Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soient E et F deux ensembles ordonnés et A une partie non vide de E.
Soit f une application croissante de E dans F.
Montrer que si $\max A$ existe, alors $\max f(A)$ existe et est égal à $f(\max A)$.
La propriété subsiste-t-elle si on remplace "max" par "sup" ?

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations d'ordre total sur E.

1. Sur E on pose $x\mathcal{T}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{S}y)$. Est-ce une relation d'ordre (total, partiel) ?
2. Même question en définissant : $x\mathcal{U}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y \text{ ou } x\mathcal{S}y)$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit $\begin{cases} (x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow x \le x' \text{ et } y \le y' \\ (x,y)\mathcal{S}(x',y') \Leftrightarrow (x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \le y') \end{cases}$
Est-ce que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont des relations d'ordre ?

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soient E et F deux ensembles ordonnés (l'ordre sur E étant total).
Soit $f : E \mapsto F$, croissante. Montrer que f est injective $\Leftrightarrow$ elle est strictement croissante.
Montrer que le résultat n'est pas vrai si on ne suppose pas que E est totalement ordonné.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

NB : cet exercice utilise des notions un peu en marge du programme.
Soit E un ensemble ordonné admettant un plus grand élément et telle que toute partie non vide possède une borne inférieure.
Montrer que toute partie non vide de E possède une borne supérieure.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

NB : cet exercice utilise des notions un peu en marge du programme.
Soit E un ensemble ordonné possédant un élément minimum et dans lequel toute partie non vide admet une borne supérieure. Soit f une application croissante de E dans E.

1. Montrer que l'ensemble $X = \{x \in E, x \le f(x)\}$ est non vide
2. Montrer que la borne supérieure a de X vérifie $f(a) = a$.

Exercice 7 [Indication] [Correction]

Cet exercice est connu sous le nom de "problème des hussards".
Soit $(a_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$ une famille de np réels.
Comparer $A = \min\limits_{1\le i\le n} \left(\max\limits_{1\le j\le p} a_{i,j}\right)$ et $B = \max\limits_{1\le j\le p} \left(\min\limits_{1\le i\le n} a_{i,j}\right)$

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Si $\alpha = \max A$, on a $a \leq \alpha$ donc $f(a) \leq f(\alpha)$ donc...
Ce n'est plus vrai avec "sup". Utiliser par exemple f croissante avec une discontinuité.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. $\mathcal{T}$ est réflexive, antisymétrique, transitive : c'est une relation d'ordre sur E.
   Ce n'est pas nécessairement un ordre total (penser au cas $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$.)
2. Penser encore au cas particulier $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

1. $\mathcal{R}$ est ordre partiel. Penser à $(0,1)$ et $(1,0)$.
2. $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^2$: c'est l'ordre *lexicographique*.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

– Pas d'indication, c'est trop facile :-)
– Ce n'est plus vrai si l'ordre est partiel.
  Considérer par exemple un ensemble fini de cardinal ≥ 2, muni de l'inclusion.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Soit $X \subset A$, $X \neq \emptyset$. Soit Y l'ensemble des majorants de X.
Montrer que Y a une borne inférieure α, puis que $\alpha = \text{Sup}(A)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

1. Penser à $\alpha = \min(E)$.
2. Montrer que $a \leq f(a)$, puis $f(a) \leq a$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 [Retour à l'énoncé]

Il existe i_0 tel que $A = \max\limits_{1\leq j\leq p} a_{i_0,j}$, et il existe j_0 tel que $B = \min\limits_{1\leq i\leq n} a_{i,j_0}$.
Montrer que $B \leq H \leq A$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Posons $\alpha = \max A$. Pour tout a de A, on a $a \leq \alpha$ donc $f(a) \leq f(\alpha)$.
Ainsi $f(\alpha)$ est à la fois un élément et un majorant de $f(A)$.
Autrement dit $\max f(A)$ existe et est égal à $f(\alpha)$ c'est-à-dire à $f(\max A)$.
La propriété n'est plus vraie si on remplace "max" par "sup".
On peut par exemple considérer l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \mathrm{E}(x)$.
Cette application est croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (elle est même strictement croissante.)
Si on considère $A = [0,1[$, alors $f(A) = [0,1[$. Donc $\sup A = 1$ et $\sup f(A) = 1$.
Mais $f(\sup A) = f(1) = 2$ n'est pas égal $\sup f(A)$.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

1. Pour tout x de E, on a $x\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{S}x$ donc $x\mathcal{T}x$ (réflexivité.)
   $\forall\, x, y \in E, \begin{cases} x\mathcal{T}y \\ y\mathcal{T}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\mathcal{R}y,\ x\mathcal{S}y \\ y\mathcal{R}x,\ y\mathcal{S}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\mathcal{R}y,\ y\mathcal{R}x \\ x\mathcal{S}y,\ y\mathcal{S}x \end{cases} \Rightarrow x = y.$
   La relation $\mathcal{T}$ est donc antisymétrique.
   Enfin soient x, y, z dans E tels que $x\mathcal{T}y$ et $y\mathcal{T}z$.
   On a $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ donc $x\mathcal{R}z$. De même, $\begin{cases} x\mathcal{S}y \\ y\mathcal{S}z \end{cases} \Rightarrow x\mathcal{S}z$.
   On en déduit $x\mathcal{T}z$. La relation $\mathcal{T}$ est donc transitive : c'est une relation d'ordre sur E.
   Mais ce n'est pas nécessairement une relation d'ordre total.
   En effet, définissons par exemple la relation $\mathcal{S}$ par $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$.
   Alors la relation $\mathcal{T}$ devient la relation d'égalité sur E (c'est bien une relation d'ordre, mais qui n'est totale que si E se réduit à un seul élément...)
2. La relation $\mathcal{U}$ peut ne pas être une relation d'ordre.
   En effet, définissons par exemple la relation $\mathcal{S}$ par $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$.
   Alors la relation $\mathcal{T}$ devient la relation universelle (car $\mathcal{R}$ est totale) et n'est pas antisymétrique (du moins si E contient au moins deux éléments distincts.)

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

1. $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{R}^2$.
   Par exemple les couples $(0,1)$ et $(1,0)$ ne sont pas comparables.
2. $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^2$: c'est l'ordre *lexicographique*.
   La réflexivité est évidente : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y)\mathcal{S}(x,y)$.
   Si $\begin{cases} (x,y)\mathcal{S}(x',y') \\ (x',y')\mathcal{S}(x,y) \end{cases}$ alors nécessairement $x = x'$ et $y = y'$: $\mathcal{S}$ est antisymétrique.

Si $\begin{cases}(x,y)\mathcal{S}(x',y')\\(x',y')\mathcal{S}(x'',y'')\end{cases}$ alors $x < x'$ ou $x' < x''$ et dans ce cas $x < x''$, ou bien on a le système $\begin{cases}x = x' = x''\\y \le y' \le y''\end{cases}$ et là encore on a $(x,y)\mathcal{S}(x'',y'')$: $\mathcal{S}$ est transitive.

Si (x,y) et (x',y') sont deux couples quelconques :

- Ou bien $x < x'$ et dans ce cas $(x,y)\mathcal{S}(x',y')$.
- Ou bien $x' < x$ et dans ce cas $(x',y')\mathcal{S}(x,y)$.
- Ou bien $x = x'$ et alors $(x,y)\mathcal{S}(x',y')$ ou $(x',y')\mathcal{S}(x,y)$ selon que $y \le y'$ ou $y' < y$.

Dans tous les cas (x,y) et (x',y') sont comparables : $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre total.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

- Si f est strictement croissante, alors elle est injective. En effet soient a, b deux éléments distincts de E, avec par exemple $a < b$ (l'ordre sur E est total).
  L'hypothèse sur f implique $f(a) < f(b)$ et donc $f(a) \neq f(b)$.
- Réciproquement supposons f croissante et injective.
  Soient a et b deux éléments de E tels que $a < b$.
  On a $f(a) \le f(b)$ car f est croissante, et $f(a) \neq f(b)$ car f est injective.
  Ainsi $f(a) < f(b)$. L'application f est donc strictement croissante.
- L'équivalence n'est plus vraie si l'ordre sur E n'est pas total.
  Considérons par exemple un ensemble fini X (contenant au moins deux éléments a et b).
  On munit l'ensemble $E = \mathcal{P}(X)$ de la relation d'inclusion.
  C'est une relation d'ordre, mais partiel car $\{a\}$ et $\{b\}$ ne sont pas comparables.
  Soit f l'application de E dans $\mathbb{N}$ qui à toute partie de X associe son cardinal.
  Elle est strictement croissante car si $A \subset B \subset X$, avec $A \neq B$ alors $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(B)$.
  Pourtant f n'est pas injective car par exemple $f(\{a\}) = f(\{b\}) = 1$.

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Soit X une partie non vide de A, et soit Y l'ensemble des majorants de X.
L'ensemble Y n'est pas vide car il contient le plus grand élément de E.
On en déduit que Y a une borne inférieure α.
Montrons que $\alpha = \mathrm{Sup}(A)$, donc $\alpha = \mathrm{Min}(Y)$. On sait déjà que α minore Y.
Il reste à prouver que α appartient à Y, c'est-à-dire que α est un majorant de X.
Or pour tout x de X et tout y de Y on a $x \le y$.
Cela signifie que tout x de X est un minorant de Y et qu'il vérifie donc $x \le \alpha$.
Ainsi α est un majorant de X, ce qui achève la démonstration.

Corrigé de l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

1. Soit $\alpha = \min(E)$. On a en particulier $\alpha \le f(\alpha)$, ou encore $\alpha \in X$. Ainsi $X \neq \emptyset$.
2. L'ensemble X n'est pas vide. Il possède donc une borne supérieure a.

   – Pour tout x de X, on a $x \le a$ donc (compte tenu de la définition de X et du fait que f est croissante) : $x \le f(x) \le f(a)$.
   Cela signifie que $f(a)$ est un majorant de X.
   Compte tenu de la définition de a, on en déduit : $a \le f(a)$.

   – Puisque f est croissante, l'inégalité $a \le f(a)$ implique $f(a) \le f(f(a))$.
   Cela signifie que $f(a)$ est un élément de X, puis que $f(a) \le a$.

   – On a donc prouvé l'égalité $f(a) = a$.
   Remarque : puisque $a \le f(a)$, l'élément a est dans X. Donc $a = \max(A)$.

   – Cas particulier : toute application croissante f d'un segment $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même admet au moins un point fixe : $\exists\, a \in [\alpha, \beta]$ tel que $f(a) = a$.

Corrigé de l'exercice 7 [Retour à l'énoncé]

On peut se représenter les np coefficients a_{ij} rangés dans un tableau de n lignes et de p colonnes (un peu à la manière d'un régiment de hussards), chaque coefficient a_{ij} venant se placer à l'intersection de la ligne d'indice i et de la colonne d'indice j.

– Il existe un indice i_0 tel que $A = \max\limits_{1 \le j \le p} a_{i_0,j}$.
Cela signifie que le “hussard” A a été extrait de la ligne d'indice i_0.
Plus précisément, A est le plus grand des hussards de cette ligne.

– Il existe un indice j_0 tel que $B = \min\limits_{1 \le i \le n} a_{i,j_0}$.
Cela signifie que le “hussard” B a été extrait de la colonne d'indice j_0.
Plus précisément, B est le plus petit des hussards de cette colonne.

Considérons le hussard H d'indice a_{i_0,j_0}.

– Il appartient à la ligne de A, donc $H \le A$.

– Il appartient à la colonne de B, donc $B \le H$.

On en déduit $B \le A$: le plus grand des plus petits hussards de chaque colonne est plus petit (ou de même taille) que le plus petit des plus grands hussards de chaque ligne !

Voici un exemple, pour se convaincre qu'il peut y avoir inégalité stricte.

Si le tableau des a_{ij} s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $B = 0$ et $A = 1$.

