Nombres complexes

1 Forme cartésienne, forme polaire

Exercice 1 Mettre sous la forme $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 2 Écrire sous la forme $a + ib$ les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

Exercice 3 Effectuer les calculs suivants :

1. $(3 + 2i)(1 - 3i)$.
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.
3. $\frac{3+2i}{1-3i}$.
4. Quotient du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.

Exercice 4 Établir les égalités suivantes :

1. $(\cos(\pi/7) + i\sin(\pi/7))(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})(1 + i) = \sqrt{2}(\cos(5\pi/84) + i\sin(5\pi/84))$,
2. $(1 - i)(\cos(\pi/5) + i\sin(\pi/5))(\sqrt{3} - i) = 2\sqrt{2}(\cos(13\pi/60) + i\sin(13\pi/60))$,
3. $\frac{\sqrt{2}(\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12))}{1+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$.

Exercice 5 Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1-i$. En déduire le module et l'argument de $w = \frac{u}{v}$.

Exercice 6 Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :

$$e^{e^{i\alpha}} \quad \text{et} \quad e^{i\theta} + e^{2i\theta}.$$

Exercice 7 Soit z un nombre complexe de module ρ, d'argument θ, et soit $\overline{z}$ son conjugué. Calculer $(z + \overline{z})(z^2 + \overline{z}^2)\dots(z^n + \overline{z}^n)$ en fonction de ρ et θ.

Exercice 8 Mettre sous forme trigonométrique $1+e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi, \pi[$. Donner une interprétation géométrique.

2 Racines carrées, équation du second degré

Exercice 9 Calculer les racines carrées de 1, i, $3+4i$, $8-6i$, et $7+24i$.

Exercice 10 Trouver les racines carrées de $3-4i$ et de $24-10i$.

Exercice 11
1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 12 Montrer que les solutions de $az^2+bz+c=0$ avec a, b, c réels, sont réelles ou conjuguées.

Exercice 13 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2+z+1=0 \quad ; \quad z^2-(1+2i)z+i-1=0 \quad ; \quad z^2-\sqrt{3}z-i=0 \quad ;$$

$$z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0 \ ; \ z^2-(3+4i)z-1+5i=0 \ ; \ 4z^2-2z+1=0 \ ;$$

$$z^4+10z^2+169=0 \quad ; \quad z^4+2z^2+4=0.$$

Exercice 14 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
1. $z^2-(11-5i)z+24-27i=0$.
2. $z^3+3z-2i=0$.

3 Racine n-ième

Exercice 15 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3=\frac{1}{4}(-1+i)$ et montrer qu'une seule de ses solutions a une puissance quatrième réelle.

Exercice 16 Trouver les racines cubiques de $2-2i$ et de $11+2i$.

Exercice 17 Calculer $\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}}$ algébriquement, puis trigonométriquement. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{5\pi}{12}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{24}=1$.

Exercice 18 Calculer la somme $S_n=1+z+z^2+\cdots+z^n$.

Exercice 19
1. Résoudre $z^3=1$ et montrer que les racines s'écrivent 1, j, j^2. Calculer $1+j+j^2$ et en déduire les racines de $1+z+z^2=0$.
2. Résoudre $z^n=1$ et montrer que les racines s'écrivent $1,\varepsilon,\ldots,\varepsilon^{n-1}$. En déduire les racines de $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0$. Calculer, pour $p\in\mathbb{N}$, $1+\varepsilon^p+\varepsilon^{2p}+\cdots+\varepsilon^{(n-1)p}$.

Exercice 20 (partiel novembre 91)
1. Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes distincts ayant le même cube.
   Exprimer z_2 et z_3 en fonction de z_1.
2. Donner, sous forme polaire, les solutions dans $\mathbb{C}$ de :

   $$z^6+(7-i)z^3-8-8i=0.$$

   (Indication : poser $Z=z^3$; calculer $(9+i)^2$)

4 Géométrie

Exercice 21 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

1. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1$,
2. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 22 Déterminer par le calcul et géométriquement les nombres complexes z tels que $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1$. Généraliser pour $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = 1$.

Exercice 23 Déterminer par le calcul et géométriquement les nombres complexes z tels que $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = k$ ($k > 0$, $k \neq 1$). Généraliser pour $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k$.

Exercice 24

1. Soit A, B, C trois points du plan complexe dont les affixes sont respectivement a, b, c. On suppose que $a+jb+j^2c = 0$; montrer que ABC est un triangle équilatéral (j et j^2 sont les racines cubiques complexes de 1 — plus précisément $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$). Réciproque ?
2. ABC étant un triangle équilatéral direct du plan complexe, on construit les triangles équilatéraux directs BOD et OCE, ce qui détermine les points D et E (O est l'origine du plan complexe). Quelle est la nature du quadrilatère $ADOE$? Comparer les triangles OBC, DBA et EAC.

Exercice 25 Montrer que pour $u, v \in \mathbb{C}$, on a $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

Exercice 26 (Comment construire un pentagone régulier ?) Soit $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ un pentagone régulier. On note O son centre et on choisit un repère orthonorm'e $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA_0}$, qui nous permet d'identifier le plan avec l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

1. Donner les affixes $\omega_0, \ldots, \omega_4$ des points $A_0, \ldots, A_4$. Montrer que $\omega_k = {\omega_1}^k$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Montrer que $1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \omega_1^3 + \omega_1^4 = 0$.
2. En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est l'une des solutions de l'équation $4z^2 + 2z - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
3. On considère le point B d'affixe -1. Calculer la longueur BA_2 en fonction de $\sin\frac{\pi}{10}$ puis de $\sqrt{5}$ (on remarquera que $\sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5}$).
4. On considère le point I d'affixe $\frac{i}{2}$, le cercle $\mathcal{C}$ de centre I de rayon $\frac{1}{2}$ et enfin le point J d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la demi-droite $[BI)$. Calculer la longueur BI puis la longueur BJ.
5. **Application :** Dessiner un pentagone régulier à la règle et au compas. Expliquer.

5 Trigonométrie

Exercice 27 En utilisant les nombres complexes, calculer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice 28 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(3x)$.
2. $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 1$.

6 Divers

Exercice 29 (Entiers de Gauss) Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib\ ;\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que si α et β sont dans $\mathbb{Z}[i]$ alors $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ le sont aussi.
2. Trouver les élements inversibles de $\mathbb{Z}[i]$, c'est-à-dire les éléments $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ tels qu'il existe $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ avec $\alpha\beta = 1$.
3. Vérifier que quel que soit $\omega \in \mathbb{C}$ il existe $z \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|\omega - z| < 1$.
4. Montrer qu'il existe sur $\mathbb{Z}[i]$ une division euclidienne, c'est-à-dire que, quels que soient α et β dans $\mathbb{Z}[i]$ il existe q et r dans $\mathbb{Z}[i]$ vérifiant :
$$\alpha = \beta q + r \qquad \text{avec} \qquad |r| < |\beta|.$$
(Indication : on pourra considérer le complexe $\frac{\alpha}{\beta}$)

Exercice 30 1. Montrer que si $x+y+z = a$, $yz+zx+xy = b$, $xyz = c$, alors x, y et z sont solutions de l'équation $Z^3 - aZ^2 + bZ - c = 0$. Trouver x, y et z si on suppose $a = b = 0$ et $c = -8$.

2. Résoudre le système
$$\begin{cases} x + y + z &= 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 1 \end{cases}$$

7 Forme cartésienne, forme polaire

Exercice 31 Mettre sous la forme $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ les nombres :
$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 32 Écrire sous la forme $a + ib$ les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

Exercice 33 Effectuer les calculs suivants :

1. $(3 + 2i)(1 - 3i)$.
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.
3. $\frac{3+2i}{1-3i}$.
4. Quotient du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.

Exercice 34 Établir les égalités suivantes :

1. $(\cos(\pi/7) + i\sin(\pi/7))(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})(1 + i) = \sqrt{2}(\cos(5\pi/84) + i\sin(5\pi/84))$,
2. $(1 - i)(\cos(\pi/5) + i\sin(\pi/5))(\sqrt{3} - i) = 2\sqrt{2}(\cos(13\pi/60) + i\sin(13\pi/60))$,
3. $\frac{\sqrt{2}(\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12))}{1+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$.

Exercice 35 Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1 - i$. En déduire le module et l'argument de $w = \frac{u}{v}$.

Exercice 36 Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :

$$e^{e^{i\alpha}} \quad \text{et} \quad e^{i\theta} + e^{2i\theta}.$$

Exercice 37 Soit z un nombre complexe de module ρ, d'argument θ, et soit $\overline{z}$ son conjugué. Calculer $(z + \overline{z})(z^2 + \overline{z}^2) \dots (z^n + \overline{z}^n)$ en fonction de ρ et θ.

Exercice 38 Mettre sous forme trigonométrique $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in] - \pi, \pi[$. Donner une interprétation géométrique.

8 Racines carrées, équation du second degré

Exercice 39 Calculer les racines carrées de $1,\ i,\ 3 + 4i,\ 8 - 6i$, et $7 + 24i$.

Exercice 40 Trouver les racines carrées de $3 - 4i$ et de $24 - 10i$.

Exercice 41

1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 42 Montrer que les solutions de $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c réels, sont réelles ou conjuguées.

Exercice 43 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 + z + 1 = 0 \quad ; \quad z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0 \quad ; \quad z^2 - \sqrt{3}z - i = 0 \quad ;$$

$$z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0\ ;\ z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0\ ;\ 4z^2 - 2z + 1 = 0\ ;$$

$$z^4 + 10z^2 + 169 = 0 \quad ; \quad z^4 + 2z^2 + 4 = 0.$$

Exercice 44 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - (11 - 5i)z + 24 - 27i = 0$.
2. $z^3 + 3z - 2i = 0$.

9 Racine n-ième

Exercice 45 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \frac{1}{4}(-1 + i)$ et montrer qu'une seule de ses solutions a une puissance quatrième réelle.

Exercice 46 Trouver les racines cubiques de $2 - 2i$ et de $11 + 2i$.

Exercice 47 Calculer $\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}}$ algébriquement, puis trigonométriquement. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{5\pi}{12}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{24} = 1$.

Exercice 48 Calculer la somme $S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$.

Exercice 49 1. Résoudre $z^3 = 1$ et montrer que les racines s'écrivent 1, j, j^2. Calculer $1 + j + j^2$ et en déduire les racines de $1 + z + z^2 = 0$.

2. Résoudre $z^n = 1$ et montrer que les racines s'écrivent $1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{n-1}$. En déduire les racines de $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0$. Calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, $1 + \varepsilon^p + \varepsilon^{2p} + \cdots + \varepsilon^{(n-1)p}$.

Exercice 50 (partiel novembre 91) 1. Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes distincts ayant le même cube.
Exprimer z_2 et z_3 en fonction de z_1.

2. Donner, sous forme polaire, les solutions dans $\mathbb{C}$ de :
$$z^6 + (7 - i)z^3 - 8 - 8i = 0.$$
(Indication : poser $Z = z^3$; calculer $(9 + i)^2$)

10 Géométrie

Exercice 51 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

1. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1,$
2. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Exercice 52 Déterminer par le calcul et géométriquement les nombres complexes z tels que $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1$. Généraliser pour $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = 1$.

Exercice 53 Déterminer par le calcul et géométriquement les nombres complexes z tels que $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = k$ ($k > 0$, $k \neq 1$). Généraliser pour $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k$.

Exercice 54 1. Soit A, B, C trois points du plan complexe dont les affixes sont respectivement a, b, c. On suppose que $a+jb+j^2c = 0$; montrer que ABC est un triangle équilatéral (j et j^2 sont les racines cubiques complexes de 1 — plus précisément $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$). Réciproque ?

2. ABC étant un triangle équilatéral direct du plan complexe, on construit les triangles équilatéraux directs BOD et OCE, ce qui détermine les points D et E (O est l'origine du plan complexe). Quelle est la nature du quadrilatère $ADOE$? Comparer les triangles OBC, DBA et EAC.

Exercice 55 Montrer que pour $u, v \in \mathbb{C}$, on a $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

Exercice 56 (Comment construire un pentagone régulier ?) Soit $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ un pentagone régulier. On note O son centre et on choisit un repère orthonorm'e $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA_0}$, qui nous permet d'identifier le plan avec l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

1. Donner les affixes $\omega_0, \dots, \omega_4$ des points $A_0, \dots, A_4$. Montrer que $\omega_k = {\omega_1}^k$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Montrer que $1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \omega_1^3 + \omega_1^4 = 0$.

2. En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est l'une des solutions de l'équation $4z^2 + 2z - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
3. On considère le point B d'affixe -1. Calculer la longueur BA_2 en fonction de $\sin\frac{\pi}{10}$ puis de $\sqrt{5}$ (on remarquera que $\sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5}$).
4. On considère le point I d'affixe $\frac{i}{2}$, le cercle $\mathcal{C}$ de centre I de rayon $\frac{1}{2}$ et enfin le point J d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la demi-droite $[BI)$. Calculer la longueur BI puis la longueur BJ.
5. **Application :** Dessiner un pentagone régulier à la règle et au compas. Expliquer.

11 Trigonométrie

Exercice 57 En utilisant les nombres complexes, calculer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice 58 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(3x)$.
2. $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 1$.

12 Divers

Exercice 59 (Entiers de Gauss) Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib\ ;\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que si α et β sont dans $\mathbb{Z}[i]$ alors $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ le sont aussi.
2. Trouver les élements inversibles de $\mathbb{Z}[i]$, c'est-à-dire les éléments $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ tels qu'il existe $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ avec $\alpha\beta = 1$.
3. Vérifier que quel que soit $\omega \in \mathbb{C}$ il existe $z \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|\omega - z| < 1$.
4. Montrer qu'il existe sur $\mathbb{Z}[i]$ une division euclidienne, c'est-à-dire que, quels que soient α et β dans $\mathbb{Z}[i]$ il existe q et r dans $\mathbb{Z}[i]$ vérifiant :
$$\alpha = \beta q + r \qquad \text{avec} \qquad |r| < |\beta|.$$
(Indication : on pourra considérer le complexe $\frac{\alpha}{\beta}$)

Exercice 60

1. Montrer que si $x+y+z = a$, $yz+zx+xy = b$, $xyz = c$, alors x, y et z sont solutions de l'équation $Z^3 - aZ^2 + bZ - c = 0$. Trouver x, y et z si on suppose $a = b = 0$ et $c = -8$.
2. Résoudre le système
$$\begin{cases} x+y+z &= 4 \\ x^2+y^2+z^2 &= 4 \\ x^3+y^3+z^3 &= 1 \end{cases}$$

Nombres complexes

Indication 4 Utiliser la formule de Moivre.

Indication 6 Pour le premier utiliser la formule de Moivre. Pour le second factoriser par $e^{\frac{i\theta+2i\theta}{2}}$.

Indication 7 Faire apparaître des termes en $\cos(k\theta)$.

Indication 9 Écrire $z = a+ib$, on cherche les racines carrées $\omega = \alpha+i\beta$. À partir de l'équation $\omega^2 = z$, identifier les parties réelles et imaginaires. Vous obtenez deux équations. Pour simplifier la résolutions rajouter l'équation obtenue par l'égalité $|\omega|^2 = |z|$.

Indication 18 Calculer $(1-z)S_n$.

Indication 21 Le premier ensemble est une droite le second est un cercle.

Indication 27 Appliquer deux fois la formule de Moivre en remarquant $e^{i5\theta} = (e^{i\theta})^5$.

Indication 34 Utiliser la formule de Moivre.

Indication 36 Pour le premier utiliser la formule de Moivre. Pour le second factoriser par $e^{\frac{i\theta+2i\theta}{2}}$.

Indication 37 Faire apparaître des termes en $\cos(k\theta)$.

Indication 39 Écrire $z = a + ib$, on cherche les racines carrées $\omega = \alpha + i\beta$. À partir de l'équation $\omega^2 = z$, identifier les parties réelles et imaginaires. Vous obtenez deux équations. Pour simplifier la résolutions rajouter l'équation obtenue par l'égalité $|\omega|^2 = |z|$.

Indication 48 Calculer $(1-z)S_n$.

Indication 51 Le premier ensemble est une droite le second est un cercle.

Indication 57 Appliquer deux fois la formule de Moivre en remarquant $e^{i5\theta} = (e^{i\theta})^5$.

Nombres complexes

Correction 1 Remarquons d'abord que pour $z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} = |z|^2$ est un nombre réel.

$$\frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{9-24+12i+18i}{9+16} = \frac{-15+30i}{25} = -\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i.$$

Calculons

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{3} = \frac{1+3i}{3},$$

et

$$\left(\frac{1+i}{2-1}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{3}\right)^2 = \frac{-8+6i}{9} = -\frac{8}{9}+\frac{6}{9}i.$$

Donc

$$\left(\frac{1+i}{2-1}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} = -\frac{8}{9}+\frac{6}{9}-\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i = -\frac{67}{45}+\frac{84}{45}i.$$

Soit $z = \frac{2+5i}{1-i}$. Calculons $z+\overline{z}$, nous savons déjà que c'est un nombre réel, plus précisément : $z = -\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i$ et donc $z+\overline{z} = -3$.

Correction 2

1. $1+i\sqrt{3}$.
2. $3\cos\frac{\pi}{8} - 3i\sin\frac{\pi}{8} = \frac{3\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{3i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Correction 3 $9-7i$; $-6i$; $-0{,}3+1{,}1i$; $-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{i}{3}$.

Correction 4 Il s'agit juste d'appliquer la formule de Moivre :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta;$$

ainsi que les formules sur les produits de puissances :

$$e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)} \text{ et } e^{ia}/e^{ib} = e^{i(a-b)}.$$

Correction 5 Nous avons

$$u = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

puis

$$v = 1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer le quotient :

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{6}-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Correction 6 D'après la formule de Moivre pour $e^{i\alpha}$ nous avons :

$$e^{e^{i\alpha}} = e^{\cos\alpha + i\sin\alpha} = e^{\cos\alpha} e^{i\sin\alpha}.$$

Or $e^{\cos\alpha} > 0$ donc l'écriture précédente est bien de la forme "module-argument".

De façon générale pour calculer un somme du type $e^{iu} + e^{iv}$ il est souvent utile de factoriser par $e^{i\frac{u+v}{2}}$. En effet

$$\begin{aligned} e^{iu} + e^{iv} &= e^{i\frac{u+v}{2}} \left(e^{i\left(\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right)} \right) \\ &= e^{i\frac{u+v}{2}} 2\cos\left(\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right) e^{i\frac{u+v}{2}}. \end{aligned}$$

Ce qui est proche de l'écriture en coordonnées polaires.
Pour le cas qui nous concerne :

$$z = e^{i\theta} + e^{2i\theta} = e^{\frac{3i\theta}{2}} \left[e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}} \right] = 2\cos\theta e^{\frac{3i\theta}{2}}.$$

Attention le module dans une décomposion en forme polaire doit être positif ! Donc si $\cos\theta/2 \geqslant 0$ (*i.e.* $\theta \in [-\pi + 4k\pi, +\pi + 4k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$) alors $2\cos\theta$ est le module de z et 3θ est son argument ; par contre si $\cos\theta/2 < 0$ le module est $2|\cos\theta|$ et l'argument $3\theta+\pi$ (le $+\pi$ compense le changement de signe car $e^{i\pi} = -1$).

Correction 7 Écrivons $z = \rho e^{i\theta}$, alors $\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$. Donc

$$\begin{aligned} P &= (z+\overline{z})(z^2+\overline{z}^2)\dots(z^n+\overline{z}^n) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left(z^k + \overline{z}^k \right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \rho^k \left((e^{i\theta})^k + (e^{-i\theta})^k \right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \rho^k \left(e^{ik\theta} + e^{-ik\theta} \right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} 2\rho^k \cos k\theta \\ &= 2^n.\rho.\rho^2.\dots.\rho^n \prod_{k=1}^{n} \cos k\theta \\ &= 2^n \rho^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^{n} \cos k\theta. \end{aligned}$$

Correction 8

$$1 + e^{i\theta} = e^{\frac{i\theta}{2}} (e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}}) = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{\frac{i\theta}{2}}.$$

Comme $\theta \in]-\pi, +\pi[$ alors le module est $2\cos\frac{\theta}{2} \geqslant 0$ et l'argument est $\frac{\theta}{2}$. Géométriquement, on trace le cercle de centre 1 et de rayon 1. L'angle en 0 du triangle $(0, 1, 1+e^{i\theta})$ est $\frac{\theta}{2}$ et donc est le double de l'angle en 0 du triangle $(1, 2, 1+e^{i\theta})$ qui vaut θ.
C'est le résulat géométrique (théorème de l'angle au centre) qui affirme que pour un cercle l'angle au centre est le double de l'angle inscrit.

Correction 9 **Racines carrées.** Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$; nous cherchons les complexes $\omega \in \mathbb{C}$ tels que $\omega^2 = z$. Écrivons $\omega = \alpha + i\beta$. Nous raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned} \omega^2 = z &\Leftrightarrow (\alpha + i\beta)^2 = a + ib \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = a + ib \end{aligned}$$

Soit en identifiant les parties réelles entre elles ainsi que les parties imaginaires :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

Sans changer l'équivalence nous rajoutons la condition $|\omega|^2 = |z|$.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = \frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ \beta^2 = \alpha^2 - a = \frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ 2\alpha\beta = b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \beta = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \alpha\beta \text{ est du même signe que } b \end{cases} \end{aligned}$$

Cela donne deux couples (α, β) de solution et donc deux racines carrées $\omega = \alpha + i\beta$ de z.

En pratique on répète facilement ce raisonnement, par exemple pour $z = 8 - 6i$,

$$\begin{aligned}
\omega^2 = z &\Leftrightarrow (\alpha + i\beta)^2 = 8 - 6i \\
&\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = 8 - 6i \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10 \text{ le module de } z \\ \alpha^2 - \beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 = 18 \\ \beta^2 = 10 - \alpha^2 = 1 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \\ \beta = \pm 1 \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ de signes opposés} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \qquad \alpha = 3 \text{ et } \beta = -1 \\ ou \\ \qquad \alpha = -3 \text{ et } \beta = +1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Les racines de $z = 8 - 6i$ sont donc $\omega = 3 - i$ et $-\omega = -3 + i$.
Les autres réponses : pour 1 les racines sont $+1$ et -1. Pour i les racines sont $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. Pour $7 + 24i$ les racines sont $4 - 3i$ et $-4 + 3i$.

Correction 10 $2 - i$ et $-2 + i$; $\qquad 5 - i$ et $-5 + i$.

Correction 11 Par la méthode usuelle nous calculons les racines carrées $\omega, -\omega$ de $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, nous obtenons

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}.$$

mais nous remarquons que z s'écrit également

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

et $e^{i\frac{\pi}{8}}$ vérifie

$$\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2 = e^{\frac{2i\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Cela signifie que $e^{i\frac{\pi}{8}}$ est une racine carrée de z, donc $e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$ est égal à ω ou $-\omega$. Comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ alors $e^{i\frac{\pi}{8}} = \omega$ et donc par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

De la même façon on obtiendrait :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1) \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1).$$

Correction 12 Soit $P(z) = az^2 + bz + c$, et $\Delta = b^2 - 4ac$, si $\Delta \geqslant 0$ alors les racines sont réelles, seul le cas où $\Delta < 0$ nous intéresse. Première méthode : il suffit de regarder les deux solutions et de vérifier qu'elles sont conjuguées...
Seconde méthode : si z est une racine de P *i.e.* $P(z) = 0$, alors

$$P(\overline{z}) = a\overline{z}^2 + b\overline{z} + c = \overline{az^2 + b^z + c} = \overline{P(z)} = 0.$$

Donc $\overline{z}$ est aussi une racine de P. Or z n'est pas un nombre réel (car $\Delta < 0$) donc $\overline{z} \neq z$. Sachant que le polynôme P de degré 2 a exactement 2 racines, ce sont z et $\overline{z}$ et elles sont conjuguées.

Correction 13 **Équations du second degré.** La méthode génerale pour résoudre les équations du second degré $az^2 + bz + c = 0$ (avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$) est la suivante : soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant complexe et δ une racine carrée de Δ ($\delta^2 = \Delta$) alors les solutions sont :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Dans le cas où les coefficients sont réels, on retrouve la méthode bien connue. Le seul travail dans le cas complexe est de calculer une racine δ de Δ.
Exemple : pour $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$, $\Delta = 3 + 4i$, dont une racine carrée est $\delta = 2 + i$, les solutions sont donc :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} + 2 + i}{2} \text{ et } z_2 = \frac{\sqrt{3} - 2 - i}{2}.$$

Correction 14

1. $\Delta = -2i$ dont les racines carrées sont $1 - i$ et $-1 + i$, d'où les racines $z_1 = 5 - 2i$ et $z_2 = 6 - 3i$.
2. Une racine "évidente" $z_1 = i$, d'où la résolution complète en effectuant la division par $z - i$. On trouve $z_2 = i$ et $z_3 = -2i$.

Correction 15 $\frac{1}{4}(-1 + i) = \frac{1}{(\sqrt{2})^3} e^{\frac{3i\pi}{4}} = (\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\pi}{4}})^3$. Les solutions sont les complexes $z_k = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\pi}{4} + \frac{2ik\pi}{3}}$ pour $0 \leqslant k \leqslant 2$. Et seul $z_0 = \frac{1}{2}(1 + i)$ a une puissance quatrième réelle.

Correction 16

1. Les trois racines cubiques ont même module $\sqrt{2}$, et leurs arguments sont $-\pi/12$, $7\pi/12$ et $5\pi/4$. Des valeurs approchées sont $1{,}36603 - 0{,}36603i$, $-0{,}36603 + 1{,}36603i$ et $-1 - i$.
2. $-1 - 2i$, $(-1 - 2i)j$ et $(-1 - 2i)j^2$ où $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ (racine cubique de 1).

Correction 17 $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$; $\tan \frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$.
Les racines de $z^{24} = 1$ sont données par $z_k = e^{2ki\pi/24}$ pour $k = 0, 1, \ldots, 23$. Ce sont donc 1, $\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$, etc.

Correction 18

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \sum_{k=0}^{n} z^k.$$

Nous devons retrouver le résultat sur la somme $S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ d'une suite géométrique dans le cas où $z \neq 1$ est un réel. Soit maintenant $z \neq 1$ un nombre complexe. Calculons $S_n(1 - z)$.

$$\begin{aligned} S_n(1 - z) &= (1 + z + z^2 + \cdots + z^n)(1 - z) \text{ développons} \\ &= 1 + z + z^2 + \cdots + z^n - z - z^2 - \cdots - z^{n+1} \text{ les termes intermédiaires s'annulent} \\ &= 1 - z^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc
$$S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \text{ pour } z \neq 1.$$

Correction 19 **Calcul de racine n-ième.** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = 1$, déjà $|z|^n = 1$ et donc $|z| = 1$. Écrivons $z = e^{i\theta}$. L'équation devient

$$e^{in\theta} = e^0 = 1 \Leftrightarrow n\theta = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Les solution sont donc
$$\mathcal{S} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Comme le polynôme $z^n - 1$ est de degré n il a au plus n racines. Nous choisissons pour représentants :
$$\mathcal{S} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k = 0, \ldots, n-1 \right\}.$$

De plus si $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ alors $\mathcal{S} = \left\{ \varepsilon^k,\ k = 0, \ldots, n-1 \right\}$. Ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.
Soit $P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$ pour $z \neq 1$. Donc quelque soit $z \in \mathcal{S} \setminus \{1\}$ $P(z) = 0$, nous avons ainsi trouver $n-1$ racines pour P de degré $n-1$, donc l'ensemble des racines de P est exactement $\mathcal{S} \setminus \{1\}$.
Pour conclure soit $Q_p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{kp}$.
Si $p = 0 + \ell n$, $\ell \in \mathbb{Z}$ alors $Q_p(z) = p$.
Sinon $Q_p(z)$ est la somme d'une suite géométrique de raison ε^p :

$$Q_p(z) = \frac{1 - (\varepsilon^p)^n}{1 - \varepsilon^p} = \frac{1 - (\varepsilon^n)^p}{1 - \varepsilon^p} = \frac{1 - 1}{1 - \varepsilon^p} = 0.$$

Correction 20 Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes *distincts* ayant le même cube.

1. $z_1 \neq 0$ car sinon on aurait $z_1 = z_2 = z_3 = 0$. Ainsi $(\frac{z_2}{z_1})^3 = (\frac{z_3}{z_1})^3 = 1$. Comme les trois nombres $1, (\frac{z_2}{z_1})$ et $(\frac{z_3}{z_1})$ sont distincts on en déduit que ce sont les trois racines cubiques de 1. Ces racines sont $1, j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$. A une permutation près des indices 2 et 3 on a donc :
$$z_2 = jz_1 \qquad \text{et} \qquad z_3 = j^2 z_1.$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :
$$z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0 \Leftrightarrow z^3 \text{ est solution de } Z^2 + (7-i)Z - 8 - 8i = 0$$
Etudions l'équation $Z^2 + (7-i)Z - 8 - 8i = 0$. $\Delta = (7-i)^2 + 4(8+8i) = 80 + 18i = (9+i)^2$. Les solutions sont donc -8 et $1+i$. Nous pouvons reprendre notre suite d'équivalences :
$$\begin{aligned} z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0 &\Leftrightarrow z^3 \in \{-8, 1+i\} \\ &\Leftrightarrow z^3 = (-2)^3 \quad \text{ou} \quad z^3 = (\sqrt[6]{2} e^{i\frac{\pi}{12}})^3 \\ &\Leftrightarrow z \in \{-2, -2e^{\frac{2i\pi}{3}}, -2e^{-\frac{2i\pi}{3}}\} \text{ ou } z \in \{\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{9\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\} \\ &\Leftrightarrow z \in \{-2, 2e^{\frac{i\pi}{3}}, 2e^{-\frac{i\pi}{3}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\}. \end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est donc :
$$\{-2, 2e^{\frac{i\pi}{3}}, 2e^{-\frac{i\pi}{3}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\}.$$

Correction 21 Nous identifions $\mathbb{C}$ au plan affine et $z = x + iy$ à $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Remarquons que pour les deux ensembles $z = 5$ n'est pas solution, donc

$$\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-3| = |z-5|.$$

Ce qui signifie présiment que que les points d'affixe z sont situés à égale distance des points A, B d'affixes respectives $3 = (3, 0)$ et $5 = (5, 0)$. L'ensemble solution est la médiatrice du segment $[A, B]$.

Ensuite pour

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow |z-3|^2 = \frac{1}{2}|z-5|^2\\ &\Leftrightarrow (z-3)\overline{(z-3)} = \frac{1}{2}(z-5)\overline{(z-5)}\\ &\Leftrightarrow z\overline{z} - (z+\overline{z}) = 7\\ &\Leftrightarrow |z-1|^2 = 8\\ &\Leftrightarrow |z-1| = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc le cercle de centre le point d'affixe $1 = (1, 0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

Correction 22 En exprimant qu'un nombre complexe de module 1 peut s'écrire $e^{i\theta}$, on trouve $z = \frac{a-be^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$. On peut encore écrire $z = A + B\cot\frac{\theta}{2}$, où A et B sont indépendants de θ, ce qui montre que le point d'affixe z décrit une droite. Géométriquement, cette droite est bien entendu la médiatrice du segment qui joint les points d'affixes a et b.

Correction 23 Méthode analogue à celle de l'exercice 52. On trouve $z = \frac{a-bke^{i\theta}}{1-ke^{i\theta}}$. On peut vérifier que le point d'affixe z décrit le cercle dont un diamètre joint les points correspondant à $\theta = 0$ et à $\theta = \pi$ (vérifier en cherchant le milieu z_0 de ce segment et en étudiant $|z - z_0|$).

Correction 24
1. Réciproque : $a + jb + j^2c = 0$ ou $a + j^2b + jc = 0$ (cela dépend de l'orientation du triangle).
2. $ADOE$ est un parallélogramme. Les trois triangles OBC, DBA et EAC sont directement isométriques, ce qui d'ailleurs se vérifie immédiatement à l'aide de rotations.

Correction 25

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = (u+v)(\bar{u}+\bar{v}) + (u-v)(\bar{u}-\bar{v}) = 2u\bar{u} + 2v\bar{v} = 2|u|^2 + 2|v|^2.$$

Géométriquement il s'agit de l'identité du parallélogramme. Les points d'affixes $0, u, v, u+v$ forment un parallélogramme. $|u|$ et $|v|$ sont les longueurs des cotés, et $|u+v|, |u-v|$ sont les longueurs des diagonales. Il n'est pas évident de montrer ceci sans les nombres complexes !!

Correction 26
1. Comme $(A_0, \ldots, A_4)$ est un pentagone régulier, on a $OA_0 = OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4 = 1$ et $(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_1}) = \frac{2\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_2}) = \frac{4\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_3}) = -\frac{4\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_4}) = -\frac{2\pi}{5}[2\pi],$. On en déduit : $\omega_0 = 1, \omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{5}}, \omega_2 = e^{\frac{4i\pi}{5}}, \omega_3 = e^{-\frac{4i\pi}{5}} = e^{\frac{6i\pi}{5}}, \omega_4 = e^{-\frac{2i\pi}{5}} = e^{\frac{8i\pi}{5}},$. On a bien $\omega_i = \omega_1^i$. Enfin, comme $\omega_1 \neq 0$, $1 + \omega_1 + \ldots + \omega_1^4 = \frac{1-\omega_1^5}{1-\omega_1} = \frac{1-1}{1-\omega_1} = 0$.

2. $\mathrm{Re}(1+\omega_1+\ldots+\omega_1^4) = 1+2\cos(\frac{2\pi}{5})+2\cos(\frac{4\pi}{5})$. Comme $\cos(\frac{4\pi}{5}) = 2\cos^2(\frac{2\pi}{5})-1$ on en déduit : $4\cos^2(\frac{2\pi}{5})+2\cos(\frac{2\pi}{5})-1=0$. $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est donc bien une solution de l'équation $4z^2+2z-1=0$. Etudions cette équation : $\Delta = 20 = 2^2.5$. Les solutions sont donc $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Comme $\cos(\frac{2\pi}{5})>0$, on en déduit que $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
3. $BA_2^2 = |\omega_2+1|^2 = |\cos(\frac{4\pi}{5})+i\sin(\frac{4\pi}{5})+1|^2 = 1+2\cos(\frac{4\pi}{5})+\cos^2(\frac{4\pi}{5})+\sin^2(\frac{4\pi}{5}) = 4\cos^2(\frac{2\pi}{5})$. Donc $BA_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
4. $BI = |i/2+1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. $BJ = BI - 1/2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
5. Pour tracer un pentagone régulier, on commence par tracer un cercle C_1 et deux diamètres orthogonaux, qui jouent le rôle du cercle passant par les sommets et des axes de coordonnées. On trace ensuite le milieu d'un des rayons : on obtient le point I de la question 4. On trace le cercle de centre I passant par le centre de C_1 : c'est le cercle $\mathcal{C}$. On trace le segment BI pour obtenir son point J d'intersection avec $\mathcal{C}$. On trace enfin le cercle de centre B passant par J : il coupe C_1 en A_2 et A_3, deux sommets du pentagone. Il suffit pour obtenir tous les sommets de reporter la distance A_2A_3 sur C_1, une fois depuis A_2, une fois depuis A_3. (en fait le cercle de centre B et passant par J', le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à J, coupe C_1 en A_1 et A_4, mais nous ne l'avons pas justifié par le calcul : c'est un exercice !)

Correction 27 Nous avons par la formule de Moivre

$$\cos 5\theta + i\sin 5\theta = e^{i5\theta} = (e^{i\theta})^5 = (\cos\theta + i\sin\theta)^5.$$

On développe ce dernier produit, puis on identifie parties réelles et parties imaginaires. On obtient :

$$\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta\\ \sin 5\theta &= 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta\end{aligned}$$

Remarque : Grâce à la formule $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, on pourrait continuer les calculs et exprimer $\cos 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$, et $\sin 5\theta$ en fonction de $\sin\theta$.

Correction 28

1. $\cos^2(x)-\sin^2(x) = \sin(3x)$ ssi $x = \pi/2+2k\pi$ ou $x = -\pi/10+2k\pi/5$, avec $k\in\mathbb{Z}$.
2. $\cos^4(x)-\sin^4(x) = 1$ ssi $x = k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$.

Correction 29

1. Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}[i]$. Notons $\alpha = a+ib$ et $\beta = c+id$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$. Alors $\alpha+\beta = (a+c)+i(b+d)$ et $a+c\in\mathbb{Z}$, $b+d\in\mathbb{Z}$ donc $\alpha+\beta\in\mathbb{Z}[i]$. De même, $\alpha\beta = (ac-bd)+i(ad+bc)$ et $ac-bd\in\mathbb{Z}$, $ad+bc\in\mathbb{Z}$ donc $\alpha\beta\in\mathbb{Z}[i]$.
2. Soit $\alpha\in\mathbb{Z}[i]$ inversible. Il existe donc $\beta\in\mathbb{Z}[i]$ tel que $\alpha\beta=1$. Ainsi, $\alpha\neq 0$ et $\frac{1}{\alpha}\in\mathbb{Z}[i]$. Remarquons que tout élément non nul de $\mathbb{Z}[i]$ est de module supérieur ou égal à 1 : en effet $\forall z\in\mathbb{C}, |z|\geqslant \sup(|\mathrm{Re}(z)|,|\mathrm{Im}(z)|)$ et si $z\in\mathbb{Z}[i]\setminus\{0\}$, $\sup(|\mathrm{Re}(z)|,|\mathrm{Im}(z)|)\geqslant 1$. Si $|\alpha|\neq 1$ alors $|\alpha|>1$ et $|1/\alpha|<1$. On en déduit $1/\alpha = 0$ ce qui est impossible. Ainsi $|\alpha|=1$, ce qui implique $\alpha\in\{1,-1,i,-i\}$.
   Réciproquement, $1^{-1} = 1\in\mathbb{Z}[i], (-1)^{-1} = -1\in\mathbb{Z}[i], i^{-1} = -i\in\mathbb{Z}[i], (-i)^{-1} = i\in\mathbb{Z}[i]$. Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont donc $1,-1,i$ et $-i$.
3. Soit $\omega\in\mathbb{C}$. Notons $\omega = x+iy$ avec $x,y\in\mathbb{R}$. soit $E(x)$ la partie entière de x, i.e. le plus grand entier inférieur ou égal à x : $E(x)\leqslant x < E(x)+1$. Si $x\leqslant E(x)+1/2$, notons $n_x = E(x)$, et si $x > E(x)+1/2$, notons $n_x = E(x)+1$. n_x est le, ou l'un des s'il y en a deux, nombre entier le plus proche de x : $|x-n_x|\leqslant 1/2$. Notons n_y l'entier associé de la même manière à y. Soit alors $z = n_x+in_y$. $z\in\mathbb{Z}[i]$ et $|\omega-z|^2 = (x-n_x)^2+(y-n_y)^2\leqslant 1/4+1/4 = 1/2$. Donc $|\omega-z|<1$.

4. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$, avec $\beta \neq 0$. Soit alors $q \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|\frac{\alpha}{\beta} - q| < 1$. Soit $r = \alpha - \beta q$. Comme $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ et $\beta q \in \mathbb{Z}[i]$, $r \in \mathbb{Z}[i]$. De plus $|\frac{r}{\beta}| = |\frac{\alpha}{\beta} - q| < 1$ donc $|r| < |\beta|$.

Correction 30 1. À permutation près, $x = -2$, $y = -2j$ et $z = -2j^2$ (j désigne la racine cubique de l'unité $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$).

2. À permutation près, $x = 1$, $y = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ et $z = \frac{3-i\sqrt{3}}{2}$.

Correction 31 Remarquons d'abord que pour $z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} = |z|^2$ est un nombre réel.

$$\frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{9-24+12i+18i}{9+16} = \frac{-15+30i}{25} = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i.$$

Calculons

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{3} = \frac{1+3i}{3},$$

et

$$\left(\frac{1+i}{2-1}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{3}\right)^2 = \frac{-8+6i}{9} = -\frac{8}{9} + \frac{6}{9}i.$$

Donc

$$\left(\frac{1+i}{2-1}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} = -\frac{8}{9} + \frac{6}{9} - \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i = -\frac{67}{45} + \frac{84}{45}i.$$

Soit $z = \frac{2+5i}{1-i}$. Calculons $z + \overline{z}$, nous savons déjà que c'est un nombre réel, plus précisément : $z = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$ et donc $z + \overline{z} = -3$.

Correction 32 1. $1 + i\sqrt{3}$.

2. $3\cos\frac{\pi}{8} - 3i\sin\frac{\pi}{8} = \frac{3\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{3i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Correction 33 $9 - 7i$; $\quad -6i$; $\quad -0{,}3 + 1{,}1i$; $\quad -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{i}{3}$.

Correction 34 Il s'agit juste d'appliquer la formule de Moivre :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta;$$

ainsi que les formules sur les produits de puissances :

$$e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)} \text{ et } e^{ia}/e^{ib} = e^{i(a-b)}.$$

Correction 35 Nous avons

$$u = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

puis

$$v = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer le quotient :

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{6} - i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Correction 36 D'après la formule de Moivre pour $e^{i\alpha}$ nous avons :

$$e^{e^{i\alpha}} = e^{\cos\alpha + i\sin\alpha} = e^{\cos\alpha}e^{i\sin\alpha}.$$

Or $e^{\cos\alpha} > 0$ donc l'écriture précédente est bien de la forme "module-argument".

De façon générale pour calculer un somme du type $e^{iu} + e^{iv}$ il est souvent utile de factoriser par $e^{i\frac{u+v}{2}}$. En effet

$$\begin{aligned} e^{iu} + e^{iv} &= e^{i\frac{u+v}{2}}\left(e^{i\left(\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right)}\right) \\ &= e^{i\frac{u+v}{2}} 2\cos\left(\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{u}{2}-\frac{v}{2}\right)e^{i\frac{u+v}{2}}. \end{aligned}$$

Ce qui est proche de l'écriture en coordonnées polaires.
Pour le cas qui nous concerne :

$$z = e^{i\theta} + e^{2i\theta} = e^{\frac{3i\theta}{2}}\left[e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}}\right] = 2\cos\theta e^{\frac{3i\theta}{2}}.$$

Attention le module dans une décomposion en forme polaire doit être positif ! Donc si $\cos\theta/2 \geqslant 0$ (*i.e.* $\theta \in [-\pi + 4k\pi, +\pi + 4k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$) alors $2\cos\theta$ est le module de z et 3θ est son argument ; par contre si $\cos\theta/2 < 0$ le module est $2|\cos\theta|$ et l'argument $3\theta + \pi$ (le $+\pi$ compense le changement de signe car $e^{i\pi} = -1$).

Correction 37 Écrivons $z = \rho e^{i\theta}$, alors $\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$. Donc

$$\begin{aligned} P &= (z+\overline{z})(z^2+\overline{z}^2)\dots(z^n+\overline{z}^n) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\left(z^k + \overline{z}^k\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\rho^k\left((e^{i\theta})^k + (e^{-i\theta})^k\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\rho^k\left(e^{ik\theta} + e^{-ik\theta})\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} 2\rho^k\cos k\theta \\ &= 2^n.\rho.\rho^2.\dots.\rho^n\prod_{k=1}^{n}\cos k\theta \\ &= 2^n\rho^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{k=1}^{n}\cos k\theta. \end{aligned}$$

Correction 38

$$1 + e^{i\theta} = e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}}) = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\theta}{2}}.$$

Comme $\theta \in]-\pi, +\pi[$ alors le module est $2\cos\frac{\theta}{2} \geqslant 0$ et l'argument est $\frac{\theta}{2}$. Géométriquement, on trace le cercle de centre 1 et de rayon 1. L'angle en 0 du triangle $(0, 1, 1 + e^{i\theta})$ est $\frac{\theta}{2}$ et donc est le double de l'angle en 0 du triangle $(1, 2, 1 + e^{i\theta})$ qui vaut θ.
C'est le résulat géométrique (théorème de l'angle au centre) qui affirme que pour un cercle l'angle au centre est le double de l'angle inscrit.

Correction 39 **Racines carrées.** Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$; nous cherchons les complexes $\omega \in \mathbb{C}$ tels que $\omega^2 = z$. Écrivons $\omega = \alpha + i\beta$. Nous raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned} \omega^2 = z &\Leftrightarrow (\alpha + i\beta)^2 = a + ib \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = a + ib \end{aligned}$$

Soit en identifiant les parties réelles entre elles ainsi que les parties imaginaires :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

Sans changer l'équivalence nous rajoutons la condition $|\omega|^2 = |z|$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = \frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ \beta^2 = \alpha^2 - a = \frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \beta = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \alpha\beta \text{ est du même signe que } b \end{cases}$$

Cela donne deux couples (α, β) de solution et donc deux racines carrées $\omega = \alpha + i\beta$ de z.

En pratique on répète facilement ce raisonnement, par exemple pour $z = 8 - 6i$,

$$\begin{aligned}
\omega^2 = z &\Leftrightarrow (\alpha + i\beta)^2 = 8 - 6i \\
&\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = 8 - 6i \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10 \text{ le module de } z \\ \alpha^2 - \beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 = 18 \\ \beta^2 = 10 - \alpha^2 = 1 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \\ \beta = \pm 1 \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ de signes opposés} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \qquad \alpha = 3 \text{ et } \beta = -1 \\ ou \\ \qquad \alpha = -3 \text{ et } \beta = +1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Les racines de $z = 8 - 6i$ sont donc $\omega = 3 - i$ et $-\omega = -3 + i$.
Les autres réponses : pour 1 les racines sont $+1$ et -1. Pour i les racines sont $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$. Pour $7 + 24i$ les racines sont $4 - 3i$ et $-4 + 3i$.

Correction 40 $2 - i$ et $-2 + i$; $\qquad 5 - i$ et $-5 + i$.

Correction 41 Par la méthode usuelle nous calculons les racines carrées $\omega, -\omega$ de $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, nous obtenons

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}.$$

mais nous remarquons que z s'écrit également

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

et $e^{i\frac{\pi}{8}}$ vérifie

$$\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2 = e^{\frac{2i\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Cela signifie que $e^{i\frac{\pi}{8}}$ est une racine carrée de z, donc $e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$ est égal à ω ou $-\omega$. Comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ alors $e^{i\frac{\pi}{8}} = \omega$ et donc par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

De la même façon on obtiendrait :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1) \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1).$$

Correction 42 Soit $P(z) = az^2 + bz + c$, et $\Delta = b^2 - 4ac$, si $\Delta \geqslant 0$ alors les racines sont réelles, seul le cas où $\Delta < 0$ nous intéresse. Première méthode : il suffit de regarder les deux solutions et de vérifier qu'elles sont conjuguées...
Seconde méthode : si z est une racine de P *i.e.* $P(z) = 0$, alors

$$P(\overline{z}) = a\overline{z}^2 + b\overline{z} + c = \overline{az^2 + b^z + c} = \overline{P(z)} = 0.$$

Donc $\overline{z}$ est aussi une racine de P. Or z n'est pas un nombre réel (car $\Delta < 0$) donc $\overline{z} \neq z$. Sachant que le polynôme P de degré 2 a exactement 2 racines, ce sont z et $\overline{z}$ et elles sont conjuguées.

Correction 43 **Équations du second degré.** La méthode génerale pour résoudre les équations du second degré $az^2 + bz + c = 0$ (avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$) est la suivante : soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant complexe et δ une racine carrée de Δ ($\delta^2 = \Delta$) alors les solutions sont :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Dans le cas où les coefficients sont réels, on retrouve la méthode bien connue. Le seul travail dans le cas complexe est de calculer une racine δ de Δ.
Exemple : pour $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$, $\Delta = 3 + 4i$, dont une racine carrée est $\delta = 2 + i$, les solutions sont donc :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} + 2 + i}{2} \text{ et } z_2 = \frac{\sqrt{3} - 2 - i}{2}.$$

Correction 44

1. $\Delta = -2i$ dont les racines carrées sont $1 - i$ et $-1 + i$, d'où les racines $z_1 = 5 - 2i$ et $z_2 = 6 - 3i$.
2. Une racine "évidente" $z_1 = i$, d'où la résolution complète en effectuant la division par $z - i$. On trouve $z_2 = i$ et $z_3 = -2i$.

Correction 45 Les solutions sont les complexes $z_k = 2^{-1/2}e^{i(-\pi/12 + 2k\pi/3)}$ pour $0 \leqslant k \leqslant 2$. Et seul z_1 a une puissance quatrième réelle.

Correction 46

1. Les trois racines cubiques ont même module $\sqrt{2}$, et leurs arguments sont $-\pi/12$, $7\pi/12$ et $5\pi/4$. Des valeurs approchées sont $1{,}36603 - 0{,}36603i$, $-0{,}36603 + 1{,}36603i$ et $-1 - i$.
2. $-1 - 2i$, $(-1 - 2i)j$ et $(-1 - 2i)j^2$ où $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ (racine cubique de 1).

Correction 47 $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$; $\tan\frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$.
Les racines de $z^{24} = 1$ sont données par $z_k = e^{2ki\pi/24}$ pour $k = 0, 1, \ldots, 23$. Ce sont donc 1, $\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$, etc.

Correction 48

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \sum_{k=0}^{n} z^k.$$

Nous devons retrouver le résultat sur la somme $S_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ d'une suite géométrique dans le cas où $z \neq 1$ est un réel. Soit maintenant $z \neq 1$ un nombre complexe. Calculons $S_n(1 - z)$.

$$\begin{aligned} S_n(1-z) &= (1 + z + z^2 + \cdots + z^n)(1 - z) && \text{développons} \\ &= 1 + z + z^2 + \cdots + z^n - z - z^2 - \cdots - z^{n+1} && \text{les termes intermédiaires s'annulent} \\ &= 1 - z^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc

$$S_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, \text{ pour } z \neq 1.$$

Correction 49 **Calcul de racine n-ième.** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = 1$, déjà $|z|^n = 1$ et donc $|z| = 1$. Écrivons $z = e^{i\theta}$. L'équation devient

$$e^{in\theta} = e^0 = 1 \Leftrightarrow n\theta = 0 + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Les solution sont donc

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Comme le polynôme $z^n - 1$ est de degré n il a au plus n racines. Nous choisissons pour représentants :

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \ k = 0, \ldots, n-1 \right\}.$$

De plus si $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ alors $\mathcal{S} = \left\{ \varepsilon^k, \ k = 0, \ldots, n-1 \right\}$. Ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.
Soit $P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$ pour $z \neq 1$. Donc quelque soit $z \in \mathcal{S} \setminus \{1\}$ $P(z) = 0$, nous avons ainsi trouver $n-1$ racines pour P de degré $n-1$, donc l'ensemble des racines de P est exactement $\mathcal{S} \setminus \{1\}$.
Pour conclure soit $Q_p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{kp}$.
Si $p = 0 + \ell n$, $\ell \in \mathbb{Z}$ alors $Q_p(z) = p$.
Sinon $Q_p(z)$ est la somme d'une suite géométrique de raison ε^p :

$$Q_p(z) = \frac{1-(\varepsilon^p)^n}{1-\varepsilon^p} = \frac{1-(\varepsilon^n)^p}{1-\varepsilon^p} = \frac{1-1}{1-\varepsilon^p} = 0.$$

Correction 50 Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes *distincts* ayant le même cube.

1. $z_1 \neq 0$ car sinon on aurait $z_1 = z_2 = z_3 = 0$. Ainsi $(\frac{z_2}{z_1})^3 = (\frac{z_3}{z_1})^3 = 1$. Comme les trois nombres $1, (\frac{z_2}{z_1})$ et $(\frac{z_3}{z_1})$ sont distincts on en déduit que ce sont les trois racines cubiques de 1. Ces racines sont $1, j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$. A une permutation près des indices 2 et 3 on a donc :

$$z_2 = jz_1 \qquad \text{et} \qquad z_3 = j^2 z_1.$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0 \Leftrightarrow z^3 \text{ est solution de } Z^2 + (7-i)Z - 8 - 8i = 0$$

Etudions l'équation $Z^2+(7-i)Z-8-8i = 0$. $\Delta = (7-i)^2+4(8+8i) = 80+18i = (9+i)^2$. Les solutions sont donc -8 et $1+i$. Nous pouvons reprendre notre suite d'équivalences :

$$\begin{aligned} z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0 &\Leftrightarrow z^3 \in \{-8, 1+i\} \\ &\Leftrightarrow z^3 = (-2)^3 \quad \text{ou} \quad z^3 = (\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}})^3 \\ &\Leftrightarrow z \in \{-2, -2e^{\frac{2i\pi}{3}}, -2e^{-\frac{2i\pi}{3}}\} \text{ ou } z \in \{\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{9\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\} \\ &\Leftrightarrow z \in \{-2, 2e^{\frac{i\pi}{3}}, 2e^{-\frac{i\pi}{3}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\{-2, 2e^{\frac{i\pi}{3}}, 2e^{-\frac{i\pi}{3}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\}.$$

Correction 51 Nous identifions $\mathbb{C}$ au plan affine et $z = x + iy$ à $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Remarquons que pour les deux ensembles $z = 5$ n'est pas solution, donc

$$\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-3| = |z-5|.$$

Ce qui signifie présiment que que les points d'affixe z sont situés à égale distance des points A, B d'affixes respectives $3 = (3,0)$ et $5 = (5,0)$. L'ensemble solution est la médiatrice du segment $[A, B]$.

Ensuite pour

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow |z-3|^2 = \frac{1}{2}|z-5|^2 \\ &\Leftrightarrow (z-3)\overline{(z-3)} = \frac{1}{2}(z-5)\overline{(z-5)} \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} - (z + \overline{z}) = 7 \\ &\Leftrightarrow |z-1|^2 = 8 \\ &\Leftrightarrow |z-1| = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc le cercle de centre le point d'affixe $1 = (1,0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

Correction 52 En exprimant qu'un nombre complexe de module 1 peut s'écrire $e^{i\theta}$, on trouve $z = \frac{a-be^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$. On peut encore écrire $z = A + B\cot\frac{\theta}{2}$, où A et B sont indépendants de θ, ce qui montre que le point d'affixe z décrit une droite. Géométriquement, cette droite est bien entendu la médiatrice du segment qui joint les points d'affixes a et b.

Correction 53 Méthode analogue à celle de l'exercice 52. On trouve $z = \frac{a-bke^{i\theta}}{1-ke^{i\theta}}$. On peut vérifier que le point d'affixe z décrit le cercle dont un diamètre joint les points correspondant à $\theta = 0$ et à $\theta = \pi$ (vérifier en cherchant le milieu z_0 de ce segment et en étudiant $|z - z_0|$).

Correction 54
1. Réciproque : $a + jb + j^2c = 0$ ou $a + j^2b + jc = 0$ (cela dépend de l'orientation du triangle).
2. $ADOE$ est un parallélogramme. Les trois triangles OBC, DBA et EAC sont directement isométriques, ce qui d'ailleurs se vérifie immédiatement à l'aide de rotations.

Correction 55

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = (u+v)(\bar{u}+\bar{v}) + (u-v)(\bar{u}-\bar{v}) = 2u\bar{u} + 2v\bar{v} = 2|u|^2 + 2|v|^2.$$

Géométriquement il s'agit de l'identité du parallélogramme. Les points d'affixes $0, u, v, u+v$ forment un parallélogramme. $|u|$ et $|v|$ sont les longueurs des cotés, et $|u+v|, |u-v|$ sont les longueurs des diagonales. Il n'est pas évident de montrer ceci sans les nombres complexes !!

Correction 56
1. Comme $(A_0, \dots, A_4)$ est un pentagone régulier, on a $OA_0 = OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4 = 1$ et $(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_1}) = \frac{2\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_2}) = \frac{4\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_3}) = -\frac{4\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_4}) = -\frac{2\pi}{5}[2\pi],$. On en déduit : $\omega_0 = 1, \omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{5}}, \omega_2 = e^{\frac{4i\pi}{5}}, \omega_3 = e^{-\frac{4i\pi}{5}} = e^{\frac{6i\pi}{5}}, \omega_4 = e^{-\frac{2i\pi}{5}} = e^{\frac{8i\pi}{5}},$. On a bien $\omega_i = \omega_1^i$. Enfin, comme $\omega_1 \neq 0$, $1 + \omega_1 + \ldots + \omega_1^4 = \frac{1-\omega_1^5}{1-\omega_1} = \frac{1-1}{1-\omega_1} = 0$.

2. $\mathrm{Re}(1+\omega_1+\ldots+\omega_1^4)=1+2\cos(\frac{2\pi}{5})+2\cos(\frac{4\pi}{5})$. Comme $\cos(\frac{4\pi}{5})=2\cos^2(\frac{2\pi}{5})-1$ on en déduit : $4\cos^2(\frac{2\pi}{5})+2\cos(\frac{2\pi}{5})-1=0$. $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est donc bien une solution de l'équation $4z^2+2z-1=0$. Etudions cette équation : $\Delta=20=2^2.5$. Les solutions sont donc $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Comme $\cos(\frac{2\pi}{5})>0$, on en déduit que $\cos(\frac{2\pi}{5})=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
3. $BA_2^2=|\omega_2+1|^2=|\cos(\frac{4\pi}{5})+i\sin(\frac{4\pi}{5})+1|^2=1+2\cos(\frac{4\pi}{5})+\cos^2(\frac{4\pi}{5})+\sin^2(\frac{4\pi}{5})=4\cos^2(\frac{2\pi}{5})$. Donc $BA_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
4. $BI=|i/2+1|=\frac{\sqrt{5}}{2}$. $BJ=BI-1/2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
5. Pour tracer un pentagone régulier, on commence par tracer un cercle C_1 et deux diamètres orthogonaux, qui jouent le rôle du cercle passant par les sommets et des axes de coordonnées. On trace ensuite le milieu d'un des rayons : on obtient le point I de la question 4. On trace le cercle de centre I passant par le centre de C_1 : c'est le cercle $\mathcal{C}$. On trace le segment BI pour obtenir son point J d'intersection avec $\mathcal{C}$. On trace enfin le cercle de centre B passant par J : il coupe C_1 en A_2 et A_3, deux sommets du pentagone. Il suffit pour obtenir tous les sommets de reporter la distance A_2A_3 sur C_1, une fois depuis A_2, une fois depuis A_3. (en fait le cercle de centre B et passant par J', le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à J, coupe C_1 en A_1 et A_4, mais nous ne l'avons pas justifié par le calcul : c'est un exercice !)

Correction 57 Nous avons par la formule de Moivre

$$\cos 5\theta+i\sin 5\theta=e^{i5\theta}=(e^{i\theta})^5=(\cos\theta+i\sin\theta)^5.$$

On développe ce dernier produit, puis on identifie parties réelles et parties imaginaires. On obtient :

$$\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos^5\theta-10\cos^3\theta\sin^2\theta+5\cos\theta\sin^4\theta\\ \sin 5\theta &= 5\cos^4\theta\sin\theta-10\cos^2\theta\sin^3\theta+\sin^5\theta\end{aligned}$$

Remarque : Grâce à la formule $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, on pourrait continuer les calculs et exprimer $\cos 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$, et $\sin 5\theta$ en fonction de $\sin\theta$.

Correction 58
1. $\cos^2(x)-\sin^2(x)=\sin(3x)$ ssi $x=\pi/2+2k\pi$ ou $x=-\pi/10+2k\pi/5$, avec $k\in\mathbb{Z}$.
2. $\cos^4(x)-\sin^4(x)=1$ ssi $x=k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$.

Correction 59
1. Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}[i]$. Notons $\alpha=a+ib$ et $\beta=c+id$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$. Alors $\alpha+\beta=(a+c)+i(b+d)$ et $a+c\in\mathbb{Z}$, $b+d\in\mathbb{Z}$ donc $\alpha+\beta\in\mathbb{Z}[i]$. De même, $\alpha\beta=(ac-bd)+i(ad+bc)$ et $ac-bd\in\mathbb{Z}$, $ad+bc\in\mathbb{Z}$ donc $\alpha\beta\in\mathbb{Z}[i]$.
2. Soit $\alpha\in\mathbb{Z}[i]$ inversible. Il existe donc $\beta\in\mathbb{Z}[i]$ tel que $\alpha\beta=1$. Ainsi, $\alpha\neq 0$ et $\frac{1}{\alpha}\in\mathbb{Z}[i]$. Remarquons que tout élément non nul de $\mathbb{Z}[i]$ est de module supérieur ou égal à 1 : en effet $\forall z\in\mathbb{C}, |z|\geqslant\sup(|\mathrm{Re}(z)|,|\mathrm{Im}(z)|)$ et si $z\in\mathbb{Z}[i]\setminus\{0\}$, $\sup(|\mathrm{Re}(z)|,|\mathrm{Im}(z)|)\geqslant 1$. Si $|\alpha|\neq 1$ alors $|\alpha|>1$ et $|1/\alpha|<1$. On en déduit $1/\alpha=0$ ce qui est impossible. Ainsi $|\alpha|=1$, ce qui implique $\alpha\in\{1,-1,i,-i\}$.
   Réciproquement, $1^{-1}=1\in\mathbb{Z}[i], (-1)^{-1}=-1\in\mathbb{Z}[i], i^{-1}=-i\in\mathbb{Z}[i], (-i)^{-1}=i\in\mathbb{Z}[i]$. Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont donc $1,-1,i$ et $-i$.
3. Soit $\omega\in\mathbb{C}$. Notons $\omega=x+iy$ avec $x,y\in\mathbb{R}$. soit $E(x)$ la partie entière de x, i.e. le plus grand entier inférieur ou égal à x : $E(x)\leqslant x<E(x)+1$. Si $x\leqslant E(x)+1/2$, notons $n_x=E(x)$, et si $x>E(x)+1/2$, notons $n_x=E(x)+1$. n_x est le, ou l'un des s'il y en a deux, nombre entier le plus proche de x : $|x-n_x|\leqslant 1/2$. Notons n_y l'entier associé de la même manière à y. Soit alors $z=n_x+in_y$. $z\in\mathbb{Z}[i]$ et $|\omega-z|^2=(x-n_x)^2+(y-n_y)^2\leqslant 1/4+1/4=1/2$. Donc $|\omega-z|<1$.

4. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$, avec $\beta \neq 0$. Soit alors $q \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|\frac{\alpha}{\beta} - q| < 1$. Soit $r = \alpha - \beta q$. Comme $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ et $\beta q \in \mathbb{Z}[i]$, $r \in \mathbb{Z}[i]$. De plus $|\frac{r}{\beta}| = |\frac{\alpha}{\beta} - q| < 1$ donc $|r| < |\beta|$.

Correction 60

1. À permutation près, $x = -2$, $y = -2j$ et $z = -2j^2$ (j désigne la racine cubique de l'unité $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$).
2. À permutation près, $x = 1$, $y = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ et $z = \frac{3-i\sqrt{3}}{2}$.