

Concours Commun Mines-Ponts – option MP

Planche 1

I) Étudier la convergence et calculer la somme de la série de terme

$$\text{général } u_n = \frac{E(n^{1/3}) - E((n-1)^{1/3})}{4n - n^{1/3}}.$$

II) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel normé de dimension finie dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples. Caractériser et dénombrer les sous-espaces stables par f .

Planche 2

I) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer qu'il existe T triangulaire supérieure et U telle que $U^* = {}^t \bar{U} = U^{-1}$, vérifiant $A = U^* T U$. En déduire que $AA^* = A^* A$ si et seulement si $\text{tr}(A) = \sum_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|^2 \alpha(\lambda)$ où $\alpha(\lambda)$

est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ dans le polynôme caractéristique de A .

II) Domaine de définition et continuité de $F(x) = \int_0^\infty \frac{\ln t}{1+t^x} dt$.

III) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \cos\left(\frac{n+a}{n+b} \frac{\pi}{2}\right)$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{Z}$ converge-t-elle ?

IV) Rappeler le théorème de Rolle ; est-il valable pour des fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{C} ?

Planche 3

I) Soit u un endomorphisme de rang r d'un espace vectoriel de dimension finie ; trouver un polynôme annulateur de u de degré au plus égal à $r+1$.

II) Montrer que $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} du$ est définie et de classe

\mathcal{C}^1 sur $I =]0, +\infty[$. Trouver les limites de F aux bornes de cet intervalle. Trouver un équivalent de F en 0 et $+\infty$.

III) Trouver un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Planche 4

I) Domaine de définition et continuité de $I(a) = \int_0^\infty \sin(ax) e^{-x^2} dx$.

Est-elle de classe \mathcal{C}^1 ? Trouver une équation différentielle simple vérifiée par I et l'intégrer.

II) Domaine de définition, continuité et convergence uniforme de $f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{(1-x)^n}{n^2}$; est-elle dérivable ? Exprimer f' à l'aide de fonctions usuelles et en déduire f .

III) Domaine de définition de $J(\alpha) = \int_0^{\pi/2} (\tan x)^\alpha dx$.

Planche 5

I) Nature de la surface : $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 4x + 3y + z + 3 = 0$

II) Convergence de la suite de fonctions (f_n) , continues sur $[0, 1]$, à valeurs dans \mathbb{R} , définie par $f_0 = 1$, $f_n(x) = 1 + \int_0^x f_{n-1}(t - t^2) dt$ (on pourra étudier la convergence de la série $\sum (f_n - f_{n-1})$).

III) Trouver une CNS pour que la matrice carrée d'ordre n , de coefficient $m_{ij} = \mu_i \mu_j$ avec $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$, soit diagonalisable.

Planche 6

I) Développer en série de Fourier la fonction 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = \cos \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Montrer les relations :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha \tan(\alpha\pi)} \text{ et } \cotan u = \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2u}{u^2 - n^2\pi^2}.$$

II) Déterminer la signature en fonction de α de la forme quadratique sur \mathbb{R}^n , $Q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \alpha \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$.

III) On note $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et (s_n) une suite de points de $[0, 1]$.

Pour f et g dans E , on définit $\phi(f, g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} f(s_n)g(s_n)$. Montrer que ϕ est non dégénérée si et seulement si (s_n) est dense dans $[0, 1]$.

IV) Soit M une matrice carrée d'ordre n et orthogonale de coefficient m_{ij} ; montrer que $\left| \sum_{i,j} m_{ij} \right| \leq n$.

Planche 7

I) Domaine de définition, continuité et dérivabilité par rapport à b de $I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{sh}(bx)}{x} e^{-ax} dx$. Donner la dérivée de I par rapport à b et en déduire $I(a, b)$.

II) Montrer que u , définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ par $u(P)(X) = X(P(X) - P(X-1))$, est un endomorphisme et préciser sa matrice dans la base canonique, son noyau, son image, ses valeurs propres.

Planche 8

I) Calculer $\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} dx$.

II) Montrer que $\int_0^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$ en $+\infty$.

III) Soit $M = \begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; montrer que M est une matrice de rotation si et seulement si (p, q, r) sont racines d'un polynôme de la forme $X^3 - X^2 + \lambda$.

Planche 9

I) Soit f de classe \mathcal{C}^1 , monotone sur \mathbb{R}_+ , à valeurs dans \mathbb{R} , et ayant une limite finie en $+\infty$. Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = f(x)$ sont bornées sur \mathbb{R}^+ .

II) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $A = \begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que A soit inversible. Calculer dans ce cas A^{-1} .

Planche 10

I) Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormale de $E = \mathbb{R}^3$. On pose $e = e_1 - e_2 + e_3$. Déterminer la rotation f telle que $f(e) = e$ et $f(e_1) = -e_2$.

II) Soit $F(x) = \int_1^\infty \frac{\sin x}{\text{ch } t - \cos x} dt$. Montrer que F est bien définie et qu'elle est 2π -périodique.

Développer en série entière $z \mapsto \frac{\sin x}{z^2 - 2z \cos x + 1}$.

En déduire que F est développable en série de Fourier et expliciter son développement.

Planche 11

I) Soit f continue de \mathbb{R}_+ vers \mathbb{R} . On suppose que $\int_0^x f(t)e^{-s_0 t} dt$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$, et ce pour un certain $s_0 > 0$.

Montrer que, pour tout $s > s_0$, l'application $x \mapsto \int_0^x f(t)e^{-st} dt$ admet une limite en $+\infty$.

II) Chercher toutes les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour toute matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

Indication 1 : il n'y a que $M = 0$ qui convienne en dimension au moins égale à deux.

Indication 2 : raisonner par l'absurde en complétant une colonne non nulle de A en une base par le théorème de la base incomplète.

III) Montrer qu'il existe un polynôme P tel que, n étant donné, X^n divise $1 + X - (P(X))^2$.

Indication : utiliser le développement limité de $\sqrt{1+X}$.

Planche 12

I) Étudier la fonction $f : x \rightarrow \int_0^{+\infty} \exp(-xt) \ln t dt$: définition, continuité, dérivabilité, caractère \mathcal{C}^∞ , limite à l'infini. Trouver une équation différentielle linéaire dont f est solution et la résoudre. L'expression de f trouvée ainsi n'était-elle pas prévisible ?

II) Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne, (i.e. une matrice dont l'adjointe $H^* = {}^t \bar{H}$ vaut elle-même $H^* = H$).

Montrer que les valeurs propres de H sont réelles.

On définit la matrice U par $U = (H - iI_n)(H + iI_n)^{-1}$. Montrer que U est unitaire, i.e. $U^* \cdot U = I_n$. Relier les valeurs propres de U à celles de H .

Planche 13

I) Soient $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $h \in \mathbb{R}^*$. On note \mathcal{P}_n l'ensemble des polynômes réels à deux variables de la forme $\sum_{k=0}^n a_k x^k y^{n-k}$ où

$a_k \in \mathbb{R}$,

\mathcal{A}_n l'ensemble des $P \in \mathcal{P}_n$ tels que $\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = 0$,

\mathcal{B}_n l'ensemble des $P \in \mathcal{P}_n$ s'écrivant $P(x, y) = xyR(x, y)$ où R est dans \mathcal{P}_{n-2} ,

\mathcal{O}_n l'ensemble des $P \in \mathcal{P}_n$ tels que $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$.

Vérifier que les quatre ensembles précédemment définis sont des espaces vectoriels sur \mathbb{R} .

Montrer que \mathcal{P}_n est la somme directe de \mathcal{A}_n et \mathcal{B}_n .

Quelle caractérisation de \mathcal{P}_n et d'un supplémentaire (ou de son complémentaire) peut-on en tirer ?

II) Étude de la fonction f définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{(1+t)^2} dt$.

Planche 14

I) Définition, dérivabilité et expression à l'aide des symboles usuels de la fonction d'une variable réelle définie par $f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$.

II) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n \mathbb{Z}$ de déterminants premiers entre eux. Montrer qu'il existe $U, V \in \mathcal{M}_n \mathbb{Z}$ telles que $AU + BV = I_n$.

Planche 15

I) Le plan euclidien est muni d'un repère orthonormé direct. Représenter la courbe d'équation cartésienne $x^2 + \frac{1}{4}y^2 - 1 = 0$.

En déduire l'allure des courbes d'équations polaires $r^2 + \frac{1}{4}\theta^2 - 1 = 0$

et $(\frac{1}{r})^2 + \frac{1}{4}(\frac{1}{\theta^2}) - 1 = 0$.

II) Soit l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\psi(x, y) = (x-y, x+y)$. Montrer que ψ est un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur lui-même.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^1 . Calculer $\partial_1(\varphi \circ \psi)$ et $\partial_2(\varphi \circ \psi)$.

III) Cours : caractérisation séquentielle des fermés ; espaces de Banach, de Hilbert.

Planche 16

I) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(t+1)} dt$.

Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont f est solution et la résoudre.

II) Signature de la forme quadratique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\phi(A, B) = \text{tr}(AB)$.

III) Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , on considère une réflexion s et une rotation r . Qu'est-ce que $s \circ r \circ s$?

Planche 17

I) Étudier la fonction réelle f définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(t)}$

II) Soient A et B deux parties fermées d'un espace vectoriel normé E . $A + B$ est-elle une partie fermée ? On pourra s'intéresser aux sous-groupes de \mathbb{R} .

III) Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)^2$.

IV) Étude de la nature de la série de terme général $u_n = \left(\text{ch}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha} - 1$ selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Planche 18

Domaine de définition de la série de terme général $u_n(x) = \frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2}$,

($n \geq 1$).

Sur $[-a, a]$, $0 < a < \pi$, montrer que $S : x \mapsto \sum_{n \geq 1} u_n(x)$ est continue.

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x} - S(x)$. Montrer que $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^{k=n} v_k(x)$ où

v_k est à expliciter.

Donner un équivalent de f en 0.

Comparer $f(x)$ et $f(x + \pi)$. Comparer $f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x + \pi}{2}\right)$ et $f(x)$.

Soit $g : x \mapsto \cotan x$; quel est le domaine de définition de g ? Reprendre les deux questions précédentes pour g .

Soit $\varphi = f - g$, montrer que φ est continue en $n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$); montrer que φ est nulle; conclure.

II) Soit $D_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & & \\ x & 1+x^2 & x & & (0) \\ & & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$, $x \in \mathbb{C}$; pourquoi

D_n est-il un polynôme en x ? Quel est son degré ? Calculer D_n à l'aide d'une relation de récurrence.

Planche 19

I) Soit $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ le repère canonique de \mathbb{R}^2 .

Soit Γ la courbe d'équation polaire $r = 1 + \cos(\theta)$.

Soit D une droite variable passant par O , coupant Γ en P et Q . Quel est le lieu des points d'intersection des tangentes à Γ en P et Q ?

II) On définit : $g(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^x - 1} dx$. Domaine de définition de g , continuité de g ? Dérivabilité de g ? Dérivabilité k -ième de g ?

III) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = |i - j|$. Calculer $\det(A)$.

Planche 20

I) On considère le système différentiel suivant : $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + \frac{xy}{a} \\ \frac{dy}{dt} = y - x^2 \end{cases}$

avec $a \neq 0$

1. Trouver une fonction $f(t) > 0$ telle que $ax^2(t) + y^2(t) = Cf^2(t)$ avec C constante.

2. On pose $a = 1$ et $C = c^2$ avec $c > 0$. Montrer que il existe une fonction u de classe \mathcal{C}^1 telle que : $\begin{cases} x(t) = c.f(t) \sin u(t) \\ y(t) = c.f(t) \cos u(t) \end{cases}$

3. Déterminer u . En déduire x et y .

II) Soit $a > b > c > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit la surface S_λ par

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} - 1 = 0.$$

1. De quel type de surface s'agit-il ?

2. Soit $M(x_0, y_0, z_0)$ avec $x_0 y_0 z_0 \neq 0$. Montrer que trois S_λ passent par ce point.

3. À partir des trois valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, déterminer x_0^2, y_0^2 et z_0^2 du point M par lequel passent $S_{\lambda_1}, S_{\lambda_2}$ et S_{λ_3} .

Planche 21

I) Montrer l'existence, l'unicité et le calcul de solutions bornées sur \mathbb{R} vérifiant l'équation $y'' - y = e^{x^2}$.

II) Soit une matrice A telle que $A^2 = A^3$ commutant avec sa transposée. Montrer que $A^2 = A$.

III) Cours : théorème d'inversion locale.

Planche 22

I) On pose $I_n = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(2n+1)t}{1+t^2} dt$. Nature de la série $\{(-1)^n I_n\}$;

rayon de convergence de la série $\{I_n x^n\}$ et équivalent de $\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$

quand x tend vers 1^- .

II) Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E euclidien. Pour $x \in E$, on pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^n (e_k | x) e_k.$$

Montrer que f est défini positif et qu'il existe g défini positif tel que $g^2 = f^{-1}$.

Montrer que $\{g(e_1), \dots, g(e_n)\}$ est une base orthonormale de E .

III) Soit a, b, c trois entiers tels que $ab = c^2$ et $a \wedge b = 1$. Montrer que a et b sont des carrés.

Planche 23

I) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni d'une norme, et on donne une matrice A dont la suite des puissances $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est bornée. On pose alors

$$B_p = \frac{I_n + A + \dots + A^{p-1}}{p} \text{ pour } p \geq 1.$$

Montrer que (B_p) admet une valeur d'adhérence. On en choisit une, notée B . Montrer que $BA = AB = B$ puis que $B^2 = B$.

On note a et b les endomorphismes de \mathbb{R}^n canoniquement associés à A et B . Montrer que $\text{Ker } b = \text{Im}(a - Id)$ et que $\text{Im } b = \text{Ker}(a - Id)$.

Déduire de tout cela que $B_p \rightarrow B$.

II) Étudier $F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{x+t} dt$.

III) Étudier la série de terme général $n^{n^{-\alpha}} - 1$, pour $\alpha > 0$ donné.

Planche 24

I) On donne $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{C}, |a| < 1$. Trouver les applications φ de classe \mathcal{C}^0 par morceaux et 2π -périodiques telles que

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x-t)}{1 - ae^{it}} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n^2}$$

II) \mathbb{R}^n est muni d'une norme N et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme

$$\|M\| = \sup_{X \neq 0} \frac{N(MX)}{N(X)}.$$

Étudier la convergence puis la somme de la série de terme général $a^{n+1} A^n, n \geq 0$, si $a \|A\| < 1$.

III) $E = \mathcal{C}^0([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$g(x) = \int_0^{\pi/2} f(t) \cos(x+t) dt.$$

Montrer que $f \mapsto g$ est un endomorphisme de E . En déterminer image, valeurs propres et vecteurs propres.

Planche 25

- I) Déterminer $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_{-X}^X \frac{1}{x+ia} dx$, où $a \in \mathbb{R}^*$. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-t+ia)(t+ib)} dt$, où $a, b \in \mathbb{R}^*$.
- II) Étudier la convergence simple, la convergence uniforme sur tout compact de \mathbb{R}^* de la série de terme général $\frac{1}{1+n^\alpha x^n}$.

Planche 26

- I) Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1}$ (On pourra introduire une série entière).
- II) Résoudre ${}^t M M^t M = I_n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Planche 27

- I) Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 euclidien. Déterminer une rotation r telle que $r(e_1) = -e_2$ et que $e_1 - e_2 + e_3$ est invariant par r . Quelles sont les caractéristiques de r ?
- II) Montrer que $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\operatorname{ch} t - \cos x} dt$ est bien définie et 2π -périodique sur \mathbb{R} .
- III) Développement en série entière de $f(z) = \frac{\sin x}{z^2 - 2z \cos x + 1}$.

Planche 28

- I) Montrer que $I_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx$.
Calculer I_n et en trouver un équivalent quand n tend vers $+\infty$.
- II) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compact. Est-ce le cas de $O_n(\mathbb{C})$?

Planche 29

- I) Déterminer le domaine de convergence de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\cos 2n \frac{\pi}{3}}$.
puis calculer la somme.
- II) Déterminer $O_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$.