

Concours Communs Polytechniques – option MP

Planche 1

I) Montrer que $\begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ est trigonalisable et préciser la matrice de passage.

II) Montrer que si h est continue et positive sur $[a, b]$, alors $\int_a^b h(t)dt = 0 \Rightarrow h = 0$.

Soient f et g continues sur $[a, b]$, montrer que $\int_a^b f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire.

Planche 2

I) Montrer que dans un espace vectoriel normé complet, une série absolument convergente est convergente.

II) Soit F un sous-espace d'un espace euclidien E de dimension n et p le projecteur orthogonal de E sur F .

Montrer que $F = \{x \in E \mid \|p(x)\| = \|x\|\}$

Montrer que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Montrer que $\forall (x, y) \in E^2, \langle p(x)|y \rangle = \langle x|p(y) \rangle$. Que signifie ce résultat ?

Soient F et G deux sous-espaces de E de projecteurs associés p_F et p_G respectivement, $p_F \circ p_G$ le projecteur orthogonal sur H . Montrer à l'aide des questions précédentes que $F \cap G = H$ et que $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F$.

Planche 3

I) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ est inversible, calculer A^{-1} et en déduire A^n .

II) Ensemble de définition I de $u(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^{1/2} + (k+x)^{7/2}}$.

En écrivant $u(x) = u_1(x) + \sum_{k=2}^n u_k(x)$, montrer que u est \mathcal{C}^1 sur I et que $u(x) \sim \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ en -1 .

Calculer $\int_{-1}^0 u(x)dx$ après avoir montré que u est intégrable sur $[-1, 0]$.

Planche 4

I) Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} ; montrer que si $(f_n(x))$ converge uniformément vers $f(x)$ sur $[a, b]$, alors $\left(\int_a^b f_n\right)$ converge vers $\int_a^b f$.

Montrer que $\int_0^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}$ de deux manières différentes.

II) Montrer qu'un endomorphisme p d'un espace euclidien est un projecteur orthogonal si et seulement si $p^2 = p = p^*$, si et seulement si $p^2 = p$ et $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Planche 5

I) Cours : montrer qu'une série de fonctions normalement convergente est uniformément convergente.

$\sum \frac{n^3}{n!} z^n$ converge-t-elle uniformément sur un disque de centre O et rayon R ?

II) Montrer que deux matrices carrées complexes permutables diagonalisables le sont dans une même base.

Montrer qu'une matrice carrée complexe dont la matrice «partie réelle» et la matrice «partie imaginaire» commutent, est diagonalisable.

Planche 6

I) Cours : étude de $\sum z^n, z \in \mathbb{C}$. Étude de la convergence simple sur \mathbb{R} de $\sum e^{-nx^3}$ et calcul de la somme.

II) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; montrer la convergence de $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k$ et déterminer la limite pour $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Planche 7

I) Montrer que u , endomorphisme d'un espace euclidien vérifiant $(u(x)|u(y)) = (x|y)$ est bijectif.

Montrer que l'ensemble des automorphismes orthogonaux est un groupe pour \circ .

II) Convergence simple et uniforme de la suite de terme général $f_n(x) = \sin^n x \cos x$, pour $x \in \mathbb{R}$.

Planche 8

I) Montrer que l'ensemble E des matrices $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est un sous-anneau et un sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

Montrer que ϕ défini sur \mathbb{C} par $\phi(a+ib) = M_{a,b}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Est-ce un isomorphisme d'anneaux ?

II) Montrer qu'il existe une solution h de $xy'' + y' + y = 0$ développable en série entière et telle que $h(0) = 1$.

Montrer que h ne s'annule qu'une fois sur $]0, 2[$.

Planche 9

- I) Cours : montrer que dans un espace vectoriel normé complet, toute série absolument convergente est convergente.
II) Déterminer le lieu décrit dans \mathbb{R}^2 par $u = 1 + z + z^2$ lorsque z décrit le cercle unité.

Planche 10

- I) $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

- II) Étudier les branches infinies, les variations, la convexité et représenter $f(t) = t - \ln t - \frac{1}{t}$; résoudre $f(t) = 0$.
Trouver les extremums globaux et locaux de $g(x, y) = x \ln y - y \ln x$.

Planche 11

- I) Cours : soit u un endomorphisme d'un espace de dimension n ; montrer λ est valeur propre de u si et seulement si $\det(u - \lambda Id) = 0$; en déduire que u a au plus n valeurs propres distinctes.
Donner un exemple dans \mathbb{R}^2 d'endomorphisme admettant 0 et 1 pour valeurs propres.

- II) Soit f de classe \mathcal{C}^1 , décroissante et positive sur $I = [a, b]$, soit g continue sur I et $G(x) = \int_a^x g(t) dt$.

Montrer que $G([a, b])$ est un intervalle fermé et borné.

Montrer que $\int_a^b f(t)g(t) dt = f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)G(t) dt$ et en déduire $\exists c \in [a, b], \int_a^b f(t)g(t) dt = f(a)G(c)$.

Montrer que $\frac{1}{x^2} \int_{1/x}^1 \frac{\sin t}{t^2} dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Planche 12

- I) Soit $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X], P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.

Montrer que si B est diagonalisable, A l'est aussi et $A = 0$. En déduire une CNS pour que B soit diagonalisable.

- II) Cours : étudier, en redémontrant tous les résultats $\sum z^n$ avec $z \in \mathbb{C}$.

Étudier la convergence simple de la série de fonctions $f_n(x) = e^{-nx}$.

Planche 13

I) Tracer la courbe d'équation $x^2 + 2x + 8y^2 - 4y + 1 = 0$ (on pourra effectuer un changement de repère). Calculer la pente des tangentes aux points d'intersection de la courbe avec (Oy) .

II) Rayon de convergence et domaine réel de convergence de la série $\sum \arctan(n^\alpha)x^n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Planche 14

I) Montrer que la suite de fonctions $f_n = x(1 + n^\alpha e^{-nx})$, définies sur \mathbb{R}_+ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement vers une fonction f à déterminer.

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles il y a convergence uniforme.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}e^{-nx})dx$.

II) Montrer de deux façons différentes que f définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ par $f(P) = P - P'$ est bijective. Pour $Q \in E$, trouver P tel que $Q = P - P'$ (on pourra s'intéresser à $P^{(n+1)}$).

Planche 15

I) Montrer que la convergence normale d'une série de fonctions implique sa convergence uniforme. Exemples :

$\sum \frac{n^2}{(n+1)!} z^n$ et $\sum \frac{n^3}{n!} z^n$ convergent-elles uniformément sur $[0, R]$?

II) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 0$.

Montrer que $\{X = I_n + tA + t^2 \frac{A^2}{2}, t \in \mathbb{R}\}$ forme un groupe pour le produit matriciel. Même question en utilisant $\exp(tA)$.

Généraliser aux matrices nilpotentes.

Planche 16

I) Cours : démonstration du critère de nullité.

Montrer que $(f, g) = \int_a^b fg$ est un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$.

II) Donner l'ensemble de définition D de $f(x, y) = xy(1 - x^2 - 2y^2)^{1/2}$.

Montrer que les solutions de $f(x, y) = 0$ sont la réunion de deux segments et d'une courbe C que l'on précisera.

Montrer que D est une partie fermée bornée de \mathbb{R}^2 et montrer que $D \setminus C$ est un ouvert de \mathbb{R}^2

Étudier les extrémums de f sur D (on pourra montrer que l'on peut se limiter à l'étude sur l'ouvert $U = \{(x_0, y_0), x^2 + 2y^2 < 1\}$).

Planche 17

I) Soit $f(x, y) = (9 - x^2 - y^2)^{1/2}$

Étudier les extrémums de f par la méthode générale des fonctions de plusieurs variables.

Retrouver ce résultat par une méthode géométrique.

II) Soit
$$\left| \begin{array}{l} u : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \longmapsto P(X+1) \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} v : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \longmapsto P(X-1) \end{array} \right|$$

Calculer $\text{rg}(u - v)$ en utilisant sa matrice.

Retrouver ce résultat d'une autre manière.

Planche 18

I) Soit une série de fonctions f_n définies sur $[a, b]$ à valeurs réelles. Montrer que si $(f_n(x))$ converge uniformément vers $f(x)$ alors

$\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$ converge vers $\int_a^b f(x) dx$.

Expliquez pourquoi $\int_0^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$.

II) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 + A + I = 0$. A est-elle diagonalisable sur \mathbb{C} ? Montrer que $\text{rg}(A)$ est pair.

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^3 + B^2 + B = 0$. Déterminer la parité du rang de B .

Planche 19

I) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme associé à A .

Déterminer $\text{Ker}(f)$. f est-elle surjective?

Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$.

II) On pose $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \cos(n\theta)$.

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

Montrer que pour tout $\theta \neq 2k\pi, \sum a_n$ diverge (on pourra factoriser $a_{n+1} - a_{n-1}$).

Planche 20

I) Soit u un endomorphisme d'une espace euclidien E ; montrer que si $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x)|u(y) \rangle = \langle x|y \rangle$, alors u est bijective. Montrer que l'ensemble des endomorphismes orthogonaux est un groupe.

II) Soit f de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$, à valeurs dans \mathbb{R} , telle que $f(0) = f(\pi) = 0$ et $\int_0^\pi (f'(x))^2 dx = \frac{\pi}{2}$.

Montrer qu'il existe une suite (u_n) telle que $\sum u_n \sin(nx) = f(x)$ pour tout $x \in [0, \pi]$.

Montrer que $\sum (nu_n)^2 = 1$.

Planche 21

I) Étude de la courbe paramétrée par $x(u) = \frac{u-1}{u}, y(u) = \frac{u^2}{u+1}$.

II) Quelles sont les fonctions continues f telles que :

$$f(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)f(t) dt ?$$

Planche 22

Soit f l'endomorphisme de transposition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tel que $f(A) = {}^t A$. Est-ce un endomorphisme diagonalisable ? Valeurs propres, vecteurs propres et dimensions des sous-espaces propres ?

Planche 23

I) Montrer que toute matrice carrée de rang 2 sur un corps K peut s'écrire sous la forme $A {}^t F + B {}^t G$, où $\{A, B\}$ et $\{F, G\}$ sont deux familles libres de vecteurs-colonnes. Appliquer cela à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (0) & \\ 1 & & \end{pmatrix}$.

II) Soit l'application 2π -périodique telle que $f(x) = 0$ si $x \in [-\pi, 0[$ et $f(x) = x$ si $x \in [0, \pi[$

Étudier la nature de la convergence de la série de Fourier de f .

Déterminer cette série.

Planche 24

I) Montrer que dans un espace vectoriel euclidien complet, toute série absolument convergente est convergente.

II) Soient a, b, c, d quatre nombres complexes avec $a^2 + b^2 \neq 0$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$

Calculer $A^t A$, $\det(A)$ et montrer que $\text{rg}(A) = 2$ ou 4 .

On pose $\alpha^2 = b^2 + c^2 + d^2$ supposé non nul. Montrer que A est diagonalisable.

Planche 25

I) Soit (a_n) une suite réelle telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existe.

Montrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^{n-1}$ ont même rayon de convergence R et montrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est dérivable sur $] -R, R[$.

II) Soit A un anneau dont aucun élément (non nul) n'est diviseur de 0. On suppose que A est aussi un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

En utilisant les applications $L_a : x \mapsto ax$ et $R_a : x \mapsto xa$, montrer que A est un corps.

Planche 26

I) Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n , soit f un endomorphisme de E .

Montrer que $\{Id, f, f^2, \dots, f^{n^2}\}$ est une famille liée, et en déduire qu'il existe un polynôme annulateur non nul de f .

Soit λ une valeur propre de f , soit P un annulateur de f . Montrer que $P(\lambda) = 0$.

II) Soit (a_n) une suite définie par $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$.

Étudier les variations de la suite (a_n) . La suite est-elle convergente ?

Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$?

Nature de la série $\sum a_n x^n$ pour $x = \pm R$? (on étudiera la suite $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$, et on admettra que si une suite (b_k) a une limite b , alors la

suite (c_n) , $c_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k$, converge aussi vers b).

Planche 27

I) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \cos t$ par la méthode de variation des constantes.

II) Soit E un espace euclidien, u et v deux endomorphismes de E .

Montrer que $u^* \circ u$ est auto-adjoint et que ses valeurs propres sont positives.

Soit λ_{\min} et λ_{\max} les plus petite et plus grande valeurs propres de $u^* \circ u$. Montrer que, pour tout $x \in E$, $\lambda_{\min} \|x\|^2 \leq \|u(x)\|^2 \leq \lambda_{\max} \|x\|^2$.

Soit μ_{\min} et μ_{\max} les plus petite et plus grande valeurs propres de $v^* \circ v$. Montrer que, pour toute valeur propre réelle α de $v \circ u$, on a $\lambda_{\min} \mu_{\min} \leq \alpha^2 \leq \lambda_{\max} \mu_{\max}$.

Planche 28

I) Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles à termes positifs. Montrer que, si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

Étudier l'absolue convergence de la série $\sum \frac{(i-1) \sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n}-1}$.

II) Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{-2, 2\}$. Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = a \\ u_n = au_{n-1} - u_{n-2} \end{cases}$$

Soit (X_n) la suite de matrice colonnes définie par :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Déterminer $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

Calculer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A et exprimer u_n en fonction de λ_1 , λ_2 et n .

Planche 29

I) Soit $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive.

Montrer que $\int_a^b h(x) dx = 0 \implies h = 0$.

Montrer que l'application $(f, g) \mapsto \int_a^b f(x)g(x) dx$ est un produit scalaire sur $C([a, b], \mathbb{R})$.

II) On pose $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin(x)$.

Quel est le domaine de définition de f ?

Montrer que f est solution d'une équation différentielle du premier ordre.

En déduire que f est développable en série entière, préciser le rayon de convergence.

Planche 30

I) On pose $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$

Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .

Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de \mathbb{R}^2 .

II) Soit E un K -espace vectoriel, u et v deux endomorphismes de E , et $\lambda \in K$, non nul.

Montrer que λ est valeur propre de $u \circ v$ si et seulement si λ est valeur propre de $v \circ u$.

Déterminer $\text{Ker}(v \circ u)$ et $\text{Ker}(u \circ v)$ dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}[X]$ et où u et v sont définis par : $u(P) = P'$ et $v(P)(x) = \int_0^x P(t)dt$.

Montrer que l'équivalence :

0 est valeur propre de $u \circ v \Leftrightarrow 0$ est valeur propre de $v \circ u$

est vraie pour tout couple d'endomorphismes u et v de E si et seulement si E est de dimension finie.

Planche 31

I) Soit E un espace euclidien, u un endomorphisme de E , B une base orthonormale de E et A la matrice de u dans cette base.

Montrer l'équivalence des 3 propriétés suivantes :

(i) u est orthogonal (ii) ${}^tAA = I_n$

(iii) A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$.

II) Étudier les extrema de $(x, y) \mapsto f(x, y) = (x^2 + y^2) \exp(x^2 + y^2)$.

Question supplémentaire posée en cours d'Oral : que peut-on dire d'une fonction continue sur un compact de \mathbb{R}^2 ? démontrer le théorème : si f est continue et K compact, alors $f(K)$ est compact.

Planche 32

I) Soit $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive.

Montrer que $\int_a^b h(x)dx = 0 \implies h = 0$.

Montrer que l'application $(f, g) \mapsto \int_a^b f(x)g(x)dx$ est un produit scalaire sur $C([a, b], \mathbb{R})$.

II) Soit p un nombre premier, $p > 3$. Montrer que 12 divise $p^2 - 1$.

Planche 33

I) Soit E un espace euclidien, soit A un sous-espace vectoriel de E .

Montrer que A et son orthogonal A^\perp sont en somme directe.

Montrer que l'orthogonal de l'orthogonal de A est égal à A .

II) Rappeler le domaine de définition de la fonction Gamma.

Calculer l'intégrale $I_{n,p}(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^p dt$.

Expliquer rapidement pourquoi $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ converge vers $\exp(-t)$ et montrer que $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

Planche 34

I) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$.

M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

II) Soit f de classe C^2 sur $[0, +\infty[$ telle que f'' est intégrable sur $[0, +\infty[$ et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ soit convergente.

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Étudier les séries $\sum f(n)$ et $\sum f'(n)$.

Planche 35

I) Montrer que $A = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & -9 \end{pmatrix}$ est inversible et en déterminer l'inverse. En déduire une expression de A^n en fonction de n .

II) Pour $\alpha \in]-1, 1[$, on donne l'équation fonctionnelle (E) :

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1-x)f(\alpha x)$, avec f continue.

Montrer que deux solutions f et g de (E) vérifiant $f(0) = g(0)$ sont égales.

Montrer que les solutions de (E) sont développables en série entière dans un intervalle que l'on précisera.

Planche 36

I) Montrer que, si $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ admet une limite, alors les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^{n-1}$ ont même rayon de convergence R .

II) Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n , un vecteur x de E et f un endomorphisme de E . On note $I_x = \{P \in \mathbb{C}[X], P(f)(x) = 0\}$ et $E_x = \{P(f)(x), P \in \mathbb{C}[X]\}$.

Quelle est la structure de ces ensembles ? On suppose f diagonalisable. Montrer qu'il existe un entier r et des vecteurs x_1, \dots, x_r tels que

$$E = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} E_{x_i}.$$

Planche 37

I) $E = \mathbb{R}_n[X]$, $f : E \rightarrow E, P \mapsto P - P'$.

Montrer que f est bijectif d'abord sans utiliser la matrice de f ensuite en l'utilisant.

Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, trouver P tel que $Q = P - P'$. Montrer que $P^{(n+1)} = 0$.

II) $w_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}$.

Montrer que $0 \leq w_n \leq \frac{1}{n}$.

Nature de $\sum u_n$ où $u_n = \sin(2n!\pi e)$.

Nature de $\sum v_n$ où $v_n = \sin(n!\pi e)$.

Planche 38

I) Montrer que si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{j^n n^3}{n^3 + 1} z^n$ où $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

II) Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ fixé et f l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$ par $f(v) = u \circ v$.

Montrer que si λ est valeur propre de u , c'est une valeur propre de f .

On note E_λ le sous-espace propre de u associé à λ et F_λ le sous-espace propre de f associé à λ . Montrer que $\dim F_\lambda = n \dim E_\lambda$.

Montrer que si u est diagonalisable, f est diagonalisable.

Montrer que u et f ont le même polynôme minimal.

Planche 39

I) Soit E un espace euclidien, e une base orthonormale de E , u un endomorphisme de E et A sa matrice dans la base e . Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

u est un automorphisme orthogonal de E ;

${}^tAA = I_n$ où n est la dimension de E ;

A est inversible d'inverse sa transposée.

II) Soit a un nombre réel non entier.

Développer en série de Fourier la fonction 2π -périodique définie sur $] -\pi, \pi]$ par $f(x) = \cos(ax)$.

Que dire de la convergence de cette série ?

Montrer que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \cotan t = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - \pi^2 n^2}$.

Planche 40

I) Étude de la courbe paramétrée $\begin{cases} x = e^{t-1} - t \\ y = t^3 - 3t \end{cases}$; en particulier, nature du point stationnaire.

II) Étudier les extrema locaux de $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Des considérations géométriques pouvaient-elles permettre d'obtenir ces résultats ?

Planche 41

I) Soit E un K -espace vectoriel, f un endomorphisme de E et P et Q deux polynômes premiers entre eux.

Montrer le lemme des noyaux pour ces données.

On suppose que $P(f) = 0$. L'endomorphisme $Q(f)$ est-il un automorphisme de E ?

Montrer que, si f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, alors f est diagonalisable.

II) Soit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

La fonction f est-elle continue ? de classe \mathcal{C}^1 ? de classe \mathcal{C}^2 ?

Planche 42

I) Montrer que $u_n \sim v_n \Rightarrow \exists n_0, \forall n \geq n_0, u_n$ et v_n sont de même signe.

Quel est le signe de $u_n = \operatorname{sh} \frac{1}{n} - \tan \frac{1}{n}$ au voisinage de $+\infty$?

II) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$.

Planche 43

I) Décomposer $f(x) = \frac{1}{-x^2 + x + 2}$ en éléments simples.

La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ? Si oui, donner le terme général et le rayon de convergence .

Donner le développement limité d'ordre 3 de f en 0.

II) Soit E un K -espace vectoriel et f un endomorphisme de E . On suppose qu'il existe une base (e_1, \dots, e_n) de E telle que les vecteurs $f(e_k)$ soient tous égaux (on note v la valeur commune). L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Planche 44

I) Résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation différentielle $y' - \frac{x}{x^2 - 1} y = 2x$.

II) On considère le système $\begin{pmatrix} a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ \vdots \\ b^{n-1} \end{pmatrix}$.

Montrer que le déterminant du système vaut $(a + n - 1)(a - 1)^{n-1}$.

Résoudre le système en discutant suivant b si $a = 1$ ou $a = -n + 1$.

Dans le cas général, on pourra introduire $s = x_1 + \dots + x_n$.

Planche 45

I) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = 0$ si $x \in [-\pi, 0[$ et $f(x) = 1$ si $x \in [0, \pi[$.

La fonction f est-elle somme de sa série de Fourier ?

Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f .

II) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . Soit P un polynôme.

Montrer que, si x est une valeur propre de u , alors $P(x)$ est une valeur propre de $P(u)$.

Montrer que, si u est diagonalisable, alors $P(u)$ aussi. La réciproque est-elle vraie ?

Planche 46

I) Soit une suite (a_n) de nombres complexes non nuls au moins à partir d'un certain rang. On suppose que la suite $\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ converge.

Montrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^{n-1}$ ont le même rayon de convergence noté R dans la suite.

Montrer que la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ est dérivable sur l'intervalle $] - R, R[$.

II) Soit $z \in \mathbb{C}$. On dit que z est algébrique s'il existe un polynôme unitaire P à coefficients entiers tel que $P(z) = 0$.

Montrer que, si $z \in \mathbb{Q}$ est algébrique, alors z est entier.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que les valeurs propres de A sont des nombres algébriques.

Soit z un nombre algébrique. Montrer que il existe une matrice à coefficients entiers dont z est valeur propre.

Planche 47

I) Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E .

Montrer que la famille $(Id_E, f, f^2, \dots, f^{n^2})$ est liée. En déduire l'existence d'un polynôme P non nul tel que $P(f) = 0$.

Soit P un polynôme tel que $P(f) = 0$ et y une valeur propre de f . Montrer que $P(y) = 0$.

II) Limite quand n tend vers $+\infty$ de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin \frac{k}{n}$.

Limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2} \sin \frac{k}{n}$.

Planche 48

I) Soit E un espace euclidien, e une base orthonormale de E , u un endomorphisme de E et A sa matrice dans la base e . Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

u est un automorphisme orthogonal de E ;

${}^tAA = I_n$ où n est la dimension de E ;

A est inversible d'inverse sa transposée.

II) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ si $x \in]0, 2\pi[$ et $f(0) = 0$ sinon.

Montrer que la fonction f est somme de sa série de Fourier ?

Calculer les coefficients de Fourier de f .

En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Planche 49

I) Soit deux suites de réels positifs (u_n) et (v_n) telles que $u_n \sim v_n$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. Étudier la convergence de la série de terme général $\frac{i-1}{\sqrt{n}(1-n)}$.

II) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que A^2 soit diagonalisable et $\text{Ker } A = \text{Ker } A^2$. Trouver un polynôme annulateur de A . Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker } A = \text{Ker } A^2$.

Planche 50

I) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue positive telle que $\int_a^b f(t)dt = 0$. Montrer que $f = 0$.

Application : montrer que $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire de l'espace $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

II) Soit deux suites de réels (u_n) et (v_n) telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}.$$

Calculer les sommes des séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n}{n!} x^n$.

Planche 51

I) On note $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ et E l'ensemble des $M(a, b)$ quand a et b varient.

Montrer que E est un sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et aussi un sous-anneau. Quelle est la dimension de E ?

On définit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(a + ib) = M(a, b)$ pour $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Est-ce un isomorphisme d'anneaux ?

II) Existence de $J_n = \int_0^{+\infty} \sin^{2n} te^{-t} dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Convergence de la suite (J_n) ? Trouver la limite de la suite (J_n) .

Planche 52

I) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \cos(x)$ à l'aide de la méthode de variation des constantes.

II) Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Calculer le polynôme caractéristique de A . Condition pour que A soit diagonalisable.

Planche 53

I) Le plan euclidien est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Représenter la courbe d'équation cartésienne $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 1 = 0$. On pourra faire un changement de repère.

Déterminer une équation de la tangente au point de la courbe et de l'axe des ordonnées.

II) Développement en série entière de la fonction Arctangente ?

Étudier la continuité de la somme de la série entière sur $[0, 1]$.

En déduire la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Planche 54

I) Rayon de convergence des séries entières suivantes :

$\sum n^a x^n$ où a est un réel donné ; $\sum \cos \frac{2n\pi}{3} x^n$.

II) Matrice dans la base canonique de la projection de \mathbb{R}^3 sur le plan d'équation $x + y + z = 0$ parallèlement à la droite d'équations

$$x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

Planche 55

I) Étude de la somme de la série de fonctions d'une variable réelle de terme général $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2 + 1}$: domaine de définition, continuité, dérivabilité.

II) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On note A la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$. Étudier la diagonalisabilité de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.