Exercice 1 [02470] [correction]
Soit $a > 0$. On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation polaire

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

a) Tracer $\mathcal{C}$.
b) Calculer l'aire délimitée par une boucle de $\mathcal{C}$.
c) Calculer la longueur d'une boucle de $\mathcal{C}$ à l'aide de

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$$

d) Déterminer le repère de Frénêt de $\mathcal{C}$.
e) Déterminer le rayon de courbure de $\mathcal{C}$.
f) Exprimer

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$$

comme somme d'une série.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) $\mathcal{C}$ est la réunion des courbes Γ et Γ' d'équations polaires

$$r = a\sqrt{\cos 2\theta} \text{ et } r = -a\sqrt{\cos 2\theta}$$

La courbe Γ' est la symétrique de Γ par rapport à O, or Γ est elle-même symétrique par rapport à O donc $\Gamma' = \Gamma$ puis $\mathcal{C} = \Gamma$.
Finalement $\mathcal{C}$ est la courbe d'équation polaire $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$, c'est une lemniscate de Bernoulli.
b) L'aire cherchée peut être calculée par une intégrale curviligne pour θ allant de $-\pi/4$ à $\pi/4$ ce qui correspond à un parcours en sens direct.

$$\mathcal{A} = \oint_\Gamma \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta = 2\times\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1}{2}a^2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{2}$$

c) Puisque

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

On a

$$L = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{a\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{a}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{\cos\alpha}}$$

Par le changement de variable $t = \tan\frac{\alpha}{2}$,

$$L = \frac{a}{2}\int_{-1}^{1}\frac{2}{1+t^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1-t^2}{1+t^2}}}\,\mathrm{d}t = 2a\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$$

d) $\vec{T} = \cos\alpha.\vec{i} + \sin\alpha\vec{j}$ et $\vec{N} = -\sin\alpha.\vec{i} + \cos\alpha.\vec{j}$ avec $\alpha = \theta + V$ et

$$\begin{cases}\cos V = -\sin 2\theta\\ \sin V = \cos 2\theta\end{cases}$$

$V = \pi/2 + 2\theta$ convient puis $\alpha = \pi/2 + 3\theta$.
e) On obtient

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{3\sqrt{\cos 2\theta}}{a}$$

f) Pour $|t| < 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^4}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^{4n}$$

via le développement connu de $(1+u)^\alpha$.
Par la formule de Stirling, on peut établir la convergence de la série des intégrales des valeurs absolues qui permet de permuter somme et intégrale et d'affirmer.

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(4n+1)}$$