Concours divers – option MP

Planche 1 Telecom SudParis

I) Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que M^2 est diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable.

II) Soit f continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $t \mapsto f(t)\exp(-xt)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

On pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\exp(-xt)\mathrm{d}t$. Trouver $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\varphi(x)$.

Planche 2 Telecom SudParis

I) Soit q de classe $\mathcal{C}^1$ et intégrable sur $[0,+\infty[$ et φ une solution de l'équation différentielle $y'' + q(x)y = 0$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi'(x)$.

II) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & A \end{pmatrix}$.

Donner une CNS sur A et C pour que B soit diagonalisable.

Planche 3 Telecom SudParis

I) On admet que les applications continues ϕ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{R}, \phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$ sont les applications linéaires $x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{C}$. Quelles sont les applications continues $h : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{C}^*, h(xy) = h(x) + h(y)$?

II) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est symétrique positive si et seulement sil existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A =^t MM$. Comparer les rangs de A et de M.

Planche 4 Telecom SudParis

I) Soit u un endomorphisme de E de dimension finie vérifiant $\forall x \in E$, $\| u(x) \| \leqslant \| x \|$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - id_E) \oplus \mathrm{Im}(u - id_E)$.

II) Montrer que toute matrice carrée complexe d'ordre 2 non diagonalisable est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soient $A \in GL_2(\mathbb{C})$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $M^p = A$.

Planche 5 Telecom SudParis

I) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 - x^n}{\cos\left(\frac{x\pi}{2}\right)}\,\mathrm{d}x$ est équivalente à $\dfrac{\pi}{2}\ln n$. On pourra introduire l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 - x^n}{\frac{\pi}{2}(1-x)}\,\mathrm{d}x$.

II) Montrer que , dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les fonctions $x \to \sin(x^k)$, avec $k \in \mathbb{N}$, forment une famille libre.

Planche 6 Telecom SudParis

I) Soit une série réelle convergente $\sum u_k$. On note S sa somme et S_n sa somme partielle d'ordre n. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} S_n \frac{x^n}{n!}\cdot$ Montrer que $f(x)\exp(-x)$ tend vers S quand x tend vers $+\infty$.

II) Soient A et B deux matrices symétriques réelles définies positives. On suppose que ces deux matrices commutent. Montrer que la matrice AB est symétrique définie positive .

Planche 7 Telecom SudParis

I) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S(n)$ le nombre de chiffres de l'écriture binaire de n. Convergence et calcul de la somme de la série de terme général $\dfrac{S(n)}{n(n+1)}\cdot$

II) Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et u et v deux applications linéaires de E dans F.
Montrer que $|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leqslant \operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$.

Planche 8 Telecom SudParis

I) $P \in \mathbb{C}[X]$ n'a pas de racine de module 1. Montrer que $\displaystyle\int_\Gamma \frac{P'(z)}{P(z)}\,\mathrm{d}z \in 2i\pi\mathbb{Z}$, ou Γ est le cercle unité.

II) Soit $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{np} \end{pmatrix}$, matrice par blocs.

Montrer que $\operatorname{rg}(A) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \operatorname{rg}(A_{ij})$.

Planche 9 Telecom SudParis

I) Soit $R_n = \displaystyle\sum_{k\geqslant n+1} \frac{(-1)^k}{k}$; calculer le rayon de convergence, le domaine de définition et la somme de $\sum R_n x^n$.
II) Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent et $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$; montrer que $f = u + v$ et v ont les mêmes valeurs propres.

Planche 10 INT Management

I) Domaine de définition de $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Équivalent de F en 0^+, en $+\infty$.
II) Résoudre sur $]O, +\infty[$ l'équation différentielle $2xy' + y = \ln(1+x)$.
Donner les solutions ayant une limite en 0.

Planche 11 INT Management

I) Domaine de définition de $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nx\mathrm{e}^{-nx^2}$.

Convergence normale, uniforme ?

Exprimer f à l'aide de fonction usuelles.

II) Soit f un endomorphisme de E euclidien, tel que $f^* \circ f = f \circ f^*$.
Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Planche 12 EIVP-TPE

I) Convergence et somme de la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\mathrm{e}^{nx}}{n}$ ·

II) Existence des intégrales suivantes : $H(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha x)}{x^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$

$L = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Calculer $H(\alpha)$.

Planche 13 EIVP-TPE

I) Montrer que si deux matrices carrées A et B n'ont pas de valeur propre commune, $\chi_A(B)$ et $\chi_B(A)$ sont inversibles.

Montrer que s'il existe une matrice carrée P telle que $AP = PB$, A et B ont une valeur propre commune.

II) Calculer $\displaystyle\int_\Gamma (2y^3x + 3xy^2)\mathrm{d}x + (3y^2x^2 + 3yx^2)\mathrm{d}y$ où Γ est un arc d'extrémités $A(2,0)$ et $B(1,1)$.

Planche 14 EIVP-TPE

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t}{2\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t$.

Planche 15 EIVP-TPE

I) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de colonnes $(C_1, \ldots, C_n)$; calculer, en fonction du déterminant de A, le déterminant de la matrice D dont les colonnes sont les $D_i = \sum_{i \neq j} C_j$.

II) Calculer $\begin{vmatrix} 0 & -1 & \ldots & -(n-1) \\ 1 & 0 & \ldots & -(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$.

III) Soit deux endomorphismes f et g d'un espace E de dimension finie, tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$;
montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$.

Planche 16 EIVP-TPE

I) Montrer que l'ensemble des matrices réelles orthogonales telles que $A^2 = A$ est compact.

II) Domaine de définition, variation et convexité de $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$.

Comparer $F(x)$ avec $\operatorname{ch}(2x)$ et $\frac{\operatorname{sh}(2x)}{2x}$.

Planche 17 EIVP-TPE

I) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f_A l'application qui à toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe AM. Calculer $P(f_A)$ pour tout polynôme P. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A l'est.
II) Montrer que $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.
III) Trouver $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = A$ et $\operatorname{tr}(A) = n$.

Planche 18 EIVP-TPE

I) Montrer que $\psi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \mathrm{e}^{nt}$ est solution de $y'' + \mathrm{e}^t y = 0$.

II) Étudier $\sum \frac{j^n}{n}$.
III) Soient A et B deux matrices carrées complexes d'ordre n ; montrer que $\det(AB - \lambda I_n) = \det(BA - \lambda I_n)$ (on pourra supposer d'abord A inversible).
IV) Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E ; montrer qu'l existe une base orthonormale de E dont l'image par u est une base orthogonale.

Planche 19 EIVP-TPE

I) Étudier $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} x^n$

(rayon de convergence, limites aux bornes, dérivée, etc).

II) Étudier $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} \mathrm{d}t$ (existence, idée de calcul, etc).

Planche 20 EIVP-TPE

I) Existence, continuité, dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de :
$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2} \cos(xt) \mathrm{d}t$. Déterminer f.

II) La matrice complexe $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Donner ses éléments propres.

Planche 21 EIVP-TPE

I) Calculer $g(t) = \int_0^1 \cos(xt) \mathrm{d}x$ et montrer que g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

II) Convergence et somme de $\sum_{n \geqslant 1} n^2 z^n$, $z \in \mathbb{C}$.

Planche 22 EIVP-TPE

I) Montrer qu'une matrice M carrée, réelle est de rang 1 si et seulement si elle peut s'écrire $M = X^tY$ où X et Y sont dans $\mathbb{R}^n$. Soient $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(Y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$; montrer que $(X_i^tY_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
II) M décrit le cercle de rayon R centré en O dans le plan euclidien ; A et B sont les projetés de M sur les axes et N celui de M sur (AB). Déterminer le lieu des points N et la courbure en un point de ce lieu.

Planche 23 EIVP-TPE

I) Calculer $\Delta_n = \det \begin{pmatrix} 3 & -2 & & (0) \\ -2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -2 \\ (0) & & -2 & 3 \end{pmatrix}$.
II) Soit $a > 0$, soit f continue et bornée sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' - a^2y = 0$. Montrer que l'équation différentielle $y'' - a^2y = f(x)$ admet une unique solution bornée sur $\mathbb{R}$.

Planche 24 EIVP-TPE

I) Soit E un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique défini positif de E, v un endomorphisme symétrique de E. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme w de E tel que $u\circ w + w\circ u = v$.
Indication : poser $\varphi : w \mapsto u \circ w + w \circ u$.
Que peut-on dire de w ?
II) Soit (E) l'équation différentielle $y^2 + x^2 + xy - xy' = 0$. Soit $x_0 > 0$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique solution maximale φ de (E) telle que $\varphi(x_0) = y_0$.
Résoudre (E) en posant $y(t) = tx(t)$ et tracer les courbes intégrales.

Planche 25 EIVP-TPE

I) Soit $K_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp(in\theta)}{5 + 4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$. Calculer K_0, K_1 et exprimer $K_{n+1} + K_{n-1}$ en fonction de K_n. En déduire le développement en série de Fourier de la fonction $\theta \mapsto \dfrac{1}{5 + 4\cos\theta}$ ·
Trouver un autre moyen d'obtenir ce développement.
II) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ ·

Planche 26 EIVP-TPE

I) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N_1(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} |\, P(x)\, |\, \mathrm{d}x$,

$N_2(P) = \sqrt{\displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)^2 \mathrm{d}x}$, $N_3(P) = \displaystyle\sup_{-1\leq x\leq 1} |\, P(x)\,|$.
Montrer que N_1, N_2, N_3 sont des normes sur $\mathbb{R}_n[X]$ et sur $\mathbb{R}[X]$.
Comparer N_1, N_2, N_3 sur $\mathbb{R}_n[X]$ et sur $\mathbb{R}[X]$.
II) Soit (a_n) une suite numérique telle que la série $\sum a_n$ converge absolument. Étudier la série $\sum \dfrac{a_n}{n(n+1)}$ ·

On pose $R_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{a_p}{p(p+1)}$ · Étudier les séries $\sum R_n$ et $\sum nR_n$.

Planche 27 EIVP-TPE

I) Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, soit φ_1, φ_2, φ_3 les formes linéaires définies sur E par $\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = y + z \\ \varphi_2(x,y,z) = x + z \\ \varphi_3(x,y,z) = x + y \end{cases}$
Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E^*.
Déterminer sa pré-duale.
II) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tAA = {}^tBB$.

Montrer que A et B ont même rang. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PB$. Étudier la réciproque.
Indication : résoudre de préférence en algèbre linéaire euclidienne

Planche 28 EIVP-TPE

I) On pose $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$. Pour quelles valeurs de a et b la série $\sum u_n$ est-elle convergente ? Calculer alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

II) On pose $f(x,y) = \int_0^{\pi} \ln(x + y\cos t)\mathrm{d}t$. Déterminer le domaine de définition de f. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, en déduire $f(x,y)$.

Planche 29 EIVP-TPE

I) Soit $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, calculer le polynome caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 0 & b & \dots & b \\ a & \dots & a & \vdots \\ \vdots & & \vdots & b \\ a & \dots & a & 0 \end{pmatrix}$ (on pourra calculer le degré du polynome $P_\lambda(x) = \det(A - \lambda I_n + xU)$ où U est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1).
Montrer que les valeurs propres de A sont sur un même cercle.
II) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit χ_A le polynome caractéristique de A. Montrer que $Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$ si et seulement si $\chi_A(B)$ appartient à $GL_n(\mathbb{C})$.

Planche 30 EIVP-TPE

I) Étudier la fonction $f : x \to \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arc}\tan(xt) - \operatorname{Arc}\tan(t)}{t}\mathrm{d}t$: définition pour $x > 0$, dérivabilité, signe, calcul de la dérivée puis de f à l'aide des symboles usuels.

II) Rayon de convergence et somme de $\sum \frac{x^n}{n(n+2)}$.

Planche 31 EIVP-TPE

I) Quel est le cardinal de $O_n(\mathbb{Z})$?
II) Éléments propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$: $P \to XP' - P$?

Planche 32 EIVP-TPE

I) Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E. On définit ϕ sur $\mathcal{L}(E)$ par $\phi(f) = fp + pf$. Étudier la diagonalisabilité de ϕ. Décrire les éléments propres de ϕ. Calculer sa trace.
II) Résoudre l'équation différentielle $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$. On pourra chercher les solutions développables en série entière au voisinage de 0.

Planche 33 EIVP-TPE

Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série de terme général $\frac{1}{1^a + 2^a + \ldots + n^a}$.

Planche 34 EIVP-TPE

Condition suffisante pour qu'une application $f : [a,b] \to [a,b]$ non continue admette un point fixe ?

Planche 35 EIVP-TPE

Soit $A \in \mathcal{M}_5\mathbb{R}$ telle que $12A^3 - 8A^2 + 7A - I_5 = 0$.
Montrer que $0 < \operatorname{tr}(A) < 2$.

Planche 36 EIVP-TPE

Quel est le domaine de définition de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln n \; x^n$?

Montrer que $f(x) \sim -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$ quand x tend vers 1^-.

Planche 37 ENSIIE

I) Cours : dérivation terme à terme d'une série de fonctions.

II) Soit U l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $u(M) = AM - MB$ où A et B sont deux matrices carrées fixées. Montrer que si α et β sont valeurs propres de A et B respectivement, $(\alpha - \beta)$ est valeur propre de u.

Réciproquement, soit λ une valeur propre de u de vecteur propre associé T. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^kT = T(B + \lambda I_n)^k$, puis que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)T = TP(B+\lambda I_n)$. En déduire l'existence de deux valeurs propres α et β de A et B respectivement, telles que $\lambda = \alpha - \beta$.

Donner une CNS pour qu'il existe $T \neq 0$ vérifiant $AT = TB$.

Planche 38 ENSIIE

I) Cours : règle de d'Alembert pour les séries numériques.

II) Soit E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 fg$.

On définit les endomorphismes u et v de E par $u(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ et $v(f)(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$. Montrer que $(u(f)|g) = (f|v(g))$.

Donner les valeurs et vecteurs propres de u et v.

Planche 39 ENSIIE

I) Cours : définition et caractérisation du rayon de convergence d'une série entière.

II) Trouver toutes les matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^2 +^t M = I_n$.

Planche 40 ENSIIE

I) Cours : inégalité de Taylor-Lagrange pour les fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé (énoncé et démonstration).

II) On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers et $GL_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble de ces matrices qui sont inversibles et dont l'inverse appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Montrer que $M \in GL_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(M) = \pm 1$.

Que peut-on en déduire pour la structure de $(GL_2(\mathbb{Z})\times)$?

Que dire de la structure de $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}),\ \det(M) = +1\}$?

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n et B^m pour $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Z}$. Si $M \in G$, comment s'obtiennent A^nM, B^mM, MA^n, MB^m à partir de M ?

En déduire que l'ensemble $\{A, B\}$ engendre le groupe $(G, \times)$.

Planche 41 ENSIIE

I) Cours : critère spécial des séries alternées.

II) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E et soit $u \in \mathcal{L}(G, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

Soit f l'endomorphisme de E tel que pour tout $(x, y) \in F \times G$, $f(x + y) = u(y) + v(x)$.

Montrer que, à l'exception de 0, $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

Soit λ une valeur propre non nulle de f. Montrer que λ^2 est valeur propre de $u \circ v$. Étudier la réciproque.

On suppose que f est diagonalisable. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ sont diagonalisables. Étudier la réciproque.

Planche 42 ENSIIE

I) Cours : invariance du rayon de convergence d'une série entière par dérivation terme à terme.
II) Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$, continues par morceaux et 2π-périodiques.

On pose pour $f, g \in E$, $(f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f}(t)g(t)\mathrm{d}t$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit Φ_n par $\forall f \in E$, $\Phi_n(f) : x \mapsto f(nx)$.
1. Soit $f \in E$. Montrer que les coefficients de Fourier de $\Phi_n(f)$ sont liés à ceux de f par $\forall k \in \mathbb{Z}$, $c_k(\Phi_n(f)) = c_{k/n}(f)$ si $n|k$, $c_k(\Phi_n(f)) = 0$ sinon.
2. En déduire que si $f, g \in E$, la suite $(\Phi_n(f)|g)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, préciser la limite.
3. Lorsque $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \frac{f(t)}{1+\cos^2(nt)}\,\mathrm{d}t$.

Planche 43 ENSIIE

I) Cours : quels sont les théorèmes d'échange intégrale / limite et intégrale / somme de série ?
II) Soit E un espace euclidien, $u \in O(E)$ et soit $v = Id - u$.
Montrer que $(\operatorname{Im} v)^{\perp} = \operatorname{Ker} v$.
Soit p le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Ker} v$. Montrer que pour tout $x \in E$, $\displaystyle\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^k(x)$ tend vers $p(x)$ quand m tend vers $+\infty$.

Planche 44 ENSIIE

I) Cours : théorème de la base incomplète (énoncé et démonstration)
II) $a \in \mathbb{R}^*$, et (u_n) définie par $u_0 = a$; $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} - 1$.
Étudier la suite (u_n).
Dans le cas de la divergence, donner un équivalent de u_n.
Si (u_n) converge vers ℓ, donner un équivalent de $u_n - \ell$.

Planche 45 ENSEA

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ qui à P associe $Q(X) = P(X+1) - P(X)$.
Comparer les degrés de P et $u(P)$. Vérifier que u laisse stable $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer noyau et image de l'induit.
Si $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $u(P) = R$ et $\displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = 0$. Notons-le $P = \varphi(R)$.
On pose $R_n = nX^{n-1}$, pour $n \geqslant 1$. Déterminer $\varphi(P_1)$ et $\varphi(P_2)$.
Si $P_n = \varphi(R_n)$, montrer que $P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$.
Interprétation graphique ?

Planche 46 ENSEA

I) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$ converge et en comparer la somme avec $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$. Achever le calcul de cette intégrale.
II) Soit f de classe $\mathcal{C}^0$ et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et soit l'équation différentielle $E : y'' + f(x)y = 0$.
Si $\{u_1,\, u_2\}$ est une base fondamentale de solutions de E, montrer qu'il existe $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ complexes tels que, pour tout x et tout $i \in \{1,\, 2\}$, $u_i(x+2\pi) = \alpha_i u_1(x) + \beta_i u_2(x)$.
Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$ est inversible.

Planche 47 ENSEA

I) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe γ d'équation polaire $\rho = f(\theta)$. Soit M_0 le point de γ d'angle polaire θ_0.
Déterminer l'équation cartésienne de la tangente à γ en M_0 dans le repère $\big(O, \vec{u}(\theta_0), \vec{v}(\theta_0)\big)$ associé à θ_0 puis dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
II) Soit f continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$;

déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 f(t^n)\mathrm{d}t$.

Planche 48 ENSEA

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $M(x) = I_3 + xA + \dfrac{x^2}{2} A^2$.
Soit $G = \{M(x), x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $(G, \times)$ est isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.
Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donner B^{-1} et $\exp(B) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B^k}{k!}\cdot$

Planche 49 ENSEA

I) Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(X) = \displaystyle\prod_{i=0}^{n} (X - i)$.

Montrer que P_n' a une unique racine x_n dans $]0,1[$. Limite de (x_n) ?

Indication : faire un encadrement de $\dfrac{P_n'}{P_n}\cdot$

Montrer que $x_n \sim \dfrac{1}{\ln n}\cdot$

II) Ensemble de définition de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t(t+1)}}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur cet ensemble de définition.

Planche 50 ENSEA

I) Cours : montrer que la trace d'un endomorphisme est bien définie.
II) Soit A une matrice d'ordre 3, ayant 3 valeurs propres distinctes. Si $M^2 = A$, montrer que M est diagonalisable.
III) Pour $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, nombre de solutions de l'équation $X^2 = A$?

Planche 51 ENSEA

I) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que $(A^p)_{p\in\mathbb{N}} \to B$.
Montrer l'existence de $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $B = P(A)$.
On suppose B inversible, déterminer A et B.
II) Montrer que $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}_+$.
Continuité, dérivabilité. Déterminer $F'(x)$, puis $F(x)$.

Planche 52 ENSEA

I) Soit E espace euclidien orienté de dimension 3 et f définie sur E par $f(x) = (a \wedge x) \wedge b$.
Justifier que f est un endomorphisme. Déterminer ses valeurs propres. Donner une CNS pour que f soit diagonalisable.
Déterminer l'adjoint f^* de f. Donner une CNS pour que f soit symétrique.
II) Cours : démonstration du théorème noyau-image.

Planche 53 ENSEA

I) Tracer la courbe d'équation polaire $\dfrac{1}{\varrho} = \cos\vartheta + \sin\vartheta$.
II) Si f est continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in]0,1[$, déterminer $\lim \displaystyle\int_0^1 f(a^n t)\mathrm{d}t$.

III) Déterminer un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2 + (n-k)^2}\cdot$

Planche 54 ENSEA

I) Soit une courbe d'équation polaire $\varrho = f(\vartheta)$, avec f de classe $\mathcal{C}^1$. Donner l'équation de la tangente en un point $M(\vartheta_0)$ dans le repère tournant $(O, \vec{u}, \vec{v})$ puis dans le repère canonique de $\mathbb{R}^2$.

II) Étudier la possibilité de prolonger par continuité l'application qui à $(x, y) \neq (0, 0)$ associe $\dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2}$ ·

Planche 55 ENSEA

I) Quel est le domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nx\mathrm{e}^{-nx^2}$?

Étudier la convergence uniforme sur ce domaine, sur tout compact de ce domaine.

II) Développer $\operatorname{Arc\,tan} \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$ au voisinage de 0.

Planche 56 NAVALE

I) Étudier la série de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{\pi}{4}$ ·

II) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\exp t - 1}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$·

Planche 57 NAVALE

I) L'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz = 0\}$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

II) Résoudre l'équation $\operatorname{tr}(A)X + \operatorname{tr}(X)A = B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Planche 58 NAVALE

I) Étudier $\left(\displaystyle\int_0^1 |\, f(t)\,|^n \,\mathrm{d}t\right)^{1/n}$ pour f continue sur $[0, 1]$.

II) Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ $2n$ réels ; Soient deux réels p et q tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$.

Planche 59 NAVALE

Soit u un endomorphisme d'un espace de dimension finie vérifiant $u^3 + u = 0$. Montrer que u est de rang pair.

Planche 60 AIR

I) Domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1 + t^2}\, \mathrm{d}t$.

À l'aide de f' montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ·

II) Résoudre $(1 - x^2)y' + (x - 2)y = 0$ avec $y(0) = \mathrm{e}$.

Planche 61 AIR

I) Montrer que la fonction $x \to \dfrac{\ln x}{x^2 + 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On note I son intégrale. Montrer que $I = 2 \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 + 1}\, \mathrm{d}x$.

Calculer I. On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ ·

II) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $x(x^2 + 1)y' + 2y = x^2$ avec la condition $y(\frac{1}{\mathrm{e}}) = 0$.

III) Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles $x\,\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\,\dfrac{\partial f}{\partial x} = f$ en passant en coordonnées polaires.

Planche 62 AIR

I) Soient E un espace vectoriel de dimension finie 4 et f un endomorphisme nilpotent de E, d'indice 3 ($f^3 = 0, f^2 \neq 0$).
Quelles sont les valeurs possibles du rang de f ? Donner un exemple pour chaque valeur.
II) Soient A et B deux matrices réelles d'ordre n. On suppose A diagonalisable. Donner une CNS pour qu'il existe $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $A = P(B)$ et $B = Q(A)$?

Planche 63 AIR

I) Trouver deux réels a et b tels que $\displaystyle\int_0^\pi (at - bt^2)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}\cdot$

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ avec Fourier.
II) Parmi les triangles à périmètres constants, trouver ceux dont la surface est maximale.
On rappelle que l'aire S d'un triangle de cotés x, y, z, est donnée par $S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$ où p est le demi-périmètre.

Planche 64 AIR

I) À quelles conditions $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est-elle semblable à sa transposée ? Qu'en est-il si A est diagonalisable ?
II) On note $v_p(n)$ le maximum de a dans $\mathbb{N}$ tels que p^a divise n. Calculer $v_2(2000!)$ et $v_5(2000!)$.
En déduire le nombre de zéros dans l'écriture de 2000!.

Planche 65 ST CYR

I) Avec Maple, trouver les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe deux réels a et b et deux matrices M et N tels que $A^n = a^n M + b^n N$.
Donner la dimension de l'espace des matrices commutant avec A.
II) Soit une série de terme général $u_n > 0$ et $v_n = \dfrac{u_n}{1 + u_n^2}\cdot$
Montrer que si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ aussi.
Montrer que si $\sum u_n$ diverge et si (u_n) est bornée, $\sum v_n$ diverge.
Donner un exemple où $\sum u_n$ converge et un où elle diverge.

Planche 66 ST CYR

I) Calculer le minimum de $\displaystyle\int_0^1 (t\ln t - at - b)^2 \mathrm{d}t$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

II) Étudier la série de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{q=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{q-1}}{\sqrt{q}}\right)$.

Planche 67 ST CYR

I) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, avec $0 < a < 1 < b$, et $I_n = \displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{1 + x^n}\,\mathrm{d}x$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = l$.

On suppose $f(1) \neq 0$. Montrer que $\displaystyle\int_a^1 \frac{x^n f(x)}{1 + x^n}\,\mathrm{d}x \sim \frac{f(1)\ln 2}{n}$ quand $n \to +\infty$. Montrer que $I_n - l = o(\frac{1}{n})$ quand $n \to +\infty$.
II) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, dire, avec l'aide de Maple, si la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
Déterminer une matrice B, diagonale par blocs, semblable à A, puis étudier la diagonalisation de A.
Indication : si A est la matrice de f dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_5)$ de $\mathbb{R}^5$, écrire la matrice de f dans la base $(e_3, e_2, e_4, e_1, e_5)$.

Planche 68 ST CYR

I) Soit (u_n) une suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$.

Nature de la série $\sum \frac{1}{u_n}$? Équivalent de $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{u_n}$?

II) Soit (T_n) la suite de polynomes définie par $T_0 = 1$, $T_1 = X$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos t) = \cos(nt)$.
Préciser le degré de T_n, son coefficient dominant, montrer que les coefficients de T_n sont dans $\mathbb{Z}$.
Soit $z = \frac{1}{5}(3+4i)$. Que vaut $|\,z\,|$?
Soit t_0 tel que $z = \exp(it_0)$. Que vaut $\cos(t_0)$? Que vaut $\cos(nt_0)$ si $z^n = 1$? Montrer que z n'est pas racine de l'unité.

Planche 69 ST CYR

I) (avec Maple) Étudier les suites définies par $(U_0, V_0, W_0) \in \mathbb{R}$, et pour $n \in \mathbb{N}$,
$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{4}V_n \frac{1}{4}W_n$
$U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{1}{3}V_n + \frac{1}{3}W_n$
$U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{1}{4}V_n + \frac{1}{4}W_n$.
II) Domaine de définition, continuité, dérivabilité et calcul de $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(xt)\mathrm{d}t$ et $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\sin(xt)\mathrm{d}t$.

On pourra utiliser les complexes et $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

Planche 70 ST CYR

I) Nature de la série de terme général $u_n = \prod_{q=1}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^{q-1}}{\sqrt{q}}\right)$.

II) Déterminer le minimum de $\int_0^1 (t\ln t - at - b)^2\mathrm{d}t$.

Planche 71 Mines AADN

I) Étudier la suite réelle de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}.$$

II) Calculer M^{2001} et M^{2002} avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & j & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$ où $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$.

Planche 72 Mines AADN

I) Trouver le reste de la division euclidienne de $X^n + X + b$ par $(X-a)^2$.
II) Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-(n+x)^2\pi} + \sum_{n>0} \mathrm{e}^{-(-n+x)^2\pi}$.
Montrer que sa somme est 1-périodique et la développer en série de Fourier (on rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\cos u\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\omega^2/4}$).
III) Cours : donner les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice soit diagonalisable.

Planche 73 Mines AADN

I) Déterminer l'ensemble des endomorphismes vérifiant $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ dans $\mathbb{R}^2$, puis dans $\mathbb{R}^3$, enfin dans $\mathbb{R}^4$.
II) Étudier la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\int_1^n \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

Planche 74 ICNA

I) Déterminer dans $\mathbb{R}^3$, la matrice de la projection orthogonale sur le plan $x - 2y + z = 0$.

II) Déterminer les coefficients de Fourier de f, 2π-périodique, valant -1 sur $]-\pi, 0[$, 1 sur $]0, \pi[$ et 0 en 0 et π.

En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Planche 75 ICNA

I) On note $(\heartsuit)$ l'équation différentielle $x^2y'' + 4xy' + (-x^2 + 2)y = 1$. Montrer qu'il existe une unique solution de $(\heartsuit)$ développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Vérifier que $x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$ est solution de $(\heartsuit)$.

En déduire les solutions de $(\heartsuit)$.

II) Existe-t-il des matrices symétriques rélles A pour lesquelles on peut trouver $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$?

Planche 76 ICNA

I) Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}}$.

Si la série converge pour un x réel, on note $f(x)$ sa somme.

Étudier f : continuité, dérivabilité, variations, limite à l'infini.

II) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable et décrire ses éléments propres . En déduire les matrices B telles que $A = B^2$.

