Injection, surjection, bijection

Exercice 1 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1 + x^2)$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ $g(x) = f(x)$ est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.

Exercice 3 On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective,}$$

$$g \circ f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ surjective.}$$

Montrer que :

$$\big(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives }\big) \Leftrightarrow \big(f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}\big).$$

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $t \mapsto e^{it}$. Montrer que f est une bijection sur des ensembles à préciser.

Exercice 5 Soit $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle bijective ?

Injection, surjection, bijection

Indication 1 Prouver que l'égalité est fausse.

Indication 2

1. f n'est ni injective, ni surjective.
2. Pour $y \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $f(x) = y$.
3. On pourra exhiber l'inverse.

Indication 3 Pour la première assertion le début du raisonnement est : "supposons que $g \circ f$ est injective, soit $a, a' \in A$ tel que $f(a) = f(a')$",... à vous de travailler, cela se termine par "...donc $a = a'$, donc f est injective."

Indication 4 Montrer que la restriction de $f : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{U}$, $t \mapsto e^{it}$ est une bijection. Ici $\mathbb{U}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes de module égale à 1.

Indication 5 Montrer que f est injective et surjective.

Injection, surjection, bijection

Correction 1 Si $f \circ g = g \circ f$ alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f \circ g(x) = g \circ f(x).$$

Nous allons montrer que c'est faux, en exhibant un contre-exemple. Prenons $x = 0$. Alors $f \circ g(0) = f(-1) = -2$, et $g \circ f(0) = g(1) = 0$ donc $f \circ g(0) \neq g \circ f(0)$. Ainsi $f \circ g \neq g \circ f$

Correction 2

1. f n'est pas injective car $f(2) = \frac{4}{5} = f(\frac{1}{2})$. f n'est pas surjective car $y = 2$ n'a pas d'antécédent : en effet l'équation $f(x) = 2$ devient $2x = 2(1+x^2)$ soit $x^2-x+1 = 0$ qui n'a pas de solutions réelles.
2. $f(x) = y$ est équivalent à l'équation $yx^2 - 2x + y = 0$. Cette équation a des solutions x si et seulement si $\Delta = 4 - 4y^2 \geqslant 0$ donc il y a des solutions si et seulement si $y \in [-1, 1]$. Nous venons de montrer que $f(\mathbb{R})$ est exactement $[-1, 1]$.
3. Soit $y \in [-1, 1]$ alors les solutions x possibles de l'équation $g(x) = y$ sont $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ ou $x = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$. La seule solution $x \in [-1, 1]$ est $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ en effet $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \in [-1, 1]$. Donc pour $g : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$ nous avons trouvé un inverse $h : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$ défini par $h(y) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$. Donc g est une bijection.
4. $f'(x) = \frac{2-2x^2}{1+x^2}$, donc f' est strictement positive sur $]-1, 1[$ donc f est strictement croissante sur $[-1, 1]$ avec $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$. Donc la restriction de f, $g : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$, est une bijection.

Correction 3

1. Supposons $g \circ f$ injective, et montrons que f est injective : soit $a,\ a' \in A$ avec $f(a) = f(a')$ donc $g \circ f(a) = g \circ f(a')$ or $g \circ f$ est injective donc $a = a'$. Conclusion on a montré :
$$\forall a, a' \in A \quad f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$
c'est la définition de f injective.
2. Supposons $g \circ f$ surjective, et montrons que g est surjective : soit $c \in C$ comme $g \circ f$ est surjective il existe $a \in A$ tel que $g \circ f(a) = c$; posons $b = f(a)$, alors $g(b) = c$, ce raisonnement est valide quelque soit $c \in C$ donc g est surjective.
3. Un sens est simple ($\Leftarrow$) si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ l'est également. De même avec $h \circ g$.
Pour l'implication directe ($\Rightarrow$) : si $g \circ f$ est bijective alors en particulier elle est surjective et donc d'après le deuxième point g est surjective.
Si $h \circ g$ est bijective, elle est en particulier injective, donc g est injective (c'est le 1.). Par conséquent g est à la fois injective et surjective donc bijective.
Pour finir $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est bijective comme composée d'applications bijectives, de même pour h.

Correction 4 Montrons que la restriction de f, $\phi : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{U}$, $t \mapsto e^{it}$ est bijective. Où $\mathbb{U}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$ donné par l'équation ($|z| = 1$).

- ϕ est surjective car tout nombre complexe de $\mathbb{U}$ s'écrit sous la forme polaire $e^{i\theta}$, et l'on peut choisir $\theta \in [0, 2\pi[$.
- ϕ est injective :

$$\begin{aligned}\phi(t) = \phi(t') &\Leftrightarrow e^{it} = e^{it'} \\ &\Leftrightarrow t = t' + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow t = t' \text{ car } t, t' \in [0, 2\pi[\text{ et donc } k = 0.\end{aligned}$$

En conclusion ϕ est injective et surjective donc bijective.

Correction 5 • f est injective :

$$\begin{aligned}f(x) = f(y) &\Rightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1 \\ &\Rightarrow x = \pm y \text{ où } x, y \in [1, +\infty[\text{ donc } x, y \text{ sont de même signe} \\ &\Rightarrow x = y.\end{aligned}$$

- f est surjective : soit $y \in [0, +\infty[$. Nous cherchons un élément $x \in [1, +\infty[$ tel que $y = f(x) = x^2 - 1$. Le réel $x = \sqrt{y+1}$ convient !