

Feuille d'exercices 1

Théorie des ensembles, relations d'équivalence.

1. Soit X et Y deux ensembles, $f : X \rightarrow Y$ une application, et $A \subset X$ et $B \subset Y$.
Simplifier les deux expressions : $f(f^{-1}(f(A)))$ et $f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$.

2. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application. Montrer que

- (a) f est injective $\Leftrightarrow \forall A \subset X \ f^{-1}(f(A)) = A$.
(b) f est surjective $\Leftrightarrow \forall B \subset Y \ f(f^{-1}(B)) = B$.

3. Soit X, Y et Z trois ensembles.

(a) Soit $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux applications. Montrer que si l'application composée $g \circ f$ est injective, alors f est injective, puis montrer que si l'application $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

(b) Soit $f : Y \rightarrow X$ et $g : Z \rightarrow X$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : Z \rightarrow Y$ telle que $g = f \circ h$ si et seulement si on a $g(Z) \subset f(Y)$.

À quelle condition h est-elle unique ?

(c) Soit $f : X \rightarrow Y$ et $g : X \rightarrow Z$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : Y \rightarrow Z$ telle que $g = h \circ f$ si et seulement si $\forall x, x' \in X$ on a : $f(x) = f(x') \Rightarrow g(x) = g(x')$.

À quelle condition h est-elle unique ?

4. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application.

(a) Montrer l'équivalence des propriétés suivantes : "il existe $g : Y \rightarrow X$ telle que $f \circ g = Id_Y$ " et " f est surjective".

(b) Montrer l'équivalence des propriétés suivantes : "il existe $g : Y \rightarrow X$ telle que $g \circ f = Id_X$ " et " f est injective".

Soit deux ensembles X et Y .

5. **Définitions :**

-On dit que X et Y sont équipotents s'il existe une bijection de X sur Y .

-On dit que X a un plus petit cardinal que Y s'il existe une injection de X dans Y . On note alors $\#X \leq \#Y$.

-On dit que X et Y ont même cardinal si $\#X \leq \#Y$ et $\#Y \leq \#X$. Dans cet exercice nous montrons le théorème de Cantor-Bernstein :

Deux ensembles X et Y sont équipotents si et seulement si ils ont le même cardinal.

(a) Quel sens de cette équivalence est-il trivial ?

(b) On suppose $X \subset Y$ et $\#Y \leq \#X$.

i. Montrer qu'il existe $Z \subset X$ équipotent à Y . On note alors $g : Y \rightarrow Z$ une bijection.

ii. Soit $C_0 = Y \setminus X$. Montrer que $C_0 \cap g(C_0) = \emptyset$.

On définit par récurrence C_k , pour $k \geq 0$, en posant $C_{k+1} = g(C_k)$.

iii. Montrer que pour tout n et tout $k < n$, on a $C_n \cap C_k = \emptyset$.

On pose $C = \cup_{k \in \mathbb{N}} C_k$ et $D = \cup_{k \geq 1} C_k$.

iv. Montrer que $Y \setminus C = X \setminus D$.

v. Montrer que $h : Y \rightarrow X$ définie par $h(x) = g(x)$ si $x \in C$ et $h(x) = x$ sinon, est une bijection.

(c) Traiter le cas général.

6. Soit $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une famille d'ensembles dénombrables. On pose $E = E_n$. On pose $F_0 = E_0$, et on définit F_n par récurrence en posant $F_n = E_n \setminus \cup_{k=0}^{n-1} E_k$.

(a) Montrer que les $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints.

(b) Montrer que $E = \cup F_n$.

On désigne par f_n une injection de E_n dans \mathbb{N} . Et on définit $f : E \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par $f(x) = (n, f(n))$, où n est tel que $x \in F_n$.

(c) Montrer que f est bien définie et qu'il s'agit d'une injection.

(d) En déduire que E est dénombrable, que l'ensemble des polynômes à coefficients entiers est dénombrable, que l'ensemble des parties finies de \mathbb{N} est dénombrable et enfin que l'ensemble des nombres algébriques¹ est dénombrable.

7. Soit A l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1 dont le développement décimal ne contient que des 1 et des 8.

¹On rappelle qu'un réel x est algébrique s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers. S'il n'est pas algébrique un réel est transcendant.

- (a) Montrer que l'on a $\#\mathbb{N} \leq \#A$.

On suppose que A est équipotent à \mathbb{N} . Soit f une bijection de \mathbb{N} sur A . Étant donné un entier n , on définit la suite $(a_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ par $f(n) = 0, a_{n,1} \cdots a_{n,k} \cdots$. On pose alors $x = 0, a_{1,1} a_{2,2} \cdots a_{n,n}, \cdots$ et $y = 1 - x$.

- (b) Montrer que x et y sont deux éléments de A .
- (c) Quel lien existe-t-il entre les décimales de x et celles de y ?
- (d) Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $f(p) = y$. Comparer les $p^{\text{ième}}$ décimale de x et de y . Que peut-on en conclure ?
- (e) Montrer que \mathbb{R} est un ensemble qui n'est pas dénombrable.
8. (a) Montrer que le produit fini d'ensembles dénombrables (équipotents à une partie de \mathbb{N}) est dénombrable.
- (b) Montrer que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites d'entiers, n'est pas dénombrable.
9. Montrer que l'ensemble des nombres transcendants n'est pas dénombrable.
10. Soit X et Y deux ensembles finis de même cardinal. Montrer que pour une application $f : X \rightarrow Y$ les trois propriétés, bijectivité, injectivité et surjectivité, sont équivalentes.
11. Soit E un ensemble. On définit sur $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E , les relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 par : $A\mathcal{R}_1B$ si $\#A \leq \#B$ et $A\mathcal{R}_2B$ si A est équipotent à B .
- (a) Montrer que \mathcal{R}_1 n'est pas une relation d'ordre et que \mathcal{R}_2 est une relation d'équivalence.
- (b) Décrire les classes d'équivalence de \mathcal{R}_2 lorsque $E = \mathbb{R}$.

12. Soit E et F deux ensembles, et soit $f : E \rightarrow F$. On définit sur E la relation \mathcal{R} suivante :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

- (a) Vérifier que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
Étant donné $x \in E$, on note \dot{x} sa classe d'équivalence pour cette relation.
- (b) Que peut-on dire de ces classes d'équivalence si f est injective ?
- (c) Montrer que pour tout $x \in E$ on a $\dot{x} = f^{-1}(f(x))$.
On définit sur $\tilde{E} := E/\mathcal{R}$ la fonction \tilde{f} par $\tilde{f}(\dot{x}) = f(x)$.
- (d) Montrer que \tilde{f} est bien définie.
- (e) Montrer que $\tilde{f} : \tilde{E} \rightarrow f(E)$ est une bijection.

13. Lemme des bergers

Soit X et Y deux ensembles. On suppose que X est fini et on considère une application $f : X \rightarrow Y$.

$$\text{Montrer que : } \text{Card}(X) = \sum_{y \in Y} \text{Card}(f^{-1}(y)).$$

14. On reprend les notations de l'exercice 12 et on suppose que E et F sont des espaces vectoriels, que E est de dimension finie et que f est une application linéaire. On considère $\{e_1, \dots, e_k\}$ une base de $\ker f$ que l'on complète par $\{f_1, \dots, f_l\}$ pour obtenir une base de E .
- (a) Montrer que \tilde{E} peut être muni d'une structure "naturelle" d'espace vectoriel. Montrer qu'alors \tilde{f} est une application linéaire entre \tilde{E} et F .
- (b) Montrer que $\dot{0}_E = \ker \tilde{f}$.
- (c) Montrer que $\{\dot{f}_1, \dots, \dot{f}_l\}$ est une base de \tilde{E} .
- (d) Démontrer le théorème du rang.

15. Extrait du partiel de novembre 2008

On considère sur \mathbb{R} la relation \mathcal{R} définie, pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (y - x) \in \mathbb{Z}$.

- (a) Vérifier que \mathcal{R} est une relation d'équivalence. On notera \bar{x} la classe d'équivalence de $x \in \mathbb{R}$ pour cette relation, et \mathbb{R}/\mathbb{Z} l'ensemble quotient de \mathbb{R} par \mathcal{R} .
- (b) Expliciter $\bar{0}$, puis exprimer $\overline{x+1}$, ainsi que $\overline{-x}$, en fonction de \bar{x} .
- (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\bar{x} \cap [0, 1[$ est un singleton. On notera r_x son unique élément.
- (d) Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow [0, 1[$, définie par $\varphi(\bar{x}) = r_x$ est une bijection.
- (e) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a : $\overline{x+y} = \overline{r_x + r_y}$.
16. Soit $n \geq 2$ un entier. On considère sur \mathbb{Z} la relation suivante notée \equiv et appelée *congruence modulo n* et qui est définie par $a \equiv b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad b - a = kn$.
- (a) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} . Préciser la classe d'équivalence de 0 et d'un entier quelconque $a \in \mathbb{Z}$.
- (b) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$ il existe un unique $r = r_a$ dans $\{0, 1, \dots, n-1\}$ tel que $a \equiv r \pmod{n}$.
- (c) Déterminer le cardinal de l'ensemble quotient \mathbb{Z}/\equiv , noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- (d) Montrer que \equiv est compatible avec l'addition et la multiplication sur \mathbb{Z} .
- (e) On désigne par \bar{a} la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ une opération $\hat{+}$ telle que $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $\bar{a} \hat{+} \bar{b} = \overline{a+b}$.

- (f) Montrer que $\hat{+}$ est associative, commutative, admet un élément neutre, et que tout élément admet un symétrique.
- (g) Montrer de même qu'il existe une multiplication sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et en déterminer les propriétés.
- (h) Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et $\forall l \in \mathbb{N}^*$, si $a \equiv b \pmod{n}$, alors $a^l \equiv b^l \pmod{n}$.
- (i) Écrire les tables des opérations dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
17. Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on définit la relation \mathcal{R} par $f\mathcal{R}g$ s'il existe $\varphi \in E$ **bijective** et telle que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$.
- (a) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
- (b) A-t-on $\cos \mathcal{R} \sin$?
- (c) Soit $P(X) = X^2$ et $Q(X) = X^2 + pX + q$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour que $P\mathcal{R}Q$.
18. Soit X un ensemble. On note $\sigma(X)$ l'ensemble des bijections de X dans X . On munit cet ensemble de la composition des applications notée " \circ ".
- (a) Montrer \circ est une opération interne de $\sigma(X)$.
- (b) Montrer que cette opération possède un élément neutre, qu'elle est associative et que tout élément possède un inverse.
- (c) Exprimer le cardinal de $\sigma(X)$ en fonction de celui de X .