)$ est de la forme $\theta = \theta_m \sin(\omega_o t + \varphi)$. Le pendule pesant est animé d'un **mouvement sinusoïdal de rotation**.

2-3-Cas du pendule simple

Un pendule simple est constitué par une bille en acier (point matériel) dont le diamètre est négligeable devant la longueur du fil inextensible et de masse négligeable par lequel elle est suspendue à un point fixe O à l'extrémité du fil.

■ **Période propre des oscillations**

La période propre ou tout simplement période T_o d'un pendule simple est le temps d'une oscillation complète. Elle s'exprime en *seconde*.

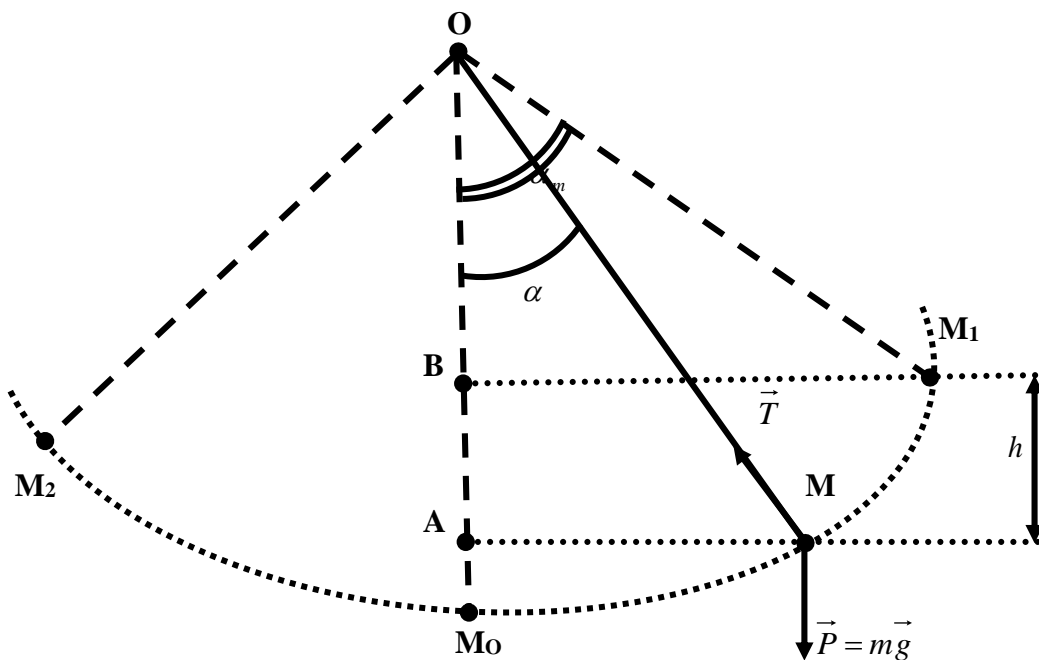
$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

■ **Fréquence propre des oscillations**

Symbolisée par N_o , elle représente le nombre d'oscillations complètes effectuées en une seconde. Elle s'exprime en *Hertz (Hz)*.

$$N_o = \frac{1}{T_o} = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

a-Vitesse linéaire d'un pendule simple



Référentiel : *Terrestre supposé Galiléen (TSG)*

Système : *bille de masse m.*

Bilan des forces : \vec{P}, \vec{T} .

TEC : $\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{ext}) \Rightarrow E_{C2} - E_{C1} = W(\vec{P}) + W(\vec{T})$

Projection : \vec{T} rencontre l'axe (Δ) passant par O, $W(\vec{T}) = 0$.

Soit : $\frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2 = Ph \Rightarrow V_2 = \sqrt{V_1^2 + 2gh}$. Or $h = OA - OB = l \cos \alpha - l \cos \alpha_m$.

Posons que $v_2 = v$: vitesse finale et $v_1 = v_o$: vitesse initiale \Rightarrow

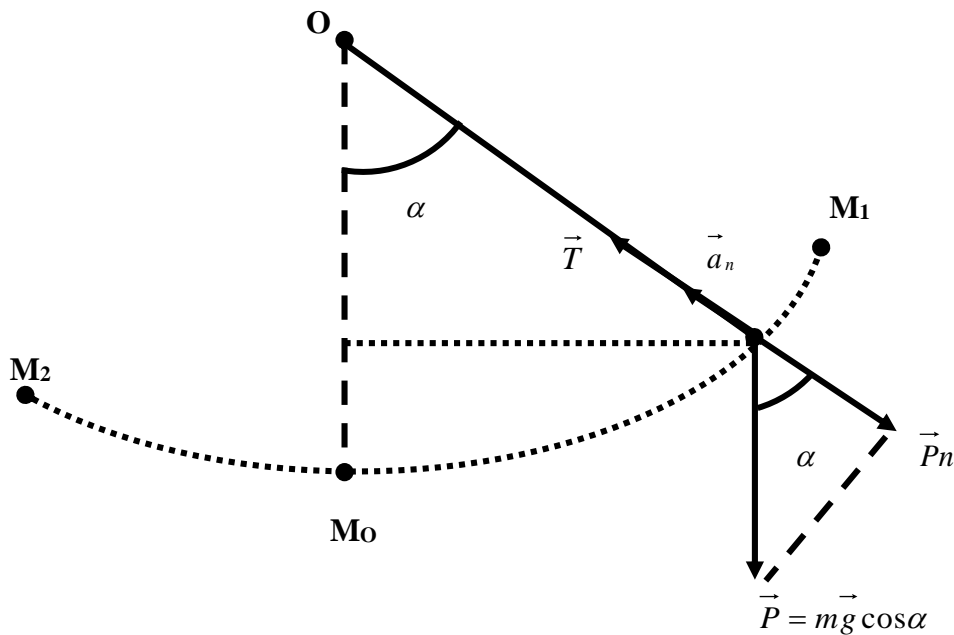
$$V = \sqrt{V_o^2 + 2gl(\cos \alpha - \cos \alpha_m)}$$

- Si la bille est lâchée sans vitesse initiale : $V_o = 0 \Rightarrow V = \sqrt{2gl(\cos\alpha - \cos\alpha_m)}$
- Au passage par la position d'équilibre (en M_o) et sans vitesse initiale : $V_o = 0$ et $\alpha = 0$.

La

vitesse maximale a pour module : $V_m = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha_m)}$

b-Tension du fil d'un pendule simple



Référentiel : *Terrestre supposé Galiléen (TSG)*

Système : *bille de masse m.*

Bilan des forces : \vec{P}_n, \vec{T} .

TCI : $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_n = \vec{P}_n + \vec{T}$

Projection suivant la direction du fil : $T - P_n = ma_n$. Or $P_n = mg \cos\alpha$ et (suivant la normale)

$$a_n = \frac{V^2}{l} \Rightarrow T - mg \cos\alpha = m \frac{V^2}{l} \Rightarrow \boxed{T = mg \cos\alpha + m \frac{V^2}{l}}$$

- Lorsque le pendule passe par la position d'équilibre ($\alpha = 0$) et si $v_o = 0$:

$$T = mg + \frac{2mgl(1 - \cos\alpha_m)}{l} \Rightarrow \boxed{T = mg(3 - 2\cos\alpha_m)}$$

- Lorsque le pendule passe par l'une des positions extrêmes (M_1 et M_2), sa vitesse s'annule, par suite $\alpha = \alpha_m$ et la tension est alors **minimale**.

$$a_n = \frac{V^2}{l} = 0 \Rightarrow T - mg \cos\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{T = mg \cos\alpha}$$

2-4-Pendule simple synchrone d'un pendule pesant

On appelle pendule simple **synchrone** d'un pendule pesant un pendule simple de **même période**. Pour un pendule pesant : $T_o = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{mgOG}}$ (1) et pour un pendule simple :

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2).$$

En égalant les deux relations (1) = (2) : $\frac{J_{\Delta}}{mgOG} = \frac{l}{g}$. Posons $OG = a$. On a la longueur d'un

pendule simple pour des faibles amplitudes :
$$l = \frac{J_{\Delta}}{mOG} = \frac{J_{\Delta}}{ma}$$

OG4 : PROPAGATION DES EBRANLEMENTS ET DES ONDES

I – DEFINITION

1-Milieu élastique

Encore appelé **milieu propogateur**, c'est un milieu qui favorise la propagation (déplacement) d'une perturbation.

Exemple : Les gaz (l'air favorise le déplacement d'un signal sonore), les liquides (l'eau favorise la propagation des vagues) et les solides (un ébranlement se déplace le long de la corde) sont des milieux élastiques.

2-Ebranlement

C'est une déformation (perturbation) de courte durée provoquée par une secousse. La déformation se déplace de proche en proche dans le milieu élastique.

Exemple : L'écho, les vagues de la mer...

3-Onde

C'est la succession de deux signaux identiques qui se déplacent.

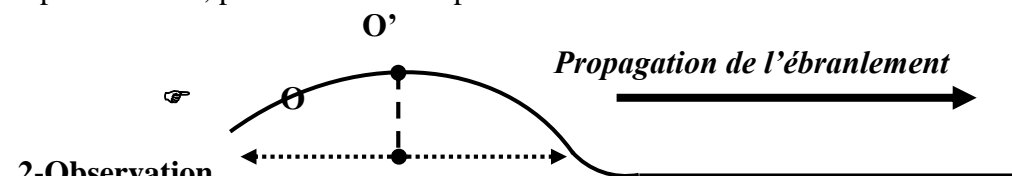
Exemple : Fourche dont les deux pointes trempent légèrement dans l'eau.

O.S.4-1 II –MISE EN EVIDENCE DE LA PROPAGATION DES EBRANLEMENTS ET DES ONDES

II-1-PROPAGATION DES EBRANLEMENTS

1-Expérience

Considérons une longue corde de caoutchouc légèrement tendue, dont l'extrémité **O** est déplacée en **O'**, puis ramenée à sa position initiale.



2-Observation

La portion de la corde immédiatement voisine de **O** se déforme, mais reprend aussitôt sa forme d'équilibre pendant que la portion suivante se déforme à son tour et ainsi de suite de proche en proche.

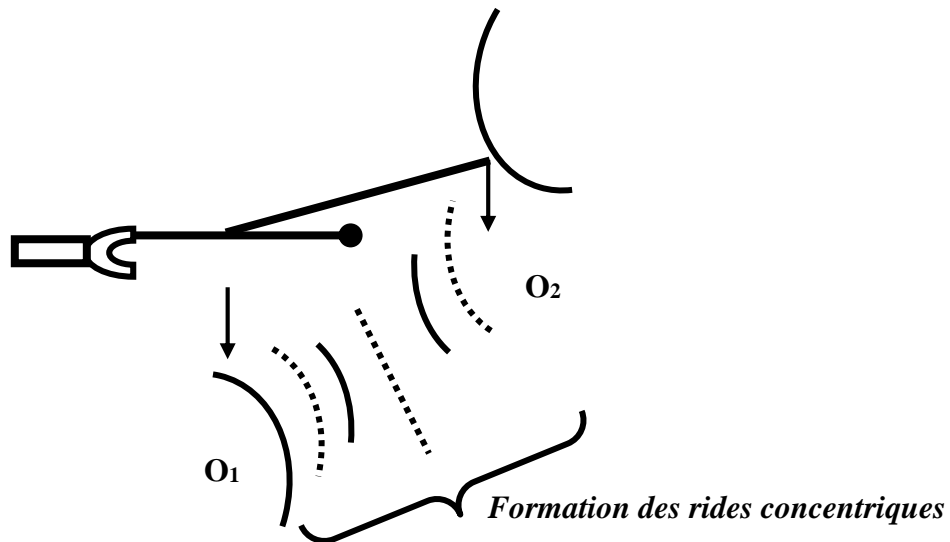
3-Conclusion

On dit qu'il y a propagation d'un ébranlement le long de la corde qui est le milieu élastique.

II-2-PROPAGATION DES ONDES

1-Expérience

Considérons une fourche fixée à l'une des branches d'un **diapason** dont la vibration est entretenue électriquement. Les deux fourches (pointes) trempent légèrement dans l'eau d'une cuve.



2-Observation

Sur la surface libre de l'eau on observe des **rides fixes** qui apparaissent dans la région où se superposent **deux ondes circulaires progressives** provenant de O_1 et O_2 .

3-Conclusion

On dit qu'il y a propagation des ondes à la surface du liquide qui est le milieu propageur.

III –GENERALITES SUR LES PHENOMENES PERIODIQUES

III-1-DEFINITION D'UN PHENOMENE PERIODIQUE

C'est un phénomène (mouvement) qui se reproduit identiquement à lui-même à des intervalles de temps réguliers appelés **périodes**.

Exemples : ■ Le mouvement de rotation de la Terre « sur elle-même » et autour du soleil.

- Les battements du cœur.
- Le mouvement de rotation de trotteuse d'une montre...

III-2-PERIODE ET FREQUENCE D'UN PHENOMENE PERIODIQUE

1-Période

La période **T** d'un phénomène périodique est la plus courte durée au bout de laquelle il se reproduit identique à lui-même.

$$T = \frac{1}{N}$$

Dans le

SI, **T** s'exprime en **seconde (s)** et **N** en **Hertz (Hz)**.

2-Fréquence

La fréquence **N** d'un phénomène périodique est le nombre de répétitions de celui-ci par unité de temps.

$$N = \frac{1}{T}$$

Exemples : ■ Mouvement de la Terre autour du soleil : $T = 3,16 \cdot 10^7$ s et $N = 3,17 \cdot 10^{-8}$ Hz.

■ Trotteuse d'une montre : $T = 60$ s et $N = 1,7 \cdot 10^{-2}$ Hz.

N.B. : Un **mouvement vibratoire** est un mouvement périodique **rapide** (non visible à l'œil). Cas d'une lame dont l'une des extrémités est serrée dans un étau et qui oscille de part et d'autre d'une position d'équilibre.

III-3-ETUDE EXPERIMENTALE D'UN MOUVEMENT PERIODIQUE

Elle se fait soit par la méthode du miroir ou cylindre tournant, ou encore par la **stroboscopie**.

1-La stroboscopie

C'est une technique appropriée pour l'étude des mouvements **très rapides**. L'appareil utilisé est le **stroboscope** qui est une source lumineuse donnant des éclairs très brefs à des intervalles de temps constants et à des fréquences constantes.

a-Mode opératoire

On dispose d'un disque fixé en son centre à l'axe d'un moteur. Le disque est animé d'un mouvement circulaire uniforme. Sur le disque on peint un rayon en blanc. Lorsque le disque tourne lentement à vitesse constante, on constate que le rayon peint passe au même endroit par des intervalles de temps successifs égaux dont la durée est égale à la période **T**.

Si par contre le disque tourne à grande vitesse, le rayon semble invisible et occupe **toute la surface** du disque. Plaçons le disque portant le rayon blanc dans l'obscurité. Soit **N** la fréquence du disque et **T** sa période. On éclaire le disque par la lumière du stroboscope dont les éclairs ont pour fréquence

Ne et période **Te**. Si le disque porte **p** trous et tourne à la vitesse **n** tours/s, la fréquence **Ne** du stroboscope est : **Ne = np**.

b-Observation

- Si $N = Ne \Rightarrow T = Te$: Le rayon blanc est visible au même endroit, le disque paraît unique
- Si $N = kNe \Rightarrow Te = kT$ ($k \in \mathbb{N}^*$) : Le rayon fait **k tours** complets entre deux éclairs successifs, il apparaît dans la même position à chaque éclair, le rayon apparaît encore immobile (**immobilité apparente**), c'est le phénomène de **résonance**.
- Si $Ne = kN \Rightarrow T = kTe$: Entre deux éclairs, le rayon fait $\frac{1}{k}$ tours. A cause de la persistance des impressions visuelles l'œil la voit à la fois dans **k positions** où les éclairs surprennent la tâche. Il y a donc l'illusion de voir **k tâches** immobiles régulièrement espacées.

2-Mouvement ralenti

Réglons le stroboscope à une fréquence **Ne** voisine de **N**. Le disque nous semble animé d'un mouvement ralenti et semble effectuer un tour complet pendant une durée θ appelée **période**

apparente de fréquence apparente $N_A = \frac{1}{\theta}$ de formule :

$$N_A = |N - N_E| = \frac{1}{\theta}$$

- Si $N > N_E$: Le mouvement apparent s'effectue **dans le sens du mouvement réel**.
- Si $N < N_E$: Le mouvement s'effectue **dans le sens opposé** à celui du mouvement réel.

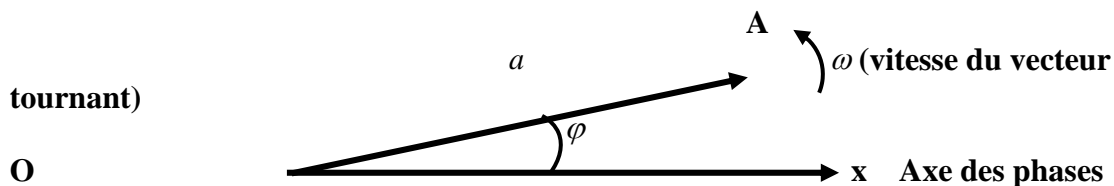
IV – PHENOMENES PERIODIQUES SINUSOIDAUX

1-Définition

Un phénomène périodique est dit sinusoïdal si l'élongation d'un point vibrant est une fonction sinusoïdale du temps : $y(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$ ou $y(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$.

2-Vecteur de FRESNEL (Jean Augustin, 1788-1827)

Le Physicien Français **FRESNEL** a proposé que tout mouvement périodique sinusoïdal peut être représenté par un **vecteur tournant** autour de son origine avec une vitesse angulaire ω constante. Par convention, le vecteur qui représente un phénomène périodique appelé **vecteur de FRESNEL**, d'équation $y(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$ est dessiné par la position qu'il occupe à $t = 0$ c'est-à-dire quand l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA}) = \varphi$.



Le **vecteur de Fresnel** \overrightarrow{OA} associé à la fonction sinusoïdale $y(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$ est tel que : $\|\overrightarrow{OA}\| = a$ et $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA}) = \varphi$. Il a donc pour coordonnées :

$$\boxed{\vec{V}(a, \varphi)}$$

Exercice d'application : Représenter les vecteurs de Fresnel associés à des fonctions sinusoïdales suivantes :

a- Mouvement : $y(t) = 2 \sin 100\pi t (cm)$

b-Tension : $u(t) = 3 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{2})$

c-Intensité : $i(t) = 1,5 \sin(100\pi t - \frac{\pi}{4})$

3-Notion de phase

La phase est l'angle formé par le vecteur tournant \overrightarrow{OA} et l'axe représentant l'origine des phases

$$\boxed{(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA}) = \varphi}$$

Exercice d'application : Indiquer les phases des mouvements périodiques suivants :

a- Mouvement : $y(t) = 2 \sin 100\pi t (cm)$

b-Tension : $u(t) = 3 \sin(100\pi t - \frac{\pi}{2})$

c-Intensité : $i(t) = 1,5 \sin(100\pi t + \frac{2\pi}{3})$

4-Notion de déphasage

Le déphasage est la **différence des phases** à l'instant quelconque t entre deux fonctions sinusoïdales de même période. Soient $y_1(t) = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ et $y_2(t) = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$. Ces deux mouvements sont **isochrones** c'est-à-dire même période, donc même fréquence et même pulsation.

$$\Delta\varphi = |(\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1)| \Rightarrow \boxed{\Delta\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1|}$$

- Si $\varphi_2 - \varphi_1 > 0$: $y_2(t)$ est **en avance de phase** sur $y_1(t)$
- Si $\varphi_2 - \varphi_1 < 0$: $y_2(t)$ est **en retard de phase** sur $y_1(t)$

Exercice d'application : Déterminer le déphasage des mouvements sinusoïdaux suivants :

$$u(t) = 3 \sin(100\pi t - \frac{\pi}{2}) \text{ et } i(t) = 1,5 \sin(100\pi t + \frac{2\pi}{3}).$$

5-Notion de décalage horaire

C'est l'intervalle de temps qui sépare les débuts de mouvement de deux points, c'est un **retard temporel**.

$$\theta = \frac{\Delta\varphi}{\omega} \text{ or } \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \theta = \frac{T}{2\pi} \Delta\varphi \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{T}{2\pi} |\varphi_2 - \varphi_1|}$$

Exercice d'application : Déterminer le décalage horaire des mouvements périodiques suivants :

$$u(t) = 3 \sin(100\pi t - \frac{\pi}{2}) \text{ et } i(t) = 1,5 \sin(100\pi t + \frac{2\pi}{3}).$$

6-Valeurs particulières du déphasage

Selon la valeur du déphasage, deux points sinusoïdaux peuvent vibrer : **en phase, en opposition de phase** ou **en quadrature de phase**.

a-Points vibrant en phase

Deux points vibrent en phase si le déphasage est **nul** ou si c'est un **multiple pair de π** .

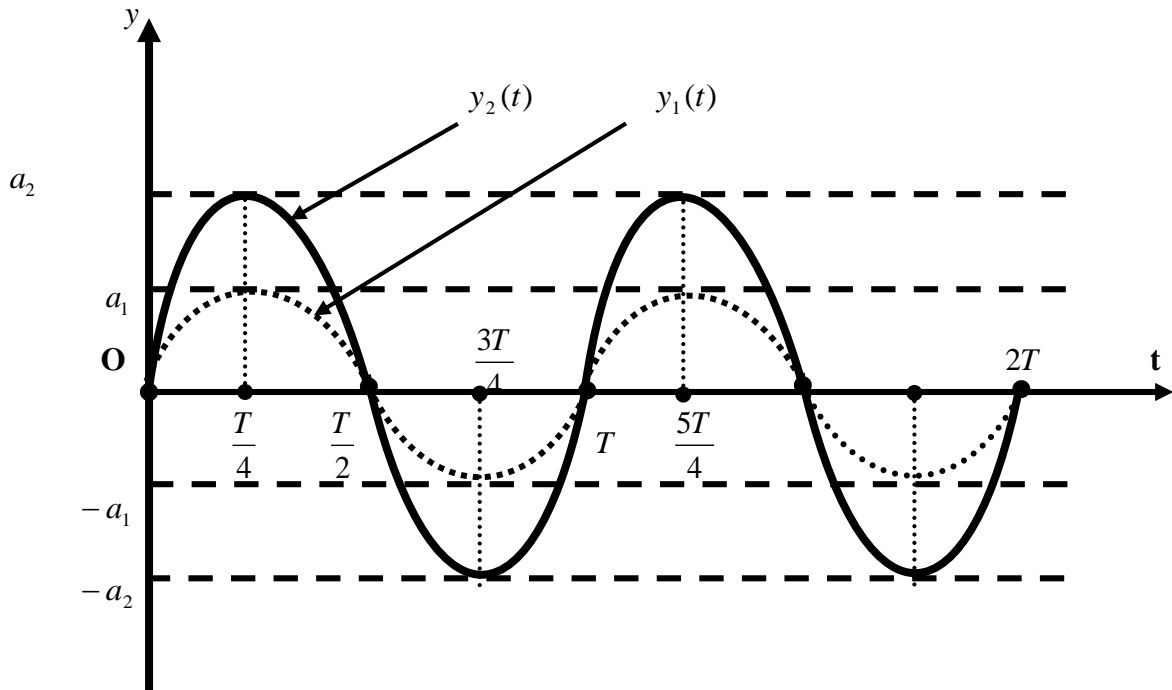
$$\boxed{\Delta\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1| = 0 \text{ ou } \Delta\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1| = 2k\pi \text{ avec } \Delta\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi\dots}$$

$$\text{■ Si } \Delta\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1| = 0 \Rightarrow \boxed{\theta = 0}$$

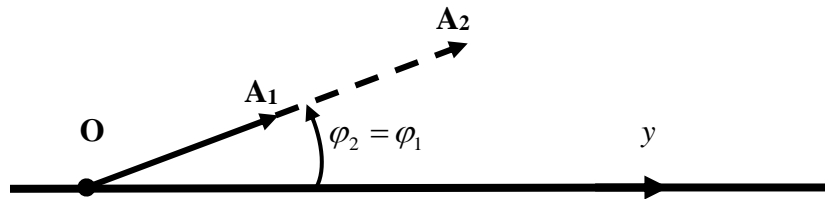
$$\text{■ Si } \Delta\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1| = 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{\omega} = \frac{2k\pi T}{2\pi} \Rightarrow \boxed{\theta = kT}$$

C'est un multiple entier de la période : $\theta = 0, T, 2T, \dots$

Les graphes des points qui vibrent en phase coupent l'axe des abscisses au même moment et atteignent leur élongation maximale et minimale au même moment.



Le décalage horaire dans notre cas ici vaut $\theta = 0$ et le vecteur de **FRESNEL** y relatif sera donc :



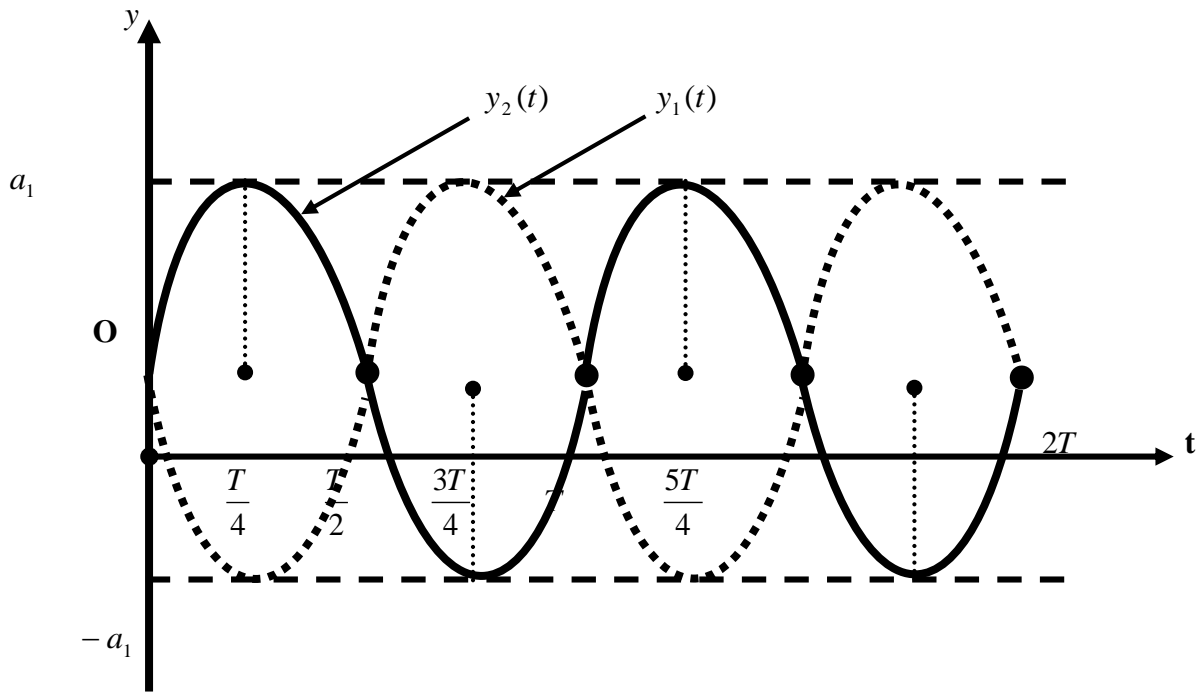
b-Points vibrant en opposition de phase

Deux points vibrent en opposition de phase si le déphasage est **un multiple impair de π** .

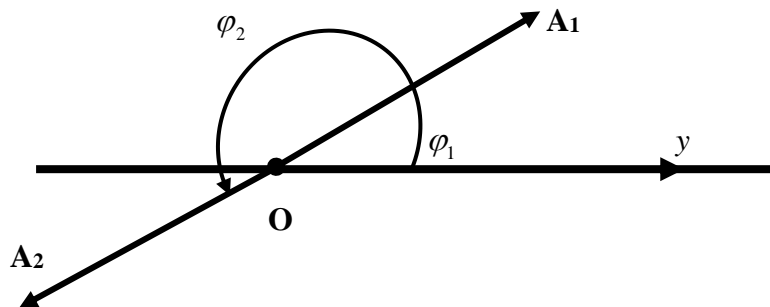
$$\Delta\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1| = (2k + 1)\pi \quad \text{avec } \Delta\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$$

Le décalage horaire vaut : $\theta = \frac{T(2k + 1)\pi}{2\pi} \Rightarrow \theta = (2k + 1)\frac{T}{2}$

Les graphes des points qui vibrent en opposition de phase s'annulent au même moment. Pendant que l'une des graphes a une élongation maximale (**+a**), l'autre a une élongation minimale (**-a**) et vice versa.



Le décalage horaire dans notre cas ici vaut $\theta = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{T}{2}$ et le vecteur de **FRESNEL** y relatif sera donc :



c-Points vibrant en quadrature de phase

Deux points vibrent en quadrature de phase si le déphasage est égal à $\frac{\pi}{2}$ ou un **multiple**

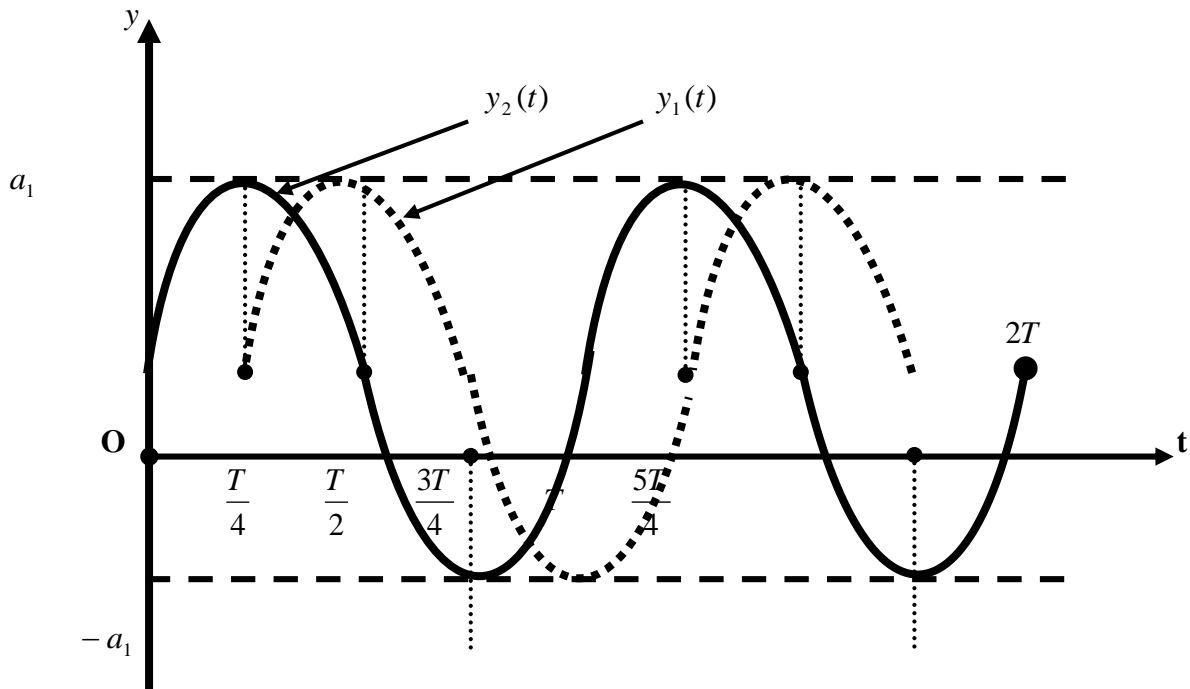
impair de $\frac{\pi}{2}$. Soit : $\Delta\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1| = \frac{\pi}{2}$ ou $\Delta\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1| = (1 + 2k) \frac{\pi}{2}$ avec $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$

■ Si $\Delta\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1| = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{T}{4}$

■ Si $\Delta\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1| = (1 + 2k) \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = (1 + 2k) \frac{T}{4}$

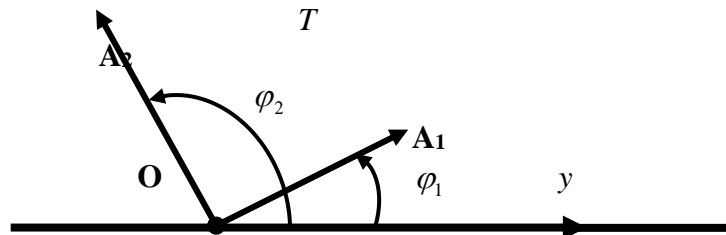
C'est un multiple impair d'un quart de la période : $\theta = \frac{T}{4}, \frac{3T}{4}, \frac{5T}{4}, \dots$

Les graphes des points qui vibrent en quadrature de phase se comportent de la manière suivante : pendant que l'une est maximale ou minimale, l'autre s'annule et vice versa.



Le décalage horaire dans notre cas ici vaut $\theta = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{4}$ et le vecteur de **FRESNEL** y relatif

est donc :



V - PROPAGATION D'UN SIGNAL MECANIQUE

1-Généralités

En secouant légèrement une corde en caoutchouc d'une extrémité O, elle se déforme pendant que le signal mécanique se déplace de proche en proche le long de la corde

2-Célérité

C'est la vitesse de propagation du signal le long de la corde. Elle vaut :

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Avec F : tension de la corde (N) et μ : masse linéique de la corde (Kg/m).

3-Longueur d'onde

C'est la distance parcourue par le signal pendant une période. Elle vaut donc :

$$\lambda = vT = \frac{v}{N} = \frac{1}{N} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

O.S.4.2. ETABLIR L'EQUATIONS RESULTANT DE LA SUPERPOSITION DE DEUX VIBRATIONS

VI - EQUATION D'UN MOUVEMENT SINUSOIDAL

1-Equation de la source

Elle est de la forme : $y_s(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$. A $t = 0$ (début du mouvement) \Rightarrow

$$y_s(0) = a \sin \varphi = 0$$

Avec $a \neq 0 \Rightarrow \varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$. A $t = 0 \Rightarrow \dot{y}_s(t) = a\omega \cos \varphi$.

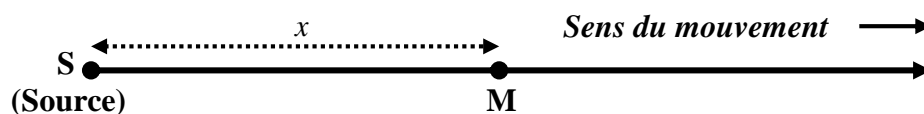
■ Si $\varphi = 0 \Rightarrow \dot{y}_s(t) = a\omega > 0$: le mouvement évolue du côté des élongations positives.
D'où

l'équation de la source est de la forme :
$$y_s(t) = a \sin \omega t = a \sin 2\pi N t = a \sin \frac{2\pi}{T} t$$

■ Si $\varphi = \pi \Rightarrow \dot{y}_s(t) = a\omega < 0$: le mouvement évolue du côté des élongations négatives.
D'où

l'équation de la source est de la forme :
$$y_s(t) = a \sin(\omega t + \pi) = a \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \pi\right)$$

2-Equation d'un point M de la corde situé à la distance x de la source



Le point M reproduit le mouvement de S avec un retard $\theta = \frac{x}{v}$, l'équation de M est :

$$y_M(t) = y_s(t - \theta) = a \sin \omega(t - \theta) \Rightarrow y_M(t) = a \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

N.B. : Lorsqu'un point décrit au cours de la vibration un segment de droite de longueur l , elle est égale au double de l'amplitude : $l = 2a \Rightarrow a = \frac{l}{2}$

VII –METHODES DE REPRESENTATION DES SINUSOIDES

VII-1-LA SINUSOIDE DES TEMPS (Elongation en fonction du temps)

1-Sinusoïde du temps pour un seul point

a-Cas de la source

■ Ecrire l'équation de l'élongation en respectant les origines des dates et du repère imposés ou au choix.

■ Faire le tableau des valeurs (TV).

■ Procéder à la représentation graphique.

b-Cas d'un point M qui n'est pas une source

■ Ecrire l'équation de M à partir de celle de la source.

■ Chercher le déphasage.

■ Chercher le décalage horaire.

■ Faire le tableau des valeurs (TV).

■ Procéder à la représentation graphique.

c-Cas de deux points dans un même repère

■ Etablir les équations de la source et du point considéré.

■ Chercher le déphasage.

■ Chercher le décalage horaire.

■ Faire le tableau des valeurs (TV).

■ Procéder à la représentation graphique en respectant le décalage horaire et le déphasage.

N.B. : La sinusoïde des temps est **illimitée**.

VII-2-LA SINUSOIDE DES ESPACES (Elongation en fonction l'abscisse)

■ Pas de sinusoïde des espaces pour la source.

■ Ecrire l'équation de M à partir de celle de la source.

■ Remplacer t par sa valeur pour que $y_M(t)$ devienne $y_M(x)$.

■ Faire le tableau des valeurs après avoir déterminé le **front d'onde**.

Le **front d'onde** est la distance maximale (limite) jusqu'à laquelle doit être représentée la sinusoïde des espaces.

$$v = \frac{d}{t} \Rightarrow d = vt \text{ or } \lambda = vT \text{ soit } v = \frac{\lambda}{T}. \text{ Donc } d = \frac{\lambda t}{T}. \text{ D'où le front d'onde : } \boxed{d = \lambda Nt}$$

On remplace N (fréquence) et t par leurs valeurs.

N.B. : La sinusoïde des temps est **limitée par le front d'onde**.

VIII –PRINCIPE DE LA SUPERPOSITION DES SIGNAUX MECANQUES

VIII -1-ENONCE DU PRINCIPE DE LA SUPERPOSITION

Lorsque deux vibrations de même direction, de faible amplitude, caractérisées par des élongations $y_1(t)$ et $y_2(t)$ se superposent en un point M, l'élongation résultante $y_M(t)$ est la **somme géométrique des élongations de** $y_1(t)$ et $y_2(t)$.

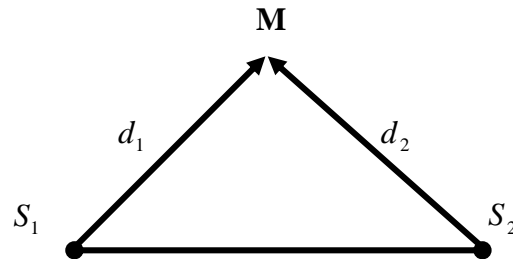
$$\boxed{y_M(t) = y_1(t) + y_2(t) = A \sin(\omega t + \phi)}$$

avec A : L'amplitude résultante et ϕ : La phase résultante.

VIII -2-MOUVEMENTS SINUSOÏDAUX DE FAIBLE AMPLITUDE ($a_1 = a_2 = a$)

1-Méthode trigonométrique

Considérons deux sources de signaux mécaniques quelconques S_1 et S_2 de même amplitude. Considérons d'autre part un point M de l'espace situé à des **distances connues** d_1 de S_1 et d_2 de S_2 tel que $S_1M = d_1$ et $S_2M = d_2$.



Supposons les équations des deux signaux de la forme :

$$y_{S_1}(t) = y_{S_2}(t) = a \sin \omega t = a \sin 2\pi Nt$$

avec à l'instant $t = 0$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Les deux signaux arrivent au point M (point résultant) avec des retards respectifs $\theta_1 = \frac{d_1}{v}$ et $\theta_2 = \frac{d_2}{v}$. D'où d'après le principe de la superposition le mouvement résultant au point M est :

$$y_M(t) = y_{M/S_1}(t) + y_{M/S_2}(t) = a \sin\left(2\pi Nt - \frac{2\pi d_1}{\lambda}\right) + a \sin\left(2\pi Nt - \frac{2\pi d_2}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$y_M(t) = a \left[\sin\left(2\pi Nt - \frac{2\pi d_1}{\lambda}\right) + \sin\left(2\pi Nt - \frac{2\pi d_2}{\lambda}\right) \right]. \text{ Forme}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

Soit après transformations :

$$y_M(t) = 2a \cos \frac{\pi}{\lambda} (d_2 - d_1) \sin \left[2\pi Nt - \frac{\pi}{\lambda} (d_1 + d_2) \right]$$

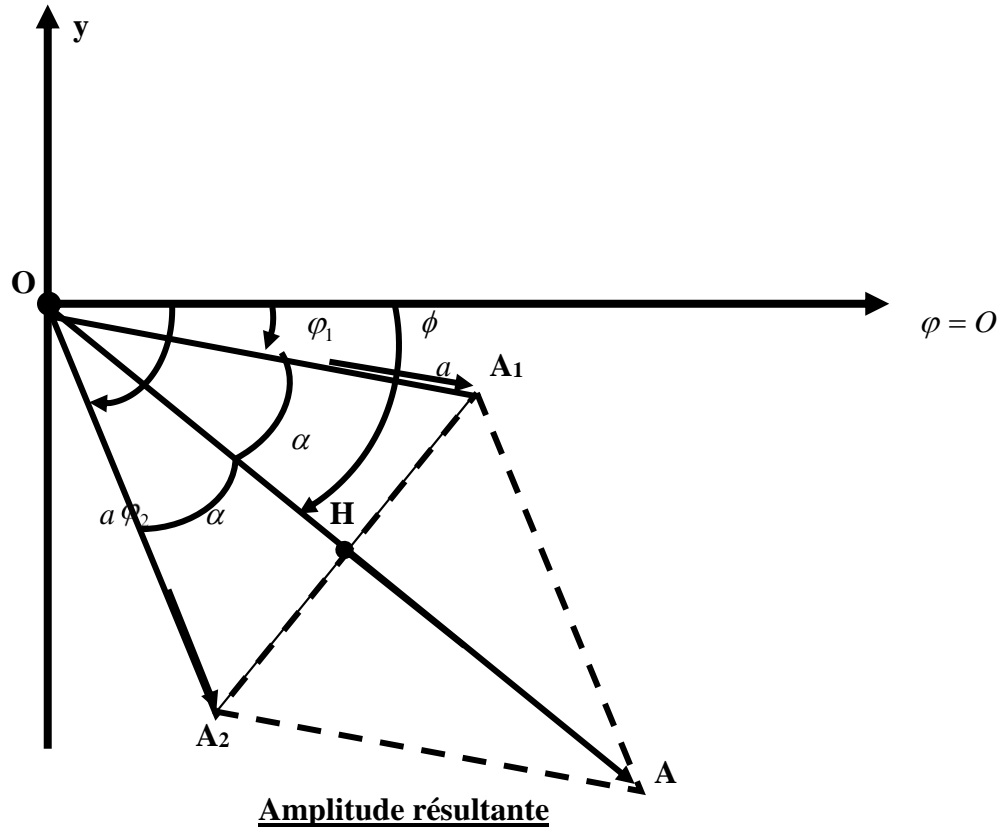
Par identification on trouve **l'amplitude résultante** et la **phase résultante** :

Amplitude résultante : $A = 2a \cos \frac{\pi}{\lambda} (d_2 - d_1)$ **Phase résultante** : $\phi = -\frac{\pi}{\lambda} (d_1 + d_2)$

2-Méthode de FRESNEL

Cette méthode est basée sur une construction géométrique. Pour cela il faut dégager à chaque équation sinusoïdale le **vecteur de FRESNEL** avec ses coordonnées respectives.

- Pour S_1 : $y_{S_1}(t) = a \sin(\omega t - \frac{2\pi d_1}{\lambda})$. Le **vecteur de FRESNEL** est $\vec{V}_1(a; -\frac{2\pi d_1}{\lambda})$
- Pour S_2 : $y_{S_2}(t) = a \sin(\omega t - \frac{2\pi d_2}{\lambda})$. Le **vecteur de FRESNEL** est $\vec{V}_2(a; -\frac{2\pi d_2}{\lambda})$



$$A = 2OH \text{ or } OH = a \cos \alpha \Rightarrow A = 2a \cos \alpha. \text{ D'après la construction : } \varphi_1 + 2\alpha = \varphi_2 \Rightarrow$$

$$A = 2a \cos\left(\frac{\varphi_2}{2} - \frac{\varphi_1}{2}\right) = 2a \cos\left(-\frac{\pi d_2}{\lambda} + \frac{\pi d_1}{\lambda}\right) \Rightarrow A = 2a \cos\left[-\frac{\pi}{\lambda}(d_2 - d_1)\right] \text{ or } \cos(-x) = \cos x$$

$$\Rightarrow$$

$$A = 2a \cos \frac{\pi}{\lambda} (d_2 - d_1)$$

Phase résultante

D'après la figure : $\phi = \varphi_1 + \alpha = \varphi_1 + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ or $\varphi_1 = -\frac{2\pi d_1}{\lambda}$ et $\varphi_2 = -\frac{2\pi d_2}{\lambda}$.

D'où :

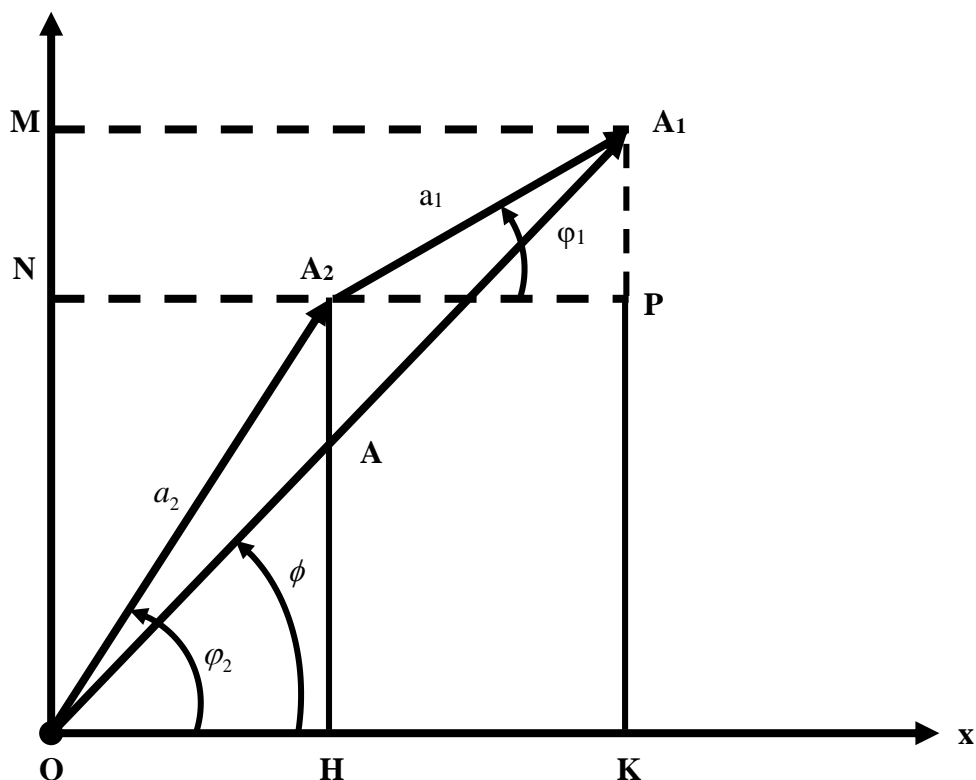
$$\phi = -\frac{\pi}{\lambda}(d_1 + d_2)$$

L'équation du point résultant est donc : $y_M(t) = 2a \cos\frac{\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) \sin\left[2\pi Nt - \frac{\pi}{\lambda}(d_1 + d_2)\right]$

VIII -3-MOUVEMENTS SINUSOÏDAUX DE GRANDE AMPLITUDE ($a_1 \neq a_2$)

1-Amplitude résultante

Considérons les équations de la forme : $y_1(t) = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ et $y_2(t) = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$.
L'équation résultante est de la forme : $y_M(t) = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + a_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A \sin(\omega t + \phi)$



D'après le figure $OK = OH + HK$ (1) et $OM = ON + NM$ (2).

■ Considérons le triangle (O, H, A₂), on a : $OH = a_2 \cos\varphi_2$ et le triangle (A₂, A₁, P), on a :

$HK = a_1 \cos\varphi_1$. D'où (1) devient : $OK = a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2$.

■ Considérons le triangle (O, A₂, N), on a : $ON = a_2 \sin\varphi_2$ et le triangle (A₂, A₁, P), on a :

$NM = a_1 \sin \varphi_1$. D'où (2) devient : $OM = a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2$

■ Considérons le triangle (O, M, A₁), on a : $OA_1^2 = OM^2 + OK^2 \Rightarrow A^2 = OM^2 + OK^2$. On a :

$$A^2 = (a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2)^2 + (a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2)^2$$

$$A^2 = a_1^2 \sin^2 \varphi_1 + 2a_1 a_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + a_2^2 \sin^2 \varphi_2 + a_1^2 \cos^2 \varphi_1 + 2a_1 a_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + a_2^2 \cos^2 \varphi_2$$

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 (\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2) \text{ or}$$

$$\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 = \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

D'où l'amplitude résultante est : $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$

a-Pour les points vibrant en phase

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 0 \Rightarrow A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2} \text{ car } \cos 0 = 1 \Rightarrow A = a_1 + a_2$$

b-Pour les points vibrant en opposition de phase

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi \Rightarrow A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2} \text{ car } \cos \pi = -1 \Rightarrow A = |a_1 - a_2|$$

c-Pour les points vibrant en quadrature de phase

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \text{ or } \cos \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

2-Phase résultante

En considérant le triangle (O, A₁, K), on a : $\tan \phi = \frac{OM}{OK} = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}$

O.S.4-4 METTRE EN EVIDENCE LE PHENOMENE D'INTERFERENCE ET DES ONDES STATIONNAIRES

IX – ETUDE DU PHENOMENE D'INTERFERENCES

1-Etude expérimentale: Cuve à eau

Une fourche légère munie de deux pointes S_1 et S_2 est actionnée par un vibreur. Les pointes trempent légèrement dans l'eau d'une cuve. Le mouvement issu du vibreur (source **principale**) est transmis aux deux sources **secondaires** S_1 et S_2 qui sont animées du même mouvement sinusoïdal.

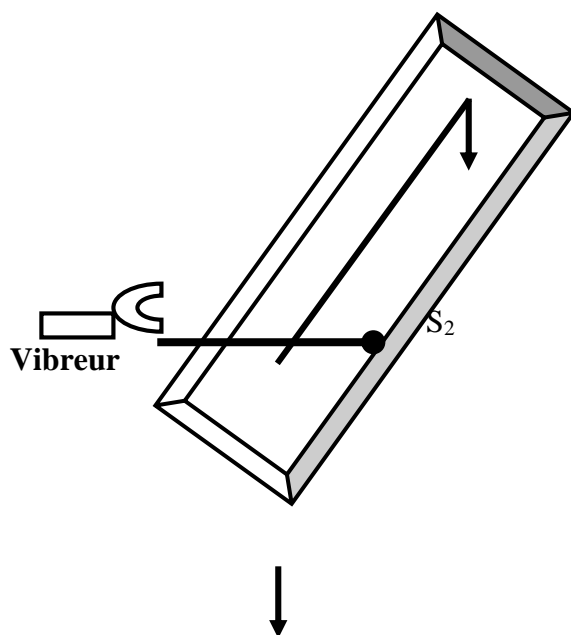


Figure 1 : Cuve à eau

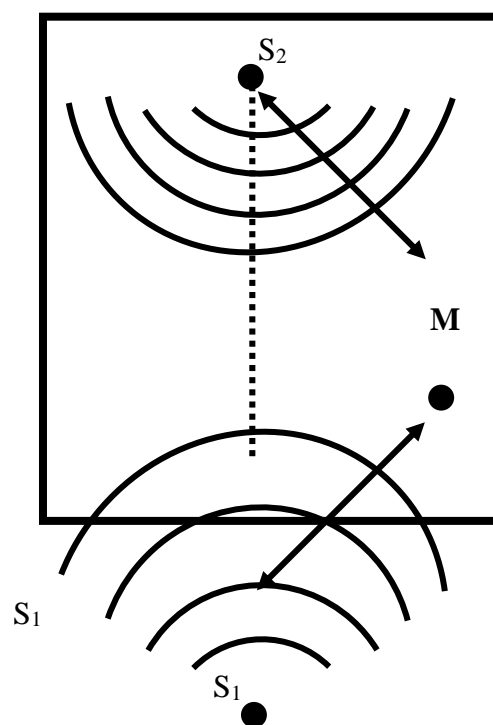


Figure 2 : Aspect à la surface de

l'eau

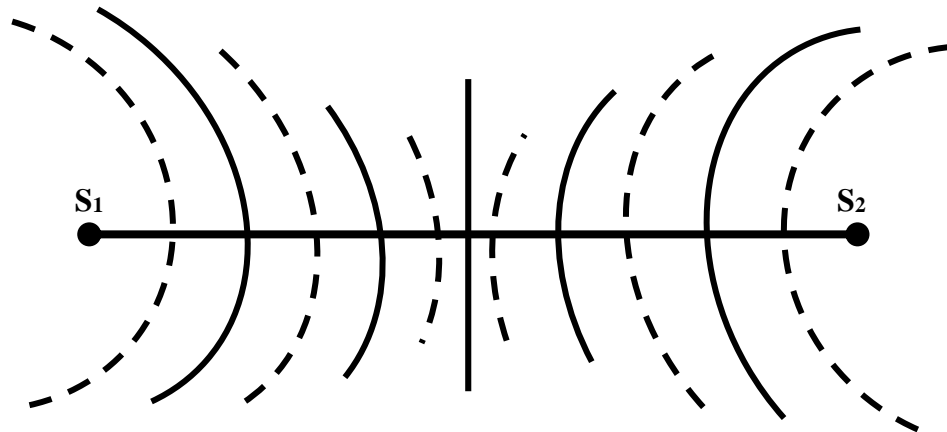
2-Faits observés

Le vibreur est mis en action. On observe l'existence de **rides fixes** équidistantes de forme hyperbolique à la surface du liquide qui s'écartent en éventail de chaque côté de la médiatrice du segment S_1 et S_2 . Ce sont des **franges d'interférences**. La région où apparaissent les franges est appelée **champ d'interférences**. La *figure 2* montre l'aspect des franges hyperboliques sur l'écran d'observation.

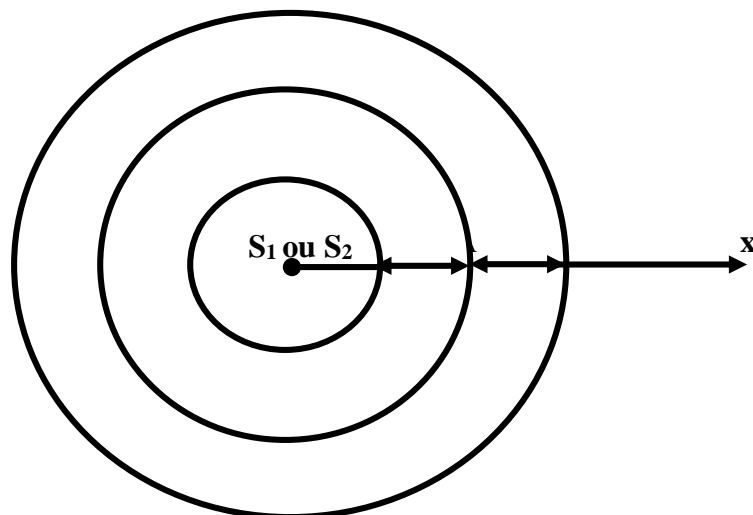
3-Interprétation des faits observés

Les deux pointes verticales ont même mouvement. Elles descendent ensemble, piquent l'eau au même moment, remontent ensemble constituant ainsi deux sources d'ondes cohérentes (même période et déphasage constant) en phase ($\Delta\varphi = 0$). En éclairage stroboscopique nous observons que les rides circulaires apparaissent dans la région où se superposent **deux ondes circulaires progressives** provenant de S_1 et S_2 . Dans la zone du champ d'interférences il y a

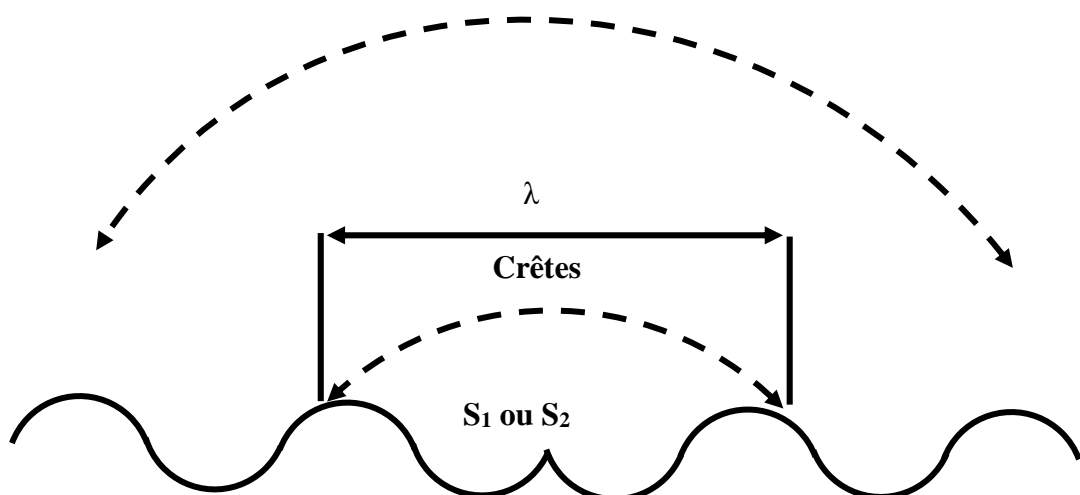
alternance entre les franges **d'amplitude nulle** (hyperboles en tiretés) et les franges **d'amplitude maximale** (hyperboles en traits pleins).



Quelle est la nature des ondes produites par S_1 et S_2 ? Ce sont des ondes circulaires sinusoïdales, transversales constituées par une suite **des creux** et des **vagues** formant ainsi une succession de **crêtes**.



Des rides circulaires centrées en S_1 ou S_2



Coupe en profondeur de la surface de l'eau pour une seule source S_1 ou S_2

N.B. : La distance entre deux crêtes vaut λ

3-Etude analytique

Le phénomène d'interférences résulte de la superposition en un même point du milieu de propagation, de deux vibrations de même nature, de même direction, de même période, d'amplitude faible, émises par deux sources **cohérentes**. Considérons le cas le plus simple où les deux vibrations qui interfèrent ont même amplitude. Soit **M** un point du champ d'interférences situé à la distance d_1 de S_1 et d_2 de S_2 . Supposons les deux sources en phase : $y_{S_1}(t) = y_{S_2}(t) = a \sin \omega t = a \sin 2\pi Nt$ avec à l'instant $t = 0$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Les deux vibrations arrivent au point M (point résultant) avec **des** retards respectifs $\theta_1 = \frac{d_1}{v}$

et $\theta_2 = \frac{d_2}{v}$. D'où d'après le principe de la superposition le mouvement résultant au point M est :

$$y_M(t) = y_{M/S_1}(t) + y_{M/S_2}(t) = a \sin\left(2\pi Nt - \frac{2\pi d_1}{\lambda}\right) + a \sin\left(2\pi Nt - \frac{2\pi d_2}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$y_M(t) = a \left[\sin\left(2\pi Nt - \frac{2\pi d_1}{\lambda}\right) + a \sin\left(2\pi Nt - \frac{2\pi d_2}{\lambda}\right) \right]. \text{ Forme}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

Soit après transformations :

$$y_M(t) = 2a \cos \frac{\pi}{\lambda} (d_2 - d_1) \sin \left[2\pi Nt - \frac{\pi}{\lambda} (d_1 + d_2) \right]$$

4-Etat vibratoire du point résultant M

Il indique la nature du point résultant et est déterminé par la valeur de **l'amplitude** du point résultant **A** ou par **l'ordre d'interférence p**. Il peut être **d'amplitude maximale (ventre de vibration)**, **d'amplitude nulle (nœud de vibration)** ou **d'amplitude intermédiaire (ni ventre de vibration ni nœud de vibration)**.

a-Le point résultant est d'amplitude maximale (ventre de vibration, point en mouvement) lorsque :

▪ Avec l'amplitude résultante : $A = \pm 2a$

▪ Avec l'ordre d'interférence : $p = \frac{d_2 - d_1}{\lambda} = k (k \in \mathbb{Z})$. p est une **valeur entière** c'est-à-dire $p = 0, 1, 2, \dots$. Les vibrations qui arrivent en M sont en phase : On dit qu'il y a **interférence constructive**.

N.B. : si $k = 0 \Rightarrow d_1 - d_2 = 0 \Rightarrow d_1 = d_2$. Le point d'amplitude maximale est la **médiatrice du segment S_1S_2** .

b-Le point résultant est d'amplitude nulle (nœud de vibration, point au repos) lorsque :

▪ Avec l'amplitude résultante :

$$A = 0$$

▪ Avec l'ordre d'interférence : $p = \frac{d_2 - d_1}{\lambda} = \frac{2k+1}{2} (k \in \mathbb{Z})$. p Est une **valeur demi-entière** c'est-à-dire $p = 0,5 ; 1,5 ; 2,5 ; \dots$ Les vibrations qui arrivent en M sont en opposition de phase:

On dit qu'il y a **interférence destructive**.

c-Le point résultant est d'amplitude intermédiaire (ni ventre de vibration, ni nœud de vibration) lorsque :

▪ Avec l'amplitude résultante :

$$A \neq \pm 2a \text{ et } A \neq 0$$

▪ Avec l'ordre d'interférence :

$$p \neq k \text{ et } p \neq \frac{2k+1}{2}$$

N.B. : Le champ d'interférences ne contient pas que des ventres et des nœuds, mais aussi d'autres points situés entre les ventres et les nœuds (points intermédiaires) vibrant avec une amplitude qui dépend de leur position et qui varie entre zéro et l'amplitude maximale.

X - DETERMINATION DU NOMBRE DE FRANGES (OU NOMBRE DE POINTS)

1- Nombre de franges d'amplitude maximale

a- Nombre de franges sur S_1S_2 (ou le long)

$-S_1S_2 \leq d_2 - d_1 \leq S_1S_2 \Rightarrow -S_1S_2 \leq k\lambda \leq S_1S_2$. Posons $S_1S_2 = d$: distance des deux sources

$$-\frac{d}{\lambda} \leq k \leq \frac{d}{\lambda}$$

b- Nombre de franges entre S_1S_2

$-S_1S_2 < d_2 - d_1 < S_1S_2 \Rightarrow -S_1S_2 < k\lambda < S_1S_2$. Posons $S_1S_2 = d$: distance séparant les deux sources :

$$-\frac{d}{\lambda} < k < \frac{d}{\lambda}$$

2- Nombre de franges d'amplitude nulle

a- Nombre de franges sur S_1S_2 (ou le long)

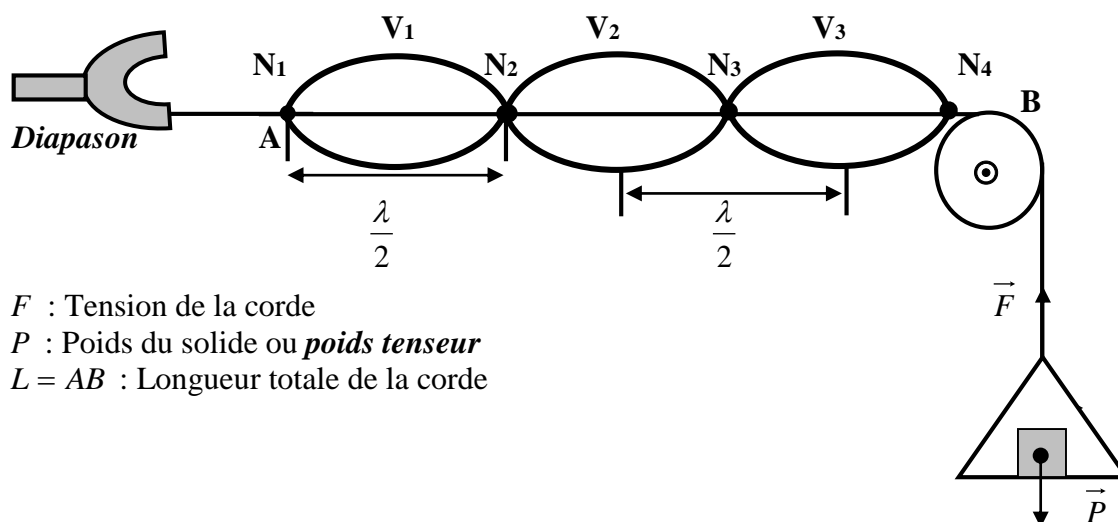
$-S_1S_2 \leq d_2 - d_1 \leq S_1S_2 \Rightarrow -S_1S_2 \leq \frac{(2k+1)\lambda}{2} \leq S_1S_2$. Posons $S_1S_2 = d$: distance des deux sources

1- Dispositif expérimental

Un diapason anime l'extrémité A d'un fil souple et fine passant par la gorge d'une poulie et soutenant un plateau contenant des masses marquées. On peut alors modifier à volonté :

-la **longueur utile AB de la corde** en déplaçant la poulie.

-La **tension du fil**, égale au poids du plateau chargé, en ajoutant ou en enlevant des masses marquées du plateau.



2- Observation

Le vibreur (diapason) est mis en marche. Si on **règle convenablement la longueur et la tension**, la corde vibre avec une grande amplitude et semble former des *fuseaux* (distance entre deux nœuds) de même longueur : on a réalisé un système **d'ondes stationnaires**.

Les points V_1, V_2, V_3, \dots où les renflements des fuseaux sont plus marqués sont appelés **ventres**. Ce sont des points de la corde qui vibrent avec une **amplitude maximale**.

Les points N_1, N_2, N_3, \dots , extrémités des fuseaux sont appelés **nœuds**. Ils sont constamment immobiles. Ce sont des points d'amplitude nulle.

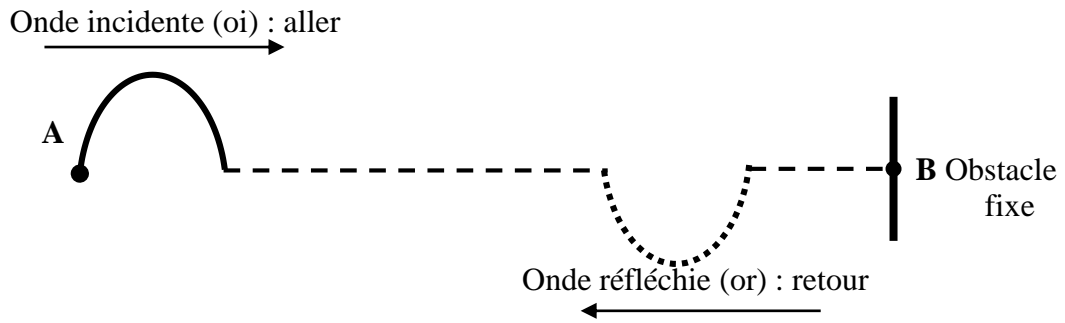
Si on éclaire la corde à l'aide d'un **stroboscope**, on constate qu'elle présente l'aspect d'une sinusoïde dont l'amplitude varie constamment. Cette sinusoïde n'avance pas comme dans le cas de l'onde progressive, mais se déforme sur place, d'où le nom **d'ondes stationnaires** donné au phénomène

3- Interprétation du phénomène

Une **onde incidente** est émise par la source A et se propage vers le point B où elle se réfléchit et rebrousse chemin. Il y a donc naissance d'une **onde réfléchie** qui se propage en sens contraire de la première. Les deux ondes se superposent et il en résulte le phénomène d'ondes stationnaires

observé. Dans le cas des ondes stationnaires, on distingue deux types d'obstacles : ***l'obstacle fixe et l'obstacle libre***.

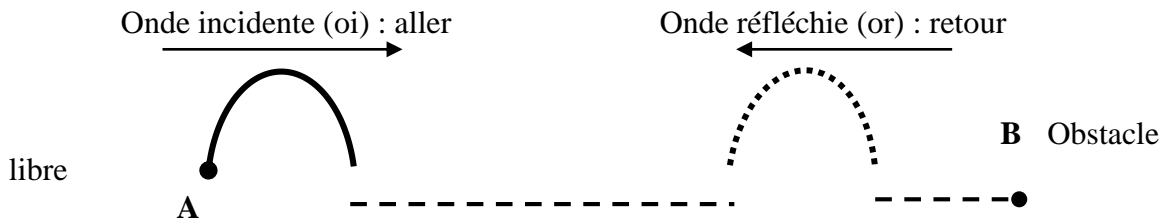
a- Réflexion sur un obstacle fixe (indéformable)



Si l'on provoque en A une déformation sur la corde tendue entre A et un obstacle fixe B, on constate : - que l'ébranlement se propage le long de la corde,
- que l'ébranlement se réfléchit au point B et repart vers A avec la même vitesse, mais après avoir **changé de signe** c'est-à-dire se retrouve du côté inverse de l'onde incidente : l'élongation de l'onde incidente et celle de l'onde réfléchie sont de **signe contraire**. Soit :

$$y_i(t) = -y_r(t)$$

b- Réflexion sur un obstacle libre (déformable)



Dans ce cas l'extrémité est libre (elle constitue néanmoins un obstacle à la propagation de l'ébranlement puisque ce dernier ne peut aller plus loin). On constate :
-que l'ébranlement se propage le long de la corde,
-que l'ébranlement se réfléchit au point B et repart vers A avec la même vitesse, mais **sans changer de signe** c'est-à-dire se retrouve du même côté que l'onde incidente : l'élongation de l'onde incidente et celle de l'onde réfléchie sont de **même signe**.

$$y_i(t) = y_r(t)$$

4- Conclusion

Cette expérience de **MELDE** montre qu'une corde en vibration est le siège d'ondes stationnaires caractérisées par une alternance (succession) des **ventres** et des **nœuds**.

III – ETUDE ANALYTIQUE DU PHENOMENE D'ONDES STATIONNAIRES

Considérons un point quelconque M, situé sur la corde de longueur AB, à la distance $BM = x$. Pour établir l'équation de l'onde stationnaire au point M il faut d'abord écrire celles

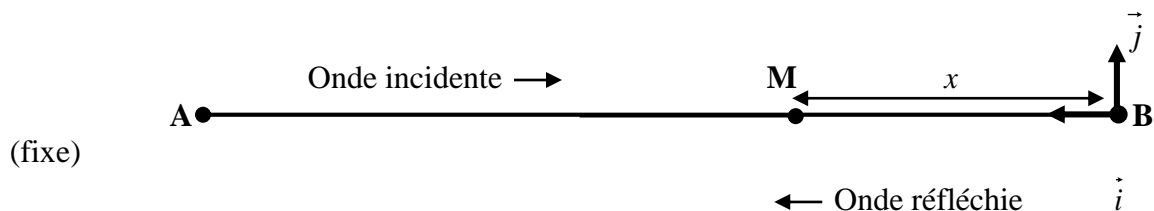
de l'onde incidente et de l'onde réfléchi. L'équation de M sera donc la **somme** des équations des mouvements de M par rapport à l'onde incidente et à l'onde réfléchi.

$$y_M(t) = y_{M/i}(t) + y_{M/r}(t)$$

1- Equation de M pour un obstacle fixe

Soit une corde tendue entre une source de vibration A et un point fixe B; nous ne considérerons que l'onde incidente AB et la première onde réfléchi au point B, négligeant les réflexions suivantes en A et en B. Soit M un point situé à la distance x de l'obstacle fixe B. Ce point M sera soumis à l'onde incidente d'élongation $y_{M/i}(t)$ et à l'onde réfléchi $y_{M/r}(t)$. L'onde incidente est en avance de phase sur l'onde du point B alors que l'onde réfléchi est en retard de phase sur l'onde du point A.

1.1- Méthode trigonométrique



a-Equation de la source

$y_A(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$. Supposons qu'à $t = 0$, l'onde incidente va du côté des élongations positives : $\varphi = 0$, soit $y_A(t) = a \sin \omega t = a \sin 2\pi N t$.

b-Equation du point M par rapport à l'onde incidente

L'onde incidente passe au point M avec une avance de phase $\theta = \frac{BM}{v} = \frac{x}{v}$. D'où l'élongation (équation horaire) de M par rapport à cette onde est :

$$y_{M/i}(t) = y_A(t + \theta) = a \sin\left(2\pi N t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

c-Equation du point M par rapport à l'onde réfléchi

L'onde réfléchi en B passe au point M avec un retard de phase $\theta = \frac{BM}{v} = \frac{x}{v}$ et l'obstacle étant fixe les deux élongations (de l'onde incidente et de l'onde réfléchi) seront de signe contraire. D'où l'élongation de M par rapport à cette onde est :

$$y_{M/r}(t) = -y_A(t - \theta) = -a \sin\left(2\pi N t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

d-Equation du point M par rapport aux deux ondes

$$y_M(t) = y_{M/i}(t) + y_{M/r}(t) = A \sin(\omega t + \phi) = a \left[\sin\left(2\pi Nt + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) - \sin\left(2\pi Nt - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \right]. \text{ On a la}$$

forme $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$. D'où après transformation on trouve le résultat :

$$y_M(t) = 2a \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cos 2\pi Nt = 2a \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin\left(2\pi Nt + \frac{\pi}{2}\right)$$

Par identification on trouve l'**amplitude résultante** et la **phase résultante** :

Amplitude résultante : $A = 2a \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$ **Phase résultante** : $\phi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

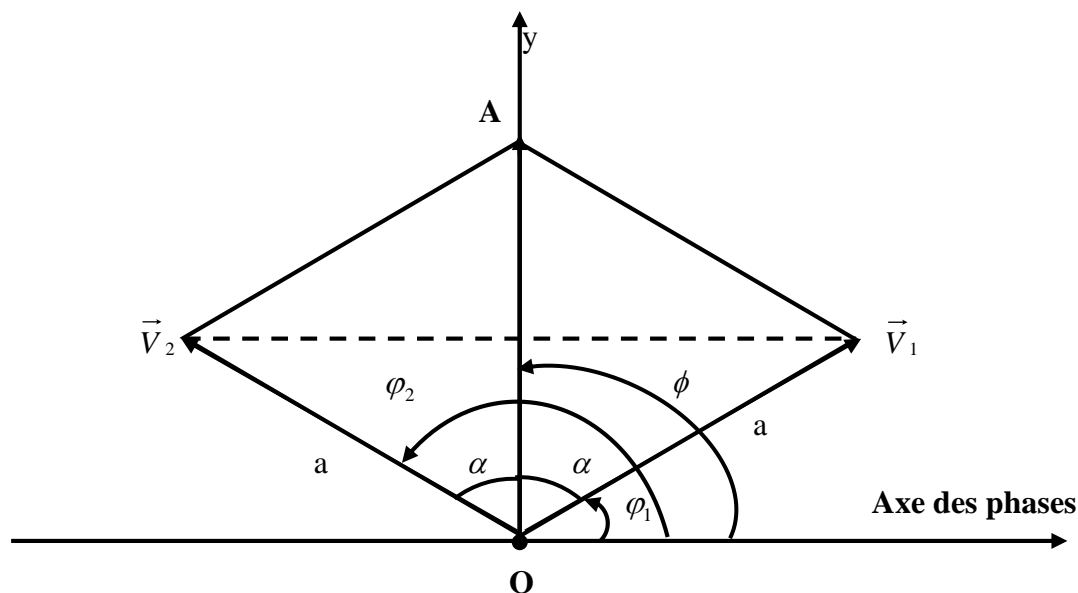
1.2- Méthode de Fresnel

On trouve d'abord les équations de M par rapport à l'onde incidente et par rapport à l'onde réfléchie et on associe à chaque équation un **vecteur de Fresnel** de la forme $\vec{V}(a, \varphi)$. Par rapport à ce qu'on a fait précédemment on a :

$$y_{M/i}(t) = a \sin\left(2\pi Nt + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \text{ a pour vecteur de Fresnel } \vec{V}_1(a ; \varphi_1 = \frac{2\pi x}{\lambda})$$

$$y_{M/r}(t) = -a \sin\left(2\pi Nt - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = a \sin\left(2\pi Nt - \frac{2\pi x}{\lambda} + \pi\right) \text{ a pour vecteur de Fresnel}$$

$\vec{V}_2(a ; \varphi_2 = \pi - \varphi_1)$. La **méthode de Fresnel** conduit à la construction géométrique suivante :



D'après la figure : $\cos \alpha = \frac{A}{2a} = \frac{A}{2a} \Rightarrow A = 2a \cos \alpha$ or $2\alpha + \varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow \alpha = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \Rightarrow$

$\alpha = \frac{\pi - \varphi_1 - \varphi_1}{2} = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$ car $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$. Soit **l'amplitude résultante** est :

$$A = 2a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right).$$

Soit :

$$A = 2a \sin \varphi_1 = 2a \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$$

D'après la figure : $\phi = \alpha + \varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1 + \varphi_1$. Soit **la phase résultante vaut** : $\phi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

D'où l'élongation du point résultant M sera donc :

$$y_M(t) = A \sin(2\pi Nt + \phi) = 2a \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin\left(2\pi Nt + \frac{\pi}{2}\right) = 2a \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cos 2\pi Nt$$

a-Position des ventres

Les ventres sont les points d'amplitude maximale. L'amplitude est maximale si

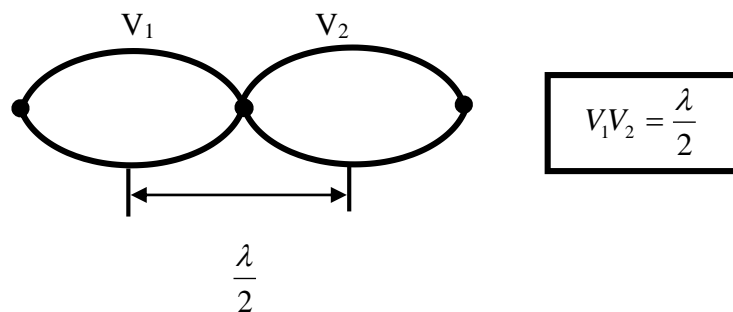
$$A = A_{\max} = \pm 2a$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}$$

- Pour $k = 0$, $x_0 = \frac{\lambda}{4}$. Le premier ventre est situé à $\frac{\lambda}{4}$ de l'extrémité réfléchissante.

- Pour $k = 1$, $x_1 = \frac{3\lambda}{4}$. Le deuxième ventre est situé à $\frac{3\lambda}{4}$ de l'extrémité réfléchissante. Donc

$x_1 - x_0 = \frac{\lambda}{2}$ est la distance entre deux ventres consécutifs.



La distance entre deux ventres consécutifs est égale à une demi-longueur

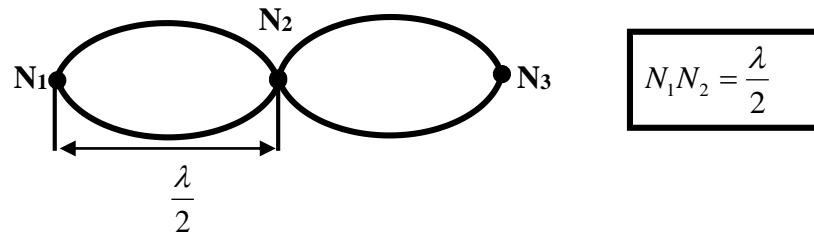
b-Position des nœuds

Les nœuds sont les points d'amplitude nulle. L'amplitude est nulle si $A = 0$ c'est-à-dire :

$$2a \sin \frac{2\pi x}{\lambda} = 0 \Rightarrow 2a \neq 0 \text{ et } \frac{2\pi x}{\lambda} = k\pi \text{ soit : } x = \frac{k\lambda}{2}$$

-Pour $k = 0$, $x_0 = 0$, l'extrémité réfléchissante B (obstacle) est un nœud.

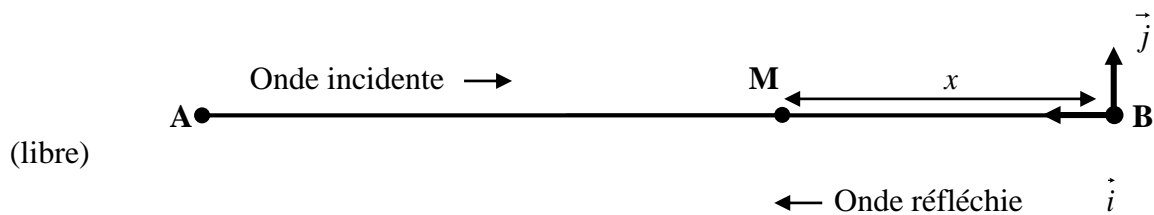
-Pour $k = 1$, $x_1 = \frac{\lambda}{2}$, le deuxième nœud est situé $\frac{\lambda}{2}$ de l'obstacle. Donc $x_1 - x_0 = \frac{\lambda}{2}$ est la distance entre deux nœuds consécutifs.



La distance entre deux nœuds consécutifs est égale à une demi-longueur d'onde.

N.B. : La distance d'un ventre à un nœud voisin est égale à un quart de la longueur d'onde.

2- Equation de M pour un obstacle libre



a-Equation de la source

$y_A(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$. Supposons qu'à $t = 0$, l'onde incidente va du côté des élongations positives : $\varphi = 0$, soit $y_A(t) = a \sin \omega t = a \sin 2\pi N t$.

b-Equation du point M par rapport à l'onde incidente

L'onde incidente passe au point M avec une avance de phase $\theta = \frac{BM}{v} = \frac{x}{v}$. D'où l'élongation (équation horaire) de M par rapport à cette onde est :

$$y_{M/i}(t) = y_A(t + \theta) = a \sin\left(2\pi N t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

c-Equation du point M par rapport à l'onde réfléchie

L'onde réfléchie en B passe au point M avec un retard de phase $\theta = \frac{BM}{v} = \frac{x}{v}$ et l'obstacle étant libre les deux élongations (de l'onde incidente et de l'onde réfléchie) sont de même signe. D'où l'élongation de M par rapport à cette onde est :

$$y_{M/r}(t) = y_A(t - \theta) = a \sin\left(2\pi N t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

d-Equation du point M par rapport aux deux ondes

$$y_M(t) = y_{M/i}(t) + y_{M/r}(t) = A \sin(\omega t + \phi) = a \left[\sin\left(2\pi Nt + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + \sin\left(2\pi Nt - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \right]. \text{ On a la}$$

forme $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$. D'où après transformation on trouve :

$$y_M(t) = 2a \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \sin 2\pi Nt = 2a \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos\left(2\pi Nt - \frac{\pi}{2}\right)$$

Par identification on trouve l'**amplitude résultante** et la **phase résultante** :

Amplitude résultante : $A = 2a \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$ **Phase résultante** : $\phi = 0$

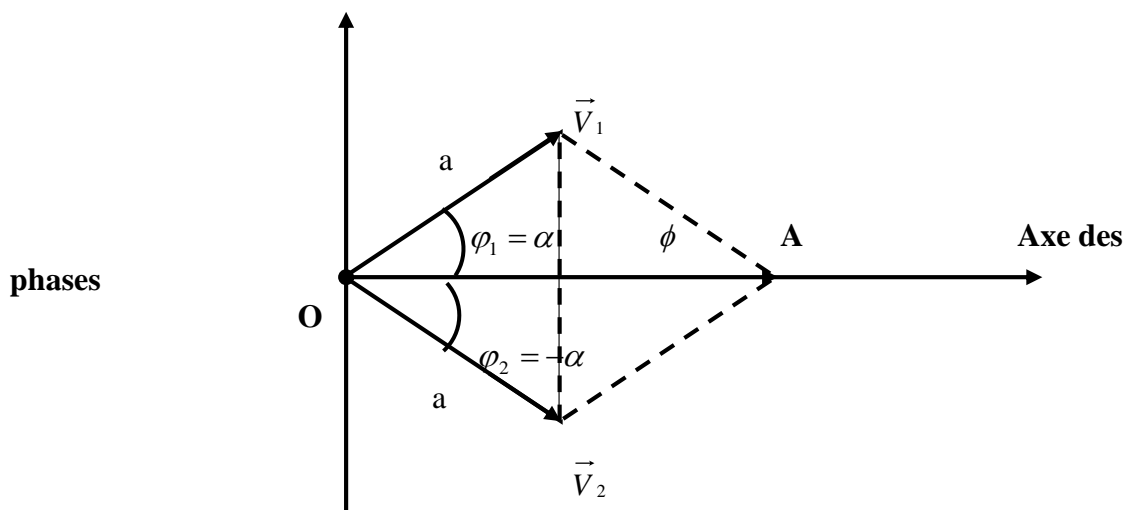
1.2- Méthode de Fresnel

On trouve d'abord les équations de M par rapport à l'onde incidente et par rapport à l'onde réfléchie et on associe à chaque équation un **vecteur de Fresnel** de la forme $\vec{V}(a, \varphi)$. Par rapport à ce qu'on a fait précédemment on a :

$$y_{M/i}(t) = a \sin\left(2\pi Nt + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \text{ a pour vecteur de Fresnel } \vec{V}_1(a ; \varphi_1 = \frac{2\pi x}{\lambda})$$

$$y_{M/r}(t) = a \sin\left(2\pi Nt - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \text{ a pour vecteur de Fresnel } \vec{V}_2(a ; \varphi_2 = -\frac{2\pi x}{\lambda}). \text{ La méthode de}$$

Fresnel conduit à la construction géométrique suivante :



D'après la figure : $\cos \alpha = \frac{A/2}{a} = \frac{A}{2a} \Rightarrow A = 2a \cos \alpha$ or $\alpha = \varphi_1 = -\varphi_2$. Soit l'**amplitude**

résultante est $A = 2a \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$ et la **phase résultante** est $\phi = 0$

Soit l'élongation du point résultant M sera donc :

$$y_M(t) = A \sin(2\pi Nt + \phi) = 2a \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \sin 2\pi Nt = 2a \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos(2\pi Nt - \frac{\pi}{2})$$

a-Position des ventres

Les ventres sont les points d'amplitude maximale. L'amplitude est maximale si

$$A = A_{\max} = \pm 2a$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\lambda}{2}$$

Pour $k = 0$, $x_0 = 0$. L'extrémité est un ventre.

b-Position des nœuds

Les nœuds sont les points d'amplitude nulle. L'amplitude est nulle si $A = 0$ c'est-à-dire :

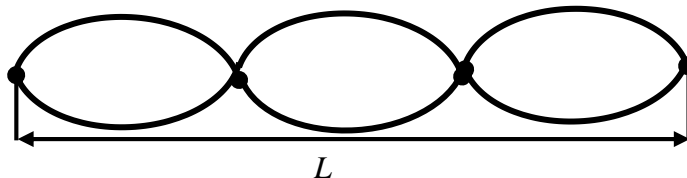
$$2a \cos \frac{2\pi x}{\lambda} = 0 \Rightarrow 2a \neq 0 \text{ et } \frac{2\pi x}{\lambda} = (2k+1) \frac{\pi}{2}. \text{ Soit } x = (2k+1) \frac{\lambda}{4}$$

-Pour $k = 0$, $x_0 = \frac{\lambda}{4}$, le premier nœud est situé à $\frac{\lambda}{4}$ du premier ventre de vibration.

IV – CONDITIONS DE RESONANCE

1- Cas d'un obstacle fixe

A la résonance, la longueur utile de la corde est donc égale à un nombre entier de demi-longueur d'onde, c'est-à-dire à la *longueur d'un nombre entier de fuseaux*.



$$L = k \frac{\lambda}{2} = n \frac{\lambda}{2}$$

n ou k est un entier qui correspond au *nombre de fuseaux* et $\lambda = v.T = \frac{v}{N}$ (longueur d'onde) la distance parcourue par l'onde pendant une période.

La vitesse de propagation de l'onde le long de la corde est $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F.L}{m}}$; alors la

longueur de la corde comportant n fuseaux sera donc :

$$L = n \frac{\lambda}{2} = n \frac{v}{2N} = \frac{n}{2N} \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{n}{2N} \sqrt{\frac{F.L}{m}}$$

Cette relation très importante est appelée **formule des cordes vibrantes**. La plus petite fréquence qui est la fréquence du **son fondamental** $n = 1$ (un seul fuseau) est :

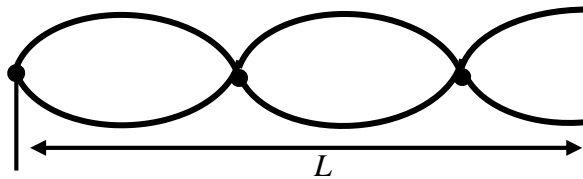
$$N_o = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

<

N.B. : $\mu = \frac{m}{L}$ (Kg / m) est la **masse linéique** ou **linéaire** de la corde avec L sa longueur et m sa masse. F est la tension de la corde qui s'équilibre au poids de la masse : $F = P$

2- Cas d'un obstacle libre

On peut réaliser des ondes stationnaires en prenant une corde dont l'extrémité est **libre**. Dans ce cas, l'extrémité libre est un **ventre de vibration**.



La condition de résonance devient :

$$L = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} = (2n + 1) \frac{v}{4N} = \frac{(2n + 1)}{4N} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

La plus petite fréquence qui est la fréquence du **son fondamental** $n = 0$ (aucun fuseau) est :

$$N_o = \frac{1}{4L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

<

V – APPLICATION DES ONDES STATIONNAIRES

Les ondes stationnaires interviennent dans tous les domaines de la Physique des vibrations. Leurs applications sont particulièrement importantes dans les instruments de musique. C'est le cas du **mvét** et des balafons traditionnels, du **piano**, de l'**orgue**, de la **flûte**, etc.

Tous les instruments de musique, à l'exception des dispositifs électro-acoustiques sont des applications du phénomène d'ondes stationnaires. C'est ainsi qu'on distingue trois types d'instruments de musique :

1- Les instruments à corde

Les cordes peuvent être frappées (piano), pincée (mvét, guitare), frottées (violon). La fréquence du son varie soit avec la longueur L de la partie vibrante de la corde (c'est le rôle des barrettes d'une guitare, ou de la forme du cadre du mvét par exemple), soit avec la tension F de la corde (rôle des vis de réglage de la guitare) ou soit avec la masse linéique μ (existence des cordes filées).

2- Les instruments à vent

Comme exemples nous pouvons citer : l'orgue, la flûte, l'harmonica, la trompette, etc. Ce sont des tuyaux sonores où l'utilisateur insuffle de l'air dans l'instrument. Il se produit des tourbillons qui font vibrer la colonne d'air du tube, et il s'établit alors un système d'ondes stationnaires avec résonance. La colonne d'air, en vibrant, engendre le son de l'instrument et la musique se fait entendre.

3- Les instruments à percussion

Comme exemples nous pouvons citer : le tambour, le tam-tam, les balafons, les cymbales, etc. Il s'agit d'établir les ondes stationnaires sur des membranes ou des corps solides en les excitant. Le mode d'excitation pouvant être les mains du joueur (tambour) ou alors des « baguettes » appropriées (tam-tam, cymbales, cloches...).

O.S.4-5 ETABLIR LA DUALITE ONDE-CORPUSCULE DE LA LUMIERE

D'une part l'optique ondulatoire en particulier les phénomènes d'interférences lumineuses montre que **la lumière est une onde électromagnétique**, d'autre part les effets photoélectriques conduisent à l'idée que **cette même lumière est un flux de particules :**

les photons. Peut-on concilier ces deux points de vue ? C'est ce que nous allons tenter de voir dans ce chapitre.

A- ASPECT ONDULATOIRE DE LA LUMIERE

I-INTERFERENCES LUMINEUSES : EXPERIENCE DES FENTES DE YOUNG⁸

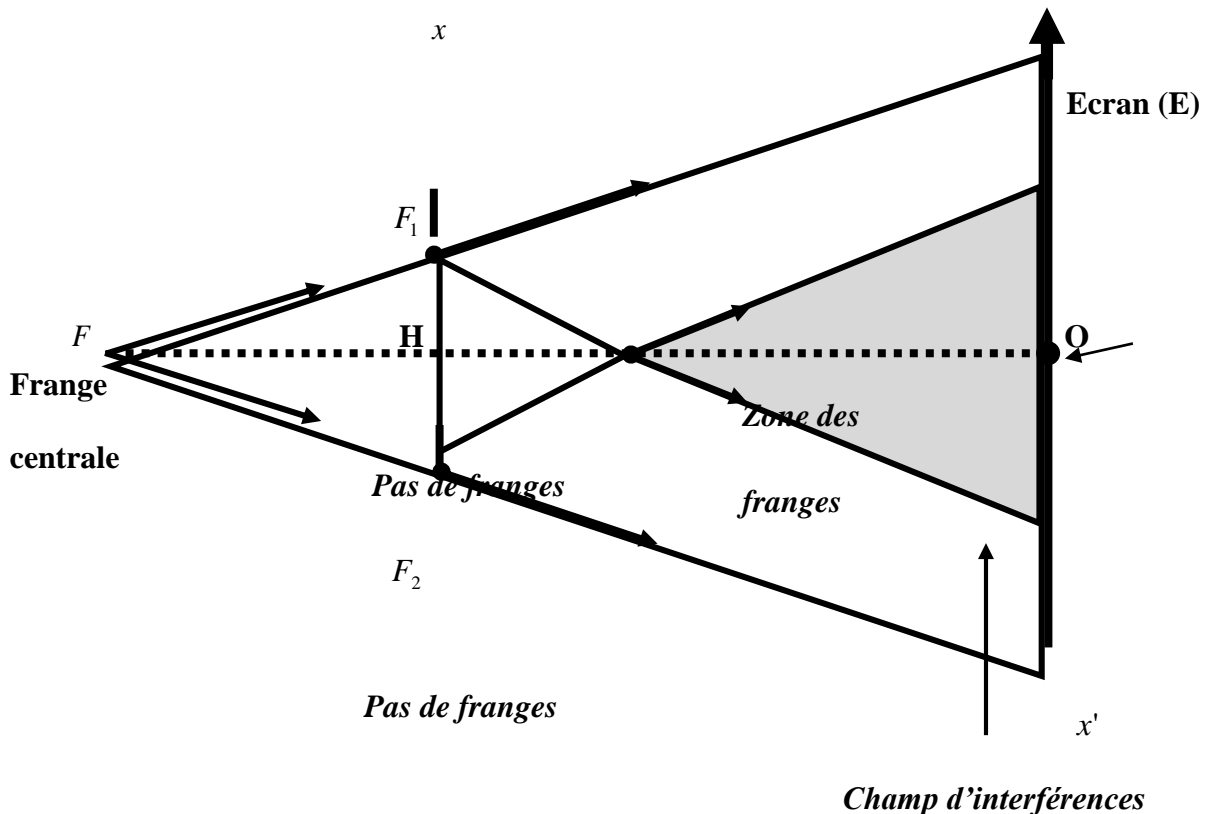
Le phénomène d'interférence lumineuse se manifeste lorsqu'il y a superposition d'ondes de même fréquence, de même nature et de même direction de propagation dont le déphasage reste constant.

⁸ Thomas YOUNG (1727-1829), Physicien Anglais.

Il est observable à l'aide du dispositif des fentes de **YOUNG** qui mettent en évidence la nature **ondulatoire de la lumière**.

1-Dispositif expérimental des fentes de YOUNG

L'expérience des fentes de **YOUNG** n'a été réalisée qu'au XIX^e siècle après beaucoup de difficultés. On opère dans l'air (assimilable au vide pour l'optique) et on utilise la lumière monochromatique, c'est-à-dire à une seule couleur, jaune par exemple, en interposant devant la source de lumière blanche un filtre coloré.

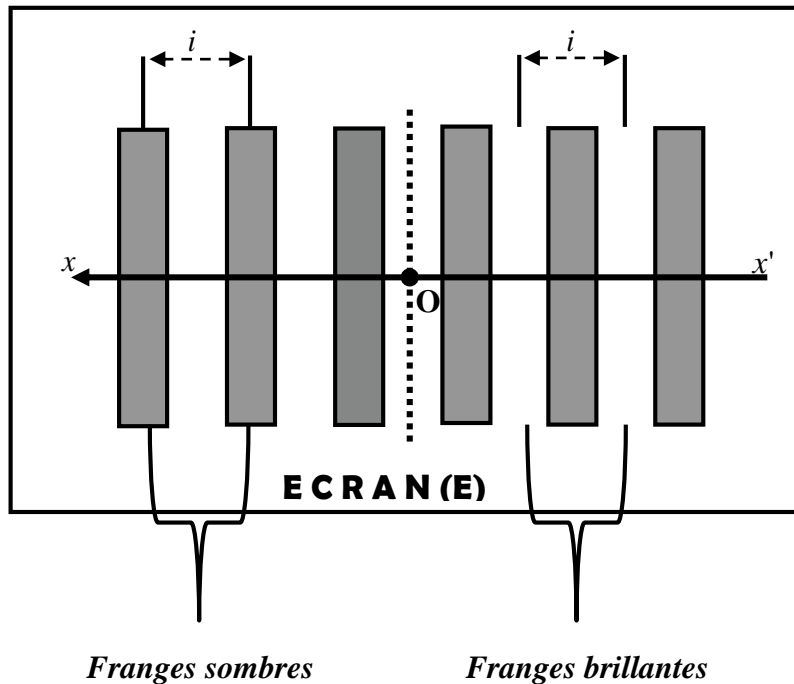


Le faisceau lumineux monochromatique traverse d'abord la fente (ou source) fine F , appelée **fente (source) primaire**, où il va subir une diffraction. A une certaine distance de F se trouvent deux **fentes (sources) secondaires** très fines parallèles, symétriques. Il y a encore diffraction en F_1 et F_2 . Les deux faisceaux lumineux issus de F_1 et F_2 ont une partie commune : c'est le **champ d'interférences**.

2-Faits observés sur l'écran E

Si on regarde ce que l'on obtient sur l'écran (E), on observe alternativement des bandes sombres et brillantes parallèles : ce sont les **franges d'interférences**. Ces franges sont équidistantes les unes des autres d'une distance i appelée **interfrange**.

Le système de franges obtenu est symétrique par rapport à la **frange brillante centrale**. Si on déplace l'écran et en restant dans le champ d'interférence, on constate que les franges existantes quelle que soit la position de l'écran : on dit que les franges observées sont **délocalisées**.



N.B. : Le phénomène d'interférence est très net avec des sources secondaires F_1 et F_2 **très fines**. Il ne l'est pas lorsque les sources secondaires sont **larges**. Lorsque la lumière provient des deux sources secondaires F_1 et F_2 , ce phénomène d'interférence n'est plus observable. Les deux sources secondaires F_1 et F_2 doivent être cohérentes c'est-à-dire qu'elles doivent recevoir la lumière qui provient d'une **seule source primaire** F . Masquer l'une des deux sources signifie éclairer **uniformément l'écran**.

3-Interprétation du phénomène

Les franges brillantes correspondent aux endroits où les deux faisceaux arrivent en **phase** et les franges sombres où ils arrivent en **opposition de phase**. Considérons un point M situé dans le champ d'interférences. Soit a la distance séparant les deux fentes F_1 et F_2 et appelons D la distance entre le plan des fentes et l'écran (E). Le système de franges ne peut s'observer qu'au voisinage de la droite HO, à une distance assez importante des fentes F_1 et F_2 .

3.1-Nature ondulatoire de la lumière

On trouve donc avec la lumière la possibilité d'obtenir la superposition de deux faisceaux, soit de la lumière (franges brillantes), soit de l'obscurité (franges sombres). Cette expérience très importante de **YOUNG** montre bien que la lumière possède une **nature ondulatoire** : c'est bien là la caractéristique des interférences des mouvements vibratoires. C'est ainsi que l'étude de la lumière, des rayons X, des ondes radio, a permis à **Maxwell**⁹ de montrer que tous ces phénomènes rendent compte de l'existence de *l'onde électromagnétique*.

3.2-Célérité et longueur d'onde

Le mouvement ondulatoire de la lumière est caractérisé par sa période T et par sa longueur d'onde spatiale λ , liées à la vitesse de déplacement C de l'onde par la relation :

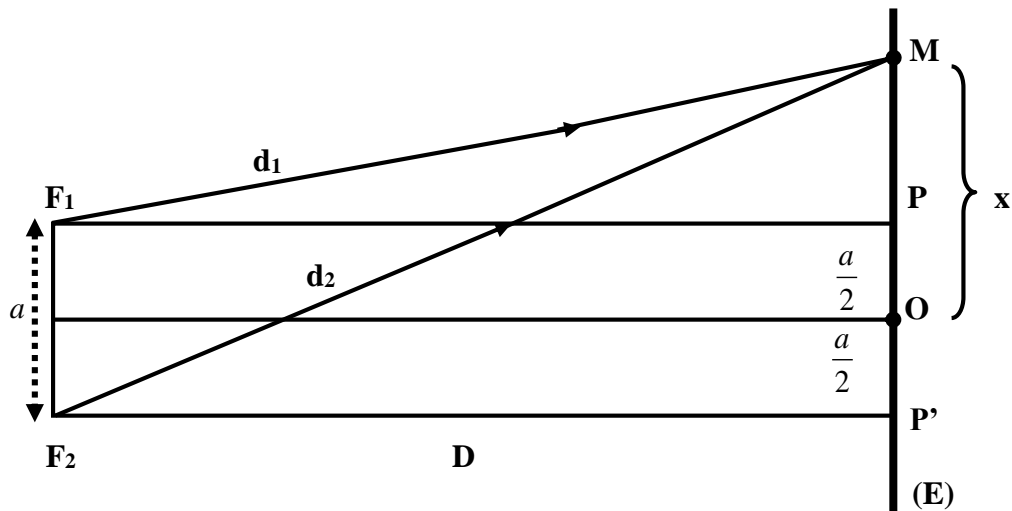
⁹ James Clerk MAXWELL (1831-1879), Physicien Ecossais.

$$\lambda = C.T = \frac{C}{N} = \frac{2\pi C}{\omega}$$

Dans le SI, λ s'exprime en **m**, C en **m/s**, et T en **s**.

3.3-Notion de différence de marche au point M

La différence de marche au point résultant **M** représente la différence des chemins géométriques des deux faisceaux provenant des deux sources secondaires F_1 et F_2 .



M est un point du champ d'interférence situé à la distance x de la frange centrale.

Posons $\Delta = F_2M - F_1M = d_2 - d_1$. D'après le **théorème de PYTHAGORE**¹⁰ et en

considérant les triangles $F_1\hat{P}M$ et $F_2\hat{P}'M$ on a : $\blacksquare d_1^2 = D^2 + MP^2 = D^2 + (x - \frac{a}{2})^2$ (1)

$$\blacksquare d_2^2 = D^2 + MP'^2 = D^2 + (x + \frac{a}{2})^2$$
 (2)

(2)-(1) donne : $d_2^2 - d_1^2 = (d_2 - d_1)(d_2 + d_1) = ax + ax = 2ax$. Or F_1 et F_2 sont très proches, donc

$d_1 \cong d_2 \cong D$ (approximation de **GAUSS**¹¹) $\Rightarrow d_1 + d_2 = 2D$ et $d_2 - d_1 = \frac{2ax}{2D} = \frac{ax}{D}$. D'où la

différence de marche :

$$\Delta = d_2 - d_1 = \frac{ax}{D}$$

Dans le SI, $d_2 - d_1$ s'exprime en **m**, avec a , D et x en **m** aussi.

Remarque : Dans un milieu transparent d'indice de réfraction n , la différence de marche sera donc de la forme :

¹⁰ Pythagore de SAMOS, Philosophe de l'Antiquité grecque, mathématicien et physicien.

¹¹ Carl Friedrich GAUSS (1777-1855), Mathématicien, physicien et astronome Allemand.

$$\Delta = d_2 - d_1 = \frac{na x}{D}$$

a-Position des franges brillantes (points d'amplitude maximale)

Les franges brillantes (claires) sont des points d'amplitude maximale dont la différence de marche est $d_2 - d_1 = k\lambda$. Or $d_2 - d_1 = \frac{ax}{D} \Rightarrow k\lambda = \frac{ax}{D}$. D'où par rapport à la frange centrale elles sont situées à la distance :

$$x = \frac{k\lambda D}{a}$$

Remarque : ■ Pour $k = 0 \Rightarrow x_0 = 0$, c'est la **frange centrale (brillante)** située au milieu du champ d'interférences : c'est la **frange de référence**.

■ Pour $k = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{\lambda D}{a}$. C'est la distance de la première frange brillante par rapport à la frange centrale.

b-Position des franges sombres (points d'amplitude nulle)

Les franges sombres (obscurées, noires) sont des points d'amplitude nulle (points immobiles) dont la différence de marche est : $d_2 - d_1 = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$. Or $d_2 - d_1 = \frac{ax}{D}$. D'où par rapport à la frange centrale elles sont situées à la distance :

$$x = (2k + 1)\frac{\lambda D}{2a}$$

Remarque : Pour $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\lambda D}{2a}$. La première frange sombre est située à cette distance de la frange centrale.

3.4-Notion d'interfrange

a-Définition

L'interfrange notée i est la distance séparant les milieux de deux **franges consécutives (voisines) de même nature**.

b-Expression de l'interfrange

■ Cas des franges brillantes (points d'amplitude maximale)

Considérons deux franges brillantes consécutives d'abscisse x_k et x_{k+1} . On a : $x_k = \frac{k\lambda D}{a}$ et $x_{k+1} = (k+1)\frac{\lambda D}{a}$. L'expression de l'interfrange sera telle que $i = x_{k+1} - x_k = (k+1)\frac{\lambda D}{a} - \frac{k\lambda D}{a}$.

$$i = \frac{\lambda D}{a}$$

Dans le SI, i s'exprime en **mètre (m)**, λ , D et a en **mètre (m)** aussi.

■ **Cas des franges sombres (points d'amplitude nulle)**

Considérons deux franges sombres consécutives d'abscisse x_k et x_{k+1} . On a : $x_k = (k + \frac{1}{2}) \frac{\lambda D}{a}$
 et $x_{k+1} = (1 + \frac{1}{2} + k) \frac{\lambda D}{a}$. L'interfrange est telle que $i = x_{k+1} - x_k = (1 + \frac{1}{2} + k) \frac{\lambda D}{a} - (k + \frac{1}{2}) \frac{\lambda D}{a}$

$$i = \frac{\lambda D}{a}$$

L'expression de l'interfrange reste la même pour les deux types de franges (**brillantes et sombres**)

Remarque : ■ Deux franges consécutives de nature différente (frange sombre et frange brillante consécutives) sont distantes de $\frac{i}{2}$.

- Lorsque la longueur ou la distance entre deux franges est donnée, il est utile de procéder par la représentation des franges en respectant le numéro de chacune des franges indiquées.
 - Lorsque les franges sont de même nature, la distance entre ces franges est donnée par la formule suivante :

$$l = ni = \frac{n\lambda D}{a} \quad n : \text{Numéro de la frange considérée.}$$

- Lorsque les franges considérées sont de nature différente, la distance entre ces franges est donnée par la formule suivante :

$$l = ni + \frac{i}{2} = (n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda D}{a}$$

c-Ordre d'interférence lumineuse

C'est une grandeur notée p qui permet de connaître **la nature (brillante ou sombre)** de la frange située à la distance x de la frange centrale.

- Pour les franges brillantes : $x = \frac{k\lambda D}{a} = \frac{p\lambda D}{a}$ en posant $p = k \Rightarrow p = \frac{ax}{\lambda D}$ (1).
- Pour les franges sombres : $x = (k + \frac{1}{2}) \frac{\lambda D}{a} = \frac{p\lambda D}{a}$ en posant $p = k + \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{ax}{\lambda D}$ (2).

Les deux relations étant identiques, l'expression de l'ordre d'interférence est de la forme :

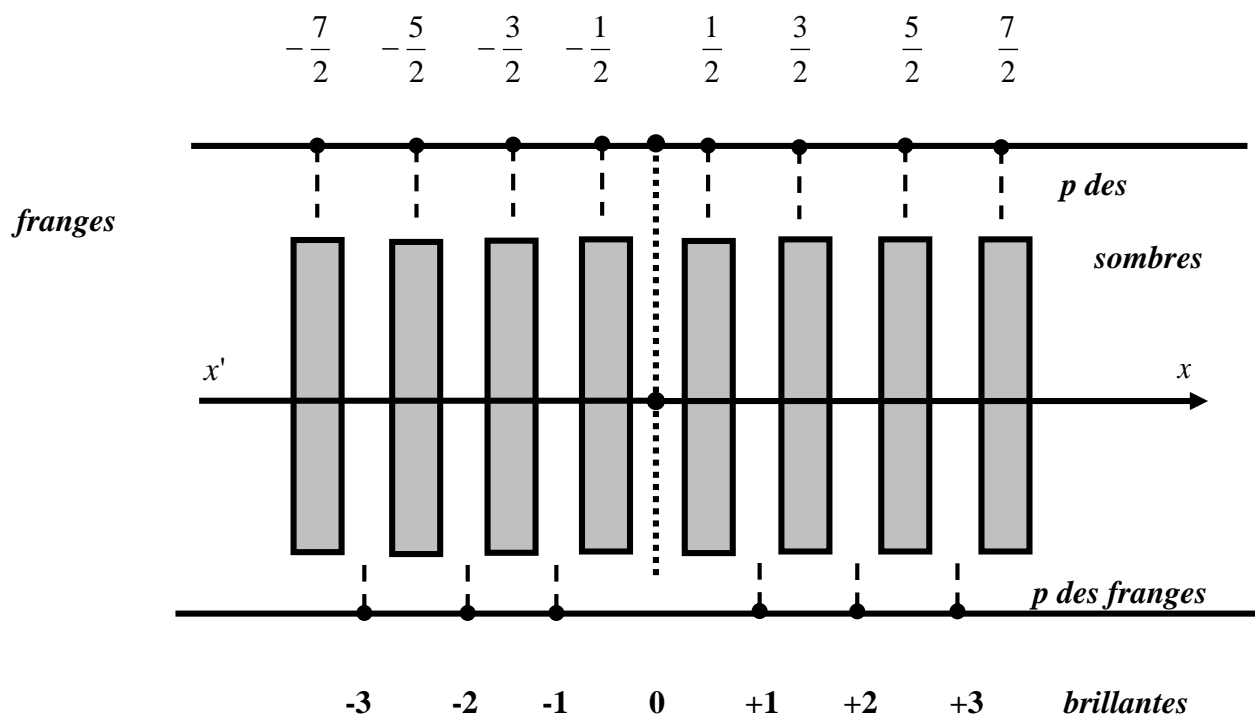
$$p = \frac{ax}{\lambda D} = \frac{d_2 - d_1}{\lambda}$$

Remarque : ■ Si $p = k$ (avec $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$) c'est-à-dire *une valeur entière* : il s'agit d'une **frange brillante**.

■ Si $p = k' + \frac{1}{2}$ (avec $k' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$) c'est-à-dire *une valeur demi-entière* : il s'agit d'une **frange sombre**. Ainsi, si on attribue l'ordre d'interférence $p = 0$ à la frange centrale :

■ Les franges brillantes ont les ordres $-n, \dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots, n$.

■ Les franges sombres ont les ordres $-(n + \frac{1}{2}), \dots, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, n + \frac{1}{2}$



d-Phénomène de coïncidence des franges

Lorsque la source primaire émet simultanément 2, 3 ou plusieurs radiations de couleur et de longueurs d'onde différentes, la frange centrale est **brillante** et représente les couleurs correspondant à chacune de ces radiations.

En certains points du champ d'interférence, on observe le *phénomène de coïncidence (superposition)* entre ces franges. On détermine les numéros des franges qui coïncident par deux méthodes :

*

■ **Par la méthode des longueurs d'onde**

Pour deux radiations de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 , les franges brillantes sont situées aux distances respectives $x_1 = \frac{k_1 \lambda_1 D}{a}$ et $x_2 = \frac{k_2 \lambda_2 D}{a}$ de la frange centrale. A la coïncidence :

$$x_1 = x_2 \Rightarrow k_1 \lambda_1 = k_2 \lambda_2 \Rightarrow \boxed{\frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \quad (\text{Première coïncidence})$$

Exemple : $\lambda_1 = 0,60 \mu m$ et $\lambda_2 = 0,40 \mu m \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{0,40}{0,60} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow k_1 = 2$ et $k_2 = 3$.

La 2^{ème} frange de λ_1 et la 3^{ème} frange de λ_2 coïncident (se superposent).

■ **Par la méthode des interfranges**

Pour deux radiations d'interfrange i_1 et i_2 , les franges brillantes sont situées aux distances respectives $x_1 = k_1 i_1$ et $x_2 = k_2 i_2$ de la frange centrale. A la coïncidence : $x_1 = x_2 \Rightarrow k_1 i_1 = k_2 i_2$.

Soit : $\boxed{\frac{k_1}{k_2} = \frac{i_2}{i_1}} \quad (\text{Première coïncidence})$

N.B. : ■ On trouverait les mêmes réponses en raisonnant avec les franges sombres. k_1 et k_2 sont les numéros des franges qui coïncident et ne sont plus *simplifiables*.

■ **L'abscisse des coïncidences** c'est-à-dire la distance entre la frange centrale et le lieu de la

coïncidence est : $x = \frac{k_1 \lambda_1 D}{a} = \frac{k_2 \lambda_2 D}{a}$ ou $x = k_1 i_1 = k_2 i_2$.

■ Pour la $n^{\text{ième}}$ coïncidence ($n \geq 1$) les numéros des franges qui coïncident sont : $k_1' = nk_1$ et $k_2' = nk_2$. Cette coïncidence se fera à la distance $x = nk_1' i_1 = nk_2' i_2$ de la frange centrale.

II-APPLICATIONS

1-Déplacement des franges : Notion de chemin optique

1-1-Définition du chemin optique

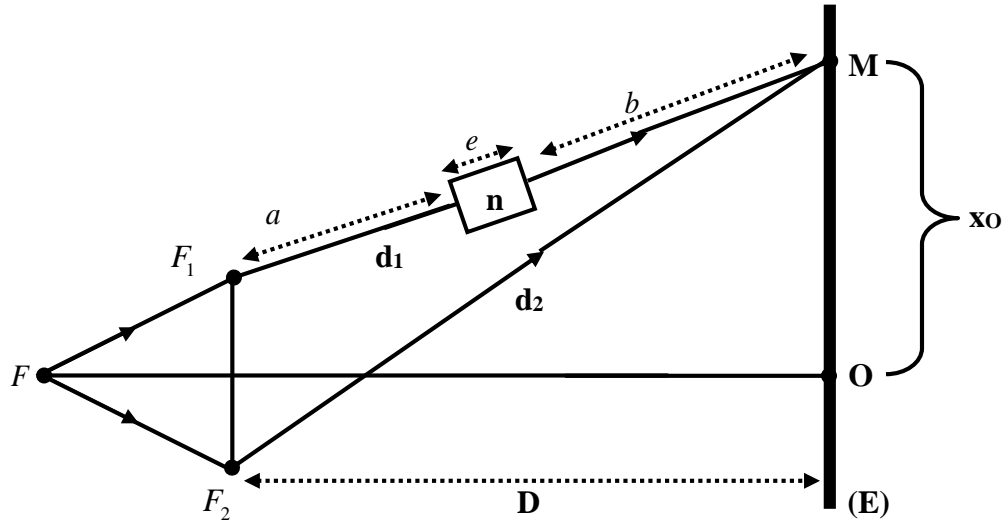
Le chemin optique est la trajectoire suivie par la lumière pendant sa propagation.

1-2-Modification du chemin optique

Elle se fait de deux manière simples : Soit par *interposition d'une lame de verre* devant l'une des deux sources secondaires (F_1 ou F_2) ou soit par *déplacement vertical* (vers le haut ou vers le bas) de la source primaire (F).

a-Interposition d'une lame de verre

Interposons une lame de verre à faces parallèles, d'épaisseur constante e , d'indice de réfraction n devant l'une des deux sources secondaires F_1 ou F_2 . Devant F_1 par exemple.



$FF_1 = FF_2$ or $F_1M = a + e + b = d_1$ (1) et $F_2M = d_2$ (2). Dans (1) : $a + e + b = d_1 \Rightarrow a + b = d_1 - e$

▪ **Durée du trajet** $F_1M = d_1$

$$t_1 = \frac{a}{C} + \frac{e}{v} + \frac{b}{C} \Rightarrow t_1 = \frac{a+b}{C} + \frac{e}{v} \text{ or } a+b = d_1 - e \Rightarrow t_1 = \frac{d_1 - e}{C} + \frac{e}{v} = \frac{d_1 - e + \frac{C}{v}e}{C} \text{ or } \frac{C}{v} = n$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{d_1 - e + ne}{C} \Rightarrow t_1 = \frac{d_1 + e(n-1)}{C} \quad (3).$$

▪ **Durée du trajet** $F_2M = d_2$

$$t_2 = \frac{d_2}{C} \quad (4).$$

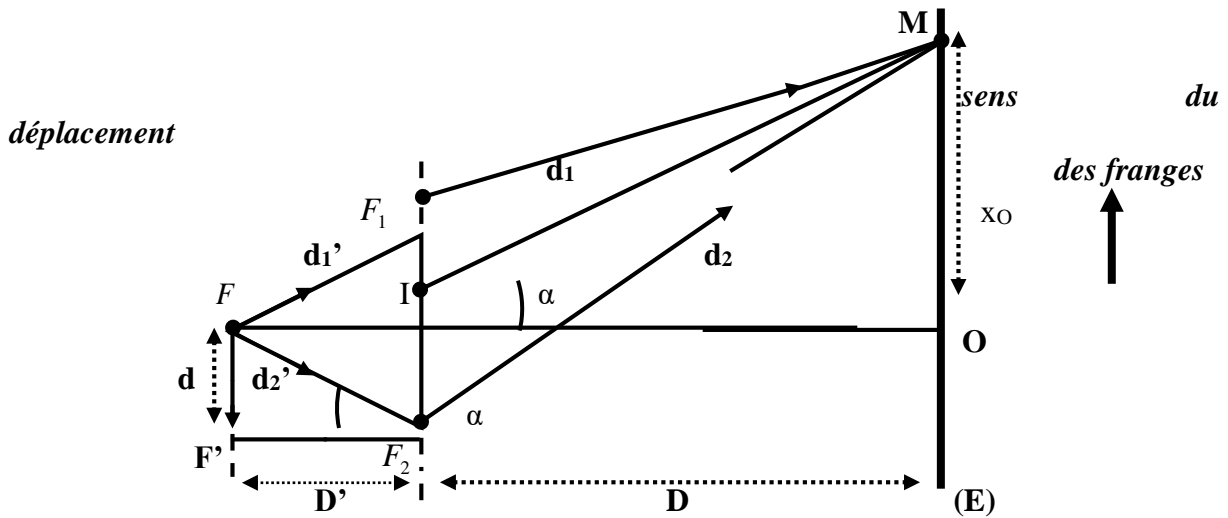
Cherchons la différence des durées : $t_2 - t_1 = kT \Rightarrow d_2 - d_1 - e(n-1) = kTC = k\lambda$. Pour la frange

centrale $k=0 \Rightarrow d_2 - d_1 = e(n-1) = \frac{ax_0}{D} \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{De(n-1)}{a}}$

Lorsqu'on place la lame de verre devant l'une des sources secondaires, le système de franges se déplace de x_0 du côté de cette source.

b-Déplacement vertical de la source primaire

Déplaçons verticalement d'une distance d vers le bas la source primaire F .



Les triangles FF_2F' et $M\hat{I}O$ sont semblables : $\tan \alpha = \frac{x_0}{D} = -\frac{d}{D'} \Rightarrow x_0 = -\frac{D}{D'}d$

D : Distance des sources primaires à l'écran.

D' : Distance de la source primaire aux sources secondaires.

d : Déplacement de la source primaire.

Lorsqu'on déplace la source primaire, le système de franges se déplace dans le **sens contraire** de la source primaire. Le signe (-) signifie que le signe de x_0 est opposé à celui de FF' .

1-3-Conséquences du transfert du dispositif interférentiel d'un milieu transparent à un autre : De l'air dans l'eau par exemple.

a-Conséquence qualitative

Le transfert du dispositif interférentiel d'un milieu transparent à un autre plus réfringent **diminue la luminosité des franges** (l'éclat des franges diminue).

Dans l'air : $\lambda_0 = CT$ (1) et dans l'eau : $\lambda = vT$ (2). Soit : $\frac{(1)}{(2)} : \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{CT}{vT} = \frac{C}{v} = n$ avec n

l'indice de réfraction de l'air par rapport à l'eau. D'où : $\lambda_0 = n\lambda$ ($\lambda < \lambda_0$)

b-Conséquence quantitative

Le transfert du dispositif interférentiel d'un milieu transparent à un autre plus réfringent **diminue l'interfrange** : il y a **rapprochement des franges** c'est-à-dire qu'elles se resserrent entre elles.

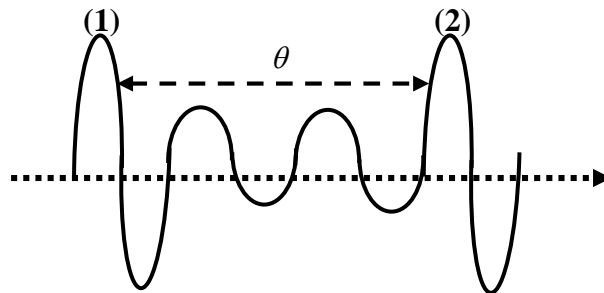
Dans l'air : $i_o = \frac{\lambda_o D}{a}$ (1) et dans l'eau : $i = \frac{\lambda D}{a}$ (2). Soit : $\frac{(1)}{(2)} : \frac{i_o}{i} = \frac{\lambda_o}{\lambda} = \frac{C}{v} = n$ avec n

l'indice de réfraction de l'air par rapport à l'eau. D'où : $i_o = ni$ ($i < i_o$)

2-Coïncidence (phénomène de battements)

La superposition de deux vibrations de deux mouvements sinusoïdaux de même direction et de périodes légèrement différentes conduit au **phénomène de battement**.

On appelle **battement**, cette alternance d'étouffement et de renforcement de la vibration résultante. La période de battement est l'intervalle de temps θ qui sépare deux renforcements de la vibration résultante.



$$\theta = nT_2 = (n-1)T_1 \Rightarrow n = \frac{\theta}{T_2} = \frac{\theta}{T_1} + 1 \Rightarrow \frac{1}{T_2} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{\theta} \Rightarrow \frac{1}{\theta} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \quad \text{ou}$$

$$\nu = N_2 - N_1$$

La fréquence de battement est égale à la différence des fréquences des vibrations.

3-Aspect des franges en lumière blanche

Si la source principale F émet une **lumière blanche**, constituée de plusieurs lumières monochromatiques, chacune de ces lumières monochromatiques forme son propre système de franges. Il y a **une seule frange blanche** : la **frange centrale**. De part et d'autre de celle-ci, on voit des franges colorées de plus en plus décalées, jusqu'à ce que l'œil ne soit plus capable de distinguer les franges sombres du reste (on dit qu'il y a **brouillage** des franges), ce qui donne une impression de blanc grisâtre : c'est la zone du **blanc d'ordre supérieur**.

Si l'on retire l'écran d'observation (**E**) et on place dans cette zone, parallèlement à la frange centrale, la fente d'un **spectroscope** à la distance x de celle-ci permettant d'analyser le blanc d'ordre supérieur, c'est-à-dire de mettre en évidence toutes les radiations présentes dans cet endroit, on observe un **spectre cannelé**, c'est-à-dire des **bandes étroites obscures (cannelures)** correspondant aux longueurs d'onde éteintes (franges sombres).

a-Calcul du nombre de cannelures

Les cannelures sont des points de repos dont la différence de marche est : $d_2 - d_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$

(1) Or $d_2 - d_1 = \frac{ax}{D}$ (2). En faisant (1) = (2) : $\frac{ax}{D} = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2ax}{D(2k+1)}$: C'est la

longueur d'onde des cannelures (radiations manquantes). Les cannelures sont des radiations

dont les longueurs d'onde λ appartiennent au domaine du visible : $0,4\mu\text{m} \leq \lambda \leq 0,8\mu\text{m}$. On aura donc :

$0,4\mu\text{m} \leq \frac{2ax}{D(2k+1)} \leq 0,8\mu\text{m}$. Après transformations mathématiques et en convertissant en mètre (m), on trouve :

$$\frac{10^7 ax}{8 D} - \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{10^7 ax}{4 D} - \frac{1}{2}$$

b-Longueurs d'ondes des cannelures

Il suffit de remplacer chaque valeur de k dans l'expression :

$$\lambda_k = \frac{2ax}{D(2k+1)}$$

4-Conclusion

Le phénomène d'interférence lumineuse prouve à suffisance que la lumière a une **nature ondulatoire (elle est une onde)** car les faisceaux lumineux diffractés se superposent. Voilà pourquoi ces phénomènes d'interférences lumineuses sont très utilisés dans de nombreux domaines : mesure de longueurs d'onde, d'indices, de faibles épaisseurs, études d'écoulements liquides et gazeux en aérodynamique, résistance des matériaux... L'ensemble de tous ces procédés d'études et de mesures constitue *l'interférométrie*.

III-DIFFRACTION DE LA LUMIERE

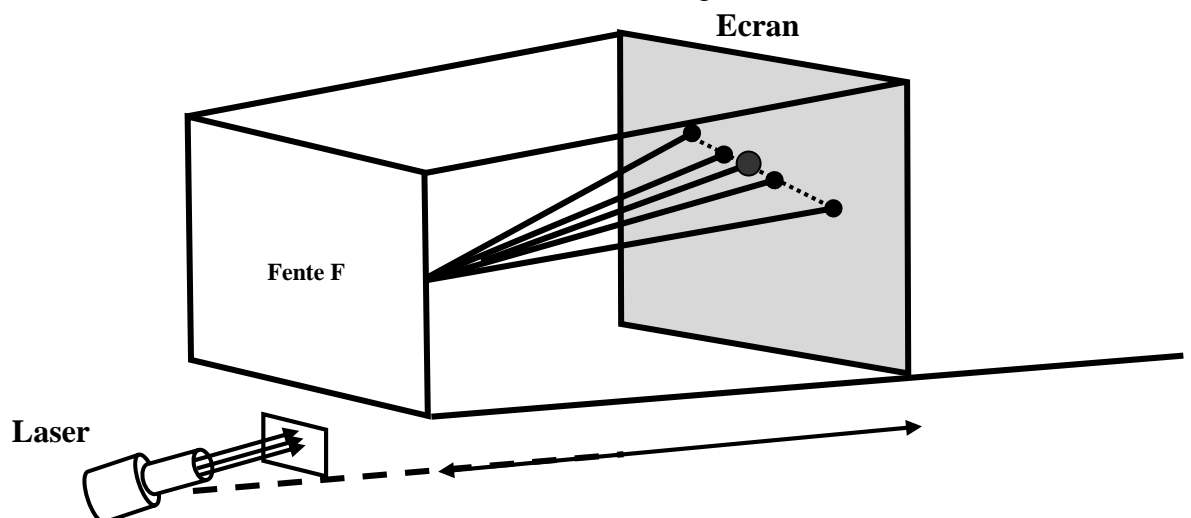
1-Définition

La diffraction est un phénomène optique de déviation des rayons lumineux au voisinage de corps opaques.

2-Etude expérimentale et interprétation

a-Dispositif expérimental

Une source de lumière monochromatique rouge (laser He-Ne) envoie un faisceau sur un écran disposé perpendiculairement à l'axe du faisceau. A une distance **D** de l'écran suffisamment importante (supérieure à **1m**), on place, sur l'axe du faisceau et perpendiculairement à ce dernier, une fente fine verticale **F**, de largeur $a \approx 0,4\text{mm}$.



b-Faits observés

On obtient une **figure de diffraction**, constituée d'une série de taches lumineuses disposées horizontalement :

- Une tache centrale large, qui remplace l'impact sur l'écran du faisceau laser en l'absence de fente diffractante.
- D'autres taches plus étroites, disposées symétriquement de part et d'autre de la tache centrale.

Elles se trouvent en des zones qui auraient dû être sombres si la lumière se propageait en

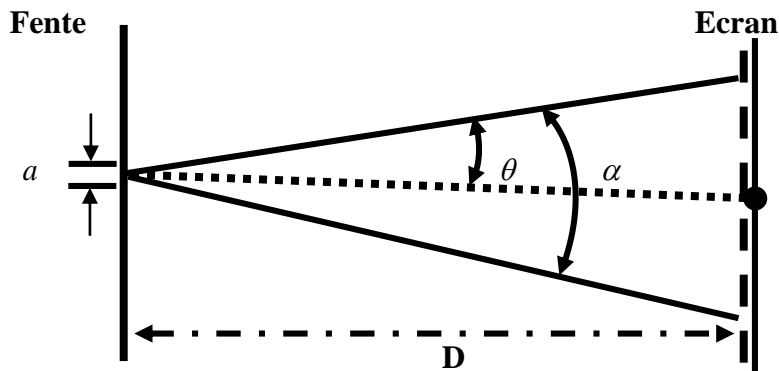
ligne droite !

c-Conclusion

Lorsqu'un rayon lumineux rencontre une fente fine, la lumière ne se propage pas en ligne droite. Elle est **diffractée** par la fente dans un plan perpendiculaire à son axe. La largeur de la tache centrale est d'autant plus importante que la largeur de la fente est petite.

d-Interprétation

Un faisceau laser (lumière monochromatique de longueur d'onde λ) éclaire sous incidence normale une fente de largeur a située à une distance D suffisamment grande de l'écran.



La largeur de la tache centrale peut être définie par l'angle $\alpha = 2\theta$ sous lequel elle est vue depuis la fente. Cet angle est appelé **largeur angulaire de la tache**. L'expérience montre alors, pour θ petit : $\theta \approx \frac{\lambda}{a}$. D'où la largeur angulaire de la tache centrale de diffraction est de l'ordre de :

$$\boxed{\alpha \approx \frac{2\lambda}{a}} \quad \alpha \text{ s'exprime en } \mathbf{radian (rad.)}$$

3-Condition et moyen de réalisation

Pour réaliser le phénomène de diffraction lumineuse il faut réunir le matériel physique suivant : Un banc d'optique, une diode laser (source lumineuse), un écran (dépoli si possible), un papier millimétré, un support de type diapositive avec fentes de différentes largeurs, un microscope avec micromètre oculaire pour mesurer les résultats obtenus.

B- ASPECT CORPUSCULAIRE DE LA LUMIERE

I-EFFET PHOTOELECTRIQUE

L'effet photoélectrique découvert par l'Allemand **HERTZ**¹² en 1887 en montrant qu'une plaque de zinc électrisée négativement se décharge lorsqu'elle reçoit de la lumière ultraviolette et c'est le phénomène qui permet de mettre en évidence la nature corpusculaire de la lumière.

1-Définition de l'effet photoélectrique

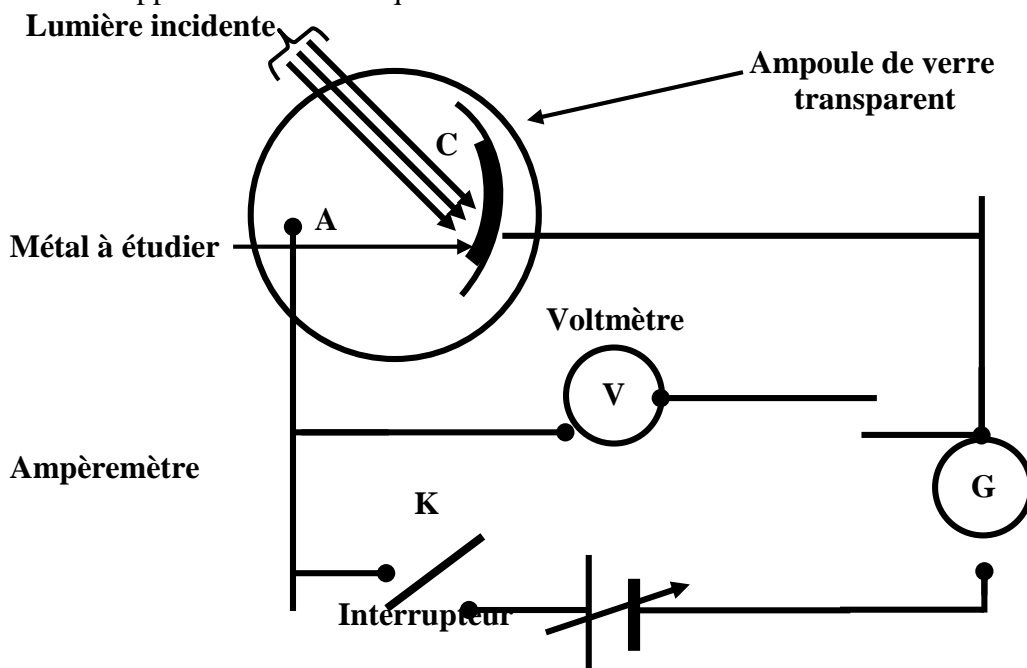
C'est l'extraction d'électrons d'un métal par un rayonnement électromagnétique (rayons X, lumière ultraviolette, lumière infrarouge, rayonnement γ ...).

2-Etude expérimentale : Expérience de MILLIKAN¹³

a-Dispositif expérimental

Les éléments du dispositif sont les suivants :

- Une **cellule photoémissive** : c'est une ampoule de verre transparent à l'ultraviolet, scellée, dans laquelle on a fait un vide poussé. Elle contient une **cathode C** constituée du métal à étudier (Zinc par exemple), et une **anode A** métallique. La cathode est éclairée par une lumière monochromatique dont on peut faire varier la **fréquence** et la **puissance** lumineuse.
- Un **générateur** à tension variable permettant d'établir une d.d.p. $U = V_A - V_C$ entre l'anode A la cathode C.
- Un **ampèremètre G** extrêmement sensible qui permet de lire l'intensité du courant traversant le circuit.
- Un **interrupteur K**. L'interrupteur K étant fermé, l'ampèremètre ne déviara que si des électrons peuvent quitter la cathode et traverser le vide existant entre la cathode et l'anode. Cela suppose évidemment que des électrons soient extraits de la cathode.



¹² Heinrich-Rudolph HERTZ (1857-1894), Physicien Allemand.

¹³ Robert MILLIKAN (1869-1953)

Générateur

b-Faits observés

L'expérience montre que si le métal est **convenablement** éclairé, l'ampèremètre décèle un courant dans l'ampoule, qui va de l'anode vers la cathode prouvant par là que les électrons sont partis de la cathode vers l'anode (arrachés du métal à étudier) : c'est le **phénomène d'effet photoélectrique**.

c-Interprétation du phénomène

Afin d'expliquer les résultats obtenus dans l'étude de l'effet photoélectrique, **EINSTEIN**¹⁴ émit l'hypothèse que la lumière ne devrait pas être considérée comme une onde électromagnétique progressive continue, mais comme un flux de particules élémentaires appelées **photons** (grains de lumière). Chacun de ces photons, de **masse nulle** et animé de la célérité $C = 3.10^8 m/s$ transporte avec lui une énergie E qui doit être suffisante pour permettre l'expulsion d'un électron du métal. Suite au choc photon incident-électron, le photon incident transfère son énergie à l'électron favorisant ainsi son expulsion. Cette hypothèse fut reprise par **PLANCK**¹⁵ qui exprima la valeur de cette énergie et donna naissance à **la théorie des quanta d'énergie**

3-Conditions d'obtention de l'effet photoélectrique

a-A partir de l'énergie du photon incident

Il y a effet photoélectrique quand l'énergie du photon incident (énergie émise par la source lumineuse) est **supérieure ou égale** à l'énergie d'extraction du métal (**énergie minimale, énergie seuil**). Soit E_o l'énergie seuil du métal à étudier et E l'énergie du photon incidente :

$$E \geq E_o$$

N.B. : On appelle « **travail d'extraction** » ou « **travail de sortie** » W_s (ou W_o) l'énergie que le photon doit fournir à l'électron pour l'arracher au réseau métallique. L'émission aura lieu si :

$$W \geq W_s$$

avec W : travail du photon incident.

b-A partir de la fréquence

Il y a effet photoélectrique quand la fréquence ν du photon incident est **supérieure ou égale** à la fréquence seuil ν_o ou fréquence minimale du métal :

$$E \geq E_o \Rightarrow h\nu \geq h\nu_o \Rightarrow$$

$$\nu \geq \nu_o$$

c-A partir de la longueur d'onde

Il y a effet photoélectrique quand la longueur d'onde seuil est **supérieure ou égale** à la longueur d'onde de la radiation utilisée :

$$E \geq E_o \Rightarrow h\nu \geq h\nu_o \Rightarrow \nu \geq \nu_o \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \geq \frac{1}{\lambda_o} \Rightarrow$$

$$\lambda_o \geq \lambda$$

¹⁴ **Albert EINSTEIN (1879-1955), Physicien Américain d'origine Allemande.**

¹⁵ **Max PLANCK (1858-1947), Physicien Allemand.**

4-Energie cinétique maximale et vitesse maximale de l'électron

a-Energie cinétique maximale de l'électron

C'est l'énergie de sortie (**d'éjection**) de l'électron de la cathode pour l'anode.

- Si $E < E_o$: Pas d'effet photoélectrique, l'électron n'est pas extrait du métal.
- Si $E = E_o$: Il y a effet photoélectrique, l'électron est extrait mais il sort sans vitesse initiale.
- Si $E > E_o$: Il y a effet photoélectrique. L'excès d'énergie est utilisé par l'électron pour son

déplacement vers l'anode sous forme d'énergie cinétique. Le bilan d'énergie s'écrit donc :

$$E(\text{photon}) = E_o(\text{extraction}) + E_{C_{\max}} \Rightarrow E_{C_{\max}} = E - E_o = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_o}\right). \text{ D'où l'énergie}$$

cinétique maximale vaut donc :

$$E_{C_{\max}} = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_o}\right)$$

N.B. : $h = 6,62.10^{-34} \text{ J.s}$ est la **constante de PLANCK**.

b-Vitesse maximale de l'électron

C'est la vitesse de sortie (**vitesse d'éjection**) de l'électron de la cathode pour migrer vers l'anode

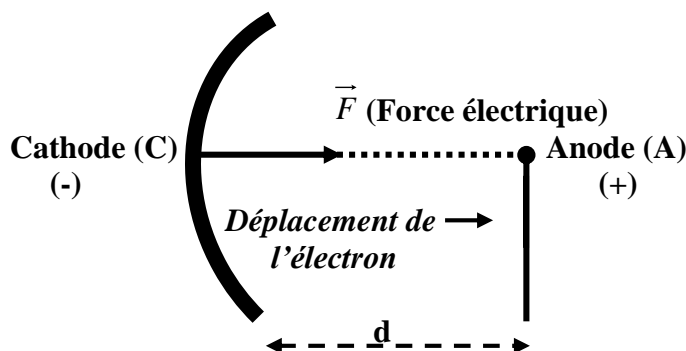
$$E_{C_{\max}} = \frac{1}{2} m_e V_{\max}^2 = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_o}\right) \Rightarrow$$

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{2E_{C_{\max}}}{m_e}} = \sqrt{\frac{2hc}{m_e} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_o}\right)}$$

N.B. : $m_e = 9,1.10^{-31} \text{ Kg}$ est la **masse de l'électron**.

5-Vitesse d'arrivée de l'électron à l'anode

C'est la vitesse avec laquelle l'électron expulsé de la cathode atteint l'anode (**vitesse finale**).



Référentiel : *Terrestre supposé Galiléen (TSG)*

Système : *Electron de masse m.*

Bilan des forces : \vec{F}

$$\text{TEC} : \Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{\text{ext}}) \Rightarrow E_{C_2} - E_{C_1} = W(\vec{F})$$

$$\text{Projection} : \frac{1}{2} m_e V_A^2 - \frac{1}{2} m_e V_{\max}^2 = \vec{F} \cdot \vec{CA} = F \cdot d = |q| \cdot E \cdot d = e \frac{(V_A - V_C)}{d} d = e U_{AC}$$

Soit après transformations mathématiques :

$$V_A = \sqrt{V_{\max}^2 + \frac{2eU_{AC}}{m_e}}$$

6-Intensité ou courant de saturation I_s

C'est l'**intensité maximale** atteinte quand tous les électrons extraits de la cathode par la lumière monochromatique sont captés par l'anode.

La quantité d'électricité parcourue par un courant d'intensité I_s pendant un temps t est

$$Q = I_s \cdot t = ne \Rightarrow I_s = \frac{n \cdot e}{t}$$

Or les expériences sur l'effet photoélectrique se font généralement pendant un temps $t = 1s$.

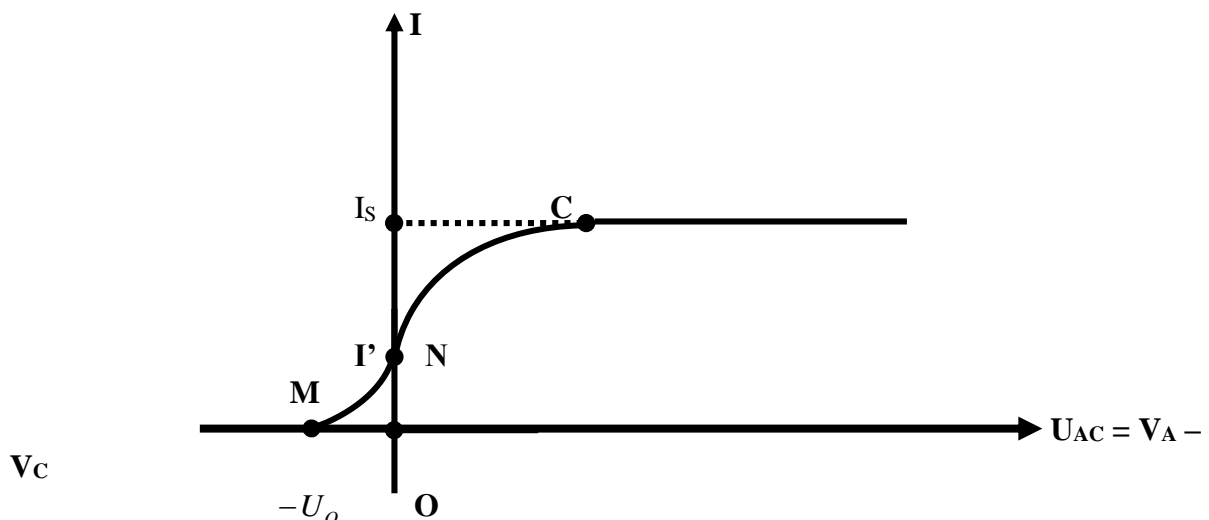
D'où : $I_s = n \cdot e$

n : nombre (flux) d'électrons extraits et $e = +1,6 \cdot 10^{-19} C$, charge élémentaire. Dans le SI, I_s s'exprime en **Ampères (A)**.

II-ETUDES DES CARACTERISTIQUES

1-Forme des caractéristiques

L'intensité du courant I augmente avec la tension $U_{AC} = V_A - V_C$. En faisant varier la tension $U_{AC} = V_A - V_C$ entre anode et cathode, il est possible de tracer la courbe $I = f(U_{AC})$, appelée **caractéristiques tension-courant de la cellule**



A quoi correspondent physiquement les différentes parties de cette caractéristique ?

- Pour $U_{AC} = 0$: il y a un courant circulant dans le circuit, des électrons sont émis par la cathode

et ils arrivent sur l'anode (point N de la courbe, de coordonnées $U_{AB} = 0, I = I'$). Le point N représente donc l'intensité du courant quand aucune d.d.p. n'est imposée entre anode et cathode

- Le point C représente la tension pour laquelle on obtient la saturation. Au-delà de cette tension, l'intensité du courant n'augmente plus.

- U_o représente le **potentiel d'arrêt** en dessous duquel aucun électron émis par la cathode n'atteint l'anode.

- Pour $U_{AC} > 0$: les électrons sont attirés par l'anode. Le champ électrique \vec{E} existant entre A et

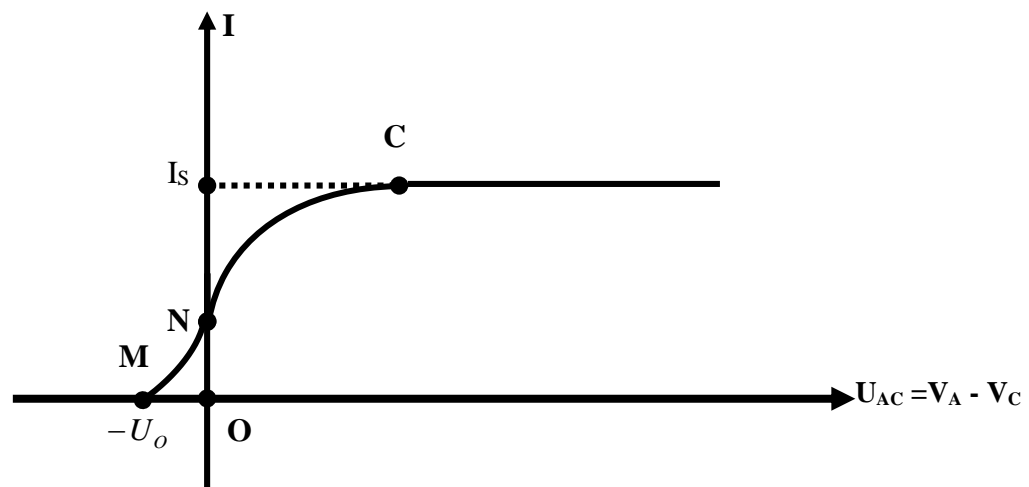
C les soumet à une force électrique \vec{F} dirigée de C vers A donnant naissance à un courant. Quand la **totalité** des électrons arrive à l'anode, on atteint le palier correspondant au courant de saturation I_s .

- Pour $U_{AC} < 0$: Les électrons extraits du métal sont freinés par le champ électrique \vec{E} car \vec{F} les repousse vers la cathode (point M, de coordonnées $U_{AC} = -U_o, I = 0$). Au-delà, c'est-à-dire

pour $U_{AC} < U_o$, on a évidemment $I = 0$.

2-Potentiel ou tension d'arrêt de la cellule (U_o)

C'est la tension qui empêche tous les électrons extraits de la cathode d'atteindre l'anode c'est-à-dire tous les électrons issus de C sont repoussés par A, et par conséquent, aucun courant ne peut circuler dans le circuit.



Au point M : $U_{AC} = V_A - V_C = -U_o$. Parmi tous les électrons repoussés par A se trouvent ceux qui avaient à la sortie de C une **énergie cinétique maximale**.

Référentiel : *Terrestre supposé Galiléen (TSG)*

Système : *Electron de masse m.*

Bilan des forces : \vec{F}

$$\text{TEC} : \Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{ext}) \Rightarrow E_{C2} - E_{C1} = W(\vec{F})$$

$$\text{Projection} : \frac{1}{2} m_e V_A^2 - \frac{1}{2} m_e V_{\max}^2 = \vec{F} \cdot \vec{CA} = F \cdot d = q \cdot E \cdot d = (-e) \frac{(V_C - V_A)}{d} d = -e U_o$$

Or $V_A = 0$ car les électrons n'atteindront pas l'anode : $-\frac{1}{2} m_e V_{\max}^2 = -e U_o$.

D'où le potentiel d'arrêt sera donc :

$$U_o = \frac{m_e V_{\max}^2}{2e} = \frac{E_{C \max}}{e}$$

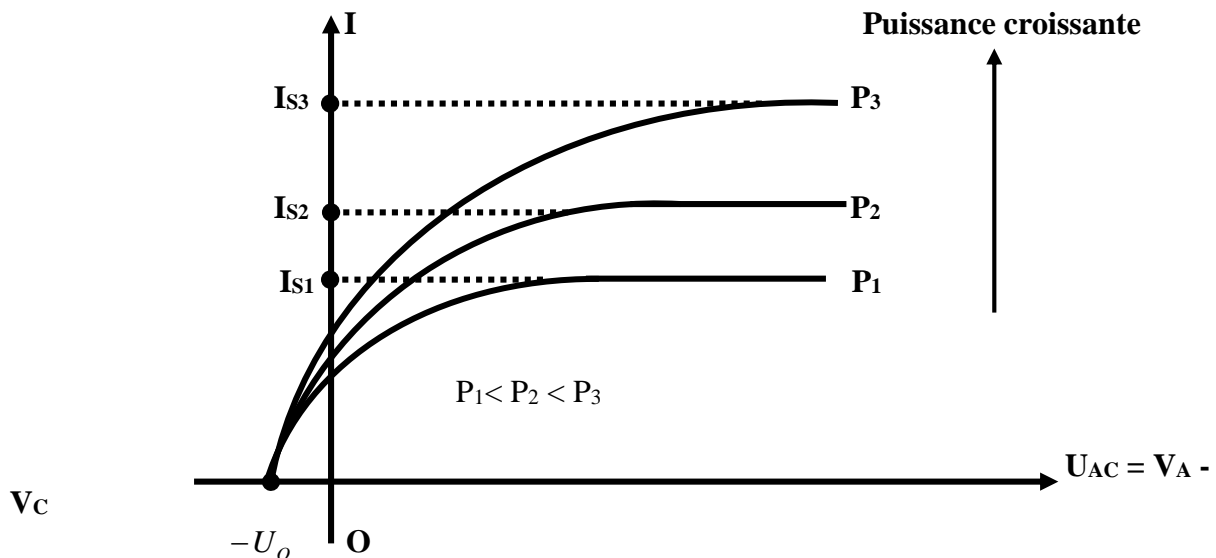
La mesure de U_o permet de connaître l'énergie cinétique des électrons émis par l'effet photoélectrique.

N.B. : $E_{C \max} = hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_o} \right)$ or $E_{C \max} = e U_o \Rightarrow$

$$U_o = \frac{hc}{e} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_o} \right) = \frac{h}{e} (\nu - \nu_o)$$

3-Influence de la puissance lumineuse reçue par la cathode

En variant l'éclairement, sans changer la fréquence, on constate que l'intensité du courant de saturation I_s est proportionnelle à la puissance lumineuse (ou flux lumineux). Ceci permet de mesurer les intensités lumineuses par les cellules photoélectriques. Si nous répétons les mesures pour des faisceaux de différentes longueurs d'ondes, nous constatons que la valeur du potentiel d'arrêt U_o pour un métal donné ne **change pas** ainsi que la vitesse maximale des électrons.



■ Pour un photon arrivant sur la cathode, la puissance lumineuse reçue par la cathode est :

$$P = \frac{W}{t} = \frac{E}{t} \text{ or pour l'effet photoélectrique } t = 1s \Rightarrow P = E = h\nu = \frac{hC}{\lambda}$$

- Pour N photons arrivant sur la cathode, la puissance lumineuse est

$$P = NE = \frac{NhC}{\lambda}$$

Dans le SI, la puissance du faisceau incident s'exprime en **WATT**¹⁶ (W).

4-Rendement quantique de la cellule

Bien que possédant l'énergie nécessaire, tous les photons incidents ne sont pas utilisés : il y a moins d'électrons émis que de photons incidents. On est donc amené à évaluer le rendement quantique de la cellule.

Soit N le nombre de photons incidents par unité de temps et n le nombre d'électrons émis par la cathode pendant cette même unité de temps, le rendement quantique de la cellule est le **rapport** du nombre d'électrons émis sur le nombre de photons incidents.

$$r = \frac{n}{N} \text{ or } n = \frac{I_s}{e} \text{ et } N = \frac{P\lambda}{hC} \Rightarrow \boxed{r = \frac{I_s \cdot h \cdot C}{e \cdot P \cdot \lambda}}$$

En pratique, le rendement est très faibles, de l'ordre de 10^{-2} . Autrement dit, seul **un photon sur une centaine** déclenche l'expulsion d'un électron de la cathode par effet photoélectronique.

Remarque : Pour une cellule donnée, on a $I_s = ne = rNe = \frac{reP}{h\nu}$ soit encore $I_s = KP$. Le courant de saturation d'une cellule est directement proportionnel à la puissance lumineuse reçue, ce qui est bien en accord avec les résultats du paragraphe 3.

5-Sensibilité d'une cellule photoélectrique

L'intensité du courant de saturation I_s est proportionnelle à la puissance P transportée par le faisceau lumineux. On appelle sensibilité d'une cellule photoélectrique le rapport :

$$\boxed{S = \frac{I_s}{P}}$$

Dans le SI, S s'exprime en **Ampère**¹⁷/**Watt** (A/W ou A.W⁻¹).

Or $P = Nh\nu$ et $I_s = ne$, en supposant que chaque photon arrache un électron : $n = N$ on a :

$$\boxed{S = \frac{I_s}{P} = \frac{ne}{nh\nu} = \frac{e}{h\nu} = \frac{e\lambda}{hC}}$$

III-INTERPRETATION THEORIQUE DU PHENOMENE : LE PHOTON

Les échanges d'énergie entre le rayonnement et la matière se font d'une manière discontinue par quanta. Un **quantum** est un « paquet d'énergie », et la quantité d'énergie de chaque quantum est :

$E = h\nu$. Après la découverte de l'**effet Compton**, on admet que la lumière ne doit pas être considérée comme une **onde électromagnétique progressive** mais comme un faisceau de particules : **les photons (grains de lumière)**, d'après **EINSTEIN**. Chaque photon transportant son énergie propre : le quantum d'énergie $E = h\nu$.

¹⁶ **James WATT (1736-1855), Inventeur, ingénieur et mécanicien Ecossais**

¹⁷ **André Marie AMPERE (1775-1836), Physicien et chimiste Français. Fondateur de l'électromagnétisme.**

Le photon est une particule élémentaire, sa masse est nulle, sa charge électrique aussi, mais il possède une quantité de mouvement et une énergie. Sa vitesse dans le vide est toujours égale à $C = 3.10^8 \text{ m/s}$. Un flux lumineux peut être considéré comme constitué d'un faisceau de photons. Avec cette interprétation, l'effet photoélectrique consiste en une multitude d'effets élémentaires : le choc d'un photon incident avec un électron de la cathode, le transfert de l'énergie du photon à l'électron et l'expulsion de ce dernier du métal. La théorie ondulatoire est impuissante à expliquer ce phénomène car comment ne pas s'étonner que le **phénomène du seuil** ait lieu indépendamment de la puissance lumineuse reçue, comme si très peu de lumière suffisait, pourvu qu'elle possède l'énergie nécessaire pour le déclencher ? *Le photon est à la base de l'interprétation de la nature ondulatoire de la lumière.*

IV-APPLICATIONS DE L'EFFET PHOTOELECTRIQUE

L'effet photoélectrique présente de très nombreuses applications dans différents domaines. On peut distinguer deux grands groupes d'application de l'effet photoélectrique :

- Les **cellules photoélectriques** qui permettent la circulation d'un courant électrique sous l'effet de la lumière. On en trouve dans : les caméscopes (caméras de télévision), les photomultiplicateurs...
- Les **cellules photovoltaïques** ou **photopiles** qui produisent directement de l'énergie électrique à partir d'énergie lumineuse. Elles sont présentes dans de nombreux dispositifs connus : « œil électrique » de portes automatiques, d'ascenseurs, d'escalators, « posemètres » en photographie, capteurs solaires des satellites et centrales solaires...

C- DUALITE ONDE-CORPUSCULE : CONCLUSION

Nous avons vu que l'aspect ondulatoire de la lumière permet d'expliquer les phénomènes d'interférences, alors que l'aspect corpusculaire rend compte de l'émission photoélectrique. Les deux aspects apparaissent ainsi comme **complémentaires** car :

- On utilise l'aspect ondulatoire pour les phénomènes observés à l'échelle macroscopique.
- Par contre à l'échelle microscopique c'est l'aspect ondulatoire qui prédomine.

La complémentarité des deux aspects est à la base de la théorie actuelle de la **mécanique ondulatoire** ou **physique quantique** développé avec succès par le physicien Français **Louis de BROGLIE**¹⁸ et ce fut l'objet de sa thèse de doctorat soutenue en 1924.

¹⁸ **Louis de BROGLIE (1892-1987), Physicien Français.**

ELECTRODYNAMIQUE

O.G.1 : ETUDE D'UN CIRCUIT ELECTRIQUE EN COURANT ALTERNATIF

O.S.1 : Caractériser le courant alternatif.

LE COURANT ALTERNATIF

1. Définition

Un courant alternatif est un courant dont la loi horaire est une fonction sinusoïdale du temps : $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ où $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$

2. Les caractéristiques du courant alternatif sinusoïdal

Un courant alternatif est caractérisé par :

a. Son amplitude :

C'est la valeur maximale de l'intensité du courant, on la note I_m , elle s'exprime en ampère de symbole (A).

b. Sa période :

C'est le temps au bout duquel la courbe devient identique à elle-même, on le note par T et s'exprime en seconde de symbole (s).

c. Sa fréquence

C'est l'inverse de la période, c'est-à-dire le nombre d'oscillation par unité de temps, on la note par f ou N , elle s'exprime en hertz de symbole (Hz)

d. Sa pulsation

Elle est liée à la fréquence et à la période par les relations $\omega = 2\pi f$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$, elle s'exprime en radian par seconde ($rad. s^{-1}$)

e. La phase :

C'est la quantité $\omega t + \varphi$, elle s'exprime en radians (rad)

f. La phase initiale

C'est la phase à l'instant initial $t=0$, elle est noté φ et s'exprime en radians (rad)

3. Relation entre valeur efficace et valeur maximale

L'intensité efficace I d'un courant alternatif est l'intensité d'un courant continu qui, passant dans le même conducteur, fournit, pendant chaque période, la même quantité de chaleur que le courant alternatif. Elle est liée par l'intensité maximale par la relation : $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$. Elle s'exprime en ampère de symbole (A)

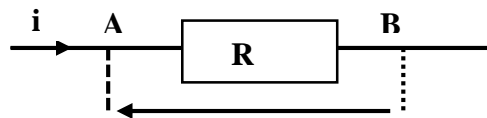
De même la tension efficace U , à partir de la tension maximale $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$. Elle s'exprime en volt de symbole (V).

O.S.2 : Appliquer la loi d'OHM en courant alternatif

LOIS D'OHM EN COURANT ALTERNATIF

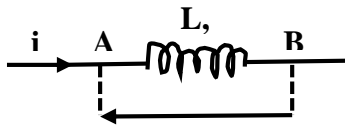
1. Aux bornes d'un conducteur ohmique (résistant)

Un conducteur ohmique est d'un dipôle qui transforme toute l'énergie électrique reçue en énergie calorifique ((par effet joule).



$$u_R = Ri = RI_m \cos \omega t = U_m \cos \omega t \text{ avec } U_m = RI_m$$

2. Aux bornes d'une borne inductive



$$u_L = ri - e \text{ or } e = -L \frac{di}{dt} \Rightarrow u_L = ri + L \frac{di}{dt} \text{ avec}$$

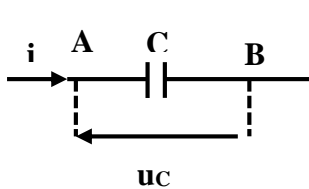
$$i = I_m \cos \omega t \text{ or } \frac{di}{dt} = -\omega I_m \sin \omega t \text{ or } \sin \omega t = \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = \omega I_m \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

d'où
$$u_L = rI_m \cos \omega t + \omega I_m L \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

Si la bobine est pure (cas très rare) $r = 0$ et on a
$$u_L = \omega L I_m \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

3. Aux bornes d'un condensateur



$$u_C = \frac{q}{C} \text{ or } i = \frac{dq}{dt} \text{ (à la charge)}$$

$$q = \int_0^t i dt = \frac{I_m}{\omega} \sin \omega t = \frac{I_m}{\omega} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

D'où :
$$u_C = \frac{q}{C} = \frac{I_m}{C\omega} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

4. L'impédance d'un circuit

C'est le rapport entre la tension et l'intensité, elle s'exprime en ohms (Ω).
$$Z = \frac{U}{I}$$

$$Z = \sqrt{(R + r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$$

5. Le déphasage

Le déphasage est la différence de phase entre la tension u et l'intensité i du courant. L'angle φ représente la phase de u par rapport à i .

- Si $\varphi > 0$, on dit que u est en avance de phase φ sur i ou encore i est en retard de φ sur u .
- Si $\varphi < 0$, on dit que u est en retard de phase φ sur i ou encore i est en avance de φ sur u .

Remarque : aux bornes d'un conducteur ohmique, u et i sont en phase $\varphi = 0$

Aux bornes d'une inductance pure, u est en avance de $\varphi = \frac{\pi}{2}$ sur i

Aux bornes d'un condensateur, u est en retard de $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ sur i

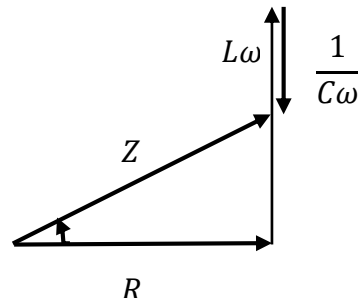
6. Construction de FRESNEL

Cas d'un circuit RLC : résonance série

- Si $L\omega > \frac{1}{C\omega}$ L'effet inductif l'emporte sur l'effet capacitif, $u(t)$ est en avance sur $i(t)$

$$\tan \varphi = \frac{LI_m\omega - \frac{I_m}{C\omega}}{RI_m} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \text{ avec } \varphi > 0$$

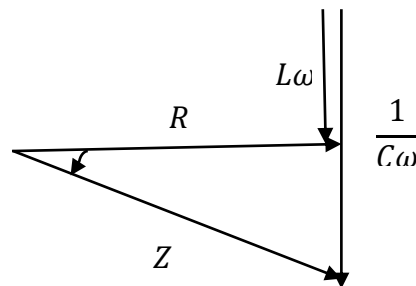
$$\text{Et } \cos \varphi = \frac{RI_m}{I_m \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$



- Si $L\omega < \frac{1}{C\omega}$ L'effet capacitif l'emporte sur l'effet inductif $u(t)$ est en retard sur $i(t)$

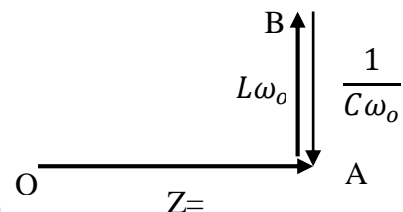
$$\tan \varphi = \frac{LI_m\omega - \frac{I_m}{C\omega}}{RI_m} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \text{ avec } \varphi < 0$$

$$\text{Et } \cos \varphi = \frac{RI_m}{I_m \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$



- Si $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ L'effet capacitif et l'effet inductif se compense : c'est la résonance

- $\varphi = 0$
- $\cos \varphi = 1$ le facteur de puissance est maximal
- $u(t)$ et $i(t)$ sont en phase
- $Z=R$, L'impédance est minimale
- $I_o = \frac{U}{Z_o} = \frac{U}{R}$ l'intensité du courant est maximale
- $L\omega_o = \frac{1}{C\omega_o} \Rightarrow LC\omega_o^2 = 1 \Rightarrow \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\omega_o = \omega$ est la pulsation propre du circuit



7. Courbe de résonance

a. Bande passante

On définit la bande passante par la valeur : $\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1| = \frac{R}{L}$ ou

$$\Delta f = |f_2 - f_1| = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{R}{2\pi L}$$

b. facteur de qualité

Le facteur de qualité d'un circuit est : $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$

O.S.1.3 : Déterminer la puissance électrique en courant alternatif.

PUISSANCE EN COURANT ALTERNATIF

1. Puissance instantanée

La puissance instantanée échangée aux bornes d'un dipôle est $P = u \cdot i$ elle s'exprime en watts (**w**) avec u et i la tension et l'intensité instantanée.

2. Puissance moyenne

La puissance se mesure à l'aide d'un wattmètre. La puissance moyenne est le produit de deux facteurs :

- U.I, appelé *puissance apparente* du circuit ; et qui s'exprime en volt-ampère (V.A)
- $\cos \varphi$, appelé *facteur de puissance*. $P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$ avec $\cos \varphi = \frac{\Sigma R}{Z}$

CHIMIE

O.G.1 : Utiliser les lois relatives aux masses molaires et les méthodes de séparation des isotopes pour l'analyse des substances

LES LOIS RELATIVE AUX MASSES MOLAIRES ET SEPARATION DES ISOTOPES

O.S.1-1 : Déterminer la masse molaire

I. Définitions

1. La mole :

La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaire qu'il y'a d'atomes dans 12g de carbone 12 : les entités élémentaires sont : les atomes, les molécules, les ions, les électrons.

2. La masse molaire atomique :

La masse molaire atomique d'un élément est la masse d'une mole d'atomes de cet élément. Elle s'exprime en g/mol où $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

3. La masse molaire moléculaire

La masse molaire moléculaire d'une substance est la masse d'une mole de molécule de cette substance. On l'obtient en faisant la somme des masses molaires atomiques des atomes présents dans la molécule ; elle s'exprime en g/mol

Exemple : $\text{MC}_2\text{H}_5\text{OH} = 2.\text{MC}+5.\text{MH}+\text{MO}+\text{MH}=46\text{g/mol}$

4. Mole de molécules

Dans une mole, toutes les molécules sont identiques ; elles sont au nombre de $6,02.10^{23}$. Une mole de molécule est donc un ensemble de $6,02.10^{23}$ molécules identiques.

N.B : la quantité de matière :

$$n = \frac{m}{M} = \frac{V}{V_m} = \frac{N}{N_A}$$

\Rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} n: \text{nombre de mole en mol} \\ m \text{ et } M: \text{masse et masse molaire du substance en g et en g/mol} \\ V \text{ et } V_m: \text{volume et volume molaire en l et en l/mol} \\ N \text{ et } N_A: \text{nombre d'atomeet nombre d'Avogadro} \end{array} \right.$

5. Le volume molaire :

C'est le volume occupé par une mole de matière. A l'état gazeux, dans les conditions normales de température et de pression $V_m = 22,4\text{l/mol}$

O.S.1-2 : Etablir la loi d'Avogadro-Ampère

I.

II. La loi d'Avogadro – Ampère

1. Enoncé : dans les mêmes conditions de température et de pression, toutes les moles gazeuses occupent un même volume. Ce volume est appelé volume molaire.

2. Densité d'un gaz par rapport à l'air

C'est le rapport entre la masse d'un certain volume de gaz et la masse du même

volume d'air.
$$\boxed{d = \frac{m}{m'} = \frac{M}{29}} \Rightarrow \begin{cases} m: \text{masse du gaz ou du substance en } g \\ m': \text{masse d'air chassé en } g \\ M: \text{masse molaire du substance en } g/mol \end{cases}$$

3. Lois des gaz parfaits :

Un gaz est dit parfait lorsqu'il obéit aux lois de Boyle-Mariotte ; Gay-Lussac et de Charles.

a. Loi de Boyle-Mariotte :

A température constante et pour une quantité de gaz donnée, le produit de la pression **P** du gaz par son volume **V** est égal au volume constant : **P.V = cst.**

Soit : $P.V = P_o V_o$

b. Loi de Gay Lussac

A pression constante, le volume d'une masse de gaz parfait est proportionnel à

la température : $\frac{V}{T} = \text{cst}$; soit: $\frac{V}{T} = \frac{V_o}{T_o}$

c. Loi de Charles

A volume constante, la pression d'une masse donnée de gaz est proportionnelle

à la température : $\frac{P}{T} = \text{cst}$; soit: $\frac{P}{T} = \frac{P_o}{T_o}$

De ces trois lois se résume une équation appelée **l'équation d'état des gaz parfaits**

$$\boxed{P.V = n.R.T} \quad (1^{ere} \text{ forme})$$

$$\boxed{\frac{P.V}{T} = \frac{P_o V_o}{T_o}} \quad (2^{eme} \text{ forme})$$

O.S.1-3 : appliquer la loi d'Avogadro-Ampère à la détermination d'une masse molaire

III. Loi d'Avogadro-Ampère à la détermination d'une masse molaire

1. Cas des gaz :

$$\boxed{M = 29*d}$$

2. Cas des liquides : méthode de Meyer

Cette méthode s'applique à des liquides volatiles. On introduit une masse connue **m** de liquide volatil dans un appareil où la température élevée le vaporise immédiatement. La vapeur libère le volume d'air hors du récipient. Le tube gradué sert à recueillir un volume d'air **V_o**.

$$\text{Alors } V_o = \frac{P.V.T_o}{P_o.T} = \frac{(H-f-\frac{h}{13,6}).V.T_o}{P_o.T}$$

Calcul de la densité

$$d = \frac{m}{m'} = \frac{m}{a_o \cdot V_o} = \frac{m \cdot P_o \cdot T}{a_o \cdot P \cdot V \cdot T_o} = \frac{m \cdot P_o \cdot T}{a_o \cdot \left(H - f - \frac{h}{13,6} \right) \cdot V \cdot T_o}$$

$a_o=1,293\text{g/mol}$ masse volumique d'air. **P** : Pression de gaz à la température T
V : volume de gaz à la température T. $T=t^\circ + T_o$; avec $T_o = 273^\circ\text{K}$ et t° la température en $^\circ\text{C}$;

$P_o=1\text{atm.}=760\text{mmHg}=76\text{cmHg}=1,013 \cdot 10^5\text{Pa}$

R : constante des gaz parfait, si $R=8,314$; P en Pa et V en m^3 . Si $R=6,236$; P en mmHg ou cmHg et V en l. Si $R=0,082$; P en atm. et V en l.

H : pression atmosphérique. **f** : pression saturante d'eau

h : hauteur d'eau dans l'éprouvette

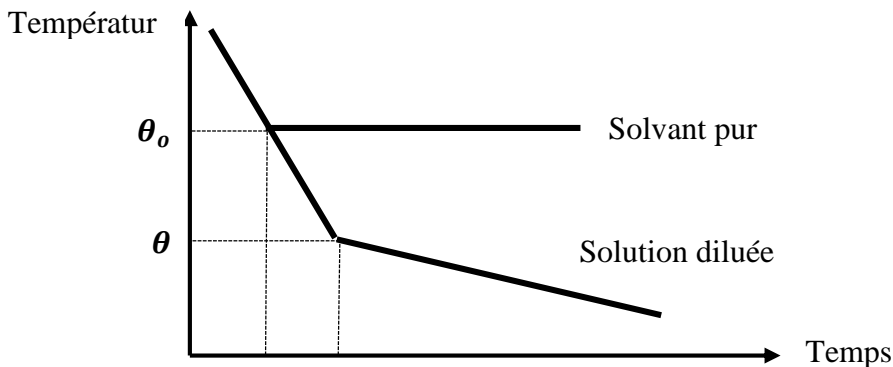
O.S.1-4 : Appliquer la loi de Raoult à la détermination d'une masse molaire.

IV. Loi de Raoult relative aux solutions diluées

1. La cryométrie

La cryométrie est l'étude de la solidification (ou de la congélation) des solutions

- Le solvant se solidifie à une température θ_o qui reste constante pendant toute la durée de la solidification.
- La solution se congèle à une température θ qui baisse tout au long de la solidification.
- L'abaissement cryométrique d'une solution diluée est proportionnel à la concentration massique de la solution et inversement proportionnel à la masse molaire du soluté



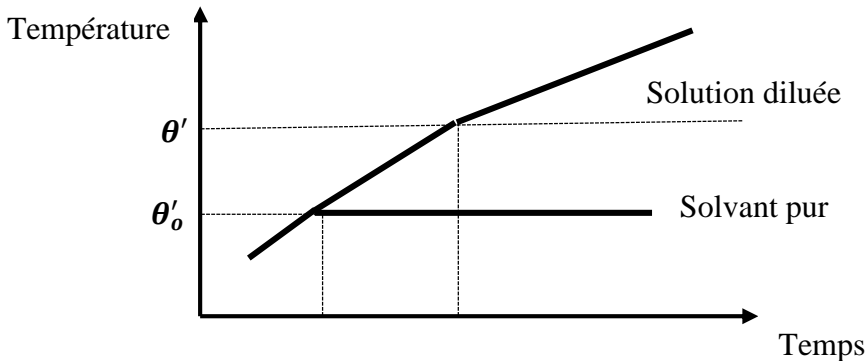
$$\Delta\theta = K \frac{C}{M} = K \frac{m}{M \cdot m'} = K \frac{n}{m'} \quad \text{avec:} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\theta = \theta_o - \theta \\ C = \frac{m}{m'} \text{ et } n = \frac{m}{M} \end{array} \right.$$

$\Delta\theta$: abaissement cryométrique de la solution. **K**: constante cryométrique du solvant
C: concentration massique de la solution; **M**: masse molaire du soluté. **m**: masse du soluté;
m': masse du solvant; θ_o : température de congélation commençante du solvant;
 θ : température du solvant commençante de la solution

2. L'ébulliométrie

L'ébulliométrie est l'étude de l'ébullition (ou de l'évaporation) des solutions

- La température θ'_0 reste constante durant toute l'ébullition pour le solvant
- Pour la solution, la température θ' augmente pendant toute la durée d'ébullition
- L'élévation ébulliométrie d'une solution diluée est proportionnelle à la concentration massique de la solution et inversement proportionnelle à la masse molaire du soluté.



$$\Delta\theta' = K' \frac{C}{M} = K' \frac{m}{M \cdot m'} = K' \frac{n}{m'} \quad \text{avec:} \quad \begin{cases} \Delta\theta' = \theta' - \theta'_0 \\ C = \frac{m}{m'} \text{ et } n = \frac{m}{M} \end{cases}$$

$\Delta\theta'$: élévation ébulliométrique de la solution. K' : constante ébulliométrique du solvant
 C : concentration massique de la solution; M : masse molaire du soluté. m : masse du soluté;
 m' : masse du solvant; θ'_0 : température d'ébullition commençante du solvant;
 θ' : température d'ébullition commençante de la solution

O.S.1-5 : Décrire les méthodes de séparation des isotopes

V. Méthodes de séparation des isotopes

La séparation des isotopes d'un élément chimique repose sur des différences de propriétés physiques que présentent les combinaisons d'un même élément avec ces différents isotopes et cela grâce à des méthodes physiques. Qui sont: Spectrographie de masse ; Diffusion gazeuse ; Ultracentrifugation ; Electrolyse

O.G.2 : CONNAITRE LE SPECTRE DE L'ATOME D'HYDROGENE

O.S.2-1 : Etablir les relations entre le nombre quantique principal et l'énergie d'un électron

I. MODELES ATOMIQUES

1. Modèle de RUTHERFORD (Ernest, 1871-1937)

Au terme de son expérience qui consistait à bombarder la feuille d'or de particules α (noyaux d'hélium ${}^4_2\text{He}$), **Rutherford** en conclua que la matière était essentiellement « **constituée par le vide** » c'est-à-dire que l'atome a une structure **lacunaire** et ce qui lui permit d'élaborer un **modèle de l'atome** appelé **modèle planétaire** qui stipule qu'un atome comprend :

- Un noyau très petit au centre chargé positivement.
 - Des électrons qui se déplacent autour du noyau chargés négativement.
- Cependant **Rutherford** n'expliqua pas l'émission des radiations lumineuses (scintillations) Observées à l'écran fluorescent de ZnS et son modèle ne fait nullement mention de niveaux d'énergie.

2. Modèle de BOHR (Niels, 1885-1962)

Le modèle atomique de **Rutherford** fut par la suite modifié par **Bohr**, qui introduisit la notion de « **niveaux d'énergie** ». S'inspirant des idées de **Max PLANCK** (Théorie des quanta, **1901**) et d'**Albert EINSTEIN** (Théorie de la relativité, **1905**), il va ainsi établir un modèle appelé **modèle de Bohr** de l'atome d'hydrogène ($Z = 1$) qui est le suivant :

- Les électrons ne gravitent que sur certaines orbites centrées autour du noyau privilégiées dites **stationnaires** et l'énergie d'un électron planétaire ne peut pas prendre n'importe quelle valeur mais uniquement une valeur déterminée dite **quantifiée**.
- Toute variation d'énergie de l'atome s'effectue par le saut de l'électron d'un niveau à un autre et la différence d'énergie entre deux niveaux correspond à **l'émission** ou à **l'absorption** d'un photon.

Bohr imagina ainsi une théorie du spectre de l'atome d'hydrogène, théorie confirmée par **Hertz** en 1914. Cependant ce modèle ne détermine pas avec exactitude la trajectoire elliptique des électrons et n'explique pas les spectres d'émission des atomes de $Z > 1$.

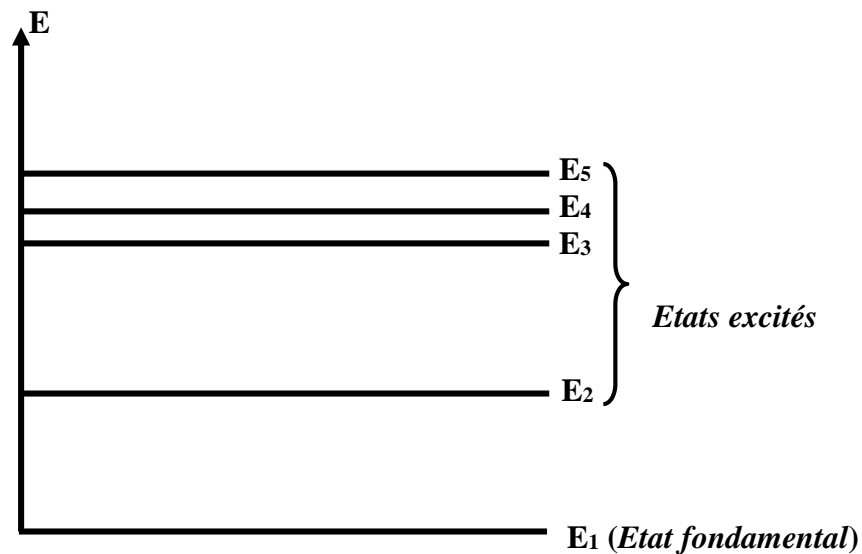
3. Modèle actuel de Louis De BROGLIE (1892-1987)

La création en 1924 de la **mécanique ondulatoire** a modifié l'interprétation sur la structure de l'atome. Alors **Louis De BROGLIE** proposa le modèle suivant : au lieu de **localiser** l'électron sur une trajectoire (inconnue car l'électron a plusieurs trajectoires) on évalue plutôt la **probabilité de présence** à un instant donné de cet électron dans un élément de volume c'est-à-dire il existe une région de l'espace autour du noyau où il y a la probabilité de le rencontrer au **maximum** et cette région constitue **l'orbitale atomique** attachée à cet électron : On arrive ainsi à la conception de l'atome constitué par un noyau positif entouré d'un nuage de charges négatives.

II. Niveaux d'énergie

Ce sont des valeurs caractéristiques de l'énergie des électrons sur chacun des couches électroniques entourant le noyau.

Lorsque l'électron est dans son état énergétique plus bas (E_1), on dit qu'il est dans son **état fondamental** (stabilité de l'atome) et les autres états portent le nom **d'états excités** (instabilité de l'atome).



N.B. : Un électron ne peut rester dans un état excité que pendant un très bref temps : de l'ordre de $10^{-8} s$ (10ns) et il revient ensuite à l'état fondamental (**désexcitation de l'électron**).

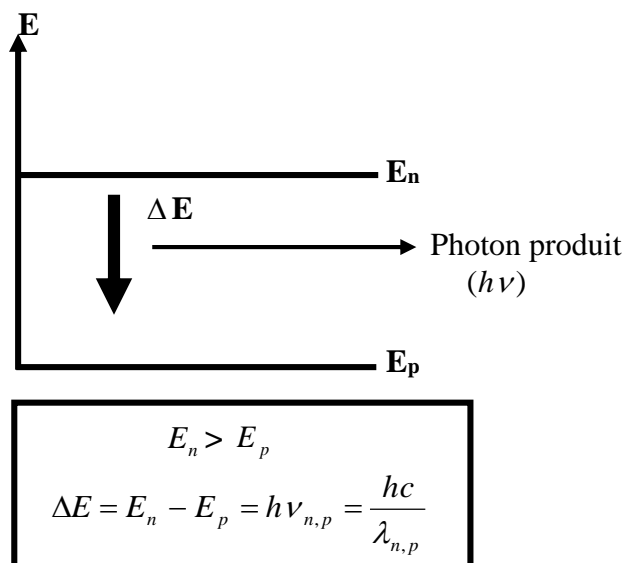
O.S.2-2 : Caractériser les transitions électroniques entre les différents niveaux d'énergie

III. Transitions électroniques

C'est le passage de l'électron d'un niveau d'énergie à un autre, conduisant à la variation de l'énergie de l'atome.

1. Emission d'un photon

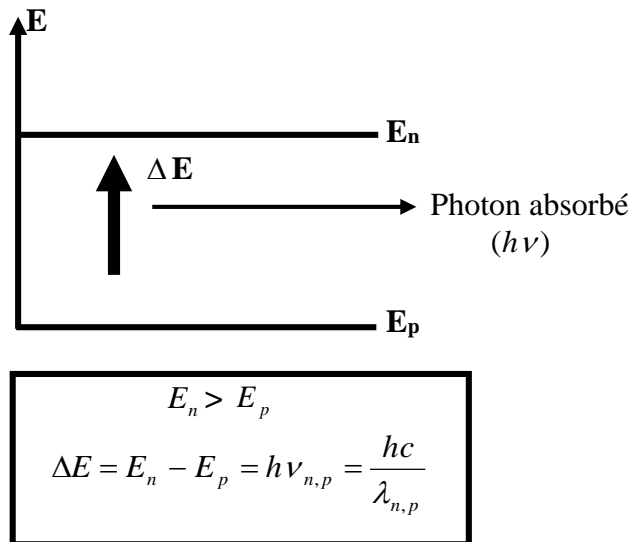
Il y a émission d'un photon quand l'électron passe d'un niveau d'énergie **supérieur** E_n à un niveau d'énergie **inférieur** E_p emportant l'énergie ΔE pour une fréquence $\nu_{n,p}$ telle que :



avec $h = 6,62.10^{-34} J.s$ (**constante de PLANCK**), $\nu_{n,p}$: fréquence de la radiation émise en (**Hz**) et $\lambda_{n,p}$ sa longueur d'onde (en **m**), avec $c = 3.10^8 m/s$.

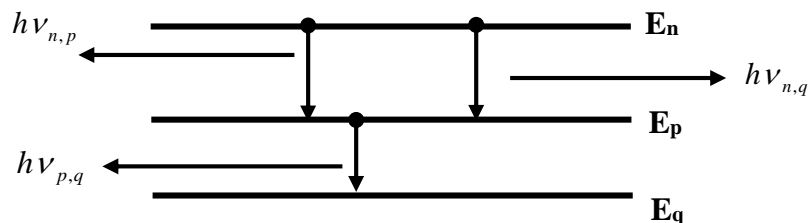
2. Absorption d'un photon

Il y a absorption d'un photon quand l'électron passe d'un niveau d'énergie **inférieur** E_p à un niveau d'énergie **supérieur** E_n lui fournissant l'énergie ΔE pour une fréquence $\nu_{n,p}$ est telle que :



3. Loi des combinaisons de RITZ

Dans un spectre d'émission (ou d'absorption) toute fréquence peut être considérée comme la **somme** ou la **différence** de deux autres fréquences du spectre.



$$E_n - E_q = (E_n - E_p) + (E_p - E_q) \Rightarrow h\nu_{n,q} = h\nu_{n,p} + h\nu_{p,q} \Rightarrow$$

$$\nu_{n,q} = \nu_{n,p} + \nu_{p,q}$$

Exemple d'application

Le spectre de l'hydrogène contient les raies de longueurs d'onde : $\lambda_\alpha = 656,3nm(H_\alpha)$, $\lambda_\beta = 486,1nm(H_\beta)$, $\lambda = 1875nm$. La loi de Ritz est-elle vérifiée ?

IV. Spectre de l'atome d'hydrogène

1-Niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène

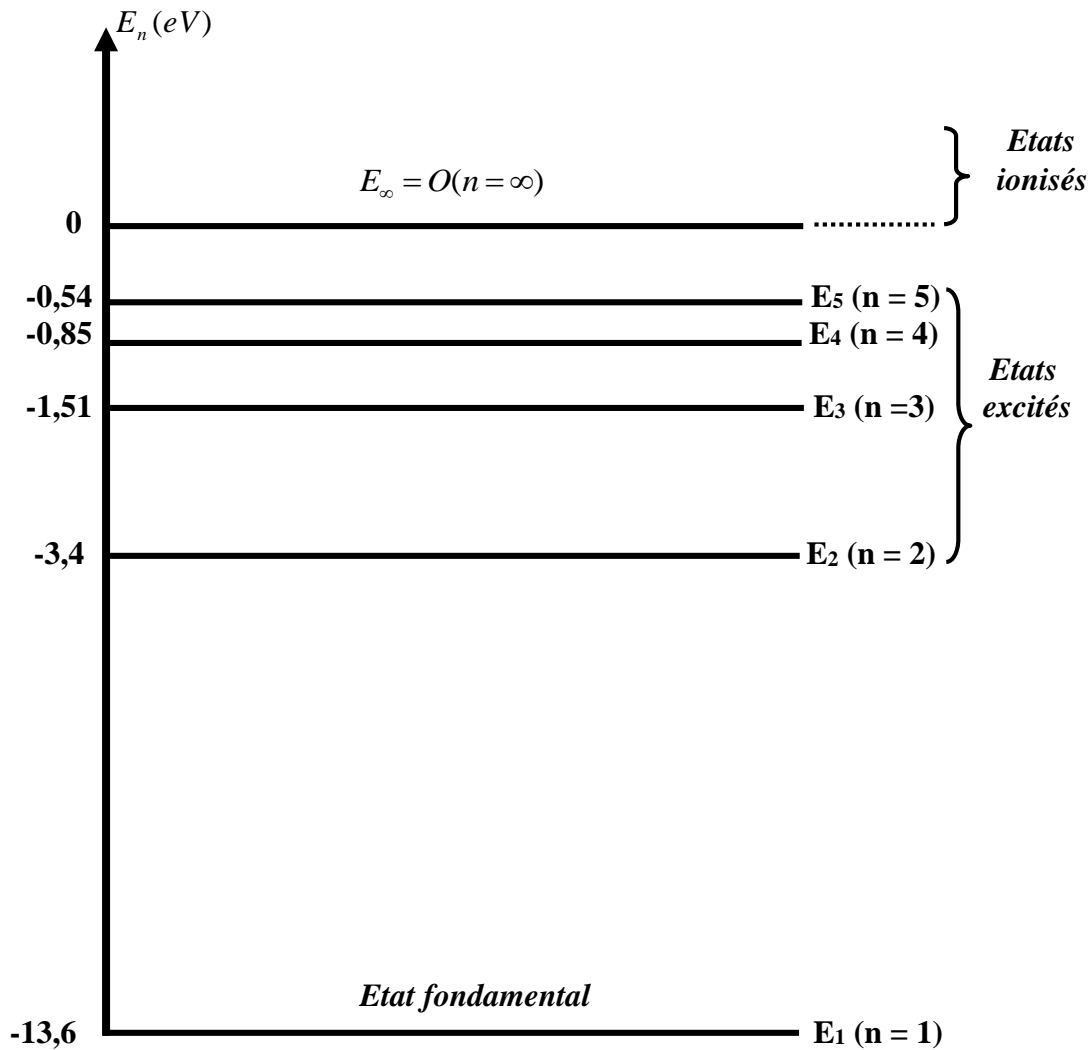
L'énergie des niveaux de l'atome d'hydrogène est défini par :

$$E_n = -\frac{E_o}{n^2}, n \in N^*$$

avec $E_o = 13,6eV = 2,18.10^{-18} J$ et n : nombre quantique principal.

Construisons alors (en **eV**) le **diagramme énergétique** de l'atome d'hydrogène :

n	1	2	3	4	5	∞
$E_n (eV)$	-13,6	-3,4	-1,51	-0,85	-0,54	0

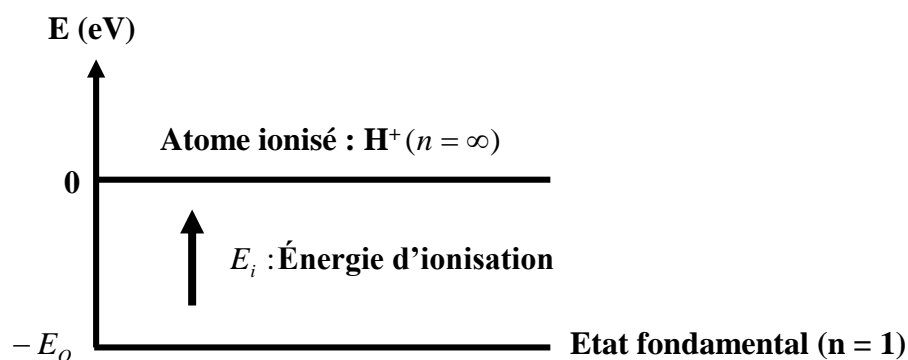


Remarque : Lorsque l'atome d'hydrogène est **ionisé H^+** (quand $n \rightarrow \infty, E_n \rightarrow 0$), son énergie est **positive ou nulle**. Elle est **négative** lorsqu'il est dans un **état lié** et les énergies des différents niveaux de l'atome d'hydrogène sont **négatives**.

2-Energie d'ionisation de l'atome d'hydrogène

C'est l'énergie **minimale** qu'il faut fournir à un atome d'hydrogène dans l'état fondamental pour lui arracher son électron et devenir un ion, soit :





La transition électronique nécessite qu'on fournisse l'énergie :

$$E_i = E(n = \infty) - E(n = 1) \Rightarrow E_i = 0 - (-E_0) = 0 - (-13,6) = 13,6eV$$

$$E_0 = E_i = 13,6eV = 2,18.10^{-18} J$$

3-Spectre d'émission de l'atome d'hydrogène

a-Définition d'un spectre

Un spectre est une bande composée d'une succession des séries raies multicolores ou non, traduisant des rayonnements électromagnétiques. Lorsqu'une transition s'effectue du niveau E_n au niveau E_p ($E_n > E_p$), il y a **émission du photon** d'énergie :

$$\Delta E = E_n - E_p = h\nu_{n,p} = \frac{hc}{\lambda_{n,p}}$$

N.B. : Une série de **raies** est constituée par l'ensemble des radiations émises par l'atome excité quand il revient à l'état stationnaire donné (fondamental ou excité).

b-Fréquence des radiations

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \text{ et } E_p = -\frac{E_0}{p^2} \Rightarrow E_n - E_p = -E_0 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) = h\nu_{n,p} \Rightarrow \nu_{n,p} = \frac{E_0}{h} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

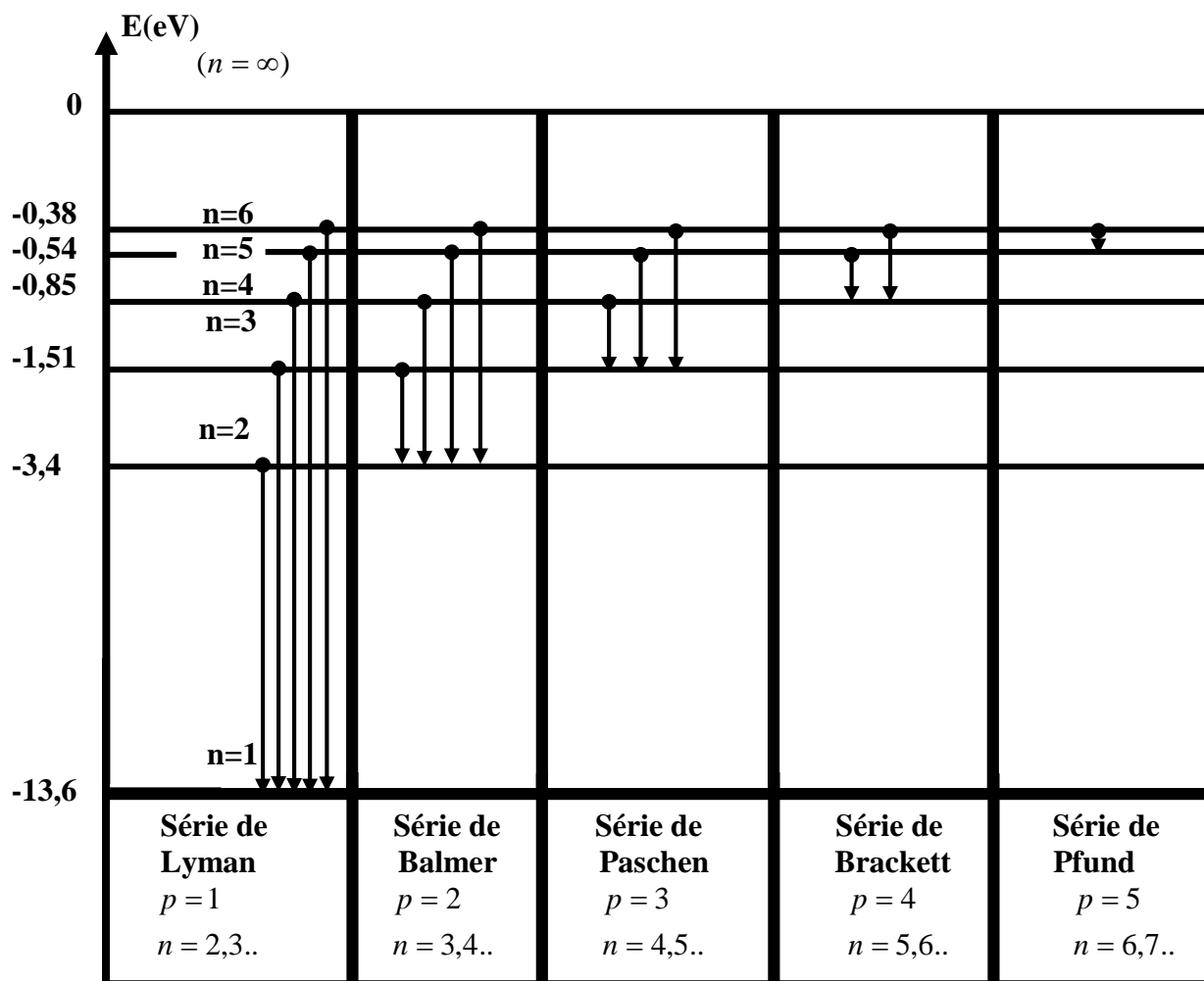
c-Longueurs d'onde des radiations

$$\lambda_{n,p} = \frac{c}{\nu_{n,p}} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_{n,p}} = \frac{\nu_{n,p}}{c} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_{n,p}} = \frac{E_0}{hc} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda_{n,p}} = R_H \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

où $R_H = \frac{E_0}{hc} = \frac{13,6.1,6.10^{-19}}{6,62.10^{-34}.3.10^8} = 1,095.10^7 m^{-1}$ porte le nom de **constante de Rydberg (1854-1919)**.

N.B. : Le **nombre d'onde** est l'inverse de la longueur d'onde et s'exprime en m^{-1} .

4-Diagramme spectral de l'atome d'hydrogène



4-Domains des radiations lumineuses

- La série de Lyman comporte des raies ultraviolettes (**U.V**) dont $\lambda < 0,4\mu\text{m}$ ou $\lambda < 400\text{nm}$
 - La série de Balmer comporte des raies visibles dont $0,4\mu\text{m} \leq \lambda \leq 0,8\mu\text{m}$
 - Les autres séries comportent des raies infrarouges (**I.R**) dont $\lambda > 0,8\mu\text{m}$ ou $\lambda > 800\text{nm}$
- Remarque :** $1\mu\text{m} = 10^{-6}\text{m}$; $1\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$; $1\text{A}^\circ = 10^{-10}\text{m}$

O.S.2-3 : Déterminer la longueur d'onde correspondant à une transition

Détermination des longueurs d'onde

$$\frac{1}{\lambda_{n,p}} = R_H \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{ Avec } R_H = 1,095.10^7 \text{ m}^{-1}$$

p ; n	p=1 ; n=2	p=1 ; n=3	p=2 ; n=3	p=2 ; n=4	p=3 ; n=4	p=4 ; n=5	p=5 ; n=6
$\lambda_{n,p}$	1,217.10⁻⁷m	1,027.10⁻⁷m	6,575.10⁻⁷m	4,870.10⁻⁷m	18,786.10⁻⁷m	40,584.10⁻⁷m	74,733.10⁻⁷m

O.S.2- : Donner des exemples d'applications des spectres atomiques

V. Exemples d'application des spectres atomiques

1. Analyse chimique :

- Si l'analyse spectroscopique de la lumière reçue d'une étoile contient une radiation de longueur d'onde 589nm, on peut affirmer qu'elle contient du sodium. Si elle contient une radiation de longueur d'onde 486,1nm, on peut affirmer qu'elle contient de l'hydrogène
- L'analyse du spectre de la lumière envoyée par une source peut également nous permettre de savoir si la source est : froide ; chaude ; très chaude
- On peut également connaître les éléments présents dans une solution, la couleur de la lumière produite par la flamme peut être analysée.

2. La production des lampes :

La connaissance des spectres atomiques permet de produire des lampes et particulièrement des lampes à infrarouge (**I.R**) et à ultraviolet (**U.V**)

O.G.3 : CONNAITRE LES PROPRIETES DES REACTIONS NUCLEAIRES

O.S.3-1 : Montrer l'influence de l'énergie de liaison par nucléon sur la stabilité des noyaux

I – RAPPELS SUR L'ATOME D'UN ELEMENT CHIMIQUE

1-Constituants de l'atome

L 'atome d'un élément chimique **X** comprend un **noyau** composé de **Z protons** chargés positivement ($Z \geq 1$) et de **N neutrons** de charge nulle ($N \geq 0$) autour duquel se situe le nuage électronique où gravitent **Z électrons**. Protons et neutrons constituent des **nucléons**. Soit $A = Z + N$. Le noyau d'un atome d'un élément chimique **X** est symbolisé par ${}^A_Z X$.

Exemple : Donner la composition des noyaux suivants : ${}^{35}_{17}Cl$; ${}^{31}_{15}P$; ${}^{12}_6C$.

2-Valeurs des masses caractéristiques

Pour exprimer les masses, les Physiciens nucléaires utilisent une unité adaptée à la faible valeur de la masse des nucléons : **l'unité de masse atomique** (symbole u) qui est par définition égale à un douzième de la masse atomique de l'atome de carbone 12.

$$1u = \frac{1}{12} m_{at}({}^{12}_6C) \text{ or } m_{at}({}^{12}_6C) = \frac{A}{N} \Rightarrow 1u = \frac{1}{12} \cdot \frac{A}{N}. \text{ Puisque } A = M({}^{12}_6C) = 12 \cdot 10^{-3} \text{ Kg/mol}$$

\Rightarrow

$$1u = \frac{1}{12} \cdot \frac{12 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} \Rightarrow \boxed{1u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}}$$

D'où les valeurs des masses caractéristiques des constituants principaux de l'atome sont :

	Proton	Neutron	Electron
Nombre (dans l'atome)	Z	$N = A - Z$	Z
Masse (en Kg)	$1,6726.10^{-27}$	$1,6749.10^{-27}$	$9,10953010^{-31}$
Masse (en u)	$1,0072765$	$1,008665$	$5,486.10^{-4}$
Charge électrique (en C)	$+e = +1,6.10^{-19} C$	0	$-e = -1,6.10^{-19} C$

Remarque : Les protons et les neutrons ont des masses voisines et sensiblement égales à $1u$.

3-Masses du noyau et de l'atome

a- Le noyau est constitué de N neutrons et de Z protons, sa masse est : $m_{noy} = Zm_p + Nm_n$, or

$$m_p \approx m_n \Rightarrow m_{noy} = (Z + N)m_p \text{ or } m_p = 1u \Rightarrow \boxed{m_{noy} = Au} \quad (1).$$

b- L'atome est constitué d'un noyau et de Z électrons, sa masse est : $m_{at} = m_{noy} + Zm_e \Rightarrow$

$$m_{at} = Zm_p + Nm_n + Zm_e = (Z + N)m_p + Zm_e, \text{ or } m_p \approx m_n \text{ et } m_e \ll m_p \Rightarrow m_{at} = Am_p$$

or

$$m_p = 1u \Rightarrow \boxed{m_{at} = Au} \quad (2). \text{ En comparant (1) et (2), on a : } \boxed{m_{at} \approx m_{noy} \approx Au}$$

N.B. : ■ La masse du noyau ou de l'atome de nombre de masse A est sensiblement égale à Au . Voilà pourquoi **A porte le nom de nombre de masse du noyau.**

■ La masse d'un atome étant voisine de celle de son noyau, on peut dire que dans le noyau est contenu (concentré) la **quasi-totalité** de la masse de l'atome.

II – INFLUENCE DE L'ENERGIE DE LIAISON PAR NUCLEON SUR LA STABILITE

DE L'ATOME

1-Défaut de masse d'un noyau (Δm)

a-Définition

C'est la différence entre la masse d'un noyau calculée à partir de ses nucléons (protons et neutrons) qui le constituent, pris **séparément** et sa masse **réelle** dictée par les tables.

Le résultat suivant est toujours fondamental : la masse **réelle** d'un noyau est **toujours inférieure** à la somme des masses de ses nucléons. Δm est **toujours positif**.

$$\boxed{\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_r(noy)}$$

Dans le SI, Δm s'exprime en **Kg**. Mais on l'exprime aussi en u et en MeV/C^2 avec $1u = 1,66.0^{-27} Kg = 931,5MeV/C^2$.

b-Vérification

D'après la table des éléments, le noyau de lithium ${}^7_3\text{Li}$ a une masse réelle de 7,01600u. Vérifions si cette masse réelle est inférieure à la somme des masses des nucléons de ce noyau pris séparément. $m_{\text{noy}} = Zm_p + Nm_n = 3.1,00727 + 4.1,008665 = 7,05648\text{u} > 7,01600\text{u}$.

2-Défaut de masse et énergie : Relation et définition

a-Relation

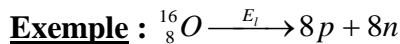
D'après la relation d'**EINSTEIN**, à toute perte de masse Δm correspond une libération d'énergie E_l du noyau considéré, appelée **énergie de liaison (ou de cohésion)**. Elle est de la forme :

$$E_l = \Delta m.C^2 = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_r(\text{noy})].C^2$$

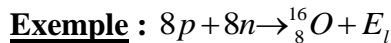
Dans le SI, E_l s'exprime en **Joules (J)**. Mais aussi en **électrons-volts (eV)** ou en **mégaélectronvolts (MeV)** avec : $1\text{eV} = 1,6.10^{-19}\text{J}$ et $1\text{MeV} = 10^6\text{eV} = 1,6.10^{-13}\text{J}$. On note aussi que $C = 3.10^8\text{m/s}$.

b-Définition

■ **Lorsqu'un noyau se brise** et « libère » ses nucléons, l'énergie de liaison est l'énergie qu'il faut fournir pour briser un noyau en ses nucléons.



■ Inversement, **lorsqu'un noyau se constitue**, à partir de ses nucléons, l'énergie de liaison est l'énergie libérée lorsqu'un noyau se forme à partir de ses nucléons séparés.



3-Energie de liaison par nucléon (E_A)

Encore appelée **énergie moyenne de liaison par nucléon**, c'est l'énergie qu'il faut fournir à chaque nucléon pour provoquer la rupture du noyau. Elle vaut donc :

$$E_A = \frac{E_l}{A} = \frac{\Delta m.C^2}{A} = \frac{[Zm_p + (A - z)m_n - m_r(\text{noy})].C^2}{A}$$

E_A s'exprime en **MeV par nucléon** que l'on écrit **MeV/nucléon** ou **MeV/A**.

4-Courbe d'ASTON (Francis, 1877-1945)

L'énergie de liaison par nucléon a une influence sur la stabilité ou l'instabilité des noyaux. C'est ainsi que le britannique **ASTON** a élaboré une courbe appelée **courbe d'ASTON** qui représente l'énergie de liaison par nucléon des noyaux en fonction du nombre de masse A (Voir courbe avec commentaire en annexe).

5-Domains de stabilité et d'instabilité des noyaux

Il existe actuellement environ **320 noyaux stables** et plus de **1200 noyaux instables** (parce que radioactifs). C'est ainsi qu'on les classe par domaine de stabilité et d'instabilité selon soit la valeur du nombre de masse **A** ou de **l'énergie de liaison par nucléon E_A** .

a-Domaine de stabilité

Un noyau stable a une énergie de liaison par nucléon *élevée*, c'est-à-dire qu'elle est **supérieure** ou **égale** à **8MeV/nucléon** et son nombre de masse n'est ni trop petit ni trop grand soit $20 \leq A \leq 190$.

Exemple : ${}^{56}_{26}\text{Fe}$, ${}^{120}_{50}\text{Sn}$, ${}^{63}_{29}\text{Cu}$.

b-Domaine d'instabilité

Un noyau est instable si son énergie de liaison par nucléon est **inférieure** à **8MeV/nucléon** et son nombre de masse $A > 190$ ou $1 \leq A < 20$.

Exemple : ${}^{208}_{82}\text{Pb}$, ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{235}_{92}\text{U}$.

Remarque : Les noyaux instables peuvent évoluer vers des états de plus grande stabilité par **fusion** ou par **fission**.

O.S.3-2 : Caractériser les réactions nucléaires et les noyaux radioactifs

III – REACTIONS NUCLEAIRES ET NOYAUX RADIOACTIFS

III-1-Définition d'une réaction nucléaire

Une réaction nucléaire est une réaction qui modifie le noyau d'un atome libérant ainsi une grande quantité d'énergie thermique (**énergie nucléaire**). Cette énergie libérée dans le réacteur est transformée en **énergie électrique** : C'est le principe de fonctionnement des **centrales nucléaires**.

N.B. : La radioactivité est une transformation de noyaux atomiques en d'autres noyaux.

III-2-Types de réactions nucléaires

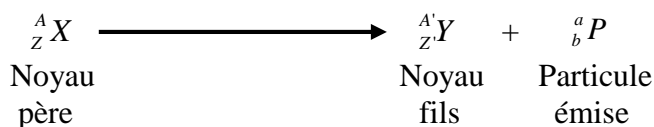
1- Réactions nucléaires spontanées

Ce sont des réactions où les noyaux instables (radioactifs) se transforment d'eux-mêmes, de façon naturelle, sans intervention extérieure et tendant vers la stabilité. Elles se font soit par émission de particules ou soit par capture de particules.

1-1-Emission de particules

Il existe quatre sortes de particules (**rayonnements radioactifs**) : α (noyau d'hélium ${}^4_2\text{He}$) ; β^- (négaton ${}^0_{-1}e$ ou e^-) ; β^+ (positon ${}^0_{+1}e$ ou e^+) et γ .

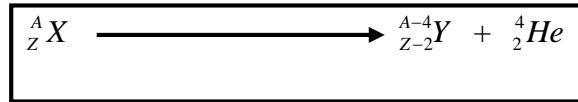
Remarque : Dans toutes les équations bilans de transformation radioactive, il y a conservation du **nombre de nucléons (nombre de masse)** et du **nombre de charge** : ce sont les **lois de SODDY**.



$$\begin{array}{l} A = A' + a \\ Z = Z' + b \end{array}$$

a-Emission de la particule α

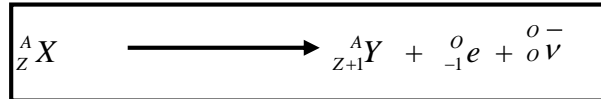
Elle concerne la désintégration des noyaux lourds ($A > 120$) et consiste en l'émission d'un noyau d'hélium (particule α). L'équation bilan s'écrit grâce aux lois de conservation :



Exemples : ${}_{92}^{238} U \rightarrow {}_{90}^{234} Th + {}_2^4 He$ et ${}_{88}^{226} Ra \rightarrow {}_{86}^{222} Rn + {}_2^4 He$.

b-Emission de la particule β^-

Elle se traduit par une émission de deux particules : un **négaton (électron négatif)** et un **antineutrino** (${}^0_{-1} \nu$) et s'observe dans le cas des noyaux qui possèdent « trop de neutrons ». L'équation bilan s'écrit grâce aux lois de conservation :

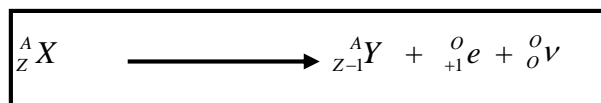


Exemples : ${}_{15}^{32} P \rightarrow {}_{16}^{32} S + {}_{-1}^0 e + {}^0_{-1} \nu$ et ${}_{6}^{14} C \rightarrow {}_{7}^{14} N + {}_{-1}^0 e + {}^0_{-1} \nu$

N.B. : L'électron émis ne provient pas du cortège électronique de l'atome radioactif, mais de son noyau. On admet qu'un neutron se transforme en proton : ${}^1_0 n \rightarrow {}^1_1 p + {}_{-1}^0 e$

c-Emission de la particule β^+

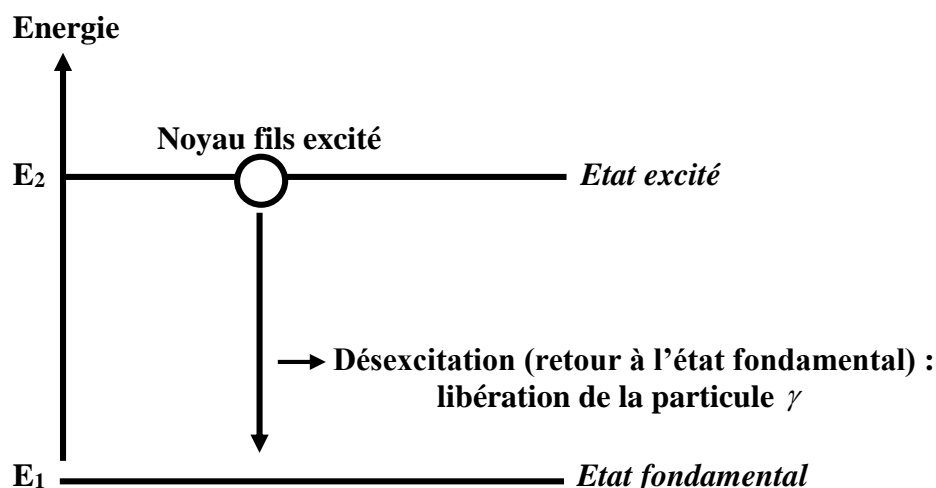
Elle s'observe dans le cas des noyaux qui possèdent « trop de protons ». Le rayonnement émis est constitué de deux particules : un **positon (électron positif)** et un **neutrino** (${}^0_0 \nu$). L'équation bilan s'écrit grâce aux lois de conservation :



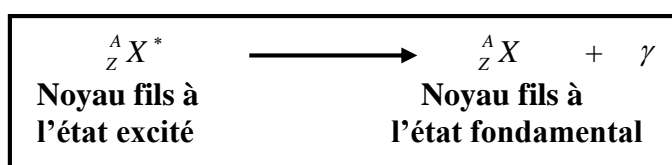
Exemples : ${}_{15}^{30} P \rightarrow {}_{14}^{30} Si + {}_{+1}^0 e + {}^0_0 \nu$ et ${}_{7}^{13} N \rightarrow {}_{6}^{13} C + {}_{+1}^0 e + {}^0_0 \nu$

d-Emission de la particule γ

Dans la radioactivité α , β^- et β^+ le noyau fils obtenu est dans son état fondamental (le cas le plus simple). Mais le plus souvent, il apparaît dans l'un de ses **états excités (instables)** et sa **désexcitation** s'accompagne de l'**émission de rayonnement γ** : la radioactivité γ résulte de la désexcitation progressive du noyau fils.



L'équation bilan s'écrit grâce aux lois de conservation :



Exemples : ${}^{13}_7 N^* \rightarrow {}^{13}_7 N + \gamma$ et ${}^{30}_{15} P^* \rightarrow {}^{30}_{15} P + \gamma$

1-2-Capture de particules

Elle s'observe dans le cas des noyaux légers ou lourds radioactifs qui pour devenir stables doivent capter une particule chargée (proton, deuton, tritium, neutron, hélium...). Cette capture des particules se fait par : *scintillation des substances, ionisation dans l'air, compteur Geiger-Muler.*

Exemples : ${}^2_1 H + {}^2_1 H \rightarrow {}^3_1 H + {}^1_1 H$ et ${}^{238}_{92} U + {}^1_0 n \rightarrow {}^{239}_{92} U$

2-Réactions nucléaires provoquées

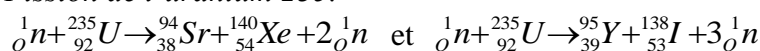
Il y a réaction nucléaire provoquée ou **transmutation** lorsque le choc d'un **noyau projectile** sur un noyau **cible** engendre de noyaux nouveaux. Le noyau projectile peut être une **particule chargée** : un proton (${}^1_1 H$ noté *p*), une particule α (noyau d'hélium ${}^4_2 He$), un deuton (noyau de deutérium ${}^2_1 H$ noté *d*), un tritium (${}^3_1 H$ noté *t*)..., ou encore un neutron (${}^1_0 n$ noté *n*).

Nous allons étudier deux cas de réactions nucléaires provoquées : la **fission** et la **fusion**.

2-1-La fission nucléaire

La fission est la **rupture d'un noyau** sous l'action d'un neutron de faible énergie cinétique (de l'ordre de grandeur de 0,1eV). Elle se rencontre chez les noyaux lourds dits **fissiles**, car les noyaux peuvent éclater sous l'action des neutrons.

Exemples : *Fission de l'uranium 235.*



Les noyaux formés sont généralement radioactifs β^- . Les neutrons émis au cours de la fission peuvent à leur tour, provoquer la fission des noyaux fils obtenus. On a alors une **réaction en**

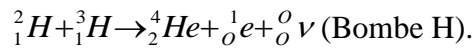
chaîne. Si la réaction de chaîne n'est pas contrôlée, il y a explosion brutale. C'est ce qui se passe dans la **bombe A (bombe atomique)**.

N.B. : Pour respecter les lois de **SODDY**, il est interdit de **simplifier** les neutrons placés de part et d'autre d'une équation de réaction nucléaire de fission.

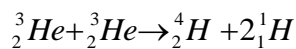
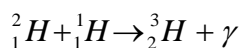
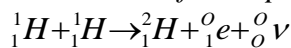
2-2-La fusion nucléaire

Il y a fusion lorsque deux noyaux légers **s'unissent** en constituant un noyau lourd : on dit que les **noyaux fusionnent**.

Exemples : ■ *Fusion du deutérium et du tritium.*



■ *Réactions de fusion produites dans le soleil.*



IV – PROPRIETES DES REACTION NUCLEAIRES

Elles sont valables pour les deux types de réactions : **spontanées** et **provoquées**.

1-Première propriété

Il y a conservation du nombre de masse et du nombre de charge : **Lois de SODDY**.

2-Deuxième propriété

Du point de vue énergétique, on a : $E = \Delta m \cdot C^2 = (m_f - m_i)C^2$ avec m_f : masse finale des produits et m_i : masse initiale des réactifs. Deux cas sont possibles :

- Si $m_i > m_f \Rightarrow \Delta m < 0 \Rightarrow E = |\Delta m| \cdot C^2 = |(m_f - m_i)|C^2$: il y a **libération d'énergie** sous forme d'énergie cinétique, la réaction est **exoénergétique**.
- Si $m_i < m_f \Rightarrow \Delta m > 0 \Rightarrow E = \Delta m \cdot C^2 = (m_f - m_i)C^2$: il y a **absorption d'énergie**, la réaction est **endoénergétique**.

3-Troisième propriété

Dans une réaction nucléaire, il y a conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique. Soit une réaction nucléaire de la forme : $X \rightarrow Y + P$.

■ Conservation de la quantité de mouvement : \vec{p}_1 (avant la réaction) = \vec{p}_2 (après la réaction)

$\vec{p}_X = \vec{p}_Y + \vec{p}_p \Rightarrow m_X \vec{v}_X = m_Y \vec{v}_Y + m_p \vec{v}_p$. Le noyau radioactif X étant immobile, on aura

$\vec{p}_X = \vec{p}_1 = m_X \vec{v}_X = \vec{O}$ c'est-à-dire $m_X \neq 0$ et $\vec{v}_X = \vec{O}$. Soit : $\vec{O} = m_Y \vec{v}_Y + m_p \vec{v}_p \Rightarrow$

$m_Y \vec{v}_Y = -m_p \vec{v}_p \Rightarrow \vec{v}_Y = -\frac{m_p}{m_Y} \vec{v}_p$ et en module $v_Y = \frac{m_p}{m_Y} v_p$ car \vec{v}_Y est en sens inverse de

\vec{v}_p : On dit que le noyau Y « recule ».

Le rapport des énergies cinétiques du noyau Y et de la particule p donne :

$$\frac{E_{CY}}{E_{Cp}} = \frac{m_Y \cdot v_Y^2}{m_p \cdot v_p^2} = \frac{m_Y \cdot v_Y}{m_p \cdot v_p} \times \frac{v_Y}{v_p} = \frac{v_Y}{v_p} = \frac{m_p}{m_Y}, \text{ en tenant compte de : } m_Y v_Y = m_p v_p. \text{ Ce qui donne}$$

le rapport suivant :

$$\frac{E_{CY}}{E_{Cp}} = \frac{m_p}{m_Y}$$

- Conservation de l'énergie cinétique : $E = E_{CY} + E_{Cp} \Rightarrow \Delta m.C^2 = E_{CY} + E_{Cp}$

V – LOI DE DECROISSANCE RADIOACTIVE

Le nombre de noyaux (ou d'atomes) d'une **source radioactive** diminue au cours du temps par transformation en d'autres noyaux. La loi de décroissance radioactive permet le **calcul** du nombre des noyaux (ou d'atomes) restant à un instant t quelconque.

1-Etablissement de la loi

Lors de la désintégration, nous notons N_o le nombre initial des noyaux (ou d'atomes) radioactifs X (à $t = 0$) ; N leur nombre à l'instant t et $N + dN$ leur nombre à l'instant infiniment voisin de $t + dt$.



Entre les instants t et t + dt, le nombre de noyaux qui se désintègrent est égal à la différence : *nombre initial* – *nombre final*. Soit : $N - (N + dN) = -dN$. Ce nombre est proportionnel au temps dt et au nombre de noyaux présents N . Soit : $-dN = \lambda.Ndt$ où λ est une constante.

$\frac{dN}{N} = -\lambda dt \Rightarrow \int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt \Rightarrow \ln N = -\lambda t + cste$. Cherchons la valeur de la constante :

A $t = 0$, $N = N_o \Rightarrow \ln N_o = -\lambda.0 + cste \Rightarrow cste = \ln N_o$. Alors : $\ln N = -\lambda t + \ln N_o \Rightarrow$

$$\ln N - \ln N_o = -\lambda t \Rightarrow \ln \frac{N}{N_o} = -\lambda t \Rightarrow \frac{N}{N_o} = e^{-\lambda t} \Rightarrow \boxed{N = N_o e^{-\lambda t}}$$

Le nombre des noyaux radioactifs diminue exponentiellement en fonction du temps

Remarque : A $t = 0$, $N_o = n_o N = \frac{m_o}{M} N$ et à tq, $N = n N = \frac{m}{M} N$. Soit : $\frac{N}{N_o} = \frac{n}{n_o} = \frac{m}{m_o} = e^{-\lambda t}$

$$\boxed{\begin{array}{l} n = n_o e^{-\lambda t} \\ m = m_o e^{-\lambda t} \end{array}}$$

2-Période radioactive d'un noyau

La période d'un noyau est le temps au bout duquel la moitié des noyaux initiaux a disparu lors de

la désintégration. On l'appelle encore **période** (tout court) ou **demi-vie**. D'après la loi de

décroissance : $\ln \frac{N}{N_o} = -\lambda t$. A $t_{\frac{1}{2}} \Rightarrow N = \frac{N_o}{2}$ et $t = T \Rightarrow \ln \frac{\frac{N_o}{2}}{N_o} = -\lambda T \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = -\lambda T \Rightarrow$

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}$$

La période est inversement proportionnelle à la constante radioactive λ . D'où la loi de décroissance radioactive peut s'écrire sous la forme :

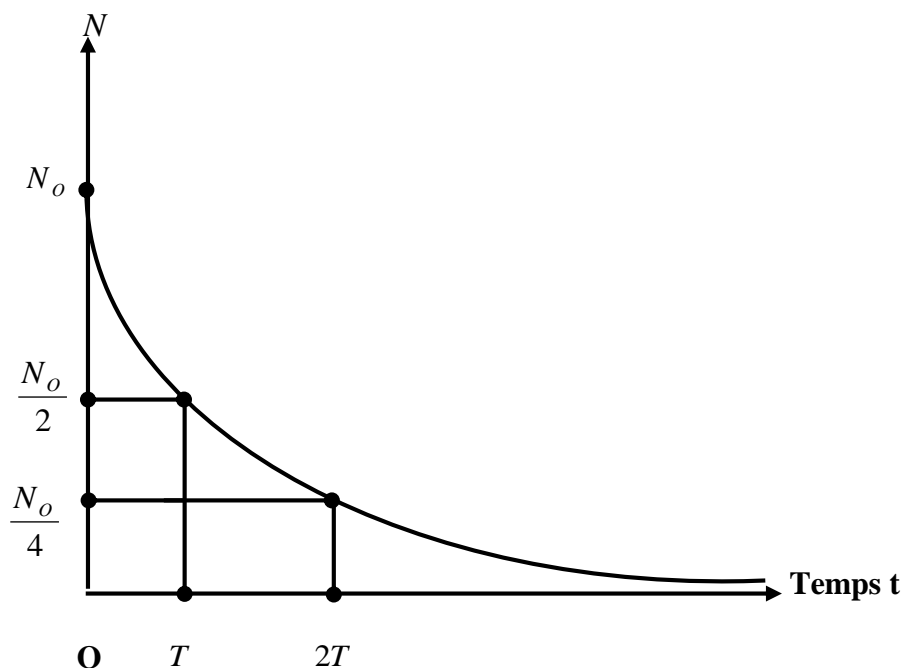
$$N = N_0 e^{-\frac{t \ln 2}{T}}$$

Dans le SI, T s'exprime en **seconde** et la constante radioactive λ en **(seconde)⁻¹** soit **s⁻¹**.

N.B. : Un noyau est « **très radioactif** » s'il se désintègre rapidement, sa période est **courte**. Inversement, une **longue** période caractérise un noyau « **peu radioactif** ».

3-Courbe de décroissance radioactive en fonction du temps : N=f (t)

Elle indique l'exponentielle décroissance du nombre de noyaux radioactifs d'un échantillon où au bout d'une période T il est divisé par 2. Elle montre que, plus T est petit, plus la désintégration est rapide



$t = nT \Rightarrow n = \frac{t}{T}$. D'après la loi de décroissance radioactive en fonction du nombre de noyaux : $N = N_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow N = N_0 e^{-\frac{t \ln 2}{T}}$ car $\lambda = \frac{\ln 2}{T} \Rightarrow N = N_0 e^{-\ln 2 \frac{t}{T}} \Rightarrow N = \frac{N_0}{e^{\ln 2 \frac{t}{T}}}$ or

$$e^{\ln x} = x \Rightarrow N = \frac{N_0}{2^{\frac{t}{T}}} \text{ or } n = \frac{t}{T} \Rightarrow \boxed{N = \frac{N_0}{2^n}}$$

4-L'activité d'une source radioactive

On appelle **source radioactive** une certaine quantité d'un matériau radioactif, pur ou en mélange.

L'activité d'une source radioactive est le nombre de désintégrations qui s'y produisent pendant l'unité de temps (**1 seconde**).

$$A = -\frac{dN}{dt} \text{ or } -dN = \lambda \cdot N dt \Rightarrow A = \lambda N = \frac{\ln 2}{T} n \cdot N = \frac{\ln 2}{T} \frac{m}{M} N$$

m : Masse du noyau radioactif à un instant quelconque (en **gramme**)

M : Masse molaire atomique du noyau radioactif (en **g/mol**).

$N = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ (**Nombre d'Avogadro**).

A : Activité de la source radioactive à un instant quelconque.

D'après la loi de décroissance radioactive : $N = N_o e^{-\lambda t}$ or $A = \lambda N = \lambda N_o e^{-\lambda t}$. Si $A = \lambda N$ à un instant quelconque, à l'instant $t = 0$, l'activité de la source sera par analogie : $A_o = \lambda N_o$.

D'où :

$$A = A_o e^{-\lambda t} = A_o e^{-\frac{t}{T} \ln 2}$$

Dans le SI, l'unité de l'activité est le **becquerel**¹⁹ (**Bq**) avec t en **seconde** et λ en s^{-1} . On utilise aussi l'ancienne unité : le **Curie (Ci)** avec $1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$.

N.B. : Le **becquerel (Bq)** représente une *désintégration par seconde* (**1Bq = 1dés/s**).

O.S.3-3 : Identifier les applications et conséquences liée aux propriétés radioactives des éléments

VI – APPLICATION ET CONSEQUANCES LIEES AUX PROPRIETES RADIOACTIVES DES ELEMENTS

1-Datation au carbone 14 : Principe et méthode

a-Principe

La datation par le carbone 14 permet de déterminer l'âge d'objets anciens (plantes, animal...) en mesurant l'activité en ^{14}C concentré dans ceux-ci et étant un émetteur β^- sa période est de 5560 années.

b-Méthode

On détermine l'âge d'un objet en bois ancien en mesurant l'activité en ^{14}C de deux masses égales de carbone :

■ l'une provenant d'un jeune bois : $A_o = \lambda N_o$.

■ l'autre prélevé sur le bois ancien : $A = \lambda N$.

L'âge s'obtient par : $\frac{N}{N_o} = \frac{A}{A_o} = e^{-\lambda t}$. En tirant le temps on a :

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{A_o}{A} = \frac{T}{\ln 2} \ln \frac{A_o}{A}$$

¹⁹ **Henri BECQUEREL (1852-1908)**, physicien Français.

N.B. : Le carbone 14 est créé dans l'atmosphère terrestre par réactions nucléaires de neutrons cosmiques avec des noyaux d'azote : ${}^{14}_7N + {}^1_0n \rightarrow {}^{14}_6C^* + {}^1_1H$. Il s'oxyde en dioxyde de carbone et est absorbé par les plantes et par les animaux.

2-La radiothérapie

Dans le cas du traitement des cancers, on détruit les cellules cancéreuses en irradiant la tumeur (prolifération anarchique des cellules) par « *la bombe au cobalt* » (qui contient une source de ${}^{60}_{27}Co$). On peut aussi implanter dans la tumeur elle-même des radiosources d'iridium 192 ou d'or 198 ; ces traitements portent le nom de **radiothérapie**. Il faut mener ces traitements avec beaucoup de précautions, car l'irradiation détruit également les tissus sains.

VII – AUTRES APPLICATIONS (conséquences)

1-Production de l'énergie électrique

La désintégration des noyaux atomiques libère une grande quantité d'énergie thermique appelée **énergie nucléaire**. Les réacteurs des centrales nucléaires transforment cette énergie en **énergie électrique**.

2-Transformation chimique

Un réacteur nucléaire est un lieu de formation de produits radioactifs. Une faible partie de ceux-ci après traitement, est rejetée dans le milieu naturel sous formes liquides ou gazeuses composés de gaz rares (krypton, xénon) et des éléments chimiques dissous dans l'eau donnant souvent naissance à du tritium (3_1H).

3-Stérilisation

En agriculture, il est possible de stériliser (détruire certains microorganismes) les légumes, notamment des pommes de terre, avec les rayons γ .

O.S.3-4 : Caractériser les familles radioactives

VIII – FAMILLES RADIOACTIVES

Si un noyau radioactif se désintègre en un noyau radioactif, puis celui-ci en un autre noyau radioactif..., on a une suite de transformations radioactives, et l'ensemble des radioéléments mis en jeu constitue une **famille radioactive**. L'évolution s'arrête lorsqu'un noyau formé est *stable*.



Il existe actuellement 4 familles radioactives connues qui sont nommées grâce au nom du premier élément. Trois sont naturelles, ce sont les familles de l'uranium 235 (${}^{235}_{92}U$), de l'uranium 238 (${}^{238}_{92}U$) et le thorium (${}^{232}_{90}Th$) ; elles aboutissent toutes à un isotope du plomb. Le 4ème est artificiel, on lui donne le nom de famille de neptunium 241, elle s'achève par un isotope du bismuth.

O.G.1 : Réaliser l'étude cinétique d'une réaction

O.S.1-1 : Définir la vitesse et l'ordre d'une réaction

I – CINETIQUE CHIMIQUE

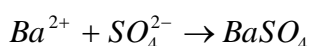
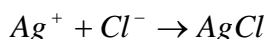
1-Définition

La *cinétique chimique* est l'étude des vitesses des réactions chimiques et des facteurs (pression, température, concentration...) qui influencent ces vitesses.

2-Différentes sortes de réactions chimiques

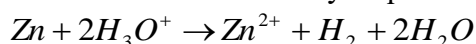
a- Réactions rapides : Elles sont instantanées car les produits se forment **immédiatement** après contact des réactifs : **l'évolution est rapide.**

Exemples : Toutes les réactions de précipitation sont des réactions rapides.

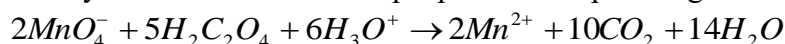


b- Réactions lentes : Ce sont des réactions dont l'évolution est perceptible car elles durent de plusieurs secondes à plusieurs minutes.

Exemples : ▪ Action de l'acide chlorhydrique sur le zinc.



▪ L'oxydation de l'acide oxalique par les ions permanganate.

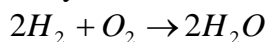


c- Réactions très lentes : Elles ont une durée de plusieurs jours, voire plusieurs mois.

Exemples : La formation de la rouille, la fermentation des jus sucrés.

d- Réactions infiniment lentes : Ce sont des réactions dont l'évolution n'est pas perceptible même après plusieurs lentes, d'où la présence d'un catalyseur.

Exemples : ▪ La synthèse de l'eau.



▪ L'estérification des acides carboxyliques avec les alcools.

II- VITESSE ET ORDRE D'UNE REACTION CHIMIQUES

II-1- Vitesse d'une réaction chimique

La vitesse est la grandeur qui traduit la manière dont la réaction chimique se déroule c'est-à-dire la **lenteur** ou la **rapidité**.

1-Vitesse de formation d'un produit

a- Vitesse instantanée de formation : Si X est le produit obtenu lors d'une réaction à volume constant, on appelle **vitesse instantanée de formation de X** à la date t, la grandeur :

$$V(X) = \frac{d[X]}{dt}$$

V(X) s'exprime en **mol.l⁻¹.s⁻¹**.

Elle correspond aussi au **coefficient directeur** de la tangente à la courbe $[X] = f(t)$ au Point M d'abscisse t.

La relation donnant la vitesse instantanée est de la forme :

$$V(X) = \frac{\Delta[X]}{\Delta t} = \frac{[X] - [X]_0}{t - t_0}$$

$[X]$: Concentration de X à un instant t quelconque.

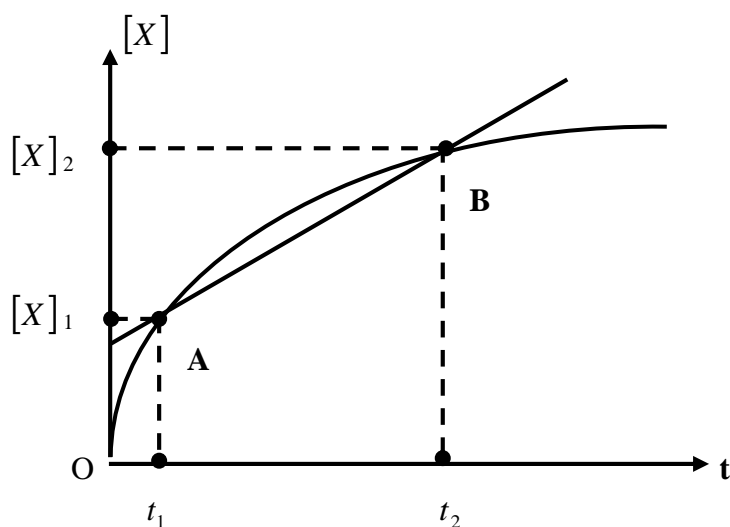
$[X]_0$: Concentration de X à l'instant initial.

t et t_0 : respectivement instant quelconque et instant initial.

b-Vitesse moyenne de formation : On appelle **vitesse moyenne de formation** du produit X entre deux instants t_1 et t_2 la grandeur :

$$V(X) = \frac{\Delta[X]}{\Delta t} = \frac{[X]_2 - [X]_1}{t_2 - t_1} \quad V(X) \text{ s'exprime en } \mathbf{mol.l^{-1}.s^{-1}}.$$

Elle correspond au coefficient directeur (ou pente) de la sécante à la courbe $[X] = f(t)$ aux points A et B d'abscisses t_1 et t_2 .



La relation donnant la vitesse moyenne de formation est de la forme :

$$V_m(X) = \frac{\Delta[X]}{\Delta t} = \frac{[X]_2 - [X]_1}{t_2 - t_1} \quad V_m(X) \text{ s'exprime en } \mathbf{mol.l^{-1}.s^{-1}}.$$

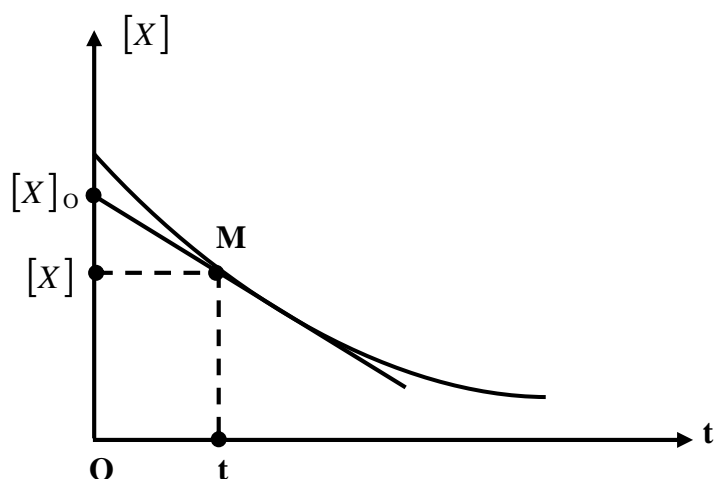
2-Vitesse de disparition d'un réactif

a-Vitesse instantanée de disparition : Si **X** est le réactif, on appelle **vitesse instantanée de disparition** de **X** à volume constant, la quantité :

$$V(X) = -\frac{d[X]}{dt} \quad V(X) \text{ s'exprime en } \mathbf{mol.l^{-1}.s^{-1}}.$$

Elle est numériquement égale à la valeur de l'opposée du coefficient directeur de la tangente à

la courbe $[X] = f(t)$ au point M d'abscisse t.



La relation donnant la vitesse instantanée est de la forme :

$$V(X) = -\frac{\Delta[X]}{\Delta t} = -\frac{[X] - [X]_0}{t - t_0}$$

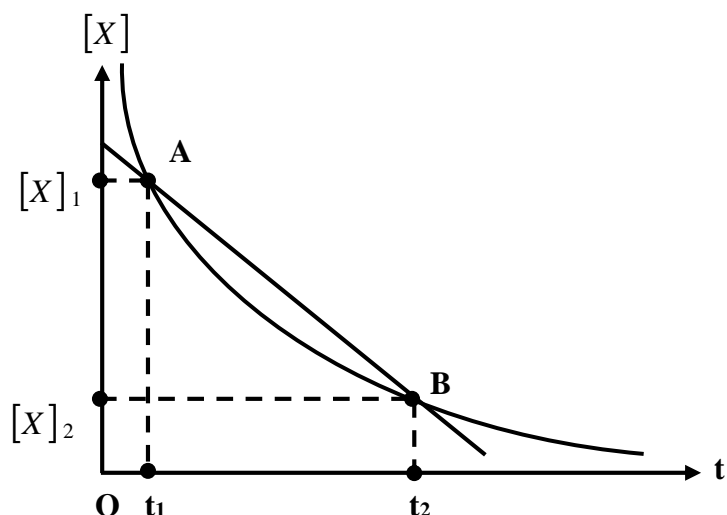
b-Vitesse moyenne de disparition: On appelle **vitesse moyenne de disparition** entre les

instants t_1 et t_2 , la quantité :

$$V_m(X) = -\frac{\Delta[X]}{\Delta t} = -\frac{[X]_2 - [X]_1}{t_2 - t_1} \quad V_m(X) \text{ s'exprime en } \mathbf{mol.l^{-1}.s^{-1}}.$$

La vitesse moyenne de disparition de X entre les instants t_1 et t_2 est l'opposé du coefficient directeur de la sécante à la courbe $[X] = f(t)$ aux points A et B d'abscisses

t_1 et t_2 .



La relation donnant la vitesse moyenne de disparition est de la forme :

$$V_m(X) = -\frac{\Delta[X]}{\Delta t} = -\frac{[X]_2 - [X]_1}{t_2 - t_1}$$

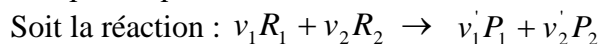
$V_m(X)$ s'exprime en $\text{mol.l}^{-1}.\text{s}^{-1}$.

N.B. : Il est important de bien préciser l'espèce chimique dont on étudie les vitesses de formation ou de disparition. Pour une réaction donnée, ces vitesses ne sont pas nécessairement égales. Elles dépendent de l'espèce considérée et des coefficients stœchiométriques de l'équation.

II-2- ORDRE D'UNE REACTION CHIMIQUE

1-Ordre partiel d'une réaction

L'**ordre partiel** est la puissance à laquelle la concentration de chaque réactif doit être élevée dans l'équation de vitesse d'après la *loi d'action de masse* (vitesse en fonction de la concentration). Les ordres partiels peuvent être **entiers, nuls** ou **fractionnaires**. Ils sont déterminés **expérimentalement** et sont a priori différents des coefficients stœchiométriques donc ne peuvent être prévus par l'équation bilan de la réaction.



Expérimentalement d'après la loi d'action de masse on peut représenter sa vitesse sous la forme :

$$v = k[R_1]^{\alpha_1} [R_2]^{\alpha_2}$$

Cette vitesse dépend de la concentration des **réactifs** car celle des produits (réaction inverse) étant alors négligeable.

- k : **constante de vitesse**, caractéristique de la réaction, ne dépend que de la température mais pas de la concentration.
- α_1 et α_2 : **ordres partiels** de la réaction respectivement par rapport à R_1 et R_2 . Avec $\alpha_1 \neq \nu_1$ et

$$\alpha_2 \neq \nu_2 .$$

N.B. : Dans l'expression $v = k[R_1]^{\alpha_1} \cdot [R_2]^{\alpha_2}$, dans le **SI**, k s'exprime en $\text{mol}^{-1} \cdot \text{l} \cdot \text{s}^{-1}$ et ν en $\text{mol} \cdot \text{l}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

2-Ordre global d'une réaction

L'**ordre global** d'une réaction est la **somme** des différents ordres partiels par rapport à chaque réactif. Pour notre réaction, l'ordre global vaut :

$$p = \sum \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2$$

p est presque toujours différent de la **stœchiométrie** (somme des coefficients stœchiométriques de la réaction) c'est-à-dire : $\sum \nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_1' + \nu_2' \neq p$.

Lorsque p est égal à **0, 1** ou **2**, la réaction est dite **simple**.

N.B. : Pour une **réaction élémentaire (simple)**, l'ordre global p est une grandeur théorique qui est égal à la **molécularité** de la réaction, somme des coefficients stœchiométriques des **réactifs**. Dans le cas contraire la réaction est dite **complexe**.

Exemple :

Réaction	Vitesse	Ordre partiel	Ordre global	Obs.
$CH_3Cl + OH^- \rightarrow CH_3OH + Cl^-$	$v = k[CH_3Cl][OH^-]$	1 et 1	2	Réaction élémentaire
$2HI_{(g)} \rightarrow H_{2(g)} + I_{2(g)}$	$v = k[HI]^2$	2	2	-/-
$2NO + O_2 \rightarrow 2NO_2$	$v = k[NO]^2[O_2]$	2 et 1	3	-/-
$BrO_3^- + 5Br^- + 6H^+ \rightarrow 3Br_2 + 3H_2O$	$v = k[BrO_3^-][Br^-][H^+]^2$	1, 1 et 2	4	Réaction complexe
$CO + Cl_2 \rightarrow COCl_2$	$v = k[CO]^2[Cl_2]$	2 et 1	3	-/-

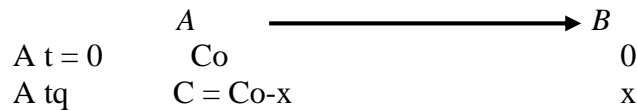
O.S.1-2 : Déterminer la vitesse et l'ordre d'une réaction

III- VITESSE ET TEMPS DE DEMI-REACTION

III-1- Réaction d'ordre zéro

Une réaction est d'ordre zéro (nul) lorsqu'au cours du temps elle ne conserve pas la concentration initiale. La molécularité par rapport au réactif vaut 0 ($\alpha = 0$)

1-Equation de vitesse intégrée



- vitesse d'après la loi d'action de masse : $v = k[A]^\alpha = k[A]^0 = k(1)$

- vitesse de disparition de A : $v = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{dC}{dt}$ (2). En égalant (1) = (2) :

$$k = -\frac{dC}{dt} \Rightarrow -dC = kdt \Rightarrow -\int_{Co}^C dC = k \int_0^t dt \Rightarrow -C + Co = kt \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{t}(Co - C)}$$

k s'exprime en **mol.l⁻¹.s⁻¹**.

Remarque : Dans le cas des gaz parfaits, on a : $PV = nRT \Rightarrow \frac{n}{V} = C = \frac{P}{RT}$, soit

$$k = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{RT} (Po - P) \Rightarrow \boxed{Po - P = ktRT}$$

2-Temps de demi-réaction

On définit pour chaque type de réaction un temps de demi réaction noté $t_{\frac{1}{2}}$ qui est le temps

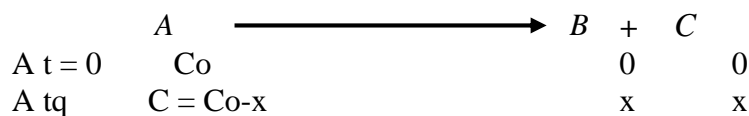
pendant lequel la **moitié** de la concentration initiale a disparu.

$$t_{\frac{1}{2}} \Rightarrow C = \frac{Co}{2} \Rightarrow t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k} (Co - \frac{Co}{2}) \Rightarrow \boxed{t_{\frac{1}{2}} = \frac{Co}{2k}}$$

III-2- REACTION D'ORDRE 1 (REACTION MONOMOLECULAIRE)

Ce sont en général des réactions de décomposition (dissociation) où on qu'une seule molécule en présence. La molécularité par rapport au réactif vaut 1 ($\alpha = 1$)

1-Equation de vitesse intégrée



- vitesse d'après la loi d'action de masse : $v = k[A]^\alpha = k[A]^1 = kC(1)$

- vitesse de disparition de A : $v = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{dC}{dt}$ (2). En égalant (1) = (2) : $kC = -\frac{dC}{dt} \Rightarrow$

$$-\frac{dC}{C} = kdt \Rightarrow \int_{Co}^C \frac{dC}{C} = -k \int_0^t dt \Rightarrow [\ln C]_{Co}^C = -k[t]_0^t \Rightarrow \ln C - \ln Co = -kt \Rightarrow$$

$$kt = \ln Co - \ln C$$

Soit : $\boxed{k = \frac{1}{t} \ln \frac{Co}{C} = \frac{1}{t} \ln \frac{Co}{Co-x}}$ k s'exprime s⁻¹.



Remarque : Dans le cas des gaz parfaits, on a : $k = \frac{1}{t} \ln \frac{P_0}{P} = \frac{1}{t} \ln \frac{P_0}{P_0 - x}$

2-Temps de demi-réaction

$$t_{\frac{1}{2}} \Rightarrow C = \frac{C_0}{2} \Rightarrow t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k} \ln \frac{C_0}{\frac{C_0}{2}} \Rightarrow \boxed{t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{k}}$$

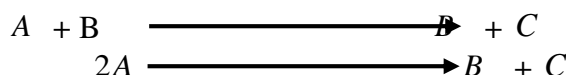
C'est une constante **indépendante** de la concentration initiale.

III-3- REACTION D'ORDRE 2 (REACTION BIMOLECULAIRE)

C'est le cas le plus fréquent. On a deux molécules en présence et la molécularité vaut 2 ($\alpha = 2$).

1-Réaction pour un même réactif (A = B)

a-Equation de vitesse intégrée



$$\begin{array}{cccc} A \text{ t } = 0 & C_0 & 0 & 0 \\ A \text{ t } q & C = C_0 - 2x & x & x \end{array}$$

- vitesse d'après la loi d'action de masse : $v = k[A]^\alpha = k[A]^2 = kC^2$ (1)

- vitesse de disparition de A : $v = -\frac{1}{2} \frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{dC}{dt}$ (2). En égalant (1) = (2) : $kC^2 = -\frac{1}{2} \frac{dC}{dt}$

$$\Rightarrow -\frac{dC}{C^2} = 2kdt \Rightarrow -\int_{C_0}^C \frac{dC}{C^2} = 2k \int_0^t dt \text{ or } \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$2kt = \frac{1}{C} - \frac{1}{C_0},$$

Soit $\boxed{k = \frac{1}{2t} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C_0} \right)}$ k s'exprime en **mol⁻¹.l.s⁻¹**.

b-Temps de demi-réaction

$$t_{\frac{1}{2}} \Rightarrow C = \frac{C_0}{2} \Rightarrow t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2k} \left(\frac{2}{C_0} - \frac{1}{C_0} \right) \Rightarrow \boxed{t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2kC_0}}$$

Remarque : Dans le cas des gaz parfaits, on a : $\boxed{k = \frac{1}{2t} \left(\frac{RT}{P} - \frac{RT}{P_0} \right) \Rightarrow \frac{2kt}{RT} = \frac{1}{P} - \frac{1}{P_0}}$

2-Réaction pour un même réactif (A ≠ B)

a-Equation de vitesse intégrée



A t = 0	C _o	C _o	0	0
A t _q	C = C _o -x	C = C _o -x	x	x

Le mélange étant équimolaire, à tout instant $[A]_o = [B]_o = C_o$ et $[A] = [B] = C$

- vitesse d'après la loi d'action de masse : $v = k[A][B] = k[A]^2 = kC^2$ (1)

- vitesse de disparition de A : $v = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{dC}{dt}$ (2). En égalant (1) = (2) : $kC^2 = -\frac{dC}{dt} \Rightarrow$

$-\frac{dC}{C^2} = kdt \Rightarrow -\int_{C_o}^C \frac{dC}{C^2} = k \int_0^t dt$ or $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Rightarrow kt = \frac{1}{C} - \frac{1}{C_o}$, soit

$$k = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C_o} \right) \quad k \text{ s'exprime en } \mathbf{mol^{-1}.l.s^{-1}}.$$

Remarque : Dans le cas des gaz parfaits, on a :

$$k = \frac{1}{t} \left(\frac{RT}{P} - \frac{RT}{P_o} \right) \Rightarrow \frac{kt}{RT} = \frac{1}{P} - \frac{1}{P_o}$$

b-Temps de demi-réaction

$$t_{\frac{1}{2}} \Rightarrow C = \frac{C_o}{2} \Rightarrow t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k} \left(\frac{2}{C_o} - \frac{1}{C_o} \right) \Rightarrow$$

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{kC_o}$$

III-4- GENERALISATION

1-Equation de vitesse intégrée

De façon générale, pour une réaction chimique d'ordre n , tel que $n > 1$, on aura :

- vitesse d'après la loi d'action de masse : $v = k[A]^n = kC^n$ (1)

- vitesse de disparition de A : $v = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{dC}{dt}$ (2). En égalant (1) = (2) : $kC^n = -\frac{dC}{dt} \Rightarrow$

$-\frac{dC}{C^n} = kdt \Rightarrow -\int_{C_o}^C \frac{dC}{C^n} = k \int_0^t dt$ or $\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} \Rightarrow kt = \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{C^{n-1}} - \frac{1}{C_o^{n-1}} \right) \Rightarrow$

$$k = \frac{1}{t(n-1)} \left(\frac{1}{C^{n-1}} - \frac{1}{C_o^{n-1}} \right)$$

2-Temps de demi-réaction

$$t_{\frac{1}{2}} \Rightarrow C = \frac{Co}{2} \Rightarrow t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k(n-1)} \left(\frac{1}{\left(\frac{Co}{2}\right)^{n-1}} - \frac{1}{Co^{n-1}} \right) \Rightarrow t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k(n-1)} \left(\frac{2^{n-1}}{Co^{n-1}} - \frac{1}{Co^{n-1}} \right) \Rightarrow$$

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k(n-1)Co^{n-1}} (2^{n-1} - 1)$$

N.B. : On détermine expérimentalement l'ordre d'une réaction par la méthode suivante en utilisant la relation de la vitesse relative à la loi d'action de masse si on a les **concentrations** et les **vitesse**s.

$$\begin{cases} 1^{\text{ère}} \text{ expérience : } v_1 = kC_1^p (1) \\ 2^{\text{ème}} \text{ expérience : } v_2 = kC_2^p (2) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \ln v_1 = \ln k + p \ln C_1 (1) \\ \ln v_2 = \ln k + p \ln C_2 (2) \end{cases}$$

$$(2) - (1) : \ln v_2 - \ln v_1 = p(\ln C_2 - \ln C_1), \text{ soit : } p = \frac{\ln v_2 - \ln v_1}{\ln C_2 - \ln C_1}$$

O.S.1-3 : Décrire l'influence de la concentration, de la température et des catalyseurs sur la vitesse des réactions

IV- FACTEURS CINÉTIQUES SUR LA VITESSE DES RÉACTIONS

IV-1- Influence de la concentration

La concentration des réactifs est un facteur cinétique. La vitesse de formation (ou de disparition) d'un corps augmente avec la concentration des réactifs.

- On **accélère** une réaction chimique en solution en utilisant des réactifs de **concentration élevée**.
- On **ralentit** au contraire une réaction en diluant le mélange réactionnel.

IV-2- Influence de la température

La température d'un mélange réactionnel est un facteur cinétique. La vitesse de formation (ou de disparition) d'un corps augmente avec la température. On peut ralentir une réaction chimique en **abaissant** la température. Ainsi on conserve à basse température les aliments dans les congélateurs pour « bloquer » le processus de dégradation.

IV-3- Influence du catalyseur

Un catalyseur permet d'accélérer de manière spectaculaire la vitesse d'une réaction chimique mais n'entre pas dans l'équation-bilan.

Exemple : L'estérification et l'hydrolyse sont catalysées par l'acide (ions hydronium H_3O^+

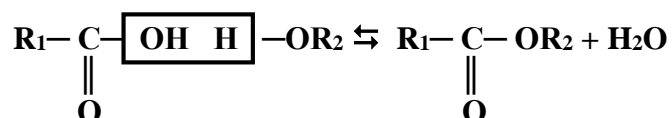
). **N.B.** : Il existe des catalyseurs qui diminuent la vitesse des réactions. Ce sont des catalyseurs **négatifs**.

O.S.1-4 : Réaliser l'étude cinétique de la réaction d'estérification

V- ETUDE CINÉTIQUE DE LA RÉACTION D'ESTERIFICATION

V-1- Définition et équation-bilan

La réaction d'estérification est la réaction entre un **acide carboxylique** et un **alcool** conduisant à un **ester** et à de l'**eau**. La réaction inverse s'appelle **hydrolyse** de l'ester : c'est une **réaction réversible**.

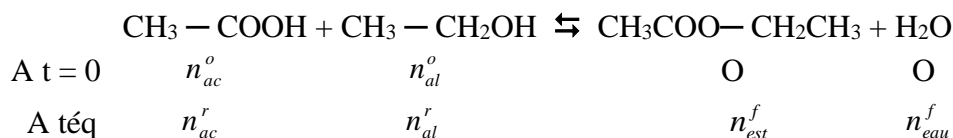


V-2- REACTION D'ESTERIFICATION DE L'ACIDE ETHANOÏQUE ET DE L'ETHANOL

1-Etude expérimentale

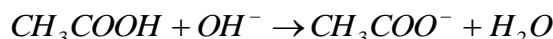
Les chimistes français **Marcellin BERTHELOT** et **Péan de Saint GILLES** furent les premiers (1862) à étudier la réaction d'estérification de l'acide éthanoïque et de l'éthanol. Pour cela, ils préparaient des ampoules scellées contenant un mélange *équimolaire* d'acide et d'alcool ; ces ampoules étaient ensuite placées dans une enceinte thermostatée entre 50 et 150°C pendant des durées déterminées. Pour connaître l'état du système à un instant donné, ils extrayaient une ampoule de l'enceinte, la refroidissaient brutalement et analysaient son contenu par dosage acide base.

2-Résultats expérimentaux



Mélange équimolaire : $n_{ac}^o = n_{al}^o$ et à l'équilibre $n_{ac}^r = n_{al}^r \Rightarrow n_{est}^f = n_{eau}^f \Rightarrow n_{est}^f = n_{ac}^o - n_{ac}^r$

La quantité restante d'acide éthanoïque est dosée, en présence de phénophtaléine, par une solution titrée de soude (NaOH). L'équation de dosage est :

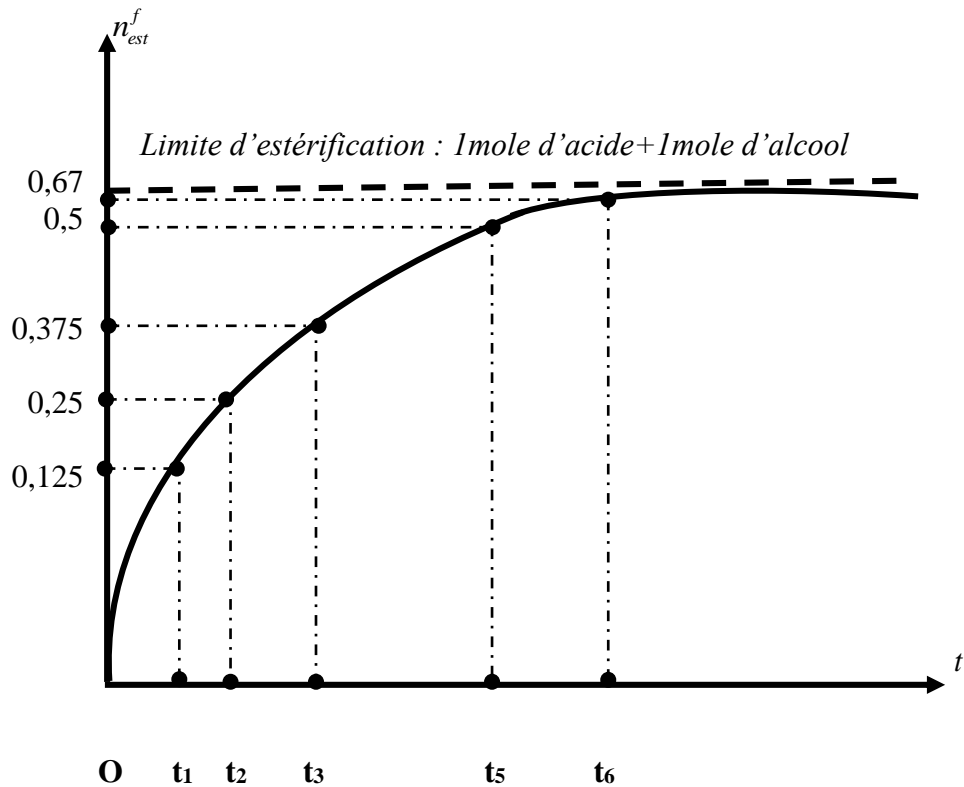


A l'équivalence acido-basique : $C_A V_A = C_B V_B \Rightarrow n_{ac}^r = C_B V_B$, d'où $n_{est}^f = n_{ac}^o - C_B V_B$

Les résultats expérimentaux obtenus à la température de 100°C sont les suivants :

t en heures	0	2	4	10	20	40	100	160	200
$n_{ac}^r (mol)$	1	0,82	0,74	0,62	0,51	0,42	0,36	0,34	0,33
$n_{est}^f (mol)$	0	0,18	0,26	0,38	0,49	0,58	0,64	0,66	0,67

3-Courbe cinétique $n_{est}^f = f(t)$



4-Ordre de la réaction d'estérification

L'allure de la courbe cinétique $n_{est}^f = f(t)$ augmente de façon exponentielle et ceci rappelle la courbe cinétique d'une réaction d'ordre 1 : la réaction d'estérification est une réaction d'ordre 1 (premier ordre).

$$v = kC = -\frac{dC}{dt} \Rightarrow kdt = -\frac{dC}{C} \Rightarrow -k \int_0^t dt = \int_{C_0}^C \frac{dC}{C} \Rightarrow -kt = \ln C + cste. \text{ A } t = 0, cste = -\ln C_0$$

$$-kt = \ln C - \ln C_0 \Rightarrow kt = \ln C_0 - \ln C \Rightarrow kt = \ln \frac{C_0}{C} \Rightarrow \frac{C_0}{C} = e^{kt} \Rightarrow C = C_0 e^{-kt} \Rightarrow \frac{n_{ac}^r}{V} = \frac{n_{ac}^o}{V} e^{-kt}$$

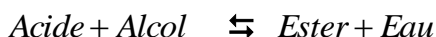
$$n_{ac}^r = n_{al}^r = n_{ac}^o e^{-kt} = n_{al}^o e^{-kt}$$

5-Temps de demi-réaction

C'est le temps pendant lequel la moitié de la quantité initiale d'acide ou d'alcool a disparu.

$$kt = \ln \frac{C_0}{C} = \ln \frac{n_{ac}^o}{n_{ac}^r}, \text{ à } t_{\frac{1}{2}} \Rightarrow n_{ac}^r = \frac{n_{ac}^o}{2} \Rightarrow t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k} \ln \frac{2n_{ac}^o}{n_{ac}^o} \Rightarrow \boxed{t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{k}}$$

6-Influence de la concentration des réactifs



- Un excès d'acide (ou d'alcool) accroît la vitesse d'estérification dans le sens (1) correspondant à la disparition d'acide ou d'alcool ajouté.
- De même, l'équilibre est placé dans le sens (2) (celui de l'hydrolyse) par addition d'ester ou d'eau.

O.G.4 Caractériser les réactions d'estérification, de saponification et les produits obtenus

O.S.4-1 : Décrire les réactions d'estérification et de saponification

I. Rappels sur les composés organiques

1. Les acides carboxyliques

Les acides carboxyliques sont des composés oxygénés ayant deux atomes d'oxygènes caractérisés par le groupement carboxylique **RCOOH**.

La formule générale d'un acide carboxylique saturé est **C_nH_{2n}O₂** avec **n** le nombre d'atomes de carbone.

Pour nommer un acide carboxylique à chaîne linéaire, on remplace le « e » final de l'alcane correspondant par la terminaison « **oïque** » le tout précédé du mot acide.

Exemples

- H-COOH : acide méthanoïque
- CH₃-COOH : acide éthanoïque
- CH₃-CH₂-COOH : acide propanoïque
-

2. Les alcools

Les alcools sont des composés oxygénés ayant un atome d'oxygène caractérisés par le groupement carboxylique **R-OH**. La formule générale d'un alcool saturé est **C_nH_{2n+1}OH** avec **n** le nombre d'atomes de carbone.

Pour nommer un alcool à chaîne linéaire, on remplace le « e » final de l'alcane correspondant par la terminaison « **ol** ».

Exemples

- CH₃-OH : méthanol
- CH₃-CH₂-OH : éthanol
- CH₃-CH₂-CH₂-OH : propanol

On distingue trois (03) classes des alcools

- Les alcools primaires : **R-CH₂-OH**
- Les alcools secondaires : **R-CH-R'**
OH
- Les alcools tertiaires : **R-C-R''**
OH

3. Les esters

Les esters sont des composés oxygénés ayant deux atomes d'oxygènes caractérisés par le groupement carboxylique **R-COO-R'**. La formule générale des esters saturés est **C_nH_{2n}O₂** avec **n** le nombre d'atomes de carbone.

Les esters comportent deux termes, le premier provenant de l'acide carboxylique se termine en « **oate** » et le second par l'alcool se termine en « **yl** ».

Exemples

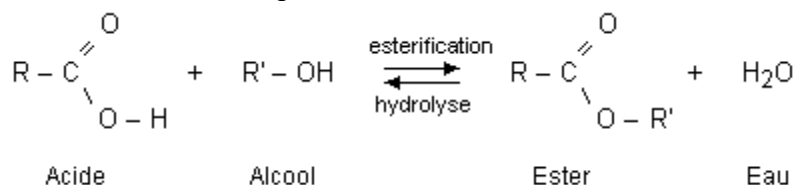
- CH₃-COO-CH₂-CH₃ : éthanoate d'éthyle
- H-COO-CH₂-CH₃ : méthanoate d'éthyle

I-REACTION D'ESTERIFICATION

I-1-Définition et équation-bilan

La réaction d'estérification est la réaction entre un **acide organique (acide carboxylique)** (**RCOOH**) et un **alcool** (**R'OH**) conduisant à un **ester** (**RCOOR'**) et à de l'eau (**H₂O**).

C'est une réaction réversible dont l'équation bilan est :



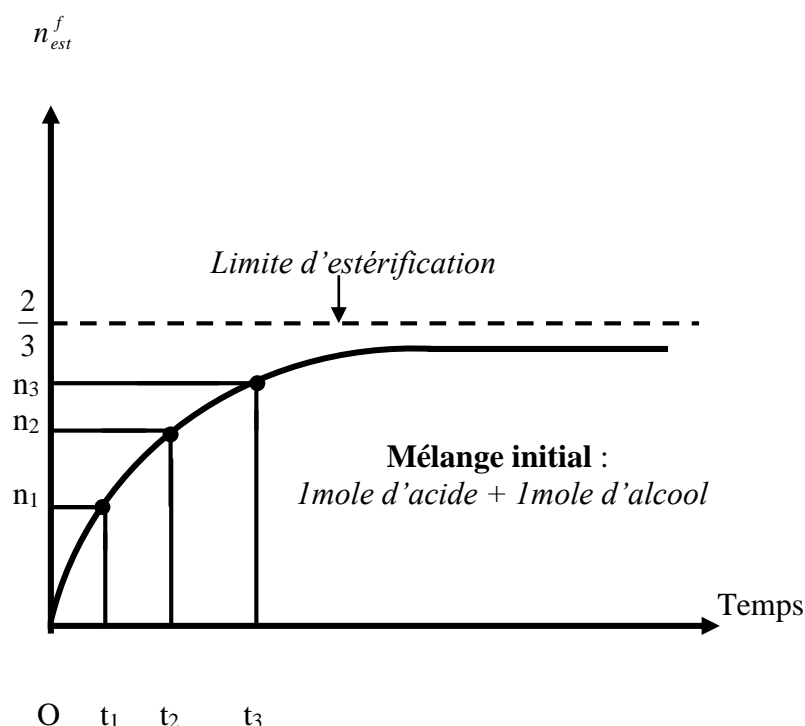
N.B. : La formule générale d'un acide carboxylique saturé est **RCOOH**, soit, si **n** est le nombre d'atomes de carbone, **C_nH_{2n}O₂**. Celle d'un ester est **RCOOR'**, soit **C_nH_{2n}O₂**. Les esters sont donc des **isomères** des acides carboxyliques.

Exemple : L'acide propanoïque C₃H₆O₂ a deux isomères : Le **méthanoate de méthyle** (CH₃COOCH₃) et le **méthanoate d'éthyle** (HCOOCH₂CH₃).

I-2-Etude expérimentale de l'estérification

1-Courbe d'évolution de la réaction

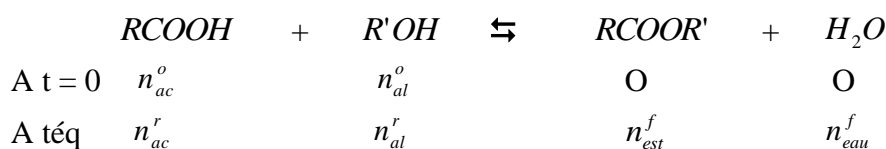
Traçons la courbe représentant en fonction du temps, le **nombre de mole d'ester formé** (n_{est}^f) à partir d'un mélange initial de même quantité d'acide carboxylique et d'alcool. L'allure de cette courbe est la suivante :*



2-Interprétation de la courbe

En début de réaction, la courbe est **croissante** (vitesse élevée) : il se forme plus d'ester. Puis, au bout d'un certain temps, le système se fige et la quantité d'ester formé **n'évolue plus** (diminution de la vitesse tendant vers l'annulation) : On dit qu'on atteint **l'équilibre d'estérification** dont la limite est $y = \frac{2}{3}$ qui est une asymptote horizontale.

3-Résultats



n_{al}^o : quantité initiale d'alcool, n_{ac}^o : quantité initiale d'acide, n_{ac}^r : quantité d'acide restant, n_{al}^r : quantité d'alcool restant, n_{est}^f : quantité d'ester formé, n_{eau}^f : quantité d'eau formée.

a-Résultats pour un mélange équimolaire

Un mélange **équimolaire** est un mélange dans lequel la quantité initiale de l'acide est **égale** à la quantité initiale de l'alcool : $n_{ac}^o = n_{al}^o$. Donc à l'équilibre on aura : $n_{ac}^r = n_{al}^r$ et $n_{est}^f = n_{eau}^f$.

$$n_{ac}^o = n_{al}^o = n_{ac}^r + n_{est}^f = n_{al}^r + n_{eau}^f$$

On trouve n_{ac}^r ou n_{al}^r par dosage avec une solution basique de molarité ou de normalité connue. Le dosage se fait selon l'équation-bilan suivante :



A l'équivalence acido-basique : $n_{H_3O^+} = n_{OH^-}$ or $n_{H_3O^+} = n_{ac}^r = C_A V_A$ et $n_{OH^-} = C_B V_B$. On aura donc : $n_{ac}^r = C_B V_B = \frac{N_B \cdot V_B}{n(OH^-)}$ où $n(OH^-)$ est le nombre de mole d'ions OH^- libéré par la base.

D'où à l'équilibre on a donc :

$$n_{ac}^o = n_{al}^o = C_B V_B + n_{est}^f = C_B V_B + n_{eau}^f$$

b-Résultats pour un mélange non équimolaire

Un mélange **non équimolaire** est un mélange dans lequel la quantité initiale de l'acide est **différente** de la quantité initiale de l'alcool : $n_{ac}^o \neq n_{al}^o$. Donc à l'équilibre on aura: $n_{ac}^r \neq n_{al}^r$ et $n_{est}^f = n_{eau}^f$.

■ **Pour l'acide** : $n_{ac}^o = n_{ac}^r + n_{est}^f = n_{ac}^r + n_{eau}^f \Rightarrow n_{est}^f = n_{eau}^f = n_{ac}^o - n_{ac}^r = n_{ac}^o - C_B V_B$

■ **Pour l'alcool** : $n_{al}^o = n_{al}^r + n_{est}^f = n_{al}^r + n_{eau}^f \Rightarrow n_{est}^f = n_{eau}^f = n_{al}^o - n_{al}^r$

I-3-Rendement d'une réaction d'estérification

1-Pour un mélange équimolaire

Il représente nombre d'acide ou d'alcool estérifié et se calcule par la relation :

$$r(est) = \frac{n_{est}^f}{n_{ac}^o} \times 100 = \frac{n_{eau}^f}{n_{al}^o} \times 100$$

La composition du mélange à l'équilibre dépend très peu de la nature de l'acide mais elle dépend beaucoup de la **classe de l'alcool utilisé**.

C'est ainsi que si le rendement d'estérification correspond à la limite d'estérification (toutefois le rendement peu être différent de la limite de la classe de l'alcool), on a :

- **Pour un alcool primaire** : $l = r = 67\%$ ($l > 60\%$)
- **Pour un alcool secondaire** : $l = r = 60\%$ ($10\% < l \leq 60\%$)
- **Pour un alcool tertiaire** : $l = r = 5\%$ à 10% ($l \leq 10\%$)

Remarques : a-On dit que « **l'équilibre est atteint** » quand le rendement trouvé correspond à la limite de la classe de l'alcool utilisé. Dans le cas contraire il ne l'est pas.

b-La limite d'estérification se calcule à **l'équilibre** avec la formule : $l = \frac{n_{est}^f}{n_{ac}^o} \times 100$

où n_{est}^f est la quantité d'ester (ou d'eau car $n_{est}^f = n_{eau}^f$) formé à l'équilibre tandis que le rendement se calcule à n'importe quel instant d'évolution de la réaction (équilibre ou non). Toutefois s'il n'y a pas de précision, le rendement qui peut ou ne pas être égal à la limite se calcule à l'équilibre.

2-Pour un mélange non équimolaire

Quantité d'ester (ou d'eau) formé

Elle est donnée par la relation :

$$r = \frac{\text{Quantité d'ester (ou d'eau) formé}}{\text{Quantité initiale du réactif en défaut (réactif limitant)}} \times 100$$

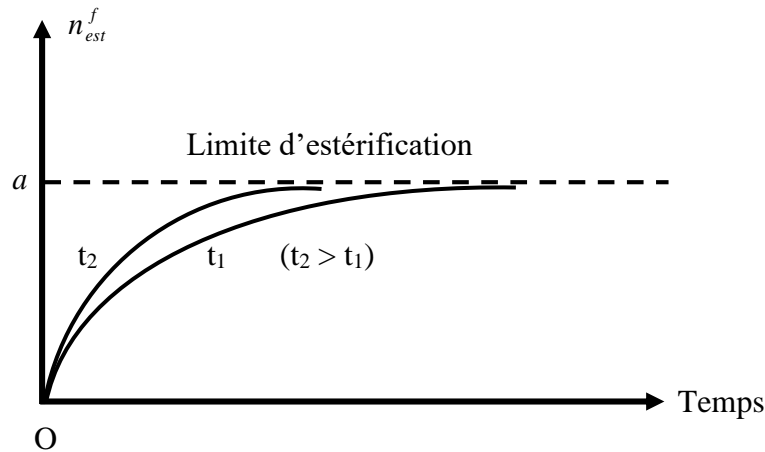
■ Si l'acide est en défaut : $n_{ac}^o < n_{al}^o$ alors : $r = \frac{n_{est}^f}{n_{ac}^o} \times 100$ (*pourcentage estérifié d'acide*)

■ Si l'alcool est en défaut : $n_{al}^o < n_{ac}^o$ alors : $r = \frac{n_{est}^f}{n_{al}^o} \times 100$ (*pourcentage estérifié d'alcool*)

I-4-Facteurs influençant la réaction d'estérification

1-La température

Une élévation de température dans une réaction d'estérification permet d'atteindre **plus rapidement l'équilibre**, mais elle est sans action sur la limite d'estérification.



La limite d'estérification est identique dans les deux cas, mais elle est atteinte plus rapidement à la température $t_2 > t_1$, c'est-à-dire quand la température augmente.

2-Les proportions initiales des réactifs

Si l'on ajoute, au mélange réactionnel en équilibre, une certaine quantité de l'un des réactifs, le système évolue dans le sens qui correspond à la disparition de ce réactif. Ainsi, **une addition d'alcool ou d'acide** déplace l'équilibre dans le sens de la réaction qui consomme ce réactif (estérification) : les quantités d'ester et d'eau augmentent, celles d'alcool et d'acide diminuent jusqu'à ce qu'un nouvel état d'équilibre soit atteint.

3-La présence des catalyseurs

Un catalyseur ne modifie pas l'équilibre chimique, mais permet de l'atteindre **plus rapidement**. Ainsi la réaction d'estérification est catalysée par les ions hydronium H_3O^+ en faible quantité provenant d'un acide fort tel que l'acide sulfurique et aussi d'autres acides.

4-La nature des réactifs

La vitesse d'estérification varie avec :

a-La classe d'alcool

Un alcool primaire s'estérifie plus vite qu'un alcool secondaire, et ce dernier plus vite qu'un alcool tertiaire. L'estérification d'un alcool tertiaire est difficile à cause du très mauvais rendement à l'équilibre.

b-La nature de l'acide

Tous les acides organiques ne s'estérifient pas de la même façon. Ainsi l'acide méthanoïque **HCOOH** estérifie plus rapidement que l'acide acétique **CH₃COOH**

I-5-Facteurs améliorant le rendement d'une réaction d'estérification

1-Extraction de l'ester

Si l'on élimine du mélange réactionnel en équilibre l'un des produits, le système évolue dans le sens qui correspond à la formation de ce produit. Ainsi l'ester peut être extrait par **distillation** c'est-à-dire en chauffant le mélange réactionnel pour qu'il (ester) passe à l'état de vapeur et les trois autres constituants (alcool, acide et eau) restent liquides. Mais il faut que l'ester soit le composé le **plus volatil** (température d'ébullition basse) tel que le méthanoate de méthyle (**HCOOCH₃**).

2-Elimination d'eau

L'eau formée est éliminée en utilisant un **déshydratant** tel que l'acide sulfurique. Celui-ci fixe l'eau au fur et à mesure de sa formation et joue, de plus, le rôle de catalyseur.

I-6-Caractéristiques de la réaction d'estérification

1-Réaction lente

A température ambiante, et en l'absence du catalyseur, la composition du mélange n'évolue pratiquement pas.

2-Réaction limitée

La transformation de l'acide et de l'alcool en ester et en eau n'est pas complète. Quand on atteint la **limite d'estérification**, on a un mélange où coexistent acide, alcool, ester et eau dans des proportions déterminées : **la réaction n'est pas totale** ($n_{est}^f = n_{eau}^f \neq n_{ac}^o$ ou n_{al}^o).

3-Réaction athermique

Elle se fait sans absorption ni dégagement de chaleur d'où l'élévation de la température ne déplace pas l'équilibre d'estérification.

I-7-Nomenclature des esters

Le nom d'un ester comporte deux parties :

- La première désigne le « reste » acide en remplaçant, dans le nom de l'acide, la terminaison **oïque** par le suffixe **aote**.
- La seconde partie du nom désigne le groupe alkyle issu de l'alcool.

Exemple: HCOO-CH₂-CH₃ : méthanoate d'éthyle.

I-8-Importance des esters

1-Composition des parfums

Les parfums sont des mélanges complexes de produits organiques plus ou moins volatils destinés à procurer une satisfaction olfactive, parmi lesquels on rencontre des **esters**. C'est le cas de l'**éthanoate de 3-méthylbutyle**.

2-Origine des substances odorantes

Les esters dégagent des odeurs plaisantes et fruitées. C'est ainsi que l'odeur de la banane est due à l'**éthanoate de butyle** ; celle de l'anana au **butanoate d'éthyle** ; celle de l'orange à l'**éthanoate d'octyle** ; celle de la pomme au **butanoate de méthyle**...

3-Extraction et analyse des huiles essentielles

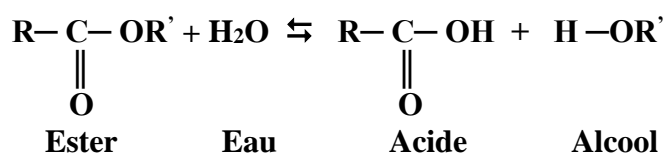
Une huile essentielle désigne le produit obtenu soit directement (à froid ou à chaud) soit par entraînement à la vapeur d'eau des huiles contenues dans certaines plantes. C'est ainsi qu'en parfumerie on extrait de cette manière les huiles essentielles d'un grand nombre de végétaux : ail, citron, eucalyptus, laurier, piment, ... Ces huiles renferment entre autres molécules des esters.

II-REACTION D'HYDROLYSE

II-1-Définition et équation-bilan

La réaction d'hydrolyse est la réaction entre un **ester** ($RCOOR'$) et l'**eau** (H_2O) conduisant à un **acide carboxylique** ($RCOOH$) et à un **alcool** ($R'OH$).

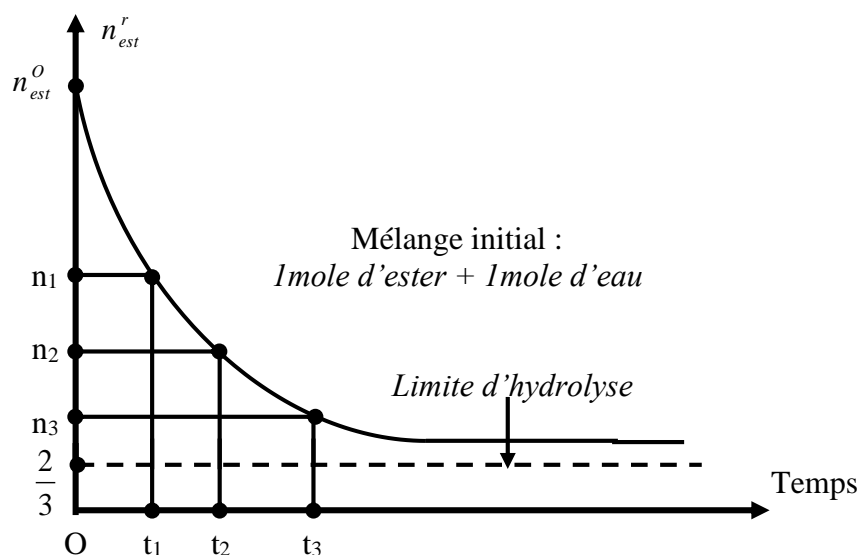
C'est une réaction réversible dont l'équation bilan d'une réaction d'hydrolyse est :



II-2-Etude expérimentale de l'hydrolyse

1-Courbe d'évolution de la réaction

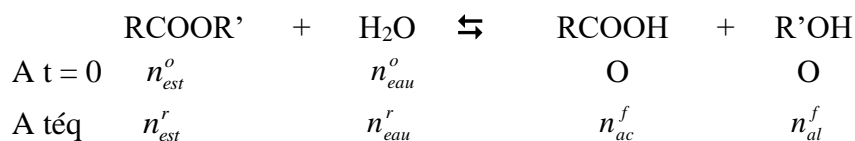
Traçons la courbe représentant en fonction du temps, le **nombre de mole d'ester restant** à partir d'un mélange initial de même quantité d'ester et d'eau.



2-Interprétation de la courbe

On constate que l'allure de la courbe est **décroissante** (la vitesse diminue régulièrement au cours du temps). Au bout d'un certain temps, le système ne semble plus évoluer (la vitesse s'est annulée) : On dit qu'on a atteint l'**équilibre d'hydrolyse**.

3-Résultats



n_{est}^o : quantité initiale d'ester, n_{eau}^o : quantité initiale d'eau, n_{est}^r : quantité d'ester restant, n_{eau}^r : quantité d'eau restante, n_{ac}^f : quantité d'acide formé, n_{al}^f : quantité d'alcool formé.

a-Résultats pour un mélange équimolaire

Un mélange **équimolaire** est un mélange dans lequel la quantité initiale de l'ester est **égale** à la quantité initiale de l'eau : $n_{est}^o = n_{eau}^o$. Donc à l'équilibre on aura : $n_{est}^r = n_{eau}^r$ et $n_{ac}^f = n_{al}^f$.

$$n_{est}^o = n_{eau}^o = n_{est}^r + n_{ac}^f = n_{eau}^r + n_{al}^f \text{ avec } n_{ac}^f = n_{al}^f = C_B V_B$$

b-Résultats pour un mélange non équimolaire

Un mélange **non équimolaire** est un mélange dans lequel la quantité initiale de l'ester est **différente** de la quantité initiale de l'eau : $n_{est}^o \neq n_{eau}^o$. Donc à l'équilibre on aura : $n_{est}^r \neq n_{eau}^r$ et $n_{ac}^f = n_{al}^f$.

■ **Pour l'ester** : $n_{est}^o = n_{est}^r + n_{al}^f = n_{est}^r + n_{ac}^f \Rightarrow n_{ac}^f = n_{al}^f = C_B V_B = n_{est}^o - n_{est}^r$

■ **Pour l'eau** : $n_{eau}^o = n_{eau}^r + n_{al}^f = n_{eau}^r + n_{ac}^f \Rightarrow n_{ac}^f = n_{al}^f = C_B V_B = n_{eau}^o - n_{eau}^r$

II-3-Rendement d'une réaction d'hydrolyse

1-Pour un mélange équimolaire

Il représente le pourcentage d'ester ou d'eau estérifiée et se calcule par la relation :

$$r(\text{hyd}) = \frac{n_{ac}^f}{n_{est}^o} \times 100 = \frac{n_{al}^f}{n_{eau}^o} \times 100$$

Pour un mélange équimolaire d'ester et d'eau les rendements d'estérification et d'hydrolyse sont reliés par la relation : $r(\text{est}) + r(\text{hyd}) = 100\%$.

C'est ainsi que si le rendement d'hydrolyse correspond à la limite d'hydrolyse, on a :

- Pour un alcool primaire : $l = r = 33\%$
- Pour un alcool secondaire : $l = r = 40\%$
- Pour un alcool tertiaire : $l = r = 95\%$

Remarque : La limite d'hydrolyse se calcule à l'équilibre avec la formule : $l = \frac{n_{al}^f}{n_{eau}^o} \times 100$

où n_{al}^f est la quantité d'alcool (ou d'acide car $n_{ac}^f = n_{al}^f$) formé à l'équilibre.

2-Pour un mélange non équimolaire

2-Réaction totale

Il n'y a pas ici de réaction inverse car l'anion carboxylate est sans action sur l'alcool : ce n'est pas une **réaction renversable**.

III-4-Propriétés des savons

En dissolvant un savon dans l'eau (pas dure : riche en ions calcium Ca^{2+} et magnésium Mg^{2+}) de la mousse apparaît : **le savon a des propriétés moussantes**. Il a un rôle de détergent (du latin **deterger : nettoyer**). Appliquer sur un objet sale, le savon assure le mouillage complet de la surface à nettoyer, décolle les salissures, les dissout et les disperse dans l'eau.

La matière première pour la fabrication des savons est le **corps gras**, d'origine végétale ou animale.

- Au laboratoire, on fabrique le savon par action d'une solution concentrée de soude sur de la margarine ou sur l'huile d'olive.
- Dans l'industrie, on le fabrique à partir d'huiles ou de graisses (huile de palme,...).

O.G.3 : Réaliser l'étude des solutions aqueuses des acides et des bases

ETUDE DES SOLUTIONS AQUEUSES DES ACIDES ET DES BASES

O.S.3-1 : Dégager l'influence des propriétés électriques de l'eau sur la solubilité des composés ioniques

I. Rappels

1. Solution aqueuse

Une solution aqueuse est une solution dont le solvant est l'eau. La solution est un mélange d'un solvant et d'un soluté. Un solvant est un corps qui dissout un autre corps. Un soluté est un corps qui est dissout.

2. Concentration molaire d'une solution

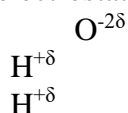
La concentration molaire d'une solution est la quantité de soluté dissout dans un litre de solution. $C = \frac{n}{V}$ \Rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} n: \text{quantité de matière en mol} \\ V: \text{volume d'une solution en l} \\ C: \text{concentration molaire d'une solution en mol/l} \end{array} \right.$

La dilution est une opération qui consiste à diminuer la concentration d'une solution. Soit V_1 et C_1 le volume et la concentration de la solution S_1 , si on la dilue en ajoutant le volume d'eau V_2 , alors la concentration de la solution diluée S_2 est : $C_2 = \frac{C_1 V_1}{V_1 + V_2}$

II. Propriétés électriques de l'eau

1. Structure de la molécule d'eau

Dans une molécule d'eau, l'atome d'oxygène est plus électronégatif que les atomes d'hydrogènes. Les électrons constituant les doublets liant sont ainsi plus attirés par l'atome d'oxygène que par les atomes d'hydrogènes. Il apparaît alors une légère charge positive $+\delta$ sur les atomes d'hydrogènes et une charge négative -2δ sur l'atome d'oxygène. Elle constitue alors un dipôle électrostatique : on dit qu'elle est polarisée.



2. Moment dipolaire de l'eau

Dans une molécule d'eau, on assiste à un transfert d'une charge de l'atome le moins électronégatif ou le plus électropositivité. Elle est assimilable à un dipôle électrique caractérisé par son moment dipolaire.

3. Structure des composés ioniques

Un composé ionique est formé d'un ion positif (cation) et d'un ion négatif (anion)

4. Dissolution des solutions ioniques

Lorsqu'on met un composé ionique dans l'eau, les molécules d'eau entourent les ions cristallins. L'attraction entre le cation et l'anion diminue, ce qui provoque la dissociation des ions qui sont alors hydratés et dispersés dans la solution.

5. Electrolytes :

Un électrolyte est une solution qui conduit le courant électrique ou une espèce chimique qui se dissocie en ion, en solution aqueuse.

a. Electrolytes forts

Lorsque la réaction d'un composé avec l'eau est totale, la solution obtenue est un électrolyte fort. **Exemple :** $HCl + H_2O \rightarrow H_3O^+ + Cl^-$

b. Electrolytes faibles

Lorsque la réaction d'un composé avec l'eau est partielle, la solution obtenue est un électrolyte faible. **Exemple :** $NH_3 + H_2O \rightleftharpoons NH_4^+ + OH^-$

O.S.3-2 : Décrire l'équilibre d'autoprotolyse de l'eau

III. L'équilibre d'autoprotolyse de l'eau

1. Equilibre de dissociation de l'eau

L'eau pure contient des ions hydroniums (H_3O^+) et des ions hydroxydes (OH^-). D'après l'équation : $2H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + OH^-$: c'est l'équation d'autoprotolyse de l'eau

2. Produit ionique de l'eau

Dans toute solution aqueuse et à une température donnée, le produit ionique de l'eau, noté K_e , est le produit des concentrations des ions hydronium (H_3O^+) et des ions hydroxydes (OH^-) : $K_e = [H_3O^+][OH^-]$ K_e est donc la constante d'équilibre. A 25°C, $K_e = 10^{-14}$,

Alors : $[H_3O^+][OH^-] = 10^{-14}$

O.S.3-3 : Etablir l'échelle de pH

IV. Etablissement de l'échelle de pH

1. Définition du pH

Le pH d'une solution aqueuse est égal à l'opposé du logarithme décimal de

la concentration en ion hydronium H_3O^+ : $pH = -\log [H_3O^+]$ ou $[H_3O^+] = 10^{-pH}$

N.B : cette formule n'est valable que dans les solutions diluées non pour les solutions concentrées

2. pH de l'eau pure

a. pH des solutions neutres

Toute solution neutre contient autant d'ions hydroniums que d'ions hydroxydes : $[H_3O^+] = [OH^-]$ d'où $pH = 7$

b. pH des solutions acides

Une solution est acide lorsqu'elle contient plus d'ions H_3O^+ que d'ions OH^- .

Soit : $[H_3O^+] > [OH^-]$ d'où $pH < 7$

c. pH des solutions basiques

Une solution est basique lorsqu'elle contient plus d'ions OH^- que d'ions H_3O^+ .

Soit : $[H_3O^+] < [OH^-]$ d'où $pH > 7$

Exercice : calculer le pH d'une solution de concentration des ions hydroxydes égale à $2 \cdot 10^{-4}$ à 25°C.

3. définition du pOH

Le pOH est l'opposé du logarithme décimal de la concentration en ion hydroxyde :

$$\boxed{\text{pOH} = -\log [\text{OH}^-] \text{ ou } [\text{OH}^-] = 10^{-\text{pOH}}}$$

4. relation entre pH et pOH

$$\boxed{\text{pH} + \text{pOH} = 14}$$

O.S.3-4 : Déterminer le pH des solutions aqueuses

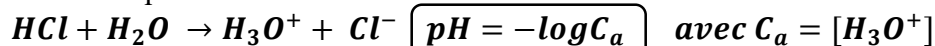
V. Détermination du pH des solutions

Le pH des solutions aqueuses se détermine à l'aide du papier pH, des indicateurs colorés ou d'un pH-mètre.

1. pH des solutions aqueuses d'acides forts et des bases fortes

a. pH des solutions aqueuses d'acides forts

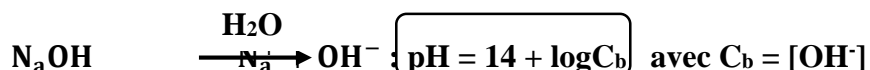
Un acide est fort lorsque sa réaction avec l'eau est totale :



N.B : pour un diacide $\text{pH} = -\log 2C_a$

b. pH des solutions aqueuses des bases fortes

Une base est forte lorsque sa réaction avec l'eau est totale :



N.B : pour une dibase $\text{pH} = 14 + \log 2C_b$

2. Cas des acides et des bases faibles

a. Acide faible : acide éthanóique (CH₃COOH)

Un acide faible est un acide dont la réaction avec l'eau n'est pas totale, mais limitée. Dans une solution aqueuse d'acide faible de concentration C_a

$$\boxed{\text{pH} > -\log C_a} \quad \text{avec } [\text{H}_3\text{O}^+] < C_a$$

b. Base faible : Ammoniac (NH₃)

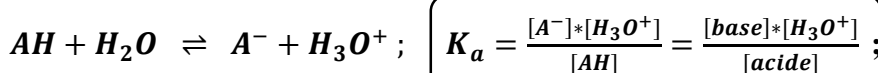
Une base est faible en solution aqueuse lorsque sa réaction avec l'eau n'est pas totale, mais limitée. Dans une solution aqueuse de base faible de concentration C_b

$$\boxed{\text{pH} < 14 + \log C_b} \quad \text{avec } [\text{OH}^-] > C_b$$

3. Constante d'acidité K_a et la constante de basicité K_b

a. Constante d'acidité K_a

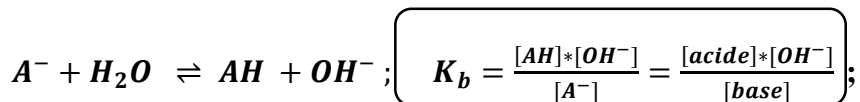
La constante d'acidité du couple **acide/base** (AH/A⁻) ou constante de dissociation de l'acide **AH** dans l'eau, est la constante d'équilibre associée à la réaction de l'acide **AH** avec l'eau.



$$pK_a = -\log K_a \Rightarrow K_a = 10^{-pK_a}$$

b. Constante de basicité Kb

La constante d'acidité du couple **acide/base** (AH/A^-) ou constante de protonation de la base A^- dans l'eau, est la constante d'équilibre associée à la réaction d'équation-bilan :



$$pK_b = -\log K_b \Rightarrow K_b = 10^{-pK_b}$$

4. Méthode de résolution de problèmes d'équilibre relatifs à un acide faible ou une base faible

a. Description des différentes étapes

Pour déterminer les concentrations des différentes espèces chimiques, on procède de la manière suivante :

- Identifier les espèces chimiques présentes dans la solution
- Exploiter la mesure du pH : $pH = -\log [H_3O^+]$ ou $[H_3O^+] = 10^{-pH}$
- Utiliser le produit ionique de l'eau : $[H_3O^+]*[OH^-] = 10^{-14}$
- Exploiter l'équation d'électroneutralité de la solution : $\sum[\text{ions positifs}] = \sum[\text{ions négatifs}]$
- Exploiter les équations de conservation de la matière.

b. Coefficient de dissociation

Le coefficient de dissociation ou de protonation est le rapport de la quantité d'acide dissocié ou de la base protonée à la quantité d'acide initial ou de la base initiale.

$$\alpha = \frac{n}{n_i} = \frac{c}{c_i}$$

Exercice d'application :

a) A 25°C, mesurons le pH d'une solution aqueuse d'acide éthanoïque de concentration 10^{-2} mol, nous trouvons $pH=3,4$. Déterminer les concentrations des espèces chimiques se trouvant dans cette solution puis calculer le coefficient de dissociation de cet acide.

b) A 25°C, mesurons le pH d'une solution aqueuse d'ammoniaque de concentration 10^{-2} mol, nous trouvons $pH=10,6$. Déterminer les concentrations des espèces chimiques se trouvant dans cette solution puis calculer le coefficient de dissociation.

c. Relation entre pH et pKa ; pH et pKb

$$pH = pK_a + \log \left(\frac{[base]}{[acide]} \right) = 14 - pK_b + \log \left(\frac{[base]}{[acide]} \right)$$

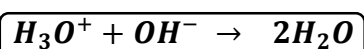
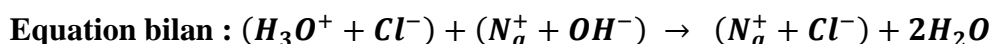
O.S.3-5 : Décrire les réactions acide-base et les propriétés des sels obtenus

VI. Réaction acido-basique

1. Réaction entre un acide fort et une base forte en solution aqueuse : HCl et NaOH

a. Etude qualitative de la réaction

En solution aqueuse :



Cette réaction **quasi-totale**, est la réaction inverse de celle de l'autoprotolyse de l'eau. C'est aussi l'équation bilan de toute réaction entre acide fort et une base forte en solution aqueuse.

Au cours de la réaction entre acide chlorhydrique ($\text{H}_3\text{O}^+ + \text{Cl}^-$) et l'hydroxyde de sodium ($\text{Na}^+ + \text{OH}^-$), les ions chlorure (Cl^-) et sodium (Na^+) n'interviennent pas et restent dans la solution. La réaction est exothermique entre les ions hydroniums (H_3O^+) et hydroxydes (OH^-).

b. Etude quantitative de la réaction

$\left\{ \begin{array}{l} \text{acide chlorhydrique (HCl): } C_a; V_a \\ \text{hydroxyde de sodium (NaOH): } C_b; V_b = V \end{array} \right.$ les espèces en présence: $\left\{ \begin{array}{l} \text{molécule: } \text{H}_2\text{O} \\ \text{ions: } \text{H}_3\text{O}^+; \text{OH}^-; \text{Cl}^-; \text{Na}^+ \end{array} \right.$

➤ Avant l'équivalence : $V_b < V_{bE}$ ou $\text{pH} < 7$, le milieu est acide, donc $n_a > n_b \Rightarrow C_a \cdot C_a > C_b \cdot V_b$, la concentration en ion H_3O^+ est telle que : $[\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{C_a \cdot V_a - C_b \cdot V_b}{V_a + V_b}$

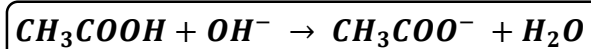
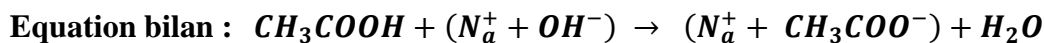
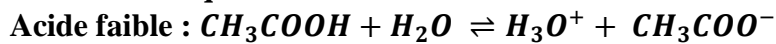
➤ Au point d'équivalence : $V_b = V_{bE} = V$ ou $\text{pH} = 7$, le milieu est neutre, donc $n_a = n_b \Rightarrow C_a \cdot C_a = C_b \cdot V_b$. $[\text{Cl}^-] = \frac{C_a \cdot V_a}{V_a + V_b}$ Et $[\text{Na}^+] = \frac{C_b \cdot V_b}{V_a + V_b}$

➤ Après l'équivalence : $V_b > V_{bE}$ ou $pH > 7$, le milieu est basique, donc $n_a < n_b \Rightarrow C_a \cdot V_a < C_b \cdot V_b$. la concentration en ion OH^- est telle que :

$$[OH^-] = \frac{C_b \cdot V_b - C_a \cdot V_a}{V_a + V_b}$$

2. Réaction entre un acide faible et une base forte en solution aqueuse : CH_3COOH et $NaOH$

a. Etude qualitative :



Cette réaction est **quasi-totale**. La réaction est exothermique

b. Etude quantitative de la réaction

{ acide éthanóique (CH_3COOH): C_a ; V_a
 { hydroxide de sodium ($NaOH$): C_b ; $V_b = V$ les espèces: { molécules: CH_3COOH ; H_2O
 { ions: H_3O^+ ; OH^- ; CH_3COO^- ; Na^+

➤ Avant le point de demi-équivalence : $n_b < n_a$ ou $pH < 7$, le milieu est acide,
 $\Rightarrow C_a \cdot V_a > C_b \cdot V_b$. $[CH_3COOH] = \frac{C_a \cdot V_a - C_b \cdot V_b}{V_a + V_b}$ et $[CH_3COO^-] = \frac{C_b \cdot V_b}{V_a + V_b}$

➤ Au point de demi-équivalence :

$V_{bE\frac{1}{2}} = V_{bE}$ le $pH = pK_a$, le milieu contient un mélange tampon,

➤ Au point d'équivalence : $n_a = n_b$; la solution est basique.

➤ Après l'équivalence : $n_a < n_b$ le pH est celui de la base forte

3. Préparation d'une solution tampon

Préparer une solution tampon revient à réaliser un mélange équimolaire d'un acide faible et de sa base conjuguée.

4. Intérêt des solutions tampon

Les solutions tampons ont un pH pratiquement constant. On les utilise :

- Pour étalonner un pH-mètre
- Pour réaliser certaine réaction chimique.
- Dans la fabrication des médicaments

5. Propriétés des solutions tampons

- Le pH est insensible à la dilution modérée
- Le pH varie peu à tout apport modéré d'ions H_3O^+ et d'ions OH^- provenant de l'acide fort et de la base forte.

O.G.5 : Comprendre les réactions d'oxydo-réduction

LES REACTIONS D'OXYDO-REDUCTION

O.S.5-1 : Caractériser une réaction d'oxydo-réduction

I. Notions d'oxydation, de réduction et d'oxydo-réduction

1. Oxydation :

C'est une réaction au cours de laquelle une espèce chimique (**réducteur**) perd des électrons.

Un oxydant est une espèce chimique qui capte des électrons au cours d'une réaction chimique.

2. Réduction :

C'est une réaction au cours de laquelle une espèce chimique (**oxydant**) gagne des électrons.

Un réducteur est une espèce chimique qui perd des électrons au cours d'une réaction chimique

3. Réaction d'oxydo-réduction

C'est une réaction de transfert d'électrons au cours de laquelle il y a, au même moment, l'oxydation du réducteur et la réduction de l'oxydant.

II. Couples redox : Ox/Red

Un couple redox est ensemble formé des espèces oxydante (**Ox**) et réductrice (**Red**), qui s'échangent n électrons, selon la demi équation suivante : $\alpha Ox + ne^- \rightleftharpoons \beta Red$; α et β sont des coefficients stœchiométriques.

Exemples : Ag^+/Ag : $Ag^+ + e^- \rightleftharpoons Ag$

Al^{3+}/Al : $Al^{3+} + 3e^- \rightleftharpoons Al$

III. Equation générale d'une réaction d'oxydo- réduction

Soient deux couples Ox_1/Red_1 et Ox_2/Red_2 ; on peut écrire :

$Ox_1 + n_1e^- \rightarrow Red_1 \quad *n_2$

$Red_2 \rightarrow Ox_2 + n_2e^- \quad *n_1$

$n_2Ox_1 + n_1Red_2 \rightarrow n_2Red_1 + n_1Ox_2$

IV. Règle d'équilibrage des réactions d'oxydo-réduction

1. En milieu acide :

On ajoute dans le membre où il y a un excès d'atomes d'oxygène, les ions H^+ ou H_3O^+ et dans l'autre les molécules d'eau (H_2O), ensuite on équilibre du point de vue atomique et électrique.

Exemple : SO_4^{2-}/SO_2

2. En milieu basique ou neutre

On ajoute dans le membre où il y a un excès d'atomes d'oxygène, les molécules d'eau (H_2O) et dans l'autre les ions OH^- ensuite on équilibre du point de vue atomique et électrique.

Exemple : H_2O/H_2

V. Réaction de dismutation

Il s'agit d'une réaction d'oxydo-réduction entre deux couples redox, dont l'un des réactifs est le réducteur d'un couple et l'oxydant de l'autre couple.

Exemple : ClO^-/Cl^- et ClO_2^-/ClO^- $3ClO^- \rightleftharpoons ClO_3^- + 3Cl^-$

O.S.5-2 : Prédire des réactions d'oxydo-réduction

VI. Potentiel d'oxydo-réduction d'un couple redox

1. Définition :

Le potentiel d'oxydo-réduction ou potentiel redox $E(X^{n+}/X)$, d'un couple redox (X^{n+}/X) est égal à la différence de potentiel (d.d.p) en circuit ouvert, entre l'électrode métallique X et l'électrode standard à hydrogène (E.S.H).

Soit : $E(X^{n+}/X) = (V_X - V_{E.S.H})$

Remarque : dans les conditions standards : $E(X^{n+}/X) = E^o(X^{n+}/X)$

2. Echelle des potentiels redox :

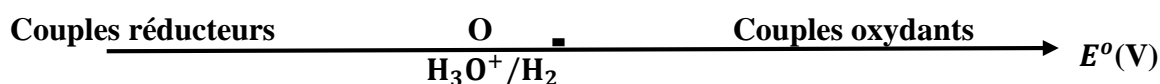
Par convention on a : $E^o(H_3O^+/H_2) = 0Volt$

- Si le couple X^{n+}/X est **plus réducteur** que le couple $H_3O^+/H_2 : E^o(H_3O^+/H_2) > E^o(X^{n+}/X)$ alors on écrit :

$$E = E^o(H_3O^+/H_2) - E^o(X^{n+}/X) < 0$$

- Si le couple X^{n+}/X est **plus oxydant** que le couple $H_3O^+/H_2 : E^o(H_3O^+/H_2) < E^o(X^{n+}/X)$ alors on écrit :

$E = E^o(H_3O^+/H_2) - E^o(X^{n+}/X) > 0$ finalement on obtient l'échelle suivante :



N.B : on pourra donc caractériser chaque demi-pile correspondant à un couple redox par un potentiel standard E^o .

3. Relation de NERNST

Pour un couple redox (Ox/Red) représentant une demi-pile, selon la demi-équation :

$\alpha Ox + ne^- \rightleftharpoons \beta Red$ La d.d.p aux bornes de la demi-pile à toute température est :

$$E = E^o + \frac{2,3.R.T}{n.F} \log \frac{[Ox]^\alpha}{[Red]^\beta}$$

A $25^\circ C$, $\frac{2,3.R.T}{F} \approx 0,06$; Alors $E = E^o + \frac{0,06}{n} \log \frac{[Ox]^\alpha}{[Red]^\beta}$ **n** : nombre d'électrons échangés

N.B : pour les solides, on a [solide]=1mol/l.

Exemple : $Cu^{2+}/Cu \quad Cu^{2+} + 2e^- \rightleftharpoons Cu ; E = E^o + 0,03 \log[Cu^{2+}]$ car $[Cu] = 1mol/l$

4. Relation entre K et E

Dans les conditions standards, on a de façon générale pour une pile électrochimique :

$$E^o = E^o_{(ox)} - E^o_{(red)} = E^o_{(+)} - E^o_{(-)}$$

$$E = E^o - \frac{0,06}{n} \log K \quad \text{avec K : constante d'équilibre redox (dans la pile)}$$

si $E^o < 0,4V$, les réactions qui ont lieu dans la pile sont réversibles où équilibrées.

O.S.5-3 : réaliser l'étude des couples redox

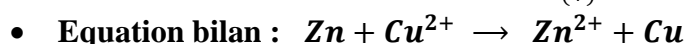
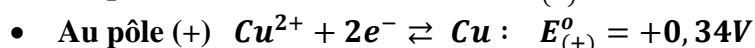
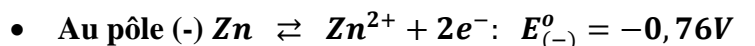
VII. Etude des piles

1. La pile Daniell

a) Structure et fonctionnement

La pile Daniell est prototype des piles (ou générateurs électrochimiques) dans lesquelles le métal (ou couple) le plus réducteur constitue le pôle négatif, et dont le fonctionnement est lié aux réactions redox, tel qu'il y a toujours **oxydation au pôle négatif pour le plus réducteur et la réduction au pôle positif pour le plus oxydant.**

Soient (Cu^{2+}/Cu) et (Zn^{2+}/Zn) , les couples redox métallique représentant les deux demi piles constituant la pile Daniell, contenant respectivement les solutions molaires (1mol) de sulfate de cuivre ($CuSO_4$) et de sulfate de zinc ($ZnSO_4$). Schématiquement on a :



b) La force électromotrice (f.é.m.) de la pile : $E = E_{(+)}^o + E_{(-)}^o = +1,1V$

c) La chaîne électrochimique : $\oplus Cu/Cu^{2+} // Zn^{2+}/Zn \ominus$

2. Exemples d'autres piles

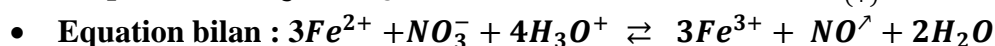
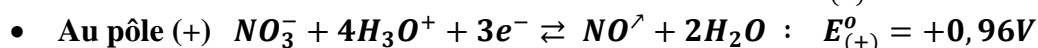
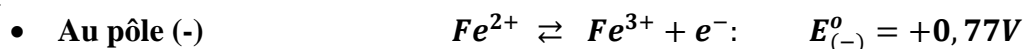
a) Piles formés par les couples redox ne comportant pas l'hydrogène

Pile formée à partir des couples Fe^{3+}/Fe^{2+} et NO_3^-/NO . Les deux couples redox ont un pouvoir oxydant important ; dans ce cas les électrodes doivent être inoxydables (ou inattaquable), par exemple en platine (Pt) ou en graphite (C).

N.B : l'électrode où se dégage un gaz doit être recouverte, afin de le recueillir ; de même lorsqu'il s'agit de fournir un gaz dans une demi pile

❖ Schéma de la pile

❖ Equation bilan



- ❖ La force électromotrice (f.é.m.) : $E = E_{(+)}^{\circ} + E_{(-)}^{\circ} = +0,19V$, la réaction est réversible
- ❖ La chaîne électrochimique : $\oplus (Pt)NO_3^-; NO_2; Fe^{3+}; Fe^{2+}/Pt \ominus$

b) Piles formés par les couples redox ne comportant aucun métal

Pile formée à partir des couples $H_2C_2O_4/CO_2$ et Cl_2/Cl^-

- ❖ Schéma de la pile

❖ Equation bilan

- Au pôle (-) $H_2C_2O_4 + H_2O \rightarrow 2CO_2 + 2H_3O^+ + 2e^-$: $E_{(-)}^{\circ} = -0,49V$
- Au pôle (+) $Cl_2 + 2e^- \rightarrow 2Cl^-$: $E_{(+)}^{\circ} = +1,36V$
- Equation bilan : $H_2C_2O_4 + H_2O + Cl_2 \rightarrow 2CO_2 + 2H_3O^+ + 2Cl^-$

- ❖ La force électromotrice (f.é.m.) : $E = E_{(+)}^{\circ} + E_{(-)}^{\circ} = +1,85V > 0,4V$, la réaction est totale

- ❖ La chaîne électrochimique : $\ominus (Pt)H_2C_2O_4; CO_2; Cl^-; Cl_2/Pt \oplus$

c) Piles formés par les couples redox comportant un métal

Pile formée à partir des couples O_2/H_2O_2 et $Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}$.

- ❖ Schéma de la pile

❖ Equation bilan

- Au pôle (-) $H_2O_2 + 2H_2O \rightarrow O_2 + 2H_3O^+ + 2e^-$: $E_{(-)}^{\circ} = +0,63V$
- Au pôle (+) $Cr_2O_7^{2-} + 14H_3O^+ + 6e^- \rightarrow 2Cr^{3+} + 21H_2O$: $E_{(+)}^{\circ} = +1,33V$
- Equation bilan : $3H_2O_2 + Cr_2O_7^{2-} + 8H_3O^+ \rightarrow 3O_2 + 2Cr^{3+} + 15H_2O$

- ❖ La force électromotrice (f.é.m.) : $E = E_{(+)}^{\circ} + E_{(-)}^{\circ} = +0,65V > 0,4V$, la réaction est totale

- ❖ La chaîne électrochimique : $\oplus (Pt)Cr_2O_7^{2-}; Cr^{3+}; O_2; H_2O_2/Pt \ominus$

Pile formée à partir des couples H_3O^+/H_2 et Sn^{2+}/Sn . La demi pile du couple redox H_3O^+/H_2 (ou E.S.H.) porte une électrode en platine (Pt). La demi-pile du couple redox Sn^{2+}/Sn est formée d'une électrode en métal.

❖ **Schéma de la pile**

❖ **Equation bilan**

- Au pôle (-) $Sn \rightleftharpoons Sn^{2+} + 2e^- : E_{(-)}^o = -0,14V$
- Au pôle (+) $2H_3O^+ + 2e^- \rightleftharpoons H_2 + 2H_2O : E_{(+)}^o = 0V$
- Equation bilan : $Sn + 2H_3O^+ \rightleftharpoons Sn^{2+} + H_2 + 2H_2O$

❖ La force électromotrice (f.é.m.) : $E = E_{(+)}^o + E_{(-)}^o = +0,14V < 0,4V$, la réaction est réversible

❖ La chaîne électrochimique : $\oplus (Pt)H_3O^+; H_2 \text{ // } ; Sn^{2+}/Sn \ominus$

O.S.5-4 : Dégager l'importance du solvant et du pH dans les réactions d'oxydo-réduction

VIII. Rôle du solvant dans les réactions redox

De façon générale, le solvant le plus employé dans les réactions d'oxydo-réduction est de l'eau pure, cela peut être à trois effets : dispersif, ionisant et solvant. Dans ces conditions le solvant a pour rôle de faciliter la mobilité des ions en solution dans les demi-piles.

O.S.5-5 : Réaliser les titrages par oxydo-réduction

IX. Le dosage redox

1. Le dosage direct

a. Le but :

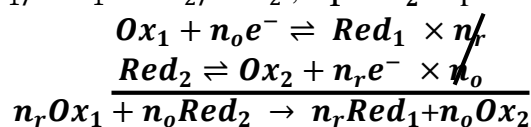
Le dosage direct permet de déterminer la concentration molaire d'une solution oxydante ou réductrice.

b. Le principe

On dose soit un certain volume V_0 d'une solution oxydante (de concentration C_0 inconnue) à l'aide d'une solution réductrice de concentration C_r connue, jusqu'à l'équivalence redox ou vis-versa.

c. Relation à l'équivalence redox

Soient deux couples Ox_1/Red_1 et Ox_2/Red_2 ; $E_1^o > E_2^o$ on peut écrire :



Par proportionnalité :

$$\frac{n(\text{Ox}_1)}{n_r} = \frac{n(\text{Red}_2)}{n_o} \text{ Soit : } n_o * n(\text{Ox}_1) = n_r * n(\text{Red}_2)$$

Or $n(\text{Ox}_1) = C_o \cdot V_o$ et $n(\text{Red}_2) = C_r \cdot V_r$; on peut écrire: $n_o \cdot C_o \cdot V_o = n_r \cdot C_r \cdot V_r$

n_o : Nombre d'électrons gagnés par l'oxydant1

n_r : Nombre d'électrons perdus par le réducteur2

D'autre part : $N_o = C_o \cdot V_o$; Normalité de la solution oxydante

$N_r = C_r \cdot V_{or}$; Normalité de la solution réductrice

C : Concentration molaire ou molarité d'une solution

d. Normalité d'une solution

Une solution oxydante ou réductrice est dite normale, si elle peut respectivement gagner ou perdre une mole d'électrons par litre de solution.

2. Le dosage indirect

Ce type de dosage est utilisé lorsque le changement de couleur du milieu réactionnel au point d'équilibre est difficile à apprécier. On dose un certain volume de la solution à titrer avec un excès d'une solution titrant de façon à ce que tous les ions réactifs de la solution à titrer soient réduits ou oxydés. Ensuite l'excès de la solution titrant est dosé directement avec une autre solution de concentration connue.

FIN DU PROGRAMME