

Équations dans $\mathcal{P}(E)$

Soit E un ensemble.

Pour toute partie A de E , on note \bar{A} le complémentaire de A dans E .

1. Soit A une partie de E .

On cherche à caractériser les solutions (X, Y) de l'équation $X \cap Y = A$.

- (a) Soit A une partie de E . Montrer que pour tout couple (R, S) de parties de E , les ensembles $\begin{cases} X = A \cup (R \cap \bar{S}) \\ Y = A \cup (\bar{R} \cap S) \end{cases}$ vérifient $X \cap Y = A$. [I] [S]
- (b) Montrer que, réciproquement, toute solution (X, Y) de $X \cap Y = A$ est de la forme ci-dessus pour, au moins, un couple (R, S) de parties de E . [I] [S]
- (c) Conclure. [I] [S]

2. Etudier de même l'équation $X \cup Y = A$.

On donnera deux démonstrations pour cette question :

- (a) Une méthode analogue à la précédente, avec $\begin{cases} X = A \cap (R \cup \bar{S}) \\ Y = A \cap (\bar{R} \cup S) \end{cases}$ [I] [S]
- (b) Une méthode qui utilise le *résultat* de la question précédente. [I] [S]

3. Dans cette question, on désire étudier l'équation $(A \cap X) \cup (B \cap \bar{X}) = C$, où A, B, C sont des parties données de E , X étant une partie inconnue de E .

(a) On suppose que X_0 est solution de cette équation.

- i. Montrer que $A \cap B \subset C$ et $C \subset A \cup B$. [I] [S]
- ii. Montrer que $(\bar{B} \cap C) \cup (B \cap \bar{C}) \cup [X_0 \cap ((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}))] = X_0$. [I] [S]

(b) On suppose que $A \cap B \subset C \subset A \cup B$.

D étant une partie de E , on pose : $X = (\bar{B} \cap C) \cup (B \cap \bar{C}) \cup [D \cap ((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}))]$.

Démontrer que :

- i. $A \cap X = C \cap [\bar{B} \cup (D \cap A \cap B)]$. [I] [S]
- ii. $\bar{B} \cup X = \bar{B} \cup (B \cap \bar{C}) \cup (D \cap A \cap B)$. [I] [S]
- iii. $B \cap \bar{X} = C \cap [\bar{A} \cup (\bar{D} \cap B)]$. [I] [S]

(c) En déduire $(A \cap X) \cup (B \cap \bar{X})$. [I] [S]

(d) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur A, B, C , pour que l'équation $(A \cap X) \cup (B \cap \bar{X}) = C$ ait au moins une solution. [I] [S]

(e) Donner alors la forme générale de la solution. [I] [S]

Indications ou résultats

1. (a) Distributivité de \cup par rapport à \cap , puis associativité et commutativité de \cap . [Q]
(b) Choisir par exemple $R = X$ et $S = Y$. [Q]
(c) (X, Y) est solution de $X \cap Y = A \Leftrightarrow$ il existe R, S dans $\mathcal{P}(E)$ tel que... [Q]
2. (a) Utiliser encore les propriétés de \cup, \cap et toujours $R = X, S = Y$ pour la réciproque. [Q]
(b) Utiliser le passage au complémentaire, qui permet de transformer un problème de réunion en un problème d'intersection. [Q]
3. (a) i. Montrer d'abord que $(A \cap B) \cap C = A \cap B$.
Utiliser ensuite $A \cap X_0 \subset A$ et $B \cap \bar{X}_0 \subset B$. [Q]
ii. Montrer tout d'abord $\bar{B} \cap C = \bar{B} \cap A \cap X_0$.
Vérifier également $B \cap \bar{C} = B \cap \bar{A} \cap X_0$. [Q]
(b) i. Dans le développement des deux membres de l'égalité à démontrer, on pourra remarquer que $C \cap A \cap B = A \cap B$ et $A \cap D \cap \bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$.
De même on pourra utiliser $A \cap B \cap \bar{C} = \emptyset$ et $C \cap \bar{B} \cap A = C \cap \bar{B}$. [Q]
ii. \bar{B} contient $\bar{B} \cap C$ et $D \cap \bar{A} \cap \bar{B}$. [Q]
iii. B est inclus dans $B \cup \bar{C}$ et dans $\bar{D} \cup A \cup B$.
On sera aussi amené à justifier et à utiliser $C \cap \bar{A} \cap B = C \cap \bar{A}$. [Q]
(c) Factoriser $C \cap \dots$, et utiliser les questions (i) et (iii). [Q]
(d) La condition est $A \cap B \subset C \subset A \cap B$. [Q]
(e) Simple regroupement des résultats des questions 3-a et 3-c. [Q]

Corrigé du problème

1. (a) On a :

$$\begin{aligned}
 X \cap Y &= [A \cup (R \cap \bar{S})] \cap [A \cup (\bar{R} \cap S)] && \text{(La définition de } X \text{ et } Y) \\
 &= A \cup [(R \cap \bar{S}) \cap (\bar{R} \cap S)] && \text{(Distributivité de } \cup \text{ par rapport à } \cap) \\
 &= A \cup [(R \cap \bar{R}) \cap (\bar{S} \cap S)] && \text{(Associativité et commutativité de } \cap) \\
 &= A \cup \emptyset = A
 \end{aligned} \quad [Q]$$

(b) Choisissons par exemple $R = X$ et $S = Y$. Alors :

$$\begin{cases}
 A \cup (R \cap \bar{S}) = (X \cap Y) \cup (X \cap \bar{Y}) = X \cap (Y \cup \bar{Y}) = X \cap E = X \\
 A \cup (\bar{R} \cap S) = (X \cap Y) \cup (\bar{X} \cap Y) = (X \cup \bar{X}) \cap Y = E \cap Y = Y
 \end{cases} \quad [Q]$$

(c) Soit A une partie de E .

Le couple (X, Y) est solution de l'équation $X \cap Y = A \Leftrightarrow$

$$\text{il existe deux parties } R \text{ et } S \text{ de } E \text{ telles que } \begin{cases} X = A \cup (R \cap \bar{S}) \\ Y = A \cup (\bar{R} \cap S) \end{cases} \quad [Q]$$

2. (a) Soit A une partie de E .

– *Sens direct* : Soient R et S deux parties de E .

On pose $X = A \cap (R \cup \bar{S})$ et $Y = A \cap (\bar{R} \cup S)$. On constate que :

$$\begin{aligned}
 X \cup Y &= [A \cap (R \cup \bar{S})] \cup [A \cap (\bar{R} \cup S)] = A \cap [(R \cup \bar{S}) \cup (\bar{R} \cup S)] \\
 &= A \cap [(R \cup \bar{R}) \cup (\bar{S} \cup S)] = A \cap E = A
 \end{aligned}$$

– *Réciproque* : Soient X, Y deux parties de E telles que $X \cup Y = A$.

Si on pose $R = X$ et $S = Y$, on observe que :

$$\begin{cases}
 A \cap (R \cup \bar{S}) = (X \cup Y) \cap (X \cup \bar{Y}) = X \cup (Y \cap \bar{Y}) = X \cup \emptyset = X \\
 A \cap (\bar{R} \cup S) = (X \cup Y) \cap (\bar{X} \cup Y) = (X \cap \bar{X}) \cup Y = \emptyset \cup Y = Y
 \end{cases}$$

– *Conclusion* : $X \cup Y = A \Leftrightarrow$ il existe R, S dans E tels que $\begin{cases} X = A \cap (R \cup \bar{S}) \\ Y = A \cap (\bar{R} \cup S) \end{cases}$

[Q]

(b) Soit A une partie de E .

$X \cup Y = A$ équivaut à $\bar{X} \cap \bar{Y} = \bar{A}$ et nous ramène à la première question.

Plus précisément :

$$X \cup Y = A \Leftrightarrow \bar{X} \cap \bar{Y} = \bar{A}$$

$$\Leftrightarrow \exists P, Q \subset E, \text{ tels que } \begin{cases} \bar{X} = \bar{A} \cup (P \cap \bar{Q}) \\ \bar{Y} = \bar{A} \cup (\bar{P} \cap Q) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{On utilise le résultat} \\ \text{de la première question} \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \exists P, Q \subset E, \text{ tels que } \begin{cases} X = A \cap (\bar{P} \cup Q) \\ Y = A \cap (P \cup \bar{Q}) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{On est passé} \\ \text{aux complémentaires} \end{array} \right)$$

Ce qui équivaut au résultat attendu, en posant $R = Q$ et $S = P$. [Q]

3. (a) i. X_0 vérifie donc $(A \cap X_0) \cup (B \cap \bar{X}_0) = C$.

Dans un premier temps, on en déduit :

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= (A \cap B) \cap [(A \cap X_0) \cup (B \cap \bar{X}_0)] \\ &= (A \cap B \cap A \cap X_0) \cup (A \cap B \cap B \cap \bar{X}_0) \\ &= (A \cap B \cap X_0) \cup (A \cap B \cap \bar{X}_0) \\ &= (A \cap B) \cap (X_0 \cup \bar{X}_0) = (A \cap B) \cap E = A \cap B \end{aligned}$$

Enfin l'égalité $(A \cap B) \cap C = A \cap B$ équivaut à $A \cap B \subset C$.

D'autre part :

$$\left. \begin{array}{l} A \cap X_0 \subset A \\ B \cap \bar{X}_0 \subset B \end{array} \right\} \Rightarrow (A \cap X_0) \cup (B \cap \bar{X}_0) \subset A \cup B. \text{ Donc } C \subset A \cup B$$

On a donc démontré la double inclusion demandée. [Q]

- ii. Reprenons notre solution X_0 et procédons par ordre.

Puisque $C = (A \cap X_0) \cup (B \cap \bar{X}_0)$, il vient :

$$\begin{aligned} \bar{B} \cap C &= \bar{B} \cap [(A \cap X_0) \cup (B \cap \bar{X}_0)] \\ &= (\bar{B} \cap A \cap X_0) \cup (\underbrace{\bar{B} \cap B}_{=\emptyset} \cap \bar{X}_0) = \bar{B} \cap A \cap X_0 \end{aligned}$$

De la même manière :

$$\begin{aligned} B \cap \bar{C} &= B \cap (\bar{A} \cup \bar{X}_0) \cap (\bar{B} \cup X_0) \\ &= B \cap (\bar{A} \cup \bar{X}_0) \cap X_0 \quad (\text{Car } B \cap (\bar{B} \cup X_0) = B \cap X_0) \\ &= B \cap \bar{A} \cap X_0 \quad (\text{Car } (\bar{A} \cup \bar{X}_0) \cap X_0 = \bar{A} \cap X_0) \end{aligned}$$

Soit Z l'ensemble dont on doit montrer qu'il est égal à X_0 .

$$\begin{aligned} Z &= \underbrace{(\bar{B} \cap A \cap X_0)}_{\bar{B} \cap C} \cup \underbrace{(B \cap \bar{A} \cap X_0)}_{B \cap \bar{C}} \cup [X_0 \cap ((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}))] \\ &= (X_0 \cap A \cap \bar{B}) \cup (X_0 \cap \bar{A} \cap B) \cup (X_0 \cap A \cap B) \cup (X_0 \cap \bar{A} \cap \bar{B}) \\ &= X_0 \cap \left[\underbrace{(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})}_{=E} \right] \\ &= X_0 \cap E = X_0, \text{ ce qu'il fallait démontrer} \end{aligned} \quad [Q]$$

- (b) i. Evaluons d'abord le membre de droite :

$$C \cap [\bar{B} \cup (D \cap A \cap B)] = (C \cap \bar{B}) \cup (C \cap A \cap B \cap D) = (C \cap \bar{B}) \cup (A \cap B \cap D)$$

(On a utilisé $A \cap B \subset C$ et donc $C \cap A \cap B = A \cap B$)

Evaluons maintenant le membre de gauche :

$$\begin{aligned} A \cap X &= A \cap [(\bar{B} \cap C) \cup (B \cap \bar{C}) \cup [D \cap ((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}))]] \\ &= A \cap [(\bar{B} \cap C) \cup (B \cap \bar{C}) \cup (D \cap A \cap B) \cup (D \cap \bar{A} \cap \bar{B})] \\ &= (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap B \cap D) \end{aligned}$$

(Dans le développement on a utilisé $A \cap D \cap \bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$.)

On sait que $A \cap B \subset C$. On en déduit $A \cap B \cap \bar{C} = \emptyset$.

D'autre part :

$$C \subset A \cup B \Rightarrow C \cap \bar{B} \subset (A \cup B) \cap \bar{B} = A \cap \bar{B} \subset A$$

Ce qui implique $C \cap \bar{B} \cap A = C \cap \bar{B}$

Puis $A \cap X = (C \cap \bar{B}) \cup (A \cap B \cap D)$, ce qui répond à la question. [Q]

ii. Puisque $X = (\bar{B} \cap C) \cup (B \cap \bar{C}) \cup (D \cap A \cap B) \cup (D \cap \bar{A} \cap \bar{B})$,

il vient : $X \cup \bar{B} = \bar{B} \cup (B \cap \bar{C}) \cup (D \cap A \cap B)$

(dans le développement, \bar{B} a "absorbé" $\bar{B} \cap C$ et $D \cap \bar{A} \cap \bar{B}$.) [Q]

iii. Puisque $\bar{X} = (B \cup \bar{C}) \cap (\bar{B} \cup C) \cap (\bar{D} \cup \bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{D} \cup A \cup B)$, Il vient :

$$\begin{aligned} B \cap \bar{X} &= B \cap (\bar{B} \cup C) \cap (\bar{D} \cup \bar{A} \cup \bar{B}) \quad \left(\begin{array}{l} B \text{ a "absorbé"} \\ B \cup \bar{C} \text{ et } \bar{D} \cup A \cup B \end{array} \right) \\ &= C \cap B \cap (\bar{D} \cup \bar{A} \cup \bar{B}) \quad (\text{car } B \cap (\bar{B} \cup C) = B \cap C) \\ &= (C \cap B \cap \bar{D}) \cup (C \cap B \cap \bar{A}) \quad (\text{car } C \cap B \cap \bar{B} = \emptyset) \end{aligned}$$

Or $C \subset A \cup B$. Donc $C \cap \bar{A} \subset (A \cup B) \cap \bar{A} = B \cap \bar{A}$.

On en déduit $C \cap \bar{A} \cap B \cap \bar{A} = C \cap \bar{A}$, c'est-à-dire $C \cap \bar{A} \cap B = C \cap \bar{A}$.

Finalement :

$$\begin{aligned} B \cap \bar{X} &= (C \cap B \cap \bar{D}) \cup (C \cap \bar{A}) \\ &= C \cap [\bar{A} \cup (\bar{D} \cap B)] \quad (\text{ce qu'il fallait démontrer.}) \quad [Q] \end{aligned}$$

(c) On déduit des questions (i) et (iii) que :

$$\begin{aligned} (A \cap X) \cup (B \cap \bar{X}) &= [C \cap [\bar{B} \cup (D \cap A \cap B)]] \cup [C \cap [\bar{A} \cup (\bar{D} \cap B)]] \\ &= C \cap [\bar{B} \cup (D \cap A \cap B) \cup \bar{A} \cup (\bar{D} \cap B)] \\ &= C \cap \underbrace{[\bar{A} \cap \bar{B} \cup ((A \cap B) \cap D)]}_{\bar{A} \cap \bar{B} \cup D} \cup (\bar{D} \cap B) \\ &= C \cap \underbrace{[\bar{A} \cap \bar{B} \cup D \cup (\bar{D} \cap B)]}_{D \cup B} \\ &= C \cap \underbrace{(\bar{A} \cup \bar{B} \cup D \cup B)}_E = C \end{aligned} \quad [Q]$$

(d) Des questions précédentes, on tire :

L'équation $A \cap X \cup (B \cap \bar{X})$ possède au moins une solution \Leftrightarrow

A, B et C vérifient la double inclusion : $A \cap B \subset C \subset A \cap B$. [Q]

(e) Supposons que la condition $A \cap B \subset C \subset A \cap B$ soit réalisée.

Alors l'ensemble des solutions est l'ensemble des parties X de E de la forme :

$$X = (\bar{B} \cap C) \cup (B \cap \bar{C}) \cup [D \cap ((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}))],$$

où D est une partie quelconque de E . [Q]