Exercice 1 [02781] [correction]
Etudier la convergence de la suite $\left(\lfloor a^n \rfloor^{1/n}\right)$, où $a > 0$.

Exercice 2 [02782] [correction]
Soient des réels positifs a et b. Trouver la limite de

$$\left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n$$

Exercice 3 [02783] [correction]
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de réels positifs. On pose, pour tout $n > 0$,

$$y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_n}}}$$

a) Ici $x_n = a$ pour tout n, où $a > 0$. Etudier la convergence de (y_n).
b) Même question dans le cas où $x_n = ab^{2^n}$ pour tout n, avec $b > 0$.
c) Montrer que (y_n) converge si, et seulement si, la suite $(x_n^{2^{-n}})$ est bornée.

Exercice 4 [02788] [correction]
Donner un développement asymptotique de $\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k!\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à la précision $o(n^{-3})$.

Exercice 5 [02811] [correction]
Soient des réels a, b où $a \notin \{0, 1\}$. On pose $h(x) = ax + b$ pour tout x réel. On note S l'ensemble des fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f \circ f = h$$

a) Montrer que $S = \emptyset$ si $a < 0$.
Désormais on suppose $a > 0$ (et $a \neq 1$).
b) Montrer que h est une homothétie ; préciser son centre et son rapport.
c) Soit $f \in S$. Montrer que $h^{-1} \circ f \circ h = f$. En déduire une expression de f ; on commencera par le cas $0 < a < 1$.

Exercice 6 [02812] [correction]
Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(x/2)}{\sqrt{x}} = 1$$

Trouver un équivalent simple en 0 de f.

Exercice 7 [02813] [correction]
Soient f et g des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$.
a) Montrer que l'ensemble des points fixes de f possède un plus grand et un plus petit élément.
b) Montrer l'existence de $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 8 [02815] [correction]
Soient f un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme croissant de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que l'on peut trouver une suite $(x_{k,n})_{1\leqslant k\leqslant n}$ telle que :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \frac{k-1}{n} \leqslant f(x_{k,n}) \leqslant \frac{k}{n} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(x_{k,n})} = n$$

Exercice 9 [02816] [correction]
Enoncer et établir la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 10 [02817] [correction]
Montrer, pour tout $x \in]0, \pi/2[$, l'existence de $\theta_x \in]0, 1[$ tel que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}\cos(x\theta_x)$$

Etudier la limite de θ_x quand x tend vers 0 par valeur supérieure.

Exercice 11 [02818] [correction]
Soit $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

a) Trouver le plus grand intervalle ouvert I contenant 0 sur lequel f est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.
b) On note g l'application réciproque de $f_{\restriction I}$. Montrer que les coefficients du développement limité de g en 0 à un ordre quelconque sont positifs.

Exercice 12 [02819] [correction]
On pose $f(x)=\mathrm{e}^{-1/x^2}$ pour x réel non nul et $f(0)=0$.
a) Montrer l'existence pour tout $n\in\mathbb{N}$ d'un polynôme P_n tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R}^\star, f^{(n)}(x)=x^{-3n}P_n(x)f(x)$$

Quel est le degré de P_n ?
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, toutes ses dérivées étant nulles en 0.
c) Montrer que toute racine de P_n est réelle.

Exercice 13 [02820] [correction]
Soient $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I et a,b,c trois points distincts de I.
Montrer

$$\exists d\in I, \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-c)(b-a)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{2}f''(d)$$

Exercice 14 [02822] [correction]
Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ dérivable.
a) Si f' est bornée sur $\mathbb{R}^+$, montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
b) Si $|f'(x)|\to+\infty$ quand $x\to+\infty$, montrer que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 15 [00183] [correction]
Etudier l'intégrabilité en 0 de

$$f:x\mapsto\int_1^x\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 16 [02421] [correction]
Convergence de

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 17 [02824] [correction]
Existence et calcul de

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Exercice 18 [02825] [correction]
Existence et calcul éventuel de

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+(t+ib)^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 19 [02826] [correction]
Calculer

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t$$

où $a>0$.

Exercice 20 [02827] [correction]
Trouver une expression simple de

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 t}{(1-2x\cos t+x^2)(1-2y\cos t+y^2)}\,\mathrm{d}t$$

où $x,y\in\,]-1,1[$.

Exercice 21 [02829] [correction]
Donner un exemple de $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ intégrable et non bornée.

Exercice 22 [02879] [correction]
a) Donner la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

On pose pour tout réel x

$$f(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée.
c) Calculer

$$\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 23 [02784] [correction]
Soit $u_0 \in]0, 2\pi[$ puis
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n/2)$$
a) Montrer que (u_n) tend vers 0.
b) Montrer que $\lim(2^n u_n) = A$ pour un certain $A > 0$.
c) Trouver un équivalent simple de $(u_n - A2^{-n})$.

Exercice 24 [02789] [correction]
Nature de la série de terme général
$$\frac{\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^{3/2} - \lfloor n^{3/2} \rfloor + n}$$

Exercice 25 [02790] [correction]
Nature de la série de terme général
$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right)$$
où $a > 0$.

Exercice 26 [02791] [correction]
Nature de la série de terme général
$$u_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$$
où $a > 0$.

Exercice 27 [02792] [correction]
Nature de la série de terme général
$$\frac{n^\alpha}{\sum\limits_{k=2}^{n} \ln^2 k}$$
où α est réel.

Exercice 28 [02793] [correction]
Convergence de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Exercice 29 [02794] [correction]
Nature de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$.

Exercice 30 [02795] [correction]
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^\star$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$
$$u_n = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha}$$
Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 31 [02796] [correction]
Soit (u_n) une suite réelle décroissante et positive. On pose
$$v_n = 2^n u_{2^n}$$
Déterminer la nature de $\sum v_n$ en fonction de celle de $\sum u_n$.

Exercice 32 [02797] [correction]
Soit (u_n) une suite décroissante d'éléments de $\mathbb{R}^+$, de limite 0. Pour $n \geqslant 1$, on pose
$$v_n = n^2 u_{n^2}$$
Y a-t-il un lien entre la convergence des séries de termes généraux u_n et v_n ?

Exercice 33 [02798] [correction]
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) \neq 0$. Etudier la convergence de la série de terme général
$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} \int_0^{1/n} f(t^n)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 34 [02799] [correction]
Soient $\alpha > 0$ et (u_n) une suite de réels strictement positifs vérifiant

$$u_n^{1/n} = 1 - \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

La série de terme général u_n converge-t-elle ?

Exercice 35 [02800] [correction]
a) Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles, $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0\,;\ \sum |v_n| \text{ converge et } \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + v_n$$

Montrer que $(n^\lambda u_n)$ converge.
b) Nature de la série de terme général

$$\frac{n^n}{n!\mathrm{e}^n}?$$

Exercice 36 [02801] [correction]
Soient α dans $\mathbb{R}^\star$, a et b dans $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$. On pose

$$u_0 = \alpha \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{n-a}{n-b}u_n$$

Etudier la nature de la série de terme général u_n et calculer éventuellement sa somme.

Exercice 37 [02802] [correction]
Soient $(a, \alpha) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$u_n = a^{\sum\limits_{k=1}^{n} 1/k^\alpha}$$

a) Pour quels couples (a, α) la suite (u_n) est-elle convergente ? Dans la suite, on suppose que tel est le cas, on note $\ell = \lim u_n$ et on pose, si $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$v_n = u_n - \ell$$

b) Nature des séries de termes généraux v_n et $(-1)^n v_n$.

Exercice 38 [02803] [correction]
Etudier

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{i+j}t^{i+j+1}$$

Exercice 39 [02804] [correction]
Convergence puis calcul de

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$$

Exercice 40 [02805] [correction]
Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}$$

Exercice 41 [02806] [correction]
Nature et calcul de la somme de la série de terme général

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$$

Exercice 42 [02809] [correction]
On pose

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}$$

a) Montrer que la suite (a_n) converge et trouver sa limite λ.
b) Trouver un équivalent simple de $a_n - \lambda$.

Exercice 43 [02810] [correction]
On pose $f(x) = \frac{\sin(\ln x)}{x}$ pour tout $x \geqslant 1$ et $u_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ pour tout entier $n \geqslant 2$.
a) Montrer que f' est intégrable sur $[1, +\infty[$.
b) Montrer que la série de terme général u_n est absolument convergente.
c) Montrer que la suite $(\cos(\ln n))$ diverge.
d) En déduire la nature de la série de terme général $f(n)$.

Exercice 44 [03119] [correction]
Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ dans $(\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}$$

Montrer que si la série de terme général v_n converge alors la série de terme général u_n diverge.

Exercice 45 [00118] [correction]
Soit, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right]^n \mathrm{d}x$$

a) Etudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
b) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 46 [00150] [correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ bornée. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} n f(t) \mathrm{e}^{-nt} \,\mathrm{d}t$$

Déterminer la limite de I_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 47 [00933] [correction]
Etablir

$$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$

Exercice 48 [02435] [correction]
Etudier la limite de

$$\int_0^1 f(t^n) \,\mathrm{d}t$$

où $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 49 [02807] [correction]
a) Pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, calculer

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m \,\mathrm{d}x$$

Pour $p \in \mathbb{Z}$, montrer l'existence de

$$S_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^p}{\binom{2n}{n}}$$

b) Calculer S_0 et S_{-1}.
c) Si $p \in \mathbb{N}$, proposer une méthode de calcul de S_p.

Exercice 50 [02830] [correction]
On pose, pour $x \geqslant 0$,

$$f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}}$$

Etudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$.

Exercice 51 [02831] [correction]
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ donnée par $f(x) = 2x(1-x)$. Etudier la convergence de (f_n) où f_n est l'itéré $n$ème de f.

Exercice 52 [02833] [correction]
On note U l'ensemble des complexes de module 1 ; soit ω un complexe de module $\neq 1$. Exprimer une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $z \mapsto \frac{1}{z-\omega}$ soit limite uniforme sur U d'une suite de fonctions polynomiales.

Exercice 53 [02834] [correction]
Si $x > 1$, on pose

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

a) Quelle est la limite de $\zeta(x)$ quand $x \to +\infty$?
b) Pour quels réels x la série $\sum \frac{\zeta(n)}{n} x^n$ converge-t-elle ?

c) Si

$$F(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\zeta(n)}{n}x^n$$

montrer que F est continue sur $[-1,1[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.
d) Donner une expression plus simple de $F(x)$

Exercice 54 [02835] [correction]
Si $x>0$ et $n\in\mathbb{N}^\star$, soit

$$f_n(x)=\frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$$

a) Montrer l'existence de $\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)$.
b) Montrer

$$\ln\Gamma(x)=-\ln x-\gamma x+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n}-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$$

c) Montrer que Γ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 55 [02836] [correction]
Soit α un réel. Pour tout entier $n>0$ et tout réel x, on pose

$$u_n(x)=\frac{n^\alpha x\,\mathrm{e}^{-nx}}{n^2+1}$$

On note I le domaine de définition de

$$S:x\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)$$

a) Déterminer I.
b) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
c) A-t-on convergence normale sur $\mathbb{R}^+$?
d) On suppose $\alpha\geqslant 2$. Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(1/n)$$

ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La convergence est-elle uniforme sur I ?
e) Etudier la continuité de S sur I.

Exercice 56 [02837] [correction]
On pose

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$$

Etudier le domaine de définition, la continuité, la dérivabilité de S. Donner un équation équivalent de S en 0 et en 1^-.

Exercice 57 [02838] [correction]
Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ et si $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n:x\in[0,1]\mapsto n^\alpha x^n(1-x)\in\mathbb{R}$$

Etudier le mode convergence de la suite de fonctions (u_n), puis de la série de fonctions $\sum u_n$.

Exercice 58 [02839] [correction]
On pose

$$u_0(x)=1\text{ et }u_{n+1}(x)=\int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t$$

pour tout réel $x\in[0,1]$ et tout entier naturel n.
Montrer que la série de terme général u_n est normalement convergente.

Exercice 59 [02840] [correction]
a) Si $(s,\lambda)\in\mathbb{R}^{+\star}\times\mathbb{C}$, quelle est la nature de la série de terme général

$$\frac{\lambda^n}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

pour $n\geqslant 0$? A λ fixé, on note Δ_λ l'ensemble des $s>0$ tels que la série converge, et on note $F_\lambda(s)$ la somme de cette série.
b) Calculer $\lim\limits_{s\to\sup\Delta_\lambda}F_\lambda(s)$.
c) Donner un équivalent de $F_\lambda(s)$ quand $s\to\inf\Delta_\lambda$.
d) Si $n\geqslant 1$, calculer :

$$\int_0^1(1-y)^{s-1}y^n\,\mathrm{d}y$$

e) En déduire une expression intégrale de $F_\lambda(s)$.

Exercice 60 [02862] [correction]
Calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 61 [02863] [correction]
a) Etablir pour $a,b>0$ l'égalité
$$\int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a+nb}$$
b) Calculer
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$$

Exercice 62 [02864] [correction]
Existence et calcul de
$$\int_0^1\frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$
Le résultat est à exprimer à l'aide de $\zeta(2)$.

Exercice 63 [02866] [correction]
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite bornée. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t}\left(\sum_{p=n}^{+\infty}a_p\frac{t^p}{p!}\right)\mathrm{d}t$$

Exercice 64 [02867] [correction]
Soit (a_n) une suite croissante de réels >0 telle que $a_n\to+\infty$.
Justifier
$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\mathrm{e}^{-a_nx}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a_n}$$

Exercice 65 [02869] [correction]
Montrer
$$\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-n}=\int_0^1 t^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 66 [02870] [correction]
Si $x>1$, on pose $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$. Montrer :
$$\int_2^{+\infty}(\zeta(x)-1)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2\ln n}$$

Exercice 67 [03203] [correction]
Définition, continuité et dérivabilité de
$$S:x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(1+n^2x^2)}$$

Exercice 68 [03287] [correction]
Donner la nature de la série de terme général
$$u_n=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos^{2n}t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 69 [02766] [correction]
Soit $(E,\|\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
a) Montrer que pour tous $x,y\in E$
$$\|x\|+\|y\|\leqslant 2\max\{\|x+y\|,\|x-y\|\}$$
b) Montrer que l'on peut avoir l'égalité avec $x\neq 0$ et $y\neq 0$.
Désormais la norme est euclidienne.
c) Montrer que pour tous $x,y\in E$
$$\|x\|+\|y\|\leqslant\sqrt{2}\max\{\|x+y\|,\|x-y\|\}$$
d) Peut-on améliorer la constante $\sqrt{2}$?

Exercice 70 [02767] [correction]
Soient $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$et E^+ l'ensemble des fonctions de E qui sont positives et ne s'annulent qu'un nombre fini de fois. Pour toute fonction $\varphi \in E^+$ et pour toute fonction $f \in E$ on pose

$$\|f\|_\varphi = \int_0^1 |f(t)|\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que $\|\,.\,\|_\varphi$ est une norme sur E
b) Montrer que si φ_1 et φ_2 sont deux applications strictement positives de E^+ alors les normes associées sont équivalentes.
c) Les normes $\|\,.\,\|_x$ et $\|\,.\,\|_{x^2}$ sont elles équivalentes ?

Exercice 71 [02768] [correction]
Soit E un sous-espace vectoriel de dimension $d \geqslant 1$ de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.
a) Etablir l'existence de $(a_1,\ldots,a_d) \in [0,1]^d$ tel que l'application

$$N : f \in E \mapsto \sum_{i=1}^{d} |f(a_i)|$$

soit une norme.
b) Soit (f_n) une suite de fonctions de E qui converge simplement vers une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Montrer que $f \in E$ et que la convergence est uniforme.

Exercice 72 [02769] [correction]
Déterminer l'ensemble des morphismes continus de $(U,\times)$ dans lui-même.

Exercice 73 [02832] [correction]
Soient d un entier naturel et (f_n) une suite de fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré au plus d. On suppose que cette suite converge simplement. Montrer que la limite est polynomiale de degré au plus d, la convergence étant uniforme sur tout segment.

Exercice 74 [01129] [correction]
Montrer qu'une forme linéaire est continue si, et seulement si, son noyau est fermé.

Exercice 75 [02770] [correction]
On munit l'espace des suites bornées réelles $\ell^\infty(\mathbb{R})$ de la norme $\|u\|_\infty = \sup_n(|u_n|)$.
a) Montrer que l'ensemble des suites convergentes est un fermé de $\ell^\infty(\mathbb{R})$.
b) Montrer que l'ensemble des suites (a_n) qui sont terme général d'une série absolument convergente n'est pas un fermé de $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 76 [02771] [correction]
Soit E l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{C}$ telles que $\sum |a_n|$ converge. Si $a = (a_n)_{n\geqslant 0}$ appartient à E, on pose

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

a) Montrer que $\|\,.\,\|$ est une norme sur E.
b) Soit

$$F = \left\{ a \in E, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 \right\}$$

L'ensemble F est-il ouvert ? fermé ? borné ?.

Exercice 77 [02773] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, O_n désigne l'ensemble des polynômes réels de degré n scindés à racines simples et F_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés à racines simples. Sont-ils ouverts dans $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 78 [02774] [correction]
a) Chercher les fonctions $f : [0,1] \to [0,1]$ continues telles que $f \circ f = f$.
b) Idem avec dérivable

Exercice 79 [02779] [correction]
Montrer qu'un hyperplan d'un espace vectoriel normé $(E, \|\|)$ est dense ou fermé dans E.

Exercice 80 [02780] [correction]
On note E l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur $[0,+\infty[$ et dont le carré est intégrable. On admet que E est un espace vectoriel réel. On le munit de la norme

$$\|\|_2 : f \mapsto \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

On note E_0 l'ensemble des $f \in E$ telles que f est nulle hors d'un certain segment. On note F l'ensemble des fonctions de E du type $x \mapsto P(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^{-x^2/2}$ où P parcourt $\mathbb{R}[X]$. Montrer que E_0 est dense dans E puis que F est dense dans E.

Exercice 81 [02828] [correction]
Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

a) Montrer que la fonction f est nulle.
b) Calculer

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-(1-i)x}\,\mathrm{d}x$$

c) En déduire qu'il existe f dans $\mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbb{R})$ non nulle, telle que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on ait

$$\int_0^{+\infty} x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Exercice 82 [03288] [correction]
Soient A,B,C,D des matrices carrées d'ordre n, réelles et commutant deux à deux. Montrer la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est inversible si, et seulement si, $AD - BC$ l'est.

Exercice 83 [01019] [correction]
Former de deux façons le développement en série entière en 0 de

$$f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

En déduire la relation

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}\binom{2n}{n} = \frac{4^n}{(2n+1)}$$

Exercice 84 [02422] [correction]
a) Déterminer la décomposition en éléments simples de

$$\frac{1}{(X+1)^m(X-1)^n}$$

avec m,n deux entiers non nuls.
b) Déterminer deux polynômes U et V tels que

$$(X+1)^m U(X) + (X-1)^n V(X) = 1$$

Exercice 85 [02808] [correction]
Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)\times 3^n}$$

Exercice 86 [02841] [correction]
On note a_n la n-ième décimale de $\sqrt{3}$.
Quel est l'intervalle de définition de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$?

Exercice 87 [02842] [correction]
Quel est le rayon de convergence de

$$\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n} \text{ ?}$$

Exercice 88 [02843] [correction]
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Quel est le rayon de convergence de

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\alpha)}{n} x^n \text{ ?}$$

Exercice 89 [02844] [correction]
a) Soit (a_n) une suite complexe. On suppose que $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence R. Déterminer les rayons de convergence de

$$\sum (a_n \ln n) x^n \text{ et } \sum \left(a_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$$

b) Donner un équivalent simple de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln n\, x^n$ quand $x \to 1^-$.

Exercice 90 [02845] [correction]
Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{3n+2}$$

Exercice 91 [02846] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \frac{n!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)}$$

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$?

Exercice 92 [02847] [correction]
a) Déterminer le rayon de convergence R de

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{n!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)} x^n$$

b) Pour $x \in \left]-R, R\right[$ calculer la somme précédente.

Exercice 93 [02848] [correction]
Pour $x \in \left]-1, 1\right[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \sin(n\alpha) = \arctan\left(\frac{x \sin \alpha}{1 - x \cos \alpha}\right)$$

Exercice 94 [02849] [correction]
Si $n \geqslant 1$, soit I_n le nombre d'involutions de $\{1, \ldots, n\}$. On convient : $I_0 = 1$.
a) Montrer, si $n \geqslant 2$, que

$$I_n = I_{n-1} + (n-1) I_{n-2}$$

b) Montrer que $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ converge si $x \in \left]-1, 1\right[$. Soit $S(x)$ sa somme.
c) Montrer, pour $x \in \left]-1, 1\right[$, que

$$S'(x) = (1 + x) S(x)$$

d) En déduire une expression de $S(x)$ puis une expression de I_n.

Exercice 95 [02850] [correction]
On pose $a_0 = 1$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} a_k$$

Calculer les a_n en utilisant la série entière de terme général $\frac{a_n}{n!} x^n$.

Exercice 96 [02851] [correction]
Soient $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\left]-a, a\right[, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left]-a, a\right[, f^{(n)}(x) \geqslant 0$$

a) Si $|x| < r < a$, montrer

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \left| \frac{x}{r} \right|^{n+1} f(r)$$

b) Montrer que f est développable en série entière sur $\left]-a, a\right[$.
c) Montrer que $x \mapsto \tan x$ est développable en série entière sur $\left]-\pi/2, \pi/2\right[$.

Exercice 97 [02852] [correction]
Domaine de définition et étude aux bornes de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n$$

Exercice 98 [02853] [correction]
On pose
$$a_n = \int_n^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
a) Etudier la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$entière pour x réel.
On note $f(x)$ la somme de cette série entière.
b) La fonction f est-elle continue en -1 ?
c) Donner un équivalent simple de f en 1^-.

Exercice 99 [02854] [correction]
Soit une série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $f(z)$.
a) Montrer que pour $0 < r < R$,
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(r\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta$$
b) Que dire de f si $|f|$ admet un maximum local en 0 ?
c) On suppose maintenant que $R = +\infty$ et qu'il existe $P \in \mathbb{R}_N[X]$ tel que $|f(z)| \leqslant P(|z|)$ pour tout z complexe. Montrer que $f \in \mathbb{C}_N[X]$.

Exercice 100 [02855] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose
$$I_n = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\,\mathrm{d}t$$
a) Déterminer la limite de (I_n).
b) Donner un équivalent de (I_n).
c) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $I_n x^n$.
Etudier sa convergence en R et en $-R$.

Exercice 101 [02856] [correction]
Soient $B = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant 1\}$ et f une fonction continue de B dans $\mathbb{C}$ dont la restriction à B° est somme d'une série entière. Montrer qu'il existe une suite $(P_k)_{k\geqslant 0}$ de polynôme convergeant uniformément vers f sur B.

Exercice 102 [02857] [correction]
Développer en série entière
$$x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}$$

Exercice 103 [02858] [correction]
Développer en série entière $f : x \mapsto \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$ au voisinage de 0.

Exercice 104 [02859] [correction]
a) Montrer, si $t \in \mathbb{R}$:
$$\left|\mathrm{e}^{it} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}$$
b) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |t^n|\,|f(t)|\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 0}$ soit bornée.
Montrer que $F : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{itx} f(t)$ est développable en série entière en 0.

Exercice 105 [02865] [correction]
Etudier la limite de la suite de terme général
$$I_n = n\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 106 [02871] [correction]
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$$
a) Définition de f.
b) Continuité et dérivabilité de f.
c) Ecrire $f(1)$ comme somme de série.

Exercice 107 [02872] [correction]
Pour $x \in \mathbb{R}^+$, soit
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t$$

a) Justifier la définition de $f(x)$.
b) Montrer que f est classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
c) Calculer $f(x)$ si $x \in \mathbb{R}^{+\star}$.
d) Montrer que f est continue en 0. Qu'en déduit-on ?

Exercice 108 [02873] [correction]
Pour tout x réel, on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t \text{et } g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$$

Existence et calcul de ces deux intégrales.

Exercice 109 [02874] [correction]
Etudier

$$f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \,\mathrm{d}t$$

Exercice 110 [02875] [correction]
Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} / \mathrm{Re} z > -1\}$. Si $z \in \Omega$, soit

$$f(z) = \int_0^1 \frac{t^z}{1+t} \mathrm{d}t$$

a) Montrer que f est définie et continue sur Ω.
b) Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers -1.
c) Donner un équivalent de $f(z)$ quand $\mathrm{Re} z \to +\infty$.

Exercice 111 [02876] [correction]
Existence et calcul de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} \mathrm{d}t$$

Exercice 112 [02878] [correction]
a) Pour quels x de $\mathbb{R}$ l'intégrale :

$$\int_0^{\pi/2} (\sin t)^x \,\mathrm{d}t$$

existe-t-elle ? Dans ce cas, soit $f(x)$ sa valeur.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son intervalle de définition.
c) Que dire de

$$x \mapsto (x+1) f(x) f(x+1) ?$$

Exercice 113 [02880] [correction]
Montrer que, pour tout x réel positif,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2} \,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1} \,\mathrm{d}t$$

Exercice 114 [02881] [correction]
Existence et calcul de

$$\int_0^{2\pi} \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t} \,\mathrm{d}t$$

Exercice 115 [02882] [correction]
On pose, pour $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2} \,\mathrm{d}t$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et trouver des équivalents simples de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 116 [02877] [correction]
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $p_n(x) = (1+\cos x)^n$ puis

$$q_n(x) = \frac{p_n(x)}{\int_{-\pi}^{\pi} p_n(t) \,\mathrm{d}t}$$

a) Montrer que pour tout $\delta \in]0,\pi[$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\delta}^{\delta} q_n(t) \,\mathrm{d}t = 1$$

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique et continue. On pose

$$g_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} q_n(t) f(x-t) \,\mathrm{d}t$$

Prouver la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ vers f de (g_n).
c) Quel résultat redémontre-t-on ainsi ?

Exercice 117 [02883] [correction]
Soit α un réel non entier.
a) En utilisant la fonction 2π-périodique coïncidant avec $x \mapsto \cos(\alpha x)$ sur $[-\pi, \pi]$, calculer

$$1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$$

b) En déduire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

c) Ici $0 < \alpha < 1$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}$$

Exercice 118 [02884] [correction]
Soient $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et f_α l'unique fonction 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$f_\alpha(x) = \cos(\alpha x)$$

a) Calculer les coefficients de Fourier de f_α.
b) Montrer que

$$\frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)} = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \alpha^2}$$

c) Si $0 < \alpha < 1$, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Exercice 119 [02885] [correction]
Soit $a > 0$, x réel. On pose

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + (x - 2n\pi)^2}$$

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa parité.
b) Montrer que f est développable en série de Fourier.
c) Calculer, en utilisant un logiciel de calcul formel, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{b^2 + t^2}\,\mathrm{d}t$$

d) En déduire les coefficients de Fourier de f.
e) Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 120 [02886] [correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, \pi], \mathbb{R})$ telle que

$$f(0) = f(\pi) = 0 \text{ et } \int_0^\pi f'^2 = 1$$

Montrer qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = \frac{2}{\pi} \text{ et } \forall x \in [0, \pi], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} \sin(nx)$$

Exercice 121 [02887] [correction]
Soient $r \in]0, 1[$ et E l'espace des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
a) Montrer qu'il existe une fonction $P_r \in E$ telle que : pour tout $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} c_n(f) \mathrm{e}^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P_r(x - t)\,\mathrm{d}t$$

b) Calculer

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,\mathrm{d}t$$

c) Calculer

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} c_n(f) \mathrm{e}^{inx}$$

Exercice 122 [02888] [correction]
Soit E l'espace des $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π-périodiques. On norme E en posant, si $f \in E$:

$$\|f\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|$$

Si $f \in E$, soit

$$G(f) : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} f(x+t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{C}$$

a) Montrer que G est un endomorphisme continu de E.
b) L'endomorphisme G est-il inversible ?
c) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de G.

Exercice 123 [00391] [correction]
Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

Exercice 124 [02889] [correction]
Résoudre

$$x \ln x\, y' - (3\ln x + 1)y = 0$$

Exercice 125 [02891] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(x^2+1)y'' + xy' - y = 0$$

Exercice 126 [02892] [correction]
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x > 0, f'(x) = f(1/x)$$

Exercice 127 [02893] [correction]
Résoudre sur $]0, \pi[$

$$y'' + y = \mathrm{cotan} x$$

Exercice 128 [02894] [correction]
a) Résoudre sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par variation des constantes :

$$y'' + y = 1/x$$

b) En déduire une expression de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

valable pour $x > 0$.
c) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 129 [02895] [correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ monotone ayant une limite finie en $+\infty$.
Montrer que les solutions de l'équation $y'' + y = f$ sont bornées.

Exercice 130 [02896] [correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π-périodique. Existe-t-il $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π-périodique et solution de

$$y'' + y = f\,?$$

Exercice 131 [02900] [correction]
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on identifie $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ avec $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) A est antisymétrique ;
(ii) chaque solution du système différentiel $Y' = AY$ est de norme constante.

Exercice 132 [02902] [correction]
Résoudre le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x' = x - z \\ y' = x + y + z \\ z' = -x - y + z \end{cases}$$

Exercice 133 [03620] [correction]
a) Montrer que l'équation différentielle

$$y' - y = f$$

avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique admet une unique solution bornée.
b) Est-elle périodique ?
c) Donner ses coefficients de Fourier c_n en fonction de ceux de f et étudier la convergence de $\sum c_n$.

Exercice 134 [02898] [correction]
Déterminer les solutions de

$$yy'' = 1 + y'^2$$

Exercice 135 [02899] [correction]
Soit une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et bornée.
Soit y une solution maximale de l'équation différentielle

$$y' = \varphi(x, y)$$

Montrer que y est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 136 [00071] [correction]
Soit $a > 0$. On pose, pour $x > 0$ et $y > 0$,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{a}{xy}$$

Montrer que f admet un minimum absolu et calculer ce dernier.

Exercice 137 [02903] [correction]
Soient $(x_1, \ldots, x_n, h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et, si $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = f(x_1 + th_1, \ldots, x_n + th_n)$$

Calculer $g'(t)$.

Exercice 138 [02904] [correction]
Si $p \in \mathbb{N}$, soit

$$f_p : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \mapsto (x + y)^p \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

a) Condition nécessaire et suffisante pour que f_p se prolonge par continuité en $(0, 0)$?
b) La condition de a) étant remplie, condition nécessaire et suffisante pour que le prolongement obtenu soit différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 139 [02905] [correction]
On pose

$$f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

pour x, y réels non tous deux nuls.
La fonction f admet-elle un prolongement continue à $\mathbb{R}^2$? Un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$? de classe $\mathcal{C}^2$?

Exercice 140 [02906] [correction]
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On pose

$$f(x, y) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \text{ pour } x \neq y \text{ et } f(x, x) = g'(x)$$

a) Exprimer $f(x, y)$ à l'aide d'une intégrale sur l'intervalle $[0, 1]$.
b) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 141 [02907] [correction]
Soit, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$u_n : (x, y) \mapsto \frac{\cos ny}{\sqrt{n}} x^n$$

On note D l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que la série de terme général $u_n(x, y)$ converge. On pose

$$f : (x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)$$

a) Déterminer D.
b) Montrer que $f_{\restriction D^\circ}$ est $\mathcal{C}^1$.

Exercice 142 [02908] [correction]
Soit $k \in]0,1[$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leqslant k$$

On définit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(x,y) = (y + f(x), x + f(y))$$

Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

Exercice 143 [02910] [correction]
Trouver les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

Exercice 144 [02911] [correction]
Calculer l'aire maximale d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon r.

Exercice 145 [02912] [correction]
a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+\star}, \mathbb{R})$ telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$

b) Trouver toutes les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+\star}, \mathbb{R})$ telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y}\sqrt{x^3 + y^3}$$

Exercice 146 [02913] [correction]
On note U l'ensemble des (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x > 0$ et $E = \mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R})$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$; on dit que f est homogène de degré α si $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$ pour tous $t \in \mathbb{R}^{+\star}$, $(x,y) \in U$. On pose :

$$\forall f \in E, \forall (x,y) \in U, \Phi(f)(x,y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

a) Déterminer $\ker \Phi$.
b) Soit $f \in E$. Montrer que f est homogène de degré α si, et seulement si, $\Phi(f) = \alpha f$.
c) Résoudre l'équation d'inconnue $f \in E$, $\Phi(f) = h$, h étant la fonction qui à (x,y) associe $(x^2+y^2)^{3/2}xy$.

Exercice 147 [00109] [correction]
Soient O, A, B les points d'affixes respectives $0, r, r\exp(i\pi/4)$ avec $r > 0$. Soit Γ_r l'arc paramétré de $\mathbb{C}$ constitué du segment $[O,A]$, orienté de O vers A, de l'arc $\mathcal{C}_r$ du cercle de centre O et de rayon r d'origine A et d'extrémité B et du segment $[B,O]$ orienté de B vers O.
a) Calculer

$$I_r = \oint_{\Gamma_r} \mathrm{e}^{-(x+iy)^2}(\,\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y)$$

b) Que dire de la limite, quand $r \to +\infty$, de

$$J_r = \int_{\mathcal{C}_r} \mathrm{e}^{-(x+iy)^2}(\,\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y)\,?$$

c) Qu'en déduire ?

Exercice 148 [02914] [correction]
Soit

$$I_n = \iint_{[0,1]^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1 + x^n + y^n}$$

Déterminer la limite de I_n quand $n \to +\infty$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Si $a \in]0,1[$, la suite est constante égale à 0.
Si $a = 1$, la suite est constante égale à 1.
Si $a > 1$ alors $a^n - 1 < \lfloor a^n \rfloor \leqslant a^n$ donne $(a^n-1)^{1/n} < \lfloor a^n \rfloor^{1/n} \leqslant a$ et donc, par encadrement, la suite converge vers a.

Exercice 2 : [énoncé]
Si $a = 0$ ou $b = 0$ alors la suite converge évidemment vers 0. On suppose désormais $a, b > 0$.
On a
$$\frac{1}{2}\left(a^{1/n} + b^{1/n}\right) = 1 + \frac{1}{2n}\ln(ab) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
donc
$$\left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n \to \sqrt{ab}$$

Exercice 3 : [énoncé]
Notons que la suite (y_n) est croissante, elle est donc convergente si, et seulement si, elle est majorée.
a) Ici $y_{n+1} = \sqrt{a + y_n}$. Soit ℓ la racine positive de l'équation $\ell^2 - \ell - a = 0$ i.e.
$$\ell = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$$
On remarque que $y_1 = \sqrt{a} \leqslant \ell$ et on montre par récurrence $y_n \leqslant \ell$. La suite (y_n) est croissante et majorée donc convergente.
b) On observe que la nouvelle suite (y_n) est désormais égale à b fois la précédente, elle est donc convergente.
c) Si (y_n) converge vers ℓ alors $x_n^{2^{-n}} \leqslant y_n \leqslant \ell$ donc $(x_n^{2^{-n}})$ est bornée.
Si $(x_n^{2^{-n}})$ est bornée par une certain M alors $x_n \leqslant M^{2^n}$, la suite (y_n) définie par (x_n) est alors inférieure à celle obtenue par (M^{2^n}), cette dernière étant convergente, la suite (y_n) converge.

Exercice 4 : [énoncé]
On a
$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) + \sum_{k=0}^{n-5}\frac{k!}{n!}$$
Or
$$\sum_{k=0}^{n-5}\frac{k!}{n!} \leqslant (n-4)\frac{(n-5)!}{n!} = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
donc
$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Exercice 5 : [énoncé]
a) En dérivant la relation $(f \circ f)(x) = ax + b$ on obtient $f'(x)f'(f(x)) = a$.
On observe que h admet un unique point fixe $\alpha = b/(1-a)$.
Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < x$ alors $h(x) = f(f(x)) < f(x) < x$ ce qui est contradictoire avec l'existence d'un point fixe pour h.
De même, on ne peut avoir $f(x) > x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La continuité de f permet alors d'assurer l'existence d'un point fixe à f (qui ne peut d'ailleurs qu'être α car un point fixe de f est aussi point fixe de h).
La relation
$$f'(x)f'(f(x)) = a$$
en $x = \alpha$ donne
$$(f'(\alpha))^2 = a$$
Par suite si $a < 0$, $S = \emptyset$.
b) On observe
$$h(x) = a(x-\alpha) + \alpha$$
h est une homothétie de centre α et de rapport a.
c) On a
$$h^{-1} \circ f \circ h = h^{-1} \circ f \circ f \circ f = h^{-1} \circ h \circ f = f$$
En itérant la relation précédente
$$(h^{-1})^n \circ f \circ h^n = f$$
avec $h^n(x) = \alpha + a^n(x-\alpha)$ et $(h^{-1})^n(x) = \alpha + a^{-n}(x-\alpha)$.
Supposons $a \in]0,1[$.
On peut écrire
$$f(x) = ((h^{-1})^n \circ f \circ h^n) = (h^{-1})^n \circ f(\alpha + a^n(x-\alpha))$$
Puisque $a^n \to 0$ et que f est dérivable en α
$$f(\alpha + a^n(x-\alpha)) = \alpha + a^n(x-\alpha)f'(\alpha) + o(a^n)$$

donc
$$f(x) = (h^{-1})^n \circ f(\alpha + a^n(x-\alpha)) = \alpha + (x-\alpha)f'(\alpha) + o(1)$$
En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on peut affirmer que f est affine. Puisque de plus α est point fixe, f est une homothétie de centre α et son rapport ne peut qu'être $\sqrt{a}$.
Dans le cas $a > 1$, la même étude en partant de
$$h \circ f \circ h^{-1} = f$$
permet aussi d'affirmer que f est affine et d'obtenir la même conclusion.

Exercice 6 : [énoncé]
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x \in \left]0, \alpha\right], (1-\varepsilon)\sqrt{x} \leqslant f(x) - f(x/2) \leqslant (1+\varepsilon)\sqrt{x}$$
Pour $x \in \left]0, \alpha\right]$, $x/2^n \in \left]0, \alpha\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc
$$(1-\varepsilon)\sqrt{x/2^n} \leqslant f(x/2^n) - f(x/2^{n+1}) \leqslant (1+\varepsilon)\sqrt{x/2^{n+1}}$$
En sommant ces inégalités et en passant à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient :
$$(1-\varepsilon)\sqrt{x}\frac{1}{1-1/\sqrt{2}} \leqslant f(x) \leqslant (1+\varepsilon)\sqrt{x}\frac{1}{1-1/\sqrt{2}}$$
La phrase quantifiée ainsi obtenue permet d'affirmer
$$f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{1-1/\sqrt{2}}$$

Exercice 7 : [énoncé]
a) L'ensemble des points fixes de f est $(f - \mathrm{Id})^{-1}\{0\}$, c'est donc une partie fermée de $[0,1]$. Etant fermée et bornée c'est une partie compacte. Etant de plus non vide, cette partie admet un plus petit et un plus grand élément.
b) Soient $a \leqslant b$ les deux éléments précédents. L'égalité $f \circ g = g \circ f$ donne $f(g(a)) = g(a)$ et $f(g(b)) = g(b)$ donc $a \leqslant g(a), g(b) \leqslant b$. Considérons la fonction continue $\varphi = f - g$. On a $\varphi(a) = a - g(a) \leqslant 0$ et $\varphi(b) = b - g(b) \geqslant 0$ donc φ s'annule.

Exercice 8 : [énoncé]
Appliquons le théorème des accroissements finis à f^{-1} entre $\frac{k-1}{n}$ et $\frac{k}{n}$,
$$\exists y_{k,n} \in \left]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[, f^{-1}\left(\frac{k}{n}\right) - f^{-1}\left(\frac{k-1}{n}\right) = (f^{-1})'(y_{k,n})\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right)$$
En posant $x_{k,n} = f^{-1}(y_{k,n})$, on a
$$\frac{k-1}{n} \leqslant f(x_{k,n}) \leqslant \frac{k}{n}$$
En sommant les relations précédentes pour k allant de 1 à n on obtient :
$$f^{-1}(1) - f^{-1}(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(x_{k,n})}\frac{1}{n}$$
car
$$(f^{-1})'(y_{k,n}) = \frac{1}{f'(x_{k,n})}$$
Puisque $f^{-1}(1) = 1$ et $f^{-1}(0) = 0$ car f $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme croissant de $[0,1]$ sur $[0,1]$, on obtient finalement,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(x_{k,n})} = n$$

Exercice 9 : [énoncé]
C'est du cours.

Exercice 10 : [énoncé]
Par l'égalité de Taylor-Lagrange (hors-programme) :
$$\forall x \in \left]0, \pi/2\right[, \exists \xi \in \left]0, x\right[, \sin x = x - \frac{1}{6}x^3\cos(\xi)$$
Le réel $\theta_x = \xi/x$ convient.
A défaut de connaître, l'égalité de Taylor-Lagrange, par l'égalité de Taylor avec reste intégral
$$\sin x = x - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!}\cos t \,\mathrm{d}t$$
Or pour $t \in [0, x]$, on a
$$\cos x \leqslant \cos t \leqslant 1$$

avec inégalité stricte pour $t \in]0, x[$ donc

$$\frac{x^3}{6}\cos x < \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!}\cos t\,\mathrm{d}t < \frac{x^3}{6}$$

Ainsi

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!}\cos t\,\mathrm{d}t = \lambda\frac{x^3}{6} \text{ avec } \cos x < \lambda < 1 = \cos 0$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut écrire

$$\lambda = \cos(x\theta_x) \text{ avec } \theta_x \in]0, 1[$$

Quand $x \to 0$, $x\theta_x \to 0$ donc

$$\cos(x\theta_x) = 1 - \frac{1}{2}x^2\theta_x^2 + o(x^2)$$

puis

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^5\theta_x^2 + o(x^5)$$

or

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$$

donc $\theta_x^2 \to 1/10$ puis

$$\theta_x \to \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Exercice 11 : [énoncé]
a) f est $\mathcal{C}^\infty$ et $f'(x) = \frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2} \neq 0$ si, et seulement si, $x \neq \mathrm{e} - 1$.
Le plus grand intervalle cherché est $I =]-1, \mathrm{e} - 1[$ sur lequel f est $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée ne s'annule pas, f réalise donc un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de I vers $]-\infty, 1/\mathrm{e}[$.
b) On a $\ln(1 + g(x)) = x(1 + g(x))$.
En dérivant $g'(x) = 1 + 2g(x) + g^2(x) + xg'(x) + xg'(x)g(x)$.
En dérivant à l'ordre $n \in \mathbb{N}^\star$ et en évaluant en 0 on obtient

$$g^{(n+1)}(0) = 2g^{(n)}(0) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g^{(k)}(0)g^{(n-k)}(0) + ng^{(n)}(0) + n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}g^{(k+1)}(0)g^{(n-1-k)}(0)$$

On peut alors appliquer un raisonnement par récurrence forte pour obtenir $\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(0) \geqslant 0$.
Ceci suffit pour conclure via la formule de Taylor-Young.

Exercice 12 : [énoncé]
a) Il suffit de raisonner par récurrence. On obtient $P_0(x) = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1} = (2 - 3nX^2)P_n + X^3P_n'$$

Par récurrence, pour $n > 0$, $\deg P_n = 2(n-1)$.
b) f est continue en 0 et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f^{(n)}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ dont par le théorème « limite de la dérivée », on peut conclure.
c) $P_1 = 2$ a toutes ses racines réelles.
$f'(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$ donc par une généralisation du théorème de Rolle, on peut affirmer que f'' s'annule sur $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$. Ses annulations sont aussi des zéros de P_2 qui est de degré 2, donc P_2 a toutes ses racines réelles.
f'' s'annule aussi en 0 et en $\pm\infty$. Par la généralisation du théorème de Rolle, on obtient 2 annulations sur $]0, +\infty[$ et 2 annulations sur $]-\infty, 0[$ qui seront toutes quatre zéros de P_3 qui est un polynôme de degré 4,... on peut itérer la démarche.

Exercice 13 : [énoncé]
Considérons

$$g : x \mapsto (x-b)f(a) + (a-x)f(b) + (b-a)f(x) - \frac{1}{2}(a-b)(b-x)(x-a)K$$

où la constante K est choisie de sorte que $g(c) = 0$ (ce qui est possible).
La fonction g s'annule en a, en b et en c donc par le théorème de Rolle, il existe $d \in I$ tel que $g''(d) = 0$ ce qui résout le problème posé.

Exercice 14 : [énoncé]
a) Si f' est bornée sur $\mathbb{R}^+$, l'inégalité des accroissements finis assure que f est lipschitzienne donc uniformément continue.
b) Supposons que f soit uniformément continue. Pour $\varepsilon = 1 > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{R}, |y - x| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant 1$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x+\alpha) - f(x)| \leqslant 1$. Or par le théorème des accroissements finis, il existe $\xi_x \in]x, x+\alpha[$ vérifiant $|f(x+\alpha) - f(x)| = \alpha\,|f'(\xi_x)|$ et donc $|f'(\xi_x)| \leqslant 1/\alpha$. Cette propriété est incompatible avec $|f'(x)| \to +\infty$.

Exercice 15 : [énoncé]
La fonction f est définie et continue sur $]0, 1]$.
Pour $x \in]0, 1]$, on peut écrire

$$f(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t + \ln x$$

D'une part, la fonction $t \mapsto \frac{e^t-1}{t}$ se prolonge par continuité en 0, elle est donc intégrable sur $]0,1]$ et par suite la fonction

$$x \mapsto \int_1^x \frac{e^t - 1}{t}\,dt$$

est intégrable sur $]0,1]$ car converge quand $x \to 0^+$.
D'autre part, il est bien connu que la fonction $x \mapsto \ln x$ est intégrable sur $]0,1]$.
On en déduit que f est intégrable sur $]0,1]$.

Exercice 16 : [énoncé]
Par un argument de parité, il suffit d'établir la convergence de

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{2t} e^{it^2}\,dt$$

Formellement

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t}{2t} e^{it^2}\,dt = \left[\frac{e^{it^2}-1}{2it}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} \frac{e^{it^2}-1}{t^2}\,dt$$

où la primitive de $2te^{it^2}$ a été choisie de sorte de s'annuler en 0.
Puisque les deux termes en second membre sont convergents, le théorème d'intégration par parties s'applique et assure la convergence de

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt$$

Exercice 17 : [énoncé]
On a

$$\sqrt{\tan\theta} \underset{\theta=\pi/2-h}{=} \sqrt{\frac{\sin(\pi/2-h)}{\cos(\pi/2-h)}} = \sqrt{\frac{\cos h}{\sin h}} \sim \frac{1}{\sqrt{h}}$$

donc l'intégrale est bien définie.

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\,d\theta \underset{u=\sqrt{\tan\theta}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4}du = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

après calculs...

Exercice 18 : [énoncé]
On peut écrire

$$1 + (t+ib)^2 = (t + i(b+1))(t + i(b-1))$$

Si $b = \pm 1$ la fonction n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ à cause d'une singularité en 0.
Si $b \neq \pm 1$ alors la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+(t+ib)^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $f(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand $t \to \pm\infty$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}$.
En procédant à une décomposition en éléments simples :

$$\int_{-A}^{A} \frac{dt}{1+(t+ib)^2} = \frac{i}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(t^2+(b+1)^2) + \arctan\left(\frac{t}{b+1}\right)\right]_{-A}^{A} - \frac{i}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(t^2+(b-1)^2) + \right.$$

Si $|b| > 1$ alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+(t+ib)^2} = 0$$

Si $|b| < 1$ alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+(t+ib)^2} = \pi$$

Exercice 19 : [énoncé]
L'intégrabilité est entendue.
Par le changement de variable $u = a^2/t$ on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{2\ln a - \ln u}{a^2+u^2}\,du$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,dt = \frac{\pi}{2a}\ln a$$

Exercice 20 : [énoncé]
Par le changement de variable $u = \tan\frac{t}{2}$ on parvient à l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{8u^2\,du}{(1+u^2)((1-x)^2+(1+x)^2u^2)((1-y)^2+(1+y)^2u^2)}$$

On peut réaliser une décomposition en éléments simples réelles de la fraction rationnelle intégrée qui pour des raisons de parité sera de la forme

$$\frac{a}{1+u^2} + \frac{b}{(1-x)^2+(1+x)^2u^2} + \frac{c}{(1-y)^2+(1+y)^2u^2}$$

avec
$$a = -\frac{1}{2xy}, b = -\frac{(1-x)^2(1+x)^2}{2x(x-y)(1-xy)} \text{ et } c = -\frac{(1-y)^2(1+y)^2}{2y(y-x)(1-xy)}$$
sous réserve que $x \neq y$ et $xy \neq 0$.
Puisque
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\alpha^2 + \beta^2 u^2} = \frac{1}{\alpha\beta}\frac{\pi}{2}$$
on parvient à
$$I = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2xy} - \frac{1-x^2}{2x(x-y)(1-xy)} + \frac{1-y^2}{2y(x-y)(1-xy)}\right) = \frac{\pi}{2(1-xy)}$$
Les cas exclus $x \neq y$ et $xy \neq 0$ peuvent être récupérés par continuité.
Il m'a peut-être échappé une démarche plus simple...

Exercice 21 : [énoncé]
On peut prendre f nulle sur $[0,1]$, puis pour chaque intervalle $[n, n+1]$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction f affine par morceaux définie par les nouds $f(n) = 0$, $f(n + \frac{1}{n^3}) = n$, $f(n + \frac{2}{n^3}) = 0$ et $f(n+1) = 0$ ce qui définit une fonction f positive continue vérifiant $\int_n^{n+1} f = \frac{1}{n^2}$ et donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ bien que non bornée.

Exercice 22 : [énoncé]
a) L'intégrale étudiée est convergente comme le montre l'intégration par parties
$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
b) La fonction $t \mapsto \sin t/t$ peut être prolongée en 0 en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Soit F sa primitive s'annulant en 0. On a $f(x) = \lim\limits_{+\infty} F - F(x)$. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et
$$f'(x) = -F'(x) = -\frac{\sin x}{x}$$
c) Par intégration par parties,
$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = [tf(t)]_0^x - \int_0^x tf'(t)\,\mathrm{d}t = xf(x) + \int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t$$
Or
$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
donc
$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - x\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
Enfin
$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin t}{t^2}\right]_x^{+\infty} - 2\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3}\,\mathrm{d}t$$
avec
$$\left|\int_x^{+\infty} 2\frac{\sin t}{t^3}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{x^2}$$
donne
$$x\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$
Finalement $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et
$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Exercice 23 : [énoncé]
a) Par récurrence $0 \leqslant u_n \leqslant u_0/2^n$.
b) $\ln(2^{n+1}u_{n+1}) - \ln(2^n u_n) = \ln\left(\frac{\sin(u_n/2)}{u_n/2}\right) \sim -\frac{1}{6}\left(\frac{u_n}{2}\right)^3$ est terme général d'une série convergente donc la suite $(\ln(2^n u_n))$ converge et finalement $(2^n u_n)$ converge vers un réel A strictement positif.
c) $u_n - A2^{-n} = 2^{-n}\sum\limits_{k=n}^{+\infty} 2^k u_k - 2^{k+1}u_{k+1}$. Or
$2^k u_k - 2^{k+1}u_{k+1} \sim \frac{2^{k+1}}{6}\left(\frac{u_k}{2}\right)^3 \sim \frac{A^3}{24.2^{2k}}$.
Par comparaison de reste de série convergente à termes positifs,
$u_n - A2^{-n} \sim 2^{-n}\frac{A^3}{24}\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2^{2k}} = \frac{A^3}{18.2^{-3n}}$.

Exercice 24 : [énoncé]
On a
$$\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$
et
$$n^{3/2} - \left\lfloor n^{3/2}\right\rfloor + n = n + O(1) \sim n$$
donc
$$\frac{\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{3/2} - \left\lfloor n^{3/2}\right\rfloor + n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
ce qui permet de conclure à une absolue convergence.

Exercice 25 : [énoncé]
On a

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^a}\right) = \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right)$$

Par le critère spécial, $\frac{(-1)^n}{n^a}$ est terme général d'une série convergente.
Par comparaison de séries à termes positifs

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right) \sim -\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2a}}$$

est terme général d'une série convergente si, et seulement si, $a > 1/2$.
Finalement, la série étudiée converge si, et seulement si, $a > 1/2$.

Exercice 26 : [énoncé]
On a

$$u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(a+1)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Par suite $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $a = -1$.

Exercice 27 : [énoncé]
Par comparaison série intégral,

$$\sum_{k=2}^{n} \ln^2 k \sim n(\ln n)^2$$

donc

$$u_n = \frac{n^\alpha}{\sum\limits_{k=2}^{n} \ln^2 k} \sim \frac{1}{n^{1-\alpha}(\ln n)^2}$$

Par référence aux séries de Bertrand, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha \leqslant 0$.

Exercice 28 : [énoncé]
$\sqrt{n^2+1} = n + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $u_n = \frac{(-1)^n\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est terme général d'une série convergente.

Exercice 29 : [énoncé]
En développant et après simplification, $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n \in 2\mathbb{Z}$ donc $u_n = -\sin\left((2-\sqrt{3})^n\pi\right)$. Puisque $\left|2-\sqrt{3}\right| < 1$, $u_n \sim -(2-\sqrt{3})^n\pi$ est terme général d'une série absolument convergente.

Exercice 30 : [énoncé]
Par comparaison série intégrale :
Si $\alpha > 0$, $u_n \sim \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$ est terme général d'une série absolument convergente.
Si $-1 < \alpha < 0$, $u_n \sim \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$ n'est pas le terme général d'une série convergente.
Si $\alpha = -1$, $u_n \sim \frac{1}{\ln n}$ n'est pas le terme général d'une série convergente.
Si $\alpha < -1$, $u_n \not\to 0$ et donc $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Exercice 31 : [énoncé]
On remarque

$$v_n \geqslant u_{2^n} + u_{2^n+1} + \cdots + u_{2^{n+1}-1}$$

de sorte que

$$\sum_{k=0}^{n} v_k \geqslant \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} u_k$$

Ainsi, si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ aussi par comparaison de séries à termes positifs.
Aussi

$$u_{2^n} + \cdots + u_{2^{n+1}-1} \geqslant \frac{1}{2}v_{n+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} u_k \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} v_k$$

Ainsi, si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ aussi par comparaison de séries à termes positifs.

Exercice 32 : [énoncé]
Supposons que $\sum v_n$ converge. Pour $n^2 \leqslant k < (n+1)^2$,

$$0 \leqslant u_k \leqslant u_{n^2} \leqslant \frac{v_n}{n^2}$$

donc

$$0 \leqslant \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} u_k \leqslant v_n\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2}$$

ce qui permet d'affirmer que les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum u_n$ sont majorées et donc $\sum u_n$ converge.
Inversement, pour $u_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ on a $v_n = \frac{1}{n}$ de sorte que $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge.

Exercice 33 : [énoncé]
Pour $t \in [0, 1/n]$, on peut affirmer $t^n \in [0, 1/n]$ donc

$$\left| \int_0^{1/n} f(t^n) \, \mathrm{d}t - \frac{1}{n} f(0) \right| \leqslant \frac{1}{n} \sup_{t \in [0,1/n]} |f(t) - f(0)|$$

Par continuité de f en 0, on peut affirmer,

$$\sup_{t \in [0,1/n]} |f(t) - f(0)| \to 0$$

et donc

$$\int_0^{1/n} f(t^n) \, \mathrm{d}t \sim \frac{1}{n} f(0)$$

Ainsi

$$u_n \sim \frac{f(0)}{n^{\alpha+1}}$$

et $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$.

Exercice 34 : [énoncé]
On a

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)^n = \exp\left(-\frac{1}{n^{\alpha-1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)\right)$$

Si $\alpha \geqslant 1$ alors (u_n) ne tend pas vers zéro et $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
Si $\alpha \in]0, 1[$ alors $n^2 u_n \to 0$ et $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 35 : [énoncé]
a) Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 donc la suite (u_n) est de signe constant à partir d'un certain rang ; quitte à passer à l'opposé on peut supposer $u_n > 0$ pour n assez grand.
Posons

$$w_n = \ln((n+1)^\lambda u_{n+1}) - \ln(n^\lambda u_n)$$

On a

$$w_n = \lambda \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n} + v_n\right)$$

est le terme général d'une série absolument convergente. Par conséquent la suite $(\ln(n^\lambda u_n))$ converge et donc $(n^\lambda u_n)$ aussi.
b) Posons $u_n = \frac{n^n}{n! \mathrm{e}^n}$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

En reprenant l'étude qui précède on peut affirmer que $n^{1/2} u_n \to \ell > 0$ donc $\sum u_n$ diverge.
Ce résultat peut être confirmé par la formule de Stirling.

Exercice 36 : [énoncé]
On peut supposer $\alpha > 0$ quitte à passer la suite à l'opposé.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{b-a}{n-b}$$

Posons $v_n = n^{a-b} u_n$. $\ln v_{n+1} - \ln v_n = O\left(1/n^2\right)$ donc $(\ln v_n)$ converge puis

$$u_n \sim \frac{A}{n^{b-a}} \text{ avec } A > 0$$

Par conséquent $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $b - a > 1$.
$(n-b)u_{n+1} = (n-a)u_n$ donc

$$(n+1)u_{n+1} - n u_n = (b+1)u_{n+1} - a u_n$$

En sommant et en notant $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, on obtient $(b+1)(S - \alpha) - aS = 0$ donc

$$S = \frac{(b+1)\alpha}{b+1-a}$$

Exercice 37 : [énoncé]
a) Si $\alpha \leqslant 1$ alors

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$$

et donc $u_n \to 0$ si $a \in [0, 1[$, $u_n \to 1$ si $a = 1$ et (u_n) diverge si $a > 1$.

Si $\alpha > 1$ alors $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)$ converge et donc (u_n) aussi.
b) Cas $\alpha \leqslant 1$ et $a = 1$: $u_n = 1$, $v_n = 0$ et on peut conclure.

Cas $\alpha < 1$ et $a \in [0,1[$: $\ell = 0$, $v_n = u_n$, $n^2 v_n = \mathrm{e}^{2\ln n + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \ln a} \to 0$ car

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Cas $\alpha = 1$ et $a \in [0,1[$: $\ell = 0$, $v_n = u_n = \mathrm{e}^{(\ln n + \gamma + o(1))\ln a} \sim \lambda n^{\ln a}$ donc $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $\ln a < -1$ i.e. $a < -1/\mathrm{e}$.

Cas $\alpha > 1$: $\ell = a^{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}}$,

$$v_n = \ell(\mathrm{e}^{-\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}} - 1) \sim -\ell \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = -\frac{\ell}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

Ainsi $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.
Dans chacun des cas précédents, on peut appliquer le critère spécial aux séries alternées et affirmer que $\sum (-1)^n v_n$ converge.

Exercice 38 : [énoncé]
Pour $t = -1$,

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{i+j} t^{i+j+1} = -(m+1)(n+1)$$

ce qui permet de conclure.
Pour $t \neq -1$,

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{i+j} t^{i+j+1} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i t^{i+1} \frac{1-(-t)^{m+1}}{1+t}$$

Quand $m \to +\infty$,

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{i+j} t^{i+j+1} \to \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{t^{i+1}}{1+t}$$

si $|t| < 1$ et diverge sinon.

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{t^{i+1}}{1+t} = t\frac{1-(-t)^{n+1}}{(1+t)^2}$$

Quand $n \to +\infty$,

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{i+j} t^{i+j+1} \to \frac{t}{(1+t)^2}$$

Exercice 39 : [énoncé]
On a

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = O(n^3)$$

donc la série numérique $\sum \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$ converge absolument
Après décomposition en éléments simples

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} = 18 - 24\ln 2$$

Exercice 40 : [énoncé]
Par sommation géométrique

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (-t^4)^n \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t^4)^{N+1}}{1+t^4} \,\mathrm{d}t$$

Or

$$\left|\int_0^1 \frac{(-t^4)^{N+1}}{1+t^4} \,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 t^{4N+4} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{4N+5} \to 0$$

donc $\sum \frac{(-1)^n}{4n+1}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$$

Enfin

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\ln \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi\right)$$

Exercice 41 : [énoncé]
Le terme $u_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ est bien défini en tant que reste d'une série satisfaisant au critère spécial des séries alternées.

Pour $N \leqslant K$ entiers,

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=n}^{K}\frac{(-1)^k}{k^2}=\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^k}{k^2}+\sum_{k=N+1}^{K}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2}$$

D'une part

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^k}{k^2}=\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k}$$

D'autre part

$$\sum_{k=N+1}^{K}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2}=N\sum_{k=N+1}^{K}\frac{(-1)^k}{k^2}$$

En passant à la limite quand $K\to+\infty$

$$\sum_{n=1}^{N}u_n=\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k}+N\sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$$

Or

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}=O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

donc quand $N\to+\infty$,

$$\sum_{n=1}^{N}u_n\to\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}$$

Ainsi $\sum u_n$ est convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=-\ln 2$$

Exercice 42 : [énoncé]
a) On sait

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n)+\gamma+o(1)$$

donc

$$a_n=H_{3n}-H_n\to\ln(3)=\lambda$$

b) Si on sait

$$H_n=\ln(n)+\gamma+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

les choses vont assez vites... mais sans doute l'examinateur souhaitera la démonstration de ce résultat.

$$a_n=\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{k}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)+\sum_{k=n+1}^{3n}\ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

avec

$$\sum_{k=n+1}^{3n}\ln\left(\frac{k-1}{k}\right)=\ln 3$$

donc

$$a_n-\lambda=\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{k}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$$

Or $\sum\frac{1}{k}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$ est absolument convergente car

$$\frac{1}{k}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\sim-\frac{1}{2k^2}$$

donc $a_n-\lambda=R_n-R_{3n}$ avec

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$$

Or par sommation d'équivalent sur des restes de séries convergentes à termes de signe constant,

$$R_n\sim\sum_{k=n+1}^{+\infty}-\frac{1}{2k^2}\sim-\frac{1}{2n}$$

(le dernier équivalent s'obtenant, soit par comparaison série intégrale, soit par $\frac{1}{k^2}\sim\frac{1}{k(k-1)}$ et sommation télescopique).
Au final

$$a_n-\lambda=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\sim-\frac{1}{3n}$$

Exercice 43 : [énoncé]
a) Après calculs, $|f'(x)|\leqslant 2/x^2$.
b) Par intégration par parties
$\int_{n-1}^{n}f(t)\,\mathrm{d}t=[(t-(n-1)f(t)]_{n-1}^{n}-\int_{n-1}^{n}(t-(n-1))f'(t)\,\mathrm{d}t$ donc
$|u_n|\leqslant\int_{n-1}^{n}(t-(n-1))\,|f'(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{n-1}^{n}|f'(t)|\,\mathrm{d}t$. L'intégrabilité de f' suffit pour conclure.

c) Si la suite $(\cos(\ln n))$ converge alors la suite extraite $(\cos(n\ln 2))$ aussi. Notons ℓ sa limite. Comme $\cos((n+1)\ln 2)+\cos((n-1)\ln 2) = 2\cos(n\ln 2)\cos(\ln 2)$ on obtient à la limite $2\ell = 2\ell\cos(\ln 2)$ et donc $\ell = 0$. Comme
$\cos(2n\ln 2) = 2\cos^2(n\ln 2)-1$ on obtient à la limite $\ell = 2\ell^2-1$ ce qui est incompatible avec $\ell = 0$.
d) $\int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t = -\cos(\ln n)+\cos(\ln(n-1))$. La divergence de la suite $(\cos(\ln n))$ entraîne la divergence de la série $\sum\int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t$ et puisque la série $\sum u_n$ converge, on peut affirmer que $\sum f(n)$ diverge.

Exercice 44 : [énoncé]
Supposons la série $\sum v_n$ convergente. On a $v_n \to 0^+$ donc $1+n^2u_n \to +\infty$ et on en déduit
$$v_n \sim \frac{1}{n^2u_n}$$
puis
$$\sqrt{u_nv_n} \sim \frac{1}{n}$$
Par comparaison de séries à termes positifs, il y a divergence de la série $\sum\sqrt{u_nv_n}$.
Or, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\left(\sum_{k=0}^n\sqrt{u_kv_k}\right)^2 \leqslant \sum_{k=0}^n u_n\sum_{k=0}^n v_k \leqslant \sum_{k=0}^n u_n\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$
On en déduit la divergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 45 : [énoncé]
a) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est positive et décroissante.
Par convergence dominée, $u_n \to 0$.
b) Par l'absurde, si $\sum u_n$ converge alors, par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}\,\mathrm{d}x$$
avec convergence de l'intégrale.
Or, quand $x \to 0^+$
$$\frac{1}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)} \sim \frac{8}{\pi^2x^2}$$
et donc l'intégrale diverge.
On en déduit que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 46 : [énoncé]
Par le changement de variable $u = nt$
$$I_n = \int_0^{+\infty} f(u/n)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$
Par convergence dominée, sachant
$$|f(u/n)| \leqslant \|f\|_\infty\,\mathrm{e}^{-u} = \varphi(u)$$
avec φ intégrable, on obtient
$$I_n \to \int_0^{+\infty} f(0)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = f(0)$$

Exercice 47 : [énoncé]
Pour $x > 0$,
$$x^x = \mathrm{e}^{x\ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x\ln x)^n}{n!}$$
donc
$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \int_{]0,1]}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$
avec
$$f_n(x) = \frac{(x\ln x)^n}{n!}$$
Les fonctions f_n sont continues par morceaux, $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux sur $]0,1]$.
Les fonctions f_n sont intégrables et
$$\int_{]0,1]}|f_n| = \int_{]0,1[}\frac{(-1)^nx^n(\ln x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x$$
Or
$$\int_\varepsilon^1 x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln x)^n\right]_\varepsilon^1 - \frac{n}{n+1}\int_\varepsilon^1 x^n(\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$
donc quand $\varepsilon \to 0$
$$\int_{]0,1]} x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = -\frac{n}{n+1}\int_{]0,1]} x^n(\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

Ainsi

$$\int_{]0,1]} x^n(\ln x)^n \,\mathrm{d}x = (-1)^n \frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n+1}\cdots\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

Par suite

$$\int_0^1 |f_n| \,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

et il y a convergence de la série $\sum \int_0^1 |f_n|$

Par le théorème d'intégration terme à terme, on obtient que l'intégrale $\int_{]0,1]} x^x \,\mathrm{d}x$ est définie et

$$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

puis le résultat voulu.

Exercice 48 : [énoncé]

On applique le théorème de convergence dominée en exploitant f bornée car continue sur segment. On obtient

$$\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t \to f(0)$$

Exercice 49 : [énoncé]

a) Par intégration par parties on obtient une relation de récurrence qui conduit à

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m \,\mathrm{d}x = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

En posant u_n le terme général de la série étudiée, on observe $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \frac{1}{4}$ ce qui assure la convergence de la série.

b) $S_{-1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 x^n(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$. Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on peut permuter et obtenir

$$S_{-1} = \int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{1-x(1-x)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Puisque

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{4n+2}{n+1}\binom{2n}{n}$$

on observe

$$\frac{4}{\binom{2n+2}{n+1}} - \frac{2}{n+1}\frac{1}{\binom{2n+2}{n+1}} = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \quad (\star)$$

En sommant pour n allant de 1 à $+\infty$, on obtient

$$4\left(S_0 - \frac{1}{2}\right) - 2\left(S_{-1} - \frac{1}{2}\right) = S_0$$

puis

$$S_0 = \frac{1+2S_{-1}}{3}$$

c) On multiplie la relation $(\star)$ par $(n+1)^p$ et on développe le $(n+1)^p$ du second membre et en sommant comme ci-dessus, on saura exprimer $3S_p$ en fonction des S_q avec $q < p$.

Exercice 50 : [énoncé]

Quand $p \to +\infty$,

$$f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}} \to \frac{1}{1+x} = f(x)$$

On a

$$f(x) - f_p(x) = \frac{(1+x)^{1/p}-1}{(1+x)^{1+1/p}}$$

Or, pour $\alpha \in]0,1]$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est concave ce qui permet d'affirmer

$$0 \leqslant (1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x$$

pour tout $x \geqslant 0$ et donc

$$|f(x) - f_p(x)| \leqslant \frac{1}{p}\frac{x}{(1+x)^{1+1/p}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{x}{1+x} \leqslant \frac{1}{p}$$

Puisque $\|f - f_p\|_{\infty,\mathbb{R}^+} \leqslant \frac{1}{p}$, la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 51 : [énoncé]

On remarque de $f(1-x) = f(x)$. Pour étudier le comportement de $(f_n(a)) = (f^n(a))$, on peut se limiter à $a \in [0,1/2]$. Etudier le comportement de $(f^n(a))$ équivaut à étudier la suite récurrente définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Une étude élémentaire permet d'affirmer qu'elle est croissante. Si $a = 0$, cette suite est en fait constante, si $a > 0$ cette suite converge vers une limite qui ne peut qu'être $1/2$. On peut alors affirmer qu'il y a convergence simple de (f_n) vers la fonction $f : x \mapsto 1/2$ si $x \in]0,1[$ et 0 sinon. Par non continuité, il y a non convergence uniforme sur $[0,1]$. En revanche la croissance de f sur $[0,1/2]$ permet d'assurer que $\forall a \in]0,1/2]$, $\forall x \in [a,1/2]$, $f_n(x) \geqslant f_n(a)$ ce qui permet de justifier la convergence uniforme de (f_n) sur $[a,1-a]$ pour $a \in]0,1/2]$.

Exercice 52 : [énoncé]
Si $|\omega| > 1$ alors

$$\frac{1}{z-\omega} = -\frac{1}{\omega}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{\omega^n}$$

et la convergence normale sur U de la série assure la convergence uniforme d'une suite de polynômes vers $z \mapsto \frac{1}{z-\omega}$.
Si $|\omega| < 1$, on peut remarquer que pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-ik\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta}-\omega}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}\omega^n\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-i(n+(k+1))\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0$$

Si $z \mapsto P_n(z)$ est une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur U vers $z \mapsto \frac{1}{z-\omega}$ alors

$$\int_0^{2\pi}\overline{P_n(\mathrm{e}^{i\theta})}\frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}-\omega}\,\mathrm{d}\theta \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{|\mathrm{e}^{i\theta}-\omega|} \neq 0$$

Or par le calcul précédent, on peut affirmer $\int_0^{2\pi}\overline{P_n(\mathrm{e}^{i\theta})}\frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}-\omega}\,\mathrm{d}\theta = 0$ et conclure à une absurdité.

Exercice 53 : [énoncé]
a) $\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.
b) Le rayon de convergence de la série entière vaut 1.
Pour $x = 1$, il y a divergence car $\frac{\zeta(n)}{n} \sim \frac{1}{n}$.
Pour $x = -1$, il y a convergence en vertu du critère spécial des séries alternées sachant que la suite $\zeta(n)$ est décroissante positive.
c) Par les séries entières, F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
Par application du critère spécial des séries alternées permettant une majoration du reste, on établir la convergence uniforme de la série de fonctions sur $[-1,0]$ et donc la continuité de sa somme en -1.
d) Pour $x \in]-1,1[$,

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\zeta(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^n}{p^{n+1}}$$

On peut permuter les deux sommes car $\sum_{p\geqslant 1}\left|\frac{x^n}{p^{n+1}}\right|$ converge et $\sum_{n\geqslant 1}\sum_{p=1}^{+\infty}\left|\frac{x^n}{p^{n+1}}\right|$ converge.

$$F'(x) = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{p^{n+1}} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x}{p(p-x)} = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p-x}\right)$$

et on ne peut faire plus simple.

Exercice 54 : [énoncé]
a)

$$\ln f_{n+1}(x) - \ln f_n(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln(n+1) - \ln(x+n+1) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\sum \ln f_{n+1}(x) - \ln f_n(x)$ converge donc la suite $(\ln f_n(x))$ converge puis $(f_n(x))$ converge vers un réel strictement positif.
b)

$$\ln\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(x\ln n + \sum_{k=1}^{n}\ln k - \sum_{k=0}^{n}\ln(x+k)\right)$$

avec $x\ln n + \sum_{k=1}^{n}\ln k - \sum_{k=0}^{n}\ln(x+k) = x\ln n - \ln x - \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$.
Or la série $\sum\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$ est absolument convergente car de terme général en $O\left(1/n^2\right)$ et

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{k} - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right) = x\ln n + \gamma x + o(1) - \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

donc

$$\ln\Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$$

c) Posons $f_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ pour $x > 0$ et $n \geqslant 1$. f_n est $\mathcal{C}^1$, $\sum f_n$ converge simplement et $f_n'(x) = \frac{x}{n(n+x)}$ ce qui permet d'affirmer $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment$[a,b] \subset \mathbb{R}^{+\star}$.

Exercice 55 : [énoncé]
a) $I = \mathbb{R}^+$.
b) Pour $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+\star}$,

$$\|u_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{n^\alpha b \mathrm{e}^{-na}}{n^2+1}$$

donc $\sum u_n$ est une série de fonctions continues convergeant normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^{+\star}$.
c) Après étude de variation,

$$\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+} = u_n(1/n) \sim \frac{1}{n^{3-\alpha}}$$

Il y a convergence normale si, et seulement si, $\alpha < 2$.
d)

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k^\alpha \mathrm{e}^{-k/n}}{k^2+1} \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k^2}{k^2+1}\mathrm{e}^{-k/n} \geqslant \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathrm{e}^{-k/n}$$

Or

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathrm{e}^{-k/n} = \frac{1}{2n}\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)/n}}{1-\mathrm{e}^{-1/n}} \to \frac{1}{2\mathrm{e}}$$

donc $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$ ne peut tendre vers 0 quand $n \to +\infty$.
S'il y avait convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ alors

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty}\|u_k\|_\infty \to 0$$

ceci est à exclure.
e) Si S est continue en 0 alors

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) \leqslant S(1/n) \to S(0) = 0$$

ce qui est encore à exclure.

Exercice 56 : [énoncé]
Pour $|x| \geqslant 1$, la série est grossièrement divergente.
Pour $|x| < 1$,

$$\frac{x^n}{1+x^n} \sim x^n$$

et donc la série est absolument convergente.
La fonction S est définie sur $]-1,1[$.
Posons $u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$.
u_n est de classe $\mathcal{C}^1$, $\sum u_n$ converge simplement,

$$u_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

donc pour $a \in [0,1[$,

$$\|u_n'\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant na^{n-1}$$

ce qui assure la convergence normale de $\sum u_n'$ sur tout segment de $]-1,1[$.
Par suite la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$.

$$S(0) = \frac{1}{2} \text{ donc } S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}$$

Pour $x \in [0,1[$,

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p x^{n(p+1)}$$

Puisque $\sum\limits_{p\geqslant 0}\left|(-1)^p x^{n(p+1)}\right|$ converge et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\left|(-1)^p x^{n(p+1)}\right|$ aussi, on peut permuter les deux sommes et affirmer

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{x^{p+1}}{1-x^{p+1}}$$

On a alors

$$(1-x)S(x) = \frac{1-x}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p u_p(x)$$

avec $u_p(x) = x^{p+1}\frac{1-x}{1-x^{p+1}}$ pour $x \in [0,1[$.
La fonction u_p est continue sur $[0,1[$ et prolonge par continuité en 1 en posant $u_p(1) = 1/(p+1)$.
Le critère spécial des séries alternées s'applique à la série $\sum(-1)^p u_p(x)$ et donc

$$\left\|\sum_{k=p+1}^{\infty}(-1)^k u_k(x)\right\|_\infty \leqslant u_{p+1}(x)$$

et une étude de variation permet d'affirmer $u_{p+1}(x) \leqslant \frac{1}{p+2}$. Ainsi, la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ et donc sa somme est continue en 1. Cela permet d'affirmer

$$(1-x)S(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p+1} = \ln 2$$

et finalement

$$S(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln 2}{1-x}$$

Exercice 57 : [énoncé]
Si $x=1$ alors $u_n(x)=0\to 0$. Si $x\in]0,1]$ alors $u_n(x)\to 0$. La suite (u_n) converge simplement vers la fonction nulle.
$u_n'(x) = n^\alpha x^n - n^{\alpha+1}x^{n-1}(1-x) = n^\alpha x^{n-1}(n-(n+1)x)$.

$$\|u_n\|_\infty = u_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n^\alpha \frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$

Or $\frac{1}{n+1}\sim\frac{1}{n}$ et $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1-\frac{1}{n+1})} = \mathrm{e}^{1+o(1)} \to \mathrm{e}$ donc

$$\|u_n\|_\infty \sim \mathrm{e}\, n^{\alpha-1}$$

Il y a convergence uniforme sur $[0,1]$ si, et seulement si, $\alpha<1$.
Pour tout $x\in[0,1]$, $\sum u_n(x)$ converge, $\|u_n\|_\infty \sim \mathrm{e}\,n^{\alpha-1}$, il y a donc convergence normale sur $[0,1]$ si, et seulement si, $\alpha<0$.
Pour $\alpha\geqslant 0$, $u_n(x)\geqslant x^n(1-x) = v_n(x)$.
Or

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\left(\frac{n}{n+1}\right) \geqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k \to \frac{1}{\mathrm{e}}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\left(\frac{n}{n+1}\right) \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} v_k(1)$$

La série $\sum v_n$ ne converge donc pas uniformément vers $[0,1]$ et par suite $\sum u_n$ non plus.
Enfin pour $a<1$, on a $\|u_n\|_{\infty,[0,a]} = u_n(a)$ et donc (u_n) converge uniformément sur $[0,a]$ et $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,a]$ pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 58 : [énoncé]
Remarquons que pour tout $t\in[0,1]$, $t-t^2\in[0,1/4]$. Pour $x\in[0,1/4]$,

$$|u_{n+1}(x)| \leqslant x\,\|u_n\|_{\infty,[0,1/4]} \leqslant \frac{1}{4}\|u_n\|_{\infty,[0,1/4]}$$

donc aisément $\|u_n\|_{\infty,[0,1/4]} \leqslant \frac{1}{4^n}$ puis, par la remarque initiale, pour tout $x\in[0,1]$,

$$|u_{n+1}(x)| \leqslant \|u_n\|_{\infty,[0,1/4]} \leqslant \frac{1}{4^n}$$

donc $\|u_{n+1}\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \frac{1}{4^n}$ et $\sum u_n$ est normalement convergente.

Exercice 59 : [énoncé]
a) Par la règle de d'Alembert la série converge pour tout $(s,\lambda)\in\mathbb{R}^{+\star}\times\mathbb{C}$.
$\Delta_\lambda :]0;+\infty[$.
b)

$$F_\lambda(s) = \frac{1}{s}\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)}\right)$$

Or

$$\left|1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|\lambda|^n}{n!} = \mathrm{e}^{|\lambda|}$$

donc $F_\lambda(s) \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0$.
c) Puisque

$$\left|\frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)}\right| \leqslant \frac{\lambda^n}{n!}$$

il y a converge normale sur $\mathbb{R}^+$ de la série des fonctions continues $s\mapsto \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)}$. Ceci permet d'affirmer

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)} \xrightarrow[s\to 0]{} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = \mathrm{e}^\lambda$$

et donc

$$F_\lambda(s) \underset{s\to 0^+}{\sim} \frac{\mathrm{e}^\lambda}{s}$$

d) Par intégrations par parties successives :

$$\int_0^1 (1-y)^{s-1}y^n\,\mathrm{d}y = \frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

e)

$$F_\lambda(s) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\int_0^1 (1-y)^{s-1}y^n\,\mathrm{d}y$$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on peut échanger somme et intégrale :

$$F_\lambda(s) = \int_0^1 \mathrm{e}^{\lambda y}(1-y)^{s-1}\,\mathrm{d}y$$

Exercice 60 : [énoncé]
On a

$$\left|\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}\right| \leqslant \frac{1\times 2}{(x+1)(x+2)}\times 1 = \varphi(x)$$

avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$.
Quand $n\to+\infty$,

$$\ln\left(\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}\right) = -\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\to-\infty$$

car $\ln(1+x/k)\sim x/k$ terme général d'une série à termes positifs divergente.
Par suite

$$\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}\to 0$$

puis par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}\mathrm{d}x = 0$$

Exercice 61 : [énoncé]
a) Pour $t\in\,]0,1[$, on peut écrire

$$\frac{t^{a-1}}{1+t^b} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{a+nb-1}$$

Posons

$$S_n : t\mapsto \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{a+kb-1} = t^{a-1}\frac{1-(-1)^{n+1}t^{(n+1)b}}{1+t^b}$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux et la suite (S_n) converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction

$$S : t\mapsto \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$$

elle-même continue par morceaux.
De plus

$$|S_n(t)|\leqslant\frac{2t^{a-1}}{1+t^b} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0,1[$.
Par convergence dominée, on obtient

$$\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t\to\int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$$

avec convergence de l'intégrale introduite.
Or

$$\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\int_0^1(-1)^k t^{a+kb-1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{a+kb}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$$

avec convergence de la série introduite..
b) Après calculs

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Exercice 62 : [énoncé]
Pour $t\in\,]0,1[$, on peut écrire

$$\frac{\ln t}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}t^{2n}\ln t$$

Or

$$\int_0^1 t^{2n}\ln t\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{(2n+1)^2}$$

Sachant que la série des intégrales des valeurs absolues converge, le théorème d'intégration terme à terme de Fubini donne

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = -\frac{3\zeta(2)}{4}$$

avec en substance la convergence de l'intégrale étudiée.

Exercice 63 : [énoncé]
La série $\sum a_p \frac{t^p}{p!}$ est convergente car

$$\left|a_p \frac{t^p}{p!}\right| \leqslant \|(a_n)\|_\infty \frac{t^p}{p!}$$

De plus sa somme est continue car on peut aisément établir la convergence normale sur tout segment.
Enfin

$$\left|\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!}\right| \leqslant \|(a_n)\|_\infty \,\mathrm{e}^t$$

permet d'assurer l'existence de l'intégrale étudiée.
Posons

$$f_p(t) = a_p \frac{t^p}{p!}\mathrm{e}^{-2t}$$

La série de fonction $\sum f_p$ convergence simplement.
Les fonctions f_p et $\sum\limits_{p=n}^{+\infty} f_p$ sont continues par morceaux.
Les fonctions f_p sont intégrables sur $[0,+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} |f_p(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{|a_p|}{2^{p+1}} = O\left(\frac{1}{2^{p+1}}\right)$$

est terme générale d'une série convergente.
Par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\left(\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!}\right)\mathrm{d}t = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{a_p}{2^{p+1}}$$

Enfin, cette expression tend vers 0 en tant que reste d'une série convergente.

Exercice 64 : [énoncé]
Posons

$$f_n : x \mapsto (-1)^n \mathrm{e}^{-a_n x}$$

Les fonctions f_n sont continues et en vertu du critère spécial des séries alternées, on peut affirmer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. De plus, par le critère spécial des séries alternées, on a

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \mathrm{e}^{-a_k x}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-a_{n+1}x}$$

ce qui permet d'établir que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$. On en déduit que la fonction

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-a_n x}$$

est définie et continue sur $]0,+\infty[$.
Pour intégrer terme à terme, exploiter les sommes partielles et le théorème de convergence dominée. Posons

$$S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{e}^{-a_k x}$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux et la suite (S_n) converge simplement vers S elle-même continue par morceaux.
En vertu du critère spécial des séries alternées, on a

$$0 \leqslant S_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-a_0 x} = \varphi(x)$$

avec φ intégrable.
Par convergence dominée, on obtient

$$\int_0^{+\infty} S_n(x)\,\mathrm{d}x \to \int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x$$

avec convergence de l'intégrale introduite.
Or

$$\int_0^{+\infty} S_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_0^{+\infty} (-1)^k \mathrm{e}^{-a_k x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a_k}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n} = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-a_n x}\,\mathrm{d}x$$

avec en substance convergence de la série.

Exercice 65 : [énoncé]
Pour $t > 0$,

$$t^t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(t\ln t)^n}{n!}$$

Par intégration par parties

$$\int_0^1 (t\ln t)^n \,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

La convergence de la série des intégrales des valeurs absolues assure la convergence de l'intégrale du second membre et permet d'échanger somme et intégrale pour obtenir

$$\int_0^1 t^{-t}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{(n+1)}}$$

qui permet de conclure.

Exercice 66 : [énoncé]
On sait que la fonction ζ est continue.
$\int_2^{+\infty} (\zeta(x)-1)\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\,\mathrm{d}x$ avec $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{n^x} = \frac{1}{n^2\ln n}$.
La convergence de la série des intégrales des valeurs absolues assure la convergence de l'intégrale du premier membre et permet de permuter intégrale et somme. On obtient alors $\int_2^{+\infty} (\zeta(x)-1)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2\ln n}$.

Exercice 67 : [énoncé]
Posons

$$f_n : x \mapsto \frac{x}{n(1+n^2x^2)}$$

Sachant

$$2\,|nx| \leqslant 1 + n^2x^2$$

on a

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions f_n étant continue, la somme S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2}$$

Soit $a > 0$. Pour $|x| \geqslant a$,

$$|f_n'(x)| \leqslant \frac{1+n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2} = \frac{1}{n(1+n^2x^2)} \leqslant \frac{1}{n(1+n^2a^2)}$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^\star$.
La somme S est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$.
Montrons que la fonction S n'est pas dérivable en 0.

$$\frac{1}{x}\left(S(x)-S(0)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$$

Par comparaison avec une intégrale

$$\frac{1}{x}\left(S(x)-S(0)\right) \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2x^2)}$$

Par le changement de variable $u = tx$

$$\frac{1}{x}\left(S(x)-S(0)\right) \geqslant \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{u(1+u^2)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

car la fonction positive $u \mapsto 1/u(1+u^2)$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$.

Exercice 68 : [énoncé]
On a $u_n \geqslant v_n = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-t}\cos^{2n} t\,\mathrm{d}t$.
Si la série numérique $\sum u_n$ converge alors, par comparaison de série à termes positifs, la série $\sum v_n$ converge aussi. Par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini, il y a alors intégrabilité sur $]0,\pi/2]$ de la fonction

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos^{2n} t = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\cos^2 t} = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin^2 t}$$

Or quand $t \to 0^+$

$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin^2 t} \sim \frac{1}{t^2}$$

qui n'est pas intégrable sur $]0,\pi/2]$.
C'est absurde, on en conclut que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 69 : [énoncé]
a) $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$ donc

$$\|x\| \leqslant \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$

Aussi $\|y\| \leqslant \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$ donc

$$\|x\| + \|y\| \leqslant 2\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$

b) Sur $\mathbb{R}^2$ avec $\|\| = \|\|_\infty$, il y a égalité pour $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$.
c)

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leqslant 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Or $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$ donne

$$\|x\|^2 = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + 2\|x\|^2 - 2\|y\|^2\right)$$

aussi

$$\|y\|^2 = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 - 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\right)$$

donc

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right)$$

puis

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leqslant 2\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}^2$$

qui permet de conclure.
d) Non, sur $\mathbb{R}^2$, il y a égalité pour $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$.

Exercice 70 : [énoncé]
a) $\|\,.\,\|_\varphi : E \to \mathbb{R}^+$ est bien définie.
Si $\|f\|_\varphi = 0$ alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive, $t \mapsto |f(t)|\varphi(t)$ est nulle. En dehors des valeurs où φ est nulle, la fonction f s'annule. Or φ ne s'annule qu'un nombre fini de fois, donc par un argument de continuité, f s'annule aussi en ces points et finalement $f = \tilde{0}$.
Les propriétés $\|\lambda f\|_\varphi = |\lambda|\,\|f\|_\varphi$ et $\|f+g\|_\varphi \leqslant \|f\|_\varphi + \|g\|_\varphi$ sont immédiates.
b) Considérons la fonction φ_2/φ_1. Cette fonction est définie et continue sur le segment $[0,1]$, elle y est donc bornée et il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant $\forall x \in [0,1], \varphi_2(x) \leqslant M\varphi_1(x)$. On en déduit $\|\,.\,\|_{\varphi_1} \leqslant M\,\|\,.\,\|_{\varphi_2}$. Ainsi $\|\,.\,\|_{\varphi_1}$ est dominée par $\|\,.\,\|_{\varphi_2}$ et par un argument symétrique $\|\,.\,\|_{\varphi_2}$ est dominée par $\|\,.\,\|_{\varphi_1}$.
c) On a facilement $\|\,.\,\|_{x^2} \leqslant \|\,.\,\|_x$.
Pour $f_n(x) = (1-x)^n$, on a

$$\|f_n\|_x = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

et

$$\|f_n\|_{x^2} = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

donc il n'existe pas de constante $M \geqslant 0$ telle que $\|\,.\,\|_x \leqslant M\,\|\,.\,\|_{x^2}$. Les deux normes $\|\,.\,\|_x$ et $\|\,.\,\|_{x^2}$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 71 : [énoncé]
a) L'application $N : E \to \mathbb{R}^+$ proposée vérifie aisément $N(\lambda f) = |\lambda|\,N(f)$ et $N(f+g) \leqslant N(f) + N(g)$. Le problème est l'obtention de $N(f) = 0 \Rightarrow f = 0$.
Par récurrence sur $d \in \mathbb{N}^\star$.
Cas $d = 1$: $E = \text{Vect}(g)$ avec $g \neq \tilde{0}$. Un réel $a_1 \in [0,1]$ tel que $g(a_1) \neq 0$ convient.
Supposons la propriété au rang $d \geqslant 1$.
Soit E un sous-espace vectoriel de dimension $d+1$ de $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Il existe une fonction g non nulle élément de E et il existe $a_{d+1} \in [0,1]$ tel que $g(a_{d+1}) \neq 0$.
Considérons alors $H = \{f \in E / f(a_{d+1}) = 0\}$. On vérifie aisément $E = H \oplus \text{Vect}g$.
Puisque H est alors de dimension d, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour introduire $(a_1, \ldots, a_d) \in [0,1]^d$ tel que $h \mapsto \sum_{i=1}^{d} |h(a_i)|$ soit une norme sur$H$.
Considérons alors $N : f \in E \mapsto \sum_{i=1}^{d+1} |f(a_i)|$ et montrons $N(f) = 0 \Rightarrow f = 0$.
Supposons $N(f) = 0$ et donc $|f(a_1)| = \ldots = |f(a_d)| = |f(a_{d+1})| = 0$. Puisque $E = H \oplus \text{Vect}g$, on peut écrire $f = h + \lambda g$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La propriété $|f(a_{d+1})| = 0$ entraîne $\lambda = 0$ et la propriété $|f(a_1)| = \ldots = |f(a_d)| = 0$ entraîne alors $h = 0$. On peut donc conclure $f = 0$.
Récurrence établie.
b) Introduisons $E' = E + \text{Vect}f$ de dimension d ou $d+1$. Sur E', on peut introduire une norme du type précédent et l'hypothèse de convergence simple donne alors que (f_n) tend vers f pour la norme considérée. Or sur E' de dimension finie toutes les normes sont équivalentes et donc (f_n) tend aussi vers f pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$ ce qui signifie que (f_n) converge uniformément vers f.
Il reste à montrer que $f \in E$. Par l'absurde, supposons que $f \notin E$. On a alors $E' = E \oplus \text{Vect}f$. Considérons alors la projection p sur $\text{Vect}f$ parallèlement à E. C'est une application linéaire au départ d'un espace de dimension finie, elle est donc continue. Or $p(f_n) = 0 \to 0$ et $p(f) = f \neq 0$. C'est absurde.

Exercice 72 : [énoncé]
Soit $\varphi : U \to U$ morphisme continue. L'application $\theta \in \mathbb{R} \to \varphi(\mathrm{e}^{i\theta})$ est continue et à valeurs dans U donc par le théorème de relèvement, il existe une fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $\varphi(\mathrm{e}^{i\theta}) = \mathrm{e}^{i\psi(\theta)}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Puisque φ est un morphisme, on obtient : $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \psi(\theta + \theta') - (\psi(\theta) + \psi(\theta')) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Or l'application $(\theta, \theta') \mapsto \psi(\theta + \theta') - (\psi(\theta) + \psi(\theta'))$ est continue sur le connexe $\mathbb{R}^2$, son image est donc connexe et cette application est donc constante. Sans perte de généralités, on peut désormais supposer $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \psi(\theta + \theta') = \psi(\theta) + \psi(\theta')$.
L'application ψ apparaît désormais comme étant un endomorphisme continue de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même, il est alors connu qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \psi(\theta) = a\theta$. De plus, puisque $\varphi(\mathrm{e}^{2i\pi}) = 1$, $a \in \mathbb{Z}$ et finalement $\varphi : z \to z^a$ pour un certain $a \in \mathbb{Z}$. Réciproquement ces applications sont des endomorphismes continus de $(U, \times)$.

Exercice 73 : [énoncé]
Considérons $\alpha_0, \dots, \alpha_d$ des réels deux à deux distincts et $\varphi : \mathbb{R}_d[X] \to \mathbb{R}^{d+1}$ définie par
$$\varphi(P) = (P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_d))$$
L'application φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies, c'est aussi une application linéaire continue car les espaces engagés sont de dimensions finies et il en est de même de φ^{-1}.
En notant f la limite simple de (f_n), on a $\varphi(f_n) \to (f(\alpha_0), \dots, f(\alpha_d))$. En notant P l'élément de $\mathbb{R}_d[X]$ déterminé par $\varphi(P) = (f(\alpha_0), \dots, f(\alpha_d))$, on peut écrire $\varphi(f_n) \to \varphi(P)$. Par continuité de l'application φ^{-1}, on a donc $f_n \to P$ dans $\mathbb{R}_d[X]$. En choisissant sur $\mathbb{R}_d[X]$, la norme équivalente $\|\,.\,\|_{\infty,[a,b]}$, on peut affirmer que (f_n) converge uniformément vers P sur le segment $[a, b]$.
En particulier (f_n) converge simplement vers P et en substance $P = f$.

Exercice 74 : [énoncé]
Si la forme linéaire est continue assurément son noyau est fermé car image réciproque du fermé $\{0\}$.
Inversement, supposons que φ est une forme linéaire discontinue.
Pour tout $k \in \mathbb{R}^+$, il existe alors $x \in E$ tel que
$$|\varphi(x)| > k\,\|x\|$$
En prenant $k = n \in \mathbb{N}$, on définit ainsi une suite (x_n) d'éléments de E vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$|\varphi(x_n)| > n\,\|x_n\|$$
Posons alors
$$y_n = \frac{1}{\varphi(x_n)} x_n$$
On a $\varphi(y_n) = 1$ et $\|y_n\| \leqslant 1/n$ donc $y_n \to 0$.
Considérons enfin $z_n = y_n - y_0$.
On a $\varphi(z_n) = 0$ et donc $z_n \in \ker \varphi$ et $z_n \to -y_0 \notin \ker \varphi$.
Ainsi $\ker \varphi$ n'est pas fermé.

Exercice 75 : [énoncé]
a) Notons C l'espace des suites convergentes de $\ell^\infty(\mathbb{R})$.
Soit (u^n) une suite convergente d'éléments de C de limite u^∞.
Pour chaque n, posons $\ell^n = \lim u^n = \lim\limits_{p\to+\infty} u_p^n$. Puisque la suite (u^n) converge celle-ci est de Cauchy pour $\|\|_\infty$ ce qui permet d'établir que la suite réelle (ℓ^n) est elle-même de Cauchy. Posons ℓ^∞ sa limite. Puisque $\left|u_p^\infty - \ell^\infty\right| \leqslant \left|u_p^\infty - u_p^n\right| + \left|u_p^n - \ell^n\right| + |\ell^n - \ell^\infty|$ on peut par les epsilon établir $\lim\limits_{p\to+\infty} u_p^\infty = \ell^\infty$.
b) Notons A l'espace des suites dont le terme général est terme général d'une série absolument convergente.
Soit (u^n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall p \in \mathbb{N}, u_p^n = \frac{1}{(p+1)^{1+1/n}}$.
La suite (u^n) est une suite d'éléments de A et une étude en norme $\|\|_\infty$ permet d'établir que $u^n \to u^\infty$ avec $u_p^\infty = \frac{1}{p+1}$. La suite u^∞ n'étant pas élément de A, la partie A n'est pas fermée.

Exercice 76 : [énoncé]
a) Cf. cours.
b) Supposons $(a_n^p) \in F \to (a_n)$.
$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^p - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n^p - a_n| \to 0$$
donc $(a_n) \in F$ et F est fermé.
Soit $a = (a_n) \in F$ (il en existe). Posons $e = (1, 0, 0, \dots)$.
$$\forall \alpha > 0, a + \alpha e \notin F \text{et } \|a - (a + \alpha e)\| = \alpha$$
donc $\bar{B}(a, \alpha) \not\subset F$ et F n'est pas ouvert.
Posons $\alpha^p = (p + 1, -p, 0, 0, \dots)$.
$$\alpha^p \in F \text{ et } \|\alpha^p\| \to +\infty$$
donc F n'est pas borné.

Exercice 77 : [énoncé]
Soit $P \in O_n$. En notant $x_1 < \ldots < x_n$ ses racines, on peut écrire
$P = \alpha(X - x_1) \ldots (X - x_n)$ avec $\alpha \neq 0$.
Posons $y_1, \ldots, y_{n-1}$ les milieux des segments $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$.
Posons aussi $y_0 \in]-\infty, x_1[$ et $y_n \in]x_n, +\infty[$.
$P(y_0)$ est du signe de $(-1)^n\alpha$, $P(y_1)$ est du signe de $(-1)^{n-1}\alpha, \ldots$, $P(y_{n-1})$ est du signe de $(-1)\alpha$, $P(y_n)$ du signe de α.
Considérons maintenant l'application $f_i : Q \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto Q(y_i)$.
L'application f_i est continue et donc $f_i(\pm\mathbb{R}^{+\star})$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}_n[X]$.
Considérons U l'intersection des $f_0^{-1}\left((-1)^n\mathbb{R}^{+\star}\right)$,
$f_1^{-2}\left((-1)^{n-1}\mathbb{R}^{+\star}\right), \ldots, f_n^{-1}(\mathbb{R}^{+\star})$.
Les éléments de U sont des polynômes réels alternant de signe entre
$y_0 < y_1 < \ldots < y_n$. Par application du théorème des valeurs intermédiaires, un tel polynôme admet n racines distinctes et donc est scindé à racines simples. Ainsi $U \subset O_n$. Or $P \in U$ et U est ouvert donc U est voisinage de P puis O_n est voisinage de P.
Au final O_n est ouvert car voisinage de chacun de ses éléments.
Dans le cas $n = 1$: $F_n = O_n$ et donc F_n est ouvert.
Dans le cas $n = 2$: F_n réunit les polynômes $P = aX^2 + bX + c$ avec $b^2 - 4ac > 0$.
L'application $P \mapsto b^2 - 4ac$ étant continue, on peut affirmer que F_n est encore ouvert car image réciproque d'un ouvert pas une application continue.
Dans le cas $n \geqslant 3$: $P_n = X(1 + X^2/n)$ est une suite de polynômes non scindés convergeant vers X scindé à racines simples. Par suite F_n n'est pas ouvert.

Exercice 78 : [énoncé]
a) Soit f solution. Formons $A = \{x \in [0,1] \,/\, f(x) = x\}$.
Par double inclusion, on vérifie $A = \mathrm{Im} f$. On en déduit que A est un segment de $\mathbb{R}$ de la forme $[\alpha, \beta]$.
Pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, $f(x) = x$ et pour tout $x \in [0,1] \setminus [\alpha, \beta]$, $f(x) \in [\alpha, \beta]$ car $f(f(x)) = f(x)$.
Inversement, une telle fonction continue est solution.
b) Soit f solution dérivable.
Si $\alpha = \beta$ alors f est constante égale à cette valeur commune.
Si $\alpha < \beta$ alors $f'(\alpha) = f'_d(\alpha) = 1$ car $f(x) = x$ sur $[\alpha, \beta]$.
Par suite, si $\alpha > 0$, f prend des valeurs strictement inférieur à α ce qui est contradictoire avec l'étude qui précède. On en déduit $\alpha = 0$. De même on montre $\beta = 1$ et on conclut $f : x \in [0,1] \mapsto x$.

Exercice 79 : [énoncé]
1ère méthode (nécessitant quelques résultats non triviaux mais intuitifs sur la codimension)
Par définition, un hyperplan H de E est un sous-espace vectoriel de codimension 1. Son adhérence $\bar{H}$ est aussi un sous-espace vectoriel et, puisque contenant H, sa codimension vaut 0 ou 1.
Si $\bar{H}$ est de codimension 0 alors $\bar{H} = E$ ce qui signifie que H est dense dans E.
Si $\bar{H}$ est de codimension 1, puisque $\bar{H}$ contient l'hyperplan H, on a $\bar{H} = H$ et donc $\bar{H}$ est fermé.
2ème méthode (plus laborieuse)
Par définition un hyperplan H de E est un sous-espace vectoriel de codimension 1. Il existe donc un vecteur $a \in E$ non nul vérifiant

$$H \oplus \mathrm{Vect}(a) = E$$

Supposons que H ne soit pas fermé. Il existe alors une suite (x_n) d'éléments de H convergeant vers un élément x n'appartenant pas à H. On peut écrire $x = h + \lambda a$ avec $h \in H$ et $\lambda \neq 0$. En considérant $y_n = \frac{1}{\lambda}(x_n - h)$, on construit une suite (y_n) d'éléments de H convergeant vers a à partir de laquelle il est désormais facile d'établir que H est dense dans E. En effet pour tout $z \in E$, on peut écrire $z = k + \mu a$ avec $k \in H$ et $\mu \in \mathbb{R}$ de sorte que la suite de terme général $z_n = k + \mu y_n$ est une suite d'éléments de H convergeant vers z.

Exercice 80 : [énoncé]
Soit f une fonction élément de E. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel A vérifiant

$$\int_A^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$$

Considérons alors la fonction $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = 1$ pour $t \in [0, A]$, $\varphi(t) = 0$ pour $t \geqslant A + 1$ et $\varphi(t) = 1 - (t - A)$ pour $t \in [A, A+1]$. La fonction $f\varphi$ est éléments de E_0 et

$$\|f - f\varphi\|_2 \leqslant \sqrt{\int_A^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant \varepsilon$$

Ainsi E_0 est dense dans E.
Pour montrer maintenant que F est dense dans E, nous allons établir que F est dense dans E_0.
Soit f une fonction élément de E_0. Remarquons

$$\int_0^{+\infty} \left(f(t) - P(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t^2/2}\right)^2 \mathrm{d}t \underset{u=\mathrm{e}^{-t}}{=} \int_0^1 \left(f(-\ln u)\mathrm{e}^{(\ln u)^2/2} - P(u)\right)^2 \frac{\mathrm{e}^{-(\ln u)^2}}{u}\mathrm{d}u$$

La fonction $u \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-(\ln u)^2}}{u}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $\sqrt{u}\frac{\mathrm{e}^{-(\ln u)^2}}{u} \xrightarrow[u \to 0]{} 0$.

La fonction $g : u \mapsto f(-\ln u)\mathrm{e}^{(\ln u)^2/2}$ peut-être prolongée par continuité en 0 car f est nulle en dehors d'un segment. Par le théorème de Weierstrass, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\|g - P\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \varepsilon$ et pour $\varphi : t \mapsto P(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t^2/2}$ on a alors

$$\|f - \varphi\|_2 \leqslant \lambda\varepsilon \text{ avec } \lambda = \sqrt{\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(\ln u)^2}}{u}\,\mathrm{d}u}$$

Cela permet de conclure à la densité proposée.

Exercice 81 : [énoncé]
a) Par le théorème de Weierstrass, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

$$0 \leqslant \int_a^b f^2 = \int_a^b f(f - P) + \int_a^b fP = \int_a^b f(f - P) \leqslant (b - a)\|f\|_\infty \varepsilon$$

En faisant $\varepsilon \to 0$, on obtient $\int_a^b f^2 = 0$ et donc $f = 0$.
b) L'intégrale étudiée est bien définie. Par intégration par parties,

$$(n + 1)I_n = (1 - i)I_{n+1}$$

Or $I_0 = \frac{1+i}{2}$ donc

$$I_n = \frac{(1 + i)^{n+1}}{2^{n+1}}n!$$

c) $I_{4p+3} \in \mathbb{R}$ donc

$$\int_0^{+\infty} x^{4p+3}\sin(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 0$$

puis

$$\int_0^{+\infty} u^p\sin(u^{1/4})\mathrm{e}^{-u^{1/4}}\,\mathrm{d}u = 0$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 82 : [énoncé]
Cas où la matrice A inversible :
Pour

$$P = \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ O_n & I_n \end{pmatrix}$$

on a

$$MP = \begin{pmatrix} A & O_n \\ C & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\det M = \det(MP) = \det A \times \det(-CA^{-1}B + D)$$

Or

$$\det A \times \det(-CA^{-1}B + D) = \det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD - BC)$$

car la matrice C commute avec les matrices A et B.
On en déduit

$$\det M = \det(AD - BC)$$

Cas général :
Pour $p \in \mathbb{N}^\star$ assez grand, la matrice $A_p = A + 1/pI_n$ est inversible et les matrices A_p, B, C, D commutent deux à deux. Si on pose

$$M_p = \begin{pmatrix} A_p & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

l'étude qui précède donne

$$\det M_p = \det(A_pD - BC)$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient à la limite

$$\det M = \det(AD - BC)$$

Il est alors immédiat de conclure que l'inversibilité de M équivaut à celle de $AD - BC$.

Exercice 83 : [énoncé]
Pour $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$$

et par intégration de série entière

$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(2n + 1)}x^{2n+1}$$

donc

$$e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!k!(2k+1)}x^{2n+1}$$

De plus f est solution de l'équation différentielle

$$f'(x)+2xf(x)=1$$

donc $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ avec

$$a_0=0, a_1=1 \text{ et } (n+2)a_{n+2}+2a_n=0$$

Ceci donne

$$a_{2n}=0 \text{ et } a_{2n+1}=\frac{-2}{2n+1}a_{2n-1}=\frac{(-1)^n4^nn!}{(2n+1)!}$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!k!(2k+1)}=\frac{(-1)^n4^nn!}{(2n+1)!}$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}\binom{n}{k}=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}=\frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

puis la relation voulue.

Exercice 84 : [énoncé]
a) En posant $Y=X-1$,

$$\frac{1}{(X+1)^m(X-1)^n}=\frac{1}{Y^n(Y+2)^m}$$

Pour $Y\in\left]-1/2,1/2\right[$,

$$\frac{1}{(Y+2)^m}=\frac{1}{2^m}\frac{1}{\left(1+\frac{Y}{2}\right)^m}=\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{-m(-m-1)\dots(-m-k+1)}{k!}\frac{Y^k}{2^k}$$

Après simplifications

$$\frac{1}{(Y+2)^m}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2^{m+k}}\binom{m+k-1}{k}Y^k$$

On en déduit que la partie polaire relative au pôle 1 est

$$\frac{a_0}{(X-1)^n}+\dots+\frac{a_{n-1}}{X-1}=\frac{a_0}{Y^n}+\dots+\frac{a_{n-1}}{Y}$$

avec

$$a_k=\frac{(-1)^k}{2^{m+k}}\binom{m+k-1}{k}$$

De même, en posant $Z=X+1$, la partie polaire relative au pôle -1 est

$$\frac{b_0}{(X+1)^m}+\dots+\frac{b_{m-1}}{X+1}=\frac{b_0}{Z^m}+\dots+\frac{b_{m-1}}{Z}$$

avec

$$b_k=\frac{(-1)^n}{2^{n+k}}\binom{n+k-1}{k}$$

Enfin, puisque de partie entière nulle, la fraction rationnelle étudiée est la somme des deux parties polaires proposées.
b) En réduisant chaque partie polaire au même dénominateur, on obtient

$$\frac{1}{(X+1)^m(X-1)^n}=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}a_k(X-1)^k}{(X-1)^n}+\frac{\sum_{k=0}^{m-1}b_k(X+1)^k}{(X+1)^m}$$

Par conséquent, on posant

$$U(X)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k(X-1)^k \text{ et } V(X)=\sum_{k=0}^{m-1}b_k(X+1)^k$$

la poursuite de la réduction au même dénominateur du calcul précédent donne

$$(X+1)^mU(X)+(X-1)^nV(X)=1$$

Exercice 85 : [énoncé]
Soit

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+2}}{3n+2}$$

somme de série entière définie sur $\left]-1,1\right[$.

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n+1}=\frac{x}{1-x^3}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+2)\times 3^n}=\sqrt[3]{9}S\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)=\sqrt[3]{9}\int_0^{1/\sqrt[3]{3}}\frac{t\mathrm{d}t}{1-t^3}$$

ce qui donne un résultat assez monstrueux :

$$9^{(1/3)}(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan((\frac{2}{9}3^{(2/3)}+\frac{1}{3})\sqrt{3})+\frac{1}{6}\ln(3)+\frac{1}{6}\ln(3+3^{(1/3)}+3^{(2/3)})-\frac{1}{3}\ln(-3^{(2/3)}+3)+\frac{1}{18}\sqrt{3}\pi)$$

fourni par Maple.

Exercice 86 : [énoncé]
Puisque la suite (a_n) est bornée mais ne tend par vers 0 (car $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre décimal).
On peut affirmer $R=1$ et la série entière diverge en 1 et -1. L'intervalle cherché est donc $]-1,1[$.

Exercice 87 : [énoncé]
Pour $x\neq 0$, posons $u_n=\pi^{\sqrt{n^2+2n}}x^{2n}$. Après calculs $\frac{u_{n+1}}{u_n}\to\pi x^2$ donc $R=1/\sqrt{\pi}$.

Exercice 88 : [énoncé]
Série entière et série entière dérivée ont même rayon de convergence. Etudions alors le rayon de convergence de $\sum\cos((n+1)\alpha)x^n$. $(\cos((n+1)\alpha))$ est bornée donc $R\geqslant 1$ et ne tend pas vers 0 donc $R\leqslant 1$ et finalement $R=1$.

Exercice 89 : [énoncé]
a) On sait que $\sum a_nx^n$ et $\sum na_nx^n$ ont le même rayon de convergence R. Puisque $a_n=o(a_n\ln n)$ et $a_n\ln n=o(na_n)$ on peut affirmer que $\sum(a_n\ln n)x^n$ a aussi pour rayon de convergence R. De plus $a_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim a_n\ln n$ donc $\sum\left(a_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n$ est encore de rayon de convergence R.
b) Notons que $\sum\ln n\,x^n$ a pour rayon de convergence $R=1$. On sait $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+o(1)$ donc $\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ est borné par un certain M.
Par suite

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\ln n\,x^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}x^n\right|\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}Mx^n=\frac{Mx}{1-x}=O\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

quand $x\to 1^-$.
Or par produit de Cauchy

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}x^n=-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\ln n\,x^n\underset{x\to 1^-}{\sim}-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

Exercice 90 : [énoncé]
Pour $x\neq 0$, posons $u_n=\frac{x^{2n+1}}{3n+2}$. $\frac{u_{n+1}}{u_n}\to x^2$ donc $R=1$.
La fonction somme S est impaire, on se limite alors à $x>0$.

$$\sqrt{x}S(x^{3/2})=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+2}}{3n+2}$$

or

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+2}}{3n+2}=\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}t^{3n+1}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{t}{1-t^3}\,\mathrm{d}t$$

donc $S(x)=\frac{1}{x^{4/3}}\int_0^{x^{2/3}}\frac{t}{1-t^3}\,\mathrm{d}t$ et il ne reste plus qu'à décomposer en éléments simples etc.

$$S(x)=\frac{1}{6x^{4/3}}\ln\frac{x^{4/3}+x^{2/3}+1}{x^{4/3}-2x^{2/3}+1}-\frac{1}{x^{4/3}\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2x^{2/3}+1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\pi}{6}\right)$$

Exercice 91 : [énoncé]
On a $a_{n+1}=\frac{n+1}{2n+3}a_n$. Par application de la règle de d'Alembert, on obtient $R=2$.
La relation $(2n+3)a_{n+1}-(n+1)a_n$ avec $a_0=1$ permet d'affirmer que la somme S de la série entière $\sum a_nx^n$ est solution sur $]-2,2[$ de l'équation différentielle

$$x(x-2)S'(x)+(x-1)S(x)+1=0$$

La recherche de solution définie et continue en 0 donne

$$S(x)=\frac{\arcsin(x-1)+\frac{\pi}{2}}{\sqrt{x(2-x)}}\text{ pour }x>0$$

et

$$S(x)=\frac{\operatorname{arg\,ch}(1-x)}{\sqrt{x(x-2)}}\text{ pour }x<0$$

Exercice 92 : [énoncé]
a) Posons $a_n = \frac{n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)} \neq 0$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n+3} \to \frac{1}{2}$. $R = 2$.
b) On sait que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t)\mathrm{d}t = \frac{2^n n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{x^n}{2^n}\sin^{2n+1}(t)\mathrm{d}t$$

Par convergence uniforme,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{x^n}{2^n}\sin^{2n+1}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}\sin^{2n+1}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin t}{2 - x\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{(2-x) + x\cos^2 t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(2-x)+xu^2}$$

puis
si $x > 0$ alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{2}{\sqrt{x(2-x)}}\arctan\sqrt{\frac{x}{2-x}}$$

Si $x < 0$ alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{2}{\sqrt{-x(2-x)}}\operatorname{argth}\sqrt{\frac{-x}{2-x}}$$

Exercice 93 : [énoncé]
Pour $|x| < 1$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\left(\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right)\right) = \frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$$

Après décomposition en éléments simples

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\left(\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right)\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{1-x\mathrm{e}^{i\alpha}} - \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha}}{1-x\mathrm{e}^{-i\alpha}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sin(n\alpha)x^{n-1}$$

Par intégration de série entière, on obtient la relation proposée.

Exercice 94 : [énoncé]
a) Une involution de $\{1,\dots,n\}$ peut fixer l'élément n ou non.
Il y a exactement I_{n-1} involutions de $\{1,\dots,n\}$ fixant n.
Si une involution ne fixe pas n, elle l'échange avec un autre élément a de $\{1,\dots,n-1\}$. Il y a $n-1$ valeurs possibles pour a, l'involution alors obtenue envoyant n sur a et a sur n réalise aussi par restriction une involution sur $\{1,\dots,n\}\setminus\{a,n\}$: il y en a exactement $(n-1)I_{n-2}$.
Au final, on obtient $I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$.
b) Une involution est bijective donc $I_n \leqslant n!$. Puisque $\frac{I_n}{n!} = O(1)$, on a $R \geqslant 1$.
c) $(1+x)S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{I_n}{n!}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_{n-1}}{(n-1)!}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_n - nI_{n-1}}{n!}x^n =$
$1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_{n+1}}{n!}x^n = S'(x)$.
d) La résolution de l'équation différentielle linéaire, sachant $S(0) = 1$, donne $S(x) = \mathrm{e}^{x+\frac{1}{2}x^2}$.
Or $\mathrm{e}^{x+\frac{1}{2}x^2} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}$ donne
$I_{2p} = \sum_{k=0}^{p}\frac{(2p)!}{2^{(p-k)}(p-k)!(2k)!}$ et $I_{2p+1} = \sum_{k=0}^{p}\frac{(2p+1)!}{2^{(p-k)}(p-k)!(2k+1)!}$.

Exercice 95 : [énoncé]
Posons $b_n = \frac{a_n}{n!}$, on a $b_0 = 1$ et

$$(n+1)b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} b_{n-k}b_k$$

Notons S la somme de la série entière $\sum b_n x^n$ et posons R son rayon de convergence.
Par récurrence, on peut affirmer $|b_n| \leqslant 1$ et donc $R > 0$.
Sur $]-R,R[$, la relation précédente donne a

$$S'(x) = S^2(x)$$

Après résolution, sachant que $S(0) = 1$, on obtient

$$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

d'où l'on tire $a_n = n!$.

Exercice 96 : [énoncé]
a) Par la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\underset{t=xu}{=}\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-u)^nf^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u$$

Puisque $x\leqslant|x|\leqslant r$, on a $xu\leqslant ru$ puis $f^{(n+1)}(xu)\leqslant f^{(n+1)}(ru)$ car $f^{(n+1)}$ est croissante puisque de dérivée $f^{(n+2)}\geqslant 0$.
On en déduit

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{r^{n+1}}\left|f(r)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}r^k\right|$$

Or la somme $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}r^k$ est positive et majorée par $f(r)$ donc

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right|\leqslant\left|\frac{x}{r}\right|^{n+1}f(r)$$

b) Puisque $|x/r|<1$,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(x)$$

Ainsi f est développable en série entière sur $]-a,a[$ car égale à la somme de sa série de Taylor sur $]-a,a[$.
c) Posons $f(x)=\tan x$. Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, on montrer que $f^{(n)}(x)=P_n(\tan x)$ avec P_n un polynôme dont la parité est celle de $n+1$.
On en déduit alors que $f^{(n)}(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in[0,\pi/2[$.
En reprenant l'étude qui précède, on obtient $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ pour tout $x\in[0,\pi/2[$.
Par imparité de f, $f^{(2p)}(0)=0$ et par un argument de parité

$$f(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{f^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!}x^{2p+1}$$

pour tout $x\in]-\pi/2,\pi/2[$.

Exercice 97 : [énoncé]
$R=1$, il y a divergence en $x=1$ et convergence par le CSSA en $x=-1$.
La fonction somme est définie sur $[-1,1[$.
Par application du critère spécial des séries alternées sur $[-1,0]$,

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)x^k\right\|_{\infty,[-1,0]}\leqslant\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\to 0$$

il y a donc convergence uniforme sur $[-1,0]$ et donc continuité de la somme en -1 puis finalement sur $[-1,1[$.
Pour étudier la fonction en 1^-, on peut exploiter l'encadrement

$$\frac{1}{n+1}\leqslant\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n=\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant\frac{1}{n}$$

On en déduit pour $x\in[0,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$$

Or

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$$

$$\text{et }\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x\right)\underset{x\to1^-}{\sim}-\ln(1-x)$$

Finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n\underset{x\to1^-}{\sim}-\ln(1-x)$$

Exercice 98 : [énoncé]
Notons que l'intégrale définissant a_n converge car $|\mathrm{th}t|\leqslant 1$.
a) Pour $t\geqslant n$,

$$\frac{\mathrm{th}n}{t^2}\leqslant\frac{\mathrm{th}t}{t^2}\leqslant\frac{1}{t^2}$$

En intégrant et en exploitant $\mathrm{th}n\to 1$, on obtient $a_n\sim\frac{1}{n}$.
On en déduit que $R=1$. Pour $x=-1$, $\sum a_nx^n$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées car (a_n) décroît vers 0.
Pour $x=1$, $\sum a_nx^n$ diverge par l'équivalent précédent. La fonction somme est définie sur $[-1,1[$.

b) Pour $x \in [-1,0]$, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées à la série $\sum a_n x^n$ et affirmer

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \leqslant a_{n+1} |x|^{n+1} \leqslant a_{n+1}$$

ce qui assure la convergence uniforme de la série. Par suite la fonction somme est continue en -1.

c) On a

$$\left|a_n - \frac{1}{n}\right| \leqslant \frac{1-\operatorname{th} n}{n}$$

donc pour $x \in [0,1[$,

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\operatorname{th} n}{n} x^n$$

Or

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x) \to +\infty \text{ et } n^2 \frac{1-\operatorname{th} n}{n} \sim 2n\mathrm{e}^{-2n} \to 0$$

donc $\sum \frac{1-\operatorname{th} n}{n}$ est absolument convergente et la somme de la série entière $\sum \frac{1-\operatorname{th} n}{n} x^n$ est définie et continue en 1. On en déduit

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} -\ln(1-x)$$

Exercice 99 : [énoncé]

a) Pour $0 < r < R$, il y a absolument convergence de $\sum a_n r^n$. On a

$$\left|f(r\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \mathrm{e}^{in\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} r^n \mathrm{e}^{-in\theta}$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on obtient

$$\left|f(r\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_{n-k}} \mathrm{e}^{i(2k-n)\theta} r^n$$

Puisque $\sum |a_n r^n|$ et $\sum |\overline{a_n} r^n|$ sont absolument convergentes, par produit de Cauchy, on peut affirmer que $\sum \sum_{k=0}^{n} |a_k| \left|\overline{a_{n-k}}\right| r^n$ converge. On en déduit que la série des fonctions continues $\theta \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_{n-k}} \mathrm{e}^{i(2k-n)\theta} r^n$ est normalement convergente et donc on peut permuter somme et intégration :

$$\int_0^{2\pi} \left|f(r\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_{n-k}} \mathrm{e}^{i(2k-n)\theta} r^n \,\mathrm{d}\theta$$

Or $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ip\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0$ pour tout $p \in \mathbb{Z}^\star$ donc, après simplification des termes nuls,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(r\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta = \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m|^2 r^{2m}$$

b) Pour $0 < r < R$ suffisamment petit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^{2n} - |a_0|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(r\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2 - |f(0)|^2 \,\mathrm{d}\theta$$

Par intégration, d'une fonction négative, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leqslant 0$. Or il s'agit d'une somme de termes positifs, ils sont donc tous nuls et on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, a_n = 0$$

La fonction f est alors constante.

c) Posons

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$$

Pour tout $r > 0$,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} - \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(r\mathrm{e}^{i\theta}) - f_N(r\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta$$

Pour $p \geqslant N+1$, on obtient

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|^2 \frac{r^{2n}}{r^{2p}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left|f(r\mathrm{e}^{i\theta}) - f_N(r\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2}{r^{2p}} \mathrm{d}\theta$$

Or

$$0 \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{\left|f(r\mathrm{e}^{i\theta}) - f_N(r\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2}{r^{2p}} \mathrm{d}\theta \leqslant 2\pi \frac{(P(r))^2 + \left(\sum_{n=0}^{N} |a_n| r^n\right)^2}{r^{2p}} = \frac{O(r^{2N})}{r^{2p}}$$

donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|f(re^{i\theta})-f_N(re^{i\theta})\right|^2}{r^{2p}}\,\mathrm{d}\theta \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$$

Pour $p=N+1$,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty}|a_n|^2\frac{r^{2n}}{r^{2p}}=|a_{N+1}|^2+\sum_{n=N+2}^{+\infty}|a_n|^2 r^{2(n-N-1)}$$

avec

$$0\leqslant\sum_{n=N+2}^{+\infty}|a_n|^2 r^{2(n-N-1)}\leqslant\frac{1}{r^2}\sum_{n=N+2}^{+\infty}|a_n|^2\xrightarrow[r\to+\infty]{}0$$

On en déduit $a_{N+1}=0$ puis, en reprenant la démarche avec $p=N+2,\ldots$, on obtient successivement $a_{N+2}=0,\ldots$ et finalement $f=f_N\in\mathbb{C}_N[X]$

Exercice 100 : [énoncé]
a) Pour $t>1$, $\mathrm{e}^{-t^n}\to 0$ avec $0\leqslant \mathrm{e}^{-t^n}\leqslant \mathrm{e}^{-t}$. Par convergence dominée $I_n\to 0$.
b) Par le changement de variable $u=t^n$ qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme,

$$I_n=\frac{1}{n}\int_1^{+\infty}u^{\frac{1-n}{n}}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

Par convergence dominée,

$$\int_1^{+\infty}u^{\frac{1-n}{n}}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

donc

$$I_n\sim\frac{1}{n}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

c) Par l'équivalent précédent $R=1$ et la série entière diverge en 1. Par application du critère spécial des séries alternées, la série entière converge en -1.

Exercice 101 : [énoncé]
Notons $\sum a_nz^n$ la série entière dont la somme est égale à f sur B°.
La fonction f est continue sur un compact donc uniformément continue.
Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ vérifiant
$\forall z,z'\in B, |z-z'|\leqslant\delta\Rightarrow|f(z)-f(z')|\leqslant\varepsilon$.
Considérons alors $r=1-\delta$ et $g_r:z\mapsto f(rz)$.
Pour tout $z\in B$, $|z-rz|=\delta|z|\leqslant\delta$ donc $|f(z)-g(z)|\leqslant\varepsilon$. Ainsi $\|f-g\|_{\infty,B}\leqslant\varepsilon$
Puisque la série entière $\sum a_nz^n$ converge uniformément vers f sur tout compact inclus dans B°, la série entière $\sum a_nr^nz^n$ converge uniformément vers g sur B. Il existe donc un polynôme P vérifiant $\|P-g\|_{\infty,B}\leqslant\varepsilon$ puis $\|f-P\|_{\infty,B}\leqslant 2\varepsilon$ ce qui permet de conclure.

Exercice 102 : [énoncé]
Posons

$$f(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}$$

f est dérivable et

$$f'(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$$

Pour $|x|<1$,

$$f'(x)=\frac{1-x}{1-x^3}=(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$

avec $a_{3n}=1$, $a_{3n+1}=-1$ et $a_{3n+2}=0$.
En intégrant,

$$f(x)=f(0)+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

avec

$$f(0)=\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}$$

Après calculs

$$f(0)=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

Exercice 103 : [énoncé]
$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}f(x)$, $f''(x)=\frac{-x}{2(1+x^2)^{3/2}}f(x)+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}f'(x)$ donne
$(1+x^2)f''(x)+xf'(x)-\frac{1}{4}f(x)=0$.
La démarche classique donne $a_{n+2}=-\frac{1}{4}\frac{(2n+1)(2n-1)}{(n+2)(n+1)}a_n$ avec $a_0=1$ et $a_1=\frac{1}{2}$.
On obtient alors $a_{2p}=\frac{(-1)^p}{2^{4p-1}}\frac{(4p-2)!}{((2p)!)((2p-1)!)}$ et $a_{2p+1}=\frac{(-1)^p}{2^{4p}}\frac{(4p-1)!}{(2p+1)!(2p-1)!}$.

Exercice 104 : [énoncé]
a) Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $t\mapsto \mathrm{e}^{it}$ qui est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

b) La convergence de l'intégrale définissant F provient de la convergence supposée de $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$.
On a

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(itx)^k}{k!} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{itx} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(itx)^k}{k!}\right) f(t)\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(itx)^k}{k!} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(it)^k f(t)}{k!}\,\mathrm{d}t\right) x^k$$

et

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{itx} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(itx)^k}{k!}\right) f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{n+1} |f(t)|\,\mathrm{d}t \to 0$$

compte tenu des hypothèses.
On peut alors affirmer

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!} f(t)\,\mathrm{d}t\right) x^k$$

avec convergence sur $\mathbb{R}$ de la série entière considérée.

Exercice 105 : [énoncé]
Par développement en série entière

$$\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = \int_{[0,1[} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^{nk}\,\mathrm{d}t$$

Pour $n \geqslant 1$, il y a convergence de la série des intégrales des valeurs absolues donc on peut donc intégrer terme à terme par le théorème de Fubini

$$\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)}$$

On a alors

$$n\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)}$$

avec

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)}\right| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \to 0$$

donc

$$n\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \to \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

avec

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

car on sait

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 106 : [énoncé]
a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$,

$$\frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1} \underset{t\to 0}{=} O(1) \text{ et } \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc $f(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
b) Posons $g(x,t) = \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1}$.
g admet une dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial x}$ avec

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\cos(xt)$$

$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
Enfin $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} = \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $]0, +\infty[$.
Par domination, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$, a fortiori continue et dérivable.
c) La décomposition

$$\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}$$

et la majoration $\sin(t) \leqslant t$ permettent d'appliquer le théorème de sommation terme à terme et de conclure

$$f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Exercice 107 : [énoncé]
a) Pour $x > 0$, $t^2 \frac{\sin t}{t} e^{-tx} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ donne l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\sin t}{t} e^{-tx}$.
Pour $x = 0$, il est connu que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$ est convergente bien que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ ne soit pas intégrable.
b) Pour $x \in [a, +\infty[\subset]0, +\infty[$,

$$\left| \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin t}{t} e^{-tx} \right) \right| \leqslant e^{-ax} = \varphi(x)$$

avec φ intégrable. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale et conclure que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
c) Pour $x > 0$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} -\sin(t) e^{-tx} \, dt = \operatorname{Im} \left(-\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t} dt \right) = -\frac{1}{x^2+1}$$

donc $f(x) = C - \arctan x$.
Or

$$|f(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-tx} \, dt = \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

donc

$$C = \frac{\pi}{2}$$

d) En découpant l'intégrale, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} \, dt$$

Posons

$$u_n(t) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} \, dt$$

Par application du critère spécial des séries alternées, on établir que la série de fonctions continues $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$, on en déduit que sa somme, à savoir la fonction f, est continue en 0. On peut conclure que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2}$$

(intégrale de Dirichlet).

Exercice 108 : [énoncé]
La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{e^{(ix-1)t}}{\sqrt{t}}$ est continue par morceaux sur$]0, +\infty[$, vérifie $\varphi(t) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $t^2 \varphi(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ donc φ est intégrable. Ceci assure l'existence de

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(ix-1)t}}{\sqrt{t}} \, dt$$

puis de $f(x)$ et $g(x)$ qui en sont les parties réelles et imaginaires.
Les théorèmes d'usage assurent que F est $\mathcal{C}^1$ et une intégration par parties donne

$$F'(x) = -\frac{1}{2(x+i)} F(x)$$

La résolution de cette équation différentielle avec

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

donne

$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi} e^{i(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}$$

d'où les expressions de $f(x)$ et$g(x)$.

Exercice 109 : [énoncé]
f est définie pour $x > -1$.
Par les théorèmes d'usage, on montre que f est $\mathcal{C}^1$ en observant une domination sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > -1$. On obtient

$$f'(x) = \int_0^1 (t-1) t^x \, dt = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

puis

$$f(x) = \ln \frac{x+2}{x+1} + C$$

Quand $n \to +\infty$, le théorème de convergence dominée donne $f(n) \to 0$ donc $C = 0$.
Finalement $f(x) = \ln \frac{x+2}{x+1}$ dont l'étude est désormais facile.

Exercice 110 : [énoncé]
a) Pour $a > -1$, on note $\Omega_a = \{z \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}(z) \geqslant a\}$.
$t \mapsto \frac{t^z}{1+t}$ est continue par morceaux sur $]0,1]$, $z \mapsto \frac{t^z}{1+t}$ est continue sur Ω et pour $z \in \Omega_a$,

$$\left|\frac{t^z}{1+t}\right| \leqslant \frac{t^a}{1+t} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0,1]$ donc f est définie et continue sur Ω.
b) $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$ et $f(x+1) \xrightarrow[x\to-1]{} f(0)$ donc $f(x) \underset{x\to-1}{\sim} \frac{1}{x+1}$.
c) Par intégration par parties :

$$(z+1)f(z) = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$$

et

$$\left|\int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2}\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 t^{\mathrm{Re}(z)+1}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\mathrm{Re}(z)+2} \to 0$$

Exercice 111 : [énoncé]
$t \mapsto \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,
$x \mapsto \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in [-a,a]$

$$\left|\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{\left|\ln(a^2+t^2)\right| + \left|\ln(t^2)\right|}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable. Par suite f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Il est immédiat que f est paire. Poursuivons, en étudiant f sur $\mathbb{R}^{+\star}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\right) = \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$$

$t \mapsto \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,
$x \mapsto t \mapsto \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+\star}$,

$$\left|\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\right| \leqslant \frac{2b}{(a^2+t^2)(1+t^2)} = \psi(t)$$

avec ψ intégrable. Par suite f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Pour $x \neq 1$,

$$\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)} = \frac{2x}{x^2-1}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{x^2+t^2}\right)$$

donc

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{x+1}$$

et cette relation vaut aussi pour $x = 1$ par continuité.
En procédant au changement de variable $u = 1/t$, on obtient $f(0) = 0$ et donc on peut conclure

$$f(x) = \pi\ln(x+1)$$

pour $x \in \mathbb{R}^+$ en exploitant un argument de continuité.

Exercice 112 : [énoncé]
a) L'intégrale converge pour $x > -1$ car $(\sin t)^x \underset{t\to0}{\sim} \frac{1}{t^{-x}}$.
b) Par domination sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > -1$, on obtient f de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f'(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)(\sin t)^x\,\mathrm{d}t \leqslant 0$.
c) Posons $\varphi(x) = (x+1)f(x)f(x+1)$.
Une intégration par parties classique (cf. intégrales de Wallis) donne $\varphi(x+1) = \varphi(x)$.
Montrons que cette fonction est constante.
Soit $a \in]-1,0[$, $\varphi(a+n) = \varphi(a)$.
En posant $p = E(a)$, la décroissance de f donne
$\varphi(a) = \varphi(a+n) \leqslant (a+n+1)f(p+n)f(p+n+1)$
Or $(a+n+1)f(p+n)f(p+n+1) = \frac{a+n+1}{p+n+1}\varphi(n+p) = \frac{a+n+1}{p+n+1}\varphi(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(0)$.
De façon semblable, $\varphi(a)$ peut être minorée par une suite de limite $\varphi(0)$.
On peut donc affirmer que φ est constante.

Exercice 113 : [énoncé]
Posons $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$.
Par domination, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+x^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

Après décomposition, pour $x \neq 1$,

$$\frac{t}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \frac{t}{(x^2-1)(1+t^2)} - \frac{t}{(x^2-1)(x^2+t^2)}$$

Donc

$$f'(x) = \frac{1}{x^2-1}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+t^2}{x^2+t^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln x}{(x^2-1)}$$

qui se prolonge par continuité pour $x = 1$.
Puisque $f(0) = 0$, on obtient la relation proposée.

Exercice 114 : [énoncé]
Posons
$$f(x)=\int_0^{2\pi}\frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t$$
Pour $|x|>1$, l'intégrale ne peut pas être définie.
Pour $|x|\leqslant 1$
En $t=\pi/2$ et $t=3\pi/2$, il est possible de prolonger par continuité la fonction intégrée.
Pour $x=-1$:
Quand $t\to 0^+$, $\ln(1-\cos t)\sim 2\ln t$
Quand $t\to 2\pi^-$, $t=2\pi-h$, $\ln(1-\cos t)=\ln(1-\cos h)\sim 2\ln h$
Pour $x=1$, quand $t\to\pi$,$t=\pi+h$, $\ln(1+\cos t)=\ln(1-\cos h)\sim 2\ln h$.
Finalement f est définie sur $[-1,1]$.
Pour des raisons de symétrie,
$$f(x)=2\int_0^{\pi}\frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t$$
Par domination sur $[-a,a]$ avec $a<1$, f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et
$$f'(x)=2\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+x\cos t}$$
Par le changement de variable $u=\tan\frac{t}{2}$,
$$f'(x)=4\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)+x(1-u^2)}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-x^2}}$$
Puisque $f(0)=0$, on en déduit $f(x)=2\pi\arcsin x$.

Exercice 115 : [énoncé]
La fonction f est bien définie sur $]0,+\infty[$ et
$$xf(x)=\frac{\pi}{2}-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
Par domination sur tout compact, on obtient $g:x\mapsto xf(x)-\frac{\pi}{2}=-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ donc f aussi.
Quand $x\to+\infty$,
$$0\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}$$
donc $xf(x)\to\frac{\pi}{2}$ puis $f(x)\sim\frac{\pi}{2x}$.
Etudions maintenant $f(x)$ quand $x\to 0^+$.
Par le changement de variable $u=tx$,
$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\frac{u}{x^2+u^2}\frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$
avec $\varphi:u\mapsto\frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}$.
Par intégration par parties,
$$f(x)=\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+u^2)\varphi(u)\right]_0^{+\infty}-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\ln(x^2+u^2)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$
Pour $x\in\,]0,1]$, $\left|\ln(x^2+u^2)\right|\leqslant\left|\ln(u^2)\right|+\left|\ln(1+u^2)\right|$ et $u\mapsto\left(\left|\ln(u^2)\right|+\left|\ln(1+u^2)\right|\right)\varphi'(u)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car φ' peut être prolongée par continuité en 0 (en fait φ peut être prolongée en une fonction développable en série entière en 0) et $\varphi'(u)\sim\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}$ quand $u\to+\infty$.
Par suite, quand $x\to 0^+$, $f(x)=\ln x+O(1)\sim\ln x$.

Exercice 116 : [énoncé]
a) Pour $\delta\in\,]0,\pi[$
$$\left|\int_\delta^{\pi}q_n(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{\int_\delta^{\pi}(1+\cos t)^n\,\mathrm{d}t}{\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos t)^n\,\mathrm{d}t}\leqslant\frac{\int_\delta^{\pi}(1+\cos t)^n\,\mathrm{d}t}{\int_{-\delta}^{\delta}(1+\cos t)^n\,\mathrm{d}t}\leqslant\frac{\int_\delta^{\pi}(1+\cos t)^n\,\mathrm{d}t}{2\delta(1+\cos\delta)^n}$$
Or par convergence dominée
$$\frac{\int_\delta^{\pi}(1+\cos t)^n\,\mathrm{d}t}{(1+\cos\delta)^n}=\int_\delta^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{1+\cos\delta}\right)^n\mathrm{d}t\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$
Ainsi
$$\int_\delta^{\pi}q_n(t)\,\mathrm{d}t\to 0$$
et par parité
$$\int_{-\pi}^{-\delta}q_n(t)\,\mathrm{d}t\to 0$$
On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-\delta}^{\delta}q_n(t)\,\mathrm{d}t=1$ car $\int_{-\pi}^{\pi}q_n(t)\,\mathrm{d}t=1$.
b) On a
$$g_n(x)-f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}q_n(t)(f(x-t)-f(x))\,\mathrm{d}t$$

Puisque f est continue sur le segment $[-\pi,\pi]$, elle y est uniformément continue.
Pour $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ vérifiant

$$|x-y|\leqslant\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$$

On a alors

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta}q_n(t)(f(x-t)-f(x))\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_{-\delta}^{\delta}\varepsilon q_n(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon$$

Mais puisqu'on a aussi

$$\left|\int_{\delta}^{\pi}q_n(t)(f(x-t)-f(x))\,\mathrm{d}t\right|\leqslant 2\left\|f\right\|_\infty\int_{\delta}^{\pi}q_n(t)\,\mathrm{d}t$$

pour n assez grand,

$$\left|\int_{\delta}^{\pi}q_n(t)(f(x-t)-f(x))\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\varepsilon$$

et finalement $|g_n(x)-f(x)|\leqslant 3\varepsilon$ indépendamment de x.
c) Par le changement de variable $u=x-t$ et par 2π-périodicité,

$$g_n(t)=\int_{-\pi}^{\pi}f(u)q_n(x-t)\,\mathrm{d}t$$

et en développant, cette expression se perçoit comme un polynôme trigonométrique.
On a démontré le théorème de Weierstrass dans sa version trigonométrique.

Exercice 117 : [énoncé]
a) La fonction 2π-périodique étudiée est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux dont développable en série de Fourier.

$$a_n=\frac{2\alpha(-1)^n\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}\text{ et }b_n=0$$

La valeur en 0 de ce développement permet d'établir :

$$1+2\alpha^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}=\frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

b) Par convergence normale, la fonction $\alpha\mapsto\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-\alpha^2}$ est continue sur $[0,1/2]$.
En passant à la limite quand $\alpha\to0$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\lim_{\alpha\to0}\left(\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)}-1\right)\right)=-\frac{\pi^2}{12}$$

c)

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^1\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nt^{\alpha-1+n}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{N}\int_0^1(-1)^nt^{\alpha-1+n}\,\mathrm{d}t+\int_0^1\sum_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^nt^{\alpha-1+n}\,\mathrm{d}t$$

Par le critère spécial des séries alternées,

$$\left|\int_0^1\sum_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^nt^{\alpha-1+n}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1t^{\alpha+N}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{N+\alpha+1}\to0$$

donc

$$\int_0^1\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^nt^{\alpha-1+n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\alpha}$$

Par $u=1/t$,

$$\int_1^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{u^{-\alpha}}{u+1}\,\mathrm{d}u=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\alpha}$$

par la même démarche qu'au dessus.
Par suite

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}=\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Exercice 118 : [énoncé]
a) $b_n=0$ pour $n\geqslant1$ et $a_n=(-1)^{n-1}\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(n^2-\alpha^2)}$ pour $n\in\mathbb{N}$.
b) La série de Fourier de f converge normalement vers f car celle-ci est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Par suite

$$f(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(n^2-\alpha^2)}\cos(nx)$$

Pour $x=0$, on obtient

$$1=\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}+2\alpha^2\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\alpha^2}$$

puis la relation voulue.

c) La fonction $f : t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}$ est définie et continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. On vérifie $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{\alpha-1}$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2-\alpha}}$ ce qui assure l'intégrabilité de f.

$$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{n+\alpha-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^{n+\alpha-1}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n t^{n+\alpha-1}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^{n+\alpha-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$$

la convergence de la série étant acquise par le critère spécial des séries alternées.

$$\left|\int_0^1 \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n t^{n+\alpha-1}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{[0,1[} t^{N+\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{N+1+\alpha}$$

la majoration du reste étant obtenue par le critère spécial des séries alternées.
On peut alors affirmer

$$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$$

Puisque

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \underset{u=1/t}{=} \int_0^1 \frac{u^{-\alpha}}{u+1}\,\mathrm{d}u$$

on a aussi

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+(1-\alpha)}$$

On en tire

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-\alpha}$$

puis

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2-\alpha^2} = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Exercice 119 : [énoncé]
a) Les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a^2+(x-2n\pi)^2}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a^2+(x+2n\pi)^2}$ sont absolument convergentes donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{1}{a^2+x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a^2+(x-2n\pi)^2} + \frac{1}{a^2+(x+2n\pi)^2}\right)$$

est paire.
b) Par translation d'indice, on observe que f est 2π-périodique.
Posons

$$f_n(x) = \frac{1}{a^2+(x-2n\pi)^2} + \frac{1}{a^2+(x+2n\pi)^2}$$

f_n est de classe $\mathcal{C}^1$, $\sum f_n$ converge simplement et $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-\pi,\pi]$ donc f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc développable en série de Fourier.
c)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{b^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi \mathrm{e}^b}{b}$$

d) f est paire donc $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{2\pi} f(t)\cos(nt) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt)}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{a^2+(t-2n\pi)^2} + \frac{\cos(nt)}{a^2+(t+2n\pi)^2}$$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt)}{a^2+(t-2n\pi)^2}\,\mathrm{d}t$$

En translatant les intégrales,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{n}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos u}{b^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

avec $b = an$ pour $n \neq 0$ et $a_0 = \frac{1}{a}$.
e)

$$f(t) = \frac{1}{2a} + \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{an}\cos(nt) = \frac{1}{a}\left(-1 + \mathrm{Re}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{a+it}}\right) = \frac{1}{a}\frac{\mathrm{e}^a(\cos t - 1)}{1-2\mathrm{e}^a\cos t + \mathrm{e}^a}$$

(sauf erreur…)

Exercice 120 : [énoncé]
Soit g la fonction impaire 2π-périodique obtenue à partir de f.
g est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc développable en série de Fourier.
Ceci permet d'écrire $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

En posant $a_n = nb_n$, on a la relation $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}\sin(nx)$ pour $x \in [0,\pi]$
Les coefficients de Fourier de g' se déduisant de ceux de g par intégration par parties et sachant $\int_0^{2\pi} g'^2 = 2$, la formule de Parseval appliquée à g' donne
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = \frac{2}{\pi}$.

Exercice 121 : [énoncé]
a) On a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}c_n(f)\mathrm{e}^{inx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)r^{|n|}\mathrm{e}^{in(x-t)}\,\mathrm{d}t$$

La série des intégrales des valeurs absolues converge grâce au terme géométrique $r^{|n|}$, ceci permet d'échanger somme et intégrale afin d'affirmer

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}c_n(f)\mathrm{e}^{inx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(x-t)\,\mathrm{d}t$$

avec

$$P_r(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\mathrm{e}^{inu}$$

On a

$$P_r(u) = \frac{1}{1-r\mathrm{e}^{iu}} + \frac{1}{1-r\mathrm{e}^{-iu}} - 1 = \frac{1-r^2}{1-2r\cos u + r^2}$$

donc $P_r \in E$.
b) En permutant à nouveau somme et intégrale, $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi$ car $\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t = 2\pi\delta_{0,n}$.
c) Par translation et 2π-périodicité,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}c_n(f)\mathrm{e}^{inx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}c_n(f)\mathrm{e}^{inx} - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x-t)-f(x)\right)P_r(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour $\varepsilon > 0$, l'uniforme continuité de f sur $[-\pi,\pi]$ assure l'existence d'un $\delta > 0$ vérifiant :

$$|x-y| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

On a alors

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta}\left(f(x-t)-f(x)\right)P_r(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon\int_{-\delta}^{\delta} P_r(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$$

en ayant observé $P_r \geqslant 0$.
D'autre part,

$$\int_{\delta}^{\pi}\left(f(x-t)-f(x)\right)P_r(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[r\to 1^-]{} 0$$

en vertu d'une convergence dominée par $\frac{2\|f\|_\infty}{(1-\cos\delta)^2}$.
De même

$$\int_{-\pi}^{-\delta}\left(f(x-t)-f(x)\right)P_r(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[r\to 1^-]{} 0$$

Ainsi pour r assez proche de 1^-,

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}c_n(f)\mathrm{e}^{inx} - f(x)\right| \leqslant 3\varepsilon$$

Finalement

$$\lim_{r\to 1^-}\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}c_n(f)\mathrm{e}^{inx} = f(x)$$

Exercice 122 : [énoncé]
a) On observe que $|\mathrm{e}^{-t}f(x+t)| \leqslant \|f\|_\infty\,\mathrm{e}^{-t}$. Cette domination permet d'affirmer que $G(f)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. La 2π-périodicité de $G(f)$ est évidente et la linéarité de l'application $f \mapsto G(f)$ l'est aussi. Ainsi G est un endomorphisme de E. De plus,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|G(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,|f(x+t)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

On peut appliquer le théorème de Fubini et affirmer

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|G(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\left(\int_0^{2\pi}|f(x+t)|\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$

avec

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x+t)|\,\mathrm{d}x = \|f\|$$

car f est 2π-périodique. Ainsi

$$\|G(f)\| \leqslant \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\|f\|\,\mathrm{d}t = \|f\|$$

ce qui donne la continuité de l'endomorphisme G.
b) Etudions les coefficients de Fourier des fonctions f et $G(f)$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(G(f)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} f(x+t)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

On peut appliquer le théorème de Fubini et affirmer

$$c_n(G(f)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{int}\left(\int_0^{2\pi} f(x+t)\mathrm{e}^{-in(x+t)}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$

Ce qui donne

$$c_n(G(f)) = c_n(f)\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(in-1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{c_n(f)}{in-1}$$

La fonction

$$g : x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{1+|n|^{3/2}}$$

est élément de E, s'il existe $f \in E$ vérifiant $G(f) = g$ alors

$$c_n(f) = \frac{(in-1)}{1+|n|^{3/2}}$$

d'où $|c_n(f)|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n$ ce qui est incompatible avec la convergence de la série $\sum |c_n(f)|^2$.
Ainsi la fonction G n'est pas surjective.
c) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in E$. Si $G(f) = \lambda f$ alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{c_n(f)}{in-1} = \lambda c_n(f)$$

Si $\lambda \notin \left\{\frac{1}{in-1}/n \in \mathbb{Z}\right\}$ alors une solution à l'équation $G(f) = \lambda f$ vérifie $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et donc $\|f\| = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = 0$ donne $f = 0$.
S'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ vérifiant $\lambda = \frac{1}{in_0-1}$ alors pour tout $n \neq n_0$ alors $c_n(f) = 0$.
Posons alors $g : x \mapsto f(x) - c_{n_0}(f)\mathrm{e}^{in_0x} \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(g) = 0$ donc $g = 0$ puis $f : x \mapsto c_{n_0}(f)\mathrm{e}^{in_0x}$. La réciproque est immédiate.
Finalement

$$\mathrm{Sp}G = \left\{\frac{1}{in-1}/n \in \mathbb{Z}\right\}$$

et

$$E_{1/(in-1)}(G) = \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{inx})$$

Exercice 123 : [énoncé]
C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2, 0\}$,

$$E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, E_0(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En posant $Y = P^{-1}X$, on obtient

$$X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$$

or

$$Y' = DY \Leftrightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda\mathrm{e}^{-t} \\ \mu\mathrm{e}^{2t} \\ \nu \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$$

donc

$$X' = AX \Leftrightarrow X(t) = \lambda\begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{2t} \\ 3\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$$

Exercice 124 : [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur $]0, +\infty[$.
Sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$,

$$\int \frac{3\ln x + 1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = 3\ln x + \ln|\ln x| + C^{te}$$

Solution générale sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$

$$y(x) = \lambda x^3 |\ln x|$$

Solution sur $]0,+\infty[$.
Soient $y :]0,1[\cup]1,+\infty[\to\mathbb{R}$ solution de l'équation sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.
Il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ vérifiant $y(x)=\lambda x^3\ln x$ sur $]0,1[$ et $y(x)=\mu x^3\ln x$ sur $]1,+\infty[$.
La continuité en 1 donne $y(1)=0$ sans conditions sur λ et μ.
La dérivabilité en 1 donne $\lambda=\mu$.
Ainsi $y(x)=\lambda x^3\ln x$ sur $]0,+\infty[$ qui est évidement solution.

Exercice 125 : [énoncé]
L'espace des solutions est de dimension 2. $y(x)=x$ est solution immédiate. Par la méthode de Lagrange (et quelques déterminations de primitives non triviales) on obtient aussi $y(x)=\sqrt{x^2+1}$ ce qui fournit un système fondamental de solutions

Exercice 126 : [énoncé]
Soit f solution. $f''(x)=(f(1/x))'=-\frac{1}{x^2}f'(1/x)$ donc $x^2f''(x)+f(x)=0$.
Résolvons l'équation $E : x^2y''+y=0$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
E est une équation différentielle d'Euler. Réalisons le changement de variable $t=\ln x$.
Soit $y:\mathbb{R}^{+\star}\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable et $z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $z(t)=y(\mathrm{e}^t)$.
z est deux fois dérivable et $y(x)=z(\ln x)$, $y'(x)=\frac{1}{x}z'(\ln x)$,
$y''(x)=-\frac{1}{x^2}z'(\ln x)+\frac{1}{x^2}z''(\ln x)$.
y est solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de E si, et seulement si, z est solution sur $\mathbb{R}$ de

$$F : z''-z'+z=0$$

F est un équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants homogène de solution générale :

$$z(x)=(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+\mu\sin\frac{\sqrt{3}x}{2})\mathrm{e}^{x/2}$$

La solution générale de E sur $\mathbb{R}^{+\star}$ est

$$y(x)=\sqrt{x}\left(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}+\mu\sin\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)$$

Revenons à fn il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ telles que

$$f(x)=\sqrt{x}\left(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}+\mu\sin\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)$$

On a alors

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left((\lambda+\mu\sqrt{3})\cos\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}+(\mu-\lambda\sqrt{3})\sin\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)$$

et donc

$$f'(x)=f(1/x)\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda+\mu\sqrt{3}=2\lambda\\ \lambda\sqrt{3}-\mu=2\mu\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=\mu\sqrt{3}$$

Finalement, les solutions sont les fonctions f données par

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=C\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\text{ avec }C\in\mathbb{R}$$

Exercice 127 : [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 de solution homogène :
$y=A\cos x+B\sin x$.
Méthode de variation des constantes

$$\begin{cases}A'(x)\cos x+B'(x)\sin x=0\\ -A'(x)\sin x+B'(x)\cos x=\mathrm{cotan}x\end{cases}$$

Après résolution et intégration

$$y(x)=-\frac{1}{2}\sin x\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}+A\cos x+B\sin x$$

Exercice 128 : [énoncé]
a) C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 de solution homogène :
$y=A\cos x+B\sin x$.
Méthode de variation des constantes :

$$\begin{cases}A'(x)\cos x+B'(x)\sin x=0\\ -A'(x)\sin x+B'(x)\cos x=1/x\end{cases},\begin{cases}A'(x)=-\sin x/x\\ B'(x)=\cos x/x\end{cases}$$

$A(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $B(x)=-\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ conviennent (et ont le bon goût de converger).
Solution générale :

$$y(x)=A\cos x+B\sin x+\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

b) Par domination par $\frac{1}{1+t^2}$, on obtient f continue sur $\mathbb{R}^+$ et par domination par e^{-at} sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, on obtient f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ avec

$$f''(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

de sorte que f est solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de $y''+y=\frac{1}{x}$.
Ainsi, il existe $A,B\in\mathbb{R}$ tels que

$$f(x)=A\cos x+B\sin x+\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

On observe

$$0\leqslant f(x)\leqslant\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}$$

donc $f\xrightarrow[+\infty]{}0$ puis $A=B=0$.
Ainsi

$$f(x)=\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t-\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

c) Quand $x\to 0^+$

$$\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\to\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

et

$$\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t+\int_x^{1}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\left|\int_x^{1}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{t}=-\ln x$$

donc

$$\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\to 0$$

Ainsi en passant à la limite l'expression précédente de $f(x)$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=f(0)=\frac{\pi}{2}$$

Exercice 129 : [énoncé]
Par application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de l'équation $y''+y=f$ est

$$y(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x+\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Pour conclure, il suffit de justifier que $x\mapsto\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$ est bornée.
Par intégration par parties,

$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t=f(x)-f(0)\cos x-\int_0^x f'(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Quitte à passer à l'opposé, on peut supposer f croissante et donc $f'(t)\geqslant 0$.
Puisque $-1\leqslant\cos(x-t)\leqslant 1$,

$$f(0)-f(x)\leqslant\int_0^x f'(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t\leqslant f(x)-f(0)$$

puis

$$f(0)(1-\cos x)\leqslant\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t\leqslant 2f(x)-f(0)(1+\cos x)$$

La fonction f étant bornée (car convergente en $+\infty$), il en est de même de $x\mapsto\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 130 : [énoncé]
Les solutions de l'équation différentielle $y''+y=f$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ car f l'est.
Par application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de l'équation $y''+y=f$ est

$$y(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x+\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Cette solution est 2π-périodique si, et seulement si,

$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{x+2\pi}f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$$

i.e. $\int_x^{x+2\pi}f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
En développant le sinus et en exploitant la liberté de la famille $(\sin,\cos)$ ainsi que la 2π-périodicité de f, cela équivaut à la condition

$$\int_0^{2\pi}f(t)\sin t\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}f(t)\cos t\,\mathrm{d}t=0$$

Exercice 131 : [énoncé]
Soit Y une solution du système différentiel $Y'=AY$.
On a

$$({}^tYY)'={}^tY'Y+{}^tYY'={}^tY({}^tA+A)Y$$

Ainsi si A est antisymétrique, $({}^tYY)' = 0$ et Y est de norme constante.
Inversement, si chaque solution du système différentiel est de norme constante alors pour tout $Y_0 \in \mathbb{R}^n$, ${}^tY_0({}^tA + A)Y_0 = 0$. Par suite 0 est la seule valeur propre de l'endomorphisme symétrique ${}^tA + A$ et puisque celui-ci est diagonalisable, on obtient ${}^tA + A = 0$ et enfin A antisymétrique.

Exercice 132 : [énoncé]
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_A = -(X-2)(X^2 - X + 1)$.
La résolution complexe est alors facile puisque la matrice A est diagonalisable.
La résolution réelle est en revanche plus délicate à obtenir, détaillons-la :
$X_1 = {}^t(1, 0, -1)$ est vecteur propre de A, complétons-le avec deux vecteurs d'un plan stable.
Les plans stables s'obtiennent en étudiant les éléments propres de ${}^tA$.
$\mathrm{Sp}({}^tA) = \mathrm{Sp}A = \{2\}$ et $E_2({}^tA) = \mathrm{Vect}{}^t(2, 1, -1)$. Ainsi le plan d'équation $2x + y - z = 0$ est stable par ${}^tA$.
Prenons $X_2 = {}^t(0, 1, 1)$ et $X_3 = AX_2 = {}^t(-1, 2, 0)$. On vérifie $AX_3 = X_3 - X_2$.
Ainsi pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B$.
Pour $X = {}^t(x, y, z)$ et $Y = {}^t(y_1, y_2, y_3) = P^{-1}X$, on a $X' = AX \Leftrightarrow Y' = BY$.
Ceci nous conduit à la résolution suivante :

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -y_3 \\ y_3' = y_2 + y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -y_3 \\ y_2'' - y_2' + y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = \alpha \mathrm{e}^{2t} \\ y_2(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}(\lambda \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \mu \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ y_3(t) = -y_2'(t) \end{cases}$$

Et on peut conclure via $X = PY$.

Exercice 133 : [énoncé]
a) La solution générale de l'équation étudiée est

$$y(x) = \left(\lambda + \int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^x \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C}$$

Si cette solution est bornée alors on a nécessairement

$$\lambda + \int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

et donc

$$\lambda = -\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Inversement, l'intégrale précédente converge assurément car

$$\left|f(t)\mathrm{e}^{-t}\right| \leqslant M\mathrm{e}^{-t} \text{ avec } M = \sup_{[0,2\pi]} |f|$$

et la fonction donnée par

$$y(x) = \left(-\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^x$$

est solution de l'équation étudiée et elle est de plus bornée car

$$|y(x)| \leqslant \left(\int_x^{+\infty} M\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^x = M$$

b) La solution précédente est périodique car

$$y(x+2\pi) = \left(\int_{x+2\pi}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{x+2\pi} = \left(\int_x^{+\infty} f(u+2\pi)\mathrm{e}^{-u-2\pi}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{x+2\pi} = y(x)$$

puisque la fonction f est 2π-périodique.
c) Puisque $y' - y = f$ et que $c_n(y') = inc_n(y)$ on a

$$(in - 1)c_n = c_n(f)$$

Puisque la fonction y est de classe $\mathcal{C}^1$, sa série de Fourier converge normalement vers elle-même et en particulier $\sum c_n$ converge avec

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n = y(0) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 134 : [énoncé]
Soit y une solution sur I. y ne s'annule pas ce qui permet d'écrire

$$y'' = \frac{1 + y'^2}{y}$$

assurant que y est trois fois dérivable.
En dérivant $yy'' = 1 + y'^2$, on obtient $yy^{(3)} = y'y''$ d'où

$$\left(\frac{y''}{y}\right)' = 0$$

Ainsi il existe une constante λ vérifiant $y'' = \lambda y$.
De plus $yy'' = 1 + y'^2 > 0$ assure $\lambda > 0$.
Ainsi y est de la forme

$$y(x) = A\mathrm{ch}(\sqrt{\lambda}x) + B\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}x)$$

Inversement, pour une telle fonction,

$$y(x)y''(x) - y'(x)^2 = \lambda\left(\left(A\mathrm{ch}\sqrt{\lambda}x + B\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}x)\right)^2 - \left(A\mathrm{sh}\sqrt{\lambda}x + B\mathrm{ch}\sqrt{\lambda}x\right)^2\right) = \lambda\left(A^2 - B^2\right)$$

Ainsi les solutions de l'équation différentielle sont les

$$y(x) = A\mathrm{ch}(\sqrt{\lambda}x) + B\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}x)$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$|A| > |B| \text{ et } \lambda = \frac{1}{A^2 - B^2}$$

Exercice 135 : [énoncé]
Soit I l'intervalle sur lequel est défini y et $a \in I$. On sait que cet intervalle est ouvert.
Supposons par l'absurde que I soit majoré. Notons $b \in \mathbb{R}$ son extrémité supérieure.
Pour $x \in [a, b[$,

$$y(x) = y(a) + \int_a^x \varphi(t, y(t))\mathrm{d}t$$

Or la fonction φ est bornée donc l'intégrale $\int_{[a,b[} \varphi(t, y(t))\,\mathrm{d}t$ converge. On peut donc prolonger y par continuité en b en une solution de l'équation différentielle sur $I \cup \{b\}$. Ceci contredit la maximalité de y.
De même, l'intervalle I n'est pas minoré et donc $I = \mathbb{R}$.

Exercice 136 : [énoncé]
Soit $x > 0$ fixé.
L'application $y \mapsto f(x, y)$ a pour dérivée $2y - \frac{a}{xy^2}$, elle donc minimale pour $y = \sqrt[3]{\frac{a}{2x}}$.
Considérons

$$g : x \mapsto f(x, \sqrt[3]{\frac{a}{2x}}) = x^2 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{2a^2}{x^2}}$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $g'(x) = 2x - \frac{\sqrt[3]{2a^2}}{x^{5/3}}$,
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^{8/3} = 2^{1/3}a^{2/3} \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{\frac{a}{2}}$.
g est minimale pour $x = \sqrt[4]{a/2}$, puis f admet un minimum en $(\sqrt[4]{a/2}, \sqrt[4]{a/2})$ de valeur $2\sqrt{2a}$.

Exercice 137 : [énoncé]
Par dérivation de fonctions composées

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1 + th_1, \ldots, x_n + th_n)$$

Exercice 138 : [énoncé]
a) En polaires, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $f_p(x, y) = (\cos\theta + \sin\theta)^p r^p \sin\frac{1}{r}$.
Si $p > 0$ alors $f_p(x, y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ et on peut prolonger f par continuité en $(0, 0)$.
Si $p = 0$ alors $f_0(x, y) = \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ diverge car le sinus diverge en $+\infty$.
b) On suppose $p \geqslant 1$.
Pour $p = 2$: $f_2(x, y) = (x + y)^2 \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = O(\|(x, y)\|^2)$ ce qui s'apparente à un développement limité à l'ordre 1 en $(0, 0)$.
La fonction f_2 est donc différentiable en $(0, 0)$ de différentielle nulle.
Pour $p > 2$: $f_p(x, y) = (x + y)^{p-2} f_2(x, y)$. La fonction f_p est différentiable par produit de fonctions différentiables.
Pour $p = 1$: Quand $h \to 0^+$, $\frac{1}{h}(f_1(h, 0) - f_1(0, 0)) = \sin\frac{1}{h}$ diverge.
Ainsi f n'est pas dérivable en $(0, 0)$ selon le vecteur $(1, 0)$, elle ne peut donc y être différentiable.

Exercice 139 : [énoncé]
En passant en coordonnées polaires, $f(x, y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$. On prolonge f par continuité en $(0, 0)$ en posant $f(0, 0) = 0$.
Par opérations sur les fonctions, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. De plus $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
L'étude pour $\frac{\partial f}{\partial y}$ est identique puisque $f(x, y) = -f(y, x)$.
Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\right) = -1$$

alors que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$$

La fonction f ne peut être de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 140 : [énoncé]
a) Puisque la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut écrire

$$g(x) = g(y) + \int_y^x g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Par le changement de variable $t = y + u(x-y)$, on obtient

$$g(x) = g(y) + (x-y)\int_0^1 g'(y+u(x-y))\,\mathrm{d}u$$

Ainsi

$$f(x,y) = \int_0^1 g'(y+u(x-y))\,\mathrm{d}u$$

et cette relation vaut pour $x \neq y$ et aussi pour $x = y$.
b) Soit $y \in \mathbb{R}$.
L'application $\varphi : (x,u) \mapsto g'(y+u(x-y))$ admet une dérivée partielle $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et celle-ci est continue sur $\mathbb{R}\times[0,1]$.
Par intégration sur un segment, on peut affirmer que $x \mapsto \int_0^1 \varphi(x,u)\,\mathrm{d}u$ est dérivable et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^1 \varphi(x,u)\,\mathrm{d}u\right) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,u)\,\mathrm{d}u$$

Ainsi f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 ug''(y+u(x-y))\,\mathrm{d}u$$

De plus, la fonction $(x,y,u) \mapsto ug''(y+u(x-y))$ est continue sur $\mathbb{R}^2\times[0,1]$ donc, par intégration sur un segment, on peut affirmer la continuité de la première dérivée partielle de f

$$(x,y) \mapsto \int_0^1 ug''(y+u(x-y))\,\mathrm{d}u$$

De même, on montre que la deuxième dérivée partielle de f existe et est continue.

Exercice 141 : [énoncé]
a) Cas $|x| < 1$: $|u_n(x,y)| = o(x^n)$ donc $\sum u_n(x,y)$ est absolument convergente.
Cas $|x| > 1$: si la série $\sum u_n(x,y)$ converge alors $u_n(x,y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc
$\cos(ny) = u_n(x,y)\frac{\sqrt{n}}{x^n} \to 0$ par croissance comparée.
Mézalor $\cos(2ny) = 2\cos^2(ny) - 1 \to -1$ ce qui est incohérent.
Ainsi la série $\sum u_n(x,y)$ diverge.
Cas $x = 1$:
Si $y = 0 \quad [2\pi]$ alors $u_n(1,y) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum u_n(1,y)$ diverge.
Si $y \neq 0 \quad [2\pi]$ alors par une transformation d'Abel, on obtient $\sum u_n(1,y)$ converge.
Cas $x = -1$:
On remarque $u_n(-1,y) = u_n(1,y+\pi)$.
Ainsi $\sum u_n(-1,y)$ converge si, et seulement si, $y \neq \pi \quad [2\pi]$.
b) $D^\circ = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / |x| < 1\right\}$.
Soit $a \in [0,1[$ et $D_a = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / |x| < a\right\}$.
u_n est $\mathcal{C}^1$ sur D_a, $\sum u_n(x,y)$ converge simplement sur D_a, $\sum \frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)$ converge normalement sur D_a via $\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \sqrt{n}a^{n-1}$ et enfin $\sum \frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)$ converge normalement sur D_a via $\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant \sqrt{n}a^n$. On peut alors appliquer les théorèmes usuels qui affirment que $(x,y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x,y)$ admet deux dérivées partielles continues sur D_a, c'est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_a puis sur D car ce qui précède vaut pour tout $a \in [0,1[$.

Exercice 142 : [énoncé]
φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,

$$\varphi(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} y + f(x) = a \\ x + f(y) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + f(b-f(y)) = a \\ x = b - f(y) \end{cases}$$

Considérons

$$\varphi_b : y \mapsto y + f(b - f(y))$$

φ est continue dérivable et $\varphi_b'(y) = 1 - f'(y)f'(b-f(y))$ donc $\varphi_b'(y) > 0$ car $|f'(y)f'(b-f(y))| \leqslant k^2 < 1$. Par conséquent φ est strictement croissante. De plus f étant k lipschitzienne : $|f(t) - f(0)| \leqslant k\,|t|$ donc $|f(t)| \leqslant k\,|t| + |f(0)|$ puis $|f(b-f(y))| \leqslant k\,|b - f(y)| + |f(0)| \leqslant k^2\,|y| + \ell$ par suite

$$\varphi_b(y) \geqslant (1-k^2)y - \ell \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty \text{ et } \varphi_b(y) \leqslant (1-k^2)y + \ell \xrightarrow[y\to-\infty]{} -\infty$$

donc φ_b réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Par conséquent :

$$\varphi(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \varphi_b^{-1}(a) \\ x = b - \varphi_b^{-1}(a) \end{cases}$$

Finalement, l'application φ est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$. De plus

$$\text{Jac}\varphi_{(x,y)} = \begin{pmatrix} f'(x) & 1 \\ 1 & f'(y) \end{pmatrix}$$

et $\det(\text{Jac}\varphi_{(x,y)}) = f'(x)f'(y) - 1 \neq$ car $|f'(x)f'(y)| \leqslant k^2 < 1$ donc φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Exercice 143 : [énoncé]
La fonction $f : (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.
Après résolution ses points critiques sont : $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
En $(0,0)$: $f(0,0) = 0$, $f(1/n, 0) \sim -2/n^2 < 0$ et $f(1/n, 1/n) \sim 2/n^4 > 0$.
Pas d'extremum local en $(0,0)$
En $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$: $r = 20$, $t = 20$ et $s = 4$. $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$.
Il y a un minimum local en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

$$f(\sqrt{2} + u, -\sqrt{2} + v) = -8 + 10(u^2 + v^2) + 4uv + 4\sqrt{2}(u^3 - v^3) + u^4 + v^4$$

On exploite

$$2(u^2 + v^2) + 4uv = 2(u+v)^2 \text{ et } 8u^2 + 4\sqrt{2}u^3 + u^4 = u^2(u + 2\sqrt{2})^2$$

pour affirmer

$$f(\sqrt{2} + u, -\sqrt{2} + v) = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) + 2(u+v)^2 + u^2(u + 2\sqrt{2})^2 + v^2(v + 2\sqrt{2})^2$$

Ainsi $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ est un minimum global.
En $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$: l'étude est identique puisque $f(x,y) = f(y,x)$.

Exercice 144 : [énoncé]
Notons A, B, C les points définissant notre triangle et O le centre du cercle circonscrit.
En introduisant les mesures α, β, γ des angles $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right)$, $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$, on vérifie $\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad [2\pi]$ et on peut calculer l'aire algébrique des triangles (OAB), (OBC) et (OCA) qui sont respectivement

$$\frac{1}{2}r^2 \sin\alpha, \frac{1}{2}r^2 \sin\beta \text{ et } \frac{1}{2}r^2 \sin\gamma = -\frac{1}{2}r^2 \sin(\alpha + \beta)$$

L'aire algébrique du triangle (ABC) est alors

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}r^2(\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha + \beta))$$

L'étude des points critiques de cette fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 2\pi[^2$ conduit à résoudre le système

$$\begin{cases} \cos\alpha = \cos(\alpha + \beta) \\ \cos\beta = \cos(\alpha + \beta) \end{cases}$$

dont les seuls solutions dans $]0, 2\pi[^2$ sont

$$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \text{ et } \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$$

Ce sont les situations de triangles équilatéraux resp. direct et indirect.
L'extremum trouvé vaut

$$\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$$

Exercice 145 : [énoncé]
a) On passe en coordonnées polaires avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan(x/y)$ de sorte que $x = r\sin\theta$ et $y = r\cos\theta$.
On parvient à

$$f(x,y) = C(x/y)(x^2 + y^2)^{\alpha/2}$$

avec C une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$.
b) Idem, on parvient à

$$f(x,y) = \frac{2}{3}\frac{x}{y}\sqrt{x^3 + y^3} + C\,(x/y)$$

avec C une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 146 : [énoncé]
a) L'application ϕ est clairement un endomorphisme de E.
Posons $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan\frac{y}{x}$, $(r, \theta) \in V = \mathbb{R}^{+\star} \times \left]-\pi/2, \pi/2\right[$
Pour $f \in E$, on considère $g \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ définie par $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
On remarque

$$r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Ainsi

$$\Phi(f) = 0 \Leftrightarrow r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$$

pour tout $(r,\theta) \in V$.
La résolution de cette équation aux dérivées partielles donne $g(r,\theta) = C(\theta)$ avec C de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.
Par suite on obtient la solution générale $f(x,y) = C(\arctan(y/x)) = D(y/x)$ avec D fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
b) Si f est homogène de degré α alors en dérivant la relation $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$ par rapport à t puis en évaluant le résultat en $t=1$ on obtient l'égalité $\Phi(f) = \alpha f$.
Inversement si $\Phi(f) = \alpha f$ alors en introduisant g comme ci-dessus, on obtient

$$r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \alpha g(r,\theta)$$

ce qui donne $g(r,\theta) = C(\theta)r^\alpha$ puis

$$f(x,y) = D(y/x)(x^2+y^2)^{\alpha/2}$$

avec D fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Il est alors facile de vérifier que f est homogène de degré α.
c) La fonction h est homogène de degré 5, donc $h/5$ est solution particulière de l'équation linéaire $\Phi(f) = h$. L'ensemble des solutions de l'équation est alors le sous-espace affine $h/5 + \ker\Phi$.

Exercice 147 : [énoncé]
a)

$$\oint_{\Gamma_r} \mathrm{e}^{-(x+iy)^2}(\,\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) = \oint_{\Gamma_r} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \text{ avec } P(x,y) = iQ(x,y) = \mathrm{e}^{-(x+iy)^2}$$

Or

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -2i(x+iy)\mathrm{e}^{-(x+iy)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

donc

$$\oint_{\Gamma_r} \mathrm{e}^{-(x+iy)^2}(\,\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) = 0$$

car la forme différentielle est fermée donc exacte sur l'ouvert étoilée $\mathbb{C}$.
b)

$$J_r = \int_{\mathcal{C}_r} \mathrm{e}^{-(x+iy)^2}(\,\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) = \int_0^{\pi/4} r\mathrm{e}^{-r^2(\cos t + i\sin t)^2}(\sin t - i\cos t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$|J_r| \leqslant \int_0^{\pi/4} r\mathrm{e}^{-r^2\cos 2t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} r\mathrm{e}^{-r^2\sin 2u}\,\mathrm{d}u \underset{\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}t}{\leqslant} \int_0^{\pi/4} r\mathrm{e}^{-\frac{4}{\pi}ur^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{4}{\pi r}\mathrm{e}^{-\frac{4}{\pi}ur^2}\right]_0^{\pi/4} \to 0$$

c) On a

$$\int_{[O,A]} \mathrm{e}^{-(x+iy)^2}(\,\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) = \int_0^r \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

et

$$\int_{[B,O]} \mathrm{e}^{-(x+iy)^2}(\,\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) = -\int_0^r \mathrm{e}^{-it^2}\frac{1+i}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t$$

Sachant

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

on obtient

$$\lim_{r\to+\infty}\int_0^r \cos(t^2) + \sin(t^2)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi/2}$$

et

$$\lim_{r\to+\infty}\int_0^r \cos(t^2) - \sin(t^2)\,\mathrm{d}t = 0$$

On peut alors conclure

$$\lim_{r\to+\infty}\int_0^{+\infty}\cos t^2\,\mathrm{d}t = \lim_{r\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sin t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

Exercice 148 : [énoncé]

$$|I_n - 1| = \iint_{[0,1]^2} \frac{x^n+y^n}{1+x^n+y^n}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_{[0,1]^2}(x^n+y^n)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{2}{n+1} \to 0$$

donc $I_n \to 1$.