

Exercice 1 [02648] [correction]

Soit G un groupe, H un sous-groupe de G , A une partie non vide de G . On pose $AH = \{ah/a \in A, h \in H\}$. Montrer que $AH = H$ si, et seulement si, $A \subset H$.

Exercice 2 [02649] [correction]

Soit (G, \cdot) un groupe fini tel que

$$\forall g \in G, g^2 = e$$

où e est le neutre de G . On suppose G non réduit à $\{e\}$.

Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que G est isomorphe à $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$.

Exercice 3 [02654] [correction]

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n + 3$.

Exercice 4 [02656] [correction]

Soient des entiers $a > 1$ et $n > 0$.

Montrer que si $a^n + 1$ est premier alors n est une puissance de 2.

Exercice 5 [02657] [correction]

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n = 2^{2^n} + 1$.

a) Montrer, si $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \neq m$, que $F_n \wedge F_m = 1$.

b) Retrouver à l'aide du a) le fait que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 6 [02658] [correction]

a) Pour $(a, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ avec $a \wedge n = 1$, montrer que $a^{\varphi(n)} = 1 \pmod{n}$.

b) Pour p premier et $k \in \{1, \dots, p-1\}$, montrer que p divise $\binom{p}{k}$.

c) Soit $(a, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On suppose que $a^{n-1} = 1 \pmod{n}$. On suppose que pour tout x divisant $n-1$ et différent de $n-1$, on a $a^x \neq 1 \pmod{n}$. Montrer que n est premier.

Exercice 7 [02660] [correction]

Si p est un nombre premier, quel est le nombre de carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Exercice 8 [02661] [correction]

Soit p un nombre premier. On note Z_p l'ensemble des a/b où $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et p ne divise pas b . On note J_p l'ensemble des a/b où $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, p divise a et p ne divise pas b .

a) Montrer que Z_p est un sous-anneau de \mathbb{Q} .

b) Montrer que J_p est un idéal de Z_p et que tout idéal de Z_p autre que Z_p est inclus dans J_p .

c) Déterminer les idéaux de Z_p .

Exercice 9 [02242] [correction]

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $n > p$, E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions respectives n et p , $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifiant $u \circ v = \text{Id}_F$.

a) Montrer que $v \circ u$ est un projecteur.

b) Déterminer son rang, son image et son noyau.

Exercice 10 [02662] [correction]

Soit $K = \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} + \sqrt{3}\mathbb{Q} + \sqrt{6}\mathbb{Q}$.

a) Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est une \mathbb{Q} -base du \mathbb{Q} -espace vectoriel K .

b) Montrer que K est un sous-corps de \mathbb{R} .

Exercice 11 [02677] [correction]

Soit \mathbb{K} un corps, E un espace vectoriel de dimension finie n sur \mathbb{K} et \mathbb{L} un sous-corps de \mathbb{K} tel que \mathbb{K} est un espace vectoriel de dimension finie p sur \mathbb{L} .

Montrer que E est un espace vectoriel de dimension finie q sur \mathbb{L} . Relier n, p, q .

Exercice 12 [02678] [correction]

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et G un sous-espace vectoriel de F . On suppose que G est de codimension finie dans E .

Montrer que

$$\text{codim}_E G = \text{codim}_E F + \text{codim}_F G$$

Exercice 13 [02680] [correction]

Soit E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels. On se donne $f \in \mathcal{L}(E, F)$, une famille

$(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ de sous-espaces vectoriels de E et une famille $(F_j)_{1 \leq j \leq p}$ de sous-espaces vectoriels de F .

a) Montrer

$$f\left(\sum_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n f(E_i)$$

b) Montrer que si f est injective et si la somme des E_i est directe alors la somme des $f(E_i)$ est directe.

c) Montrer

$$f^{-1}\left(\sum_{j=1}^p F_j\right) \supset \sum_{j=1}^p f^{-1}(F_j)$$

Montrer que cette inclusion peut être stricte. Donner une condition suffisante pour qu'il y ait égalité.

Exercice 14 [02682] [correction]

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension finie. Montrer que

$$|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leq \operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$$

Exercice 15 [02684] [correction]

Soit E et F des espaces vectoriels sur \mathbb{K} , de dimensions finies ou non. Montrer que $(E \times F)^*$ et $E^* \times F^*$ sont isomorphes.

Exercice 16 [02685] [correction]

Soit a_0, a_1, \dots, a_n des réels non nuls deux à deux distincts. On note F_j l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans \mathbb{R} définie par

$$F_j(P) = \int_0^{a_j} P$$

Montrer que (F_0, F_1, \dots, F_n) est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.

Exercice 17 [03148] [correction]

Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ des formes linéaires sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 2$.

Montrer que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est libre si, et seulement si,

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \exists x \in E, \forall 1 \leq j \leq p, \varphi_j(x) = \lambda_j$$

Exercice 18 [03286] [correction]

Caractériser les sous-espaces F d'un espace vectoriel E tels que

$$h^{-1}(h(F)) = h(h^{-1}(F))$$

Exercice 19 [00734] [correction]

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe de $\operatorname{GL}(E)$ d'ordre fini n . Montrer

$$\dim \left(\bigcap_{g \in G} \ker(g - \operatorname{Id}_E) \right) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \operatorname{tr} g$$

Exercice 20 [02650] [correction]

On note V l'ensemble des matrices à coefficients entiers du type

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

et G l'ensemble des $M \in V$ inversibles dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et dont l'inverse est dans V .

a) Quelle est la structure de G ?

b) Soit $M \in V$. Montrer que $M \in G$ si, et seulement si, $\det M = \pm 1$.

c) Donner un groupe standard isomorphe à G muni du produit.

Exercice 21 [02651] [correction]

a) Soit G un sous-groupe de $\operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\sum_{g \in G} \operatorname{tr} g = 0$. Montrer que $\sum_{g \in G} g = 0$.

b) Soit G un sous-groupe fini de $\operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$, V un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n stable par les éléments de G . Montrer qu'il existe un supplémentaire de V dans \mathbb{R}^n stable par tous les éléments de G .

Exercice 22 [02659] [correction]

Soit des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $\det A$ et $\det B$ sont premiers entre eux. Montrer l'existence de $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que

$$UA + VB = I_n$$

Exercice 23 [02679] [correction]

Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $f^2 = g^2 = 0$ et $f \circ g = g \circ f$. Calculer $f \circ g$.

Exercice 24 [02686] [correction]

a) Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(AB) = f(BA)$$

montrer que f est proportionnelle à la trace.

b) Soit g un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $g(AB) = g(BA)$ pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $g(I_n) = I_n$. Montrer que g conserve la trace.

Exercice 25 [02687] [correction]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où B est nilpotente et commute avec A . Montrer que A et $A + B$ sont simultanément inversibles.

Exercice 26 [02688] [correction]

Soit ω une racine primitive n ème de 1. On pose

$$F_\omega(P) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) X^k$$

pour tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Montrer que F_ω est un automorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et exprimer son inverse.

Exercice 27 [02689] [correction]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des complexes distincts, $A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et

$$C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AM = MA\}$$

Montrer que $(A^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de $C(A)$.

Exercice 28 [02691] [correction]

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur \mathbb{C} . Montrer que A et B sont semblables sur \mathbb{R} .

Exercice 29 [02693] [correction]

Calculer

$$\begin{vmatrix} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{vmatrix}$$

où x, a_1, \dots, a_n réels.

Exercice 30 [02694] [correction]

Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AC = CA$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC)$$

Exercice 31 [02695] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\det(A + X) = \det A + \det X$$

Montrer que $\det A = 0$ puis $A = 0$.

Exercice 32 [00708] [correction]

Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$ tel que

$$C = A + B, C^2 = 2A + 3B \text{ et } C^3 = 5A + 6B$$

Les matrices A et B sont-elles diagonalisables.

Exercice 33 [01948] [correction]

Trouver les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\text{tr} M = 0 \text{ et } M^3 - 4M^2 + 4M = O_n$$

Exercice 34 [01956] [correction]

Soient $n \geq 2$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,i+1} = 1$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, les autres coefficients étant nuls.

a) La matrice A est-elle diagonalisable?

b) Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = A$?

Exercice 35 [02667] [correction]

Montrer qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0$$

Exercice 36 [02681] [correction]

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} et a un élément non nul de \mathbb{K} . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 - 3af^2 + a^2f = 0$. Est-il vrai que $\ker f$ et $\text{Im} f$ sont supplémentaires ?

Exercice 37 [02690] [correction]

Soit A et B des matrices complexes carrées d'ordre n . On suppose $A + 2^k B$ nilpotente pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$. Montrer que A et B sont nilpotentes.

Exercice 38 [02692] [correction]

Les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

Exercice 39 [02696] [correction]

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB et BA ont même valeurs propres.

Exercice 40 [02697] [correction]

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$X^q \chi_{AB}(X) = X^p \chi_{BA}(X)$$

Indice : Commencer par le cas où

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 41 [02698] [correction]

a) Si $P \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire de degré n , existe-t-il $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ de polynôme caractéristique P ?

b) Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $P = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$. On suppose $P \in \mathbb{Z}[X]$.

Montrer, si $q \in \mathbb{N}^*$, que $P_q = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i^q)$ appartient à $\mathbb{Z}[X]$.

c) Soit P dans $\mathbb{Z}[X]$ unitaire dont les racines complexes sont de modules ≤ 1 . Montrer que les racines non nulles de P sont des racines de l'unité.

Exercice 42 [02699] [correction]

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

a) Comparer $\text{Sp} B$ et $\text{Sp}^t B$.

b) Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que s'il existe λ pour lequel $AC = \lambda C$, alors $\text{Im} C \subset \ker(A - \lambda I_n)$.

c) Soit λ une valeur propre commune à A et B . Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C \neq 0$, telle que $AC = CB = \lambda C$.

d) On suppose l'existence de $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg} C = r$ et $AC = CB$. Montrer que le PGCD des polynômes caractéristiques de A et B est de degré $\geq r$.

e) Etudier la réciproque de d).

Exercice 43 [02700] [correction]

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, soit

$$T(f) : x \in [0, 1] \mapsto \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt$$

a) Vérifier que T est dans $\mathcal{L}(E)$.

b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T .

Exercice 44 [02701] [correction]

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculer le polynôme minimal de A .

b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

c) Calculer e^A .

Exercice 45 [02702] [correction]

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. La matrice $(a_i a_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 46 [02703] [correction]

Diagonaliser les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 47 [02704] [correction]

Déterminer les valeurs propres de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 48 [02705] [correction]

Soit a, b deux réels, $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b & \cdots & b & a \\ \vdots & \ddots & a & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & b & \cdots & b \end{pmatrix}$.

Réduire ces deux matrices.

Exercice 49 [02706] [correction]

On pose

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$$

pour tous a, b réels.

- a) Ces matrices sont-elles simultanément diagonalisables ?
- b) Etudier et représenter graphiquement l'ensemble des $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M(a, b)^n$ tend vers 0 quand n tend vers ∞ .

Exercice 50 [02707] [correction]

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les éléments diagonaux valent a et les autres valent b . A est-elle diagonalisable ? Quelles sont les valeurs propres de A ? Quel est le polynôme minimal de A ? Sous quelles conditions sur a et b , A est-elle inversible ? Lorsque c'est le cas trouver l'inverse de A .

Exercice 51 [02708] [correction]

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a & 0 & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & a+b & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & b & 0 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \in M_{2n+1}(\mathbb{C})$$

Quels sont les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(A) = 0$?

Exercice 52 [02710] [correction]

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Que dire de cette matrice ? Sans la diagonaliser, déterminer son polynôme caractéristique, son polynôme minimal, calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$ et évaluer $\exp(A)$.

Exercice 53 [02711] [correction]

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A . Calculer $\exp A$ et $\exp(A) \exp({}^t A)$.

Exercice 54 [02712] [correction]

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$$

Etudier la diagonalisabilité de A , déterminer les polynômes minimal et caractéristique de A , calculer $\exp A$. Proposer une généralisation en dimension n .

Exercice 55 [02713] [correction]Trouver les A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$A^3 - 4A^2 + 4A = 0$$

et $\operatorname{tr} A = 8$.**Exercice 56** [02714] [correction]Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^3 + A^2 + A = 0$$

Montrer que $\operatorname{rg} A$ est pair.**Exercice 57** [02715] [correction]

Trouver les M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^t M = M^2$ et que M n'ait aucune valeur propre réelle.

Exercice 58 [02716] [correction]Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le système

$$\begin{cases} M^2 + M + I_n = 0 \\ {}^t M M = M^t M \end{cases}$$

Exercice 59 [02717] [correction]

Dans \mathbb{R}^3 euclidien, on considère deux vecteurs a et b , et on pose $f(x) = a \wedge (b \wedge x)$. A quelle condition, f est-elle diagonalisable ?

Exercice 60 [02718] [correction]

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$, $B \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples de degré $n + 1$. Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B . Déterminer les éléments propres de Φ . L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Exercice 61 [02719] [correction]

Soit f et g deux endomorphismes d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$.

- a) Montrer que f est nilpotent.
b) On suppose $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base e de E et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\operatorname{Mat}_e f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\operatorname{Mat}_e g = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda + 1, \dots, \lambda + n - 1)$$

Exercice 62 [02720] [correction]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1})$. On suppose $u^3 = u$, $\operatorname{tr} u = 0$ et $\operatorname{tr} u^2 = 2n$. On note

$$C(u) = \{v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1}) / uv = vu\}$$

- a) Calculer la dimension $C(u)$.
b) Quels sont les n tels que $C(u) = \mathbb{R}[u]$?

Exercice 63 [02721] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $f_A(M) = AM$, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a) Montrer que si $A^2 = A$ alors f_A est diagonalisable.
b) Montrer que f_A est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Exercice 64 [02722] [correction]

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = f$. Etudier les éléments propres et la diagonalisabilité de l'endomorphisme $u \mapsto fu - uf$ de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 65 [02723] [correction]

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit $T \in \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ par

$$T(g) = f \circ g - g \circ f$$

Montrer que si f est diagonalisable, alors T est diagonalisable; si f est nilpotente, alors T est nilpotente.

Exercice 66 [02724] [correction]

Soit A une matrice carrée réelle d'ordre n . Montrer que A est nilpotente si, et seulement si, pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{tr} A^p = 0$.

Exercice 67 [02726] [correction]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$u^3 = \text{Id}$$

Décrire les sous-espaces stables de u .

Exercice 68 [02727] [correction]

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme minimal Π_f . Montrer l'existence de $x \in E$ tel que $\{P \in \mathbb{C}[X] / P(f)(x) = 0\}$ soit l'ensemble des multiples de Π_f .

Exercice 69 [02729] [correction]

Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par $A = (\min(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

- Trouver une matrice triangulaire inférieure unité L et une matrice triangulaire supérieure U telle que $A = LU$.
- Exprimer A^{-1} à l'aide de

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

- Montrer que $\text{Sp} A^{-1} \subset [0, 4]$.

Exercice 70 [02897] [correction]

On note $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on pose, pour toute $f \in E$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Tf(x) = f(x) + \int_0^x f(t) dt$$

- L'opérateur T est-il un automorphisme de E ?
- Existe-t-il un sous-espace vectoriel de E de dimension finie impaire et stable par T ?

Exercice 71 [03063] [correction]

Soit E l'espace des fonctions f de classe \mathcal{C}^1 de $[0, +\infty[$ vers \mathbb{R} vérifiant $f(0) = 0$. Pour un élément f de E on pose $T(f)$ la fonction définie par

$$T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt$$

Montrer que T est un endomorphisme de E et trouver ses valeurs propres.

Exercice 72 [03291] [correction]

a) Montrer que, pour $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ avec $z_1 \neq 0$, on a l'égalité

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$$

si, et seulement si, il existe $n-1$ réels positifs $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que

$$\forall k \geq 2, z_k = \alpha_k z_1$$

- Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M^n = I_n$ et $\text{tr} M = n$

Exercice 73 [00520] [correction]

Soient x_1, x_2, \dots, x_{n+2} des vecteurs d'un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer qu'il est impossible que

$$\forall i \neq j, (x_i | x_j) < 0$$

On pourra commencer par les cas $n = 1$ et $n = 2$

Exercice 74 [01332] [correction]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (P, Q) \in E^2 \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$$

a) Justifier la définition de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

On pose $F = \{P \in E, P(0) = 0\}$. On cherche à déterminer $d(1, F)$. On note (P_0, \dots, P_n) l'orthonormalisée de Schmidt de $(1, X, \dots, X^n)$.

b) Calculer $P_k(0)^2$.

c) Déterminer une base de F^\perp que l'on exprimera dans la base (P_0, \dots, P_n) . En déduire $d(1, F^\perp)$ et $d(1, F)$.

Exercice 75 [02666] [correction]

Montrer l'existence et l'unicité de $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = \int_0^1 A(t)P(t) dt$$

Montrer que A est de degré n .

Exercice 76 [02733] [correction]

Soient $c \in \mathbb{R}$, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, v_1, \dots, v_n des vecteurs unitaires de E deux à deux distincts tels que :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, i \neq j \Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = c$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur c pour que (v_1, \dots, v_n) soit nécessairement liée.

Exercice 77 [02734] [correction]

Calculer le minimum de $\int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$ pour a, b, c parcourant \mathbb{R} .

Exercice 78 [02735] [correction]

Calculer

$$\inf \left\{ \int_0^1 t^2 (\ln t - at - b)^2 dt, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 79 [02736] [correction]

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire rendant orthonormée la base canonique, dont on note $\| \cdot \|$ la norme associée. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bJ\|$.

Exercice 80 [01330] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = A^tA$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

a) Montrer que ${}^tAA = 0$.

b) En déduire que $A = 0$.

Exercice 81 [02730] [correction]

Soit E un espace euclidien. Quels sont les endomorphismes de E tels que pour tout sous-espace vectoriel V de E

$$f(V^\perp) \subset (f(V))^\perp ?$$

Exercice 82 [02731] [correction]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note \mathcal{M} l'espace vectoriel réel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose

$$\varphi : (A, B) \in \mathcal{M}^2 \mapsto \text{tr}^t AB$$

a) Montrer que φ est un produit scalaire.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\Omega \in \mathcal{M}$ pour que $M \mapsto \Omega M$ soit φ -orthogonale.

Exercice 83 [02737] [correction]

Soit E un espace vectoriel réel euclidien orienté de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer l'équivalence de :

(i) $f^* = -f$;

(ii) il existe $w \in E$ tel que $f(x) = w \wedge x$ pour tout $x \in E$.

Exercice 84 [02738] [correction]

Soit E un espace euclidien de norme $\| \cdot \|$, u dans $\mathcal{L}(E)$ et $\| \cdot \|_{\mathcal{L}(E)}$ la norme sur $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à $\| \cdot \|$.

a) Comparer $\|u\|_{\mathcal{L}(E)}$ et $\|u^*\|_{\mathcal{L}(E)}$.

b) Si $\|u\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$, comparer $\ker(u - \text{Id})$ et $\ker(u^* - \text{Id})$.

c) Si $\|u\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$, montrer $E = \ker(u - \text{Id}) \oplus \text{Im}(u - \text{Id})$.

Exercice 85 [02739] [correction]

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ u = 0$. Montrer

$$\text{Im}u = \ker u \Leftrightarrow u + u^* \in \text{GL}(E)$$

Exercice 86 [02740] [correction]

Dans un espace euclidien E , soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que deux des trois propriétés suivantes entraînent la troisième :

- (i) f est une isométrie ;
- (ii) $f^2 = -\text{Id}$;
- (iii) $f(x)$ est orthogonal à x pour tout x .

Exercice 87 [02741] [correction]

Soit $K \in \mathcal{C}([0, 1]^2, \mathbb{R})$ non nulle telle que $\forall (x, y) \in [0, 1]^2, K(x, y) = K(y, x)$. On note $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, soit

$$\Phi(f) : x \in [0, 1] \rightarrow \int_0^1 K(x, y)f(y)dy \in \mathbb{R}$$

- a) Vérifier que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.
- b) L'application Φ est-elle continue pour $\|\cdot\|_\infty$? pour $\|\cdot\|_1$?
- c) Montrer que Φ est autoadjoint pour le produit scalaire associé à $\|\cdot\|_2$ sur E .
Soit

$$\Omega = \left[\max_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 |K(x, y)| dy \right]^{-1}$$

- d) Montrer $\forall \lambda \in]-\Omega, \Omega[, \forall h \in E, \exists ! f \in E, h = f - \lambda \Phi(f)$
- e) Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, montrer que :

$$\dim \ker(\Phi - \lambda \text{Id}) \leq \frac{1}{\lambda^2} \iint_{[0, 1]^2} K(x, y)^2 dx dy$$

Exercice 88 [02742] [correction]

Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Que peut-on dire de $\exp A$?

Exercice 89 [02743] [correction]

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice réelle orthogonale. Montrer que

$$\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n$$

Exercice 90 [02744] [correction]

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de A .
a) Etudier la convergence de

$$\frac{1}{p+1} (I_n + A + \dots + A^p)$$

lorsque $p \rightarrow +\infty$.

b) La suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 91 [02745] [correction]

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \sigma = ab + bc + ca, S = a + b + c$ et

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

a) Montrer :

$$M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma = 0 \text{ et } S \in \{-1, 1\}$$

b) Montrer :

$$M \in \text{SO}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma = 0 \text{ et } S = 1$$

c) Montrer que M est dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe $k \in [0, 4/27]$ tel que a, b et c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$.

Exercice 92 [02746] [correction]

Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Quelles sont les A de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $J + A$ soit inversible ?

Exercice 93 [02747] [correction]

Soit

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$.

Montrer que

$$(\det A)^2 = (\det D)^2$$

Exercice 94 [02748] [correction]On note $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n . Pour toute famille $u = (u_1, \dots, u_p) \in (\mathbb{R}^n)^p$ on pose

$$M_u = ((u_i | u_j))_{1 \leq i, j \leq p}$$

a) Montrer que (u_1, \dots, u_p) est libre si, et seulement si, M_u est inversible.b) On suppose qu'il existe $u = (u_1, \dots, u_p)$ et $v = (v_1, \dots, v_p)$ telles que $M_u = M_v$.Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ telle que $f(u_i) = f(v_i)$ pour tout i .**Exercice 95** [02749] [correction]

[Transformation de Cayley]

a) Si A est une matrice antisymétrique réelle, que peut-on dire des valeurs propres complexes de A ?

b) Soit

$$\varphi : A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$$

Montrer que φ réalise une bijection de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sur

$$\{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) / -1 \notin \text{Sp}(\Omega)\}$$

Exercice 96 [02750] [correction]Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie $M^p = I_n$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, que vaut M^2 ?**Exercice 97** [02751] [correction]Montrer que le rang de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est égal au nombre de valeurs propres non nulles (comptées avec leur ordre de multiplicité) de tAA .**Exercice 98** [02757] [correction]Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Trouver $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que ${}^tPJP = D$.**Exercice 99** [02758] [correction]a) Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, φ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E et f dans $\mathcal{L}(E)$ telle que

$$\forall x, y \in E, \varphi(f(x), y) = -\varphi(x, f(y))$$

Montrer que f est de rang pair.b) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que le commutant de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de codimension paire.**Exercice 100** [02926] [correction]Soient p, q, r des réels et

$$A = \begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{pmatrix}$$

Montrer que A est une matrice de rotation si, et seulement si, p, q, r sont les trois racines d'un polynôme de la forme $X^3 - X^2 + a$ où a est à préciser. Indiquer les éléments de la rotation.**Exercice 101** [02927] [correction]On considère des réels a, b, c . On pose

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab - c & ac + b \\ ab + c & b^2 & bc - a \\ ac - b & bc + a & c^2 \end{pmatrix}$$

a) A quelle condition A est-elle orthogonale ?b) Cette condition étant réalisée, reconnaître l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice canonique A .**Exercice 102** [02753] [correction]Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique défini positif. Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^4 \leq \langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(x), x \rangle$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité.

Exercice 103 [02754] [correction]

a) Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit A_1, \dots, A_k des éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des réels. On pose

$$A = \sum_{i=1}^k \lambda_i A_i \text{ et } B = \sum_{i=1}^k |\lambda_i| A_i$$

b) Montrer que, pour $X \in \mathbb{R}^n$,

$$|{}^t X A X| \leq {}^t X B X$$

c) Montrer que

$$|\det A| \leq \det B$$

Exercice 104 [02755] [correction]

Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

a) Montrer l'existence de $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = A^{-1}$.

b) On pose $D = C B C$. Montrer que

$$(\det(I + D))^{1/n} \geq 1 + (\det D)^{1/n}$$

c) Montrer que

$$(\det(A + B))^{1/n} \geq (\det A)^{1/n} + (\det B)^{1/n}$$

Exercice 105 [02756] [correction]

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

a) Montrer que si A est définie positive alors il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = {}^t P P$ et $B = {}^t P D P$.

b) Montrer que $(\det A)^t (\det B)^{1-t} \leq \det(tA + (1-t)B)$ pour tout $t \in]0, 1[$.

Exercice 106 [02759] [correction]

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}(AU) \leq \text{tr} A$.

a) Déterminer le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

b) Soit $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\exp(xB) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

c) Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

d) Etudier la réciproque.

e) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il existe $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = S U$.

Exercice 107 [02760] [correction]

Montrer que le déterminant d'une matrice symétrique réelle définie positive est majoré par le produit de ses éléments diagonaux.

Exercice 108 [02761] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est symétrique positive si, et seulement si, il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^t P P$.

Montrer que A est symétrique définie positive si, et seulement si, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^t P P$.

Exercice 109 [02762] [correction]

Soit sur \mathbb{R}^n la forme quadratique

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n, i \neq j} x_i x_j$$

Trouver son rang.

Exercice 110 [02763] [correction]

On pose, pour $X \in \mathbb{R}^n$,

$$q(X) = \det \begin{pmatrix} 0 & {}^t X \\ X & A \end{pmatrix}$$

où A est une matrice symétrique réelle définie positive d'ordre n . Montrer que q est une forme quadratique définie négative (indice : commencer par le cas où A est diagonale).

Exercice 111 [02764] [correction]

Condition sur α pour que la forme quadratique Q_α définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, Q_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \alpha \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

soit définie positive ?

Exercice 112 [02765] [correction]

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel et q une forme quadratique sur E de forme polaire B ,

$$C_q = \{x \in E, q(x) = 0\} \text{ et } N_q = \{x \in E, \forall y \in E, B(x, y) = 0\}$$

Montrer que $C_q = N_q$ si, et seulement si, q est positive ou négative.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

Supposons $AH = H$.

$$\forall a \in A, a = ae \in AH = H$$

donc $A \subset H$.

Supposons $A \subset H$. Pour $x \in AH$, $x = ah$ avec $a \in A$, $h \in H$. Or $a, h \in H$ donc $x = ah \in H$.

Ainsi $AH \subset H$.

Inversement, pour $a \in A$ (il en existe car $A \neq \emptyset$) et pour tout $h \in H$, $h = a(a^{-1}h)$ avec $a^{-1}h \in H$ donc $h \in AH$. Ainsi $H \subset AH$ puis $=$.

Exercice 2 : [énoncé]

Il est classique d'établir que le groupe (G, \cdot) est abélien.

Pour $\bar{0}, \bar{1} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $x \in G$, posons $\bar{0}.x = e$ et $\bar{1}.x = x$. On définit ainsi un produit extérieur sur G qui munit le groupe abélien (G, \cdot) d'une structure de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espace vectoriel. De plus cet espace est de dimension finie car $\text{Card}G < +\infty$, il est donc isomorphe à $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +, \cdot)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier (G, \cdot) est isomorphe à $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$.

Exercice 3 : [énoncé]

Par l'absurde, supposons qu'il n'y ait qu'un nombre fini de nombres premiers de la forme $4n + 3$. Posons N le produit de ceux-ci et considérons l'entier $4N - 1$. $4N - 1$ est impair donc 2 ne le divise pas.

Si tous les facteurs premiers de $4N - 1$ sont égaux à 1 modulo 4 alors

$$4N - 1 \equiv 1 \pmod{4} \text{ ce qui est absurde.}$$

L'un au moins des facteurs premiers de $4N - 1$ est alors de la forme $4n + 3$ et donc celui-ci apparaît dans le produit N .

Ce facteur premier divise $4N - 1$ et il divise N , il divise donc -1 , c'est absurde.

Exercice 4 : [énoncé]

On peut écrire

$$n = 2^k(2p + 1)$$

On a alors

$$a^n + 1 = b^{2p+1} - (-1)^{2p+1} = (b + 1)c$$

avec $b = a^{2^k}$.

On en déduit que $b + 1 \mid a^n + 1$, or $a^n + 1$ est supposé premier et $b + 1 > 1$ donc $b + 1 = a^n + 1$ puis $n = 2^k$.

Exercice 5 : [énoncé]

a) Quitte à échanger, supposons $n < m$.

On remarque que

$$(F_n - 1)^{2^{m-n}} = F_m - 1$$

En développant cette relation par la formule du binôme, on parvient à une relation de la forme

$$F_m + vF_n = 2$$

avec $v \in \mathbb{Z}$ car les coefficients binomiaux sont des entiers.

On en déduit que $\text{pgcd}(F_n, F_m) = 1$ ou 2.

Puisque F_n et F_m ne sont pas tous deux pairs, ils sont premiers entre eux.

b) Les F_n sont en nombre infini et possèdent des facteurs premiers distincts, il existe donc une infinité de nombres premiers.

Exercice 6 : [énoncé]

a) L'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de cardinal $\varphi(n)$.

b) $k \binom{p}{k} = p \binom{p-1}{k-1}$ donc $p \mid k \binom{p}{k}$ or $p \wedge k = 1$ donc $p \mid \binom{p}{k}$.

c) Posons $d = (n-1) \wedge \varphi(n)$. $d = (n-1)u + \varphi(n)v$ donc $a^d = 1 \pmod{n}$. Or $d \mid n-1$ donc nécessairement $d = n-1$. Par suite $n-1 \mid \varphi(n)$ puis $\varphi(n) = n-1$ ce qui entraîne que n est premier.

Exercice 7 : [énoncé]

Si $p = 2$: il y a deux carrés dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Si $p \geq 3$, considérons l'application $\varphi : x \mapsto x^2$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: $\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow x = \pm y$.

Dans $\text{Im}\varphi$, seul 0 possède un seul antécédent, les autres éléments possèdent deux antécédents distincts. Par suite $\text{Card}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = 1 + 2(\text{Card}\text{Im}\varphi - 1)$ donc il y a $\frac{p+1}{2}$ carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 8 : [énoncé]

a) Facile.

b) J_p idéal de Z_p : facile.

Soit I un idéal de Z_p . On suppose $I \not\subset J_p$, il existe donc un élément $a/b \in I$ vérifiant $a/b \notin J_p$. Par suite p ne divise ni a , ni b et donc $b/a \in Z_p$ de sorte que a/b est inversible dans Z_p . Ainsi l'idéal contient un élément inversible, donc par absorption il possède 1 et enfin il est égal à Z_p .

c) Pour $k \in \mathbb{N}$, posons J_{p^k} l'ensemble des a/b où $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $p^k \mid a$ et p ne divise pas b . On vérifie aisément que J_{p^k} est un idéal de Z_p .

Soit I un idéal de Z_p . Posons

$k = \max \{ \ell / \forall x \in I, \exists (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, x = a/b, p^\ell \mid a, p \text{ ne divise pas } b \}$.

On a évidemment $I \subset J_{p^k}$.

Inversement, il existe $x = a/b \in I$ avec $p^k \mid a, p^{k+1}$ ne divise pas a et p ne divise pas b .

On peut écrire $a = p^k a'$ avec p qui ne divise pas a' , et donc on peut écrire $x = p^k x'$ avec $x' = a'/b$ inversible dans Z_p . Par suite tout élément de J_{p^k} peut s'écrire xy avec $y \in Z_p$ et donc appartient à I . Ainsi $J_{p^k} \subset I$ puis =.

Finalement les idéaux de Z_p sont les J_{p^k} avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 : [énoncé]

a) $(v \circ u)^2 = v \circ \text{Id}_F \circ u = v \circ u$ donc $v \circ u$ est un projecteur.

b) Le rang d'un projecteur est égal à sa trace donc

$$\text{rg}(v \circ u) = \text{tr}(v \circ u) = \text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(\text{Id}_F) = p$$

On a

$$\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im}v \text{ et } \dim \text{Im}(v \circ u) = \text{rg}(v \circ u) = p \geq \text{rg}(v) = \dim \text{Im}v$$

On en déduit

$$\text{Im}(v \circ u) = \text{Im}v$$

On a

$$\ker u \subset \ker(v \circ u) \text{ et } \dim \ker u = n - \text{rg}u \geq n - p = n - \text{rg}(v \circ u) = \dim \ker(v \circ u)$$

donc

$$\ker(v \circ u) = \ker u$$

Exercice 10 : [énoncé]

a) Il est clair que K est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R} et que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est \mathbb{Q} -génératrice.

Montrons qu'elle est libre en raisonnant par l'absurde.

Supposons $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ non tous nuls.

Quitte à réduire au même dénominateur, on peut supposer $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ non tous nuls.

Quitte à factoriser, on peut aussi supposer $\text{pgcd}(a, b, c, d) = 1$.

On a $(a + b\sqrt{2})^2 = (c\sqrt{3} + d\sqrt{6})^2$ donc $a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2 = 3c^2 + 6cd\sqrt{2} + 6d^2$.

$$\text{Par l'irrationalité de } \sqrt{2} \text{ on parvient au système } \begin{cases} a^2 + 2b^2 = 3c^2 + 6d^2 \\ ab = 3cd \end{cases}.$$

Par suite $3 \mid ab$ et $3 \mid a^2 + 2b^2$ donc $3 \mid a$ et $3 \mid b$.

Ceci entraîne $3 \mid cd$ et $3 \mid c^2 + 2d^2$ donc $3 \mid c$ et $3 \mid d$.

Ceci contredit $\text{pgcd}(a, b, c, d) = 1$.

Ainsi la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est \mathbb{Q} -libre et c'est donc une \mathbb{Q} -base de K .

b) Sans peine, on vérifie que \mathbb{K} est un sous-anneau de \mathbb{R} .

Soit $x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \in \mathbb{K}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ non tous nuls.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{(a+b\sqrt{2})+(c\sqrt{3}+d\sqrt{6})} = \frac{a+b\sqrt{2}-(c\sqrt{3}+d\sqrt{6})}{(a^2+2b^2-3c^2-6d^2)+2(ab-3cd)\sqrt{2}} = \frac{a+b\sqrt{2}-(c\sqrt{3}+d\sqrt{6})}{\alpha+\beta\sqrt{2}}$$

puis $\frac{1}{x} = \frac{(a+b\sqrt{2}-(c\sqrt{3}+d\sqrt{6}))(\alpha-\beta\sqrt{2})}{\alpha^2-2\beta^2} \in K$ et donc K est un sous-corps de \mathbb{R} .

Notons que les quantités conjuguées par lesquelles on a ci-dessus multiplié ne sont pas nuls car x est non nul et la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est \mathbb{Q} -libre.

Exercice 11 : [énoncé]

Il est facile de justifier que E est un \mathbb{L} -espace vectoriel sous réserve de bien connaître la définition des espaces vectoriels et de souligner que qui peut le plus, peut le moins...

Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de \mathbb{K} -espace vectoriel E et $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ une base du \mathbb{L} -espace vectoriel \mathbb{K} .

Considérons la famille des $(\lambda_j \vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$. Il est facile de justifier que celle-ci est une famille libre et génératrice du \mathbb{L} -espace vectoriel E . Par suite E est de dimension finie $q = np$.

Exercice 12 : [énoncé]

G possède un supplémentaire de dimension finie H . Considérons alors K supplémentaire de $H \cap F$ dans H . F et K sont supplémentaires dans E et K est de dimension finie donc F est de codimension finie dans E . De plus, G et $H \cap F$ étant supplémentaires dans F , on peut dire que G est de codimension finie dans F . Enfin la relation $\dim H = \dim K + \dim H \cap G$ se relit $\text{codim}_E G = \text{codim}_E F + \text{codim}_F G$.

Exercice 13 : [énoncé]

a) Si $y \in f(\sum_{i=1}^n E_i)$ alors on peut écrire $y = f(x_1 + \dots + x_n)$ avec $x_i \in E_i$. On alors

$$y = f(x_1) + \dots + f(x_n) \text{ avec } f(x_i) \in f(E_i) \text{ et ainsi } f(\sum_{i=1}^n E_i) \subset \sum_{i=1}^n f(E_i).$$

Si $y \in \sum_{i=1}^n f(E_i)$ alors on peut écrire $y = f(x_1) + \dots + f(x_n)$ avec $x_i \in E_i$. On a

alors $y = f(x)$ avec $x = x_1 + \dots + x_n \in \sum_{i=1}^n E_i$ donc $f(\sum_{i=1}^n E_i) \supset \sum_{i=1}^n f(E_i)$.

b) Si $f(x_1) + \dots + f(x_n) = 0$ avec $x_i \in E_i$ alors $f(x_1 + \dots + x_n) = 0$ donc $x_1 + \dots + x_n = 0$ car f injective puis $x_1 = \dots = x_n = 0$ car les E_i sont en somme directe et enfin $f(x_1) = \dots = f(x_n) = 0$. Ainsi les $f(E_i)$ sont en somme directe.

c) Soit $x \in \sum_{j=1}^p f^{-1}(F_j)$. On peut écrire $x = x_1 + \dots + x_p$ avec $f(x_j) \in F_j$ donc

$$f(x) = f(x_1) + \dots + f(x_p) \in \sum_{j=1}^p F_j. \text{ Ainsi } \sum_{j=1}^p f^{-1}(F_j) \subset f^{-1}\left(\sum_{j=1}^p F_j\right).$$

On obtient une inclusion stricte en prenant par exemple pour f une projection sur une droite D et en prenant F_1, F_2 deux droites distinctes de D et vérifiant $D \subset F_1 + F_2$.

$f = 0$ ou $f = \text{Id}$ sont des conditions suffisantes faciles...

Plus finement, supposons chaque F_j inclus dans $\text{Im} f$ (et $p \geq 1$)

Pour $x \in f^{-1}\left(\sum_{j=1}^p F_j\right)$, on peut écrire $f(x) = y_1 + \dots + y_p$ avec $y_j \in F_j$. Or

$F_j \subset \text{Im} f$ donc il existe $x_j \in E$ vérifiant $f(x_j) = y_j$. Evidemment $x_j \in f^{-1}(F_j)$.

Considérons alors $x'_1 = x - (x_2 + \dots + x_p)$, on a $f(x'_1) = y_1$ donc $x'_1 \in f^{-1}(F_1)$ et

$x = x'_1 + x_2 + \dots + x_p \in \sum_{j=1}^p f^{-1}(F_j)$. Ainsi $f^{-1}\left(\sum_{j=1}^p F_j\right) \subset \sum_{j=1}^p f^{-1}(F_j)$ puis

l'égalité.

Exercice 14 : [énoncé]

Facilement $\text{Im}(f+g) \subset \text{Im} f + \text{Im} g$ donc $\text{rg}(f+g) \leq \dim(\text{Im} f + \text{Im} g) \leq \text{rg} f + \text{rg} g$.

Puisque $f = f + g + (-g)$, $\text{rg} f \leq \text{rg}(f+g) + \text{rg}(-g) = \text{rg}(f+g) + \text{rg} g$.

Aussi $\text{rg} g \leq \text{rg}(f+g) + \text{rg} f$ donc $|\text{rg} f - \text{rg} g| \leq \text{rg}(f+g)$.

Exercice 15 : [énoncé]

Pour $f \in E^*$ et $g \in F^*$, posons $f \otimes g$ l'application définie sur $E \times F$ par

$(f \otimes g)(x, y) = f(x) + g(y)$. Il est facile d'observer $f \otimes g \in (E \times F)^*$. Considérons

$\varphi : E^* \times F^* \rightarrow (E \times F)^*$ définie par $\varphi(f, g) = f \otimes g$.

L'application φ est linéaire.

Si $\varphi(f, g) = 0$ alors pour tout $(x, y) \in E \times F$, $f(x) + g(y) = 0$.

Pour $y = 0$, on peut affirmer $f = 0$ et pour $x = 0$, on affirme $g = 0$. Ainsi

$(f, g) = (0, 0)$ et donc φ est injective.

Soit $h \in (E \times F)^*$. Posons $f : x \mapsto h(x, 0)$, $g : y \mapsto h(0, y)$. On vérifie aisément

$f \in E^*$, $g \in F^*$ et $\varphi(f, g) = h$ car $h(x, y) = h(x, 0) + h(0, y)$.

Exercice 16 : [énoncé]

Il est clair que les F_j sont éléments de $(\mathbb{R}_n[X])^*$ espace de dimension $n+1$. Pour conclure il suffit d'observer la liberté de la famille (F_0, \dots, F_n) .

Supposons $\lambda_0 F_0 + \dots + \lambda_n F_n = 0$. En appliquant cette égalité aux polynômes

$1, 2X, \dots, (n+1)X^n$ on obtient les équations formant le système linéaire :

$$\begin{cases} \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \\ \lambda_0 a_0^2 + \dots + \lambda_n a_n^2 = 0 \\ \dots \\ \lambda_0 a_0^{n+1} + \dots + \lambda_n a_n^{n+1} = 0 \end{cases}$$

Par un déterminant de Vandermonde, ce système est de Cramer ce qui entraîne

$\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$.

Exercice 17 : [énoncé]

Supposons la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ libre.

On peut compléter cette famille en une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ du dual E^* de E .

Notons (e_1, \dots, e_n) la base de E antédual de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$. Pour

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p \in E$$

on vérifie aisément

$$\forall 1 \leq j \leq p, \varphi_j(x) = \lambda_j$$

Inversement, supposons la propriété

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \exists x \in E, \forall 1 \leq j \leq p, \varphi_j(x) = \lambda_j$$

Montrons que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est libre.

Supposons

$$\alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_p \varphi_p = \tilde{0}$$

Par la propriété hypothèse, pour chaque $j \in \{1, \dots, p\}$, il existe $x \in E$ vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \varphi_i(x) = \delta_{i,j}$$

La relation $\alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_p \varphi_p = \tilde{0}$ évaluée en x donne alors

$$\alpha_j = 0$$

et on peut donc affirmer que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est libre.

Exercice 18 : [énoncé]

Les inclusions suivantes sont toujours vraies

$$F \subset h^{-1}(h(F)) \text{ et } h(h^{-1}(F)) \subset F$$

Si $h^{-1}(h(F)) = h(h^{-1}(F))$ alors

$$h^{-1}(h(F)) = F \text{ et } h(h^{-1}(F)) = F$$

Les inclusions $h^{-1}(h(F)) \subset F$ et $F \subset h(h^{-1}(F))$ entraînent respectivement $\ker h \subset F$ et $F \subset \text{Im}h$.

Inversement, supposons

$$\ker h \subset F \subset \text{Im}h$$

Pour $x \in h^{-1}(h(F))$, il existe $a \in F$ tel que $h(x) = h(a)$. On a alors $x - a \in \ker h \subset F$ et donc $x = a + (x - a) \in F$. Ainsi $h^{-1}(h(F)) \subset F$ puis $h^{-1}(h(F)) = F$

Aussi pour $y \in F \subset \text{Im}h$, il existe $a \in E$ tel que $y = h(a)$ et puisque $y \in F$, $a \in h^{-1}(F)$. Ainsi $F \subset h(h^{-1}(F))$ puis $F = h(h^{-1}(F))$.

Finalement

$$h^{-1}(h(F)) = h(h^{-1}(F))$$

Exercice 19 : [énoncé]

Soit

$$p = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g$$

On a

$$p \circ p = \frac{1}{n^2} \sum_{h \in G} \sum_{g \in G} h \circ g = \frac{1}{n^2} \sum_{h \in G} \sum_{k \in G} k = \frac{1}{n} \sum_{k \in G} k = p$$

donc p est un projecteur et la dimension de $\text{Imp } p = \ker(p - \text{Id})$ est

$$\text{tr}p = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g$$

Pour tout $g \in G$, on a $g \circ p = p$ donc si x est invariant par p il est aussi par g . Ainsi

$$\ker(p - \text{Id}) \subset \bigcap_{g \in G} \ker(g - \text{Id})$$

L'inclusion inverse étant immédiate, on conclut

$$\bigcap_{g \in G} \ker(g - \text{Id}) = \ker(p - \text{Id})$$

puis l'égalité

$$\dim \left(\bigcap_{g \in G} \ker(g - \text{Id}_E) \right) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \text{tr}g$$

Exercice 20 : [énoncé]

a) $G \subset \text{GL}_4(\mathbb{R})$, G est non vide, stable par passage à l'inverse et par produit car V l'est. Ainsi G est un sous-groupe de $\text{GL}_4(\mathbb{R})$ donc un groupe.

b) Si $M \in G$ alors $\det M, \det M^{-1} \in \mathbb{Z}$ et $\det M \times \det M^{-1} = \det I_4 = 1$ donc $\det M = \pm 1$.

Inversement si $\det M = \pm 1$ alors $M^{-1} = {}^t \text{com}M \in V$ donc $M \in G$.

c)

$$\det M = ((a + c)^2 - (b + d)^2)((a - c)^2 + (b - d)^2)$$

donc

$$\det M = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (a + c)^2 - (b + d)^2 = \pm 1 \\ (a - c)^2 + (b - d)^2 = \pm 1 \end{cases}$$

La résolution de ce système à coefficients entiers donne à l'ordre près :

$a, b, c, d = \pm 1, 0, 0, 0$.

Posons J la matrice obtenue pour $a = c = d = 0$ et $b = 1$. On vérifie $J^4 = I_4$.

L'application $\varphi : U_2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow G$ définie par $\varphi(\varepsilon, n) = \varepsilon J^n$ est bien définie, c'est un morphisme de groupe, injectif et surjectif. Ainsi G est isomorphe à $U_2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou plus élégamment à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exercice 21 : [énoncé]

a) Posons $p = \sum_{g \in G} g$. $p^2 = \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} gh$. Or pour $g \in G$, l'application $h \mapsto gh$ est une

permutation du groupe G donc $\sum_{h \in G} gh = p$ et par suite $p^2 = \text{Card}G \cdot p$.

Par suite $\frac{1}{\text{Card}G} p$ est une projection vectorielle et puisque son rang égale sa trace, $\text{rg}p = 0$. Ainsi $p = 0$.

b) Considérons $\varphi(x, y) = \sum_{g \in G} (g(x) | g(y))$. φ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n pour

lequel on a $\forall h \in G, h^* = h^{-1}$. Pour ce produit scalaire, V^\perp est un supplémentaire de V stable pour tout h^{-1} avec h élément de G donc stable pour tout élément de G .

Exercice 22 : [énoncé]

Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $u \det A + v \det B = 1$. $U = u^t(\text{com}A)$ et $V = v^t(\text{com}B)$ conviennent alors.

Exercice 23 : [énoncé]

Si $f = 0$ alors $f \circ g = 0$.

Sinon il existe une base de \mathbb{R}^2 dans laquelle la matrice de f est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de g commutant avec f est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

et puisque $g^2 = 0$, $a = 0$.

Par suite la matrice de $f \circ g$ est nulle.

Exercice 24 : [énoncé]

a)

$$f(E_{i,i}) = f(E_{i,j}E_{j,i}) = f(E_{j,i}E_{i,j}) = f(E_{j,j})$$

et si $i \neq j$,

$$f(E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{j,j}) = f(E_{j,j}E_{i,j}) = f(0) = 0$$

Ainsi

$$f(A) = f\left(\sum a_{i,j}E_{i,j}\right) = \lambda \operatorname{tr} A$$

en notant λ la valeur commune des $f(E_{i,i})$.

b) Posons $f = \operatorname{tr} \circ g$. f est une forme linéaire vérifiant $f(AB) = f(BA)$ donc $f = \lambda \operatorname{tr}$.

Or $f(I) = \operatorname{tr} g(I) = \operatorname{tr} I$ donc $\lambda = 1$. Ainsi $f = \operatorname{tr}$ et

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(g(M)) = \operatorname{tr}(M)$$

Exercice 25 : [énoncé]

Supposons A inversible. Puisque A et B commutent, A^{-1} et B aussi. Comme B est nilpotente, $-A^{-1}B$ l'est aussi. Or il est classique d'observer que si N est nilpotente, $I - N$ est inversible d'inverse $I + N + \dots + N^{p-1}$ avec p l'ordre de nilpotence de N . Ainsi $I + A^{-1}B$ est inversible et $A + B = A(I + A^{-1}B)$ aussi. Supposons $A + B$ inversible, puisque $-B$ est nilpotente et commute avec $A + B$, $A = A + B - B$ est inversible.

Exercice 26 : [énoncé]

F_ω est clairement un endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Sa matrice dans la base $(1, X, \dots, X^{n-1})$ est $A = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n-1}$ avec $a_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{ij}$. On remarque que

$$\bar{A}A = I_n \text{ car } \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(j-i)k} = \delta_{i,j}. \text{ Par suite } F_\omega \text{ est un automorphisme et } F_\omega^{-1}$$

étant représenté par \bar{A} , $F_\omega^{-1}(P) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^{-k})X^k$.

Exercice 27 : [énoncé]

En étudiant l'égalité $AM = MA$, on justifie $C(A) = D_n(\mathbb{C})$. $C(A)$ est donc un sous-espace vectoriel de dimension n . De plus il contient évidemment les éléments A^k pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$ (et, plus généralement, tout polynôme en A).

Supposons

$$\lambda_0 I + \lambda_1 A + \dots + \lambda_{n-1} A^{n-1} = 0$$

Le polynôme $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{n-1} X^{n-1}$ est annulateur de A , donc les $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ qui sont valeurs propres de A sont aussi racines de P qui possède alors plus de racines que son degré. On peut alors affirmer $P = 0$ puis

$$\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1} = 0.$$

La famille $(A^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une famille libre à n éléments de $C(A)$, c'en est donc une base

Exercice 28 : [énoncé]

Il existe $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $PA = BP$. En posant $Q = \operatorname{Re}(P)$ et $R = \operatorname{Im}(P)$ on obtient $QA + iRA = BQ + iBR$ donc $QA = BQ$ et $RA = BR$ car A, B, Q, R réelles. Cependant on ne sait pas si Q ou R sont inversibles. Or pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(Q + \lambda R)A = B(Q + \lambda R)$ et $\lambda \mapsto \det(Q + \lambda R)$ est une fonction polynomiale non nulle car $\det(Q + iR) \neq 0$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q + \lambda R$ est inversible et on peut conclure.

Exercice 29 : [énoncé]

En retirant la première colonne aux autres puis en développant selon cette première colonne, on obtient que

$$\begin{vmatrix} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{vmatrix} = \alpha x + \beta$$

avec α, β réels qu'il ne reste plus qu'à calculer...

$$\alpha = \left| \begin{array}{ccc} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{array} \right|_{x=0} = \hat{a}_1 a_2 \dots a_n + \dots + a_1 \dots a_{n-1} \hat{a}_n$$

et

$$\beta = \left| \begin{array}{ccc} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{array} \right|_{x=0} = a_1 \dots a_n$$

Exercice 30 : [\[énoncé\]](#)

Supposons A inversible.

Par opérations par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}C \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & D - BA^{-1}C \end{pmatrix}$$

Or A^{-1} et C commutent donc

$$\left| \begin{array}{cc} A & C \\ B & D \end{array} \right| = \det A \times \det(D - BCA^{-1}) = \det(DA - BC)$$

Supposons A non inversible.

Pour p assez grand, $A_p = A + \frac{1}{p}I$ est inversible et commute avec C donc

$$\det \begin{pmatrix} A_p & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA_p - BC)$$

puis à la limite quand $p \rightarrow +\infty$,

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC)$$

Exercice 31 : [\[énoncé\]](#)

Notons que pour $n = 1$: la relation $\det(A + X) = \det A + \det X$ est vraie pour tout A et tout X .

On suppose dans la suite $n \geq 2$.

Pour $X = A$, la relation $\det(A + X) = \det A + \det X$ donne $2^n \det A = 2 \det A$ et donc $\det A = 0$.

La matrice A n'est donc pas inversible et en posant $r < n$ égal à son rang, on peut écrire $A = QJ_rP$ avec P, Q inversibles et

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & O_{n-r} \end{pmatrix}$$

Posons alors $X = QJ'_rP$ avec

$$J'_r = \begin{pmatrix} O_r & (0) \\ (0) & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

Puisque $A + X = QI_nP = QP$, la matrice $A + X$ est inversible et donc $\det X = \det(A + X) \neq 0$.

On en déduit que la matrice J'_r est l'identité et donc $r = 0$ puis $A = O_n$.

Exercice 32 : [\[énoncé\]](#)

On remarque

$$C^3 - C^2 = 3A + 3B = 3C$$

La matrice C annule donc le polynôme

$$X^3 - X^2 - 3X$$

On vérifie aisément que ce polynôme est scindé à racines simples et on peut donc affirmer que C est diagonalisable.

Or

$$A = C^3 - 2C^2 \text{ et } B = C + 2C^2 - C^3$$

donc A et B sont diagonalisables.

Exercice 33 : [\[énoncé\]](#)

Le polynôme

$$X^3 - 4X^2 + 4X = X(X - 2)^2$$

est annulateur de M .

On en déduit $\text{Sp}M \subset \{0, 2\}$ et M trigonalisable (car M annule un polynôme scindé).

Par suite $\text{tr}M$ est la somme des valeurs propres de M comptées avec multiplicité et puisque $\text{tr}M = 0$, seul 0 est valeur propre de M .

On en déduit que la matrice $M - 2I_n$ est inversible et puisque

$$M(M - 2I_n)^2 = O_n$$

on obtient

$$M = O_n$$

Exercice 34 : [énoncé]

a) $\text{Sp}A = \{0\}$ et $A \neq O_n$ donc A n'est pas diagonalisable.

b) On remarque $A^n = O_n$ et $A^{n-1} \neq O_n$.

S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = A$ alors $B^{2n} = A^n = O_n$ donc B est nilpotente. Par suite $B^n = O_n$.

Or $B^{2n-2} \neq O_n$ avec $2n-2 \geq n$, c'est absurde.

Exercice 35 : [énoncé]

Considérons $T : P(X) \mapsto P(X+1)$. T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui est annulé par son polynôme caractéristique de la forme $\chi_T = (-1)^n (X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k)$.

Exercice 36 : [énoncé]

$P = X(X^2 - 3aX + a^2)$ est annulateur de f donc par le théorème de décomposition des noyaux, $E = \ker f \oplus \ker(f^2 - 3af + a^2\text{Id})$ car X et $X^2 - 3aX + a^2$ sont premiers entre eux. Or a étant non nul, on montre élémentairement $\ker(f^2 - 3af + a^2\text{Id}) \subset \text{Im}f$ tandis que l'inclusion réciproque provient de ce que $(f^2 - 3af + a^2\text{Id}) \circ f = 0$. Il est donc vrai que $\ker f$ et $\text{Im}f$ sont supplémentaires.

Exercice 37 : [énoncé]

On a

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, (A + 2^k B)^n = O_n$$

Considérons alors la matrice

$$(A + XB)^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$$

Celle-ci est à coefficients polynomiaux de degrés inférieurs à n . Puisque $1, 2, \dots, 2^n$ sont $n+1$ racines distinctes de ces coefficients, ceux-ci sont tous nuls. On en déduit

$$A^n = O_n$$

car les coefficients constants sont nuls, et

$$B^n = O_n$$

car les coefficients des termes X^n sont nuls.

Exercice 38 : [énoncé]

La colonne ${}^t(1 \ 1 \ 1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre 6.

Les deux matrices ont le même polynôme caractéristique et celui-ci a pour racines

$$6, \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$$

Ces deux matrices sont semblables à

$$\text{diag} \left(6, \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2} \right)$$

et donc a fortiori semblables entre elles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, mais aussi, et c'est assez classique, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 39 : [énoncé]

Il est classique d'établir $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ en commençant par établir le résultat pour A inversible et le prolongeant par un argument de continuité et de densité.

Exercice 40 : [énoncé]

Dans le cas où

$$A = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la propriété est immédiate en écrivant

$$B = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}$$

avec C bloc carré de taille r .

Dans le cas général, on peut écrire $A = QJ_rP$ avec $r = \text{rg}A$ et P, Q inversibles.

$$X^q \chi_{AB}(X) = X^q \chi_{Q^{-1}ABQ}(X) = X^q \chi_{J_rPBQ}(X)$$

donc

$$X^q \chi_{AB}(X) = X^p \chi_{PBQJ_r}(X) = X^p \chi_{BQJ_rP}(X) = X^p \chi_{BA}(X)$$

Exercice 41 : [énoncé]

a) Oui un tel polynôme existe, il suffit de se référer aux matrices compagnons.

Notons qu'il est entendu, qu'ici, le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A est définie par $\chi_A = \det(XI_n - A)$.

b) Il existe une matrice A dont le polynôme caractéristique est P . Celle-ci est semblable à une matrice triangulaire de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et donc A^q est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda_1^q & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^q \end{pmatrix}$. Ainsi le polynôme caractéristique de A^q est P_q

et puisque A^q est à coefficients entiers, P_q l'est aussi.
 c) Compte tenu des relations coefficients-racines d'un polynôme scindé, on peut majorer les coefficients de P et affirmer que, pour un degré fixé, il n'y a qu'un nombre fini de polynômes P possibles. Considérons un tel polynôme. L'application $q \in \mathbb{N}^* \mapsto P_q$ n'est pas injective compte tenu des résultats précédents, il existe donc $q < r$ tel que $P_q = P_r$. Ainsi, il existe une permutation σ de \mathbb{N}_n vérifiant : $\forall i \in \mathbb{N}_n, \lambda_i^q = \lambda_{\sigma(i)}^r$. A l'aide d'une décomposition en cycles de σ , on peut affirmer qu'il existe une puissance de σ égale à l'identité et donc conclure que pour tout $i \in \mathbb{N}_n$ il existe $q' > q$ tel que $\lambda_i^q = \lambda_i^{q'}$. On peut alors affirmer que λ_i est nul ou bien une racine de l'unité.

Exercice 42 : [énoncé]

- a) $\text{Sp}B = \text{Sp}^t B$ car $\chi_B = \chi_{^t B}$.
- b) Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $A(CX) = \lambda(CX)$ donc $CX \in \ker(A - \lambda I_n)$.
- c) Soit X et Y des vecteurs propres de A et $^t B$ associé à la valeur propre λ . La matrice $C = X^t Y$ est solution.
- d) On peut écrire $C = QJ_r P$ avec P, Q inversibles. La relation $AC = CB$ donne $Q^{-1} A Q J_r = J_r P B P^{-1}$.

En écrivant les matrices $Q^{-1} A Q$ et $P B P^{-1}$ par blocs, l'égalité $Q^{-1} A Q J_r = J_r P B P^{-1}$ impose une décomposition en blocs triangulaire puis permet d'observer que $\chi_A = \chi_{Q^{-1} A Q}$ et $\chi_B = \chi_{P B P^{-1}}$ ont un facteur commun de degré $\geq r$, à savoir le polynôme caractéristique du bloc commun en position (1,1).

e) La réciproque est assurément fautive en toute généralité. Pour $r = n$, deux matrices ayant même polynôme caractéristique ne sont pas nécessairement semblables.

Exercice 43 : [énoncé]

- a) $T(f)(x) = \int_0^x t f(t) dt + x \int_x^1 f(t) dt$ est une fonction continue (et même dérivable).
 Ainsi $T : E \rightarrow E$. La linéarité de T est évidente.
- b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$ vérifiant $T(f) = \lambda f$.

Cas $\lambda = 0$:
 on a $T(f) = 0$, en dérivant deux fois (ce qui s'avère possible) on obtient $f = 0$. Ainsi 0 n'est pas valeur propre de T .

Cas $\lambda \neq 0$:
 on a $T(f) = \lambda f$. En particulier, on peut affirmer que $f(0) = 0$ car $T(f)(0) = 0$. Le premier membre de l'équation $T(f) = \lambda f$ est dérivable donc la fonction f est dérivable et on obtient $\int_x^1 f(t) dt = \lambda f'(x)$. En particulier $f'(1) = 0$. Le premier membre de cette nouvelle équation étant dérivable, la fonction f est deux fois dérivable et on obtient $\lambda f''(x) + f(x) = 0$.

Sous cas $\lambda > 0$:
 Sachant $f(0) = 0$, on obtient par résolution de l'équation différentielle $f(x) = A \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$ et la condition $f'(1) = 0$ n'entraînera pas $f = 0$ que si $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$ i.e. $\lambda = \frac{1}{(k\pi)^2}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.
 Notons qu'alors il est possible de remonter les précédents calculs et d'affirmer que $f : x \mapsto A \sin\left(\frac{x}{k\pi}\right)$, pour $A \neq 0$, est vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = \frac{1}{(k\pi)^2}$.

Sous cas $\lambda < 0$:
 Sachant $f(0) = 0$, la résolution de l'équation différentielle donne $f(x) = A \text{sh}\left(\frac{x}{\sqrt{|\lambda|}}\right)$ et la condition $f'(1) = 0$ entraîne toujours $f = 0$ et donc un tel λ n'est pas valeur propre.

Exercice 44 : [énoncé]

- a) $\chi_A = -(X - 2)(X + 1)^2$,

$$E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -a^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

La matrice A est diagonalisable, $P^{-1} A P = D$ avec

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- On en déduit $\mu_A = (X - 2)(X + 1)$.
- b) Ci-dessus.
- c) Par division euclidienne $X^n = (X + 1)(X - 2)Q(X) + \alpha X + \beta$ avec

$$\alpha = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \text{ et } \beta = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}$$

donc

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2(-1)^n + 2^n}{3} I_3$$

puis

$$e^A = \frac{e^2 - e^{-1}}{3} A + \frac{2e^{-1} + e^2}{3} I_3$$

Exercice 45 : [énoncé]

En posant $M = (a_i a_j)_{1 \leq i, j \leq n}$, on vérifie $M^2 = \lambda M$ avec $\lambda = \sum_{k=1}^n a_k^2$.

Si $\lambda \neq 0$ alors M annule un polynôme scindé simple, elle est donc diagonalisable. Si $\lambda = 0$ alors $M^2 = 0$ et donc M est diagonalisable si, et seulement si, $M = 0$ ce qui revient à $(a_1, \dots, a_n) = 0$.

Exercice 46 : [énoncé]

Étudions la première matrice que nous noterons A . Celle-ci est de rang 2 et on peut facilement déterminer une base de son noyau. En posant le système $AX = \lambda X$ avec $\lambda \neq 0$, on obtient une solution non nulle sous réserve que

$$\lambda^2 - \lambda - (n - 1) = 0$$

En notant λ_1 et λ_2 les deux racines de cette équation, on obtient $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & (0) & 1 & 1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ (0) & & 1 & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \ \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1, \lambda_2)$$

En reprenant la même démarche avec la seconde matrice que nous noterons B , on obtient $B = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & & (0) & 2 & 2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \cdots & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1, \lambda_2)$$

où λ_1, λ_2 sont les deux racines de

$$\lambda^2 - 2\lambda - 2(n - 2) = 0$$

Exercice 47 : [énoncé]

1ère méthode :

Notons $\chi_n(\lambda)$ le polynôme caractéristique de cette matrice de taille n . Par développement du déterminant selon la dernière colonne on obtient

$$\chi_n(\lambda) = (1 - \lambda)\chi_{n-1}(\lambda) - (1 - \lambda)^{n-2}$$

En étudiant les premiers termes de cette suite, on conjecture

$$\chi_n(\lambda) = (1 - \lambda)^n - (n - 1)(1 - \lambda)^{n-2}$$

que l'on vérifie aisément par récurrence. Les valeurs propres de la matrice sont donc 1 (pour $n \geq 3$) et les deux racines $\lambda = 1 \pm \sqrt{n - 1}$.

2ème méthode :

Notons A la matrice étudiée. L'équation $AX = \lambda X$ donne le système

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + x_2 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 = (\lambda - 1)x_2 \\ \vdots \\ x_1 = (\lambda - 1)x_n \end{cases}$$

Pour $\lambda = 1$, on peut obtenir une solution non nulle avec les conditions $x_1 = 0$ et $x_2 + \cdots + x_n = 0$.

Pour $\lambda \neq 1$, le système devient

$$\begin{cases} (n - 1)x_1 = (\lambda - 1)^2 x_1 \\ x_2 = x_1 / (\lambda - 1) \\ \vdots \\ x_n = x_1 / (\lambda - 1) \end{cases}$$

Pour $x_1 = 0$, la solution du système est nulle.

Pour $x_1 \neq 0$, on peut former une solution non nulle à condition que $(\lambda - 1)^2 = n - 1$.

Exercice 48 : [énoncé]

$A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(a + (n - 1)b, a - b, \dots, a - b)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) \\ \vdots & -1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & (0) & & -1 \end{pmatrix}.$$

$B = Q\Delta Q^{-1}$ avec

Si n est impair : $\Delta = \text{diag}(a + (n - 1)b, b - a, \dots, b - a, a - b, \dots, a - b)$ et

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \\ \vdots & (0) & & 1 & (0) & & 1 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & -2 & \dots & -2 \\ \vdots & (0) & & -1 & (0) & & 1 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \\ 1 & -1 & & (0) & 1 & & (0) \end{pmatrix}.$$

Si n pair : $\Delta = \text{diag}(a + (n - 1)b, b - a, \dots, b - a, a - b, \dots, a - b)$ et

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & & -1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & 1 \\ \vdots & (0) & & 1 & (0) & & -1 \\ \vdots & (0) & & -1 & (0) & & -1 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & -1 & \ddots & (0) \\ 1 & -1 & & (0) & 1 & & \end{pmatrix}.$$

Exercice 49 : [énoncé]

a) $M(a, b) = PD(a, b)P^{-1}$ avec $D(a, b) = \text{diag}((a + b)^2, (a - b)^2, a^2 - b^2, a^2 - b^2)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $M(a, b)^n \rightarrow 0$ si, et seulement si, $|a + b| < 1$, $|a - b| < 1$ et $|a^2 - b^2| < 1$.

Or $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ donc la dernière condition l'est automatiquement si les deux premières le sont.

L'étude graphique est alors simple.

Exercice 50 : [énoncé]

A est symétrique donc diagonalisable.

$$\chi_A = (-1)^n (X - (a + (n - 1)b))(X - (a - b))^{n-1}$$

$$\text{Sp}(A) = \{a + (n - 1)b, a - b\} \text{ (si } n \geq 2)$$

$$\pi_A = (X - (a + (n - 1)b))(X - (a - b))$$

A est inversible si, et seulement si, $0 \notin \text{Sp}(A)$ i.e. $a + (n - 1)b \neq 0$ et $a \neq b$.

$$\begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & & (y) \\ & \ddots & \\ (y) & & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & & (\beta) \\ & \ddots & \\ (\beta) & & \alpha \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \alpha = ax + (n - 1)by \\ \beta = ay + bx + (n - 2)by \end{cases}$$

Il suffit alors de résoudre le système

$$\begin{cases} ax + (n - 1)by = 1 \\ bx + (a + (n - 2)b)y = 0 \end{cases}$$

pour expliciter A^{-1} .

Exercice 51 : [énoncé]

$A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(a + b, \dots, a + b, a - b, \dots, a - b)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & (0) & 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ & & 1 & 0 & (0) & & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ (0) & & 1 & 0 & (0) & & -1 \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ 1 & & (0) & 0 & -1 & & (0) \end{pmatrix}$$

Par suite

$$\pi_A = (X - (a + b))(X - (a - b))$$

et les polynômes annulateurs de A sont les multiples de π_A .

Exercice 52 : [énoncé]

A est symétrique donc diagonalisable. $\chi_A = -X^3 + 2X$, $\pi_A = -\chi_A$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^3 = 2A$, $A^{2k+1} = 2^k A$ et $A^{2k+2} = 2^k A^2$ pour $k > 0$.

$$\exp(A) = I_3 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(2k+1)!} A + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{k-1}}{(2k)!} A^2 = I_3 + \operatorname{sh}(2)A + \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(2) - 1)A^2$$

Exercice 53 : [énoncé]

$\chi_A = -X(X^2 + 1)$, $\pi_A = X(X^2 + 1)$, $\exp(A)\exp({}^t A) = \exp(A)\exp(-A) = I_3$.

En calculant A^2, A^3, \dots on obtient

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 1 & -\sin 1 \\ 0 & \sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 54 : [énoncé]

$A^2 = O$ donc $\operatorname{Sp}(A) = \{0\}$.

Puisque $A \neq 0$, A n'est pas diagonalisable. $\pi_A = X^2$ et $\chi_A = -X^3$.

$$\exp(A) = I + A$$

L'étude se généralise pour $n \geq 3$ avec $A = (\omega^{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $\omega \in U_n \setminus \{1\}$.

Exercice 55 : [énoncé]

Si A est solution alors $P = X(X - 2)^2$ est annulateur de A et les valeurs propres de A figurent parmi $\{0, 2\}$. Par la trace, on peut alors affirmer que 2 est valeur propre de multiplicité 4.

Par le lemme de décomposition des noyaux, $\ker(A - 2\operatorname{Id})^2$ et $\ker A$ sont supplémentaires.

Par multiplicité des valeurs propres, leurs dimensions respectives sont 4 et $n - 4$.

Ainsi A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 2I_4 + M & 0 \\ 0 & O_{n-4} \end{pmatrix}$$

avec $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 = 0$.

On raisonnant sur le rang, on montre que M est semblable à

$$O_4, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La réciproque est immédiate.

Exercice 56 : [énoncé]

$X(X - j)(X - j^2)$ annule A donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et puisque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, j et j^2 ont même multiplicité en tant que valeur propre de A .

Puisque le rang de A est la somme de ces deux multiplicités, il est pair.

Exercice 57 : [énoncé]

Soit M solution. $M^4 = {}^t(M^2) = M$ donc $X^4 - X$ est annulateur de M et puisque 0 et 1 ne sont pas valeurs propres de M , $X^3 - 1$ puis $X^2 + X + 1$ sont annulateurs de M .

Ainsi, on peut affirmer $M^3 = {}^t M M = I$ (ainsi $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$) et $M^2 + M + I = 0$. Pour $X \neq 0$, $P = \operatorname{Vect}(X, MX)$ est un plan (car il n'y a pas de valeurs propres réelles) stable par M (car $M^2 = -M - I$). La restriction de M à ce plan est un automorphisme orthogonal sans valeur propre, c'est donc une rotation et celle-ci est d'angle $\pm 2\pi/3$ car $M^3 = I_n$. De plus ce plan est aussi stable par $M^2 = {}^t M$ donc P^\perp est stable par M ce qui permet de reprendre le raisonnement à partir d'un $X' \in P^\perp \setminus \{0\}$. Au final, M est orthogonalement semblable à une matrice

diagonale par blocs et aux blocs diagonaux égaux à $\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

La réciproque est immédiate.

Exercice 58 : [énoncé]

Soit M solution, M est diagonalisable sur \mathbb{C} avec pour valeurs propres j et j^2 .

Puisque $\operatorname{tr} M$ est réel, les valeurs propres j et j^2 ont même multiplicité. Par suite n est pair, $n = 2p$.

Nous allons montrer, en raisonnant par récurrence sur p qu'il existe une matrice orthogonale P tel que

$$PMP^{-1} = \begin{pmatrix} J & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J \end{pmatrix}$$

avec

$$J = R_{2\pi/3} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ ou } J = R_{-2\pi/3}$$

Pour $n = 2$: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$${}^tMM = M{}^tM \Leftrightarrow \begin{cases} ab + cd = ac + db \\ b^2 = c^2 \end{cases}$$

Si $b = c$ alors M est symétrique donc diagonalisable sur \mathbb{R} ce qui n'est pas le cas. Il reste $b = -c$ et donc $a = d$.

Ainsi $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et la relation $M^2 + M + I = 0$ donne

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + a + 1 = 0 \\ 2ab + b = 0 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} a = -1/2 \\ b = \pm\sqrt{3}/2 \end{cases}$$

ce qui permet de conclure (car le cas $b = 0$ est à exclure).

Supposons la propriété établie au rang $n = 2p$ et étudions le rang $n = 2p + 2$.

Soit M une matrice solution.

La matrice $S = {}^tM + M$ est symétrique et donc il existe $X \neq 0$ tel que $SX = \lambda X$.

On observe alors que l'espace $F = \text{Vect}(X, MX)$ est stable par M et par tM . Par

suite F^\perp est aussi stable par M et tM . On peut alors appliquer l'étude menée

pour $n = 2$ à l'action de M sur F et l'hypothèse de récurrence à celle sur F^\perp .

Cela établit la récurrence. Il ne reste plus qu'à souligner que les matrices ainsi

obtenues sont bien solutions.

Exercice 59 : [énoncé]

Si $b = 0$ alors $f = 0$. Sinon, par la formule du double produit vectoriel

$$f(x) = (a \mid x)b - (a \mid b)x.$$

$$f(b) = 0 \text{ et pour tout } x \in \text{Vect}(a)^\perp, f(x) = -(a \mid b)x.$$

Si $(a \mid b) \neq 0$ alors f est diagonalisable dans une base adaptée à

$$\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(a)^\perp \oplus \text{Vect}(b).$$

Si $(a \mid b) = 0$ alors $f(x) = (a \mid x)b$ et tout vecteur propre de f est soit colinéaire à

b , soit orthogonal à a . Or b est orthogonal à a donc les vecteurs propres de f sont

tous orthogonaux à a . Dans ce cas f est diagonalisable si, et seulement si, $a = 0$.

Exercice 60 : [énoncé]

$$B = \alpha(X - x_0) \dots (X - x_n).$$

Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ alors

$B \mid (A - \lambda)P$. Pour des raisons de degré, B et $A - \lambda$ ne peuvent être premiers

entre eux, ces polynômes ont donc une racine commune. Ainsi il existe

$i \in \{0, \dots, n\}$ tel que $\lambda = A(x_i)$. Inversement pour $\lambda = A(x_i)$,

$$P = \prod_{j=0, j \neq i}^n (X - x_j), \Phi(P) = \lambda P \text{ avec } P \neq 0. \text{ Ainsi } \text{Sp}\Phi = \{A(x_i) \mid i \in \llbracket 0, n \rrbracket\}.$$

Précisons le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = A(x_i)$. Quitte à

réindexer, on peut supposer que $\lambda = A(x_0)$.

S'il existe d'autres x_i tels que $\lambda = A(x_i)$ on réindexe encore les x_1, \dots, x_n de sorte

que $\lambda = A(x_0) = \dots = A(x_p)$ et $\lambda \neq A(x_{p+1}), \dots, A(x_n)$. Ainsi x_0, \dots, x_p sont

racines de $A - \lambda$ alors que x_{p+1}, \dots, x_n ne le sont pas.

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\Phi(P) = \lambda P$ si, et seulement si, $B \mid (A - \lambda)P$. Or

$A - \lambda = (X - x_0) \dots (X - x_p)\tilde{A}$ avec x_{p+1}, \dots, x_n non racines de \tilde{A} . Puisque

$(X - x_{p+1}) \dots (X - x_n) \wedge \tilde{A} = 1$, $B \mid (A - \lambda)P$ équivaut à

$$(X - x_{p+1}) \dots (X - x_n) \mid P.$$

Ainsi $E_\lambda(\Phi) = \{(X - x_{p+1}) \dots (X - x_n)Q \mid Q \in \mathbb{R}_{n-p}[X]\}$.

La somme des dimensions des sous-espaces propres étant égal à la dimension de

l'espace, Φ est diagonalisable.

Exercice 61 : [énoncé]

a) On vérifie $f^k \circ g - g \circ f^k = kf^k$.

Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k \neq 0$ alors l'endomorphisme $h \mapsto h \circ g - g \circ h$ admet une

infinité de valeurs propres.

Ceci étant impossible en dimension finie, on peut affirmer que f est nilpotent.

b) $f^n = 0$ (car $\dim E = n$) et $f^{n-1} \neq 0$. Pour $x \notin \ker f^{n-1}$ et

$e' = (f^{n-1}(x), \dots, f(x), x)$, on montre classiquement que e' est une base de E

dans laquelle la matrice de f est telle que voulue.

$f(g(f^{n-1}(x))) = 0$ donc $g(f^{n-1}(x)) = \lambda f^{n-1}(x)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$

Aussi $f^k(g(f^{n-1-k}(x))) = (\lambda + k)f^{n-1}(x)$ et donc la matrice de g dans e' et

triangulaire supérieure avec sur la diagonale $\lambda, \lambda + 1, \dots, \lambda + n - 1$. Ainsi

$$\text{Sp}(g) = \{\lambda, \dots, \lambda + n - 1\}$$

Soit y vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda + n - 1$.

Si $y \in \ker f^{n-1}$ alors puisque $\ker f^{n-1}$ est stable par g , $\lambda + n - 1$ est valeur propre

de l'endomorphisme induit par g sur $\ker f^{n-1}$. Cela n'étant par le cas

$y \notin \ker f^{n-1}$. On vérifie alors facilement que la famille $e = (f^{n-1}(y), \dots, f(y), y)$

résout notre problème.

Exercice 62 : [énoncé]

a) Puisque $u^3 = u$, par annulation d'un polynôme scindé simple, on peut affirmer que u est diagonalisable de valeurs propres possibles $0, 1, -1$. Par les égalités $\text{tr}u = 0$ et $\text{tr}u^2 = 2n$ on peut affirmer qu'il existe une base de \mathbb{R}^{2n+1} dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & -I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrices commutant avec A étant celle de la forme

$$\begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

avec $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut affirmer

$$\dim C(u) = 2n^2 + 1$$

b) $\Pi_u = X^3 - X$ donc $\dim \mathbb{R}[u] = 3$ et par suite $C(u) = \mathbb{R}[u]$ si, et seulement si, $n = 1$.

Exercice 63 : [énoncé]

a) Si $A^2 = A$ alors $f_A^2 = f_A$. f_A est une projection donc diagonalisable.

b) Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on observe $P(f_A) : M \mapsto P(A)M$ de sorte que $P(f_A) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0$.

Tout endomorphisme étant diagonalisable si, et seulement si, il annule un polynôme scindé simple, on peut conclure.

Exercice 64 : [énoncé]

Posons ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ étudié. On observe que $\phi^3 = \phi$. Par annulation d'un polynôme scindé simple, on peut affirmer que ϕ est diagonalisable de seules valeurs propres possibles $0, 1$ et -1 .

En introduisant une base adaptée à la projection f , la matrice de cet

endomorphisme est $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

En notant $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ la matrice de u dans cette base, on obtient :

$$\phi(u) = 0 \Leftrightarrow B = 0 \text{ et } C = 0.$$

$$\phi(u) = u \Leftrightarrow A = 0, C = 0 \text{ et } D = 0.$$

$$\phi(u) = -u \Leftrightarrow A = 0, B = 0 \text{ et } D = 0.$$

Exercice 65 : [énoncé]

Supposons f diagonalisable et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de f .

Pour $1 \leq i, j \leq n$, on pose $g_{i,j}$ l'endomorphisme de E déterminé par

$$g_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k} e_i$$

La famille $(g_{i,j})$ est une base de $\mathcal{L}(E)$ et on observe

$$T(g_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)g_{i,j}$$

donc T est diagonalisable.

Supposons f nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $f^n = 0$.

Puisque $T^p(g)$ est combinaison linéaire de termes de la forme $f^k \circ g \circ f^{p-k}$, il est assuré que $T^{2n} = 0$ et donc que T est nilpotente.

Exercice 66 : [énoncé]

Si A est nilpotente alors seule 0 est valeur propre de A et donc A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}. \text{ Par suite } \text{tr}A^p = 0 \text{ pour tout } p \geq 1.$$

Inversement, supposons $\text{tr}A^p = 0$ pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les racines non nulles de χ_f et $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ leurs multiplicités respectives.

$$\text{On a } \forall 1 \leq p \leq m \leq n, \text{tr}(f^p) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i^p = 0.$$

Ce système de Vandermonde implique : $\forall 1 \leq i \leq p, \alpha_i = 0$ et donc l'inexistence de valeurs propres autres que 0 ce qui permet de conclure que A est nilpotente via trionalisation.

Exercice 67 : [énoncé]

Dans cet énoncé, le corps de base est ambigu.

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

u annule un polynôme scindé simple, l'endomorphisme u est donc diagonalisable.

Tout sous-espace vectoriel possédant une base de vecteurs propres est stable et inversement.

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

Par le lemme de décomposition des noyaux, on a

$$E = \ker(u - \text{Id}) \oplus \ker(u^2 + u + \text{Id}).$$

Si F est un sous-espace vectoriel stable alors posons $F_1 = F \cap \ker(u - \text{Id})$ et

$$F_2 = F \cap \ker(u^2 + u + \text{Id}). \text{ Montrons } F = F_1 \oplus F_2.$$

Tout $x \in F$ peut s'écrire $x = a + b$ avec $a \in \ker(u - \text{Id})$ et $b \in \ker(u^2 + u + \text{Id})$.

Puisque $u(x) = a + u(b) \in F$ et $u^2(x) = a + u^2(b) \in F$, on a

$a = \frac{1}{3}(x + u(x) + u^2(x)) \in F$ puis $b = x - a \in F$.

Ainsi $a \in F_1$, $b \in F_2$ et on a donc $F \subset F_1 + F_2$.

Il est alors immédiat qu'on peut alors conclure $F = F_1 \oplus F_2$.

Puisque $F_2 \subset \ker(u^2 + u + \text{Id})$, pour $x \in F_2$ non nul $(x, u(x))$ est libre et

$\text{Vect}(x, u(x))$ est stable par u . Cela permet d'établir que F_2 est la somme directe de sous-espaces vectoriels de la forme $\text{Vect}(x, u(x))$ avec $x \neq 0$,

$x \in \ker(u^2 + u + \text{Id})$. Quant à F_1 , il n'y a pas de condition à souligner puisque tout sous-espace vectoriel de $\ker(u - \text{Id})$ est stable par u .

Exercice 68 : [énoncé]

On peut écrire $\Pi_f = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$ et $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \ker(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda}$

décomposition en somme de sous-espaces vectoriels stables par f .

Pour chaque $\lambda \in \text{Sp}(f)$, $\ker(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda - 1} \neq \ker(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda}$ par minimalité de Π_f et donc il existe $x_\lambda \in \ker(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda} \setminus \ker(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda - 1}$.

On peut alors établir que la famille $((f - \lambda \text{Id})^k(x_\lambda))_{0 \leq k \leq \alpha_\lambda - 1}$ est libre.

Considérons maintenant $x = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} x_\lambda$.

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(f)(x) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} P(f)(x_\lambda)$ avec $P(f)(x_\lambda) \in \ker(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda}$ par

stabilité.

Par décomposition en somme directe, $P(f)(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \in \text{Sp}(f), P(f)(x_\lambda) = 0$.

Par division euclidienne $P = (X - \lambda)^{\alpha_\lambda} Q + R$ avec $\deg R < \alpha_\lambda$ de sorte qu'on

puisse écrire $R = \sum_{k=0}^{\alpha_\lambda - 1} a_k (X - \lambda)^k$. On alors $P(f)(x_\lambda) = 0 \Leftrightarrow \forall 0 \leq k < \alpha_\lambda, a_k = 0$.

Ainsi $P(f)(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \in \text{Sp}(f), (X - \lambda)^{\alpha_\lambda} \mid P$

Enfin puisque les termes $(X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$ sont premiers entre eux, on peut conclure $P(f)(x) = 0 \Leftrightarrow \Pi_f \mid P$.

Exercice 69 : [énoncé]

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} = {}^t L$$

b) $U = I + N + \cdots + N^{n-1}$, $(I - N)U = I$ donc $U^{-1} = I - N$,
 $L^{-1} = {}^t(U^{-1}) = I - {}^t N$ donc $A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = I - N - {}^t N + N^t N$.

c)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 2 & 1 \\ (0) & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Posons χ_n le polynôme caractéristique de $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$.

On a $\chi_{n+2}(\lambda) = (2 - \lambda)\chi_{n+1}(\lambda) - \chi_n(\lambda)$ avec $\chi_0(\lambda) = 1$ et $\chi_1(\lambda) = 1 - \lambda$.

En écrivant $\lambda = 2 + 2 \cos \theta$ avec $\theta \in [0, \pi]$ et en posant $f_n(\theta) = \chi_n(2 + 2 \cos \theta)$ on a la relation :

$f_{n+2}(\theta) + 2 \cos \theta f_{n+1}(\theta) + f_n(\theta) = 0$, $f_0(\theta) = 1$ et $f_1(\theta) = 2 \cos \theta - 1$.

La résolution de cette récurrence linéaire d'ordre 2 donne

$$f_n(\theta) = \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\theta}{\cos \frac{\theta}{2}}$$

Ainsi, χ_n admet n racines dans $[0, 4]$ et puisque ce polynôme est de degré n il n'y en a pas ailleurs : $\text{Sp}A^{-1} \subset [0, 4]$.

Exercice 70 : [énoncé]

a) L'application T est évidemment linéaire et est à valeurs dans E .

Soit $g \in E$. Montrons que l'équation $Tf = g$ admet une solution unique.

Unicité : Si $Tf = g$ alors $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle linéaire $y' + y = g$ vérifiant $y(0) = 0$. Par le théorème de Cauchy ceci détermine $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ de façon unique et donc f aussi.

Existence : La dérivée de la fonction solution $y' + y = g$ vérifiant $y(0) = 0$ est solution.

b) Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie stable par T . Notons I l'endomorphisme de E défini par $I(f) : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$. Puisque F est stable par T , F est aussi stable par I . L'endomorphisme induit par I sur le sous-espace vectoriel de dimension finie F admet un polynôme minimal

$\pi = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. On a alors pour tout $f \in F$ l'égalité $y + a_{n-1}y' + \cdots + a_n y^{(n)} = 0$ en notant $y = I^n(f)$. De plus, on a les conditions initiales $y(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0$ ce qui donne $y = 0$ puis $f = 0$. Ainsi $F = \{0\}$. Finalement, l'espace nul est le seul espace de dimension finie stable par T . Quel intérêt au « impaire » ?

Exercice 71 : [énoncé]

Puisque f est de classe \mathcal{C}^1 et que $f(0) = 0$, on peut écrire

$$f(t) = f'(0)t + o(t) \text{ quand } t \rightarrow 0$$

Ainsi la fonction $\varphi : t \mapsto f(t)/t$ peut être prolongée par continuité en 0 et donc l'intégrale définissant $T(f)(x)$ a un sens en tant qu'intégrale d'une fonction continue. De plus, $T(f)$ apparaît alors comme la primitive s'annulant en 0 de la fonction continue φ , c'est donc une fonction élément de E . Enfin, la linéarité de l'application T étant immédiate, on peut affirmer que T est un endomorphisme de E .

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $T(f) = \lambda f$ alors pour tout $x \in [0, +\infty[$, $T(f)(x) = \lambda f(x)$

En dérivant cette relation, on obtient pour tout $x \in [0, +\infty[$

$$f(x) = \lambda x f'(x)$$

Si $\lambda = 0$ alors f est la fonction nulle et λ n'est pas valeur propre.

Si $\lambda \neq 0$, f est solution de l'équation différentielle $\lambda x y' = y$.

Cette dernière est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène dont la solution générale sur $]0, +\infty[$ est $y(x) = Cx^{1/\lambda}$.

Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = Cx^{1/\lambda}$$

Or pour qu'une telle fonction puisse être prolongée en une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ il faut que $C = 0$ ou $1/\lambda \geq 1$.

Ainsi les valeurs propres de T sont les éléments de l'intervalle $]0, 1]$.

Inversement, soient $\lambda \in]0, 1]$ et la fonction $f_\lambda : x \mapsto x^{1/\lambda}$ prolongée par continuité en 0.

La fonction f_λ est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, s'annule en 0 et vérifie $T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$ sans être la fonction nulle.

Finalement, les valeurs propres de T sont exactement les éléments de l'intervalle $]0, 1]$.

Exercice 72 : [énoncé]

a) (\Leftarrow) Immédiat

(\Rightarrow) Par récurrence sur $n \geq 2$.

Cas $n = 2$

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ tels que

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

En posant $u = z_2/z_1$, on a alors (car $z_1 \neq 0$)

$$|1 + u| = 1 + |u|$$

En écrivant $u = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et en élevant au carré l'identité précédente, on obtient

$$(1 + a)^2 + b^2 = 1 + 2\sqrt{a^2 + b^2} + a^2 + b^2$$

et cette identité est vérifiée si, et seulement si, $a \in \mathbb{R}^+$ et $b = 0$ ce qui permet d'écrire $z_2 = \alpha_2 z_1$ avec $\alpha_2 = a \in \mathbb{R}^+$.

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 2$.

Soient $z_1, \dots, z_n, z_{n+1} \in \mathbb{C}$ avec $z_1 \neq 0$ tels que

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

Par l'inégalité triangulaire

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

et puisque les termes extrémaux sont égaux on a

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$$

donc par hypothèse de récurrence on peut écrire pour tout $k \geq 2$

$$z_k = \alpha_k z_1 \text{ avec } \alpha_k \geq 0$$

On en déduit

$$\sum_{k=1}^n z_k = (1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) z_1 \neq 0$$

et puisque

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k + z_{n+1} \right| = \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}|$$

l'étude du cas $n = 2$ permet d'écrire

$$z_{n+1} = a \sum_{k=1}^n z_k = \alpha_{n+1} z_1 \text{ avec } \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}^+$$

Récurrence établie.

b) Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $M^n = I_n$ et $\text{tr}M = n$ alors cette matrice est diagonalisable (car annule le polynôme scindé simple $X^n - 1$) et ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vérifient

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = n$$

Or les valeurs propres vérifient aussi

$$\forall 1 \leq k \leq n, \lambda_k^n = 1$$

et elles sont donc de module 1. Nous sommes donc dans la situation où

$$|\lambda_1 + \dots + \lambda_n| = |\lambda_1| + \dots + |\lambda_n|$$

Puisque $\lambda_1 \neq 0$, on peut écrire $\lambda_k = \alpha_k \lambda_1$ pour tout $k \geq 2$ avec $\alpha_k \geq 0$. Or tous les λ_k sont de module 1 donc les α_k sont égaux à 1 et par suite

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n$$

Enfin puisque la somme des valeurs propres vaut n , on peut conclure

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$$

et finalement $M = I_n$ car la matrice M est semblable à I_n .

La réciproque est immédiate.

Exercice 73 : [énoncé]

Cas $n = 1$.

Supposons disposer de vecteurs x_1, x_2, x_3 tels que

$$\forall i \neq j, (x_i | x_j) < 0$$

Puisque $x_1 \neq 0$, (x_1) est une base de E .

Cela permet d'écrire $x_2 = \lambda x_1$ et $x_3 = \mu x_1$.

$(x_2 | x_1) < 0$ et $(x_3 | x_1) < 0$ donne $\lambda < 0$ et $\mu < 0$ mais alors

$$(x_2 | x_3) = \lambda \mu \|x_1\|^2 > 0!$$

Cas $n = 2$.

Supposons disposer de vecteurs x_1, \dots, x_4 tels que

$$\forall i \neq j, (x_i | x_j) < 0$$

x_1 étant non nul on peut écrire

$$\forall i \geq 2, x_i = \lambda_i x_1 + y_i$$

avec $y_i \in \{x_1\}^\perp$ et $\lambda_i < 0$.

On

$$\forall i \neq j \geq 2, (x_i | x_j) = \lambda_i \lambda_j + (y_i | y_j) < 0$$

donc $(y_i | y_j) < 0$.

y_2, y_3, y_4 se positionnant sur la droite $\{x_1\}^\perp$, l'étude du cas $n = 1$ permet de conclure.

Cas général.

Par récurrence sur $n \geq 1$.

Pour $n = 1$: ci-dessus

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$.

Supposons disposer de vecteurs x_1, \dots, x_{n+3} tels que

$$\forall i \neq j, (x_i | x_j) < 0$$

à l'intérieur d'un espace vectoriel euclidien de dimension $n + 1$.

x_1 étant non nul on peut écrire

$$\forall i \geq 2, x_i = \lambda_i x_1 + y_i$$

avec $y_i \in \{x_1\}^\perp$ et $\lambda_i < 0$.

On a

$$\forall i \neq j \geq 2, (x_i | x_j) = \lambda_i \lambda_j + (y_i | y_j) < 0$$

donc $(y_i | y_j) < 0$.

y_2, \dots, y_{n+2} se positionnant sur le sous-espace vectoriel $\{x_1\}^\perp$ qui est de dimension n , l'hypothèse de récurrence permet de conclure.

Récurrence établie.

Exercice 74 : [énoncé]

a) Pour $P, Q \in E$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et vérifie

$$t^2 P(t)Q(t)e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

On peut donc affirmer que cette fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$ ce qui assure la bonne définition de \langle , \rangle .

On vérifie aisément que \langle , \rangle est une forme bilinéaire symétrique positive.

Si $\langle P, P \rangle = 0$ alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue positive

$$\forall t \in [0, +\infty[, P(t)^2 e^{-t} = 0$$

On en déduit que le polynôme P admet une infinité de racines et donc $P = 0$.

b) Pour $k \geq 1$ ou $k = 0$, on peut affirmer que les polynômes P_k et P'_k sont orthogonaux.

Par une intégration par parties

$$0 = \int_0^{+\infty} P'_k(t)P_k(t)e^{-t} dt = \frac{1}{2} [P_k(t)^2 e^{-t}]_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} P_k(t)^2 e^{-t} dt$$

On en déduit

$$P_k(0)^2 = \|P_k\|^2 = 1$$

c) F est un hyperplan (car noyau de la forme linéaire non nulle $P \mapsto P(0)$). Son orthogonal est donc une droite vectorielle. Soit Q un vecteur directeur de celle-ci. On peut écrire

$$Q = \sum_{k=0}^n \langle P_k, Q \rangle P_k$$

Or

$$\langle P_k, Q \rangle = \langle P_k - P_k(0), Q \rangle + P_k(0) \langle 1, Q \rangle$$

Puisque le polynôme $P_k - P_k(0)$ est élément de F , il est orthogonal à Q et l'on obtient

$$\langle P_k, Q \rangle = P_k(0) \langle 1, Q \rangle$$

ce qui permet d'écrire

$$Q = \lambda \sum_{k=0}^n P_k(0) P_k \text{ avec } \lambda = \langle 1, Q \rangle \neq 0$$

On en déduit

$$d(1, F) = \frac{|\langle 1, Q \rangle|}{\|Q\|} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^n P_k(0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Enfin par Pythagore

$$\|1\|^2 = d(1, F)^2 + d(1, F^\perp)^2$$

et l'on obtient

$$d(1, F^\perp) = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

Exercice 75 : [\[énoncé\]](#)

$(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ et l'application $P \mapsto P(0)$ y est une forme linéaire donc il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que cette forme linéaire corresponde au produit scalaire avec A . Si $\deg A < n$ alors pour $P = XA$, $\int_0^1 tA(t)^2 dt = 0$. Or $t \mapsto tA(t)^2$ est continue positive donc $A = 0$ ce qui est absurde.

Exercice 76 : [\[énoncé\]](#)

On remarque

$$\langle v_i | \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \rangle = c\lambda_1 + \dots + c\lambda_{i-1} + \lambda_i + c\lambda_{i+1} + \dots + c\lambda_n$$

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & (c) \\ & \ddots & \\ (c) & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Supposons la famille (v_1, \dots, v_n) libre.

Si $X = {}^t(x_1 \dots x_n) \in \ker A$ alors en posant $u = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ on a

$$\forall 1 \leq i \leq n, \langle v_i, u \rangle = 0$$

On en déduit $u \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)^\perp$ et donc $u = 0$.

Ainsi $x_1 = \dots = x_n = 0$ et donc la matrice A est inversible.

Inversement, supposons la matrice A inversible.

Si $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ alors pour $X = {}^t(\lambda_1 \dots \lambda_n)$, $AX = 0$ donc $X = 0$ puis $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ et donc la famille (v_1, \dots, v_n) est libre.

Enfin, puisque

$$\det A = (1 + (n-1)c)(1-c)^{n-1}$$

la condition nécessaire et suffisante cherchée est $c \neq 1$ et $c \neq -1/(n-1)$.

Exercice 77 : [\[énoncé\]](#)

En introduisant sur $\mathbb{R}[X]$ le produit scalaire :

$$(P | Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

La quantité cherchée est

$$m = d(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2 = \|X^3 - p(X^3)\|^2$$

avec p la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X]$.

$p(X^3) = a + bX + cX^2$ avec $(p(X^3) | X^i) = (X^3 | X^i)$ pour $i = 0, 1, 2$.

La résolution du système ainsi obtenu donne

$$a = 1/20, b = -3/5 \text{ et } c = 3/2$$

On en déduit

$$m = \|X^3 - p(X^3)\|^2 = (X^3 - p(X^3) | X^3) = \frac{1}{2800}$$

Exercice 78 : [énoncé]

En introduisant l'espace E des fonctions réelles f continues sur $]0, 1]$ telles que $t \mapsto (tf(t))^2$ soit intégrable et en munissant cet espace du produit scalaire

$$(f | g) = \int_0^1 t^2 f(t)g(t) dt$$

la quantité cherchée est : $m = d(f, F)^2$ avec $f : t \mapsto \ln t$ et $F = \text{Vect}(f_0, f_1)$ où $f_0(t) = 1$ et $f_1(t) = t$.

$m = \|f - p(f)\|^2$ avec p la projection orthogonale sur F .

$p(f)(t) = a + bt$ avec $(p(f) | f_0) = (f | f_0)$ et $(p(f) | f_1) = (f | f_1)$.

La résolution du système ainsi obtenu donne $a = 5/3$ et $b = -19/12$.

$m = \|f - p(f)\|^2 = (f - p(f) | f) = 1/432$.

Exercice 79 : [énoncé]

Le cas $n = 1$ étant évident, on suppose désormais $n \geq 2$.

La quantité cherchée est $m = d(M, \text{Vect}(I, J)) = \|M - p(M)\|$ avec p la projection orthogonale sur $\text{Vect}(I, J)$.

$p(M) = aI + bJ$ avec $(p(M) | I) = (M | I) = \text{tr}(M)$ et $(p(M) | J) = (M | J) = \sigma$ avec σ la somme des coefficients de M .

La résolution de ce système donne

$$a = \frac{n\text{tr}(M) - \sigma}{n(n-1)} \text{ et } b = \frac{\sigma - \text{tr}(M)}{n(n-1)}$$

donc

$$m^2 = \|M - p(M)\|^2 = (M - p(M) | M) = \|M\|^2 - \frac{(n-1)\text{tr}(M)^2 + (\text{tr}(M) - \sigma)^2}{n(n-1)}$$

Exercice 80 : [énoncé]

a) Puisque A et tA commutent, on a $({}^tAA)^p = ({}^tA)^pA^p = 0$ et donc tAA est nilpotente.

D'autre part, la matrice tAA est symétrique réelle donc diagonalisable. Etant nilpotente, sa seule valeur propre possible est 0 et donc tAA est nulle car semblable à la matrice nulle.

b) En exploitant le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\|A\|^2 = (A | A) = \text{tr}({}^tAA) = 0$$

et donc $A = 0$

Exercice 81 : [énoncé]

Un tel endomorphisme conserve l'orthogonalité. Pour tout x, y vérifiant $\|x\| = \|y\|$, on a $x + y$ et $x - y$ orthogonaux donc $f(x) + f(y)$ et $f(x) - f(y)$ aussi. Par suite $\|f(x)\| = \|f(y)\|$. Ainsi un tel endomorphisme transforme une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) en une famille orthogonale aux vecteurs isométriques. Par suite $f = \lambda g$ avec $g \in \mathcal{O}(E)$. La réciproque est immédiate.

Exercice 82 : [énoncé]

a) On reconnaît le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Posons $f : M \mapsto \Omega M$. $(f(M) | f(N)) = \text{tr}({}^tM^t\Omega\Omega N)$.

f est φ -orthogonale si, et seulement si, pour tout $M, N \in \mathcal{M}$,

$(M | {}^t\Omega\Omega N) = (M | N)$ i.e. pour tout $N \in \mathcal{M}$, ${}^t\Omega\Omega N = N$ i.e. ${}^t\Omega\Omega = I_n$.

Ainsi f est φ -orthogonale si, et seulement si, Ω l'est.

Exercice 83 : [énoncé]

(ii) \Rightarrow (i) est immédiate via

$$(w \wedge x | y) = \text{Det}(w, x, y) = -\text{Det}(w, y, x) = -(w \wedge y | x)$$

(i) \Rightarrow (ii) Supposons $f^* = -f$.

Dans une base orthonormée directe (i, j, k) , la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

car antisymétrique.

Pour $w = ai + bj + ck$, on observe

$$w \wedge i = -bk + cj, w \wedge j = ak - ci \text{ et } w \wedge k = -aj + bi$$

Par suite $f(x) = w \wedge x$ pour tout x car les applications linéaires f et $x \mapsto w \wedge x$ coïncident sur une base.

Exercice 84 : [énoncé]

a) $\|u\|_{\mathcal{L}(E)} = \|u^*\|_{\mathcal{L}(E)}$ (cf. cours). Rappelons que cette relation se démontre en commençant par établir $\|u\|_{\mathcal{L}(E)}^2 \leq \|u^* \circ u\|_{\mathcal{L}(E)}$.

b) Soit $x \in \ker(u - \text{Id})$.

$\|u^*(x) - x\|^2 = \|u^*(x)\|^2 - 2(u^*(x) | x) + \|x\|^2 \leq \|x\|^2 - 2(x | u(x)) + \|x\|^2 = 0$ car

$u(x) = x$. Ainsi $u^*(x) = x$ et $x \in \ker(u^* - \text{Id})$. On peut conclure $\ker(u - \text{Id}) \subset \ker(u^* - \text{Id})$ puis l'égalité par symétrie.
 c) Soit $x \in \ker(u - \text{Id}) \cap \text{Im}(u - \text{Id})$. Il existe $a \in E$ tel que $x = u(a) - a$.
 $u^*(x) = x$ donne $u^*(u(a) - a) - u^*(a) = u(a) - a$ puis
 $(u^*(u(a) - a) - u^*(a) | a) = (u(a) - a | a)$ qui conduit à
 $\|x\|^2 = \|u(a)\|^2 - 2(u(a) | a) + \|a\|^2 = 0$. Ainsi $\ker(u - \text{Id}) \cap \text{Im}(u - \text{Id}) = \{0\}$. De plus, $\dim \ker(u - \text{Id}) + \text{rg}(u - \text{Id}) = \dim E$ donc $\ker(u - \text{Id}) \oplus \text{Im}(u - \text{Id}) = E$.

Exercice 85 : [énoncé]

(\Leftarrow) Supposons $u + u^*$ inversible.
 Soit $x \in \ker u \cap \text{Im}u^\perp$. On a $u(x) + u^*(x) = 0$ donc $x = 0$. Par suite $\ker u \cap \text{Im}u^\perp = \{0\}$.
 Donc $\dim \ker u + \dim \text{Im}u^\perp \leq \dim E$ puis $\dim \ker u \leq \dim \text{Im}u$. Par suite $\text{Im}u = \ker u$.
 (\Rightarrow) Supposons $\text{Im}u = \ker u$.
 Soit $x \in \ker(u + u^*)$. $u(x) + u^*(x) = 0$.
 Or $u(x) \in \text{Im}u$ et $u^*(x) \in \text{Im}u^* = (\ker u)^\perp = (\text{Im}u)^\perp$ donc $u(x) = u^*(x) = 0$.
 Par suite $x \in \ker u$ et $x \in \ker u^* = \text{Im}u^\perp = \ker u^\perp$ donc $x = 0$.
 Par suite $u + u^*$ est injectif donc bijectif.

Exercice 86 : [énoncé]

On observe que (i) équivaut à $f^* = f^{-1}$ et (ii) équivaut à $f^{-1} = -f$.
 Observons que (iii) équivaut à $f^* = -f$.
 Supposons (iii), pour tout $x, y \in E$, $(f(x + y) | x + y) = 0$ donne
 $(f(x) | y) = -(x | f(y))$ donc $f^* = -f$. La réciproque est immédiate.
 Ainsi les propriétés (i), (ii) et (iii) retraduites, il est immédiat de conclure.

Exercice 87 : [énoncé]

a) Pour $f \in E$, $\Phi(f) \in E$ car $(x, y) \mapsto K(x, y)f(y)$ est continue et on intègre sur un segment. La linéarité de Φ est évidente.
 b) On a

$$\|\Phi(f)\|_\infty \leq \|K\|_\infty \|f\|_\infty$$

et

$$\|\Phi(f)\|_1 \leq \iint_{[0,1]^2} |K(x, y)f(y)| \, dx dy \leq \|K\|_\infty \|f\|_1$$

donc Φ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$.

c) On a

$$(\Phi(f) | g) = \iint_{[0,1]^2} K(x, y)f(y)g(x) \, dx dy = (f | \Phi(g))$$

car

$$\forall(x, y) \in [0, 1]^2, K(x, y) = K(y, x)$$

d) Rappelons que l'espace normé $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Avec plus de finesse que dans les inégalités du b), on peut affirmer

$$\|\Phi(f)\|_\infty \leq \Omega^{-1} \|f\|_\infty.$$

Pour $h \in E$ et $|\lambda| < \Omega$, L'application $T : f \mapsto \lambda\Phi(f) + h$ est $\lambda\Omega$ -lipschitzienne avec $|\lambda\Omega| < 1$. Par le théorème du point fixe dans un espace complet, l'application T admet un unique point fixe et donc il existe un unique $f \in E$ vérifiant $h = f - \lambda\Phi(f)$.

e) Soit (f_1, \dots, f_p) une famille orthonormée d'éléments de $\ker(\Phi - \lambda\text{Id})$. Soit

$y \in [0, 1]$ fixé et $\varphi : x \mapsto K(x, y)$. On peut écrire $\varphi = \sum_{j=1}^p \mu_j f_j + \psi$ avec

$\psi \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)^\perp$ et

$$\mu_j = (f_j | \varphi) = \int_0^1 K(x, y)f_j(x) \, dx = \lambda f_j(y)$$

Par orthogonalité

$$\int_0^1 \varphi^2(x) \, dx = \sum_{j=1}^p \mu_j^2 + \|\psi\|_2^2 \geq \sum_{j=1}^p \mu_j^2$$

En intégrant on obtient

$$\iint_{[0,1]^2} K(x, y)^2 \, dx dy \geq \sum_{j=1}^p \int_0^1 \lambda^2 f_j^2(y) \, dy = \lambda^2 p$$

car les f_j sont unitaires. Par suite $\ker(\Phi - \lambda\text{Id})$ est de dimension finie et sa dimension vérifie l'inégalité proposée.

Exercice 88 : [énoncé]

Par continuité de la transposition

$${}^t(\exp A) = \exp({}^t A)$$

On a alors

$${}^t(\exp A) \exp A = \exp(-A) \exp(A) = \exp(-A + A) = \exp(O_n) = I_n$$

car A et $-A$ commutent.

Ainsi $\exp A$ est une matrice orthogonale.

Exercice 89 : [\[énoncé\]](#)

Pour $X = {}^t (1 \quad \dots \quad 1)$, on vérifie

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} = {}^t X A X$$

Or ${}^t X A X = (X \mid A X)$ donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|{}^t X A X| \leq \|X\| \|A X\|$$

Or $\|X\| = \sqrt{n}$ et $\|A X\| = \|X\| = \sqrt{n}$ car $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc

$$\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n$$

Exercice 90 : [\[énoncé\]](#)

a) Posons

$$U_p = \frac{1}{p+1} (I_n + A + \dots + A^p)$$

On a

$$(I - A)U_p = \frac{1}{p+1} (I_n - A^{p+1}) \rightarrow 0$$

car pour la norme euclidienne

$$\forall M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \|M\| = \sqrt{n}$$

Puisque $1 \notin \text{Sp}A$, $U_p \rightarrow 0$.

b) Par l'absurde si A^p converge vers B alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A^{p+1}X = AA^pX$ donne à la limite $BX = ABX$. Or $1 \notin \text{Sp}A$ donc $BX = 0$ et puisque ceci vaut pour tout X , $B = 0$.

Or $\|A^p\| = \sqrt{n} \not\rightarrow 0$. Absurde.

La suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est divergente.

Exercice 91 : [\[énoncé\]](#)

a) Les colonnes de M sont unitaires et deux à deux orthogonales si, et seulement si,

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ ab + bc + ca = 0 \end{cases}$$

Puisque $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\sigma$, on obtient

$$M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma = 0 \text{ et } S^2 = 1$$

b) En ajoutant toutes les colonnes à la première puis en factorisant

$$\det M = (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$$

puis

$$\det M = (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a - b & b - c \\ 0 & c - b & a - c \end{vmatrix}$$

et enfin

$$\det M = (a + b + c) ((a - b)(a - c) + (b - c)^2)$$

Ainsi

$$\det M = S (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = S^3$$

car $\sigma = 0$.

Finalement $M \in \text{SO}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma = 0$ et $S = 1$.

c) a, b, c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$ si, et seulement si, $X^3 - X^2 + k = (X - a)(X - b)(X - c)$.

En identifiant les coefficients, cette identité polynomiale équivaut à

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ ab + bc + ca = 0 \\ abc = -k \end{cases}$$

De plus, le polynôme $X^3 - X^2 + k$ admet trois racines réelles si, et seulement si, $k \in [0, 4/27]$.

En effet, considérons la fonction $f : x \mapsto x^3 - x^2 + k$.

f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = x(3x - 2)$.

Compte tenu de ses variations, pour que f s'annule 3 fois il est nécessaire que $f(0) \geq 0$ et $f(2/3) \leq 0$.

Cela fournit les conditions $k \geq 0$ et $k \leq 4/27$.

Inversement, si $k \in [0, 4/27]$, f admet trois racines réelles (comptées avec multiplicité)

Ainsi, si $M \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ alors a, b, c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$ avec $k \in [0, 4/27]$.

Inversement, si $k \in [0, 4/27]$, le polynôme $X^3 - X^2 + k$ admet trois racines a, b, c vérifiant $\sigma = 0$ et $S = 1$ donc $M \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 92 : [énoncé]

$J + A$ n'est pas inversible si, et seulement si, il existe une colonne non nulle vérifiant $AX = -JX$.

On a alors ${}^tAJX = -X$ et donc $-1 \in \text{Sp}({}^tAJ) = \text{Sp}(JA)$ avec une réciproque immédiate.

Le polynôme caractéristique de JA étant $(-1)^n X^{n-1} (X - \sum_{i,j} a_{i,j})$, on obtient le critère :

$J + A$ est inversible si, et seulement si, $\sum_{i,j} a_{i,j} \neq -1$

Exercice 93 : [énoncé]

Introduisons

$$N = \begin{pmatrix} {}^tA & O_{p,n-p} \\ {}^tB & I \end{pmatrix}$$

On a

$$MN = \begin{pmatrix} A^tA + B^tB & B \\ C^tA + D^tB & D \end{pmatrix}$$

Or

$$M^tM = \begin{pmatrix} A^tA + B^tB & A^tC + B^tD \\ C^tA + D^tB & C^tC + D^tD \end{pmatrix} = I_n$$

donc

$$MN = \begin{pmatrix} I_p & B \\ O_{n-p,p} & D \end{pmatrix}$$

En passant cette relation au déterminant, on en déduit

$$\det M \times \det {}^tA = \det D$$

Sachant $\det M = 1$, la conclusion est dès lors facile.

Exercice 94 : [énoncé]

a) Notons C_1, \dots, C_p les colonnes de M_u .

Si (u_1, \dots, u_p) est liée alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls vérifiant $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0$. On a alors $(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p | u_i) = 0$ pour tout i et donc $\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_p C_p = 0$. Ainsi M_u n'est pas inversible.

Inversement, supposons M_u non inversible. alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls vérifiant $\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_p C_p = 0$ et donc $(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p | u_i) = 0$ pour tout i .

Ainsi $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)^\perp$, or

$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ donc $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0$ et la famille (u_1, \dots, u_p) est liée.

b) Posons $r = \text{rg}(u_1, \dots, u_p)$ et quitte à permuter les vecteurs, supposons que les r premiers vecteurs de la famille u sont indépendants.

Par l'étude qui précède, on peut affirmer que les r premiers vecteurs de la famille v sont alors indépendants et que les autres en sont combinaisons linéaires.

Considérons alors l'application linéaire $h : \text{Vect}(u_1, \dots, u_r) \rightarrow \text{Vect}(v_1, \dots, v_r)$ déterminée par

$$\forall 1 \leq k \leq r, h(u_k) = v_k$$

Pour tout $x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r$, on a $h(x) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$.

Or

$$\|x\|^2 = \sum_{i,j=1}^r \lambda_i \lambda_j (u_i | u_j) \text{ et } \|h(x)\|^2 = \sum_{i,j=1}^r \lambda_i \lambda_j (v_i | v_j)$$

donc $\|x\|^2 = \|h(x)\|^2$ car $(u_i | u_j) = (v_i | v_j)$.

Pour tout $k \in \{r+1, \dots, p\}$, u_k est combinaison linéaire des u_1, \dots, u_r ce qui permet d'écrire

$$u_k = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r$$

On a alors pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$,

$$(u_k - (\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r) | u_i) = 0$$

et donc

$$(v_k - (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r) | v_i) = 0$$

On en déduit $v_k = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$ puis $v_k = h(u_k)$.

Enfin, on prolonge h en un automorphisme orthogonal solution défini sur \mathbb{R}^n en introduisant une application linéaire transformant une base orthonormée de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_r)^\perp$ en une base orthonormée de $\text{Vect}(v_1, \dots, v_r)^\perp$

Exercice 95 : [énoncé]

a) Soit λ une valeur propre complexe de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une colonne propre associée.

D'une part ${}^t\bar{X}AX = \lambda {}^t\bar{X}X$, d'autre part ${}^t\bar{X}AX = {}^t\bar{A}\bar{X}X = -\bar{\lambda} {}^t\bar{X}X$.

Puisque ${}^t\bar{X}X \in \mathbb{R}^{+*}$, on obtient $\bar{\lambda} = -\lambda$ donc $\lambda \in i\mathbb{R}$.

b) Pour tout $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\Omega = \varphi(A)$ est bien définie car $-1 \notin \text{Sp}A$.

${}^t\Omega\Omega = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ or $I_n + A$ et $I_n - A$ commutent donc ${}^t\Omega\Omega = I_n$.

De plus, si $\Omega X = -X$ alors $(I_n - A)X = -(I_n + A)X$ (car $I_n - A$ et $(I_n + A)^{-1}$ commutent) et donc $X = 0$.

Ainsi l'application $\varphi : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) / -1 \notin \text{Sp}(\Omega)\}$ est bien définie.

Si $\varphi(A) = \varphi(B)$ alors $(I_n - A)(I_n + B) = (I_n + A)(I_n - B)$. En développant et en simplifiant on obtient $A = B$ et donc l'application φ est injective.

Enfin soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $-1 \notin \text{Sp}(\Omega)$.

Posons $A = (\Omega + I_n)^{-1}(\Omega - I_n)$ qui est bien définie car $-1 \notin \text{Sp}\Omega$.

On a

$${}^tA = (I_n - \Omega^{-1})(\Omega^{-1} + I_n)^{-1} = (\Omega - I_n)\Omega^{-1}\Omega(I_n + \Omega)^{-1} = (\Omega - I_n)(I_n + \Omega)^{-1} = -A$$

et $\varphi(A) = \Omega$.

Finalement φ est bijective.

Exercice 96 : [énoncé]

M est diagonalisable et ses valeurs propres sont racines de $X^p - 1$, elles ne peuvent donc qu'être 1 ou -1 . Par suite $M^2 = I_n$.

Exercice 97 : [énoncé]

Par comparaison de noyau, il est facile d'obtenir : $\text{rg}A = \text{rg}{}^tAA$.

La matrice tAA étant symétrique réelle, elle est diagonalisable et donc son rang est égal au nombre de ses valeurs propres non nulles comptées avec multiplicité.

Exercice 98 : [énoncé]

$\text{Sp}(J) = \{0, n\}$, $E_0(J) : x_1 + \dots + x_n = 0$ et $E_n(J) : x_1 = \dots = x_n$.

$$D = \text{diag}(n, 0, \dots, 0) \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{n} & 1/\sqrt{2} & & 0 \\ \vdots & -1/\sqrt{2} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{n} & 0 & & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ conviennent.}$$

Exercice 99 : [énoncé]

a) Introduisons une base de E et M et A les matrices de φ et f dans cette base.

La matrice M est symétrique et inversible car φ non dégénérée.

L'hypothèse $\forall x, y \in E, \varphi(f(x), y) = -\varphi(x, f(y))$ donne ${}^t(AX)MY = -{}^tXMA Y$ pour toutes colonnes X, Y et donc ${}^tAM = -MA$ soit encore ${}^t(MA) = -MA$. La matrice MA est antisymétrique donc de rang pair (culture...) et puisque M est inversible A est de rang pair.

b) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ défini par $f(M) = AM - MA$.

Le commutant de A est le noyau de f et sa codimension est le rang de f .

Considérons $\varphi : (M, N) \rightarrow \text{tr}(MN)$. φ est une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée car $\varphi(M, N) = 0$ pour tout N entraîne $M = 0$.

Pour tout $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on vérifie aisément $\varphi(f(M), N) = -\varphi(M, f(N))$ et on conclut.

Exercice 100 : [énoncé]

A est une matrice de rotation si, et seulement si, $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et $\det A = 1$ ce qui fournit le système :

$$\begin{cases} p^2 + q^2 + r^2 = 1 \\ pq + qr + rp = 0 \\ p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr = 1 \end{cases}$$

(le déterminant se calculant par Sarrus).

Posons $\sigma_1 = p + q + r, \sigma_2 = pq + qr + rq, \sigma_3 = pqr, S_2 = p^2 + q^2 + r^2, S_3 = p^3 + q^3 + r^3$ et $t = p^2q + pq^2 + q^2r + qr^2 + t^2p + tp^2$

Si (p, q, r) est solution du système alors $\sigma_1^2 = S_2 + 2\sigma_1$ donne $\sigma_1 = \pm 1$.

De plus $\sigma_1\sigma_2 = 0$ donne $t + 3\sigma_3 = 0$ et donc

$$\sigma_1 = \sigma_1^3 = S_3 + 3t + 6\sigma_3 = S_3 - 3\sigma_3 = 1.$$

Ainsi p, q, r sont les trois racines du polynôme $X^3 - X^2 + a$.

Inversement, on vérifie que les trois racines du polynôme $X^3 - X^2 + a$ satisfont le système.

Il ne reste plus qu'à étudier à quelle condition sur a ces trois racines sont réelles. L'étude des variations de P donne la condition nécessaire et suffisante suivante

$$P(0) \geq 0 \text{ et } P(2/3) \leq 0$$

i.e. $a \in [0, 4/27]$.

La rotation alors obtenue est d'axe dirigé et orienté par $(1, 1, 1)$ et d'angle θ avec $\cos \theta = \frac{3p-1}{2}$ et $\sin \theta$ du signe de $q - r$.

Exercice 101 : [énoncé]

a) On a

$$\|C_1\|^2 = a^2(a^2 + b^2 + c^2) + b^2 + c^2$$

et

$$(C_1 | C_2) = ab(a^2 + b^2 + c^2 - 1)$$

Si A est orthogonale alors $\|C_1\|^2 + \|C_2\|^2 + \|C_3\|^2 = 3$ donne $(a^2 + b^2 + c^2)^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2) = 3$ et puisque $a^2 + b^2 + c^2 \geq 0$, on obtient $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Réciproquement, si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ alors on vérifie $\|C_1\| = \|C_2\| = \|C_3\| = 1$ et $(C_1 | C_2) = (C_2 | C_3) = (C_3 | C_1) = 0$ donc A est orthogonale.

b) Supposons maintenant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et posons $u = (a, b, c)$

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

est celle de l'application $x \mapsto (u \mid x)u$.

La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

est celle de l'application $x \mapsto u \wedge x$.

L'application étudiée est donc $x \mapsto (x \mid u)u + u \wedge x$ qui est la rotation d'axe dirigé et orienté par u et d'angle $\pi/2$.

Exercice 102 : [énoncé]

Pour $x = 0$, il y a égalité.

Pour $x \neq 0$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle u(x + \lambda u^{-1}(x)) \mid x + \lambda u^{-1}(x) \rangle \geq 0$ donc $\lambda^2 \langle x, u^{-1}(x) \rangle + 2\lambda \langle x \mid x \rangle + \langle u(x), x \rangle \geq 0$ avec $\langle x, u^{-1}(x) \rangle \neq 0$ car $u^{-1} \in \mathcal{S}^{++}(E)$.

Par suite $\Delta = 4 \|x\|^4 - 4 \langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(x), x \rangle \leq 0$ puis l'inégalité proposée.

De plus, il y a égalité si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $x + \lambda u^{-1}(x) = 0$ i.e. si, et seulement si, x est vecteur propre de u .

Exercice 103 : [énoncé]

a) $\text{Vect} \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ notamment parce qu'une matrice symétrique peut s'écrire comme différence de deux matrices symétriques définies positives via diagonalisation.

b) ${}^t X A X = \sum_{i=1}^k \lambda_i {}^t X A_i X$ avec ${}^t X A_i X \geq 0$ donc

$$|{}^t X A X| \leq \sum_{i=1}^k |\lambda_i| {}^t X A_i X = {}^t X B X.$$

c) Cas $B = I_n$.

La matrice A est diagonalisable et pour tout X , $|{}^t X A X| \leq {}^t X X$ assure que ses valeurs propres λ vérifient $|\lambda| \leq 1$ et donc $|\det A| \leq 1 = \det B$.

Cas général :

Si les λ_i sont tous nuls, c'est immédiat. Sinon, $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On peut écrire

$B = C^2$ avec $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Considérons ensuite $A' = C^{-1} A C^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $|{}^t X A' X| = |{}^t (C^{-1} X) A (C^{-1} X)| \leq {}^t (C^{-1} X) B (C^{-1} X) = {}^t X X$.

Par l'étude précédente, $|\det A'| \leq 1$ donc $|\det A| \leq (\det C)^2 = \det B$.

Exercice 104 : [énoncé]

a) On peut écrire $A = {}^t P D P$ avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$. La matrice $C = {}^t P \Delta P$ avec $\Delta = \text{diag}(1/\sqrt{\lambda_1}, \dots, 1/\sqrt{\lambda_n})$ convient.

b) ${}^t D = D$ et ${}^t X D X = {}^t (C X) B (C X) \geq 0$ donc $D \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. En notant $\mu_1, \dots, \mu_n \geq 0$ ses valeurs propres, l'inégalité voulue revient à

$$\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i)^{1/n} \geq 1 + \prod_{i=1}^n \lambda_i^{1/n}$$

qui s'obtient en appliquant l'inégalité de Jensen à la convexité de la fonction $x \mapsto \ln(1 + e^x)$.

c)

$$(\det C)^2 \det(A + B) = \det(C A C + C B C) = \det(I + D)$$

avec

$$(\det C)^2 = 1/\det A$$

Exercice 105 : [énoncé]

a) $\varphi : (X, Y) \mapsto {}^t X A Y$ et $\psi : (X, Y) \mapsto {}^t X B Y$ définissent respectivement un produit scalaire et une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ représentés par les matrices A et B dans la base canonique. Par le théorème spectral, il existe une base orthonormée pour le produit scalaire φ diagonalisant la forme bilinéaire symétrique ψ . En notant P la matrice de changement de base correspondante, les formules de passage donnent $A = {}^t P I_n P = {}^t P P$ car la nouvelle base est orthonormée pour φ et $B = {}^t P D P$ avec D diagonale car celle-ci diagonalise ψ .

b) Cas : la matrice A est définie positive.

Par le résultat précédent, il suffit d'établir $(\det D)^{1-t} \leq \det(t I_n + (1-t)D)$ avec D matrice diagonale à coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positifs. On souhaite donc établir,

$$\left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1-t} \leq \prod_{i=1}^n (t + (1-t)\lambda_i)$$

Or pour tout $\lambda \geq 0$, $\lambda^{1-t} \leq t + (1-t)\lambda$.

En effet pour $\lambda = 0$, la propriété est immédiate et pour $\lambda > 0$, celle-ci équivaut à $t \ln 1 + (1-t) \ln \lambda \leq \ln(t + (1-t)\lambda)$ qui découle de la concavité du logarithme.

On peut donc conclure en multipliant les comparaisons $0 \leq \lambda_i^{1-t} \leq t + (1-t)\lambda_i$.

Cas : la matrice A est positive.

La matrice $A_p = A + \frac{1}{p} I_n$ est définie positive et donc

$$(\det A_p)^t (\det B)^{1-t} \leq \det(t A_p + (1-t)B)$$
 pour tout $t \in]0, 1[$.

En passant à la limite quand $p \rightarrow +\infty$, on obtient

$$(\det A)^t (\det B)^{1-t} \leq \det(t A + (1-t)B)$$
 (avec ici $\det A = 0$ si A n'est pas définie positive).

Exercice 106 : [énoncé]

a) C'est $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ car ces espaces sont évidemment orthogonaux et supplémentaires.

b)

$${}^t \exp(xB) \exp(xB) = \exp({}^t(xB)) \exp(xB) = \exp(-xB) \exp(xB)$$

Or $-xB$ et xB commutent donc

$${}^t \exp(xB) \exp(xB) = \exp(-xB + xB) = \exp(0) = I_n$$

c) La fonction dérivable $f : x \mapsto \text{tr}(A \exp(xB))$ admet un maximum en 0 donc $f'(0) = 0$ ce qui donne $\text{tr}(AB) = 0$ pour tout $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Ainsi A est une matrice symétrique. Par le théorème spectrale $A = {}^tPDP$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Posons $V = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$ et $\varepsilon_i \lambda_i = |\lambda_i|$ et $U = PV^tP \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

$$\text{tr}(AU) = \text{tr}(APV^tP) = \text{tr}({}^tPAPV) = \text{tr}(DV) = |\lambda_1| + \dots + |\lambda_n|$$

et

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$$

La propriété $\text{tr}(AU) \leq \text{tr}A$ entraîne $\lambda_i \geq 0$ pour tout i .

d) Supposons $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On peut écrire $A = {}^tPDP$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \geq 0$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}(AU) = \text{tr}(DV)$ avec $V = (v_{i,j}) = {}^tPUP \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

On a alors

$$\text{tr}(DV) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_{i,i} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A)$$

car $v_{i,i} \leq 1$.

e) L'application réelle $f : V \rightarrow \text{tr}(MV)$ est continue sur le compact $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, elle y admet donc un maximum en un certain $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On a alors pour tout

$V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,

$$\text{tr}(MV) \leq \text{tr}(MU)$$

Posons alors $A = MU$. Pour tout $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,

$$\text{tr}(AW) \leq \text{tr}A$$

donc $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et ainsi $M = AU^{-1}$ avec $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $U^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 107 : [énoncé]

Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. $\varphi(x, y) = {}^tXMY$ définit un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}^n$.

En orthonormalisant pour le produit scalaire φ la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^n par le procédé de Schmidt, on obtient une base \mathcal{B}' et la matrice de passage P de \mathcal{B}' à \mathcal{B}

est triangulaire supérieure. Par changement de base $\varphi(x, y) = {}^tX'Y' = {}^tX^tPPY$

donne $M = {}^tPP$. D'une part $m_{i,i} = \sum_{j=1}^n p_{i,j}^2 \geq p_{i,i}^2$ et d'autre part

$$\det M = (\det P)^2 = \prod_{i=1}^n p_{i,i}^2 \text{ permettent de conclure.}$$

Exercice 108 : [énoncé]

Si $A = {}^tPP$ alors il est facile d'établir que A est symétrique positive (voire définie positive si P est inversible). Inversement, si A est symétrique positive alors par le théorème spectral, on peut écrire $A = {}^tQDQ$ avec $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\lambda_i \geq 0$ (voire $\lambda_i > 0$ si A est définie positive). Pour $P = \Delta Q$ avec $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ on dispose d'une matrice solution (inversible dans le cas où est définie positive.)

Exercice 109 : [énoncé]

Dans la base canonique, la matrice de Q est

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix}$$

de déterminant

$$\frac{(n-1)(-1)^{n-1}}{2^n}$$

Si $n = 1$, $\text{rg}Q = 0$. Sinon $\text{rg}Q = n$.

Exercice 110 : [énoncé]

Cas $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$.

En développant le déterminant selon la première colonne :

$$q(x_1, \dots, x_n) = -\lambda_1 \dots \lambda_n \left(\frac{x_1^2}{\lambda_1} + \dots + \frac{x_n^2}{\lambda_n} \right)$$

q est évidemment une forme quadratique définie négative.

Cas général : on peut écrire $A = {}^tPDP$ avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i > 0$.

On observe

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ X & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^t(PX) \\ PX & D \end{pmatrix}$$

et donc

$$q(X) = \det \begin{pmatrix} 0 & {}^tPX \\ PX & D \end{pmatrix}$$

car $\det P = 1$. Cela permet de conclure.

Exercice 111 : [\[énoncé\]](#)

La matrice de Q_α dans la base canonique de \mathbb{R}^n est

$$\begin{pmatrix} 1 - \alpha & & & (-\alpha) \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ (-\alpha) & & & 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

Si $n = 1$, seul $1 - \alpha$ est valeur propre et une condition nécessaire et suffisante est que $\alpha < 1$.

Si $n \geq 2$ alors les valeurs propres sont $1 - n\alpha$ et 1 . Une condition nécessaire et suffisante pour que Q_α soit définie positive est $\alpha < 1/n$.

Exercice 112 : [\[énoncé\]](#)

Notons que l'inclusion $N_q \subset C_q$ est toujours vraie (il suffit de prendre $y = x$).

Cas q positive :

Soit $x \in C_q$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $y \in E$,

$$|B(x, y)| \leq q(x)q(y) = 0$$

donc $B(x, y) = 0$. Ainsi $x \in N_q$ et donc $C_q \subset N_q$ puis l'égalité.

Cas q négative :

Il suffit d'étudier $-q$.

Inversement, montrons que si q n'est ni négative, ni positive alors $C_q \neq N_q$.

Supposons qu'il existe $x, y \in E$ tel que $q(x) > 0$ et $q(y) < 0$.

Par continuité de la fonction $t \mapsto q(tx + (1-t)y)$, on peut affirmer qu'il existe $t \in]0, 1[$ tel que

$$z = tx + (1-t)y \in C_q$$

Si par l'absurde $z \in N_q$ alors

$$B(z, x) = B(z, y) = 0$$

Or par développement

$$B(z, x) = tq(x) + (1-t)B(x, y) \text{ et } B(z, y) = tB(x, y) + (1-t)q(y)$$

Ceci entraîne une incompatibilité de signe sur $B(x, y)$.

On peut donc affirmer que $z \notin N_q$ et donc $C_q \neq N_q$.