

## Trois relations identiques dans $\mathcal{P}(E)$

Etant donné un ensemble  $E$ , on désigne par  $\mathcal{M}$  une partie non vide de  $\mathcal{P}(E)$  telle que :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}, \exists Z \in \mathcal{M}, \text{ tel que } Z \subset X \cap Y.$$

1. Montrer que pour tout ensemble  $E$ , il existe de telles parties  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{P}(E)$ . [S]
2. On associe à  $\mathcal{M}$  une relation binaire  $\mathcal{R}$  définie sur  $\mathcal{P}(E)$  par :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \mathcal{R} B \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M} \text{ telque } A \cap X = B \cap X$$

- (a) Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence. [S]
  - (b) Montrer que  $\mathcal{R}$  est l'égalité si et seulement si  $\mathcal{M} = \{E\}$ . [S]
  - (c) Montrer que  $\mathcal{R}$  est l'équivalence universelle si et seulement si  $\emptyset \in \mathcal{M}$ . [S]
3. On note  $\widehat{A}$  la classe d'équivalence, pour  $\mathcal{R}$ , d'une partie  $A$  quelconque de  $E$ .
    - (a) Déterminer  $\widehat{E}$  et  $\widehat{\emptyset}$ . [S]
    - (b) Montrer que si  $A \in \widehat{E}$  et  $B \in \widehat{E}$ , alors  $A \cap B \in \widehat{E}$ . [S]
    - (c) On pose  $\mathcal{N} = \widehat{E}$ , et dans  $\mathcal{P}(E)$  on désigne par  $\mathcal{S}$  la relation :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \mathcal{S} B \Leftrightarrow \exists Y \in \mathcal{N} \text{ telque } A \cap Y = B \cap Y$$

Montrer que les relations  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  sont identiques. [S]

4. On définit sur  $\mathcal{P}(E)$  la différence symétrique :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

Soit  $\mathcal{T}$  la relation définie sur  $\mathcal{P}(E)$  par :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \mathcal{T} B \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M} \text{ telque } (A \Delta B) \cap X = \emptyset$$

- (a) Montrer que les relations  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{R}$  sont identiques. [S]
  - (b)  $A, A', B, B'$  étant des parties de  $E$  telles que  $A \mathcal{R} A'$  et  $B \mathcal{R} B'$ , montrer que :
 
$$(A \cap B) \mathcal{R} (A' \cap B'), \quad (A \cup B) \mathcal{R} (A' \cup B'), \quad \overline{A} \mathcal{R} \overline{A'}, \quad \text{et } (A \Delta B) \mathcal{R} (A' \Delta B').$$
 [S]
5. Déterminer les classes d'équivalence de  $\mathcal{P}(E)$  pour la relation  $\mathcal{R}$  dans les cas suivants :
    - (a)  $\mathcal{M} = \{E\}$ . [S]
    - (b)  $\emptyset \in \mathcal{M}$ . [S]
    - (c)  $\mathcal{M} = \{\{x\}\}$ , où  $x \in E$ . [S]
    - (d)  $\mathcal{M} \supset \{\{x\}, \{y\}\}$ , où  $x, y$  sont deux éléments distincts de  $E$ . [S]

## Corrigé du problème

1.  $\mathcal{M} = \mathcal{P}(E)$  convient. [Q]

2. (a) – *Réflexivité*

Soit  $A$  dans  $\mathcal{P}(E)$ . Puisque  $\mathcal{M} \neq \emptyset$ , soit  $X$  un élément de  $\mathcal{M}$ .

On a...  $A \cap X = A \cap X$ , ce qui prouve  $A \mathcal{R} A$ .

– *Symétrie*

Elle est évidente par définition (car  $X, Y$  jouent le même rôle.)

– *Transitivité*

Soient  $A, B, C$  dans  $\mathcal{P}(E)$ , tels que :  $A \mathcal{R} B$  et  $B \mathcal{R} C$ .

Il existe  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{M}$  tels que  $A \cap X = B \cap X$  et  $B \cap Y = C \cap Y$ .

On sait qu'il existe  $Z$  dans  $\mathcal{M}$  tel que  $Z \subset X \cap Y$ .

On en déduit 
$$\begin{cases} A \cap X \cap Z = B \cap X \cap Z \\ B \cap Y \cap Z = C \cap Y \cap Z \end{cases}$$

puis 
$$\begin{cases} A \cap Z = B \cap Z \\ B \cap Z = C \cap Z \end{cases} \quad \text{car } X \cap Z = Z \text{ et } Y \cap Z = Z.$$

Ainsi  $A \cap Z = C \cap Z$ , et  $Z$  est élément de  $\mathcal{M}$ . Donc  $A \mathcal{R} C$ .

– *Conclusion*

$\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{P}(E)$ .

[Q]

(b) – *Supposons  $\mathcal{M} = \{E\}$*

Pour tous  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{P}(E)$ ,  $A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \cap E = B \cap E \Leftrightarrow A = B$ .

La relation  $\mathcal{R}$  est donc l'égalité.

– *Réciproquement*

On suppose que  $\mathcal{M}$  est différent de  $\{E\}$ . Montrons que  $\mathcal{R}$  n'est pas l'égalité.

Puisque  $\mathcal{M} \neq \emptyset$ , il existe  $X$  dans  $\mathcal{M}$ , avec  $X \neq E$ .

On constate que  $X \mathcal{R} E$  (car  $X \cap X = E \cap X$  et  $X \in \mathcal{M}$ .)

Or  $X$  et  $E$  sont distincts :  $\mathcal{R}$  n'est pas donc pas la relation égalité.

– *Conclusion*

$\mathcal{R}$  est la relation "égalité"  $\Leftrightarrow \mathcal{M}$  se réduit au singleton  $\{E\}$ .

[Q]

(c) – *Supposons  $\emptyset \in \mathcal{M}$*

Pour tous  $A, B$  de  $\mathcal{P}(E)$  on a alors  $A \mathcal{R} B$  car  $A \cap \emptyset = B \cap \emptyset$ .

$\mathcal{R}$  est donc l'équivalence universelle.

– *Réciproquement*

Supposons que  $\mathcal{R}$  soit l'équivalence universelle dans  $\mathcal{P}(E)$ .

Alors en particulier  $\emptyset \mathcal{R} E$ .

Il existe donc un élément  $X$  de  $\mathcal{P}(E)$  tel que  $E \cap X = \emptyset \cap X$ .

Mais cela signifie que  $X = \emptyset$ . Donc  $\emptyset \in \mathcal{M}$ .

– *Conclusion*

$\mathcal{R}$  est l'équivalence universelle  $\Leftrightarrow \emptyset$  est élément de  $\mathcal{M}$ .

[Q]

3. (a) – *Classe de  $E$*

$$A \in \widehat{E} \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M} \text{ tel que } A \cap X = E \cap X$$

$$\Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M} \text{ tel que } A \cap X = X$$

$$\Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M} \text{ tel que } X \subset A$$

$\widehat{E}$  est donc formée des parties de  $E$  contenant au moins un élément de  $\mathcal{M}$ .

En particulier tous les éléments de  $\mathcal{M}$  sont dans la classe de  $E$ .

– *Classe de  $\emptyset$*

$$A \in \widehat{\emptyset} \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M} \text{ tel que } A \cap X = \emptyset \cap X$$

$$\Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M} \text{ tel que } A \cap X = \emptyset$$

$\widehat{\emptyset}$  est donc l'ensemble des parties de  $E$  qui ont une intersection vide avec au moins un élément de  $\mathcal{M}$ .

[Q]

(b) Soient  $A$  et  $B$  deux éléments de  $\widehat{E}$ .

Comme on l'a vu, il existe  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{M}$  tels que  $X \subset A$  et  $Y \subset B$ .

On sait qu'il existe un élément  $Z$  de  $\mathcal{M}$  tel que  $Z \subset X \cap Y$ .

On a donc  $Z \subset A \cap B$ , ce qui prouve que  $A \cap B$  appartient à  $\widehat{E}$ . [Q]

(c) Il s'agit de démontrer que pour tous  $A, B$  de  $\mathcal{P}(E)$ ,  $A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \mathcal{S} B$ .

– *Supposons  $A \mathcal{R} B$*

Alors il existe  $X$  dans  $\mathcal{M}$  tel que  $A \cap X = B \cap X$ .

On  $X$  est aussi élément de  $N = \widehat{E}$  (car  $X$  contient  $X$  !). Donc  $A \mathcal{S} B$ .

– *Supposons  $A \mathcal{S} B$*

Alors il existe  $X$  dans  $\mathcal{M}$  tel que  $A \cap X = B \cap X$ .

Par définition, il existe un élément  $Y$  de  $\mathcal{M}$  tel que  $Y \subset X$ .

On en déduit  $A \cap X \cap Y = B \cap X \cap Y$  puis  $A \cap Y = B \cap Y$ . Donc  $A \mathcal{R} B$ .

– *Conclusion*

Les relations  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  sont identiques.

[Q]

4. (a) Il s'agit de démontrer que pour tous  $A, B$  de  $\mathcal{P}(E)$ ,  $A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \mathcal{T} B$ .

Pour toutes parties  $A$  et  $B$  de  $E$  et tout élément  $X$  de  $\mathcal{M}$  :

$$\begin{aligned} (A \Delta B) \cap X = \emptyset &\Leftrightarrow [(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] \cap X = \emptyset \\ &\Leftrightarrow (A \cap \bar{B} \cap X) \cup (\bar{A} \cap B \cap X) = \emptyset \\ &\Leftrightarrow A \cap \bar{B} \cap X = \emptyset \text{ et } \bar{A} \cap B \cap X = \emptyset \\ &\Leftrightarrow A \cap X \subset B \text{ et } B \cap X \subset A. \end{aligned}$$

On aura terminé la démonstration quand on aura prouvé l'équivalence :

$$(A \cap X \subset B \text{ et } B \cap X \subset A) \Leftrightarrow A \cap X = B \cap X$$

Dans le sens  $\Leftarrow$  : c'est évident.

Dans le sens  $\Rightarrow$  :

$$\begin{array}{l} A \cap X \subset B \\ B \cap X \subset A \end{array} \left. \begin{array}{l} \Rightarrow A \cap X \cap X \subset B \cap X \\ \Rightarrow B \cap X \cap X \subset A \cap X \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A \cap X \subset B \cap X \\ B \cap X \subset A \cap X \end{array} \Rightarrow A \cap X = B \cap X$$

Les relations  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{T}$  sont donc identiques. [Q]

(b) Par hypothèse, il existe  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{M}$  tels que : (S)  $\begin{cases} A \cap X = A' \cap X \\ B \cap Y = B' \cap Y \end{cases}$

On sait qu'il existe  $Z$  dans  $\mathcal{M}$  tel que  $Z \subset X \cap Y$ .

Le système (S) implique alors ( $\Sigma$ )  $\begin{cases} A \cap Z = A' \cap Z \\ B \cap Z = B' \cap Z \end{cases}$

– *Intersection*

$$\begin{aligned} (\Sigma) &\Rightarrow A \cap Z \cap B \cap Z = A' \cap Z \cap B' \cap Z \\ &\Rightarrow (A \cap B) \cap Z = (A' \cap B') \cap Z \end{aligned}$$

On en déduit  $(A \cap B) \mathcal{R} (A' \cap B')$ .

– *Réunion*

$$\begin{aligned} (S) &\Rightarrow (A \cap Z) \cup (B \cap Z) = (A' \cap Z) \cup (B' \cap Z) \\ &\Rightarrow (A \cup B) \cap Z = (A' \cup B') \cap Z \end{aligned}$$

On en déduit  $(A \cup B) \mathcal{R} (A' \cup B')$ .

– *Complémentaire*

Pour toutes parties  $C$  et  $D$  de  $E$ , on remarque que  $C \Delta D = \bar{C} \Delta \bar{D}$ .

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} A \mathcal{R} A' &\Rightarrow A \mathcal{T} A' \Rightarrow \exists X \in \mathcal{M} \text{ tel que } (A \Delta A') \cap X = \emptyset \\ &\Rightarrow \exists X \in \mathcal{M} \text{ tel que } (\bar{A} \Delta \bar{A}') \cap X = \emptyset \Rightarrow \bar{A} \mathcal{T} \bar{A}' \Rightarrow \bar{A} \mathcal{R} \bar{A}' \end{aligned}$$

– Différence symétrique

On utilise les résultats précédents :

$$\begin{aligned} \begin{cases} A \mathcal{R} A' \\ B \mathcal{R} B' \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} A \mathcal{R} A' \text{ et } \bar{B} \mathcal{R} \bar{B}' \\ B \mathcal{R} B' \text{ et } \bar{A} \mathcal{R} \bar{A}' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A \cap \bar{B}) \mathcal{R} (A' \cap \bar{B}') \\ (B \cap \bar{A}) \mathcal{R} (B' \cap \bar{A}') \end{cases} \\ &\Rightarrow (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \mathcal{R} (A' \cap \bar{B}') \cup (B' \cap \bar{A}') \end{aligned}$$

Ce dernier résultat n'est autre que  $(A \Delta B) \mathcal{R} (A' \Delta B')$ .

[Q]

5. (a) Si  $\mathcal{M} = \{E\}$ ,  $\mathcal{R}$  est l'égalité. Il y a donc autant de classes que de parties de  $E$ .

Plus précisément : pour toute partie  $A$  de  $E$ ,  $\hat{A} = \{A\}$ . [Q]

(b) Si  $\emptyset \in \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{R}$  est l'équivalence universelle.

Il n'a donc qu'une seule classe d'équivalence, à savoir  $\mathcal{P}(E)$ . [Q]

(c) Pour toutes parties  $A$  et  $B$  de  $E$ ,

$$A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \cap \{x\} = B \cap \{x\} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \cap B \\ \text{ou} \\ x \notin A \text{ et } x \notin B \end{cases}$$

Il y a donc deux classes d'équivalence :

– Celle formée des parties de  $E$  qui contiennent  $x$ .

– Celle formée des parties de  $E$  qui ne contiennent pas  $x$ .

[Q]

(d) On suppose donc que  $\{x\}$  et  $\{y\}$  sont deux éléments de  $\mathcal{M}$ .

Mais on sait qu'il existe  $Z$  dans  $\mathcal{M}$  tel que  $Z \subset \{x\} \cap \{y\}$ .

Dans ce cas cela signifie que  $\emptyset \in \mathcal{M}$ .

On est ainsi ramené au cas (b). [Q]