

Exercice 1 [00246] [correction]

La fonction $t \mapsto \sin \frac{1}{t}$ si $t > 0$ et 0 si $t = 0$ est-elle continue par morceaux sur $[0, 1]$?

Exercice 2 [00316] [correction]

Montrer que l'équation $x^n + x^2 - 1 = 0$ admet une unique racine réelle strictement positive pour $n \geq 1$. On la note x_n . Déterminer la limite ℓ de la suite (x_n) puis un équivalent de $x_n - \ell$.

Exercice 3 [00317] [correction]

Pour tout entier $n \geq 2$, on considère l'équation $(E_n) : x^n = x + 1$ dont l'inconnue est $x \geq 0$.

- Montrer l'existence et l'unicité de x_n solution de (E_n) .
- Montrer que (x_n) tend vers 1.
- Montrer que (x_n) admet un développement limité à tout ordre. Donner les trois premiers termes de ce développement limité.

Exercice 4 [00318] [correction]

Pour $n \geq 2$, on considère le polynôme

$$P_n = X^n - nX + 1$$

- Montrer que P_n admet exactement une racine réelle entre 0 et 1, notée x_n .
- Déterminer la limite de x_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- Donner un équivalent de (x_n) puis le deuxième terme du développement asymptotique x_n .

Exercice 5 [00319] [correction]

a) Soit

$$u_n = \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{n+k}$$

où $p \in \mathbb{N}^*$ est fixé. Montrer que la suite (u_n) converge. Sa limite sera notée ℓ (on ne demande pas ici de la calculer)

b) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 et telle que $f(0) = 0$. Soit

$$v_n = \sum_{k=1}^{np} f\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

Montrer que (v_n) converge. Exprimer sa limite en fonction de ℓ .

c) Calculer ℓ en utilisant $f(x) = \ln(1+x)$.

d) Si f de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{C} est continue et vérifie $f(0) = 0$, montrer qu'il peut y avoir divergence de la suite (v_n) .

Exercice 6 [00323] [correction]

Développement asymptotique à trois termes de :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2}$$

Exercice 7 [00563] [correction]

Soit (u_n) une suite strictement croissante de réels de $[0, 1]$ de limite 1. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(u_n x + 1 - x)}{2^n}$$

Exercice 8 [02436] [correction]

Calculer

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt$$

Exercice 9 [02444] [correction]

Soit

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

a) Calculer les limites de f en 0^+ et $+\infty$, la limite en $+\infty$ de $f(x)/x$ et montrer que $f(x)$ tend vers $\ln 2$ quand x tend vers 1.

b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{+*} mais qu'elle ne l'est pas sur \mathbb{R}^+ .

c) Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

Exercice 10 [02471] [correction]

Soit $f(x) = (\cos x)^{1/x}$ et (\mathcal{C}) le graphe de f .

a) Montrer l'existence d'une suite (x_n) vérifiant :

i) (x_n) est croissante positive.

ii) la tangente à (\mathcal{C}) en $(x_n, f(x_n))$ passe par O .

b) Déterminer un développement asymptotique à 2 termes de (x_n) .

Exercice 11 [03181] [correction]

Déterminer un équivalent de

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\ln(1-x)} dx$$

Exercice 12 [03184] [correction]

Soient K un réel strictement supérieur à 1 et (ε_n) une suite de réels positifs convergeant vers 0. Soit (u_n) une suite de réels de $[0, 1]$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n + \varepsilon_n}{K}$$

La suite (u_n) converge-t-elle vers 0 ?

Exercice 13 [00525] [correction]

Justifier l'existence et calculer

$$I = \int_0^{+\infty} t [1/t] dt$$

Exercice 14 [00572] [correction]

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[, \mathbb{R})$. On suppose que f et f'' sont intégrables.

- a) Montrer que $f'(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.
- b) Montrer que $f \cdot f'$ est intégrable.

Exercice 15 [02446] [correction]

a) Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. Déterminer les limites des suites

$$\left(\int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right) \text{ et } \left(\int_a^b f(t) \cos(nt) dt \right)$$

b) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt) \cos t}{\sin t} dt$$

(on procédera par récurrence)

c) En déduire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

d) Etudier la limite puis un équivalent de

$$\left(\int_0^{\pi/2} \ln(2 \sin(t/2)) \cos(nt) dt \right)$$

Exercice 16 [03334] [correction]

La fonction $x \mapsto \int_0^x \sin(e^t) dt$ admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 17 [01056] [correction]

a) Donner un développement asymptotique à deux termes de

$$u_n = \sum_{p=2}^n \frac{\ln p}{p}$$

On pourra introduire la fonction $f : t \mapsto (\ln t)/t$.

b) A l'aide de la constante d'Euler, calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

Exercice 18 [01083] [correction]

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} \ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$$

Calculer la somme lorsqu'il y a convergence.

Exercice 19 [01325] [correction]

Soit $j \in \mathbb{N}$. On note Φ_j le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant

$$\sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \geq j$$

a) Justifier la définition de Φ_j .

b) Démontrer que $\Phi_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} +\infty$.

c) Démontrer $\frac{\Phi_{j+1}}{\Phi_j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} e$.

Exercice 20 [02418] [correction]

Former un développement asymptotique à trois termes de la suite (u_n) définie par

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = (n + u_n^{n-1})^{1/n}$$

Exercice 21 [02423] [correction]

On pose

$$u_n = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)^\alpha} \text{ et } v_n = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)^\alpha}$$

- a) Déterminer la nature de la série de terme général u_n selon α .
- b) Déterminer la nature de la série de terme général v_n selon α .

Exercice 22 [02424] [correction]

Convergence et calcul, pour $z \in \mathbb{C}$, de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}}$$

Exercice 23 [02428] [correction]

On pose

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

- a) Nature des séries de termes généraux $f(n)$ puis $(-1)^n f(n)$.
- b) Montrer la convergence de la série de terme général

$$f(n) - \int_{n-1}^n f(t) dt$$

- c) Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f(n)$$

Indice : On pourra s'intéresser à la quantité

$$2 \sum_{k=1}^n f(2k) - \sum_{k=1}^{2n} f(k)$$

Exercice 24 [02429] [correction]

On fixe $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{n!}{x^n} \prod_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{x}{k} \right)$$

- a) Etudier la suite de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge et préciser sa limite.
- b) Etablir l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la série de terme général :

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

converge.

- c) Etablir l'existence de $A \in \mathbb{R}^*$ tel que $u_n \sim An^\alpha$.
- d) Etudier la convergence de la série de terme général u_n .

Exercice 25 [02430] [correction]

On note $u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n dt$.

- a) Déterminer la limite de u_n .
- b) Trouver une relation de récurrence entre u_n et u_{n+2} .
- c) Donner la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.
- d) Discuter suivant $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série de terme général u_n/n^α .

Exercice 26 [02431] [correction]

Soit $a > 0, b > 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (a + bk), B_n = \prod_{k=1}^n (a + bk)^{1/n}$$

Trouver $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{A_n}$ en fonction de e .

Exercice 27 [02432] [correction]

- a) Etudier $\sum u_n$ où $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x+\dots+x^n}$.
- b) Etudier $\sum v_n$ où $v_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x+\dots+x^n}$.

Exercice 28 [02433] [\[correction\]](#)

Soit $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par :

$$u_1 > 0 \text{ et } \forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$$

- a) Condition nécessaire et suffisante sur α pour que (u_n) converge.
- b) Equivalent de u_n dans le cas où (u_n) diverge.
- c) Equivalent de $(u_n - \ell)$ dans le cas où (u_n) converge vers ℓ .

Exercice 29 [02434] [\[correction\]](#)

Soit, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\cos(x^{1/3})}{x^{2/3}}$$

- a) Nature la série de terme général

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx - f(n)$$

- b) Nature de la série de terme général $f(n)$.
(indice : on pourra montrer que $\sin(n^{1/3})$ n'admet pas de limite quand $n \rightarrow +\infty$)
- c) Nature de la série de terme général

$$\frac{\sin(n^{1/3})}{n^{2/3}}$$

Exercice 30 [02443] [\[correction\]](#)

- a) Existence de

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \sin(t^2) dt$$

- b) Montrer que A se met sous la forme $A = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ avec $u_n \geq 0$. En déduire $A \geq 0$.
- c) Mêmes questions avec

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \cos(t^2) dt$$

- d) Comment retrouver ces résultats avec un logiciel de calcul formel

Exercice 31 [00926] [\[correction\]](#)

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^n(t) dt$$

Exercice 32 [00939] [\[correction\]](#)

Soient $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$u_n(\alpha) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^\alpha (\cos t)^n dt$$

- a) Nature de la série de terme général $u_n(1)$.
- b) Plus généralement, nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$.
- c) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\alpha)$ pour $\alpha = 2, 3$.

Exercice 33 [02435] [\[correction\]](#)

Etudier la limite de

$$\int_0^1 f(t^n) dt$$

où $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 34 [02438] [\[correction\]](#)

- a) Démontrer la convergence de la série de terme général

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

- b) Comparer

$$a_n \text{ et } n \int_0^{+\infty} t^n e^{-nt} dt$$

- c) En déduire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{(1-te^{-t})^2} dt$$

Exercice 35 [02439] [correction]

Soient $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$ et $n \in \mathbb{Z}$. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{e^{it} - a} dt$$

Exercice 36 [02445] [correction]

On pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt$$

pour tout entier $n > 0$.

- a) Trouver la limite ℓ de (I_n) .
- b) Donner un équivalent de $(\ell - I_n)$.
- c) Justifier

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} dy = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$$

- d) Donner un développement asymptotique à trois termes de (I_n) .

Exercice 37 [00465] [correction]

Soient $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t) dt}$$

- a) Montrer que N définit une norme sur E .
- b) Comparer N et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 38 [00477] [correction]

Soit E un espace vectoriel réel normé. On pose

$$f(x) = \frac{1}{\max(1, \|x\|)} x$$

Montrer que f est 2-lipschitzienne.

Montrer que si la norme sur E est hilbertienne alors f est 1-lipschitzienne.

Exercice 39 [02409] [correction]

- a) Quelles sont les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'application

$$(x, y) \mapsto N_a(x, y) = \sqrt{x^2 + 2axy + y^2}$$

définit une norme sur \mathbb{R}^2 .

- b) Si N_a et N_b sont des normes, calculer

$$\inf_{(x,y) \neq 0} \frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)} \text{ et } \sup_{(x,y) \neq 0} \frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)}$$

Exercice 40 [02411] [correction]

Soit

$$E = \{f \in C^2([0, \pi], \mathbb{R}) / f(0) = f'(\pi) = 0\}$$

- a) Montrer que

$$N : f \mapsto \|f + f''\|_\infty$$

est une norme sur E .

- b) Montrer que N est équivalente à

$$\nu : f \mapsto \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty$$

Exercice 41 [02412] [correction]

Soient l'espace $E = \{f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}) / f(0) = 0\}$ et N l'application définie sur E par

$$N(f) = N_\infty(3f + f')$$

- a) Montrer que (E, N) est un espace vectoriel normé puis qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_\infty(f) \leq \alpha N(f)$.
- b) Les normes N_∞ et N sont-elles équivalentes?

Exercice 42 [03611] [correction]

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1[$, à valeurs réelles et de carré intégrable sur $[0, 1[$.

On note $\|f\|_2$ la norme définie par

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

- a) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $f \in E$, justifier que $t \mapsto t^n f(t)$ est intégrable sur $[0, 1[$.

On note alors

$$a_n(f) = \int_0^1 t^n f(t) dt$$

b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que

$$\int_{-1}^1 P(t) dt + i \int_0^\pi P(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = 0$$

En déduire que

$$\int_0^1 P(t)^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

c) Vérifier que, si $f \in E$, alors

$$\sum_{k=0}^n a_k(f)^2 = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n a_k(f) t^k \right) f(t) dt$$

En déduire que la série $\sum a_k(f)^2$ converge et que l'on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(f)^2 \leq \pi \|f\|_2^2$$

d) On pose, pour $f \in E$,

$$N(f) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(f)^2 \right)^{1/2}$$

Montrer que N est une norme sur E .

e) Montrer que N n'est pas équivalente à la norme $\|\cdot\|_2$. On pourra considérer les fonctions f_p définies, pour $p \geq 1$ par

$$f_p(x) = \begin{cases} \sqrt{p} & \text{si } x \in [0, 1/p] \\ 1/\sqrt{x} & \text{si } x \in]1/p, 1[\end{cases}$$

[Enoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Exercice 43 [00750] [correction]

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note \tilde{A} la transposée de la comatrice de A .

a) Calculer $\det \tilde{A}$.

b) Etudier le rang de \tilde{A} .

c) Montrer que si A et B sont semblables alors \tilde{A} et \tilde{B} le sont aussi.

d) Calculer $\tilde{\tilde{A}}$.

Exercice 44 [01108] [correction]

Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$$

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non :

$A = \{\text{suites croissantes}\}$, $B = \{\text{suites convergeant vers } 0\}$,

$C = \{\text{suites convergentes}\}$,

$D = \{\text{suites admettant } 0 \text{ pour valeur d'adhérence}\}$ et $E = \{\text{suites périodiques}\}$.

Exercice 45 [01129] [correction]

Montrer qu'une forme linéaire est continue si, et seulement si, son noyau est fermé.

Exercice 46 [02415] [correction]

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} telle que pour tout x réel il existe un et un seul $y \in A$ tel que $|x - y| = d(x, A)$. Montrer que A est un intervalle fermé.

Exercice 47 [03285] [correction]

Soient E un espace normé de dimension quelconque et u un endomorphisme de E vérifiant

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u^k$$

a) Simplifier $v_n \circ (u - \text{Id})$.

b) Montrer que

$$\text{Im}(u - \text{Id}) \cap \ker(u - \text{Id}) = \{0\}$$

c) On suppose E de dimension finie, établir

$$\text{Im}(u - \text{Id}) \oplus \ker(u - \text{Id}) = E$$

d) On suppose de nouveau E de dimension quelconque.

Montrer que si

$$\text{Im}(u - \text{Id}) \oplus \ker(u - \text{Id}) = E$$

alors la suite (v_n) converge simplement et l'espace $\text{Im}(u - \text{Id})$ est une partie fermée de E .

e) Etudier la réciproque.

Exercice 48 [00995] [correction]

Réaliser le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+x^2}$ et reconnaître cette fonction.

Exercice 49 [01011] [correction]

On pose $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} a_k$$

a) Donner une formule permettant de calculer

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

b) Calculer $S(x)$.

c) Calculer les a_n .

d) Donner un équivalent de la suite (a_n) .

Exercice 50 [02448] [correction]

Pour $n > 0$, on pose

$$a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t \, dt$$

a) Trouver la limite de (a_n) .

b) Trouver une relation simple entre a_{n+2} et a_n .

c) On pose

$$u_n(x) = \frac{a_n}{n^\alpha} x^n$$

Donner la nature de la série de terme général $u_n(x)$ en fonction de x et de α .

d) On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 51 [02449] [correction]

Soit (a_n) la suite définie par

$$a_0 = 1 \text{ et } a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 \prod_{k=0}^{n-1} (t-k) \, dt \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

a) Rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

b) Somme de $\sum a_n x^n$.

Exercice 52 [02451] [correction]

On note $N(n, p)$ le nombre de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui ont exactement p points fixes. On pose en particulier $D(n) = N(n, 0)$, puis

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D(n)}{n!} x^n$$

a) relier $N(n, p)$ et $D(n-p)$.

b) Justifier la définition de f sur $] -1, 1[$ puis calculer f .

c) Calculer $N(n, p)$.

d) Etudier la limite de $(\frac{1}{n!} N(n, p))$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 53 [02452] [correction]

Soit (p_n) une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que $n = o(p_n)$.

On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{p_n}$$

a) Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum x^{p_n}$ et étudier la limite de $(1-x)f(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

b) Ici $p_n = n^q$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $q \geq 2$. Donner un équivalent simple de f en 1.

Exercice 54 [02454] [correction]

Convergence et calcul de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

Exercice 55 [03074] [correction]

Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{a_n}{n!} z^n$$

On pose donc, pour t dans \mathbb{R} ,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$$

b) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x > r$, $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ soit intégrable sur $[0, +\infty[$ et exprimer cette intégrale sous forme de série entière en $1/x$.

Exercice 56 [03201] [correction]

Soit

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$$

a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f .

b) Étudier la convergence en $-R$ et en R .

c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \rightarrow 1^-$.

d) Montrer que quand $x \rightarrow 1^-$

$$(1-x)f(x) \rightarrow 0$$

Exercice 57 [03244] [correction]

Soit f la fonction somme dans le domaine réel d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R = 1$.

On suppose l'existence d'un réel

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

a) Peut-on affirmer que la série numérique $\sum a_n$ converge et que sa somme vaut ℓ ?

b) Que dire si l'on sait de plus $a_n = o(1/n)$? [Théorème de Tauber]

Exercice 58 [03302] [correction]

Établir que la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1 - \operatorname{sh} x}$$

est développable en série entière et préciser le rayon de convergence.

Exercice 59 [03303] [correction]

Soit $f :]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ (avec $R > 0$) de classe \mathcal{C}^∞ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, R[, f^{(n)}(x) \geq 0$$

Montrer la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$$

pour tout $x \in]-R, R[$.

Exercice 60 [03483] [correction]

Soit α un réel irrationnel fixé. On note R_α le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}$$

a) Démontrer que $R_\alpha \leq 1$.

b) On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_1 = 2 \text{ et } \forall n \geq 1, u_{n+1} = (u_n)^{u_n}$$

Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)^n}$$

En déduire que la série de terme général $1/u_n$ converge.

Dans la suite, on pose

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$$

et on admet que α est irrationnel.

c) Démontrer qu'il existe une constante C strictement positive telle que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leq \frac{C}{u_n^{u_n-1}}$$

d) Démontrer que $R_\alpha = 0$.

e) Question subsidiaire : démontrer que α est effectivement irrationnel. [Énoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Exercice 61 [00541] [correction]

On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R}^+ par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \text{ et } g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$$

a) Montrer que f et g sont de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^{**} et qu'elles vérifient l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

b) Montrer que f et g sont continues en 0

c) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 62 [00554] [correction]

Existence et calcul de

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$$

Exercice 63 [03211] [correction]

On considère

$$\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt$$

a) Montrer la définie et la continuité de φ sur \mathbb{R} .

b) Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* et montrer que

$$\varphi'(x) = i \int_0^{+\infty} \frac{te^{itx}}{1+t^2} dt$$

c) Montrer que pour $x > 0$,

$$\varphi'(x) = i \int_0^{+\infty} \frac{ue^{iu}}{x^2+u^2} du$$

et déterminer un équivalent de $\varphi'(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

d) La fonction φ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 64 [03736] [correction]

On pose

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$$

a) Etudier l'ensemble de définition de f .

b) Donner un équivalent de f en 0.

c) Montrer que le graphe de f admet une symétrie d'axe $x = 1/2$.

d) Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.

e) Calculer la borne inférieure de f .

[Enoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Exercice 65 [03250] [correction]

Soit f la somme sur \mathbb{C} de la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$$

supposée de rayon de convergence $R = +\infty$.

Pour $r \geq 0$, on pose

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$$

et on suppose l'existence de

$$\ell = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M(r)}{r}$$

a) On suppose que $\ell > 1$. Montrer la divergence de la série $\sum a_n$.

b) En utilisant les coefficients de Fourier de l'application $t \mapsto f(re^{it})$, montrer

$$|a_n| \leq M(r) \frac{n!}{r^n}$$

c) En déduire que, si $\ell < 1$, la série $\sum a_n$ converge.

Exercice 66 [03257] [correction]

f désigne une fonction réelle continue et 2π périodique sur \mathbb{R} .

a) Démontrer que la suite de fonction $(F_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \int_0^n f(x+t)f(t) dt$$

converge vers une fonction F .

On précisera la définition de F en fonction de f ainsi que le mode de convergence de la suite $(F_n)_{n \geq 1}$

b) Démontrer

$$\|F\|_\infty \leq F(0)$$

Exercice 67 [03617] [correction]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique et k lipschitzienne. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt$$

a) Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on définit la fonction

$$f_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto f(x+h) - f(x)$$

Calculer $c_n(f_h)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

b) En déduire que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sin^2\left(\frac{nh}{2}\right) |c_n(f)|^2 \leq \frac{(kh)^2}{4}$$

c) En utilisant la concavité de la fonction sinus, montrer que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2$$

converge.

d) Que peut-on en conclure ?

[Enoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Exercice 68 [03742] [correction]

On note, pour $k \in \{0, 1\}$, S_k l'ensemble des fonctions continues sur \mathbb{R} , 2π -périodiques, à valeurs complexes telles que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n^k c_n(f)|$ converge (où

$(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ désigne la suite des coefficients de Fourier de f).

On considère f une fonction de S_1 , r un réel tel que $0 < r < 1$ et on définit f_r par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_r(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) r^{|n|} e^{inx}$$

a) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \sin(nx)$$

et en déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \frac{\cos(nx)}{n} = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2r \cos(x) + r^2)$$

b) On pose

$$K_r(t) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 - 2r \cos(t) + r^2}{2}\right)$$

Montrer qu'il existe une unique fonction u dans S_0 telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_r(x-t)u(t) dt = f_r(x)$$

On déterminera les coefficients de Fourier de u en fonction de ceux de f et on vérifiera que u est indépendante de r .

c) Vérifier que pour $t \in]0, \pi[$,

$$\left| \ln\left(\frac{1 - 2r \cos(t) + r^2}{2}\right) \right| \leq \ln 2 - 2 \ln |\sin t|$$

d) En déduire que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} K_r(x-t)u(t) dt = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - \cos(x-t)) u(t) dt$$

e) Pour $g \in S_0$, on définit $\varphi(g)$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - \cos(x-t)) g(t) dt$$

Montrer que φ est un isomorphisme de S_0 sur S_1 .

Exercice 69 [00105] [correction]

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et g une solution sur $\mathbb{R}^{+\ast}$ de l'équation différentielle

$$xy' - y = f(x)$$

a) Démontrer que g se prolonge par continuité en 0. Déterminer une condition nécessaire sur $f'(0)$ pour que la fonction ainsi prolongée soit dérivable en 0. Démontrer que cette condition n'est pas suffisante.

b) f est supposée de classe \mathcal{C}^2 et la condition précédente est vérifiée. Démontrer que g est de classe \mathcal{C}^2 .

Exercice 70 [00506] [correction]Soit (E) l'équation différentielle

$$(\ln x)y' + \frac{y}{x} = 1$$

- a) Résoudre (E) sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
 b) Soit g la fonction définie sur $] -1, +\infty[\setminus \{0\}$ par

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Montrer que g se prolonge sur $] -1, +\infty[$ en une fonction de classe \mathcal{C}^∞ .

- c) Démontrer que
- (E)
- admet une solution de classe
- \mathcal{C}^∞
- sur
- $]0, +\infty[$
- .

Exercice 71 [02455] [correction]

- a) Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \cos(nt)$$

- b) Soit
- $\sum a_n$
- une série absolument convergente.
-
- Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)$$

Exercice 72 [03100] [correction]

On considère l'équation différentielle

$$E_0 : y'' - e^x y = 0$$

- a) Soit y une solution de E_0 sur \mathbb{R} . Étudier la convexité de y^2 .
 En déduire que si $y(0) = y(1) = 0$ alors y est nulle sur \mathbb{R} .
 b) Soient y_1 et y_2 deux solutions de E_0 telles que

$$(y_1(0), y_1'(0)) = (0, 1) \text{ et } (y_2(1), y_2'(1)) = (0, 1)$$

Démontrer que (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de E_0 .

- c) Soit
- $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- . Démontrer que l'équation différentielle
- $E : y'' - e^x y = f(x)$
- admet une unique solution
- y
- telle que
- $y(0) = y(1) = 0$
- .

Exercice 73 [03387] [correction]

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' + \cos^2(t)y = 0$$

- a) Justifier l'existence d'une solution u de (E) telle que $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$.
 b) Démontrer l'existence de deux réels α, β vérifiant

$$\alpha < 0 < \beta, u'(\alpha) > 0 \text{ et } u'(\beta) < 0$$

En déduire que u possède au moins un zéro dans \mathbb{R}^{-*} et \mathbb{R}^{+*} .

- c) Justifier l'existence de réels

$$\gamma = \max \{t < 0 / u(t) = 0\} \text{ et } \delta = \min \{t > 0 / u(t) = 0\}$$

- d) Soit
- v
- une solution de
- (E)
- linéairement indépendante de
- u
- .

En étudiant les variations de

$$W = uv' - u'v$$

montrer que v possède au moins un zéro dans $] \gamma, \delta[$.

- e) Soit
- w
- une solution non nulle de
- (E)
- . Démontrer que
- w
- admet une infinité de zéros. On pourra introduire pour
- $n \in \mathbb{N}$
- , la fonction

$$w_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto w(t - n\pi)$$

[Enoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Exercice 74 [02456] [correction]On note f la solution maximale de

$$\frac{dy}{dx} = e^{-xy}$$

telle que $f(0) = 0$.

- a) Montrer que f est impaire.
 b) Montrer que f est définie sur \mathbb{R} .
 c) Montrer que f possède une limite finie a en $+\infty$.
 d) Montrer que $a > 1$.
 e) Montrer qu'en $+\infty$:

$$f(x) = a - \frac{1}{a}e^{-ax} + o(e^{-ax})$$

Exercice 75 [02457] [correction]

Soit $\lambda \in]-1, 1[$. On s'intéresse à l'équation différentielle avec retard :

$$(\mathcal{E}) : f'(x) = f(x) + f(\lambda x)$$

L'inconnue est une fonction dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

a) Soit f une solution de (\mathcal{E}) ; montrer que f est de classe C^∞ puis développable en série entière sur \mathbb{R} .

b) Expliciter les solutions de (\mathcal{E}) .

c) Montrer que $\prod_{k=0}^n (1 + \lambda^k)$ tend vers une limite finie, non nulle, notée $K(\lambda)$ quand n tend vers ∞ .

d) Montrer que, f étant une solution non nulle de (\mathcal{E}) ,

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} K(\lambda)f(0)e^x$$

Exercice 76 [02458] [correction]

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note P_α le problème

$$x' = \cos(x^2 + \sin(2\pi t)) - a \text{ et } x(0) = \alpha$$

a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer l'existence d'une solution maximale x_α de P_α .

b) Que dire des intervalles de définition des solutions maximales ?

c) Pour $|a| > 1$, donner les variations et les limites aux bornes des solutions.

On suppose $|a| < 1$.

d) Montrer que, pour tout $A > 0$, il existe $M(A) > 0$ tel que pour tout $\alpha \in [-A, A]$ et tout $t \in [0, 1]$, $|x_\alpha(t)| \leq M(A)$.

e) Montrer que, pour tout $(\alpha, \beta) \in [-A, A]^2$ et tout $t \in [0, 1]$:

$$|x_\alpha(t) - x_\beta(t)| \leq |\alpha - \beta| + 2M(A) \int_0^t |x_\alpha(u) - x_\beta(u)| \, du$$

f) En déduire :

$$\forall t \in [0, 1], |x_\alpha(t) - x_\beta(t)| \leq |\alpha - \beta| e^{2M(A)t}$$

Exercice 77 [03055] [correction]

On considère l'équation différentielle

$$E : y' = y^2 + y + 1$$

a) Existe-t-il des solutions de E sur \mathbb{R} ?

b) Résoudre E , trouver ses solutions maximales et montrer qu'elles sont définies sur un intervalle borné dont on déterminera la longueur.

Exercice 78 [03739] [correction]

On considère l'équation différentielle

$$(E) : x'(t) = \cos(2\pi(x(t) - t))$$

a) Rappeler l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz qui s'applique ici.

b) Soit x une solution de (E) . Montrer que x est lipschitzienne.

c) Soit x une solution maximale de (E) et $I =]a, b[$ son intervalle de définition. Montrer que $I = \mathbb{R}$.

d) Si x est solution maximale de (E) et $k \in \mathbb{Z}$, vérifier que $t \mapsto x(t+k)$ et $k+x$ sont solutions.

Trouver des solutions simples de (E) .

e) On fixe une solution maximale de (E) .

Montrer que $t \in \mathbb{R} \mapsto x(t) - t$ converge en $\pm\infty$ et exprimer les limites en fonction de $x(0)$.

f) On considère maintenant une solution maximale x de

$$(E_2) : x'(t) = \frac{1}{1+x(t)^2} + \cos(2\pi(x(t) - t))$$

Montrer que x est définie sur \mathbb{R} et que $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto x(t) - t$ est bornée.

[Enoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Exercice 79 [00061] [correction]

Trouver les extrema sur \mathbb{R}^2 de

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y$$

Exercice 80 [00070] [correction]

Soit $a > 0$. Montrer que

$$f : (x, y) \mapsto x + y + \frac{a}{xy}$$

admet un minimum strict sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$

Exercice 81 [01327] [correction]

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que

$$F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto f\left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right)$$

vérifie

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = 0$$

Exercice 82 [02460] [correction]

On pose

$$\varphi(x, y) = \frac{\cos x - \cos y}{x - y} \text{ pour } x \neq y$$

- a) Montrer que φ admet un prolongement par continuité à \mathbb{R}^2 noté encore φ .
b) Montrer que φ est \mathcal{C}^1 puis \mathcal{C}^∞ .

Exercice 83 [02461] [correction]

Montrer que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 est homogène de degré p si, et seulement si,

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = pf(x_1, \dots, x_n)$$

Exercice 84 [02463] [correction]

Déterminer les extremums de $x^{\ln x} + y^{\ln y}$ sur $]0, +\infty[^2$.

Exercice 85 [02465] [correction]

Soit un triangle ABC et M parcourant l'intérieur de ce triangle. On veut déterminer en quelle position le produit des 3 distances de M à chacun des côtés du triangle est maximal.

Indications : ne pas oublier de justifier l'existence de ce maximum, la réponse est le centre de gravité du triangle.

Exercice 86 [02466] [correction]

On considère

$$f : (x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + y^{2n}}$$

- a) Déterminer le domaine de définition D de f .
b) Etudier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur D .

Exercice 87 [03502] [correction]

Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, E^* le dual de E et

$$\mathcal{D} = \{d \in E^* / \forall (f, g) \in E^2, d(fg) = f(0)d(g) + g(0)d(f)\}$$

- a) Montrer que \mathcal{D} est un sous-espace vectoriel de E^* .
b) Montrer que \mathcal{D} est non réduit à $\{0\}$.
c) Soit $d \in \mathcal{D}$ et h une fonction constante. Que vaut $d(h)$?
d) Soit $f \in E$. Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$$

Vérifier que l'application $x \mapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$ est dans E .

- e) Soit $d \in \mathcal{D}$. Etablir l'existence de $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall f \in E, d(f) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

- f) Déterminer la dimension de \mathcal{D} .

Exercice 88 [00095] [correction]

Calculer

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

où \mathcal{D} est donné par $|x| \leq x^2 + y^2 \leq 1$.

Exercice 89 [00102] [correction]

Que dire de l'intégrale double

$$\iint_D \frac{x - y}{(x + y)^3} dx dy$$

où $D =]0, 1] \times [0, 1[$?

Exercice 90 [00110] [correction]

[Inégalité isopérimétrique]

Soit γ une application de classe \mathcal{C}^1 et 2π -périodique de \mathbb{R} vers \mathbb{C} telle que

$$\forall s \in \mathbb{R}, |\gamma'(s)| = 1$$

On note S l'aire orientée délimitée par $\gamma|_{[0, 2\pi]}$.

- a) Exprimer S à l'aide des coefficients de Fourier exponentiels de γ .
b) Montrer $S \leq \pi$ et préciser le cas d'égalité.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

Cette fonction n'a pas de limite en 0, elle n'est donc pas continue par morceaux.

Exercice 2 : [énoncé]

Posons $f_n(x) = x^n + x^2 - 1$. L'étude de la fonction f_n assure l'existence et l'unicité d'une solution $x_n \in \mathbb{R}^+$ à l'équation étudiée. De plus, on observe que $x_n \in [0, 1]$.

Puisque $0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f_n(x_{n+1})$, on peut affirmer $x_{n+1} \geq x_n$.

La suite (x_n) est croissante et majorée donc converge vers un réel ℓ .

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0, 1]$, à la limite $\ell \in [0, 1]$.

Si $\ell < 1$ alors

$$0 \leq x_n^n \leq \ell^n \rightarrow 0$$

et la relation $x_n^n + x_n^2 - 1 = 0$ donne à la limite $\ell^2 = 1$ ce qui est absurde.

On conclut que $\ell = 1$.

Posons $u_n = 1 - x_n$,

On a

$$(1 - u_n)^n = u_n(2 - u_n)$$

donc

$$n \ln(1 - u_n) = \ln u_n + \ln(2 - u_n)$$

d'où

$$-n u_n \sim \ln u_n \text{ puis } \ln n + \ln u_n \sim \ln(-\ln u_n)$$

or

$$\ln(-\ln u_n) = o(\ln u_n)$$

donc

$$\ln u_n \sim -\ln n$$

puis

$$u_n \sim \frac{\ln n}{n}$$

et enfin

$$x_n - 1 \sim -\frac{\ln n}{n}$$

Exercice 3 : [énoncé]

a) Il suffit d'étudier la fonction $f_n : x \mapsto x^n - (x + 1)$.

b) $f_n(1) \leq 0$ donc $x_n \geq 1$. $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (x_n + 1) = (x_n - 1)(x_n + 1) \geq 0$ donc $x_{n+1} \leq x_n$. La suite (x_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle

converge vers $\ell \geq 1$. Si $\ell > 1$ alors $x_n^n \geq \ell^n \rightarrow +\infty$ or $x_n^n = x_n + 1 \rightarrow \ell + 1$. Ce qui est impossible et il reste $\ell = 1$.

c) $x^n = x + 1 \Leftrightarrow n \ln x = \ln(x + 1) \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{n}$ avec $g(x) = \frac{\ln x}{\ln(x+1)}$ définie sur $[1, +\infty[$. La fonction g est de classe \mathcal{C}^∞ , $g'(x) > 0$ donc g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[0, 1[$, de plus (puisque $g'(x) \neq 0$) g^{-1} est aussi de classe \mathcal{C}^∞ et donc g^{-1} admet un $DL_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $x_n = g^{-1}(1/n)$ admet un

développement limité à tout ordre. Formons ses trois premiers termes

$$g^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2). \quad a = g^{-1}(0) = 1. \quad g(g^{-1}(x)) = x \text{ donc}$$

$$\ln(1 + bx + cx^2 + o(x^2)) = x \ln(2 + bx + o(x^2)) \text{ puis}$$

$$bx + \left(c - \frac{b^2}{2}\right)x^2 + o(x^2) = \ln(2)x + \frac{b}{2}x^2 + o(x^2) \text{ donc } b = \ln 2 \text{ et } c = \frac{(1 + \ln(2))\ln(2)}{2}.$$

$$\text{Finalement } x_n = 1 + \frac{\ln 2}{n} + \frac{(1 + \ln(2))\ln 2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 4 : [énoncé]

a) P_n réalise une bijection strictement décroissante de $[0, 1]$ vers $[-n, 1]$.

b) $P_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (n + 1)x_n + 1 \leq P_n(x_n) = 0$ donc $x_{n+1} \leq x_n$. La suite (x_n) est décroissante et minorée, elle converge donc vers un réel $\ell \in [0, 1]$. Si $\ell > 0$ alors $0 = P_n(x_n) \rightarrow -\infty$, c'est absurde. On conclut $\ell = 0$.

c) $\frac{x_n^n}{nx_n} = \frac{1}{n}x_n^{n-1} \rightarrow 0$ donc $x_n^n = o(nx_n)$ puis sachant $x_n^n - nx_n + 1 = 0$, on obtient $x_n \sim 1/n$.

d) Ecrivons $x_n = \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}$ avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

Puisque $x_n^n = nx_n - 1$, on a $\frac{(1 + \varepsilon_n)^n}{n^n} = \varepsilon_n$.

$$(1 + \varepsilon_n)^n = \exp(n \ln(1 + \varepsilon_n)) = \exp(n\varepsilon_n + o(n\varepsilon_n)).$$

$$\text{Or } n\varepsilon_n = n \frac{(1 + \varepsilon_n)^n}{n^n}.$$

Puisque $\varepsilon_n \rightarrow 0$, pour n assez grand, $|1 + \varepsilon_n| \leq 2$ et la relation précédente donne $|n\varepsilon_n| \leq \frac{2^n}{n^{n-1}} \rightarrow 0$.

On en déduit $n\varepsilon_n \rightarrow 0$ puis $(1 + \varepsilon_n)^n \rightarrow 1$ et enfin $\varepsilon_n \sim \frac{1}{n^n}$.

Finalement

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{n+1}} + o\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right)$$

Exercice 5 : [énoncé]

a)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n(p+1)+1} + \dots + \frac{1}{(n+1)(p+1)} - \frac{1}{n+1} \leq 0$$

et $u_n \leq \frac{np}{n+1} \leq p$ donc (u_n) converge.

b) Par le théorème des accroissements finis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \dots, np\}$, il existe $c_{n,k} \in]0, \frac{1}{n+k}[$ tel que

$$f\left(\frac{1}{n+k}\right) - f(0) = f'(c_{n,k})\frac{1}{n+k}$$

On a alors

$$v_n - \ell f'(0) = \sum_{k=1}^{np} (f'(c_{n,k}) - f'(0)) \frac{1}{n+k}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [0, \alpha]$ on ait

$$|f'(x) - f'(0)| \leq \varepsilon.$$

Pour n suffisamment grand pour que $\frac{1}{n+1} \leq \alpha$, on a $c_{n,k} \in [0, \alpha]$ et donc

$$|v_n - \ell f'(0)| \leq \varepsilon \ell.$$

On en déduit $v_n \rightarrow \ell f'(0)$.

c) Pour $f(x) = \ln(1+x)$,

$$v_n = \sum_{k=1}^{np} \ln(n+k+1) - \ln(n+k) = \ln(n(p+1)+1) - \ln(n+1) \rightarrow \ln(p+1)$$

On conclut $\ell = \ln p$.

d) Pour $f(x) = \sqrt{x}$,

$$v_n = \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \geq \frac{np}{\sqrt{(n+1)p}} \rightarrow +\infty$$

Exercice 6 : [énoncé]

Pour $x \in [0, 1]$,

$$\left| \sin x - x + \frac{1}{6}x^3 \right| \leq \frac{1}{120}$$

On a donc

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} - \frac{1}{6} \frac{k^3}{n^6} + M_n$$

avec

$$|M_n| \leq \frac{1}{120} \sum_{k=1}^n \frac{k^5}{n^{10}} \leq \frac{1}{120} \frac{1}{n^4}$$

donc $M_n = o(1/n^3)$.

Or

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

et

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^6} = \frac{1}{n^6} \sum_{k=1}^n k^3 \sim \frac{1}{4n^2}$$

donc

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 7 : [énoncé]

Soit f une fonction solution. Puisque celle-ci est continue sur un segment, elle y admet un minimum en un certain $x_0 \in [0, 1]$.

On a alors

$$f(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(u_n x_0 + 1 - x_0)}{2^n} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x_0)}{2^n} = f(x_0)$$

On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n x_0 + 1 - x_0) = f(x_0)$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient

$$f(1) = f(x_0)$$

Ainsi $f(1)$ est la valeur minimale de f sur $[0, 1]$

Un raisonnement symétrique assure aussi que $f(1)$ est la valeur maximale de f sur $[0, 1]$.

On en déduit que f est constante.

La réciproque est immédiate.

Notons que l'hypothèse de stricte croissance de la suite (u_n) est sans doute là pour tromper l'ennemi.

Exercice 8 : [énoncé]

On réalise le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ pour lequel $\frac{2t}{1+t^2} = \sin x$.

On obtient

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt = \int_0^{2\pi/3} \frac{1}{2} \arcsin(\sin x) \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx$$

On simplifie $\arcsin(\sin x) = x$ pour $x \in [0, \pi/2]$ et $\arcsin(\sin x) = \pi - x$ pour $x \in [\pi/2, 2\pi/3]$.

Enfin on calcule

$$\int_0^{\pi/2} x \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx$$

par intégration par parties.

Au final, on obtient

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Exercice 9 : [énoncé]

a) La fonction f est définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ car pour chaque x dans ce domaine, la fonction $t \mapsto 1/\ln t$ est définie et continue sur le segment d'extrémités x et x^2 car 1 n'y appartient pas. Pour $x \in]0, 1[$, on a pour tout $t \in [x^2, x]$, $2 \ln x \leq \ln t \leq \ln x$ puis par encadrement d'intégrales

$$\frac{x^2 - x}{2 \ln x} \leq f(x) \leq \frac{x^2 - x}{\ln x}$$

et donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

L'encadrement est identique pour $x > 1$ ce qui permet d'affirmer

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ et } f(x)/x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

On peut aussi écrire

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{t}{t \ln t} dt$$

et par encadrement du t du numérateur par x et x^2 , on obtient $f(x)$ encadré par $xI(x)$ et $x^2I(x)$ avec

$$I(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = [\ln |\ln t|]_x^{x^2} = \ln 2$$

d'où $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln 2$.

b) On introduit H primitive de $t \mapsto 1/\ln t$ et on démontre que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ avec $f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$. Cette dérivée étant de classe \mathcal{C}^∞ , on conclut que f est \mathcal{C}^∞ sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. On prolonge f par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln 2$ et puisque $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$, la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ avec

$f'(1) = 1$. Par développement en série entière $h \mapsto \frac{\ln(1+h)}{h}$ est \mathcal{C}^∞ au voisinage de 0 donc $x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$ est \mathcal{C}^∞ au voisinage de 1 et par passage à l'inverse $x \mapsto f'(x)$ est \mathcal{C}^∞ au voisinage de 1. Finalement f est \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$. Le calcul de $f''(x)$ permet de justifier que f'' n'a pas de limite finie en 0 et donc f ne peut être prolongée en une fonction de classe \mathcal{C}^∞ au voisinage de 0.

c) f est croissante, convexe, branche parabolique verticale en $+\infty$, tangente horizontale en l'origine.

Exercice 10 : [énoncé]

a) La fonction f est définie et \mathcal{C}^∞ sur $\mathcal{D} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k$ avec

$$I_k = \left] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[$$

Pour $x \in \mathcal{D}$, la tangente en $(x, f(x))$ passe par O si, et seulement si, $xf'(x) = f(x)$. Après transformation, ceci équivaut pour $x > 0$ à l'équation

$$x \tan x + \ln(\cos(x)) + 1 = 0$$

Posons $\varphi(x) = x \tan x + \ln(\cos(x)) + 1$.

φ est définie et \mathcal{C}^∞ sur \mathcal{D} . $\varphi'(x) = x(1 + \tan^2 x) > 0$ sur $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}^{+\ast}$.

Quand $x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^-$, $\varphi(x) \rightarrow +\infty$. Quand $x \rightarrow (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^+$, $\varphi(x) \rightarrow -\infty$.

$\varphi|_{I_k}$ réalise donc une bijection de I_k vers \mathbb{R} (pour $k \in \mathbb{N}^\ast$).

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^\ast}$ avec $x_n = (\varphi|_{I_n})^{-1}(0)$ est solution.

b) Evidemment $x_n \sim 2n\pi$ et donc $x_n = 2n\pi + y_n$.

On a

$$\sin y_n = -\frac{\cos y_n (\ln \cos y_n) + \cos y_n}{2n\pi + y_n}$$

avec $|y_n| < \pi/2$

L'étude de la fonction $x \mapsto x \ln x + x$ assure que celle-ci est bornée et donc $\sin y_n \rightarrow 0$ puis $y_n \rightarrow 0$.

Par suite $\cos y_n \rightarrow 1$ donc $\sin y_n \sim -\frac{1}{2n\pi}$ puis $y_n \sim -\frac{1}{2n\pi}$.

On conclut

$$x_n = 2n\pi - \frac{1}{2n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 11 : [énoncé]

Posons $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

prolongée par continuité en 0.

Notons que cette fonction est positive et croissante.

Introduisons $a, b \in]0, 1[$ dont les valeurs seront déterminées ultérieurement. On peut écrire

$$-(n+1)I_n = A_n + B_n + C_n$$

avec

$$A_n = \int_0^a (n+1) \frac{x^n}{f(x)} dx, B_n = \int_a^b (n+1) \frac{x^n}{f(x)} dx \text{ et } C_n = \int_b^1 (n+1) \frac{x^n}{f(x)} dx$$

Par monotonie de f ,

$$0 \leq A_n \leq \int_0^a \frac{(n+1)x^n}{f(0)} = a^{n+1}$$

Pour $a = 1 - \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n = \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$, on a

$$\ln(n)a^{n+1} = e^{\ln(\ln n) + (n+1)\ln(1-\varepsilon_n)} \rightarrow 0$$

car

$$\ln(\ln n) + (n+1)\ln(1-\varepsilon_n) \sim -\ln n \rightarrow -\infty$$

On en déduit

$$A_n = o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

Par la croissance de f

$$0 \leq C_n \leq \int_b^1 \frac{(n+1)x^n}{f(b)} dx = \frac{1-b^{n+1}}{f(b)}$$

Pour $b = 1 - \eta_n$ avec $\eta_n = \frac{1}{n(\ln n)} \rightarrow 0$, on a

$$b^{n+1} \rightarrow 1 \text{ et } f(b) \sim \ln n$$

de sorte que

$$C_n \sim o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

Enfin, toujours par la croissance de f ,

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{f(b)} \leq B_n \leq \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{f(a)}$$

et puisque

$$b^{n+1} - a^{n+1} \rightarrow 1 \text{ et } f(b) \sim f(a) \sim \ln n$$

on parvient à

$$-(n+1)I_n \sim \frac{1}{\ln n}$$

et finalement

$$I_n \sim -\frac{1}{n \ln n}$$

Remarque :

Par le changement de variable $t = -\ln(1-x)$, $x = 1 - e^{-t}$

$$I_n = -\int_0^{+\infty} \frac{(1-e^{-t})^{n+1}}{t} e^{-t} dt$$

En développant par la formule du binôme

$$I_n = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-(k+1)t}}{t} dt$$

et on peut montrer par découpage d'intégrale et un changement de variable affine que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-(k+1)t}}{t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-(k+1)t}}{t} dt = \ln(k+1)$$

Ce qui précède permet alors d'établir

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \ln(k+1) \sim -\frac{1}{n \ln n}$$

Exercice 12 : [énoncé]

Montrons que la suite (u_n) converge vers 0 par l'épsilontique...

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite (ε_n) converge vers 0, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ pour lequel

$$\forall n \geq N, 0 \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon$$

et alors pour tout $n \geq N$

$$0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n + \varepsilon}{K}$$

On en déduit

$$0 \leq u_{n+2} \leq \frac{u_n}{K^2} + \frac{\varepsilon}{K^2} + \frac{\varepsilon}{K}$$

et par récurrence

$$\forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{u_n}{K^p} + \sum_{i=1}^p \frac{\varepsilon}{K^i}$$

La suite (u_n) étant majorée par 1 et on peut encore écrire

$$\forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{1}{K^p} + \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{K^i} = \frac{1}{K^p} + \frac{\varepsilon}{1 - 1/K}$$

Pour p assez grand, on a $1/K^p \leq \varepsilon$ et alors

$$0 \leq u_{n+p} \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{1 - 1/K} = \lambda \varepsilon$$

avec λ une constante strictement positive ce qui permet de conclure.

Exercice 13 : [énoncé]

La fonction $f : t \mapsto t[1/t]$ est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$. Pour $t > 1$, $[1/t] = 0$ et donc $f(t) = 0$. Ainsi f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Pour $t > 0$, $1/t - 1 \leq [1/t] \leq 1/t$ et donc $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{}$ 1. Ainsi f est intégrable sur $]0, 1]$.

On a

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{1/n}^1 f(t) dt$$

Or

$$\int_{1/n}^1 f(t) dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} t [1/t] dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} kt dt$$

puis

$$\int_{1/n}^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{k(k+1)^2}$$

Par décomposition en éléments simples

$$\int_{1/n}^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} \right)$$

et après réorganisation

$$\int_{1/n}^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

On en déduit

$$I = \frac{\pi^2}{12}$$

Exercice 14 : [\[énoncé\]](#)

a) On a

$$f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t) dt$$

donc $f'(x)$ admet une limite finie ℓ quand $x \rightarrow +\infty$.

Si $\ell > 0$ alors pour x assez grand $f'(x) \geq \ell/2$ puis $f(x) \geq \ell x/2 + m$ ce qui empêche la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Si $\ell < 0$ on obtient aussi une absurdité. Il reste donc $\ell = 0$.

b) Puisque la fonction f' est continue et converge en $+\infty$, cette fonction est bornée et donc $t \mapsto f(t)f'(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 15 : [\[énoncé\]](#)

a) 0, cf. lemme de Lebesgue.

b) Posons

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt) \cos t}{\sin t} dt$$

Cette intégrale existe car un prolongement par continuité est possible en 0.

On observe

$$\sin(2(n+1)t) - \sin(2nt) = 2 \sin t \cos(2n+1)t$$

et donc

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} 2 \cos((2n+1)t) \cos t dt = 0$$

La suite (I_n) est constante égale à

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} 2 \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2}$$

c) On a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt) \cos t}{\sin t} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t} dt = \int_0^{\pi/2} \sin(2nt) f(t) dt$$

avec

$$f(t) = \cot t - \frac{1}{t}$$

qui se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$.

Ainsi

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t} dt \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Or

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t} dt = \int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{u} du$$

donc la convergence de l'intégrale de Dirichlet étant supposée connue, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

d) On a

$$\int_0^{\pi/2} \ln(2 \sin(t/2)) \cos(nt) dt = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right) \cos(nt) dt + \int_0^{\pi/2} \ln(t) \cos(nt) dt$$

Par intégration par parties,

$$\int_0^{\pi/2} \ln(t) \cos(nt) dt = \frac{\ln(\pi/2) \sin(n\pi/2)}{n} - \frac{1}{n} \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin u}{u} du$$

La fonction $t \mapsto \ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)$ se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, \pi/2]$.

Par intégration par parties,

$$\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right) \sin(n\pi/2) - \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \left(\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\right)' \sin(nt) dt$$

La fonction $t \mapsto \left(\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\right)'$ étant de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi/2]$, on a

$$\frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \left(\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\right)' \sin(nt) dt = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et donc

$$\int_0^{\pi/2} \ln(2 \sin(t/2)) \cos(nt) dt \sim \frac{(\ln 2) \sin(n\pi/2) - \pi}{2n}$$

Exercice 16 : [\[énoncé\]](#)

Par intégration par parties

$$\int_0^x \sin(e^t) dt = \int_0^x e^t \sin(e^t) e^{-t} dt = [-\cos(e^t) e^{-t}]_0^x - \int_0^x \cos(e^t) e^{-t} dt$$

D'une part

$$\cos(e^x) e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

et d'autre part $t \mapsto \cos(e^t) e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car

$$t^2 \cos(e^t) e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(e^t) dt$ converge.

Exercice 17 : [\[énoncé\]](#)

a) f est décroissante sur $[e, +\infty[$. Pour $p \geq 4$,

$$\int_p^{p+1} \frac{\ln t}{t} dt \leq \frac{\ln p}{p} \leq \int_{p-1}^p \frac{\ln t}{t} dt$$

donc $u_n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + v_n$ avec

$$\int_4^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt \leq v_n \leq \int_3^n \frac{\ln t}{t} dt$$

donc $v_n \sim \frac{1}{2}(\ln n)^2$.

Etudions $w_n = u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2$, $w_n - w_{n-1} = \frac{\ln n}{n} - \int_{n-1}^n \frac{\ln t}{t} dt \leq 0$ donc (w_n) est décroissante.

D'autre part les calculs précédents donnent (w_n) minorée et donc on peut conclure que w_n converge. Ainsi

$$u_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C + o(1)$$

b)

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{\ln(2n)}{2n} - \sum_{n=1}^N \frac{\ln(2n-1)}{2n-1}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{\ln(2n)}{n} - \sum_{n=1}^{2N} \frac{\ln(n)}{n} = \ln 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + u_N - u_{2N}$$

Par le développement asymptotique précédent, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \ln 2 \cdot \ln n + \ln(2)\gamma + \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C - \frac{1}{2}(\ln 2n)^2 - C + o(1)$$

et après simplification

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} \rightarrow \frac{1}{2} \ln(2)(2\gamma - \ln 2)$$

De plus

$$\sum_{n=1}^{2N+1} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} + o(1) \rightarrow \frac{1}{2} \ln(2)(2\gamma - \ln 2)$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{2} \ln(2)(2\gamma - \ln 2)$$

N'est-ce pas magnifique ?

Exercice 18 : [énoncé]

On a

$$\ln n + a \ln(n + 1) + b \ln(n + 2) = (1 + a + b) \ln n + \frac{a + 2b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Il y a convergence si, et seulement si, $1 + a + b = 0$ et $a + 2b = 0$ ce qui correspond à $a = -2$ et $b = 1$.

Dans ce cas :

$$\sum_{n=1}^N \ln n + a \ln(n + 1) + b \ln(n + 2) = \sum_{n=1}^N \ln n - 2 \sum_{n=2}^{N+1} \ln n + \sum_{n=3}^{N+2} \ln n$$

puis

$$\sum_{n=1}^N \ln n + a \ln(n + 1) + b \ln(n + 2) = \ln 1 + \ln 2 - 2 \ln 2 - 2 \ln(N + 1) + \ln(N + 1) + \ln(N + 2) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ln 2$$

Exercice 19 : [énoncé]

a) Puisque

$$\sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$$

on peut affirmer que l'ensemble

$$\left\{ p \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \geq j \right\}$$

est une partie non vide de \mathbb{N} . Celle admet donc un plus petit élément, noté Φ_j .

b) Par définition de Φ_j , on a

$$j \leq \sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n}$$

Or, par comparaison avec une intégrale

$$\sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n} \leq 1 + \int_1^{\Phi_j} \frac{dt}{t} = 1 + \ln \Phi_j$$

On en déduit $\Phi_j \geq e^{j-1}$ puis $\Phi_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} +\infty$.

c) Par définition de Φ_j , on a

$$\sum_{n=1}^{\Phi_j-1} \frac{1}{n} \leq j \leq \sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n}$$

Or, sachant que $\Phi_j \rightarrow +\infty$, on a

$$\sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n} = \ln \Phi_j + \gamma + o(1) \text{ et } \sum_{n=1}^{\Phi_j-1} \frac{1}{n} = \ln(\Phi_j - 1) + \gamma + o(1)$$

Par suite

$$\ln(\Phi_j - 1) + \gamma + o(1) \leq j \leq \ln \Phi_j + \gamma + o(1)$$

Or

$$\ln(\Phi_j - 1) = \ln \Phi_j + o(1)$$

$$j = \ln \Phi_j + \gamma + o(1)$$

puis

$$\Phi_j = e^{j-\gamma+o(1)}$$

On en déduit

$$\frac{\Phi_{j+1}}{\Phi_j} = \frac{e^{j+1-\gamma+o(1)}}{e^{j-\gamma+o(1)}} = e^{1+o(1)} \rightarrow e$$

Exercice 20 : [énoncé]

On observe que $u_{n+1}^n - u_n^{n-1} = n$.

Puisque $\sum n$ une série à termes positifs divergente on peut, par sommation de relation de comparaison, affirmer $u_{n+1}^n \sim \frac{1}{2}n^2$. En composant avec le logarithme népérien cet équivalent de limite infini, on obtient

$$n \ln u_{n+1} \sim 2 \ln n$$

puis

$$\ln u_{n+1} \sim 2 \frac{\ln n}{n}$$

Par suite $u_{n+1} \rightarrow 1$ puis

$$u_{n+1} = 1 + 2 \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Posons

$$v_n = u_{n+1} - 1 - 2 \frac{\ln n}{n}$$

L'égalité

$$u_{n+1}^n = \exp \left(n \ln \left(1 + 2 \frac{\ln n}{n} + v_n \right) \right)$$

donne

$$u_{n+1}^n = \exp \left(2 \ln n + n v_n + O \left((\ln n)^2 / n \right) \right)$$

Or $\frac{2u_{n+1}^n}{n^2} \rightarrow 1$ donc

$$\exp \left(2 + n v_n + O \left((\ln n)^2 / n \right) \right) \rightarrow 1$$

puis $n v_n \rightarrow -2$. Ainsi

$$u_{n+1} = 1 + 2 \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln 2}{n} + o \left(\frac{1}{n} \right)$$

Exercice 21 : [énoncé]

a) Pour définir u_n , il est nécessaire de supposer $\alpha > 1$.

Par comparaison avec une intégrale, on montre

$$u_n \sim \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.

b) Pour définir u_n , il est nécessaire de supposer $\alpha > 0$.

Par application du critère spécial des séries alternées, v_n étant le reste de la série

$\sum \frac{(-1)^p}{(p+1)^\alpha}$ est du signe de $(-1)^n$ et $|v_n| \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha} \rightarrow 0$.

De plus

$$|v_n| - |v_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+n+1)^\alpha} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+n+2)^\alpha}$$

donc

$$|v_n| - |v_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{1}{(p+n+1)^\alpha} - \frac{1}{(p+n+2)^\alpha} \right)$$

Par le théorème des accroissements finis

$$\frac{1}{(p+n+1)^\alpha} - \frac{1}{(p+n+2)^\alpha} = -\frac{\alpha}{(c_n)^{\alpha+1}}$$

avec $c_n \in]p+n+1, p+n+2[$.

La suite (c_n) est croissante donc on peut appliquer le critère spécial des séries alternées à

$$\sum (-1)^p \left(\frac{1}{(p+n+1)^\alpha} - \frac{1}{(p+n+2)^\alpha} \right)$$

et conclure que sa somme est du signe de son premier terme. Au final, $(|v_n|)$ est décroissant et en appliquant une dernière fois le critère spécial des séries alternées, on conclut que $\sum v_n$ converge.

Exercice 22 : [énoncé]

Pour $|z| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k} = \sum_{n,k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)} = \sum_{m=1}^{+\infty} z^m = \frac{z}{1-z}$$

Pour $|z| = 1$,

$$\left| \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} \right| \geq \frac{1}{2}$$

donc $\frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} \not\rightarrow 0$, il y a donc divergence grossière.

Pour $|z| > 1$,

$$\frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \frac{(1/z)^{2^n}}{(1/z)^{2^{n+1}} - 1}$$

et $|1/z| < 1$ donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = -\frac{1/z}{1 - 1/z} = \frac{1}{1-z}$$

Exercice 23 : [énoncé]

a) $\sum_{n \geq 1} f(n)$ diverge et $\sum_{n \geq 1} (-1)^n f(n)$ converge en application du critère spécial.

b) Pour $n \geq 4$,

$$f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt \leq f(n-1)$$

donc

$$0 \leq \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \leq f(n-1) - f(n)$$

avec

$$\sum_{n=4}^{+\infty} f(n-1) - f(n) = f(3)$$

donc la série de terme général $\int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)$ converge et il en est de même de la série de terme général $f(n) - \int_{n-1}^n f(t)dt$.

c) On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k f(k)$$

avec

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k f(k) = 2 \sum_{k=1}^n f(2k) - \sum_{k=1}^{2n} f(k)$$

Or

$$\sum_{k=1}^n f(k) = f(1) + \sum_{k=2}^n f(k) - \int_{k-1}^k f(t) dt + \int_1^n f(t) dt = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C$$

et en exploitant $\ln(2k) = \ln 2 + \ln k$

$$2 \sum_{k=1}^n f(2k) = \ln 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} = \ln 2 \ln n + \ln(2)\gamma + o(1) + \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C$$

On en déduit

$$2 \sum_{k=1}^n f(2k) - \sum_{k=1}^{2n} f(k) = \ln(2)\gamma - \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + o(1)$$

Au final

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{2} \ln(2)(2\gamma - \ln 2)$$

Exercice 24 : [énoncé]

a) $\ln u_{n+1} - \ln u_n \sim -\frac{1}{2} \frac{x}{n}$ avec $x > 0$ donc $\sum_{k=1}^n \ln u_{k+1} - \ln u_k \rightarrow -\infty$ puis $u_n \rightarrow 0$.

b) Pour $\alpha = -x/2$, $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln(1 + \frac{1}{n}) = O(\frac{1}{n^2})$ donc

$\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln(1 + \frac{1}{n})$ converge.

c) Puisque $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln \frac{u_{n+1}}{(n+1)^\alpha} - \ln \frac{u_n}{n^\alpha}$, la suite de terme général $\ln \frac{u_n}{n^\alpha}$ converge puis $\frac{u_n}{n^\alpha} \rightarrow A$ avec $A > 0$.

d) Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha < -1$ i.e. $x > 2$.

Exercice 25 : [énoncé]

a) Par convergence dominée par la fonction $\varphi : t \mapsto 1$, on obtient $u_n \rightarrow 0$.

b)

$$u_n + u_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (\tan t)' (\tan t)^n dt = \frac{1}{n+1}$$

c) On vérifie aisément $u_n \rightarrow 0^+$ et $u_{n+1} \leq u_n$. Par application du critère spécial des séries alternées, $\sum (-1)^n u_n$ converge.

d) Par monotonie

$$u_n + u_{n+2} \leq 2u_n \leq u_n + u_{n-2}$$

On en déduit $u_n \sim \frac{1}{2n}$ puis par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{u_n}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$.

Exercice 26 : [énoncé]

On a

$$A_n = a + \frac{b(n+1)}{2}, \ln B_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(a + bk)$$

Posons $f(t) = \ln(a + bt)$ fonction croissante.

A l'aide d'une comparaison série-intégrale

$$\sum_{k=1}^n f(k) = n \ln(a + bn) - n + o(n)$$

donc

$$\ln \frac{B_n}{A_n} = \ln B_n - \ln A_n = \ln \left(\frac{a + bn}{a + bn/2} \right) - 1 + o(1) \rightarrow \ln 2 - 1$$

puis

$$\frac{B_n}{A_n} \rightarrow \frac{2}{e}$$

Exercice 27 : [énoncé]

a) $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x+\dots+x^n} = \int_0^1 \frac{1-x}{1-x^{n+1}} dx$, $\frac{1-x}{1-x^{n+1}} \rightarrow 1-x$ et $\left| \frac{1-x}{1-x^{n+1}} \right| \leq \frac{1-x}{1-x} = 1$

donc $u_n \rightarrow \int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2}$. La série diverge grossièrement.

b) $v_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x+\dots+x^n} = \int_0^1 \frac{1-x}{1-x^{n+1}} x^n dx = \int_0^1 \frac{x^n}{1-x^{n+1}} (1-x) dx$ avec par intégration par parties

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1-x^{n+1}} (1-x) dx = \left[-\frac{1}{n+1} \ln(1-x^{n+1})(1-x) \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln(1-x^{n+1}) dx$$

avec $-\int_0^1 \ln(1-x^{n+1})dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} x^{(n+1)k} dx$. Or

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 \left| \frac{1}{k} x^{(n+1)k} \right| dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k((n+1)k+1)} < +\infty \text{ donc}$$

$$-\int_0^1 \ln(1-x^{n+1})dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \int_0^1 x^{(n+1)k} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k((n+1)k+1)} \leq \frac{1}{(n+1)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \text{ puis}$$

$v_n = O(1/n^2)$ et donc la série de terme général v_n converge.

Exercice 28 : [énoncé]

a) Notons la suite (u_n) est bien définie, strictement positive et croissante.

Si $\alpha > 1$, on a

$$u_{n+1} \leq u_n + \frac{1}{n^\alpha u_1}$$

puis par récurrence

$$u_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha u_1}$$

Ainsi (u_n) converge.

Si (u_n) converge. Posons $\ell = \lim u_n$, on observe $\ell > 0$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^\alpha u_n} \sim \frac{1}{n^\alpha \ell}$$

or la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est convergente donc $\alpha > 1$.

b) On suppose $\alpha \leq 1$. On a

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{2}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha} u_n^2} \sim \frac{2}{n^\alpha}$$

donc par sommation de relation de comparaison de séries à termes positifs divergentes

$$u_n^2 \sim 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$$

or par comparaison série-intégrale,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ quand } \alpha < 1$$

et

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n \text{ quand } \alpha = 1$$

On conclut alors

$$u_n \sim \sqrt{\frac{2n^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \text{ si } \alpha < 1 \text{ et } u_n \sim \sqrt{2 \ln n} \text{ si } \alpha = 1$$

c) On suppose $\alpha > 1$. Posons $v_n = u_n - \ell$. On a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n^\alpha u_n} \sim \frac{1}{n^\alpha \ell}$$

donc par sommation de relation de comparaison de séries à termes positifs convergentes

$$\sum_{k=n}^{+\infty} v_{k+1} - v_k = -v_n \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha \ell} \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{\ell n^{\alpha-1}}$$

puis

$$v_n = \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\ell n^{\alpha-1}}$$

Exercice 29 : [énoncé]

a) a) Une comparaison série intégrale est inadaptée, f n'est pas monotone comme en témoigne ses changements de signe. En revanche :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x) - f(n) dx$$

Or par le théorème des accroissements fini,

$$f(x) - f(n) = f'(c_x)(x - n)$$

avec $c_x \in]n, x[$.

Après calcul de $f'(x)$, on en déduit

$$|f(x) - f(n)| \leq \frac{1}{3n^{4/3}} + \frac{2}{3n^{5/3}}$$

puis $u_n = O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)$.

b) La série de terme général $\int_n^{n+1} f(t) dt$ diverge car $\int_0^n f(t) dt = 3 \sin(n^{1/3})$ diverge. En effet si $\sin(n^{1/3})$ convergeait vers ℓ alors par extraction $\sin(n)$ aussi et

il est classique d'établir la divergence de $(\sin(n))$. On en déduit que $\sum \frac{\cos(n^{1/3})}{n^{2/3}}$ diverge.

c) Il suffit de reprendre la même étude pour parvenir à la même $u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx - f(n)$ conclusion.

Exercice 30 : [\[énoncé\]](#)

a) On a

$$\int_0^x \sin(t^2) dt = \int_0^\pi \sin(t^2) dt + \int_\pi^x \sin(t^2) dt$$

Or

$$\int_{\sqrt{\pi}}^x \sin(t^2) dt = \int_{\sqrt{\pi}}^x \frac{2t}{2t} \sin(t^2) dt = \left[-\frac{\cos(t^2)}{2t} \right]_{\sqrt{\pi}}^x - \int_{\sqrt{\pi}}^x \frac{\cos(t^2)}{2t^2} dt$$

donc

$$\int_0^x \sin(t^2) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2) dt - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2} \int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty} \frac{\cos(t^2)}{t^2} dt$$

où l'on vérifie que la dernière intégrale converge.

b) Par découpage

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2) dt$$

et par changement de variable

$$\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2) dt = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} du = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin v}{2\sqrt{v+n\pi}} dv = (-1)^n u_n$$

avec

$$u_n = \int_0^\pi \frac{\sin v}{2\sqrt{v+n\pi}} dv$$

Aisément $u_n \geq 0$, $u_{n+1} \leq u_n$ et $u_n \rightarrow 0$ donc on peut appliquer le critère spécial qui assure que A est du signe de $(-1)^0 u_0$ c'est-à-dire positif.

c) La question a) est identique. Pour b) les choses se compliquent car on découpe l'intégrale en $\pi/2, 3\pi/2, \dots$ pour obtenir :

$$B = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos v}{2\sqrt{v}} dv + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos v}{2\sqrt{v+n\pi}} dv$$

Le critère spécial des séries alternées s'applique à la série sous-jacente et B est du signe de

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos v}{2\sqrt{v}} dv - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos v}{2\sqrt{v+\pi}} dv + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos v}{2\sqrt{v+2\pi}} dv$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt{v+\pi}} - \frac{1}{\sqrt{v+2\pi}} \leq \frac{\pi}{2(v+\pi)^{3/2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{v+\pi}}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos v}{2\sqrt{v+\pi}} dv - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos v}{2\sqrt{v+2\pi}} dv &\leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos v}{4\sqrt{v+\pi}} dv \\ &\leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos v}{4\sqrt{\pi/2}} dv = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos v}{2\sqrt{\pi/2}} dv \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\cos v}{2\sqrt{v}} dv \end{aligned}$$

et on peut conclure.

d) on utilise l'instruction evalf.

Culture : les intégrales A et B sont en fait égales.

Exercice 31 : [\[énoncé\]](#)

La fonction intégrée ne converge pas simplement en les $t = \pi/2 + \pi [2\pi]$. Pour contourner cette difficulté on raisonne à l'aide de valeurs absolues.

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^n(t) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-t} |\sin^n t| dt$$

On a

$$f_n(t) = |e^{-t} \sin^n(t)| \xrightarrow{CS} f(t)$$

avec

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq \pi/2 \quad [\pi] \\ e^{-t} & \text{sinon} \end{cases}$$

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux et

$$|f_n(t)| \leq e^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux intégrable sur $[0, +\infty[$ donc par convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^n(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt = 0$$

Exercice 32 : [\[énoncé\]](#)

a) On a

$$u_n(1) = \int_0^{\pi/2} \sin t (\cos t)^n dt = \left[-\frac{1}{n+1} \cos^{n+1} t \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{n+1}$$

La série de terme général $u_n(1)$ est divergente.

b) Pour $\alpha \leq 1$,

$$\forall t \in]0, \pi/2], (\sin t)^\alpha \geq \sin t$$

et donc $u_n(\alpha) \geq u_n(1)$.

On en déduit que la série de terme général $u_n(\alpha)$ est alors divergente.

Pour $\alpha > 1$. La série des $u_n(\alpha)$ est une série à termes positifs et

$$\sum_{k=0}^n u_k(\alpha) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^\alpha \frac{1 - (\cos t)^{n+1}}{1 - \cos t} dt$$

donc

$$\sum_{k=0}^n u_k(\alpha) \leq \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin t)^\alpha}{1 - \cos t} dt$$

avec l'intégrale majorant qui est convergente puisque

$$\frac{(\sin t)^\alpha}{1 - \cos t} \sim 2 \frac{t^\alpha}{t^2} = \frac{2}{t^{2-\alpha}} \text{ quand } t \rightarrow 0^+$$

Puisque la série à termes positifs $\sum u_n(\alpha)$ a ses sommes partielles majorées, elle est convergente.

c) Par ce qui précède et l'application du théorème de convergence dominée (ou par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini) on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^\alpha t \cos^n t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^\alpha t}{1 - \cos t} dt$$

Pour $\alpha = 2$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{1 - \cos t} dt = \int_0^{\pi/2} 1 + \cos t dt = \frac{\pi}{2} + 1$$

Pour $\alpha = 3$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 t}{1 - \cos t} dt = \int_0^{\pi/2} \sin t(1 + \cos t) dt = \frac{3}{2}$$

Exercice 33 : [énoncé]

On applique le théorème de convergence dominée en exploitant f bornée car continue sur segment. On obtient

$$\int_0^1 f(t^n) dt \rightarrow f(0)$$

Exercice 34 : [énoncé]

a) $a_{n+1}/a_n \rightarrow 1/e < 1$.

b) Posons

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt$$

Par intégration par parties, on obtient $I_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ d'où

$$a_n = n \int_0^{+\infty} t^n e^{-nt} dt$$

c) On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} nt^n e^{-nt} dt$$

et la série

$$\sum \int_0^{+\infty} |nt^n e^{-nt}| dt = \sum a_n$$

converge donc on peut intégrer terme à terme et on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} nt^n e^{-nt} dt$$

avec

$$(1 - te^{-t}) \sum_{n=1}^{+\infty} nt^n e^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n e^{-nt} = \frac{te^{-t}}{1 - te^{-t}}$$

d'où la conclusion.

Exercice 35 : [énoncé]

Si $|a| < 1$ alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{e^{it} - a} dt = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(n-1)t}}{1 - ae^{-it}} dt = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} a^k e^{i(n-(k+1))t} dt$$

Par convergence normale de la série

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{e^{it} - a} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \int_0^{2\pi} e^{i(n-(k+1))t} dt = \begin{cases} 2\pi a^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $|a| > 1$ alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{e^{it} - a} dt = -\frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{1 - e^{it}/a} dt = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a^{k+1}} \int_0^{2\pi} e^{i(n+k)t} dt = \begin{cases} -2\pi a^{n-1} & \text{si } n \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 36 : [énoncé]

- a) En appliquant le théorème de convergence dominée $\ell = 1$.
 b) On a

$$\ell - I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt = \int_0^1 t \frac{t^{n-1}}{1+t^n} dt$$

Par intégration par parties,

$$\ell - I_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$$

Puisque

$$\left| \int_0^1 \ln(1+t^n) dt \right| \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

on peut affirmer $\ell - I_n \sim \frac{\ln 2}{n}$.

- c) Pour $y \in]0, 1[$,

$$\frac{\ln(1+y)}{y} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^k}{k+1}$$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} dy = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$$

Sans peine, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$ sachant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

- d) Par changement de variable (\mathcal{C}^1 difféomorphisme),

$$\int_0^1 \ln(1+t^n) dt = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y^{\frac{n-1}{n}}} dy$$

Par convergence dominée (domination par sa limite simple),

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y^{\frac{n-1}{n}}} dy \rightarrow \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} dy = \frac{\pi^2}{12}$$

Ainsi,

$$\ell - I_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

puis

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 37 : [énoncé]

- a) Posons $\varphi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$. φ est une forme bilinéaire symétrique, $\varphi(f, f) \geq 0$ et si $\varphi(f, f) = 0$ alors $f(0) = 0$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $f'(t) = 0$ donc $f = 0$. φ est donc un produit scalaire et N apparaît comme étant la norme associée.

- b) Pour tout $x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq |f(0)| + \left| \int_0^x f'(t)dt \right| \leq \sqrt{2}N(f)$, donc $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$. Pour $f(x) = \sin(nx\pi)$, $\|f\|_\infty = 1$ et $N(f) = n\pi/\sqrt{2} \rightarrow +\infty$. Les deux normes ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 38 : [énoncé]

Si $\|x\|, \|y\| \leq 1$ alors $\|f(y) - f(x)\| = \|y - x\|$.

Si $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| > 1$ alors

$$\|f(y) - f(x)\| = \left\| \frac{y}{\|y\|} - x \right\| = \left\| \frac{y}{\|y\|} - y + y - x \right\| \leq \|y\| - 1 + \|y - x\| \leq 2\|y - x\|$$

Si $\|x\|, \|y\| > 1$ alors

$$\|f(y) - f(x)\| = \left\| \frac{y}{\|y\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\| = \left\| \frac{y-x}{\|y\|} + x \left(\frac{1}{\|y\|} - \frac{1}{\|x\|} \right) \right\| \leq \frac{\|y-x\|}{\|y\|} + \frac{\|x\| - \|y\|}{\|y\|} \leq 2$$

Au final f est 2-lipschitzienne.

Supposons maintenant que la norme $\| \cdot \|$ soit hilbertienne.

Si $\|x\|, \|y\| \leq 1$ alors

$$\|f(y) - f(x)\| = \|y - x\|$$

Si $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| > 1$ alors

$$\|f(y) - f(x)\|^2 - \|y - x\|^2 = 1 - \|y\|^2 - 2 \frac{\|y\| - 1}{\|y\|} (x | y)$$

Or $|(x | y)| \leq \|x\| \|y\| \leq \|y\|$ donc

$$\|f(y) - f(x)\|^2 - \|y - x\|^2 \leq 1 - \|y\|^2 + 2(\|y\| - 1) = -(1 - \|y\|)^2 \leq 0$$

Si $\|x\|, \|y\| > 1$ alors

$$\|f(y) - f(x)\|^2 - \|y - x\|^2 = 2 - \|y\|^2 - \|x\|^2 - 2 \frac{\|x\| \|y\| - 1}{\|x\| \|y\|} (x | y)$$

Or $|(x | y)| \leq \|x\| \|y\|$ donc

$$\|f(y) - f(x)\|^2 - \|y - x\|^2 = 2 - \|y\|^2 - \|x\|^2 + 2(\|x\| \|y\| - 1) = -(\|x\| - \|y\|)^2 \leq 0$$

Au final f est 1-lipschitzienne.

Exercice 39 : [énoncé]

a) $N_a(1, 1)$ et $N_a(1, -1)$ doivent exister et être strictement positifs. Cela fournit les conditions nécessaires $2a + 2 > 0$ et $2 - 2a > 0$ d'où $a \in]-1, 1[$. Montrons que cette condition est suffisante.

Supposons $a \in]-1, 1[$ et considérons $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi((x, y), (x', y')) = xx' + yy' + axy' + ayx'.$$

L'application φ est une forme bilinéaire symétrique sur \mathbb{R}^2 et pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $\varphi((x, y), (x, y)) \geq (1 - |a|)(x^2 + y^2) > 0$ en vertu de $|2axy| \leq |a|(x^2 + y^2)$. Ainsi φ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 et N_a est la norme euclidienne associée.

b) Le cas $a = b$ est immédiat. Quitte à échanger, on peut désormais supposer $a < b$.

Par homogénéité, on peut limiter l'étude de $\frac{N_a(x, y)}{N_b(x, y)}$ au couple $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ avec $t \in]-\pi/2, \pi/2[$.

Posons

$$f(t) = \left(\frac{N_a(\cos t, \sin t)}{N_b(\cos t, \sin t)} \right)^2 = \frac{1 + a \sin 2t}{1 + b \sin 2t}$$

On a

$$f'(t) = 2 \frac{(a - b) \cos(2t)}{(1 + b \sin 2t)^2}$$

Les variations de f sont faciles et les extremums de $f(t)$ sont en $t = -\pi/4$ et $t = \pi/4$. Ils valent $\frac{1-a}{1-b}$ et $\frac{1+a}{1+b}$.

On en déduit

$$\inf_{(x, y) \neq 0} \frac{N_a(x, y)}{N_b(x, y)} = \sqrt{\frac{1+a}{1+b}}$$

et

$$\sup_{(x, y) \neq 0} \frac{N_a(x, y)}{N_b(x, y)} = \sqrt{\frac{1-a}{1-b}}$$

(dans le cas $a < b$).

Exercice 40 : [énoncé]

a) L'application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est bien définie et on vérifie aisément

$$N(\lambda f) = |\lambda| N(f) \text{ et } N(f + g) \leq N(f) + N(g).$$

Supposons maintenant $N(f) = 0$, la fonction f est alors solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$ ce qui entraîne $f = 0$.

Finalement N est une norme sur E .

b) On a évidemment $N \leq \nu$.

Inversement, soit $f \in E$ et $g = f + f''$. La fonction f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$. Après

résolution via la méthode de variation des constantes, on obtient

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t) dt. \text{ On en déduit } |f(x)| \leq x \|g\|_\infty \leq \pi \|g\|_\infty \text{ et donc } \|f\|_\infty \leq \pi N(f).$$

De plus $\|f''\|_\infty \leq \|f + f''\|_\infty + \|f\|_\infty$ donc $\nu(f) \leq (\pi + 1)N(f)$.

Exercice 41 : [énoncé]

a) Les propriétés $N(f + g) \leq N(f) + N(g)$ et $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$ sont faciles.

Si $N(f) = 0$ alors la résolution de l'équation différentielle $f' + 3f = 0$ avec la condition initiale $f(0) = 0$ donne $f = 0$. Ainsi l'application N est bien une norme sur E .

On remarque

$$f(x) = e^{-3x} \int_0^x (f(t)e^{3t})' dt = e^{-3x} \int_0^x (3f(t) + f'(t))e^{3t} dt$$

Par suite $|f(x)| \leq e^3 N(f)$ pour tout $x \in [0, 1]$ et donc $N_\infty(f) \leq \alpha N(f)$ avec $\alpha = e^3$.

b) Pour $f_n(x) = x^n$, $N_\infty(f) = 1$ et

$$N(f) = N_\infty(x \mapsto 3x^n + nx^{n-1}) = n + 3 \rightarrow +\infty.$$

Les normes N_∞ et N ne sont pas équivalentes.

Exercice 42 : [énoncé]

a) Il suffit d'exploiter

$$|t^n f(t)| \leq \frac{1}{2} (t^{2n} + f(t)^2)$$

b) La relation est vraie pour $P(X) = X^n$ et se généralise à tout $P \in \mathbb{R}[X]$ par linéarité.

En vertu de ce qui précède

$$\int_0^1 P(t)^2 dt \leq \int_{-1}^1 P(t)^2 dt = \left| \int_{-1}^1 P(t)^2 dt \right| \leq \left| \int_0^\pi (P(e^{i\theta}))^2 e^{i\theta} d\theta \right|$$

Par l'inégalité triangulaire

$$\int_0^1 P(t)^2 dt \leq \int_0^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

et puisque

$$\int_{-\pi}^0 |P(e^{i\varphi})|^2 d\varphi = \int_0^\pi |P(e^{-i\theta})|^2 d\theta$$

avec $P(e^{-i\theta}) = \overline{P(e^{i\theta})}$ car P est un polynôme réel, on obtient

$$\int_0^1 P(t)^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

c) De façon immédiate

$$\sum_{k=0}^n a_k(f)^2 = \sum_{k=0}^n a_k(f) \int_0^1 t^k f(t) dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n a_k(f) t^k \right) f(t) dt$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k(f)^2 \right)^2 \leq \left(\int_0^1 (a_k(f) t^k)^2 dt \right) \left(\int_0^1 f(t)^2 dt \right)$$

avec

$$\int_0^1 (a_k(f) t^k)^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^n a_k(f) e^{ik\theta} \right|^2 d\theta = \pi \sum_{k=0}^n a_k(f)^2$$

en vertu de la formule de Parseval.

On en déduit

$$\sum_{k=0}^n a_k(f)^2 \leq \pi \left(\int_0^1 f(t)^2 dt \right)$$

et l'on peut dès lors conclure.

d) L'application N est bien définie de E dans \mathbb{R}^+ et on a évidemment $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$ et $N(f+g) = N(f) + N(g)$ car $f \mapsto a_k(f)$ est linéaire et que la norme sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ est bien connue.

Il reste à montrer $N(f) = 0 \Rightarrow f = 0$ i.e.

$$(\forall k \in \mathbb{N}, a_k(f) = 0) \Rightarrow f = 0$$

ce qui n'est pas une mince affaire...

Considérons donc $f \in E$ vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k(f) = 0$$

et en conséquence immédiate

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_0^1 P(t) f(t) dt = 0$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, introduisons $f_N : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_N(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } |f(t)| \leq N \\ N & \text{si } f(t) > N \\ -N & \text{si } f(t) < -N \end{cases}$$

La fonction f_N est continue par construction mais il est incertain qu'elle soit prolongeable par continuité en 1.

Dans un premier temps supposons néanmoins les fonctions f_N toutes prolongeables par continuité en 1.

Par le théorème de Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f_N sur $[0, 1]$ et donc cette suite de polynômes converge aussi vers f_N en norme $\| \cdot \|_2$ sur E .

On a donc

$$\int_0^1 P_n(t) f_N(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_N(t)^2 dt$$

Or

$$\int_0^1 P_n(t) f_N(t) dt = \int_0^1 P_n(t) (f_N(t) - f(t)) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_N(t) (f_N(t) - f(t)) dt$$

et l'on en déduit

$$\forall N \in \mathbb{N}, \int_0^1 f_N(t) f(t) dt = 0$$

Par convergence dominée, on obtient quand $N \rightarrow +\infty$

$$\forall N \in \mathbb{N}, \int_0^1 (f(t))^2 dt = 0$$

et l'on peut conclure que la fonction f est nulle.

Il reste à valider la démonstration dans le cas où les fonctions f_N ne pourraient être toutes prolongées par continuité en 1. Il suffit pour cela d'introduire les fonctions g_N suivantes

$$g_N(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1 - 1/N] \\ -N(t - 1) & \text{si } t \in]1 - \frac{1}{N}, 1[\end{cases}$$

et de considérez désormais les fonctions $h_N = f_N g_N$.

La fonction h_N se prolonge par continuité en 0 en posant $h_N(1) = 0$ et on peut reprendre la démonstration qui précède avec h_N au lieu de f_N .

e) Les fonctions f_p sont bien éléments de E . On a

$$\|f_p\|_2^2 = 1 + \int_{1/p}^1 \frac{dx}{x} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$$

et

$$\forall k \in \mathbb{N}, |a_k(f_p)| \leq \int_0^1 t^{k-\frac{1}{2}} dt \leq \frac{1}{k + \frac{1}{2}}$$

donc

$$N(f_p) \leq \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1/2)^2} \right)^{1/2} = C^{te}$$

Les normes N et $\|\cdot\|_2$ ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 43 : [énoncé]

a) On sait

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = \det A \cdot I_n$$

Si A est inversible alors

$$\det \tilde{A} \cdot \det A = (\det A)^n$$

donne

$$\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$$

L'application $A \mapsto \det \tilde{A}$ étant continue et coïncidant avec l'application elle aussi continue $A \mapsto (\det A)^{n-1}$ sur $GL_n(\mathbb{K})$ qui est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut assurer que $\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Si A est inversible alors \tilde{A} aussi donc

$$\text{rg}(A) = n \Rightarrow \text{rg}(\tilde{A}) = n$$

Si $\text{rg}(A) \leq n-2$ alors A ne possède pas de déterminant extrait non nul d'ordre $n-1$ et donc $\tilde{A} = 0$. Ainsi

$$\text{rg}(A) \leq n-2 \Rightarrow \text{rg}(\tilde{A}) = 0$$

Si $\text{rg}(A) = n-1$ alors $\dim \ker A = 1$ or $A\tilde{A} = \det A \cdot I_n = 0$ donne $\text{Im} \tilde{A} \subset \ker A$ et donc $\text{rg}(\tilde{A}) \leq 1$. Or puisque $\text{rg}(A) = n-1$, A possède un déterminant extrait d'ordre $n-1$ non nul et donc $\tilde{A} \neq 0$. Ainsi

$$\text{rg}(A) = n-1 \Rightarrow \text{rg}(\tilde{A}) = 1$$

c) Soit P une matrice inversible. Pour tout $A \in GL_n(\mathbb{K})$,

$$(P^{-1}\tilde{A}P)(P^{-1}AP) = \det A \cdot I_n$$

et $P^{-1}AP$ inversible donc

$$P^{-1}\tilde{A}P = \widetilde{P^{-1}AP}$$

Ainsi

$$\tilde{A} = PP^{-1}\widetilde{APP^{-1}}$$

Les applications $A \mapsto \tilde{A}$ et $A \mapsto PP^{-1}\widetilde{APP^{-1}}$ sont continues et coïncident sur la partie dense $GL_n(\mathbb{K})$ elles sont donc égales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A et B sont semblables alors il existe P inversible vérifiant $P^{-1}AP = B$ et par la relation ci-dessus $P^{-1}\tilde{A}P = \widetilde{P^{-1}AP} = \tilde{B}$ donc \tilde{A} et \tilde{B} sont semblables.

d) Si A est inversible alors $\tilde{A} = \det(A)A^{-1}$ et

$$\tilde{\tilde{A}} = \det(\tilde{A})\tilde{A}^{-1} = \det(A)^{n-2}A$$

Par coïncidence d'applications continues sur une partie dense, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\tilde{\tilde{A}} = \det(A)^{n-2}A$$

Exercice 44 : [énoncé]

A est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de A convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n^p \leq u_{n+1}^p$ qui donne à la limite $u_n \leq u_{n+1}$ et donc $u \in A$.

B est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de B convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|u - u^p\|_\infty \leq \varepsilon/2$ et puisque $u_n^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, |u_n^p| \leq \varepsilon/2$$

et donc

$$|u_n| \leq |u_n - u_n^p| + |u_n^p| \leq \varepsilon$$

Ainsi $u \rightarrow 0$ et donc $u \in B$.

C est fermé. En effet si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de C convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors en notant ℓ^p la limite de u^p , la suite (ℓ^p) est une suite de Cauchy puisque $|\ell^p - \ell^q| \leq \|u^p - u^q\|_\infty$. Posons ℓ la limite de la suite (ℓ^p) et considérons $v^p = u^p - \ell^p$. $v^p \in B$ et $v^p \rightarrow u - \ell$ donc $u - \ell \in B$ et $u \in C$.

D est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de D convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|u - u^p\|_\infty \leq \varepsilon/2$ et puisque 0 est valeur d'adhérence de u^p , il existe une infinité de n tels que $|u_n^p| \leq \varepsilon/2$ et donc tels que

$$|u_n| \leq |u_n - u_n^p| + |u_n^p| \leq \varepsilon$$

Ainsi 0 est valeur d'adhérence de u et donc $u \in D$.

E n'est pas fermé. Notons δ^p , la suite déterminée par $\delta_n^p = 1$ si $p \mid n$ et 0 sinon. La suite δ^p est périodique et toute combinaison linéaire de suites δ^p l'est encore. Posons alors

$$u^p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{2^k} \delta^k$$

qui est élément de E . La suite u^p converge car

$$\|u^{p+q} - u^p\|_\infty \leq \sum_{k=p+1}^{p+q} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^p} \rightarrow 0$$

et la limite u de cette suite n'est pas périodique car

$$u_0 = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^p \frac{1}{2^k} = 1$$

et que $u_n < 1$ pour tout n puisque pour que $u_n = 1$ il faut $k \mid n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 45 : [énoncé]

Si la forme linéaire est continue assurément son noyau est fermé car image réciproque du fermé $\{0\}$.

Inversement, supposons que φ est une forme linéaire discontinue.

Pour tout $k \in \mathbb{R}^+$, il existe alors $x \in E$ tel que

$$|\varphi(x)| > k \|x\|$$

En prenant $k = n \in \mathbb{N}$, on définit ainsi une suite (x_n) d'éléments de E vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|\varphi(x_n)| > n \|x_n\|$$

Posons alors

$$y_n = \frac{1}{\varphi(x_n)} x_n$$

On a $\varphi(y_n) = 1$ et $\|y_n\| \leq 1/n$ donc $y_n \rightarrow 0$.

Considérons enfin $z_n = y_n - y_0$.

On a $\varphi(z_n) = 0$ et donc $z_n \in \ker \varphi$ et $z_n \rightarrow -y_0 \notin \ker \varphi$.

Ainsi $\ker \varphi$ n'est pas fermé.

Exercice 46 : [énoncé]

Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $y \in A$ tel que $|x - y| = d(x, A)$. Or $d(x, A) = 0$ donc $x = y \in A$. Ainsi A est fermé.

Par l'absurde supposons que A ne soit pas un intervalle. Il existe $a < c < b$ tel que $a, b \in A$ et $c \notin A$.

Posons $\alpha = \sup \{x \in A/x \leq c\}$ et $\beta = \inf \{x \in A/x \geq c\}$. On a $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < c < \beta$ et $]\alpha, \beta[\subset C_{\mathbb{R}} A$.

Posons alors $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$. On a $d(\gamma, A) = \frac{\beta-\alpha}{2} = |\gamma - \alpha| = |\gamma - \beta|$ ce qui contredit l'hypothèse d'unicité. Absurde.

Exercice 47 : [énoncé]

a) Par télescopage

$$\left(\sum_{k=0}^n u^k \right) \circ (u - \text{Id}) = u^{n+1} - \text{Id}$$

donc

$$v_n \circ (u - \text{Id}) = \frac{1}{(n+1)} (u^{n+1} - \text{Id})$$

b) Soit $x \in \text{Im}(u - \text{Id}) \cap \ker(u - \text{Id})$. On peut écrire $x = u(a) - a$ et on a $u(x) = x$. On en déduit

$$v_n \circ (u - \text{Id})(a) = x$$

Or

$$v_n \circ (u - \text{Id})(a) = \frac{1}{n+1} (u^{n+1}(a) - a) \rightarrow 0$$

car

$$\|u^{n+1}(a) - a\| \leq \|u^{n+1}(a)\| + \|a\| \leq 2 \|a\|$$

On en déduit $x = 0$.

c) Par la formule du rang

$$\dim \text{Im}(u - \text{Id}) + \dim \ker(u - \text{Id}) = \dim E$$

et puisque les deux espaces sont en somme directe, ils sont supplémentaires.

d) Soit $z \in E$. On peut écrire $z = x + y$ avec $x \in \text{Im}(u - \text{Id})$ et $y \in \ker(u - \text{Id})$. On a alors $v_n(z) = v_n(x) + y$ avec, comme dans l'étude du b), $v_n(x) \rightarrow 0$. On en déduit $v_n(z) \rightarrow y$.

Ainsi la suite de fonctions (v_n) converge simplement vers la projection p sur $\ker(u - \text{Id})$ parallèlement à $\text{Im}(u - \text{Id})$.

Puisque pour tout $x \in E$, on a

$$\|v_n(x)\| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \|u^k(x)\| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \|x\| = \|x\|$$

on obtient à la limite $\|p(x)\| \leq \|x\|$. On en déduit que la projection p est continue puis que $\text{Im}(u - \text{Id}) = \ker p$ est une partie fermée.

e) Supposons la convergence simple de la suite de fonctions (v_n) et la fermeture de $\text{Im}(u - \text{Id})$.

Soit $z \in E$. Posons $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(z)$ et $x = z - y$.

D'une part, puisque

$$u(v_n(z)) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u^{k+1}(z) = v_n(z) + \frac{1}{n+1} (u^{n+1}(z) - z)$$

on obtient à la limite

$$u(y) = y$$

car l'application linéaire u est continue et $\|u^{n+1}(z)\| \leq \|z\|$. On en déduit $y \in \ker(u - \text{Id})$.

D'autre part

$$z - v_n(z) = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n (\text{Id} - u^k)(z) \right)$$

et

$$\text{Im}(\text{Id} - u^k) = \text{Im} \left((\text{Id} - u) \circ \sum_{\ell=0}^{k-1} u^\ell \right) \subset \text{Im}(\text{Id} - u) = \text{Im}(u - \text{Id})$$

donc $z - v_n(z) \in \text{Im}(u - \text{Id})$. On en déduit $x = \lim(z - v_n(z)) \in \text{Im}(u - \text{Id})$ car $\text{Im}(u - \text{Id})$ est fermé.

Finalement, on a écrit $z = x + y$ avec

$$x \in \text{Im}(u - \text{Id}) \text{ et } y \in \ker(u - \text{Id})$$

Exercice 48 : [énoncé]

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+x^2} = \int_0^1 \frac{du}{1+(ux)^2} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^{2n} x^{2n} du$. Pour $|x| < 1$, il y a

convergence normale pour $u \in [0, 1]$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} = \frac{\arctan x}{x}$.

Exercice 49 : [énoncé]

a) Si la série entière S est de rayon de convergence $R > 0$, alors pour tout $x \in]-R, R[$ on a

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} = 1 + x \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} x^n$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on obtient

$$S(x) = 1 + xS^2(x)$$

b) Pour $x \neq 0$, on obtient, après résolution

$$S(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} \text{ pour } x < 1/4$$

Posons $\varepsilon(x)$ tel que

$$S(x) = \frac{1 + \varepsilon(x)\sqrt{1-4x}}{2x}$$

On a

$$\varepsilon(x) = \frac{2xS(x) - 1}{\sqrt{1-4x}}$$

La fonction ε est continue sur $] -R, 0[\cup] 0, \min(R, 1/4)[$ et ne prend que les valeurs -1 ou 1 . On en déduit que cette fonction ε est constante et puisque S converge quand $x \rightarrow 0^{+/-}$, on peut affirmer que ε est constante égale à -1 car négative au voisinage de 0 .

Finalement

$$S(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \text{ et } S(0) = 1$$

c) Après développement en série entière de $\sqrt{1-4x}$, on obtient

$$\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

avec

$$b_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

et $R = 1/4$.

Puisque la fonction

$$T : x \mapsto \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

vérifie l'équation $xT^2(x) = T(x) - 1$, la reprise des calculs précédents (sachant $R > 0$) assure que les coefficients b_n vérifient

$$b_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = \sum_{k=0}^n b_{n-k} b_k$$

On en déduit $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car les conditions qui précèdent déterminent une suite de façon unique.

d) Par la formule de Stirling

$$a_n \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}^{3/2}}$$

Exercice 50 : [énoncé]

a) Par convergence dominée par la fonction $\varphi : t \mapsto 1$, on obtient $a_n \rightarrow 0$.

b) On a

$$a_n + a_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (\tan t)' (\tan t)^n dt = \frac{1}{n+1}$$

c) Par monotonie $a_n + a_{n+2} \leq 2a_n \leq a_n + a_{n-2}$. On en déduit $a_n \sim \frac{1}{2n}$ puis

$$u_n(x) \sim \frac{x^n}{2n^{\alpha+1}}.$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est donc égale à 1.

Pour $x = 1$, $\sum u_n(x)$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$.

Pour $x = -1$, $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement si $\alpha \leq -1$.

Pour $\alpha > -1$, $2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^\alpha} a_k = \alpha + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^\alpha} (a_k + a_{k+2}) + o(1)$

Or $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\alpha(n+1)}}$ converge par application de critère spécial des séries alternées (car $n \mapsto \frac{1}{n^{\alpha(n+1)}}$ décroît vers 0 pour n assez grand) donc $\sum u_n(x)$ converge.

d) Puisque $a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} x^n + a_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

On en déduit

$$f(x) + \frac{f(x) - \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} x}{x^2} = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

puis

$$f(x) = \frac{-x \ln(1-x) + \frac{\pi}{4} + x \frac{\ln 2}{2}}{x^2 + 1}$$

Exercice 51 : [énoncé]

a) On a

$$|a_n| = \frac{1}{n!} \int_0^1 t \prod_{k=1}^{n-1} (k-t) dt \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 \prod_{k=1}^{n-1} k dt \leq \frac{1}{n}$$

donc $R \geq 1$.

$$|a_n| \geq \frac{1}{n!} \int_0^1 t(1-t) \times \prod_{k=2}^{n-1} (k-1) dt \geq \frac{1}{4n(n-1)}$$

donc $R \leq 1$. Finalement $R = 1$.

b) Soit $x \in]-1, 1[$.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (t-k) x^n dt$$

or par convergence uniforme de la suite de fonctions de la variable t sur $[0, 1]$ (convergence uniforme obtenue par convergence normale grâce à $|x| < 1$) on peut permuter somme et intégrale.

$$S(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (t-k) x^n dt = \int_0^1 (1+x)^t dt = \left[\frac{(1+x)^t}{\ln(1+x)} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{x}{\ln(1+x)}$$

Exercice 52 : [énoncé]

a)

$$N(n, p) = \binom{n}{p} D(n-p)$$

b) $D(n) \leq n!$ donc $\left| \frac{D(n)}{n!} \right| \leq 1$ qui implique $R \geq 1$.

On a $\sum_{p=0}^n N(n, p) = n!$ donc $\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!(n-p)!} D(n-p) = 1$ d'où par produit de Cauchy

$e^x f(x) = \frac{1}{1-x}$ puis

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

c)

$$\frac{e^{-x}}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} x^n$$

donc

$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

puis

$$N(n, p) = \frac{n!}{p!} \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!}$$

d) Finalement

$$\frac{1}{n!} N(n, p) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p! e}$$

Exercice 53 : [énoncé]

a) Notons a_n le coefficient générale de la série entière étudiée $a_m = 1$ s'il existe n tel que $m = p_n$ et $a_m = 0$ sinon. On observe $a_n = O(1)$ donc $R \geq 1$ et $a_n \not\rightarrow 0$ donc $R \leq 1$ puis $R = 1$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, $n \leq \varepsilon p_n$. On a alors :

$$0 \leq (1-x)f(x) \leq (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} x^{p_n} + (1-x) \sum_{n=N}^{+\infty} x^{n/\varepsilon}$$

Quand $x \rightarrow 1^-$,

$$(1-x) \sum_{n=0}^{N-1} x^{p_n} \rightarrow 0$$

et

$$(1-x) \sum_{n=N}^{+\infty} x^{n/\varepsilon} \leq \frac{1-x}{1-x^{1/\varepsilon}} \rightarrow \varepsilon$$

donc pour x suffisamment proche de 1,

$$0 \leq (1-x)f(x) \leq 2\varepsilon$$

Cela permet d'affirmer $(1-x)f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0$.

b) Ici, il faut penser à une comparaison série-intégrale...

Pour $x \in]0, 1[$, la fonction $t \mapsto x^{t^q}$ est décroissante. Par la démarche classique, on obtient

$$\int_0^{+\infty} x^{t^q} dt \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} x^{t^q} dt$$

Or

$$\int_0^{+\infty} x^{t^q} dt = \int_0^{+\infty} e^{t^q \ln x} dt = \int_0^{+\infty} e^{-a^q t^q} dt$$

avec $a = \sqrt[q]{-\ln x}$ donc

$$\int_0^{+\infty} x^{t^q} dt = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-u^q} du$$

et on ne calculera pas cette dernière intégrale.

Par l'encadrement qui précède, on peut affirmer

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[q]{-\ln x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^q} du$$

Exercice 54 : [énoncé]

A l'aide d'une intégration par partie :

$$a_{n+1} = 2(n+1) \int_0^1 t^2 (1-t^2)^n dt = 2(n+1)(a_n - a_{n+1}) \text{ donc } a_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} a_n.$$

$$a_n \neq 0 \text{ et } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow 1 \text{ donc } R = 1.$$

$$\text{Pour } x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 ((1-t^2)x)^n dt.$$

On peut permuter somme infinie et intégrale (par un argument de convergence

uniforme par exemple) et affirmer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^1 \frac{dt}{1-x+xt^2}$.

$$\text{Pour } x = 0 : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1.$$

$$\text{Pour } x > 0 : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{dt}{\frac{1-x}{x} + t^2} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \arctan\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right).$$

$$\text{Pour } x < 0 : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - \frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}} \operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}\right).$$

Exercice 55 : [énoncé]

a) Soit $r \in]0, R[$. La série numérique $\sum a_n r^n$ est absolument convergente. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{a_n}{n!} z^n = a_n r^n \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{r}\right)^n = o(a_n r^n)$$

car par croissance comparée

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{z}{r}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Par comparaison de séries absolument convergentes, on peut affirmer que la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Le rayon de convergence de la série entière étudiée est $+\infty$.

b) On a

$$f(t)e^{-xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n e^{-xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \text{ avec } f_n(t) = \frac{a_n}{n!} t^n e^{-xt}$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

Les fonctions f_n et la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ sont continues par morceaux sur $[0, +\infty[$.

Les fonctions f_n sont intégrables sur $[0, +\infty[$ car $t^2 f_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \frac{|a_n|}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt$$

Par intégration par parties généralisées successives

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt = \frac{n!}{x^{n+1}}$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \frac{|a_n|}{x^{n+1}}$$

Si $x > 1/R$ alors la série $\sum |a_n|/x^{n+1}$ est convergente et, par le théorème de Fubini, on peut affirmer que la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable et

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}}$$

Exercice 56 : [\[énoncé\]](#)

a) Posons

$$a_n = \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Puisque $a_{n+1}/a_n \rightarrow 1$, on peut affirmer $R = 1$.

b) La suite (a_n) décroît vers 0 donc par le critère spécial des séries alternée, la série entière converge en $x = -1$.

Puisque $a_n \sim 1/\sqrt{n}$, par équivalence de séries à termes positifs, la série entière diverge en $x = 1$.

c) Par positivité des termes sommés, on a pour $x \in [0, 1]$,

$$f(x) \geq \sum_{n=1}^N \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) x^n$$

Or

$$\sum_{n=1}^N \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) x^n \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^N \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Puisque

$$\sum_{n=1}^N \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$$

Pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe un rang N tel que

$$\sum_{n=1}^N \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \geq M + 1$$

et pour x au voisinage de 1^-

$$\sum_{n=1}^N \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) x^n \geq M$$

puis

$$f(x) \geq M$$

On peut donc affirmer que

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$$

d) On a

$$(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) x^{n+1}$$

et par décalage d'indice

$$(1-x)f(x) = \sin(1)x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) \right] x^n$$

Puisque

$$\sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) = O \left(\frac{1}{n^{3/2}} \right)$$

la série entière en second membre est définie et continue en 1 par convergence normale de la série de fonctions associée. On en déduit

$$(1-x)f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \sin(1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) \right] = 0$$

Il est aussi possible de procéder par les en ε exploitant

$$\left| \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right| \leq \varepsilon \text{ pour } n \text{ assez grand}$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Exercice 57 : [\[énoncé\]](#)

a) Pour $a_n = (-1)^n$, on a $f(x) = 1/(1+x)$, $\ell = 1/2$ et la série $\sum a_n$ diverge.

b) Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1[$, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^N a_n - \ell = A_N + B_N - C_N$$

avec

$$A_N = f(x) - \ell, B_N = \sum_{n=0}^N a_n - \sum_{n=0}^N a_n x^n \text{ et } C_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 au-delà duquel

$$|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{n}$$

et alors pour tout $N \geq n_0$

$$|C_N| \leq \frac{\varepsilon}{N} \sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n \leq \frac{\varepsilon}{N(1-x)}$$

Posons alors

$$x = 1 - \frac{1}{N}$$

et on a

$$|C_N| \leq \varepsilon$$

D'autre part

$$|B_N| = \left| \sum_{n=0}^N a_n (1 - x^n) \right| \leq (1 - x) \sum_{n=0}^N n a_n = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N n a_n$$

En vertu du théorème de Cesaro

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^N n a_n \rightarrow 0$$

et donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $N \geq n_1$

$$|B_N| \leq \varepsilon$$

Enfin, puis f tend vers ℓ en 1^- , il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour $N \geq n_2$

$$A_N = |f(1 - 1/N) - \ell| \leq \varepsilon$$

Finalement, pour $N \geq \max(n_0, n_1, n_2)$

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n - \ell \right| \leq 3\varepsilon$$

On peut donc affirmer que la série $\sum a_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$$

Exercice 58 : [énoncé]

Posons

$$f(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{sh}x}$$

La fonction f est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -\infty, R[$ avec $R = \operatorname{argsh}1$.

Soit $x \in] -R, R[$. Puisque $|\operatorname{sh}x| < 1$, on peut écrire

$$f(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{sh}x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sh}^n x$$

Chacune des fonctions $x \mapsto \operatorname{sh}^n x$ est développable en série entière sur \mathbb{R} ce qui permet d'écrire

$$\operatorname{sh}^n x = \sum_{k=n}^{+\infty} a_{n,k} x^k$$

Puisque les coefficients du développement en série entière de la fonction sh sont tous positifs, on a aussi $a_{n,k} \geq 0$ pour tout n, k . Pour $x \in] -R, R[$, on peut donc écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_{n,k} x^k \right)$$

Puisque la série $\sum_{k \geq n} |a_{n,k} x^k| = \sum_{k \geq n} a_{n,k} |x|^k$ converge et puisque la série

$\sum_{n \geq 0} \sum_{k=n}^{+\infty} |a_{n,k} x^k| = \sum_{n \geq 0} (\operatorname{sh} |x|)^n$ converge aussi, on peut par le théorème de Fubini échanger les deux sommes ce qui donne

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^k a_{n,k} \right) x^k$$

Ainsi la fonction f est développable en série entière sur $] -R, R[$. Le rayon de convergence de la série entière ainsi introduite est alors au moins égale à R et en fait exactement égal à R car f diverge vers $+\infty$ en R^- et ne peut donc être prolongée par continuité en R .

Exercice 59 : [énoncé]

Pour $x \in [0, R[$, la série $\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$ est une série à termes positifs. Par la formule de Taylor reste intégrale

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

et puisque le reste intégrale est positif, on a

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \leq f(x)$$

Puisque ses sommes partielles sont majorées, la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$ est convergente.

Pour $x \in] -R, 0]$, on a

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} |x|^n$$

et la série $\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$ est absolument convergente donc convergente.

Exercice 60 : [énoncé]

Soulignons que les termes sommés pour définir la série entière ont un sens car l'irrationalité de α donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sin(n\pi\alpha) \neq 0$$

a) Puisque

$$\frac{1}{|\sin(n\pi\alpha)|} \geq 1$$

la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}$ diverge grossièrement en 1 et donc $R_\alpha \leq 1$.

b) Par une récurrence facile, on montre $u_n \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n^{u_n-1}} \leq \frac{1}{(n+1)^n}$$

c) On a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_{k+1}} \leq \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k} \frac{1}{u_k}$$

et puisque la suite (u_n) est croissante

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leq \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k} \frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{K}{u_{n+1}}$$

avec

$$K = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k}$$

On en déduit

$$\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \frac{K \pi u_n}{u_{n+1}} = \frac{K \pi}{u_n^{u_n-1}}$$

d) Considérons $m = u_n \in \mathbb{N}^*$. Quand $n \rightarrow +\infty$, on a pour $x > 0$

$$\frac{x^m}{\sin(m\pi\alpha)} \rightarrow -\infty$$

En effet

$$m\alpha = u_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} + u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k}$$

Or

$$u_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} = \sum_{k=1}^n \frac{u_n}{u_k} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_n}{u_{n-1} u_{n-2}} \dots \frac{u_{k+1}}{u_k} \in 1 + 2\mathbb{N}$$

et donc

$$-\sin(m\pi\alpha) = \sin \left[\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \right]$$

d'où

$$0 \leq -\sin(m\pi\alpha) \leq \frac{C}{u_n^{u_n-1}}$$

puis

$$-\frac{x^m}{\sin(m\pi\alpha)} \geq C \frac{(x u_n)^{u_n}}{u_n} \rightarrow +\infty$$

On en déduit que $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}$ diverge pour tout $x > 0$ et donc $R_\alpha = 0$.

e) Par l'absurde, supposons $\alpha \in \mathbb{Q}$. Il existe alors un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q\alpha \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $qu_n\alpha \in \mathbb{N}$ or

$$qu_n\alpha = qu_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} + qu_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k}$$

avec comme vu ci-dessus

$$u_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} \in \mathbb{N}$$

On en déduit

$$qu_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \in \mathbb{N}$$

Or

$$0 < qu_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} < \frac{qKu_n}{u_{n+1}} \rightarrow 0$$

C'est absurde.

Exercice 61 : [énoncé]

a) Posons

$$\tilde{f}(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$$

Les fonctions \tilde{f} , $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.

Sur $[a, +\infty[$, on a les dominations

$$|f(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}, \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{te^{-at}}{1+t^2} \text{ et } \left| \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{t^2 e^{-at}}{1+t^2}$$

Les fonctions dominantes étant intégrables, on peut affirmer que f est de classe \mathcal{C}^2 et

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

On a alors

$$f(x) + f''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

Posons

$$\tilde{g}(x, t) = \frac{\sin t}{x+t}$$

Les fonctions \tilde{g} , $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x^2}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} g(x, t) dt$ est bien définie sur \mathbb{R}^+ (intégrale convergente via intégration par parties)

Sur $[a, +\infty[$, on a les dominations

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{1}{(a+t)^2} \text{ et } \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{2}{(a+t)^3}$$

Les fonctions dominantes étant intégrables, on peut affirmer que g est de classe \mathcal{C}^2 et

$$g''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin t}{(x+t)^3} dt$$

Par une intégration par parties

$$g''(x) = \left[-\frac{\sin t}{(x+t)^2} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^2} dt = \frac{1}{x} - g(x)$$

b) Pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$|\tilde{f}(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

donc f est définie et continue sur \mathbb{R}^+ .

$$g(x) - g(0) = - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin t}{t(x+t)} dt = -x \left(\int_0^1 \frac{\sin t}{t(x+t)} dt + \int_1^{+\infty} \frac{x \sin t}{t(x+t)} dt \right)$$

mais

$$\left| x \int_0^1 \frac{\sin t}{t(x+t)} dt \right| \leq x \int_0^1 \frac{dt}{(x+t)} = x \ln(x+1) - x \ln x \rightarrow 0$$

et

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{x \sin t}{t(x+t)} dt \right| \leq x \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \rightarrow 0$$

donc g est continue en 0.

c) D'une part

$$|f(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

D'autre part

$$|g''(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{2|\sin t|}{(x+t)^3} dt \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{2|\sin t|}{(x+t)^2} dt$$

et en prenant $x \geq 1$

$$|g''(x)| \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{2|\sin t|}{(1+t)^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

donc

$$g(x) = \frac{1}{x} - g''(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi $f - g \xrightarrow{+\infty} 0$ ce qui permet via résolution de l'équation différentielle de conclure

$$f = g$$

On en déduit $g(0) = f(0)$ i.e.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 62 : [énoncé](#)

Posons $g(x, t) = e^{-t^2} \cos(xt)$. $t \mapsto g(x, t)$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ sont continues par morceaux sur \mathbb{R}^+ et $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} .

$t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$.

Pour $x \in [0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq te^{-t^2}$ avec $t \mapsto te^{-t^2}$ intégrable sur $[0, +\infty[$, la

fonction φ est de classe \mathcal{C}^1 et $\varphi'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt$.

Par intégration par parties,

$$\varphi'(x) = \left[\frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(xt) \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} xe^{-t^2} \cos(xt) dt = -\frac{1}{2} x \varphi(x).$$

φ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et $\varphi(0) = \sqrt{\pi}/2$ on

conclut $\varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{1}{4}x^2}$.

Exercice 63 : [énoncé](#)

a) Posons $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, t) = \frac{e^{itx}}{1+t^2}$$

La fonction f est définie et continue sur \mathbb{R}^2 .

Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|f(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \psi(t)$$

avec ψ intégrable sur $[0, +\infty[$.

On en déduit que φ est définie et continue sur \mathbb{R} .

b) Par intégration par parties

$$\varphi(x) = -\frac{1}{ix} + \frac{1}{ix} \int_0^{+\infty} \frac{2te^{itx}}{(1+t^2)^2} dt$$

La fonction

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{2te^{itx}}{(1+t^2)^2} dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} en vertu de la domination

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2te^{itx}}{(1+t^2)^2} \right) \right| = \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} \leq \frac{2}{1+t^2}$$

On en déduit que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* avec

$$\varphi'(x) = \frac{1}{ix^2} - \frac{1}{ix^2} \int_0^{+\infty} \frac{2te^{itx}}{(1+t^2)^2} dt + \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{2t^2 e^{itx}}{(1+t^2)^2} dt$$

Or par intégration par parties

$$\int_0^{+\infty} \frac{2te^{itx}}{(1+t^2)^2} dt = \left[-\frac{e^{itx}}{1+t^2} \right]_0^{+\infty} + ix \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt$$

donc

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt + \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{2t^2 e^{itx}}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 - 1}{(1+t^2)^2} e^{itx} dt$$

Enfin, une dernière intégration par parties donne

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} \left[-\frac{2t}{1+t^2} e^{itx} \right]_0^{+\infty} + i \int_0^{+\infty} \frac{2t}{1+t^2} e^{itx} dt$$

et la relation voulue...

c) Par le changement de variable $u = tx$, on obtient l'expression proposée.

On peut décomposer

$$\varphi'(x) = i \int_0^1 \frac{ue^{iu}}{x^2 + u^2} du + \int_1^{+\infty} \frac{ue^{iu}}{x^2 + u^2} du$$

D'une part, par intégration par parties

$$\int_1^{+\infty} \frac{ue^{iu}}{x^2 + u^2} du = \left[\frac{ue^{iu}}{x^2 + u^2} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - u^2}{(x^2 + u^2)^2} e^{iu} du$$

avec

$$\left[\frac{ue^{iu}}{x^2 + u^2} \right]_1^{+\infty} = -\frac{e^i}{x^2 + 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -e^i$$

et

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - u^2}{(x^2 + u^2)^2} e^{iu} du \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{u^2 - x^2}{(x^2 + u^2)^2} du = \frac{1}{x^2 + 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$$

D'autre part

$$\int_0^1 \frac{ue^{iu}}{x^2 + u^2} du = \int_0^1 \frac{u}{x^2 + u^2} du + \int_0^1 \frac{u(e^{iu} - 1)}{x^2 + u^2} du$$

avec

$$\int_0^1 \frac{u}{x^2 + u^2} du = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + u^2) \right]_0^1 \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln x$$

et

$$\left| \int_0^1 \frac{u(e^{iu} - 1)}{x^2 + u^2} du \right| \leq \int_0^1 \frac{|e^{iu} - 1|}{u} du < +\infty$$

Au final

$$\varphi'(x) = i \ln x + o(\ln x) + O(1) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} i \ln x$$

d) En vertu de ce qui précède

$$\text{Im}(\varphi'(x)) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln x \rightarrow -\infty$$

On en déduit que la fonction réelle $\text{Im}\varphi$ n'est pas dérivable en 0, il en est a fortiori de même de φ .

Exercice 64 : [énoncé]

a) La fonction $x \mapsto 1/x^\alpha(1+x)$ est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ avec

$$\frac{1}{x^\alpha(1+x)} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x^\alpha} \text{ et } \frac{1}{x^\alpha(1+x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha+1}}$$

Cette fonction est donc intégrable si, et seulement si, $\alpha \in]0, 1[$.

La fonction intégrée étant de surcroît positive, l'intégrale définissant $f(\alpha)$ converge si, et seulement si, $\alpha \in]0, 1[$.

b) On a

$$f(\alpha) - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}(1+x)}$$

Or

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}(1+x)} \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)} = C$$

et pour $\alpha \leq 1/2$

$$\left| \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} \right| \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = C'$$

On a donc

$$f(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} + O(1) = \frac{1}{\alpha} + O(1) \sim \frac{1}{\alpha}$$

c) Par le changement de variable \mathcal{C}^1 bijectif $x = 1/t$, on obtient $f(\alpha) = f(1-\alpha)$ d'où la symétrie affirmée.

d) Posons

$$u(\alpha, x) = \frac{1}{x^\alpha(1+x)}$$

Pour chaque $x \in]0, +\infty[$, la fonction $\alpha \mapsto u(\alpha, x)$ est continue et pour chaque $\alpha \in]0, 1[$ la fonction $x \mapsto u(\alpha, x)$ est continue par morceaux. Enfin pour $\alpha \in [a, b] \subset]0, 1[$ (avec $a > 0$), on a

$$|u(x, \alpha)| \leq \frac{1}{x^a(1+x)} \text{ si } x \in [1, +\infty[$$

et

$$|u(x, \alpha)| \leq \frac{1}{x^b(1+x)} \text{ si } x \in]0, 1]$$

Ainsi

$$|u(x, \alpha)| \leq \varphi_{a,b}(x) \text{ pour } x \in]0, +\infty[$$

en posant $\varphi_a(x) = u(a, x) + u(b, x)$ qui est intégrable.

Par domination sur tout segment, on peut affirmer que f est continue sur $]0, 1[$.

e) Par le changement de variable $x = 1/t$, on peut écrire

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1-\alpha}(1+t)}$$

et alors

$$f(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{1-\alpha} + x^\alpha}{x(1+x)} dx$$

On vérifie que pour $x \geq 1$, la fonction $\alpha \mapsto x^{1-\alpha} + x^\alpha$ est décroissante sur $]0, 1/2[$ puis croissante sur $[1/2, 1[$. La fonction f a donc la même monotonie et son minimum est donc

$$f(1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} = \pi$$

via le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

Exercice 65 : [énoncé]

a) Par contraposée, supposons la convergence de $\sum a_n$. La suite (a_n) tend alors vers 0 et est donc bornée par un certain $m \in \mathbb{R}^{+\ast}$. On a alors

$$|f(z)| \leq m \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} = me^{|z|}$$

donc

$$M(r) \leq me^r$$

puis

$$\frac{\ln M(r)}{r} \leq \frac{\ln m + r}{r} \rightarrow 1$$

donc $\ell \leq 1$.

b) Pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, on a

$$f(re^{it}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} r^n e^{int}$$

Par convergence normale de la série de fonctions sous-jacente

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} r^k \delta_{k,n} = \frac{a_n}{n!} r^n$$

puis

$$\left| \frac{a_n}{n!} r^n \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})| dt \leq M(r)$$

et enfin l'inégalité demandée.

c) Supposons $\ell < 1$ et introduisons $q \in]\ell, 1[$. Pour r assez grand, on a

$$\frac{\ln M(r)}{r} \leq q$$

et donc

$$M(r) \leq e^{qr}$$

En prenant $r = n$, on a pour n assez grand

$$|a_n| \leq \frac{e^{nq}}{n^n} n! \sim \sqrt{2\pi n} \frac{e^{nq}}{e^n} = \sqrt{2\pi n} \cdot \alpha^n$$

avec $\alpha = e^q/e$ vérifiant $|\alpha| < 1$.

Puisque la série de terme général $\sqrt{2\pi n} \alpha^n$ converge, un argument de comparaison de série à termes positifs assure l'absolue convergence et donc la convergence de $\sum a_n$.

Exercice 66 : [énoncé]

Posons k_n la partie entière de $n/2\pi$. On peut écrire

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi k_n} f(x+t)f(t) dt + \varepsilon_n(x)$$

avec

$$|\varepsilon_n(x)| \leq \frac{1}{n} \int_{2\pi k_n}^n \|f\|_\infty^2 \leq \frac{2\pi}{n} \|f\|_\infty^2$$

En introduisant le produit scalaire hermitien usuelle sur l'espace des fonctions complexes continues 2π périodiques

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi k_n} f(x+t)f(t) = k_n \langle f_x | f \rangle$$

avec $f_x : t \mapsto f(x+t)$.

En notant $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier exponentiels de f , celle de f_x est $(c_n e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ et donc

$$\langle f_x | f \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 e^{inx}$$

Posons

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t)f(t) dt$$

ce qui définit une fonction continue 2π -périodique.

On a

$$F_n(x) = \frac{2\pi k_n}{n} F(x) + \varepsilon(x)$$

et donc

$$|F_n(x) - F(x)| \leq \frac{n - 2\pi k_n}{n} |F(x)| + |\varepsilon(x)|$$

puis

$$|F_n(x) - F(x)| \leq \frac{2\pi}{n} \|F\|_\infty + \frac{2\pi}{n} \|f\|_\infty^2$$

Puisque ce majorant ne dépend pas de x ,

$$\|F_n - F\|_\infty \leq \frac{2\pi}{n} \|F\|_\infty + \frac{2\pi}{n} \|f\|_\infty^2 \rightarrow 0$$

et donc la suite $(F_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers F sur \mathbb{R} .

b) On a

$$|F_n(x)| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 |e^{inx}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = F(0)$$

donc

$$\|F\|_\infty \leq F(0)$$

Exercice 67 : [énoncé]

a) Par 2π -périodicité

$$\int_0^{2\pi} f(t+h)e^{-int} dt = \int_h^{2\pi+h} f(u)e^{-inu}e^{inh} du = \int_0^{2\pi} f(u)e^{-inu}e^{inh} du$$

donc

$$c_n(fh) = (e^{inh} - 1)c_n(f)$$

b) On a

$$c_n(fh) = 2ie^{inh/2} \sin \frac{nh}{2} c_n(f)$$

donc

$$|c_n(fh)|^2 = 4 \sin^2 \frac{nh}{2} |c_n(f)|^2$$

puis par la formule de Parseval et la lipschitzianité de f

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sin^2 \left(\frac{nh}{2} \right) |c_n(f)|^2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_h(t)|^2 dt \leq \frac{(kh)^2}{4}$$

c) Par la concavité de la fonction sinus sur $[0, \pi/2]$, le graphe est au dessus de la corde donc

$$\forall x \in [0, \pi/2], \sin x \geq \frac{2}{\pi} x$$

Ainsi pour $|nh| \leq \pi$ on a

$$\frac{n^2 h^2}{\pi^2} |c_n(f)|^2 \leq \sin^2 \left(\frac{nh}{2} \right) |c_n(f)|^2$$

et donc

$$\sum_{|nh| \leq \pi} \frac{n^2 h^2}{\pi^2} |c_n(f)|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sin^2 \left(\frac{nh}{2} \right) |c_n(f)|^2 \leq \frac{(kh)^2}{4}$$

Ainsi

$$\sum_{|nh| \leq \pi} n^2 |c_n(f)|^2 \leq \frac{(k\pi)^2}{4}$$

Ceci valant pour tout $h > 0$, on peut en considérant $h \rightarrow 0^+$ assurer que les sommes partielles de la série $\sum n^2 |c_n(f)|^2$ sont bornée et que donc cette série converge.

d) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |c_n(f)e^{int}| = |c_n(f)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + n^2 |c_n(f)|^2 \right)$$

en vertu de l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$. Par comparaison de séries à termes positifs, on peut affirmer la convergence normale de la série des fonctions $t \mapsto c_n(f)e^{int}$. Cette convergence normale entraîne une convergence en moyenne quadratique qui ne peut avoir lieu que vers f (qui est continue car lipschitzienne). On peut donc conclure que la série de Fourier de f converge normalement vers f sur \mathbb{R} .

Exercice 68 : [énoncé]

a) La série étudiée converge en tant que partie imaginaire d'une série géométrique convergente que nous allons calculer...

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{inx} = \sum_{n=1}^{+\infty} (re^{ix})^n = \frac{re^{ix}}{1 - re^{ix}} \text{ car } |re^{ix}| = r < 1$$

On en déduit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \sin(nx) = \frac{r \sin(x)}{1 - 2r \cos(x) + r^2}$$

En intégrant

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \sin(nt) dt = \int_0^x \frac{r \sin(t)}{1 - 2r \cos(t) + r^2} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - 2r \cos(x) + r^2}{(1-r)^2}$$

Par une convergence normale justifiée via $|r^n \sin(nx)| \leq r^n$, on peut intégrer terme à terme

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \sin(nt) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x r^n \sin(nt) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n (1 - \cos(nx))}{n}$$

On peut séparer la somme en deux par convergence des nouvelles sommes écrites

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \sin(nt) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n} = -\ln(1-r) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$$

et l'on en déduit la relation demandée.

b) Puisque $f \in \mathcal{S}_1$, on a $|n| c_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0$ et donc a fortiori $c_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0$. On a alors

$$|c_n(f)r^n e^{inx}| = |c_n(f)r^n| = o(r^n)$$

Par convergence normale, on peut donc affirmer que la fonction f_r est bien définie, continue et l'on peut calculer ses coefficients de Fourier

$$c_n(f_r) = c_n(f)r^{|n|}$$

Soit u une fonction de S_0 . Par convergence normale, la fonction u est continue. Considérons la fonction 2π -périodique (elle aussi continue par intégration sur un segment) définie par

$$v : x \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} K_r(x-t)u(t) dt$$

Puisque

$$K_r(x-t) = \frac{1}{2} \ln 2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{r^{|n|}}{2|n|} e^{in(x-t)}$$

on obtient après une intégration terme à terme justifiée par convergence normale

$$v(x) = \pi \ln(2)c_0(u) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\pi r^{|n|}}{|n|} c_n(u) e^{inx}$$

Encore une fois par convergence normale, on peut calculer les coefficients de Fourier de v et l'on obtient

$$c_0(v) = \pi \ln(2)c_0(u) \text{ et } c_n(v) = \frac{\pi r^{|n|}}{|n|} c_n(u)$$

Les fonctions f_r et v étant continues, leur égalité équivaut à l'égalité de leurs coefficients de Fourier, ce qui donne

$$c_0(u) = \frac{c_0(f)}{\pi \ln 2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z}^*, c_n(u) = \frac{|n| c_n(f)}{\pi}$$

On vérifie que la solution u ainsi déterminée est bien élément de S_0 car f est élément de S_1 .

On vérifie aussi que cette fonction u ne dépend pas du choix de $r \in]0, 1[$.

c) Puisque $(\cos(t) - r)^2 \geq 0$ on obtient

$$1 - 2r \cos(t) + r^2 \geq \sin^2 t$$

et donc

$$\left| \ln \left(\frac{1 - 2r \cos(t) + r^2}{2} \right) \right| = \ln 2 - \ln(1 - 2r \cos(t) + r^2) \leq \ln 2 - 2 \ln |\sin t|$$

Ceci vaut pour tout $t \in]0, \pi[$ mais aussi, plus généralement, pour $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

d) Pour t fixé avec $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} K_r(t) = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2 - 2 \cos(t)}{2} \right) = -\frac{1}{2} \ln(1 - \cos(t))$$

Par changement de variable

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_r(x-t)u(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} K_r(t)u(x-t) dt$$

On découpe en deux

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_r(t)u(x-t) dt = \int_{-\pi}^0 K_r(t)u(x-t) dt + \int_0^{\pi} K_r(t)u(x-t) dt$$

Pour t fixé dans $]0, \pi[$

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} K_r(t)u(x-t) = -\frac{1}{2} \ln(1 - \cos(t)) u(x-t)$$

et

$$|K_r(t)u(x-t)| = (\ln 2 - 2 \ln |\sin t|) \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)| = \varphi(t)$$

On vérifie que la fonction φ est intégrable et on peut justifier par convergence dominée

$$\int_0^{\pi} K_r(t)u(x-t) dt = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(1 - \cos(t)) u(x-t) dt$$

On fait de même avec l'autre intégrale, on raccorde les deux et on réalise le changement de variable inverse du précédent pour obtenir

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} K_r(x-t)u(t) dt = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - \cos(x-t)) u(t) dt$$

e) Soit $f \in S_1$. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et considérons

$$u_n(r) = c_n(f)r^{|n|}e^{inx}$$

Il y a convergence normale de la série des fonctions $r \mapsto u_n(r)$ car

$$|u_n(r)| \leq |c_n(f)| \text{ avec } f \in S_1$$

et

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} u_n(r) = c_n(f)e^{inx}$$

On en déduit

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} f_r(x) = f(x)$$

Soit de plus $u \in S_0$ telle que

$$c_0(u) = \frac{c_0(f)}{\pi \ln 2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z}^*, c_n(u) = \frac{|n| c_n(f)}{\pi}$$

Le résultat de la question d) donne

$$\varphi(u)(x) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f_r(x) = f(x)$$

Inversement, soit $u \in S_0$ et f déterminée de sorte que

$$c_0(u) = \frac{c_0(f)}{\pi \ln 2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z}^*, c_n(u) = \frac{|n| c_n(f)}{\pi}$$

La fonction f est dans S_1 et par ce qui est dit ci-dessus

$$\varphi(u)(x) = f(x)$$

On en déduit que la fonction φ est bien définie de S_0 dans S_1 , elle est évidemment linéaire mais aussi injective et surjective en vertu des affirmations qui précèdent.

En fait, la fonction φ associe à une fonction $u \in S_0$ la fonction $f \in S_1$ déterminée par les coefficients de Fourier

$$c_0(f) = \pi \ln 2 c_0(u) \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z}^*, c_n(f) = \frac{\pi c_n(u)}{|n|}$$

et, en ce sens, c'est évidemment un isomorphisme.

Exercice 69 : [énoncé]

a) On résout l'équation différentielle linéaire étudiée et, par la méthode de variation de la constante, on obtient la solution générale suivante

$$g(x) = \lambda x + x \int_1^x \frac{f(t)}{t^2} dt$$

Par une intégration par parties, on peut écrire

$$g(x) = \lambda x - f(x) + x f(1) + x \int_1^x \frac{f'(t)}{t} dt$$

Quand $x \rightarrow 0^+$, on a

$$\left| x \int_1^x \frac{f'(t)}{t} dt \right| \leq \|f'\|_{\infty, [0,1]} x |\ln x|$$

et on obtient

$$g(x) \rightarrow -f(0)$$

Quand $x \rightarrow 0^+$

$$\frac{1}{x} (g(x) - g(0)) = \lambda - \frac{f(x) - f(0)}{x} + f(1) + \int_1^x \frac{f'(t)}{t} dt$$

Le terme $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ converge vers $f'(0)$.

Si $f'(0) \neq 0$ alors l'intégrale $\int_{]0,1]} \frac{f'(t)}{t} dt$ diverge et donc le terme $\int_1^x \frac{f'(t)}{t} dt$ diverge. On en déduit qu'alors g n'est pas dérivable en 0.

L'égalité $f'(0) = 0$ est une condition nécessaire à la dérivabilité de g en 0. Cette condition n'est pas suffisante. En effet considérons une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\ln x}$$

L'intégrale $\int_{]0,1]} \frac{f'(t)}{t} dt$ demeure divergente alors que $f'(0) = 0$.

b) Puisque f est de classe \mathcal{C}^2 et vérifie $f'(0) = 0$ on peut écrire

$$f(x) = f(0) + x^2 \varphi(x) \text{ pour tout } x > 0$$

avec $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 et convergeant vers $f''(0)/2$ en 0^+ .

On a alors pour tout $x > 0$

$$g(x) = \lambda x + x f(0) - f(0) + x \int_1^x \varphi(t) dt$$

g est de classe \mathcal{C}^3 sur $]0, +\infty[$ car φ est de classe \mathcal{C}^2 .

On prolonge g par continuité en 0 en posant $g(0) = -f(0)$

$$g'(x) = \lambda + f(0) + x \varphi(x) + \int_1^x \varphi(t) dt$$

Quand $x \rightarrow 0^+$, g' converge et donc g est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$.

$$g''(x) = 2\varphi(x) + x\varphi'(x)$$

Or

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)}{x^2} - 2 \frac{f(x) - f(0)}{x^3}$$

donc

$$g''(x) = \frac{f'(x)}{x} = \frac{f'(x) - f'(0)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} f''(0)$$

On en déduit que g est de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, +\infty[$

Exercice 70 : [énoncé]

a) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Après résolution via variation de la constante, on obtient la solution générale

$$y(x) = \frac{x + \lambda}{\ln x}$$

b) Par opérations, la fonction g est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]1/2, +\infty[$. Pour $x \in]-1, 1[$ on a le développement en série entière

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

et si $x \neq 0$, on obtient

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$$

Si l'on pose $g(0) = 1$, la relation précédente reste valable pour $x = 0$ et ainsi on a prolongé g en une fonction développable en série entière sur $] -1, 1[$.

Ce prolongement est donc de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$ puis sur $] -1, +\infty[$.

c) La fonction g est à valeurs strictement positives et on peut donc introduire la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{g(x-1)}$$

La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ et sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$

$$f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$$

Ainsi f est solution de (E) sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ et enfin on vérifie aisément que l'équation différentielle (E) est aussi vérifiée quand $x = 1$.

Exercice 71 : [énoncé]

a) Si $n = 1$ alors l'équation a pour solution générale

$$y(t) = A \cos t + B \sin t + \frac{1}{2} t \sin t$$

Si $n \neq 1$ alors l'équation a pour solution générale

$$y(t) = A \cos t + B \sin t + \frac{1}{1-n^2} \cos(nt)$$

b) Soit

$$f(t) = a_0 + \frac{a_1}{2} t \sin t + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{1-n^2} \cos(nt)$$

Sans difficultés, on peut dériver deux fois sous le signe somme car il y a convergence normale de la série des dérivées secondes et convergence simple intermédiaire. On peut alors conclure que f est de classe \mathcal{C}^2 et solution de l'équation différentielle étudiée. La solution générale de celle-ci est alors

$$y(t) = A \cos t + B \sin t + f(t)$$

Exercice 72 : [énoncé]

L'équation E_0 est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène.

a) y^2 est deux fois dérivable et

$$(y^2)''(x) = 2y(x)y''(x) + 2(y'(x))^2 = 2e^x (y(x))^2 + 2(y'(x))^2 \geq 0$$

Par suite la fonction y^2 est convexe.

Si $y(0) = y(1) = 0$ alors, sachant que y^2 est convexe, le graphe de y^2 est en dessous de chacune de ses cordes et donc y^2 est nulle sur $[0, 1]$. On en déduit que y est nulle sur $[0, 1]$ et en particulier $y(0) = y'(0) = 0$. Or la fonction nulle est la seule solution de l'équation différentielle E_0 vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$. On en déduit que la fonction y est nulle sur \mathbb{R} .

b) Le wronskien en 0 des solutions y_1, y_2 est

$$w(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = y_2(0)$$

Si $y_2(0) = 0$ alors, sachant $y_2(1) = 0$, le résultat qui précède entraîne $y_2 = \tilde{0}$. Or $y_2'(1) = 1 \neq 0$. C'est impossible et donc $w(0) = y_2(0) \neq 0$.

On en déduit que (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de E_0 .

Notons que l'on démontre par le même argument que $y_1(1) \neq 0$.

c) Soit \tilde{y} une solution particulière de l'équation E .

La solution générale de E est de la forme $y(x) = \tilde{y}(x) + \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$.

Cette solution vérifie $y(0) = y(1) = 0$ si, et seulement si,

$$\tilde{y}(0) + \lambda_2 y_2(0) = 0 \text{ et } \tilde{y}(1) + \lambda_1 y_1(1) = 0$$

Ces deux équations déterminent λ_1 et λ_2 de façon unique puisque $y_1(1), y_2(0) \neq 0$.

Exercice 73 : [énoncé]

a) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 définie sur \mathbb{R} . Les conditions initiales proposées déterminent alors une solution unique définie sur \mathbb{R} .

b) Puisque la fonction u est continue et $u(0) = 1$, la fonction u est strictement positive au voisinage de 0 et par la satisfaction de l'équation différentielle, on peut affirmer que u'' est strictement négative au voisinage de 0. La fonction u' étant alors strictement décroissante au voisinage de 0 et vérifiant $u'(0) = 0$, les existences de α et β sont assurées.

Par l'absurde, supposons que la fonction u ne s'annule par sur \mathbb{R}^+ .

La fonction u est alors positive et u'' est négative sur \mathbb{R}^+ . La fonction u' étant donc décroissante sur \mathbb{R}^+ , on a

$$\forall t \geq \beta, u'(t) \leq u'(\beta)$$

En intégrant

$$\forall x \geq \beta, u(x) - u(\beta) \leq u'(\beta)(x - \beta)$$

Or cette affirmation est incompatible avec un passage à la limite quand $x \rightarrow +\infty$. On en déduit que u s'annule au moins une fois sur \mathbb{R}^+ (et cette annulation est nécessairement sur $\mathbb{R}^{+\ast}$)

De même, on justifie que u s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}^{-\ast}$ (et on peut même montrer que la fonction u est paire...)

c) Considérons l'ensemble

$$A = \{t > 0 / u(t) = 0\}$$

C'est une partie non vide et minorée de \mathbb{R} , elle admet donc une borne inférieure δ .

Par la caractérisation séquentielle d'une borne inférieure, il existe une suite $(t_n) \in A^{\mathbb{N}}$, telle que

$$t_n \rightarrow \delta$$

Puisque $u(t_n) = 0$, on obtient à la limite $u(\delta) = 0$. Evidemment $\delta \geq 0$ et $\delta \neq 0$ donc $\delta \in A$ et ainsi δ est un minimum de A .

De même on obtient γ .

d) Grâce à l'équation différentielle

$$W' = u''v - uv'' = 0$$

Le wronskien W est donc constant mais peu importe... puisque les solutions u et v sont indépendantes, le wronskien ne s'annule pas et il est donc de signe constant.

Or

$$W(\gamma) = u'(\gamma)v(\gamma) \text{ et } W(\delta) = u'(\delta)v(\delta)$$

Puisque u est strictement positive sur $]\gamma, \delta[$, u'' est strictement négative et u' strictement décroissante sur ce même intervalle. On en déduit

$$u'(\gamma) > 0 \text{ et } u'(\delta) < 0$$

ce qui entraîne que $v(\gamma)$ et $v(\delta)$ sont de signes stricts contraires. On en déduit que v s'annule sur $]\gamma, \delta[$.

e) Plus généralement, qu'une solution de (E) soit colinéaire à u ou non, on peut affirmer que celle-ci possède un zéro dans $[\gamma, \delta]$. Or on vérifie que les fonctions w_n sont solutions de (E) et donc chacune possède au moins un zéro dans $[\gamma, \delta]$. On en déduit que la fonction w possède au moins un zéro dans chaque intervalle $[\gamma + n\pi, \delta + n\pi]$ ce qui assure l'existence d'une infinité de zéros.

Exercice 74 : [énoncé]

a) On introduit $g : x \mapsto -f(-x)$ et on observe que g est solution du problème de Cauchy caractérisant la solution maximale f , g est donc une restriction de f et cela permet d'affirmer l'imparité de f .

b) Supposons f définie sur $]-b, b[$ avec $b \in \mathbb{R}^{+\ast}$

$f'(x) \geq 0$, f est croissante donc positive sur $[0, b[$.

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x e^{-tf(t)} dt$$

Or $t \mapsto e^{-tf(t)}$ est bornée donc intégrable sur $[0, b[$. f admet donc une limite finie en b et cela permet de prolonger f en une solution sur $[0, b]$ ce qui contredit la maximalité de f .

c)

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x e^{-tf(t)} dt$$

avec $t^2 e^{-tf(t)} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ car f est strictement croissante et positive. Par suite f converge en $+\infty$ vers

$$a = \int_0^{+\infty} e^{-tf(t)} dt$$

d) Par croissance, $f(x) \leq a$ donc $a \geq \int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ ce qui donne $a^2 \geq 1$ puis $a \geq 1$. De plus, il y a égalité si, et seulement si, $f(t) = a$ pour tout $t \in [0, +\infty[$ ce qui est exclu puisque $f(0) = 0$.

e) Commençons par observer :

$$0 \leq x(a - f(x)) \leq x \int_x^{+\infty} e^{-tf(t)} dt \leq \int_x^{+\infty} te^{-tf(t)} dt$$

Or $t^3 e^{-tf(t)} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ donc $\int_0^{+\infty} te^{-tf(t)} dt$ converge et $\int_x^{+\infty} te^{-tf(t)} dt \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$.

Ainsi $x(a - f(x)) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$.

Ensuite

$$a - f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-tf(t)} dt = \int_x^{+\infty} e^{-at} e^{-t(f(t)-a)} dt$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour x assez grand :

$$\forall t \geq x : 1 - \varepsilon \leq e^{-t(f(t)-a)} \leq 1$$

donc

$$\frac{1 - \varepsilon}{a} e^{-ax} \leq a - f(x) \leq \frac{1}{a} e^{-ax}$$

d'où la relation proposée.

Exercice 75 : [énoncé]

a) f est de classe \mathcal{C}^∞ en montrant par récurrence que f est de classe \mathcal{C}^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $a > 0$, on peut introduire $M_a = \|f\|_{\infty, [-a, a]}$.

Comme

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x) + \lambda^n f^{(n)}(\lambda x)$$

une récurrence facile donne

$$\|f^{(n)}(x)\| \leq 2^n M_a$$

Par l'inégalité de Taylor-Lagrange

$$\forall x \in [-a, a], \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{(2|x|)^{n+1} M_a}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

Ainsi, f est égale à la somme de sa série de Taylor sur \mathbb{R} et est donc développable en série entière sur \mathbb{R} .

b) Sur $\mathbb{R} : f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ où une récurrence facile donne

$$f^{(n)}(0) = f(0) \prod_{k=0}^{n-1} (1 + \lambda^k)$$

c) Posons $u_n(\lambda) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 + \lambda^k)$. On a

$$\ln(u_n(\lambda)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + \lambda^k)$$

avec $\ln(1 + \lambda^k) \sim \lambda^k$ terme général d'une série absolument convergente donc la suite $(\ln(u_n(\lambda)))$ converge puis la suite $(u_n(\lambda))$ converge vers $K(\lambda) > 0$.

d) On a

$$f(x) - K(\lambda)f(0)e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n(\lambda) - K(\lambda)}{n!} f(0)x^n$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe un rang N au-delà duquel :

$$|u_n(\lambda) - K(\lambda)| \leq \varepsilon K(\lambda)$$

On a alors

$$f(x) - K(\lambda)f(0)e^x = P(x) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{u_n(\lambda) - K(\lambda)}{n!} f(0)x^n$$

avec le terme polynomial

$$P(x) = \sum_{n=0}^N \frac{u_n(\lambda) - K(\lambda)}{n!} f(0)x^n$$

Pour x assez grand

$$|P(x)| \leq \varepsilon K(\lambda) |f(0)| e^x$$

et donc

$$|f(x) - K(\lambda)f(0)e^x| \leq 2\varepsilon K(\lambda) |f(0)| e^x$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 76 : [énoncé]

a) On peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

b) Les solutions maximales sont définies sur \mathbb{R} car si une solution maximale est définie sur $]a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ alors la relation

$$x(t) = \alpha + \int_0^t \cos(x^2(u) + \sin(2\pi u)) - a du$$

permet de prolonger x par continuité en b car $u \mapsto \cos(x^2(u) + \sin(2\pi u)) - a$ est intégrable sur $[0, b[$ puisque bornée. Par limite de la dérivée, on peut montrer que ce prolongement est solution sur $]a, b[$ ce qui contredirait sa maximalité. Ainsi $b = +\infty$ et de même $a = -\infty$.

c) Si $a > 1$ alors $x'(t) \leq 1 - a \leq 0$. x est décroissante et puisque

$x(t) = \alpha + \int_0^t x'(u) du$, l'inégalité précédente permet d'obtenir les limites de x en

$+\infty$ et $-\infty$. Ainsi

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow \alpha \searrow$	$-\infty$

d) Pour $t \in [0, 1]$,

$$x_\alpha(t) = \alpha + \int_0^t \cos(x_\alpha^2(u) + \sin(2\pi u)) - a \, du$$

donne

$$|x_\alpha(t)| \leq |\alpha| + 2 \leq M(A) \text{ avec } M(A) = A + 2$$

e) En exploitant $|\cos u - \cos v| \leq |u - v|$,

$$|x_\alpha(t) - x_\beta(t)| = |\alpha - \beta| + \int_0^t |x_\alpha^2(u) - x_\beta^2(u)| \, du$$

puis

$$|x_\alpha(t) - x_\beta(t)| \leq |\alpha - \beta| + 2M(A) \int_0^t |x_\alpha(u) - x_\beta(u)| \, du$$

car

$$|x_\alpha(t) + x_\beta(t)| \leq 2M(A)$$

f) Posons $g(t) = \int_0^t |x_\alpha(u) - x_\beta(u)| \, du$.

L'inégalité précédente donne

$$\left(g(t) e^{-2M(A)t} \right)' \leq |\alpha - \beta| e^{-2M(A)t}$$

En intégrant

$$g(t) e^{-2M(A)t} \leq \frac{|\alpha - \beta|}{2M(A)} \left(1 - e^{-2M(A)t} \right)$$

En réinjectant dans l'inégalité de départ :

$$|x_\alpha(t) - x_\beta(t)| \leq |\alpha - \beta| + |\alpha - \beta| \left(e^{2M(A)t} - 1 \right) = |\alpha - \beta| e^{2M(A)t}$$

Exercice 77 : [énoncé]

a) Soit y une solution de E définie sur un intervalle I .

Pour tout $a, b \in I$,

$$b - a = \int_a^b dt = \int_a^b \frac{y'(t)}{y^2(t) + y(t) + 1} dt$$

Puisque la fonction y est de classe \mathcal{C}^1 , on peut réaliser le changement de variable $u = y(t)$ et alors

$$b - a = \int_{y(a)}^{y(b)} \frac{du}{u^2 + u + 1} \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{u^2 + u + 1} < +\infty$$

Les solutions de E sont donc définies sur des intervalles bornés ; il n'y a pas de solutions de E sur \mathbb{R} .

b) Soit y une solution de E définie sur un intervalle I non singulier.

Pour tout $t \in I$, on a

$$\frac{y'(t)}{y^2(t) + y(t) + 1} = 1$$

Or

$$\int \frac{y'(t)}{y^2(t) + y(t) + 1} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2y(t) + 1}{\sqrt{3}} \right)$$

donc il existe une constante réelle C telle que pour tout $t \in I$,

$$\arctan \left(\frac{2y(t) + 1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} (t + C)$$

Puisque la fonction arctan est à valeurs dans $]-\pi/2, \pi/2[$, on a pour tout $t \in I$,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} (t + C) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

et donc

$$I \subset \left] -\frac{\pi}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right[- C$$

Enfin, pour tout $t \in I$,

$$y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \left(\frac{\sqrt{3}}{2} (t + C) \right)$$

Résumons :

Si y est une solution de E sur un intervalle non singulier I , il existe une constante C réelle telle que

$$I \subset \left] -\frac{\pi}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right[- C \text{ et } \forall t \in I, y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \left(\frac{\sqrt{3}}{2} (t + C) \right)$$

Inversement, en reprenant les calculs en sens inverse, on peut affirmer que de telles fonctions sont solutions.

Les solutions maximales sont alors les fonctions

$$y_C : \left] -\frac{\pi}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right[- C \rightarrow \mathbb{R} \text{ avec } y_C(t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \left(\frac{\sqrt{3}}{2} (t + C) \right)$$

Elles sont définies sur un intervalle ouvert de longueur $2\pi/\sqrt{3}$.

Exercice 78 : [énoncé]

a) La fonction $f : (t, x) \mapsto \cos(2\pi(x - t))$ est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 . On peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz et affirmer que pour chaque condition initiale il existe une unique solution maximale et celle-ci est définie sur un intervalle ouvert.

b) On a $|x'(t)| \leq 1$ donc x est 1-lipschitzienne en vertu de l'inégalité des accroissements finis.

c) Par l'absurde supposons $b < +\infty$.

Fixons $t_0 \in]a, b[$. On a

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t x'(u) du$$

Puisque x' est bornée, cette fonction est intégrable sur $[t_0, b[$ et l'on peut donc prolonger la fonction x par continuité en b en posant

$$x(b) = x(t_0) + \int_{t_0, b[} x'(u) du$$

Par le théorème du prolongement \mathcal{C}^1 , on vérifie que ce prolongement est encore solution de (E) : c'est absurde puisque cela contredit la maximalité de la solution x .

Ainsi $b = +\infty$ et de même $a = -\infty$.

d) Posons $y(t) = x(t + k)$. Un calcul facile assure que y est solution de (E) sur \mathbb{R} . On procède de même pour vérifier que $k + x$ est solution de (E) sur \mathbb{R} .

La fonction $t \mapsto t + k$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) sont solutions de (E)

e) Posons $k = [x_0]$. Puisque des courbes intégrales ne peuvent se couper sans se confondre, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, t + k \leq x(t) \leq t + k + 1$$

De plus

$$\frac{d}{dt}(x(t) - t) = \cos(2\pi(x(t) - t)) - 1 \leq 0$$

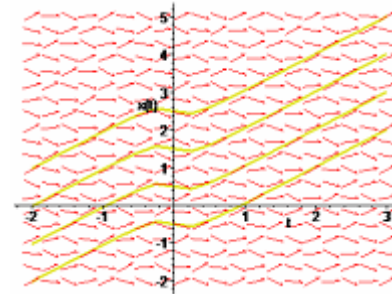
La fonction $t \mapsto x(t) - t$ est décroissante, minorée par k et majorée par $k + 1$, elle converge donc en $\pm\infty$. Par opération sur les limites

$x'(t) - 1 = \cos(2\pi(x(t) - t)) - 1$ converge quand $t \rightarrow \pm\infty$. Cette limite est nécessairement nulle (car sinon $t \mapsto x(t) - t$ serait de limite infinie en $\pm\infty$) et donc

$$\cos(2\pi(x(t) - t)) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 1$$

On en déduit

$$x(t) - t \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} k \text{ et } x(t) - t \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} k + 1$$



Quelques solutions de (E)

f) Pour une solution maximale, on a $|x'(t)| \leq 2$. On peut alors reproduire la démonstration de c) pour conclure que la fonction x est définie sur \mathbb{R} . Posons $y(t) = x(t) - t$. On a

$$y'(t) = \frac{1}{1 + (t + y(t))^2} + \cos(2\pi y(t)) - 1$$

Posons $k = [y(0)]$ et montrons

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, k - 1 \leq y(t) \leq k + 3/2$$

Par l'absurde, s'il existe $t \geq 0$ tel que $y(t) > k + 3/2$, alors on peut introduire

$$t_0 = \inf \{t \in \mathbb{R}^+ / y(t) = k + 3/2\}$$

et vérifier

$$\forall t \in [0, t_0[, y(t) < k + 3/2 \text{ et } y(t_0) = k + 3/2$$

Or

$$y'(t_0) = \frac{1}{1 + (t_0 + y(t_0))^2} - 2 < 0$$

ce qui est incompatible avec ce qui précède (il suffit de faire un dessin pour s'en convaincre).

Par l'absurde, s'il existe $t \geq 0$ tel que $y(t) < k - 1$, alors on peut introduire

$$t_0 = \inf \{t \in \mathbb{R}^+ / y(t) = k - 1\}$$

et vérifier

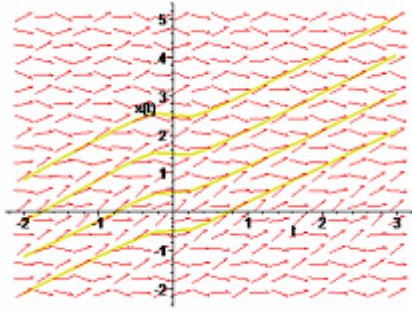
$$\forall t \in [0, t_0[, y(t) > k - 1 \text{ et } y(t_0) = k - 1$$

Or

$$y'(t_0) = \frac{1}{1 + (t_0 + y(t_0))^2} > 0$$

ce qui est incompatible avec ce qui précède.

On peut conclure que $t \mapsto x(t) - t$ est bornée.



Quelques solutions de (E_2)

Exercice 79 : [\[énoncé\]](#)

$(-2, 2)$ seul point critique.

En posant $x = -2 + u$ et $y = 2 + v$, puis $u = r \cos \theta$ et $v = r \sin \theta$

$$f(x, y) - f(-2, 2) = u^2 + uv + v^2 = r^2(1 + \cos \theta \sin \theta) \geq 0$$

Il y a un minimum global en $(-2, 2)$.

Exercice 80 : [\[énoncé\]](#)

L'étude des points critiques donne $(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a})$ seul point critique.

Posons $\alpha = \sqrt[3]{a}$.

$$f(x, y) - f(\alpha, \alpha) = x + y + \frac{\alpha^3}{xy} - 3\alpha = \frac{x^2y + xy^2 + \alpha^3 - 3\alpha xy}{xy}$$

Etudions $\varphi : \alpha \mapsto x^2y + xy^2 + \alpha^3 - 3\alpha xy$. Cette application admet un minimum en \sqrt{xy} de valeur

$$x^2y + xy^2 - 2xy\sqrt{xy} = xy(x + y - 2\sqrt{xy}) = xy(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

donc pour tout $x, y > 0$,

$$f(x, y) \geq f(\alpha, \alpha)$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ et $\alpha = \sqrt{xy}$ i.e. $x = y = \alpha$.

Exercice 81 : [\[énoncé\]](#)

Par composition de fonctions de classe \mathcal{C}^2 , la fonction F est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

On calcule les dérivées partielles de F

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} f' \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_i^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2} f'' \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right) + \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_i^2}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{3/2}} f' \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right)$$

On en déduit

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = f'' \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right) + \frac{n-1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} f' \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right)$$

Puisque $t = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ parcourt \mathbb{R}^{+*} quand (x_1, \dots, x_n) parcourt $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, l'équation $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = 0$ est vérifiée si, et seulement si, f est solution sur \mathbb{R}^{+*} de l'équation différentielle

$$f''(t) + \frac{(n-1)}{t} f'(t) = 0$$

Après résolution on obtient

$$f(t) = \frac{\lambda}{t^{n-2}} + \mu \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ si } n \neq 2 \text{ et } f(t) = \lambda \ln t + \mu \text{ si } n = 2$$

Exercice 82 : [\[énoncé\]](#)

a) On pose $\varphi(a, a) = -\sin a$ et on observe que $\varphi(x, y) \rightarrow \varphi(a, a)$ quand $(x, y) \rightarrow (a, a)$ avec $x \neq y$ et avec $x = y$.

b) En vertu de

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \sin \left(\frac{p+q}{2} \right)$$

on a

$$\varphi(x, y) = -\text{sinc} \left(\frac{x-y}{2} \right) \sin \left(\frac{x+y}{2} \right)$$

avec sinc de classe \mathcal{C}^∞ car développable en série entière.

Exercice 83 : [\[énoncé\]](#)

Supposons f homogène de degré p i.e.

$$\forall t > 0, f(tx_1, \dots, tx_n) = t^p f(x_1, \dots, x_n)$$

En dérivant cette relation par rapport à t et en évaluant en $t = 1$, on obtient

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = pf(x_1, \dots, x_n)$$

Inversement, cette relation donne $t \mapsto g(t)$ est solution de l'équation différentielle $tg'(t) = pg(t)$ donc f homogène de degré p .

Notons que pour $n = 1$, $f(x) = |x|^3$ vérifie la relation et n'est homogène de degré 3 que dans le sens préciser initialement.

Exercice 84 : [énoncé]

L'étude des points critiques donne $(1, 1)$ seul point critique.

La fonction $t \mapsto t^{\ln t}$ admet un minimum en 1, donc $(x, y) \mapsto x^{\ln x} + y^{\ln y}$ admet un minimum en $(1, 1)$.

Exercice 85 : [énoncé]

Méthode analytique :

L'intérieur du triangle et son bord forment un compact. La fonction considérée est continue sur celui-ci donc admet un maximum. Celui-ci ne peut être au bord car la fonction prend des valeurs strictement positives alors qu'elle est nulle sur le bord. Il existe donc un maximum à l'intérieur du triangle et celui-ci annule la différentielle de la fonction.

En introduisant un repère, $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ et $C(a, b)$ (ce qui est possible qui à appliquer une homothétie pour que $AB = 1$) la fonction étudiée est

$$f(x, y) = y(bx - ay)(b(x - 1) - (a - 1)y)$$

On résout le système formé par les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Le calcul est très lourd sans logiciel de calcul formel mais on parvient à conclure.

Méthode géométrique (plus élégante) :

Le point M peut s'écrire comme barycentre des points A, B, C affectés de masses $a, b, c \geq 0$ vérifiant $a + b + c = 1$.

L'aire du triangle (MBC) est donné par

$$\frac{1}{2} |\text{Det}(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC})|$$

Or

$$\overrightarrow{BM} = a\overrightarrow{BA} + b\overrightarrow{BB} + c\overrightarrow{BC}$$

donc

$$\text{Det}(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = a\text{Det}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$$

En notant \mathcal{A} l'aire du triangle ABC et d_A la distance de M à la droite (BC) , on obtient

$$a = \frac{d_A \cdot BC}{\mathcal{A}}$$

De façon analogue,

$$b = \frac{d_B AC}{\mathcal{A}} \text{ et } c = \frac{d_C AB}{\mathcal{A}}$$

avec des notations entendues.

Par suite, maximiser le produit $d_A d_B d_C$ équivaut à maximiser le produit abc avec les contraintes $a + b + c = 1$ et $a, b, c \geq 0$

La maximisation de $ab(1 - a - b)$ avec $a, b \geq 0$ et $a + b \leq 1$ conduit à $a = b = 1/3$, d'où $c = 1/3$ et le point M est au centre de gravité.

Exercice 86 : [énoncé]

a) Si $|y| \leq 1$ alors la série définissant $f(x, y)$ converge si, et seulement si, $|x| < 1$
Si $|y| > 1$ alors la série définissant $f(x, y)$ converge si, et seulement si, $|x| < |y|^2$

$$\text{car } \frac{x^n}{1+y^{2n}} = \left(\frac{x}{y^2}\right)^n.$$

Finalement $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| < \max(1, y^2)\}$.

b) $u_n(x, y) = \frac{x^n}{1+y^{2n}}$. Soit $a \in [0, 1[$ et $D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq a \max(1, y^2)\}$.

Pour $(x, y) \in D_a$:

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) \right| = \left| \frac{nx^{n-1}}{1+y^{2n}} \right|$$

Si $|y| \leq 1$ alors $|x| \leq a$ et

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) \right| = \left| \frac{nx^{n-1}}{1+y^{2n}} \right| \leq \frac{na^{n-1}}{1+y^{2n}} \leq na^{n-1}$$

Si $|y| > 1$ alors $|x| \leq ay^2$ et

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) \right| = \left| \frac{nx^{n-1}}{1+y^{2n}} \right| \leq \frac{na^{n-1}y^{2n-2}}{1+y^{2n}} \leq \frac{na^{n-1}}{y^2} \leq na^{n-1}$$

Dans les deux cas $\left| \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) \right| \leq na^{n-1}$ qui est le terme général d'une série convergente.

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) \right| = \left| \frac{2ny^{2n-1}x^n}{(1+y^{2n})^2} \right| \leq \frac{2nx^n}{1+y^{2n}} \text{ car } \frac{y^{2n-1}}{1+y^{2n}} \leq 1$$

Si $|y| \leq 1$ alors $|x| \leq a$ et

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) \right| \leq \frac{2na^n}{1+y^{2n}} \leq 2na^n$$

Si $|y| > 1$ alors $|x| \leq ay^2$ et

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) \right| \leq \frac{2na^ny^{2n}}{1+y^{2n}} \leq 2na^n$$

Dans les deux cas $\left| \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) \right| \leq 2na^n$ qui est le terme général d'une série convergente.

Par convergence normale, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur D_a et comme ceci vaut pour tout $a \in [0, 1[$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur D .

Exercice 87 : [énoncé]

- a) immédiat.
- b) L'application $d_h : f \mapsto D_h f(0)$ fait l'affaire pour n'importe quel $h \in \mathbb{R}^n$ non nul.
- c) Si h est constante égale à λ alors pour toute fonction $f \in E$ on a par linéarité

$$d(fh) = \lambda d(f)$$

et par définition des éléments de \mathcal{D} ,

$$d(fh) = f(0)d(h) + \lambda d(f)$$

En employant une fonction f ne s'annulant pas en 0, on peut affirmer $d(h) = 0$.

d) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, puisque la fonction $\varphi : t \in [0, 1] \mapsto f(tx)$ est de classe \mathcal{C}^1 , on a

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t) dt$$

ce qui donne

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$$

Soit K un compact de \mathbb{R}^n .

Toutes les dérivées partielles en x de $(x, t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)$ sont continues sur $K \times [0, 1]$ donc bornées.

Par domination, on peut affirmer que la fonction $f_i : x \mapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$ est de classe \mathcal{C}^∞ .

e) Notons $p_i : x \mapsto x_i$.

Par linéarité de d , on a

$$d(f) = \sum_{i=1}^n d(p_i f_i) = \sum_{i=1}^n d(p_i) f_i(0)$$

car $d(f(0)) = 0$ et $p_i(0) = 0$.

En posant $a_i = d(p_i)$ et sachant

$$f_i(0) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) dt = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

on obtient

$$\forall f \in E, d(f) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

f) L'application qui à $h \in \mathbb{R}^n$ associe d_h est donc une surjection de \mathbb{R}^n sur \mathcal{D} . Cette application est linéaire et aussi injective (prendre $f : x \mapsto (h | x)$ pour vérifier $d_h = 0 \Rightarrow h = 0$) c'est donc un isomorphisme et

$$\dim \mathcal{D} = n$$

Exercice 88 : [énoncé]

En visualisant le domaine comme le complémentaire de la réunion de deux cercles dans le cercle unité et par des considérations de symétrie, on obtient en passant aux coordonnées polaires

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^2} = 4 \int_0^{\pi/2} \left(\int_{\cos \theta}^1 \frac{r}{(1+r^2)^2} dr \right) d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^2 \theta} - \frac{1}{2} d\theta$$

Or

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\cos^2 \theta} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

donc

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} = \frac{(\sqrt{2}-1)\pi}{2}$$

Exercice 89 : [énoncé]

L'intégrale a la même nature que sur $]0, 1]^2$.

$x \mapsto \frac{x-y}{(x+y)^3}$ est intégrable sur $]0, 1]$ et

$$\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx = -\frac{1}{(1+y)^2}$$

$y \mapsto -\frac{1}{(1+y)^2}$ est intégrable sur $]0, 1]$ et

$$\int_0^1 -\frac{dy}{(1+y)^2} = -\frac{1}{2}$$

Ainsi $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy = -\frac{1}{2}$.

Par une démarche symétrique

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx = \frac{1}{2}$$

On peut donc dire que la fonction $(x, y) \mapsto \frac{x-y}{(x+y)^3}$ n'est pas intégrable sur D .

Exercice 90 : [énoncé]

a) Posons $x = \operatorname{Re}(\gamma)$, $y = \operatorname{Im}(\gamma)$.

$$S = \int_{\gamma} \frac{1}{2} (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x(s)y'(s) - y(s)x'(s)) ds$$

donc

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}(\bar{\gamma}(s)\gamma'(s)) ds = \pi \operatorname{Im}(\gamma | \gamma')$$

en notant $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire usuel.

Par la formule polarisée de Parseval

$$(\gamma | \gamma') = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c_n(\gamma)} c_n(\gamma') = \sum_{n \in \mathbb{Z}} in |c_n(\gamma)|^2$$

car $c_n(\gamma') = inc_n(\gamma)$ et donc

$$S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |c_n(\gamma)|^2$$

b) Par la formule de Parseval on a :

$$\sum_n |inc_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\gamma'(s)|^2 ds = 1$$

donc

$$\sum_n n^2 |c_n|^2 = 1$$

puis

$$S = \pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |c_n|^2 \leq \pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n|^2 \leq \pi$$

avec égalité si, et seulement si, $c_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| > 1$.

On a alors $\gamma(s) = c_0 + c_1 e^{is}$ avec $|c_1| = 1$ car $|\gamma'(s)| = 1$.

γ est un paramétrage direct d'un cercle de diamètre 1.