

Concours Commun Centrale-Supélec – option MP

Planche 1

On note \tilde{A} la transposée de la comatrice d'une matrice A .
Calculer le déterminant et le rang de \tilde{A} ; montrer que si X est vecteur propre de A , il l'est aussi de \tilde{A} .
Montrer que si A et B sont équivalentes, \tilde{A} et \tilde{B} le sont aussi. Que dire de $\text{tr}(\tilde{A})$ et $\text{tr}(\tilde{B})$? Calculer $\tilde{\tilde{A}}$.

Planche 2

- I) Donner le domaine de définition de $f(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-a^2 n^2}$. Calculer la limite en 0 de $a f(a)$ et la limite en $+\infty$ de $f(a)$.
- II) Nature de la série de terme général $u_n = \cos\left(n^2 \pi \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$.
Pour quelles valeurs de x $\sum u_n x^n$ converge-t-elle?

Planche 3

- I) Soit P un polynôme à coefficients complexes, de degré $n > 1$ et de racines distinctes (x_1, \dots, x_n) . Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)}$.
- II) Déterminer l'ensemble T des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $\forall x \in \mathbb{Z}, P(x) \in \mathbb{Z}$.

Planche 4

- I) Soit $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, où les a_n sont des complexes, supposée de rayon de convergence strictement positif.
Donner les rayons de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^n$ et de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}$.

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{n^2}$ est de rayon 1 si le rayon de f est fini. Qu'en est-il si f est de rayon infini?

- II) Rayon et somme de $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{z^n}{k}$.

Planche 5

Soit la suite de fonctions f_n définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \left(\frac{x + x^n}{2}\right)^n$.
Montrer que cette suite converge simplement vers une fonction f .
La convergence est-elle uniforme? Monotone?
Montrer que $J_n = \int_0^1 f_n(x) dx \sim \frac{2}{n}$ en $+\infty$.

Planche 6

- I) $A = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles diagonalisables?
- II) Donner les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, et ceux de l'endomorphisme ϕ défini sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $\phi(X) = AX$. Donner la matrice de ϕ dans une base bien choisie.
- III) Soit f un endomorphisme d'un espace E de dimension finie, et ϕ défini par $\phi(u) = f \circ u$. Montrer que les valeurs propres de ϕ sont exactement celles de f , puis que ϕ est diagonalisable si et seulement si f l'est.
- IV) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E , montrer que la suite de terme général $u_k = \dim \text{Ker } f^k$ est croissante et concave.

Planche 7

Montrer que S est une matrice symétrique et positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elle s'écrit tAA où A est symétrique.

Soit S , symétrique, positive, dont aucun coefficient n'est nul et T la matrice dont les coefficients sont les inverses de ceux de S . Montrer que S est symétrique positive si et seulement si elle est de rang 1.

Planche 8

Résoudre $y'' + y = \cos(nt)$.

Montrer que les solutions de $y'' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)$ où $\sum a_n$ est absolument convergente, sont de classe \mathcal{C}^2 . Expliciter ces solutions. On suppose seulement que les a_n sont non nuls et que la suite (a_n) décroît vers 0. Montrer que $\sum a_n \cos(nt)$ est définie et continue sur $]0, \pi[$ (on pourra écrire $\cos(nx) = S_n - S_{n-1}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$).

Discuter l'équation pour $a_n = \frac{1}{\ln n}$.

Planche 9

I) Soit V un sous-espace d'un espace euclidien E , f un endomorphisme de E tel que $\forall x \in V, \|f(x)\| = \|x\|$. Montrer qu'il existe un automorphisme orthogonal g de E dont f est la restriction à V .

II) Soit $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ deux familles de vecteurs d'un espace euclidien E . À quelle condition exist-t-il un automorphisme orthogonal g de E tel que $\forall i \in I, g(x_i) = y_i$.

Planche 10

Soit f , définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$; est-elle différentiable en $(0, 0)$? De classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 ?

Montrer l'existence et calculer la valeur de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$.

Planche 11

1. Montrer que $P(X) = X^3 - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.

2. Montrer que $H = \{a + b2^{1/3} + c4^{1/3}, (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3\}$ est un corps, une \mathbb{Q} -algèbre dont on donnera une base (on procèdera d'abord en utilisant les propriétés, soigneusement justifiées de l'anneau $K[a]$, puis par une méthode élémentaire).

Planche 12

Montrer que l'ensemble E des suites complexes de terme général u_n vérifiant $\sum |u_n|^2$ converge, est un \mathbb{C} -espace vectoriel.

Montrer que $f : (u_n) \mapsto \sum |u_n|^2$ vérifie l'inégalité triangulaire.

Montrer, après en avoir rappelé la définition, que E est complet pour la norme f .

Planche 13

Soit un entier $n \geq 3$; montrer que l'ensemble U_n des éléments inversibles de $A_n = \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ est un groupe multiplicatif dont on calculera la cardinal. Pour $x \in U_n$, calculer $x^{2^{n-2}}$.

Déterminer le minimum de $\{k \in \mathbb{N}^*, 3^k \equiv 1[2^n]\}$ et en déduire que U_n est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}$.

Planche 14

Soit f une fonction définie, continue et strictement positive sur un intervalle I non vide de \mathbb{R} .

Montrer que si f et $\frac{1}{f}$ sont intégrables sur I , alors I est borné.

Étudier la réciproque.

Pour $I = [a, b]$, on note E l'ensemble des fonctions définies continues et strictement positives sur I ; soit ϕ l'application définie sur E par $\phi(f) = \int_I f(x)dx \int_I \frac{dx}{f(x)}$.

Montrer que ϕ admet un minimum m sur E et déterminer toutes les fonctions f telles que $\phi(f) = m$.

Montrer que ϕ n'est pas majorée sur E . Déterminer $\phi(E)$.

Montrer que tout $\mu > (b - a)^2$ admet une infinité d'antécédents pour ϕ , non proportionnels deux à deux.

Planche 15

Soit S et T deux matrices réelles respectivement symétrique positive et antisymétrique. Montrer que toute valeur propre de T est imaginaire pure. Montrer que $\det S \leq \det(S + T)$.

Planche 16

I) Sur \mathbb{R}^n euclidien on définit $N(V) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ où $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

et $f(t) = \sum_{k=1}^n x_k \cos(kt)$. Montrer que N est une norme.

En dimension 2, représenter la boule unité fermée liée à N :
 $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \sup_{t \in \mathbb{R}} |x \cos t + y \cos 2t| \leq 1\}$.

N est-elle une norme sur l'ensemble des suites (x_n) telle que $\sum x_n$ soit absolument convergente?

II) Cours : égalité des accroissements finis ; étude de $\exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$; idée de démonstration du théorème de Césaro.

Planche 17

I) Montrer que toute algèbre de dimension finie et intègre, sur un corps K commutatif, est un corps.

II) Cours : définition d'une algèbre.

Planche 18

Montrer que $F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(\sin t)^x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]1, +\infty[$.

Montrer que $F(n+2) = \frac{n+1}{n+2} F(n)$ et calculer $(n+1)F(n+1)F(n)$.

Donner un équivalent de $F(n)$ en $+\infty$.

Donner un développement asymptotique de trois termes de F quand x tend vers -1 .

Planche 19

I) Résoudre $\begin{cases} {}^tXYX = I_n \\ {}^tYXY = I_n \end{cases}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puis dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

II) Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$ où $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , contient au moins une matrice inversible.

Planche 20

Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{ixt} dt$ est définie, de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et exprimer f' à l'aide d'une intégrale.

Montrer que f est solution d'une équation différentielle que l'on précisera et calculer f . Existe-t-il des solutions de cette équation développables en série entière? Quel est alors le rayon de convergence? À quelle(s) condition(s) sur les coefficients cette solution est-elle égale à f ? Quelle est la limite de f en $+\infty$?

Planche 21

I) Soit $a \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a^2 \\ \vdots & & & \ddots & a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$; calculer A^p , $p \in \mathbb{Z}$.

II) Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$; donner une CNS

sur a et b pour que A soit inversible et calculer A^{-1} dans ce cas.

Planche 22

Montrer que H , définie pour $x \neq 0$, par $H(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ peut-être définie par continuité en 0 et que la fonction ainsi définie est développable en série entière, dont on notera a_n les coefficients.

Donner le domaine de définition de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n! x^{n+1}$ et montrer

que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$, $f(x) = x \int_0^{+\infty} e^{-t} H(xt) dt$.

En déduire que pour $0 < x < 1$, $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u/x} H(u) du$.

Montrer que $\phi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-ux} H(u) du$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* , calculer ϕ'' et en déduire f .

Planche 23

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et \tilde{A} sa matrice adjointe. Déterminer le rang de \tilde{A} . Si A et B sont semblables, montrer que \tilde{A} et \tilde{B} le sont aussi.

On désigne par $(e_{i,j})$ la base canonique de $GL_n(\mathbb{C})$. Si A est de rang 1, montrer qu'elle est semblable à $e_{1,n}$ ou à une matrice de la forme $\lambda e_{1,1}$. En déduire l'ensemble des matrices \tilde{A} , où A décrit $GL_n(\mathbb{C})$.

Planche 24

Discuter selon $x \in \mathbb{R}$ la convergence de la série de terme général $\exp\left(\ln a \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}\right) x^n$, où $a > 0$ et $\alpha \leq 1$ sont donnés. Discuter ensuite la convergence uniforme sur $[A, B]$, où $B > A \geq 0$ sont donnés.

Planche 25

Soit (E_n) l'équation $M^2 - \text{tr}(M)M + \det(M)I_2 = 0$ à l'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Résoudre (E_2) , (E_3) puis (E_n) pour $n \geq 4$.

Planche 26

On note E l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , bornées sur \mathbb{R} . Montrer que E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $f \mapsto \sup\{|t^p e^{-|t|} f(t)|, t \in \mathbb{R}\}$ est une norme sur E .

Soit $c \in \mathbb{R}$. L'application $\varphi_c : f \mapsto f(c)$ est-elle continue de (E, N_p) dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$?

Montrer que, si $p \neq q$, les normes N_p et N_q ne sont pas équivalentes sur E .

NB : l'utilisation de Maple est autorisée pour cet exercice (pour avoir l'allure des courbes).

Planche 27

Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, de racines x_1, x_2, x_3 , vérifiant $x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1$ sont non nuls.

$$\text{Calculer } S = \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3}{x_1 + x_2}.$$

Planche 28

I) On pose $u_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p}$.

Montrer que $2u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right)$.

Nature de la série $\sum u_n$? Equivalent de u_n ?

Domaine de définition de la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$?

II) Avec Maple : étude et représentation graphique de la fonction :
 $x \mapsto \arccos(x) + \frac{1}{2} \arccos(\cos(2x)) + \frac{1}{6} \arccos(\cos(3x))$.

Planche 29

Soit $n \geq 2$, soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par la multiplication matricielle. On suppose que $I_n \notin H$: montrer que si $M^2 \in H$, alors $M \in H$. En déduire que les matrices $E_{ii}, i = 1, \dots, n$, de la base canonique appartiennent à H . Aboutir à une contradiction.

On se place dans le cas $n = 2$: montrer que H est isomorphe à l'algèbre des matrices triangulaires supérieures.

H peut-elle être une algèbre commutative ?

Planche 30

I) On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-t)}{\sqrt{t}} \exp(ixt) dt$. Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R} et qu'elle est de classe \mathcal{C}^1 .

Montrer que f vérifie une équation différentielle et calculer f .

II) Soit (I, φ) une solution maximale de l'équation différentielle : $y' = y(y+1)$. Déterminer φ s'il existe x_0 tel que $\varphi(x_0) = 0$. Quelle est l'autre valeur remarquable de φ qui peut intervenir ?

Résoudre l'équation différentielle.

Planche 31

I) Déterminer A, B polynômes réels premiers entre eux tels que :

$$\frac{A(X)}{B(X)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{X - \omega_k} \text{ où } \omega_k = e^{i2\pi k/n}.$$

Déterminer C, D polynômes réels premiers entre eux tels que :

$$\frac{C(X)}{D(X)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{(X - \omega_k)^2}.$$

II) Résoudre l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} -7 & 5 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

Planche 32

I) Résoudre $(t^2 + 1) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 2y(t) = 0$ en commençant par trouver une solution sous forme polynomiale.

Résoudre en considérant la solution développable en série entière au voisinage de 0.

II) Soient $f, g \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$, deux fonctions linéairement indépendantes qui forment une base de solutions d'une équation différentielle linéaire (E) . Déterminer (E) .

Planche 33

I) Soit G un groupe et A une partie de G , finie et stable par $*$. Montrer que A est en fait un sous-groupe de G .

II) Soit n un entier naturel. Trouver une relation entre n , N le nombre de diviseurs de n , et P le produit de tous ces diviseurs.

III) Soient u, v deux applications linéaires telles que, pour tout x de E , on a $u(x) = \lambda_x v(x)$. Montrer que $u = \lambda v$.

Planche 34

I) Calculer $\int_a^b \sin^2(nt) dt$.

II) Existe-t-il un segment non trivial de \mathbb{R} sur lequel $\sin(nx)$ converge simplement vers 0 ?

III) Soit A une partie de l'espace vectoriel normé E . Soit f une application lipschitzienne de A vers \mathbb{R} . On définit sur E l'application $g : x \in E \mapsto \inf_{y \in A} (f(y) + \|x - y\|)$. Montrer que g est lipschitzienne et prolonge f sur E .

Planche 35

I) Donner le développement limité d'ordre n quelconque de $\sqrt{1+x}$ en 0.

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Montrer que $M^n = 0$. Trouver une matrice A telle que $A^2 = I_n + N$.

II) Soient E un espace vectoriel de dimension finie et p et q deux projecteurs de E . On suppose que $\text{Im } p \subset \text{Ker } q$. Montrer que $r = p + q + p \circ q$ est un projecteur de E . Déterminer son image et son noyau.

Planche 36

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$. Étudier la convergence de la suite $\left(\int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt) \cos(t)}{\sin(t)} dt$.

On pourra montrer que la suite d'intégrales est constante.

À l'aide de $g(t) = \cotan(t) - \frac{1}{t}$, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$.

On note $J_n = \int_0^{\pi/2} \ln \sin(t/2) \cos(nt) dt$. Limite de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et équivalent quand n tend vers l'infini ?

Planche 37

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . On définit ϕ_u sur $\mathcal{L}(E)$ par $\phi_u(v) = u \circ v \circ u$.

Montrer que si u est diagonalisable, alors ϕ_u est diagonalisable.

Étudier la réciproque si le corps de base est \mathbb{R} puis si le corps de base est \mathbb{C} .

Planche 38

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R}_+ , intégrable sur \mathbb{R}_+ à valeurs dans \mathbb{R}_+ .

Montrer qu'il existe $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue, croissante, tendant vers $+\infty$ en $+\infty$, telle que le produit fg soit intégrable sur \mathbb{R}_+ . On commencera par le cas où f est l'application $t \rightarrow (t+1)^{-\mu}$ avec μ réel.

Dans le cas général, on pourra construire une suite croissante (x_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{x_n}^{+\infty} f \leq \frac{1}{2^n}$.

On montre de même que si f n'est pas intégrable sur \mathbb{R}_+ , il existe $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue, décroissante, tendant vers 0 en $+\infty$, telle que le produit fg ne soit pas intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Planche 39

Soient $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$. Dans le plan euclidien est muni d'un repère orthonormé, on considère les deux courbes C_1 et C_2 d'équations respectives $(ax+by)^2 + (a'x+b'y)^2 = 1$ et $(ax+a'y)^2 + (bx+b'y)^2 = 1$. Nature des deux courbes ?

On suppose que $ab' - a'b \neq 0$. Montrer qu'il existe une isométrie transformant C_1 en C_2 .

Que dire si $ab' - a'b = 0$?

Planche 40

On donne une suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, écrivant $P = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k$, on note $N_a(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k p_k|$.

Donner une CNS sur a pour que N_a soit une norme.

Si a et b sont deux suites complexes vérifiant cette CNS, donner une CNS pour que N_a et N_b soient équivalentes.

Existe-t-il a telle que l'opérateur de dérivation soit continu dans $\mathbb{C}[X]$ muni de N_a ?

Planche 41

Donner les éléments propres de A , la matrice réelle d'ordre $n \geq 3$ dont les termes diagonaux sont tous égaux à b , les termes $a_{i,i+1}$ et $a_{i+1,i}$ tous égaux à a et les autres termes tous nuls.

Planche 42

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ telle que pour tout entier naturel n , $\int_a^b t^n f(t) dt = 0$. Montrer que f est nulle sur $[a, b]$.

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} t^n \exp((i-1)t) dt$.

Trouver une fonction continue $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

pour tout entier naturel n , $\int_0^{+\infty} t^n f(t) dt = 0$.

On pourra calculer les parties réelle et imaginaire de I_n .

Planche 43

I) Trouver $k \in \mathbb{R}$ minimum tel que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \int_{-1}^1 (P')^2 \leq k \int_{-1}^1 P^2$.

Généralisation : soient A une matrice symétrique réelle positive d'ordre n et B une matrice symétrique définie positive de même ordre. Trouver $k \in \mathbb{R}$ minimum tel que $\forall X \in \mathbb{R}^n, {}^t X A X \leq k {}^t X B X$.

II) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que les termes $a_{i,i+1}$ sont tous égaux à 1 et les autres nuls. Résoudre l'équation $B^2 = A$.

Planche 44

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $N(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$. Montrer que N est

une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note E_n l'ensemble des polynômes normalisés de degré n . Montrer que il existe $a_n > 0$ tel que $\forall P \in E_n, N(P) \geq a_n$.

Montrer que la suite (a_n) converge vers 0. On pourra utiliser les polynômes Q_n définis par $\forall u \in \mathbb{R}, Q_n(\cos u) = \cos nu$.

Donner une expression simple du coefficient dominant de Q_n .

Planche 45

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{C} , deux endomorphismes u et v de E et deux réels a et b tels que $u \circ v - v \circ u = au + bv$.

Montrer que u et v ont un vecteur propre commun. On distinguera les trois cas $a = b = 0$, $a \neq 0$ et $b = 0$, $ab \neq 0$.

Planche 46

On pose $a_n = \frac{\cos(\frac{2n\pi}{3})}{n^{1/3}}$ et $b_n = \sin a_n$. Donner le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$. Plus précisément,

pour $x \in \mathbb{R}$, donner la nature de ces deux séries.

Planche 47

I) Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$ scindé à racines simples. On note Q le polynôme $Q = X^n P(\frac{1}{X})$ et F la fraction rationnelle

$$F = -\frac{XQ'}{Q}. \text{ Développer } F \text{ en éléments simples.}$$

En déduire une méthode pour obtenir la somme des puissances p -ièmes des racines d'un polynôme scindé à racines simples.

II) Soient $p \in \mathbb{N}$ et $N = 2^p + 1$ premier. Conséquences pour p ?

Planche 48

Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, on considère l'équation d'inconnue réelle positive $x^n = x + 1$. Montrer que, pour tout n , l'équation admet une unique solution x_n .

Montrer que la suite (x_n) converge vers 1.

Montrer que la suite (x_n) admet un développement limité à tout ordre. Déterminer les 3 premiers termes.

Planche 49

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur \mathbb{R}^+ . On note (E) l'équation différentielle : $y' + y = f$. Résoudre (E) .

On suppose que f a une limite nulle en $+\infty$. Montrer qu'il en est de même des solutions de (E) .

On suppose que f est T -périodique. Étudier l'existence et l'unicité de solutions T -périodiques de (E) .

Donner alors les coefficients de Fourier d'une solution T -périodique en fonction de ceux de f .

Planche 50

Soient E un espace vectoriel euclidien et p et q deux projecteurs orthogonaux de E .

À l'aide de $p + q$, montrer qu'il existe une droite ou un plan stable par p et q .

Montrer que l'espace E est somme directe de droites et de plans stables par p et q .

Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

Planche 51

On définit la fonction f par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Montrer que l'ensemble de définition de f est $] -1, 1[$.

Montrer que f est strictement croissante sur $[0, 1[$.

Quelle est sa limite en 1 ?

Montrer que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$.

Calculer le coefficient de x^7 à l'aide de Maple.

Planche 52

I) Soient $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $u \circ v = 0$ et $u + v$ injective.

Montrer que $\text{rg } u + \text{rg } v = n$.

II) Étudier la transformation géométrique de \mathbb{R}^3 associée à la ma-

trice $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. En déduire que cette matrice est semblable

à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

Planche 53

Existence et calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\exp t - 1} dt$, puis de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{\exp t - 1} dt$ et enfin de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{\exp t + 1} dt$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Planche 54

I) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples x_1, \dots, x_n . Montrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{P'(x_k)} = 0.$$

II) Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

Planche 55

Montrer, à l'aide d'une dérivation, que, pour tout x réel,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos xt}{t^2} \exp(-t) dt = x \operatorname{Arc} \tan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2).$$

Planche 56

Soient $n \in \mathbb{N}, n \geq 1, K$ un sous-corps de $\mathbb{C}, E = \mathcal{M}_n(K)$ et $A, B \in E$.

Montrer que B est diagonalisable si et seulement si ${}^t B$ l'est.

Soit $f : E \rightarrow E$ définie par $f_{A,B}(M) = AMB$. Montrer que, si A et B sont diagonalisables, alors $f_{A,B}$ aussi. Étudier la réciproque.

Montrer que l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ est engendré par les applications du type $f_{A,B}$.

Planche 57

On note E l'ensemble des f de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} telles que $f(0) = f'(0) = 0$ et, pour $f \in E$, on définit $N_\infty(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

Montrer que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel et que N_∞ est une norme sur E .

Pour toute fonction $f \in E$, on pose : $N(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) + f''(x)|$

et $N_1(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |f''(x)|$. Montrer que N et N_1

sont des normes dans E . Montrer que N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes, mais que N et N_1 le sont.

Planche 58

Soit $P = \mathbb{Z} \cup \sqrt{2}\mathbb{Z}$ Montrer que le sous-anneau de \mathbb{R} engendré par P est $A = \{m + n\sqrt{2}, (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Soit U l'ensemble des inversibles de A ; vérifier que U est un groupe.

Soit
$$N : A \rightarrow \mathbb{N}$$

$$z = m + n\sqrt{2} \mapsto |m^2 - 2n^2|;$$

montrer que $N(z) = 1 \Leftrightarrow z \in U$.

Soit $V = \{a + b\sqrt{2}, a > 0, b > 0\}$; montrer que $x \in U$ s'écrit à partir d'éléments de V ; calculer $t_0 = \inf V$ et montrer que $V = \{t_0^n, n \in \mathbb{N}^*\}$. Calculer $N(a)N(b)$.

Planche 59

Soit u_n définie sur $[0, 2\pi]$ par $t \mapsto u_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2i\pi/n(k+t)^2}$.

Comparer $u_n(0)$ et $u_n(1)$.

On note \widetilde{u}_n le prolongement 1-périodique de u_n sur \mathbb{R} ; que dire de \widetilde{u}_n ?

Calculer les coefficients $c_n(\widetilde{u}_n)$ de Fourier de \widetilde{u}_n , en exprimant $c_n(\widetilde{u}_n)$ en fonction d'intégrales $\int e^{2i\pi t^2} dt$ sur des intervalles à préciser.

En déduire $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi t^2) dt = \frac{1}{2}$.

Planche 60

Limite de $F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}}$ quand x tend vers 1 par valeur inférieure. Donner un équivalent de $F(x)$ en ce point.

Planche 61

I) Soit p premier, résoudre $x^2 = \bar{1}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

En faisant le produit des éléments non nuls de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, montrer que $(p-1)! \equiv -1 [p]$.

Donner le reste de la division euclidienne de $(n-1)!$ par n .

II) Soit A et B deux matrices complexes diagonalisables. Montrer que l'application ϕ qui à toute matrice complexe X associe $\phi(X) = AXB$ est diagonalisable.

Planche 62

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n dt$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Donner une relation entre u_n et u_{n+2} .

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ existe-t-elle ?

Existence, selon α , de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n^\alpha}$ et de $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n^\alpha}$.

Planche 63

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{C})$. Montrer que l'équation $AX = XB$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, admet une solution non nulle si et seulement si A et B ont une valeur propre commune.

Planche 64

Soit f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{xy}{x+y} \right)$

1. Déterminer les plus grands ouverts U connexes par arcs de \mathbb{R}^2 sur lesquels f est un difféomorphisme de U sur $f(U)$.

2. On définit U_1 par $x+y < 0$ et $y-x < 0$. Déterminer $f(U_1)$.

3. Soit $X_0 \in U_1$. Que peut-on dire de la suite $X_{n+1} = f(X_n)$?

Planche 65

Intégrabilité sur \mathbb{R}_+ de la fonction $y = \frac{x^2}{1+x-\sin^2 x}$.

Indication : se servir de la série de terme général intégrale de n à $n+1$ de cette fonction.

Planche 66

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n . On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie la propriété P s'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $uv - vu = u$.

Avec ces notations, calculer $u^k v - v u^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ et montrer que u est nilpotent.

Si la matrice de u dans une base B vérifie $a_{i,i+1} \in \{0, 1\}$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, les autres termes étant nuls, montrer que u vérifie P .

Si $n = 3$ et u nilpotent, établir l'existence de B .

Planche 67

I) Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions lipschitziennes de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .

Pour $f \in E$, on pose $K(f) = \sup \left\{ \left| \frac{f(y) - f(x)}{y-x} \right|, y \neq x \in [0, 1] \right\}$.

Montrer que $N(f) = |f(0)| + K(f)$ définit une norme sur E .

Montrer que N et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Montrer que $N'(f) = N_\infty(f) + K(f)$ définit une norme équivalente à N .

II) Montrer que $x \mapsto \sin x^2$ est lipschitzienne sur tout segment de \mathbb{R} , mais ne l'est pas sur \mathbb{R} .

Planche 68

Soit la fonction $f(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{2xy}{x+y} \right)$. Déterminer les ouverts $\Omega \subset D_f$ connexes par arcs les plus grands possible tels que f soit un difféomorphisme de classe C^∞ de Ω sur $f(\Omega)$.
Déterminer $f(\Omega_1)$, où Ω_1 est défini par $(x+y < 0, x-y > 0)$.
Étudier les suites (X_n) vérifiant $X_0 \in \Omega_1$ et $X_{n+1} = f(X_n)$.

Planche 69

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions continues bornées de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Soient $N_1(f) = \sup_{t \in \mathbb{R}} e^{-|t|} |f(t)|$ et $N_2(f) = \sup_{t \in \mathbb{R}} (1 - e^{-|t|}) |f(t)|$.

Montrer que N_1 et N_2 définissent des normes.

Montrer que $\exists a > 0, N_1 \leq aN_2$ et $\exists b > 0, N_1 \leq bN_2$.

Planche 70

Soit $E = \{f \in C^\infty([0, 1], \mathbb{R}) \mid \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0\}$.

Montrer que la fonction $f : x \in]0, 1[\mapsto e^{-1/x^2}$ se prolonge par continuité en une fonction élément de E .

Montrer que E est un espace vectoriel réel de dimension infinie.

Soit D le morphisme de dérivation ; montrer qu'il laisse stable E et qu'il induit sur lui un automorphisme φ .

On munit E de la norme N_∞ . Les endomorphismes φ et φ^{-1} sont-ils continus ?

Planche 71

I) Soient deux suites réelles (u_n) et (v_n) . Montrer que $[u_n^2 + u_n v_n + v_n^2]$ tend vers 0 quand u_n et v_n tendent aussi vers 0.

Si u_n et v_n sont dans $[0, 1]$, montrer que $[u_n v_n]$ tend vers 1 quand u_n et v_n tendent aussi vers 1.

Trouver les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que, si u_n et v_n sont dans $[0, 1]$, $[au_n^2 + bv_n^2]$ tend vers 1 quand u_n et v_n tendent aussi vers 1.

II) Cours : définition des coefficients de Fourier. Que dire de la suite $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$? Que savez-vous des séries alternées ?

Planche 72

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quel en

est le polynôme minimal ? En déduire une décomposition de \mathbb{R}^3 en somme directe de sous-espaces stables non triviaux. Déterminer tous les sous-espaces stables. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Planche 73

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$. Domaine de définition, classe, équivalents aux bornes.

Planche 74

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{pmatrix}$; exprimer le polynôme

caractéristique de B en fonction de celui de A . Donner une CNS pour que B soit diagonalisable, puis une CNS pour qu'elle soit trigonalisable.