ENS option MP*

Planche 1 Lyon

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et F définie par $F(x)=\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{-itx}\mathrm{d}t$.

Montrer que F tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Montrer que $F(x)=\dfrac{f(a)\mathrm{e}^{-iax}-f(b)\mathrm{e}^{-ibx}}{ix}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, au voisinage de $+\infty$.

Montrer la convergence de $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-it^2/2}\mathrm{d}t$.

Soit g définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{-ixt^2/2}\mathrm{d}t$; montrer que $g(x)=\dfrac{f(0)I}{\sqrt{x}}+o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

Planche 2 Cachan

Soit f uniformément continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $\forall x>0$, la suite $\big(f(nx)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ; que peut-on dire de f ?

Planche 3 Ulm-Lyon-Cachan

Pour A et B matrices réelles, carrées d'ordre n, donner un (des) critère(s) d'inversibilité de $A+\lambda B$, où $\lambda\in\mathbb{R}$ (on pourra commencer par étudier des cas particuliers, chercher si cela se produit pour peu ou beaucoup de valeurs de λ...).

Planche 4 Cachan

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, strictement convexe, telle que $\dfrac{f(u)}{\|\,u\,\|}$ tende vers $+\infty$ quand $\|\,u\,\|$ tend vers $+\infty$. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $\|\,x\,\|$ tend vers $+\infty$.

Planche 5 Ulm-Lyon-Cachan

Montrer que $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $E_A=\{{}^tXAX,\ X\in\mathbb{C}^n\}$ est convexe. On montrera d'abord la propriété dans un cas particulier, puis on montrera que E_A est convexe si et seulement si $\forall B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ E_B\cap i\mathbb{R}^n$ est connexe par arc ou convexe.

Planche 6 Ulm-Lyon-Cachan

Soit $P(X)=\displaystyle\sum_{i=0}^n a_iX^i\in\mathbb{R}[X]$, $c(P)$ le nombre de changements de signe dans la liste des a_i, et $z_+(P)$ le cardinal de $P^{-1}(\{0\})\cap\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $z_+(P)\leqslant c(P)$.

Planche 7 Cachan

Soit $A\in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall\,i,\ \displaystyle\sum_{j\neq i}|\,a_{i,\,j}\,|<|\,a_{i,\,i}\,|$.

Montrer que A est inversible.

Soit $A\in GL_n(\mathbb{R}_+)$ telle que $\forall\,i,\ \displaystyle\sum_j a_{i,\,j}=1$. Montrer que les valeurs propres complexes de A sont de module $\leqslant 1$ et que 1 est valeur propre.

Si $X\in\mathbb{C}^n$ est un vecteur propre associé à λ de module 1, montrer que toute coordonnée de AX de module 1 est aussi coordonnée de X. Montrer qu'un tel λ est une racine de l'unité.

Planche 8 Ulm-Lyon-Cachan

On donne un entier $n \geqslant 0$. Montrer qu'il existe des polynômes $P_0, \ldots, P_n$ dans $\mathbb{Z}_n[X]$ tels que, $\forall (i,\, j) \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\int_0^1 t^i P_j(t)\mathrm{d}t = \delta_{i,\,j}$.

Planche 9 Cachan

Montrer que la matrice $H \in GL_n(\mathbb{R})$ de terme général $\dfrac{1}{i+j-1}$ est définie positive, que son rayon spectral ρ est $< \pi$ et que la limite de ρ est π lorsque $n \to \infty$.

Planche 10 Ulm-Lyon-Cachan

Soit A et B deux matrices de $GL_n(\mathbb{C})$ dont les spectres sont inclus respectivement dans les segments réels $[a, a']$ et $[b, b']$. Que dire de celui de $A + B$?
Indication : le résultat « attendu » est vrai pour des matrices hermitiennes, faux dans le cas général.

Planche 11 Ulm-Lyon-Cachan

Soit f continue dans $[0, 1]$, α irrationnel dans $[0, 1]$, $u_n = n\alpha - [n\alpha]$; montrer que $\dfrac{1}{n\alpha} f(u_k)$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Planche 12 Cachan

Soit f definie sur $\mathbb{R}^2$, est différentiable, telle que $f(0,0) = 0$, et qu'en tout point $\dfrac{\partial f}{\partial y} > \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|\cdot$ Pour les points tels que $f(x,y) = 0$, montrer qu'il existe une unique fonction ϕ dérivable telle que $y = \phi(x) \Leftrightarrow f(x,y) = 0$.

Planche 13 Cachan

Soit A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres vérifient $\Re(\lambda) < 0$.
Pour $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, discuter l'équation matricielle $AM + MB = C$.
Indication : introduire, et en particulier résoudre, l'équation différentielle $M' = AM + MB$.

Planche 14 Lyon

Soit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x,\, y) = y^2 - x^2$ si $x^2 + y^2 \geqslant 1$. On définit en outre Γ comme l'ensemble des applications continues γ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ telles que $\gamma(t) = (t,\, 0)$ pour $|\,t\,|$ assez grand (dépendant de γ).
Montrer que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $m(\gamma) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} f\big(\gamma(t)\big)$ est atteint, puis que $\inf\limits_{\gamma\in\Gamma} m(\gamma) > -\infty$.

Planche 15 Ulm-Lyon-Cachan

On donne le polynôme réel scindé, de degré n, $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}$.
Montrer que $k(n-k)a_k^2 \geqslant (k+1)(n-k+1)a_{k+1}a_{k-1}$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.
Questions diverses : citez des groupes non commutatifs finis, infinis.

Planche 16 Cachan

Soit une équation différentielle $(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$, avec a et b réelles continues sur l'intervalle I.
Montrer qu'aucune solution non nulle n'a de zéro commun avec sa dérivée.
Soit $\{f, g\}$ une famille libre de solutions de (E). Montrer qu'entre deux zéros de f se trouve un zéro de g.
Si $a = \underline{0}$ et $b \leqslant 0$, montrer que toute solution non nulle de (E) s'annule au plus une fois.
Soit $b_1 \leqslant b_2$ deux fonctions réelles continues sur l'intervalle I, f_1 et f_2 non nulles vérifiant respectivement $f_1'' + b_1 f_1 = 0$ et $f_2'' + b_2 f_2 = 0$.
Montrer qu'entre deux zéros de f_1 se trouve un zéro de f_2.

