Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit f une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que pour toutes parties A et B disjointes de E, $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$.
Montrer que $f(\emptyset) = 0$.
Prouver que pour toutes parties A et B de E, $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit f une application de E dans F.
Montrer que pour toute partie A de E, $f(\overset{-1}{f}(B) \cap A) = B \cap f(A)$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit f une application de E dans E.
Montrer que f est bijective $\Leftrightarrow$ pour toute partie A de E, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ (on note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E.)

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soient E un ensemble non vide, et A, B deux parties de E.
On note $[A, A \cup B] = \{X \subset E, A \subset X \subset A \cup B\}$ et $[A \cap B, B] = \{Y \subset E, A \cap B \subset Y \subset B\}$.
On définit $f : [A, A \cup B] \to [A \cap B, B]$ par $f(X) = X \cap B$.
On définit $g : [A \cap B, B] \to [A, A \cup B]$ par $g(Y) = Y \cup A$.
Montrer que f et g sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit f une application de E dans F.
On définit l'application $g : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$ par : $\forall Y \subset F$, $g(Y) = \overset{-1}{f}(Y)$.

1. Montrer que g est injective $\Leftrightarrow$ f est surjective.
2. Montrer que g est surjective $\Leftrightarrow$ f est injective.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soit f une application de E dans F. Montrer l'équivalence de :

(a) f est injective
(b) Pour toutes parties A et B de E, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Pour la première question, $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$.
Ensuite $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ et $A \cup B = B \cup (A \setminus B)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Procéder par équivalences à partir de $y \in B \cap f(A)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

- Si f est bijective et si $A \subset E$, soit $y = f(x)$. On a $y \notin f(A) \Leftrightarrow x \notin A$.
- Réciproquement, que dire de $f(E)$? Ensuite considérer $b \notin \{a\}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Il suffit de vérifier $g \circ f(X) = X$ et $f \circ g(Y) = Y$ pour tous X et Y.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

1. Si g injective, vérifier que $g(F) = g(f(E)) = E$, donc $F = f(E)$.
   Réciproquement, si f est surjective, remarquer $Y \subset F \Rightarrow f(\overset{-1}{f}(Y)) = Y$.
   En déduire que $g(Y) = g(Z) \Rightarrow Y = Z$ et donc que g est injective.
2. Si g est surjective, et si $f(a) = f(b)$, utiliser $\begin{cases} Y \subset F \\ Z \subset F \end{cases}$ telles que $\begin{cases} g(Y) = \{a\} \\ g(Z) = \{b\} \end{cases}$
   Montrer que $f(a) \in Z$ puis que $a = b$.
   Réciproquement, si f est injective, montrer que $X \subset E \Rightarrow g(Y) = X$, avec $Y = f(X)$

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

- On a toujours $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
  Si f est injective, montrer que $y \in f(A) \cap f(B) \Rightarrow y \in f(A \cap B)$.
- Réciproquement, supposer $f(a) = f(b)$ et utiliser $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

$f(\emptyset) = f(\emptyset \cup \emptyset) = f(\emptyset) + f(\emptyset)$. Par conséquent $f(\emptyset) = 0$.
Pour toutes parties A, B de E, on a l'union disjointe : $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$.
Il en découle $f(A) = f(A \cap B) + f(A \setminus B)$.
De même, on a l'union disjointe : $A \cup B = B \cup (A \setminus B)$.
On en déduit $f(A \cup B) = f(B) + f(A \setminus B) = f(B) + f(A) - f(A \cap B)$.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Soi y un élément de F. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \in B \cap f(A) \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} y \in B \\ \exists\, x \in A, f(x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \exists\, x \in A, f(x) = y, f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow \exists\, x \in \overset{-1}{f}(B) \cap A, f(x) = y \Leftrightarrow y \in f(\overset{-1}{f}(B) \cap A) \end{aligned}$$

On a donc bien l'égalité : $f(\overset{-1}{f}(B) \cap A) = B \cap f(A)$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

- On suppose que f est bijective. Soit A une partie de E.
  Soit y un élément de E et x son unique antécédent par f.
  On a les équivalences : $y \in \overline{f(A)} \Leftrightarrow y \notin f(A) \Leftrightarrow x \notin A \Leftrightarrow x \in \overline{A} \Leftrightarrow y \in f(\overline{A})$.
  Ainsi $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.
- Réciproquement, l'hypothèse faite sur f implique $f(E) = f(\overline{\emptyset}) = \overline{f(\emptyset)} = \overline{\emptyset} = E$.
  L'application f est donc surjective.
  Soient a et b deux éléments distincts de E. Posons $A = \{a\}$.
  On a $b \in \overline{A} \Rightarrow f(b) \in f(\overline{A}) = \overline{f(A)} \Rightarrow f(b) \notin f(A) \Rightarrow f(b) \neq f(a)$.
  L'application f est donc injective, et finalement bijective.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Il suffit de vérifier que $g \circ f$ est l'identité de $[A, A \cup B]$ et que $f \circ g$ est l'identité de $[A \cap B, B]$.

- Soit X un élément de $[A, A \cup B]$.
  On a $(g \circ f)(X) = g(X \cap B) = (X \cap B) \cup A = (X \cup A) \cap (B \cup A)$.
  Puisque X contient A, on a $X \cup A = X$ donc $(g \circ f)(X) = X \cap (A \cup B)$.
  Mais puisque X est contenu dans $A \cup B$, on a $(g \circ f)(X) = X$.
- Soit Y un élément de $[A \cap B, B]$. On a :

$$\begin{aligned} (f \circ g)(Y) &= f(Y \cup A) = (Y \cup A) \cap B = (Y \cap B) \cup (A \cap B) \\ &= Y \cup (A \cap B) \text{ (car } Y \text{ est inclus dans } B) \\ &= Y \text{ (car } Y \text{ contient } A \cap B) \end{aligned}$$

Conclusion : f et g sont deux bijections réciproques l'une de l'autre.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

1. On prouve d'abord l'équivalence entre l'injectivité de g et la surjectivité de f.
   - Supposons g injective et montrons que $f(E) = F$.
     Or $g(F) = \overset{-1}{f}(F) = E$ et $g(f(E)) = \overset{-1}{f}(f(E)) = E$ ($\forall x \in E,\ f(x) \in f(E)$ et $f(x) \in F$).
     L'injectivité de g permet alors d'affirmer que $f(E) = F$.
   - Réciproquement, on suppose que f est surjective.
     Il en découle que pour toute partie Y de F, on a $f(\overset{-1}{f}(Y)) = Y$ (plus généralement, si f était quelconque, on aurait $f(\overset{-1}{f}(Y)) = Y \cap f(E)$).
     Si Y et Z sont deux parties de F telles que $g(Y) = g(Z)$, on en déduit $f(g(Y)) = f(g(Z))$, c'est-à-dire $Y = Z$, ce qui prouve l'injectivité de G.
2. On prouve maintenant l'équivalence entre la surjectivité de g et l'injectivité de f.
   - Supposons g surjective. Il faut montrer que f est injective.
     Soient a et b deux éléments de E tels que $f(a) = f(b)$.
     Par hypothèse, il existe $Y \subset F$ et $Z \subset F$ telles que $g(Y) = \{a\}$ et $g(Z) = \{b\}$.
     Autrement dit $\overset{-1}{f}(Y) = \{a\}$ et $\overset{-1}{f}(Z) = \{b\}$. Il en découle que $f(a) \in Y$ et $f(b) \in Z$.
     Or $f(a) = f(b)$. Donc $f(a) \in Z$ c'est-à-dire $a \in \overset{-1}{f}(Z) = \{b\}$.
     Cela n'est évidemment possible que si $a = b$. L'application f est donc injective.
   - On suppose enfin que f est injective. Soit X une partie de E. Pour montrer la surjectivité de g, il faut trouver $Y \subset F$ tel que $g(Y) = X$, c'est-à-dire tel que $\overset{-1}{f}(Y) = X$.
     On va montrer que l'ensemble $Y = f(X)$ convient. En effet :
     $$\begin{aligned} a \in \overset{-1}{f}(f(X)) &\Leftrightarrow f(a) \in f(X) \Leftrightarrow \exists\, x \in X, f(a) = f(x) \\ &\Leftrightarrow \exists\, x \in X, a = x \text{ (conséquence de l'injectivité de } f) \Leftrightarrow a \in X \end{aligned}$$
     On a bien $\overset{-1}{f}(f(X)) = X$, c'est-à-dire $g(Y) = X$ avec $Y = f(X)$: g est surjective.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

- On suppose que f est injective. Soient A et B deux parties de E. On a :
  $$\begin{cases} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(A \cap B) \subset f(A) \\ f(A \cap B) \subset f(B) \end{cases} \Rightarrow f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$
  Réciproquement, soit y un élément de $f(A) \cap f(B)$.
  Il existe a dans A tel que $y = f(a)$ et b dans B tel que $y = f(b)$.
  L'injectivité de f donne alors $a = b$. Il en découle $a \in A \cap B$ donc $y \in f(A \cap B)$.
  Ainsi on a l'égalité $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, ce qu'il fallait démontrer.
- Réciproquement, on suppose que : $\forall\, A, B \subset E,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
  Soient a, b dans E tels que $f(a) = f(b)$. Il faut montrer $a = b$. Posons $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$.
  On a $f(A) = f(\{a\}) = \{f(a)\} = \{f(b)\} = f(\{b\}) = f(B)$.
  Ainsi, et en utilisant l'hypothèse, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) = f(A)$ est non vide.
  Il en découle $A \cap B = \{a\} \cap \{b\} \neq \emptyset$, donc $a = b$: f est injective.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.