Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

On considère l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Montrer que $\mathcal{D}$ ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

On considère une famille finie d'ensembles distincts deux à deux.

Montrer que l'un au moins de ces ensembles ne contient aucun des autres.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

En utilisant uniquement l'axiome de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, montrer que pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel x, il existe un entier naturel n tel que $na > x$.

On exprime cette propriété en disant que $\mathbb{R}$ est *archimédien*.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soient a, b, c trois réels du segment $[0, 1]$.

Montrer que le minimum de $a(1 - b)$, $b(1 - c)$, $c(1 - a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel : on raisonnera par l'absurde et on considérera l'ensemble A des n de $\mathbb{N}^*$ tels que $n\sqrt{2}$ soit entier.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Remarquer que $(1,0)$ et $(0,1)$ sont dans $\mathcal{D}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Si la propriété indiquée n'était pas vraie, on pourrait former avec ces ensembles une suite infinie et strictement décroissante pour l'inclusion.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Considérer l'ensemble $A = \{na, n \in \mathbb{N}\}$.
Si la propriété indiquée n'était pas vraie, alors A serait majorée, donc...

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Se souvenir que pour tout x de $[0,1]$, on a $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Si $\sqrt{2}$ est rationnel, alors A une partie non vide de $\mathbb{N}$.

Soit q son plus petit élément. Considérer $q' = q\sqrt{2} - q$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Par l'absurde, supposons qu'il existe deux parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que $\mathcal{D} = A \times B$.

Les points $M(1,0)$ et $N(0,1)$ appartiennent à $\mathcal{D}$. Donc 1 appartient à A et à B.

Ainsi $P(1,1)$ appartient à $A \times B$ c'est-à-dire à $\mathcal{D}$, ce qui est absurde.

Conclusion : $\mathcal{D}$ ne peut s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Notons $A_1, \ldots, A_n$ ces ensembles distincts deux à deux. On raisonne par l'absurde.

L'ensemble A_1 contient donc l'un des autres ensembles, noté A_{k_1}, de la famille.

De même, A_{k_1} contient l'un des autres ensembles de la famille, noté A_{k_2}.

En notant $k_0 = 1$ et en itérant ce procédé, on construit une famille infinie d'indices $k_0, k_1, \ldots$ tels que $A_{k_0} \supset A_{k_1} \supset A_{k_2} \supset \cdots$.

Par construction, deux indices successifs quelconques dans cette liste sont toujours distincts, ce qui implique que les inclusions successives sont strictes.

Ainsi on construit une suite infinie d'ensembles distincts deux à deux extraits de la famille $A_1, \ldots, A_n$ initiale, ce qui est absurde.

Conclusion : l'un au moins des ensembles $A_1, \ldots, A_n$ ne contient aucun des autres.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Par l'absurde, on suppose que pour tout entier naturel n on a $na \le x$.

Soit $A = \{na, n \in \mathbb{N}\}$. Cette partie non vide de $\mathbb{R}$ est, par hypothèse, majorée.

On en déduit qu'elle possède une borne supérieure α.

En particulier, pour tout entier naturel n, on a $na \le \alpha$.

On peut donc aussi dire : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)a \le \alpha$, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, na \le \alpha - a$.

Autrement dit, $\alpha - a$ (qui est strictement inférieur à α) est encore un majorant de A, ce qui contredit la définition de α comme borne supérieure de A.

Conclusion : il existe effectivement au moins un entier n de $\mathbb{N}$ tel que $na > x$.

Remarque : la démonstration qui aurait consisté à dire qu'il suffit de prendre un entier n tel que $n > \frac{x}{a}$ n'est pas vraiment recevable ici, car elle revient en fait à utiliser le résultat même de l'exercice que nous voulons démontrer (avec 1 à la place de a et $\frac{x}{a}$ à la place de x.)

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Par l'absurde, on suppose donc que $\min\Big(a(1-b), b(1-c), c(1-a)\Big) > \frac{1}{4}$.

Cela signifie qu'on a simultanément $a(1-b) > \frac{1}{4}$, $b(1-c) > \frac{1}{4}$, et $c(1-a) > \frac{1}{4}$.

On en déduit que $a(1-b)b(1-c)c(1-a) > \left(\frac{1}{4}\right)^3$.

Autrement dit $\Big(a(1-a)\Big)\Big(b(1-b)\Big)\Big(c(1-c)\Big) > \left(\frac{1}{4}\right)^3$.

Mais ceci est abusurde car pour tout x de $[0,1]$, on a $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Si $\sqrt{2}$ est rationnel, alors A une partie non vide de $\mathbb{N}$.

Puisque $1 < \sqrt{2} < 2$, les éléments de A sont des entiers supérieurs ou égal à 2.

Soit q le minimum de A. Posons $q' = q\sqrt{2} - q$.

Bien entendu, $q' = q\sqrt{2} - q$ est entier non nul. De plus $q'\sqrt{2} = 2q - q\sqrt{2}$ est dans $\mathbb{N}$.

Donc q' est dans A, ce qui est absurde car $q' < q$.