

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient E et F deux ensembles. Quelle relation y-a-t-il :

1. Entre $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$?
2. Entre $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$?
3. Entre $\mathcal{P}(E \times F)$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$?

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un ensemble non vide. Soit \mathcal{F} une partie non vide de $\mathcal{P}(E)$.

On dit que \mathcal{F} est un *filtre* si :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \forall X, Y \in \mathcal{F}, X \cap Y \in \mathcal{F} \\ (b) \quad \forall X \in \mathcal{F}, \forall Y \supset X, Y \in \mathcal{F} \\ (c) \quad \emptyset \notin \mathcal{F} \end{array} \right.$$

1. Que pourrait-on dire d'une famille non vide \mathcal{F} de $\mathcal{P}(E)$ ne vérifiant que (a) et (b) ?
2. $\mathcal{P}(E)$ est-il un filtre sur E ?
A quelle condition $\mathcal{P}(E) - \{\emptyset\}$ est-il un filtre sur E ?
3. Montrer que si \mathcal{F} est un filtre sur E , alors $E \in \mathcal{F}$.
4. Soit A un partie non vide de E .
Montrer que que $\mathcal{F}_A = \{X \subset E, A \subset X\}$ est un filtre sur E .

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_i)_{i \in I}$ deux familles de parties d'un ensemble E .

On suppose que pour tout indice i de I , on a $E = A_i \cup B_i$.

Montrer que $E = F$, avec $F = \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right)$.



Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

1. On a toujours $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$ (avec égalité $\Leftrightarrow E \subset F$ ou $F \subset E$.)
2. On a l'égalité $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
3. Il n'y a pas d'inclusion entre $\mathcal{P}(E \times F)$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. On aurait $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$.
2. La réponse à la première question est non. La deuxième est que E doit être un singleton.
3. 4. Conséquences faciles de la définition d'un filtre.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Se donner un élément x de E , et se demander s'il appartient ou non à tous les B_i .
Si ce n'est pas le cas, vérifier que x est dans F quand même.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

1. Si A est une partie de E , c'est une partie de $E \cup F$. Donc $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$.
Par symétrie $\mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$. On en déduit $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$.
Si aucun des deux ensembles E ou F ne contient l'autre, alors l'inclusion réciproque est fautive car $E \cup F$ est une partie de $E \cup F$ sans être ni une partie de E ni une partie de F .
Si $E \subset F$ par exemple, on a $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ et donc $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E \cup F)$.
Conclusion :
On a toujours $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$. Ce n'est une égalité que si $E \subset F$ ou $F \subset E$.
2. Un ensemble est une partie de $E \cap F$ si et seulement si c'est à la fois une partie de E et une partie de F .
Autrement dit, on a l'égalité $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
3. Les éléments de $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$ sont les couples (A, B) , où $A \subset E$ et $B \subset F$.
Les éléments de $\mathcal{P}(E \times F)$ sont les sous-ensembles de $E \times F$.
Il n'y a pas d'inclusion entre $\mathcal{P}(E \times F)$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$.
Cependant, si on note $G = \{X \times Y, X \subset E, Y \subset F\}$, alors l'application $(X, Y) \mapsto X \times Y$ est une bijection de $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$ sur G , et $G \subset \mathcal{P}(E \times F)$ (sans qu'il y ait en général égalité comme le montre l'exercice 1).

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. Si \mathcal{F} vérifie (a) et (b), et si \emptyset est un élément de \mathcal{F} , toute partie Y de E est dans \mathcal{F} (utiliser (b) avec $X = \emptyset$.) La seule possibilité est donc $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$.
2. $\mathcal{P}(E)$ n'est pas un filtre sur E , à cause de la propriété (c).
Posons $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E) - \{\emptyset\}$. \mathcal{F} est donc l'ensemble des parties non vides de E .
Supposons que E contienne au moins deux éléments distincts a et b .
Alors $X = \{a\}$ et $Y = \{b\}$ sont deux éléments de \mathcal{F} .
Mais pour eux l'hypothèse (a) n'est plus vérifiée.
Il est donc nécessaire que E (qui est non vide) se réduise à un seul élément x .
Réciproquement, si $E = \{x\}$, alors $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E) - \{\emptyset\} = \{\{x\}\}$ est un filtre (il se réduit au seul élément $X = \{x\}$).
3. C'est une conséquence du fait que \mathcal{F} est non vide (on peut donc choisir un élément X dans \mathcal{F}) et de la propriété (b) en choisissant $Y = E$.
4. \mathcal{F}_A est non vide car A en est un élément.
Soient X, Y deux éléments de \mathcal{F}_A (donc deux parties de E contenant A). Alors $X \cap Y$ est une partie de E contenant A , c'est-à-dire $X \cap Y \in \mathcal{F}_A$.
Soit X un élément de \mathcal{F}_A et Y une partie de E contenant X .
Alors évidemment Y contient A ce qui prouve l'hypothèse (b).
Enfin \emptyset n'est pas un élément de \mathcal{F}_A puisque par hypothèse A est non vide.
 \mathcal{F}_A est donc un filtre sur E .

**CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3** [[Retour à l'énoncé](#)]

Posons $F = \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right)$. On a bien entendu $F \subset E$.

Réciproquement, soit x un élément de E .

- Si x appartient à $\bigcap_{i \in I} B_i$, alors x appartient à F .
- Sinon, donc s'il existe au moins un i tel que $x \notin B_i$, alors l'égalité $E = A_i \cup B_i$ montre que x est élément de A_i , et donc qu'il appartient à $\bigcup_{i \in I} A_i$. Ainsi x est encore élément de F .

Conclusion : on a bien l'égalité $E = \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right)$.