Concours Communs Polytechniques – option MP

Planche 1

I) Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \sim v_n$; montrer qu'à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.

Donner le signe, au voisinage de l'infini, de $u_n = \sin \dfrac{1}{n} - \operatorname{th} \dfrac{1}{n}$ ·

Planche 2

I) Montrer que si $|\, a_n \,| \sim |\, b_n \,|$, $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Donner le rayon de convergence de $\sum \dfrac{i^n n^2 z^n}{(n^2+1)2^n}$ ·

II) Existe-t-il une valeur de α pour laquelle $\begin{pmatrix} -5+\alpha & 3-\alpha & \alpha \\ -2+\alpha & -\alpha & \alpha \\ -5 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable ?

Planche 3

I) Montrer que si la suite de terme général f_n converge uniformément vers f, continue sur $[a,b]$, alors la suite de terme général $\displaystyle\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Expliquer pourquoi $\displaystyle\int_0^5 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n!}$ ·

II) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\begin{pmatrix} a & z & 0 & \dots & 0 \\ \bar{z} & a & z & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & z \\ 0 & \dots & 0 & \bar{z} & a \end{pmatrix}$ (on pourra introduire le changement de variable $a - \lambda = 2|\, z \,| \cos\theta$ où $\theta \in [\lambda - 2|\, z \,|, \lambda + 2|\, z \,|]$)

Planche 4

I) Soit $a \in \mathbb{R}$; montrer que l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\phi(P)(X) = (X-a)\big(P(X) - P'(a)\big) - 2\big(P'(X) - P'(a)\big)$ est linéaire.
À l'aide de la formule de Taylor, déterminer l'image et le noyau de ϕ. Trouver ses éléments propres. Est-elle diagonalisable ?
II) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + y = x^2 + \mathrm{e}^x$.

Planche 5

I) Soit h positive et continue sur $[a,b]$, montrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$ implique $h = 0$.
Montrer que pour f et g continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire.

II) Quel est le domaine de définition de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{x+n}$ pour $a \in \mathbb{R}$? Sauriez-vous démontrer le critère spécial des séries alternées ?
Déterminer la limite et un équivalent de S en $+\infty$.
Développer $S(x) - \dfrac{1}{x}$ en série entière.

Planche 6

I) Décomposer en éléments simples $F(x) = \dfrac{1}{(x+3)(1-x)}\cdot$

Montrer que F est développable en série entière en 0 et donner le rayon de convergence de cette série. Donner un DL à l'ordre 3 de F au voisinage de 0.

II) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E tel qu'il existe deux réels non nuls distincts a et b vérifiant $(u-aId)(u-bId) = 0$.

Soit $p = \dfrac{1}{b-a}(u-aId)$ et $q = \dfrac{1}{a-b}(u-bId)$.

Calculer $p+q$, $p\circ p$, $q\circ q$, $p\circ q$ et $q\circ p$. Montrer que $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker} q$.

Trouver les éléments propres de u ; est-il diagonalisable ?

Planche 7

I) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$; montrer que λ est valeur propre de u si et seulement si $\det(u-\lambda Id) = 0$. En déduire que u admet au plus n racines distinctes.

II) Soit $\alpha \in \mathbb{C}\backslash i\pi\mathbb{Z}$ et f continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique telle que $y' + \alpha y = f$.

Montrer que y est de la forme $y(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}\left(y(0) + \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{d}t\right)$.

Montrer que y est 2π-périodique si et seulemnt si $y(0) = y(2\pi)$ (on pourra utiliser que $z(x) = y(x+2\pi)$ est solution de l'équation différentielle). En déduire qu'il existe une unique fonction ϕ, 2π-périodique, solution de l'équation différentielle.

Montrer que ϕ admet un développement en série de Fourier et l'exprimer en fonction des coefficients complexes de Fourier.

Planche 8

I) Résoudre l'équation différentielle $y' - \dfrac{x}{x^2-1}\,y = 2x$.

II) Soit B l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et bornées. À tout f de B on associe $\phi(f)$ définie par $\phi(f)(x) = \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} f(t)\mathrm{d}t$. Montrer que $\phi(f)$ est bien définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$. ϕ est-elle linéaire ? Calculer $|||\phi|||$.

Planche 9

I) Soit u un endomorphisme de matrice A dans une base orthonormale d'un espace euclidien E ; montrer que u est orthogonal si et seulement si ${}^tAA = I_n$.

II) Étudier la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Planche 10

I) Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie, tels que $g\circ f - f\circ g = \alpha f$, avec $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Montrer que, si λ est une valeur propre de g, de vecteur propre associé v, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $g\circ f^k(v) = (\alpha + \lambda k) f^k(v)$. En déduire que f n'est pas injective. Montrer que si g est diagonalisable, f est nilpotent.

II) Soit une suite de fonctions (f_n) continues sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que si (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right)$ tend vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. En déduire que $\displaystyle\int_0^5 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n!}\cdot$

Planche 11

I) Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur X, f de X dans $\mathbb{C}$ telle qu'il existe une suite de réels (α_n) tendant vers 0 et vérifiant : $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\,f_n(x) - f(x)\,| \leqslant \alpha_n$.

Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur X.

Pour $f_n(z) = \dfrac{Z^n}{z^n}$ a-t-on convergence uniforme sur le disque ouvert de centre 0 et rayon 2 ? Sur le disque ouvert de centre 0 et rayon z ?

II) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n non nulle. Montrer que $E = \mathrm{Vect}\big(f^i(x_0)\big)_{i\in\mathbb{N}} = \mathrm{Vect}\big(f^i(x_0)\big)_{i\in[0,n-1]}$.

On suppose $(Id, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ libre. Montrer que l'ensemble des endomorphismes g qui commutent avec f est un espace vectoriel de base $(Id, f, f^2, \dots, f^{n-1})$.

Planche 12

I) Soient F et G deux sous-espaces d'un espace euclidien E ; montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et que $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

II) On note F l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas et vérifiant $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y)$. Montrer que toute fonction f de F est solution d'une équation différentielle du type $y'' + ky = 0$. Déterminer F.

Planche 13

I) Résoudre l'équation différentielle $2x(1-x)y' + (2x-1)y = 1$.

II) Tracer la courbe $\begin{cases} x = \dfrac{u-1}{u} \\ y = \dfrac{u^2}{u+1} \end{cases}$ et préciser la tangente au point de paramètre $u = 1$.

Planche 14

I) Soient F et G deux sous-espaces d'un espace euclidien E ; montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et que $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

II) Soit $f(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-tx^2}}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^2$; montrer que $x \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $F(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f(x,t)\mathrm{d}x$ est continue. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. En déduire l'expression de F' en fonction de $\theta(t) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$.

Planche 15

I) Montrer que la seule valeur propre possible pour une matrice A telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $A^p = 0$ est 0. Existe-t-il des matrices symétriques réelles nilpotentes d'ordre p ?

II) Soit $u_n = \dfrac{1}{3^n n!}\displaystyle\prod_{k=1}^n (3k-2)$ et $v_n = \dfrac{1}{n^{3/4}}\cdot$

Montrer que pour n assez grand, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}\cdot$

En déduire que $\sum u_n$ diverge (on pourra utiliser $\dfrac{u_n}{v_n}$)$\cdot$

Planche 16

I) Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall\, k,\ a_{k,\,n-k+1} = a$, les autres termes étant égaux à 1, et soit J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer qu'il existe b et c tels que $A^2 = bI_n + cJ$.

Exprimer A^3 et A^4 en fonction de I_n et J. A est-elle diagonalisable ?

II) Soit (f_n) une suite de fonctions de E dans $\mathbb{C}$ et f une fonction de E dans $\mathbb{C}$.

On suppose qu'il existe une suite réelle α_n de limite nulle telle que $\forall\,(n,\,x) \in \mathbb{N}\times E,\ |\,f(x) - f_n(x)\,| \leqslant \alpha_n$.

Montrer que (f_n) converge uniformément vers f.

Maintenant, $E = \mathbb{C}$. La suite $\left(\dfrac{z^n}{2^n}\right)$ converge-t-elle uniformément sur le disque ouvert $D(0\,;\,1)$? Sur le disque ouvert $D(0\,;\,2)$?

Planche 17

I) Soit E un espace euclidien, B une base orthonormale de E, u un endomorphisme de E et A la matrice de u dans B. Montrer l'équivalence des 3 propriétés suivantes :
(1) u est orthogonal (2) $({}^tA)A = I_n$ (3) A inversible et $A^{-1} = {}^t A$.

II) Soit (a_n) et (b_n) deux suites numériques telles que $b_0 = a_0 = 0$, $a_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$, $b_1 = a_1$ et $b_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} b_k a_{n-k}$.
Majorer simplement les suites (a_n) et (b_n). Que peut-on en déduire sur les rayons de convergence R_a et R_b des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$?

On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$. Montrer que, pour tout complexe z tel que $|\,z\,| < 1$, $g(z) = \dfrac{f(z)}{1 - f(z)}$.

Montrer que $R_b = 1$.

Planche 18

I) Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Montrer que $\exists f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ unique, tel que :

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3 \\ f(2e_1 + 3e_4) = e_2 \\ \mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, x + 2y + z =, \ x + z - t = 0 \right\} \end{cases}$$

II) Montrer que la convergence normale sur X d'une série de fonctions entraine sa converge uniforme. Montrer que la série $\sum \dfrac{n^3}{n!} x^n$ converge uniformément sur tout segment.

Planche 19

I) Étudier la courbe d'équation polaire $\rho = 2\sqrt{\cos(2\theta)}$.

II) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = \dfrac{n}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \dfrac{x^2}{2n^2}\right)^{2n^4}$. Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors d'un segment $[a, b]$.
Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n(x) g(x) dx = g(0)$.

Planche 20

I) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \geqslant 1$.

II) Étudier la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = \dfrac{nx^2 \exp(-nx)}{1 - \exp(-x^2)}$
.

Planche 21

I) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$. M est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$? Dans $M_3(\mathbb{C})$?

II) Quel est le domaine de convergence D de la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2 - t^2}$?

Pour $t \in D$, on pose $S(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2 - t^2} \cdot$ S est-elle continue sur D ?

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, soit f_α la fonction 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout $x \in \,]-\pi, \pi[$, $f_\alpha(x) = \cos(\alpha x)$. Calculer la série de Fourier de f_α . Justifier l'égalité entre la fonction f_α et la somme de sa série de Fourier. Qu'en est-il de la convergence normale ?
Calculer $S(t)$.

Planche 22

I) Cours : soit E un espace euclidien, B une base orthonormale de E, u un endomorphisme de E et A la matrice de u dans B. Montrer l'équivalence des 3 propriétés suivantes :
(1) u orthogonal (2) ${}^tAA = I_n$ (iii) A inversible et $A^{-1} = {}^t A$

II) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^n \sin(\dfrac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. f admet-elle un développement limité en 0 ? si oui, à quel ordre maximal ?

Planche 23

I) La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{(x-1)(x+2)}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

II) Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible. Déterminer M^{-1} sous la forme $P(N)$ où P est un polynome de faible degré et N une matrice nilpotente.

Planche 24

I) Résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation différentielle $y' - \dfrac{x}{x^2-1}\, y = 2x$.

II) Soit E un espace euclidien, soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteur unitaires de E telle que $\forall x \in E$, $\| x \|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (e_k|x)^2$. Montrer que la famille e est orthogonale, puis que $E = vect(e)$.

Planche 25

I) On pose $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Étudier les extrema locaux de f par la méthode classique. Vérifier les résultats en représentant cette fonction.

II) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} > 0$ pour tout $(i,j) \in [1,n]^2$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$.

Montrer que 1 est valeur propre de A et que le spectre de A (1 exclu) est inclus dans le disque ouvert de centre O et de rayon 1.

Planche 26

I) Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que $|\, a_n \,| \sim |\, b_n \,|$ quand $n \to +\infty$.
Montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont le même rayon de convergence. (Indication : ne pas utiliser d'Alembert)
Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{i^n n^2}{(n^2+1)2^n}\, z^n$.

II) Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, on définit $A * B \in M_{n^2}(\mathbb{C})$ par $A * B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ & \dots & \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}$. Montrer que si $A, A', B, B' \in M_n(\mathbb{C})$, alors $(A * B)(A' * B') = (AA') * (BB')$.
En déduire que $A * B$ est inversible si et seulement si A et B sont inversibles.
Déterminer le spectre de $A * B$. En déduire le polynome caractéristique, la trace, le déterminant de $A * B$.

Planche 27

I) Résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation différentielle $y' - \dfrac{x}{x^2-1}\, y = 2x$.

II) Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Quel est le rang de $A \in M_n(\mathbb{C})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$? Avec la trace, que peut-on dire des valeurs propres ? A est-elle diagonalisable ?

Planche 28

Soit E un euclidien et F, G deux sous-espaces de E. Montrer que $F^{\perp} \cap G^{\perp} = (F + G)^{\perp}$
Montrer que $F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$

II) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|\,z\,| < 1$. Déterminer $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kz^k$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $S = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} E\left(\frac{n}{p}\right) z^n$. Déterminer le rayon de convergence puis la somme de la série entière S.

Planche 29

I) Soit A d'ordre n telle que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{ii} = a, \forall j \neq i, a_{ij} = b$. Soit N l'ensemble des telles matrices A. N est-il un espace vectoriel, quelle est sa dimension ? Coordonnées de A dans une base de N ? Existence et expression de A^{-1}

II) Intégrabilité sur $]1, +\infty[$ de $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x-1}}$.

Planche 30

I) La fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x-1}}$ est-elle intégrable sur $]1, +\infty[$?

II) Montrer qu'il existe un unique couple de polynômes f, g de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\deg f < n, \deg g < n$, et $(1 - X)^n f(X) + X^n g(X) = 1$.
Montrer que $f(1 - X) = g(X), g(1 - X) = f(X)$;
montrer que $\exists a \in \mathbb{R}, (1 - X)f'(X) - nf(X) = aX^{n-1}$.
Déterminer a et $f(X)$.

Planche 31

I) Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Montrer que $\Phi : f \mapsto \sqrt{f^2(0) + \displaystyle\int_0^1 f'^2(t)\mathrm{d}t}$ est une norme sur E.

II) Décomposition en éléments simples de $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)(3+x)}$.
Montrer que f est DSE en 0, calculer le rayon et le développement.
Développement limité de f à l'ordre 3 en 0.

Planche 32

I) E est un espace euclidien, A un sous-espace vectoriel. Montrer que $E = A \oplus A^{\perp}$; que $A^{\perp\perp} = A$.

II) Justifier que la fonction Arc sin se développe en série entière en 0, donner le rayon et le développement. Montrer qu'il y a convergence normale sur $[-1, 1]$.

Montrer que $\sin t + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}(2n+1)} (\sin t)^{2n+1}$ converge normalement vers $t \mapsto t$ sur $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$.

Planche 33

I) Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - \sqrt{u_n}}$.

II) E est un espace euclidien. Soit $u \in L(E)$ tel que $\forall x, y$, $(u(x)|u(y)) = (x|y)$. Montrer que u est inversible. Montrer que $O(E)$ est un groupe pour le loi $\circ$.

Planche 34

I) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle qu'il existe $p > 0$, avec $A^p = 0$. Montrer que la seule valeur propre possible pour A est 0.
Existe-t-il des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$?
II) On donne $f : x \mapsto |\sin x|$.
1. Calculer son développement en série de Fourier, et préciser les théorèmes de convergence applicables.
En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2 - 1}$.
2. Justifier l'intégration terme à terme de l'égalité :
$|\sin x| = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos(2px)}{4p^2 - 1}$, détailler la formule obtenue.

Planche 35

I) Montrer que si une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ convergent uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, alors la suite $(\displaystyle\int_a^b f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.

II) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $N(A) = \displaystyle\sup_{j\in[1,n]} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dérive-t-elle d'un produit scalaire ?

Planche 36

I) À l'aide du théorème d'intégration terme à terme, montrer que la fonction $x \to \dfrac{\ln(1 - x^2)}{x^2}$ est intégrable sur $]0, 1[$ et calculer son intégrale. On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

II) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On note A la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$.

Étudier la diagonalisabilité de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Planche 37

I) Résoudre, à l'aide de la méthode de variation des constantes, l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3 x$.
II) Soient E un espace euclidien et des vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p \in E$ tels que $\forall i, j \in [1, p]$, $i \neq j$, $(x_i|x_j) < 0$.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i x_i = 0$. On suppose qu'il existe $i \in [1, p-1]$ tel que $\alpha_i < 0$. On note alors $I = \{i \in [1, p-1], \alpha_i > 0\}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i\in I} \alpha_i x_i = 0$.

Montrer que la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$ est libre.

Planche 38

I) Rayon de convergence de $\sum n^\alpha x^n$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ et $\sum \cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right) x^n$.

II) Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose u symétrique. Lien entre $|||u|||$ et les valeurs propres de u ?
Pour la suite, u est quelconque. Lien entre $|||u|||$ et $|||u^\star \circ u|||$?
En déduire un lien entre $|||u|||$ et $|||u^\star|||$.

Planche 39

I) Soit une série entière $\sum a_n x^n$. On suppose que a_n est différent de 0 à partir d'un certain rang et que $\dfrac{|\, a_{k+1} \,|}{|\, a_k \,|}$ a une limite.

Montrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence et que la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ est dérivable sur l'intervalle ouvert de convergence si celui-ci n'est pas vide.

II) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

Montrer que P_n admet au plus une racine réelle en précisant suivant la parité de n.

Soit a_k la racine réelle de P_{2k+1}. Étudier la limite de la suite (a_k).

Planche 40

I) Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer que $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \Rightarrow \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$ et que $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f \Rightarrow \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$.

II) On appelle homéomorphisme une bijection continue dont la réciproque est aussi continue.

Soient E un espace vectoriel normé et $k > 0$. On définit f par $f(x) = \dfrac{kx}{\|\, x \,\| + 1}$ · Montrer que f est un homéomorphisme de E sur la boule ouverte de centre 0 et de rayon k.

Planche 41

I) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & c \end{pmatrix}$. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

II) Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence non nul. Montrer qu' il existe un réel $r > 0$ tel que $|\, a_n \,| < \dfrac{1}{r^n}$ à partir d'un certain rang.

Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$?

On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0} n a_k$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{S_n}{n!} z^n$?

Planche 42

I) Soient X un ensemble, $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction de X dans $\mathbb{C}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels convergeant vers 0 tels que $\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}, |\, f(x) - f_n(x) \,| \leqslant \alpha_n$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X.

Application : convergence uniforme de la suite $\left(\dfrac{z^n}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sur le disque ouvert complexe de centre 0 et de rayon 2, puis de rayon 3.

II) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de M en fonction de celui de A. En déduire que M est triangulable si et seulement si A est triangulable. Montrer que M est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. En déduire que M est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

Planche 43

I) Résoudre, à l'aide de la méthode de variation des constantes, l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3 x$.

II) Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n et f et g dans $\mathcal{L}(E)$. On suppose que $f + g$ est un automorphisme et que $f \circ g = 0$. Montrer que $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = n$. Conserve-t-on la conclusion si on enlève l'une des deux hypothèses ?

Planche 44

I) Étudier la convergence de la série géométrique $(\sum z^n)_n$, $z \in \mathbb{C}$. Étudier la convergence simple dans $\mathbb{R}$ de la série $(\sum e^{-nx^3})$; dans la cas de la convergence, calculer la somme.

II) Soit$E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A \in E$, e base canonique de E et $A = Mat_e(u)$; on note $\| u \| = \| A \| = \underset{x \in E \setminus \{0\}}{sup} \dfrac{\| u(x) \|}{\| x \|}$ et $u_n = \sum_0^n \dfrac{1}{k!} A^k$.

Montrer que (u_n) converge.

Donner la valeur limite de (u_n) pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Planche 45

I) Étude de la série $(\sum z^n)$ et somme. Étude de la convergence de la série $(\sum e^{-x^{2n}})$ sur $\mathbb{R}$ et somme.

II) Déterminer le rayon de courbure et le centre de courbure de la courbe $\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases}$

Planche 46

I) Soient $(A, B) \in M_n(\mathbb{C})^2$, $B = A^p$.

Montrer que A diagonalisable $\Leftrightarrow$ B diagonalisable.

II) f est 2π-périodique, définie par $f(t) = t$, $t \in]-\pi, \pi[$, $f(-\pi) = 0$. Déterminer le développement en série de Fourier de f.

Planche 47

I) Montrer que la normale convergence d'une série de fonctions implique l'uniforme convergence.

$(\sum \dfrac{n^3}{n!} x^n)$ est-elle uniformément convergente sur tout compact D inclus dans $\mathbb{R}$?

II) Calculer le déterminant, le rang, le polynôme caractéristique, le polynôme minimal, les valeurs propres de $M_a = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall i, a_{i,i} = a$, $\forall (i, j), i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 1$.

Planche 48

I) Étudier la courbe en polaires : $\rho = 2\sqrt{\cos(2\theta)}$

II) Montrer que $f(x) = \operatorname{Arc}\tan(1 + x)$ est développable en série entière au voisinage de 0 et donner son rayon de convergence. Calculer cette série entière.

Planche 49

I) Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(x) = 1 - \displaystyle\int_0^x (t + x) f(x - t) \mathrm{d}t$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0, déterminer f.

II) Soit E un K-espace vectoriel de dimension n ; montrer que

$$E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$$

et que

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2.$$

Planche 50

I) Soient (u_n), (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \sim v_n$. Montrer qu'à partir d'un certain rang u_n et v_n sont de même signe. En déduire le signe de $u_n = \operatorname{sh} \dfrac{1}{n} - \tan \dfrac{1}{n}$ pour $n \to +\infty$.

II) Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$\left| \begin{array}{rcl} q : E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A, B) & \longmapsto & \operatorname{tr}(AB) \end{array} \right.$ est une forme bilinéaire symétrique.

Montrer que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$, somme directe orthogonale au sens de q. Donner la signature de q.

Planche 51

I) E est un espace euclidien, A un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $E = A \oplus A^\perp$; que $A^{\perp\perp} = A$.

II) Soit f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = \dfrac{1}{1 - 2xz + z^2}$. f est-elle est-elle développable en série entière ? Quelle est son rayon de convergence R ? Calculer en distinguant $|\,x\,| < 1, |\,x\,| \geq 1$.

On pose $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) z^n$. Montrer que P_n est un polynôme de degré au plus n dont les racines toutes réelles sont dans $]-1, 1[$; pour faciliter les calculs, poser $x = \cos\alpha$.

Planche 52

I) Calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ (écrire A^n en fonction de n).

II) On considère $\sum f_n$, avec pour $n \geq 1, f_n(x) = \dfrac{1}{n} \cos^n x \sin(nx)$. Montrer la convergence simple sur $\mathbb{R}$. Montrer le caractère $\mathcal{C}^1$ de la somme S sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Calculer $S'(x)$. En déduire l'expression de $S(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Planche 53

I) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x, y,\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$. Montrer que u est inversible. Montrer que $O(E)$ est un groupe pour le loi $\circ$.

II) Soit $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$. Déterminer sa série de Fourier. Calculer $S_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ $S_2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ $S_3 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ $S_4 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$.

Planche 54

I) Soit f un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie. Montrer que : $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f \Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ et que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$

II) Soit $a < b$, $E = \{f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) | f(a) = 0\}$

Montrer que pour tout $f \in E$, $\displaystyle\int_a^b |\, f(t)\,|^2 \mathrm{d}t \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |\, f'(t)\,|^2 \mathrm{d}t$

indication : On remarquera que $f(x) = f(x) - f(a) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ et on utilisera une inégalité célèbre.

III) Soit G un groupe de cardinal fini et pair et $E = \{x \in G | x = x^{-1}\}$. Quelle est la parité du cardinal de E ?

Planche 55

I) Montrer que deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ qui vérifient $(|\,a_n\,|)_n \sim (|\,b_n\,|)_n$, ont même rayon de convergence (indication : ne pas utiliser le critère de Riemann).

Rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{j^n n^3}{n^3 + 1} z^n$ où $j^3 = 1$.

Cours : rayon de convergence d'un série géométrique.

II) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et f l'application qui à $v \in \mathcal{L}(E)$ associe $f(v) = u \circ v$.

1. Montrer que toute valeur propre de v est valeur propre de f.
Soit E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ de u, et Δ_λ celui de f pour λ. Montrer que $\dim \Delta_\lambda = n \dim E_\lambda$. Montrer que si u est diagonalisable, alors f l'est aussi.

2. Montrer que u et f ont même polynôme minimal.

Planche 56

I) Discuter selon les valeurs de a et b les solutions du système
$$\begin{cases} ax + 2by + 2z = 1 \\ 2x + aby + 2z = b \\ 2x + 2by + az = 1 \end{cases}$$

II) On considère deux suites u_n et v_n équivalentes au voisinage de $+\infty$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, ces deux suites sont de même signe.

Application : signe de $\operatorname{sh}\dfrac{1}{n} - \tan\dfrac{1}{n}$. lorsque $n \to +\infty$.

Planche 57

I) Cours : Soit E un espace vectoriel euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp$ et que $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

II) 1. Déterminer les solutions f, développables en série entière, de l'équation différentielle $4xy'' + 2y' + y = 0$ telles que $f(0) = 1$.
Déterminer le rayon de convergence de cette série. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles en distinguant les cas $x > 0$ et $x < 0$.
Déterminer la forme générale des solutions en effectuant le changement de fonction $y = fz$ où f est la fonction précédente et z la nouvelle fonction inconnue.

Planche 58

I) Décomposer $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)(3+x)}$ en éléments simples.
Montrer que f est développable en série entière à l'origine, donner sa série entière et son rayon de convergence.
Donner son développement limité à l'ordre 3.

II) Soit f et g deux endomorphismes d'un espace E euclidien, le premier symétrique, l'autre antisymétrique et commutant.
Montrer que $\forall x \in E$, $f(x)$ est orthogonal à $g(x)$.
Montrer que $f-g$ est un automorphisme et que $h = (f+g)\circ(f-g)^{-1}$ est un automorphisme orthogonal.

