Concours Commun Centrale-Supélec -option MP

Planche 1

Soit $f(t) = \int_0^{\pi/2} \ln(t^2 - \sin^2 x)\mathrm{d}x$.
Calculer $f'(t)$ pour $t > 1$.
Donner le domaine de définition de f.
Calculer f et sa limite en 1.
Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Planche 2

I) Soit A une matrice carrée d'ordre n de rang r. À quelle(s) condition(s) existe-t-il une matrice carrée B telle que $ABAB = 0$ et $BABA \neq 0$?
II) Soit $(u, v) \in \mathbb{N}^2$, tels que $\exists (w, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $uv = w^n$, $u \wedge v = 1$.
Montrer que $\exists (a, b) \in \mathbb{N}$, $u = a^n$, $v = b^n$.
Existe-t-il $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x(x + 1) = y^n$?

Planche 3

Étudier la suite et la série de terme général $u_n = \int_0^1 (t^2 - t + 1)^n \mathrm{d}t$, puis étudier la série de terme général $(-1)^n u_n$.
Déterminer le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$.
Pour $|\,x\,| < 1$, est-il possible d'exprimer cette série entière en fonction d'une intégrale ? Cette intégrale est-elle continue sur $[-1, 0]$? Que vaut-elle en -1 ? Montrer que $\sum u_n x^n$ est continue sur $[-1, 0]$.

Planche 4

Soient 4 matrices carrées complexes A, B, C, D vérifiant $C^tD = D^tC$.
Poue D inversible, à l'aide du produit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tD & 0 \\ -{}^tC & D^{-1} \end{pmatrix}$, montrer que $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(A^tD - B^tC)$.

Étendre ce résultat au cas où D n'est pas inversible.

Planche 5

Existence de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^{xt} - 1}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.
Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et qu'elle peut s'écrire sous la forme d'une série de fonctions.
Pour x fixé, comparer f et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2 x^2}$ et en déduire un équivalent de f en 0.

Planche 6

I) Montrer qu'il n'existe pas de quadruplet $(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4$, tel que $x^2 + y^2 + z^2 = (8t + 7)4^n$ (on pourra étudier d'abord le cas $n = 0$).
II) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que pour tout P non constant de $\mathbb{C}[X]$, l'équation $P(M) = A$ admet au moins une solution.

Planche 7

Trouver les solutions développables en série entière de l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$.
Préciser la solution J telle que $J(0) = 1$.
Montrer que $J(x) = \dfrac{1}{r} \displaystyle\int_0^r \cos(x \sin\theta)\mathrm{d}\theta$.
Soit f développable en série entière ; montrer qu'il existe des solutions de $xy'' + y' + xy = f(x)$ développables en série entière. Montrer qu'elles sont de la forme $\phi_1(x) + \phi_2(x)$ où ϕ_1 est fonction de ln et ϕ_2 développable en série entière.

Planche 8

Soient x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$; calculer $S = \dfrac{x_1}{x_2 + x_3} + \dfrac{x_2}{x_1 + x_3} + \dfrac{x_3}{x_2 + x_1}\cdot$

Planche 9

Discuter, selon les valeurs de x et $\alpha \notin \mathbb{N}^*$, de la nature de la série de terme général $u_n(x) = \dfrac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{(1+\alpha)\ldots(2n-1+\alpha)}\,x^n$.
Donner les α tels que $\sum u_n$ converge uniformement sur $[0, 1]$.
Donner les α tels que $\sum u_n$ converge uniformement sur $[-1, 0]$.

Planche 10

Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ $(r \geqslant 2)$ dont tous les coefficients sont strictement positifs et vérifient $\forall i \in [1, r]$, $\sum_{j=1}^{r} m_{ij} = 1$. On veut montrer que la suite (M^n) converge vers $L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & \dots & L_r \\ L_1 & L_2 & \dots & L_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_1 & L_2 & \dots & L_r \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $d = \min_{1 \leqslant i,j \leqslant r} m_{ij} \in]0, \frac{1}{2}]$.

2. Soit $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$; on note :

$$\min Z = \min_{i \in [1,r]} z_i \text{ et } \max Z = \max_{i \in [1,r]} z_i.$$

On suppose que $\min Z \geqslant 0$; montrer que $\min(MZ) \geqslant d \max Z$.
Montrer que $0 \leqslant \max(MY) - \min(MY) \leqslant (1 - 2d)(\max Y - \min Y)$.

3. On note $m_{ij}(n)$ les coefficients de M^n. Montrer que $\sum_{j=1}^{r} m_{ij}(n) = 1$ et que $0 \leqslant \max(M^n Y) - \min(M^n Y) \leqslant (1 - 2d)^n (\max Y - \min Y)$.

Appliquer ce résultat à un Y judicieusement choisi pour conclure.
Aurait-on pu se contenter de l'hypothèse plus faible $m_{ij} \geqslant 0$?

Planche 11

1. Montrer que les suites $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$ sont adjacentes, puis en déduire, en raisonnant par l'absurde, que e est irrationnel.

2. Soit $I_f(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{t-u} f(u) \mathrm{d}u$ où f est une fonction polynômiale de degré n.

Montrer que $I - f(t) = \mathrm{e}^t \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(t)$.

3. On considère les entiers $a_0, a_1, \dots, a_n$ vérifiant $a_0 \neq 0$ et $a_0 + a_1 e + \dots + a_n \mathrm{e}^n = 0$. On pose $f(x) = x^{p-1}(x-1)^p \dots (x-n)^p$, $J = a_0 I_f(0) + \dots + a_n I_f(n)$.

Montrer que J est entier et que pour p suffisamment grand $(p-1)!$ divise J mais pas $p!$.
Montrer qu'il existe c indépendant de p tel que $|\,J\,| < c^p$.
Aboutir à une absurdité.

Planche 12

Montrer que le sous-anneau engendré par $\mathbb{Z} \cup \{\sqrt{2}\}$ est l'ensemble $A = \{m + n\sqrt{2}, (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}$.
On note U l'ensemble des éléments inversibles de A.
Soit $N(m + n\sqrt{2}) = m^2 - 2n^2$. Montrer que $z \in U \Leftrightarrow N(z) = 1$.
Exprimer tout élément z de U, en discutant selon les cas, en fonction d'élements de $V = \{a + b\sqrt{2} \in U \setminus a > 0,\, b > 0\}$.
Déterminer $t_0 = \inf V$ et montrer que $t_0 \in V$.
Montrer que $V = \{t_0^n,\, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Planche 13

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{n+k}$ converge vers l.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que $f(0) = 0$, Montrer que la suite de terme général $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{np} f\left(\frac{1}{n+k}\right)$ converge et exprimer sa limite en fonction de l.
Calculer l à partir des question précédentes pour $f(x) = \ln(1+x)$.
On suppose seulement que f est continue et $f(0) = 0$; trouver un exemple de fonction f telle que (v_n) diverge.
Trouver un équivalent de v_n quand on suppose f de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$ et $f''(0) \neq 0$.

Planche 14

Soient A et B données dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\phi_{A,B}(X) = AX - XB$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et supposée diagonalisable. Soit (X_i) une base de diagonalisation de $\phi_{A,B}$ et e un vecteur propre de B.
Montrer que A est diagonalisable en considérant $\big(X_i(e)\big)$, puis montrer qua B l'est aussi.
Montrer que si A et B sont diagonalisables $\phi_{A,B}$ l'est aussi, donner les vecteurs propres, les valeurs propres et leur ordre de multiplicité.

Planche 15

Calculer le polynôme minimal et donner les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 2 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que le polynôme caractéristique est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
Trouver les sous-espaces stables de $\mathbb{Q}^n$.

Planche 16

I) Montrer qu'il existe un polynôme B_n tel que :
$u^{(n)}(x) = \left(\mathrm{e}^{x^2/2}\right)^{(n)} = B_n(x)u(x)$ et vérifiant :
$B_{n+2} = xB_{n+1} + (n+1)B_n$; $B'_n = nB_{n-1}$; $B''_n + xB'_n - nB_n = 0$.
À l'aide de Maple, calculer B_1, B_2, B_3, B_4 et donner une résolution graphique.
Trouver une équation différentielle vérifiée par $T_n(x) = B_n(x)\mathrm{e}^{x^2/4}$.
II) Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,T]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telle que $\exists\beta \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [0,T]$, $f''(x) \leqslant \beta^2 f(x)$. On suppose $f'(0) = 0$; montrer que $\forall x \in [0,T]$, $f(x) \leqslant f(0)\,\mathrm{ch}(\beta x)$.

Planche 17

Soit u un automorphisme d'un espace euclidien E ; montrer que $v = u^*u$ est autoadjoint défini positif.
Montrer qu'il existe w autoadjoint positif tel que $v = w^2$, et ρ orthogonal tel que $u = \rho w$. Montrer qu'une telle décomposition de u est unique. Comment interpréter ces résultats de façon matricielle ?

Planche 18

Soit (x_k) une suite de $[0,1]$ équirépartie :
$\forall [a,b] \subset [0,1]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\,\mathrm{card}\{k \in \mathbb{N} \setminus x_k \in [a,b]\} = b - a$.

Montrer que $\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Pour $f(t)=\mathrm{e}^{-t^2}$, créer, à l'aide de Maple, un programme calculant $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$.

Créer un programme qui réalise la méthode des rectangles.
Comparer ces deux programmes avec la valeur donnée par Maple.
Adapter la méthode aléatoire au calcul de :
$\displaystyle\iint_{[0,1]^2} \cos(xy)\exp(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Planche 19

Soit $X=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$, montrer que la forme quadratique $q(X)=\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{x_ix_j}{a_i+a_j}$ où les a_i sont des réels strictement positifs distincts, est définie positive.

Planche 20

Montrer qu'il existe une unique fonction f réelle, paire et 2π-périodique, telle que $f(t)=\cos t$ sur $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ et $f(t)=0$ sur $]\dfrac{\pi}{2},\pi]$.
Calculer les coefficients de Fourier de f et étudier la convergence de sa série de Fourier.
Existe-t-il une solution 2π-périodique de l'équation $y''-y=f$?

Planche 21

Montrer que $\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{41}{81}\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)^{1/3}+\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{41}{81}\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)^{1/3}$ est un rationnel. On conseille d'effectuer les calculs formels avec Maple.

Planche 22

Montrer qu'une matrice carrée a même spectre que sa transposée.
Soit $(A,C)\in\mathcal{M}_n(K)^2$ et λ un scalaire.
Montrer que $AC=\lambda C\Leftrightarrow \mathrm{Im}\, C\subset \mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)$.
Soit A, $B\in\mathcal{M}_n(K)$ et $\lambda\in Sp(A)\cap Sp(B)$.
Montrer qu'il existe $C\in\mathcal{M}_n(K)$, avec $C\neq 0$ et $AC=CB=\lambda C$.
Soit A, B, $C\in\mathcal{M}_n(K)$ telles que $AC=CB$ et $\mathrm{rg}\, C\geqslant 1$.
Montrer que $\chi_{A}\wedge\chi_{B}$ est de degré $\geqslant r$.
Inversement, soit A, $B\in\mathcal{M}_n(K)$ telles que $\chi_{A}\wedge\chi_{B}$ soit de degré $r\geqslant 1$. Existe-t-il $C\in\mathcal{M}_n(K)$ de rang r telle que $AC=CB$?

Planche 23

Pour $a \in]0,1[$ et x réel, on pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - a e^x$. Combien f_n a-t-elle de zéros dans $\mathbb{R}$? Én étudier le comportement quand $n \to +\infty$.
On pourra utiliser Maple pour formuler une hypothèse.

Planche 24

I) Soit V et W deux sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ tels que $\dim V + \dim W > n$. Montrer que $\dim V \cap W \geqslant 1$.
II) Soit $S = AC^tCA$ une matrice réelle symétrique, de polynôme caractéristique $\Pi(\lambda_i - X)$, avec $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$.
On suppose que le polynôme caractéristique de A est de la forme $\Pi(\mu_k - X)$, avec $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_{n-1}$.
Soit $X =^t (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(A - \mu_i I_{n-1})$; on pose alors $\tilde{X} =^t (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que ${}^t\tilde{X}S\tilde{X} \leqslant \mu_k \left\| \tilde{X} \right\|^2$.
Soit $Y \in \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(S - \lambda_i I_n)$. Montrer que ${}^tYSY \geqslant \lambda_k \| Y \|^2$.
En conclure que $\lambda_k \leqslant \mu_k$.
Montrer que $\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \mu_{n-1}$.
III) Pour quelles valeurs de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ ax + by + cz = 1 \end{cases}$$

définit-il une parabole ?

Planche 25

On définit f, une fonction paire et périodique de période 2π, par :

$$\begin{cases} x \in [0, \frac{\pi}{4}] \longmapsto \frac{1}{\cos x} \\ x \in]\frac{\pi}{4}, \pi] \longmapsto 0 \end{cases}$$

Préciser en quels points $f(x)$ est somme de sa série de Fourier.
Calculer $a_0(f)$. Montrer que $a_{n-2}(f) + a_n(f)$ est de la forme $\frac{c}{n-1} \sin(n-1)\frac{\pi}{4}$, où c est à déterminer.
Montrer que $s = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} \ldots$ a un sens.
En quels points de $[0, \pi]$ a-t-o l'égalité suivante :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\,\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}=\int_0^x\frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t\,?$$

Planche 26

I) Trouver les solutions développables en série entière de l'équation différentielle $xy''+2y'+xy=0$.

Résoudre cette équation en utilisant $y=z\,\dfrac{\sin(x)}{x}\cdot$

II) pour $x\in\mathbb{R}$, étudier la convergence de la série de terme général $W_n(x)=\left[\displaystyle\int_{]0,1[}(1-t^2)^n\right]x^n\mathrm{d}t$.

Planche 27

Soit E l'ensemble des polynômes complexes de degré inférieur ou égal à $2n$. Soient a, b et c 3 complexes avec $a\neq b$.
Soit $u(P)(x)=(x-a)(x-b)P'(x)-[2n+n(a+b)+c]P(x)$
Montrer que u est un endomorphisme de E.
Trouvez les éléments propres de u (on pourra décomposer $\dfrac{P'}{P}$ en éléments simple dans le cas général).

Planche 28

I) Soit E un espace vectoriel normé. Donner la définition et les propriétés générales de la norme subordonnée d'un endomorphisme.
Soit à présent un espace euclidien E.
Montrer que $|||\,u\,|||=\sup\limits_{\|\,x\,\|=\|\,y\,\|\leqslant 1}|\,(u(x)|y)\,|$.
En déduire que $|||\,u\,|||=|||\,u^*\,|||$
En déduire aussi que $|||\,u\circ u^*\,|||=|||\,u^*\circ u\,|||=|||\,u\,|||.|||\,u\,|||$
II) Cours : identité du parallélogramme : énoncé, démonstration et explication de la terminologie.

Planche 29

Domaine de définition de la série de terme général $\ln(1+x^n)$.
Soit $a\in[0,1]$ et $I(a)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\ln(1+a^t)\mathrm{d}t$.
Développer I sous la forme d'une somme.
Donner un équivalent de la série de la première question quand x tend vers 1.
Donner un équivalent de la série de la première question quand x tend vers 0.

Planche 30

(avec l'ordinateur) Soit $f(x) = \sup \lim_{t\in[0,\pi]} |\sin t - xt|$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f admet un minimum.
3. Montrer que $f\left(\frac{2}{\pi}\right) < f(1)$.
4. Représenter graphiquement f.

Planche 31

I) Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$. On note $A(K)$ l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(K) \subset K$ et $B(K)$ l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(K) = K$.
1. Montrer que $A(K) = K[X]$.
2. Déterminer $B(\mathbb{C})$, $B(\mathbb{R})$, $B(\mathbb{Q})$.
II) Cours : démonstration du théorème spectral, dans les grandes lignes.

Planche 32

I) Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}\cdot$
1. Donner un équivalent simple de u_n.
2. Étudier la série $\sum u_n$: convergence, somme ?
II) Soit un entier p fixé et $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+p)!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$. Étudier la nature de la série $\sum u_n$.

Planche 33

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, et a et b deux entiers relatifs, avec $b > 0$ et $\sqrt{b}$ irrationnel.
1. Exemple : montrer que $\sqrt{6}$ est irrationnel.
2. Quelle est la forme de $(a + \sqrt{b})^n$?
3. Montrer que si $a + \sqrt{b}$ est racine de P alors $a - \sqrt{b}$ aussi.
4. On suppose que $a + \sqrt{b}$ est racine double de P. Montrer que $P = R.Q^2$ avec R et Q dans $\mathbb{Z}[X]$.

Planche 34

I) Résoudre $y'(x) = \dfrac{\tan y(x)}{x}$ avec $y(1) = 1$.
Trouver toutes les solutions maximales du système et les tracer.
II) Cours : énoncer le théorème de Cauchy.

Planche 35

1. Soient deux matrices A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que pour toute matrice M on ait $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$ (polynôme caractéristique). Montrer que B est nilpotente.
Vérifier que $\mathrm{tr}((AM+B)^2) = \mathrm{tr}((AM)^2)$ en déduire que $BA = 0$.
2. Réciproque :
montrer que si $BA = 0$ et B nilpotente, $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.

Planche 36

Soit $I_a(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t \arctan \frac{1}{t}}{(x^2+t^2)^a} \, \mathrm{d}t$.
Pour quels a I_a est-elle définie sur $\mathbb{R}_+^*$? Calculer I_2.
Limites de I_1 en 0 et $+\infty$. Dérivabilité de I_1. Calculer I_1.

Planche 37

Soit un groupe $(G, .)$ d'ordre n, de neutre e, et p un nombre premier divisant n.
Soit E l'ensemble des p-uplets $X = (x_1, \ldots, x_p)$ d'éléments de G tels que $x_1 x_2 \ldots x_p = e$. Sur E on définit la relation $\mathcal{R}$ par :
$X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow \exists k \in [1, p] \ / \ (y_1, \ldots, y_p) = (x_k, x_{k+1}, \ldots, x_p, x_1, \ldots, x_{k-1})$
1. Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que les classes d'équivalence possèdent 1 ou p éléments.
3. Soit r le nombre de classes à 1 élément, et s le nombre de classes à p éléments. Montrer que $n^{p-1} = r + sp$.
4. Montrer que le nombre de solutions de l'équation $x^p = e$ dans G est un multiple de p.
5. Trouver un exemple de groupe $(G, .)$ satisfaisant aux conditions précédentes et tel que le nombre de solutions de l'équation $x^p = e$ ne soit pas égal à p.

Planche 38

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(n)\operatorname{ch}(n+x)}$.

Déterminer l'intervalle I de définition de f. Étudier la continuité de f. Variations de f. Limites aux bornes (utiliser des tangentes hyperboliques).

Planche 39

I) Soit N une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}^+$, positivement homogène, sous-additive, telle que $N(AB) = N(BA)$ pour tout couple de matrices.

Calculer $N(A_{i,j})$, où $A_{i,j}$ est une matrice élémentaire avec $i \neq j$.

Prouver par récurrence sur n qu'une matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle et en déduire $N(A)$ si $\operatorname{tr}(A) = 0$.

Prouver qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que N soit de la forme $A \longmapsto a|\operatorname{tr}(A)|$. *Indication : quelle matrice de trace nulle peut-on associer de façon simple à A quelconque ?*

II) Soit, dans un plan affine euclidien orienté identifié à $\mathbb{C}$, un triangle ABC dont les sommets ont pour affixes a, b et c.

Exprimer $(b-a)\overline{c} + (c-b)\overline{a} + (a-c)\overline{b}$ à l'aide notamment de l'aire S du triangle.

Planche 40

Domaine de définition, continuité, dérivabilité, variations, branches infinies, représentation graphique de $x \longmapsto \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{|t|}}\,\mathrm{d}t$.

Planche 41

I) Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme antisymétrique tel que $u^2 = -\operatorname{Id}$.

Montrer que E est de dimension paire, notée désormais $2p$.

Montrer qu'il existe un sous-espace V de dimension p tel que $E = V^\perp \oplus u(V)$.

De quelle forme est la matrice de u relativement à une base orthonormale adaptée à une telle décomposition ?

Soit E un espace réel et u un endomorphisme tel que $u^2 = -\operatorname{Id}$. Montrer qu'il existe un produit scalaire sur E tel que u soit antisymétrique.

II) Soit un triangle ABC d'un plan affine euclidien. Les bissectrices de l'angle $\widehat{C}$ coupent la droite (AB) en I et J. Si O est le milieu de $[AB]$, exprimer $(\vec{OI}|\vec{OJ}$ en fonction de $\| AB \|$.

Planche 42

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul. Calculer, lorsqu'elle a un sens, l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{P'(\mathrm{e}^{it})}{P(\mathrm{e}^{it})}\,\mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t$.

Planche 43

I) Déterminer les quadriques contenant la courbe paramétrée par $t \mapsto (\cos^2 t, \cos t \sin t, \cos t)$.
Parmi celles-ci, lesquelles sont de révolution ?
II) Dans un plan euclidien, on donne une droite (D) et deux points distincts M, $M' \notin (D)$.
Existe-t-il un cercle passant par M et M' et tangent à (D) ?

Planche 44

I) Soit un anneau intègre A et un sous-anneau A'. On suppose que si $a \in A$, il existe $P \in A'[X]$ tel que $P(a) = 0$. Montrer que A est un corps si et seulement si A' est un corps.
II) Soit un corps commutatif K et un sous-anneau A tel que, pour tout $x \in K^*$, x ou $\dfrac{1}{x}$ est dans A. On appelle $\mathcal{M}$ l'ensemble des $x \in A$ n'ayant pas d'inverse dans A. Montrer que $\mathcal{M}$ est un idéal de A.
Montrer que si I est un idéal de A, alors $I = A$ ou $I = \mathcal{M}$.

Planche 45

On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$.
Faire l'étude complète de la fonction f.
Étudier le signe de f en les points où elle admet un extremum local.

Planche 46

I) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\psi \in \mathcal{L}\big(\mathcal{L}(E)\big)$ qui à v associe $u \circ v$.
Montrer que ψ est diagonalisable si et seulement si u est diagonalisable, d'abord en utilisant des polynômes annulateurs, puis en utilisant des éléments propres.
II) Trouver les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont $X^2 + 1$ est le polynôme minimal.

Planche 47

Pour $t > 0$, on pose $f(t) = \dfrac{1 - \cos t}{t^2}\cdot$

Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que $\displaystyle\int_0^X \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ a une limite, notée A, quand $X \to +\infty$.

Montrer que $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2}\,\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$ est bien définie pour $x > 0$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$. Exprimer g à l'aide de fonctions élémentaires et en déduire la valeur de A.

Planche 48

I) Soit un groupe G fini et A l'ensemble des éléments d'ordre impair. Montrer que A est non vide et que $x \mapsto x^2$ est une permutation de A.

II) Soit $G = \{A_1, \ldots, A_k\}$ un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que la trace de $\displaystyle\sum_{p=1}^{k} A_p$ est dans $k\mathbb{Z}$.

Planche 49

I) Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^p t \sin^q t \mathrm{d}t$ en fonction de $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

II) Paramétrer le cercle (C) d'équation $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$
Calculer, le long de (C) orienté comme on voudra, l'intégrale de la forme différentielle $(y - z)\mathrm{d}x + (z - x)\mathrm{d}y + (x - y)\mathrm{d}z$.

Planche 50

Soit E l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que, pour toute colonne X, la *trajectoire* $t \mapsto \exp(tM)X$ soit incluse dans un $\mathbb{C}$-plan affine.
Dire si la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ appartient à E. On montrera que la condition de planéité, pour un X donné, équivaut à l'existence d'une ligne non nulle L telle que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L \exp(tA)X \equiv 0$.
Montrer que $\det A = 0 \Longrightarrow A \in E$.
Quelles sont les matrices diagonalisables inversibles éléments de E ?
Déterminer enfin E.

Planche 51

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme $N(f) = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t}$.
Justifier que N est bien une norme.
Soit la suite $f_n \in E^{\mathbb{N}}$ définie par $f_n(t) = 0$ si $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}$; $f_n(t) = n(t - \dfrac{1}{2})$ si $\dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}$; $f_n(t) = 1$ si $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1$
Montrer que (f_n) est une suite de Cauchy divergente de E. Que peut-on en conclure ?

Planche 52

Étant donné des réels $\mu_1 < \ldots \mu_n$, des réels $x_1, \ldots, x_n$ tous non nuls, un réel α, on pose $D = \mathrm{Diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et

$M = \begin{pmatrix} D & X \\ {}^tX & \alpha \end{pmatrix}$.

Montrer que M possède $n+1$ valeurs propres réelles distinctes $\lambda_0 \ldots \lambda_n$ telles que $\lambda_0 < \mu_1 < \lambda_1 < \ldots < \mu_n < \lambda_n$.

Soit $M = \begin{pmatrix} S & Y \\ {}^tY & \beta \end{pmatrix}$, où S est symétrique réelle de valeurs propres $\mu_1 < \ldots \mu_n$. Montrer que M possède $n+1$ valeurs propres réelles distinctes $\lambda_0 \ldots \lambda_n$ telles que $\lambda_0 < \mu_1 < \lambda_1 < \ldots < \mu_n < \lambda_n$.

Planche 53

Soit $G = \{A_1, \ldots, Ap\}$ un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que pour tout k entre 1 et p, $A_k^p = I_n$.
Montrer que A_k est diagonalisable. Vérifier que $|\operatorname{tr}(A_k)| \leqslant n$.
Soit $A = A_1 + \ldots + A_p$. Montrer que A est diagonalisable. Montrer que $\operatorname{tr}(A)$ est un entier divisible par p.

Planche 54

Avec ordinateur : Existence, variations et graphe de
$f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$. Localiser les points d'inflexion.
Rayon de convergence du développement en série entière.

Planche 55

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\|.\|$ une norme sur E telle que pour tout $(X,Y) \in E \times E$, $\|XY\| \leqslant \|X\|\,\|Y\|$.
Donner un exemple d'une telle norme.
Soit $\sum a_k z^k$ une série entière de rayon $R > 0$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty} a_k X^k = O(\|X^p\|)$ quand X tend vers 0 dans E.
Déterminer la différentielle en 0 de l'application $X \mapsto \exp(X)$ de E dans E.
Soit $A \in E$ une matrice antisymétrique. Quelle est la «représentation géométrique» de $\exp(tA)$ en 0 à l'ordre 1, pour $n = 2$ et $n = 3$?

Planche 56

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
Montrer que f est continue et bornée.
Montrer que $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-t\sin(xt)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.
En utilisant $\dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u$ calculer $f'(x) + \dfrac{\pi}{2}\cdot$
En déduire que $f''(x)$ existe pour $x > 0$. Comparer f et f''.
En déduire f.

Planche 57

Soit P dans $\mathbb{C}[X]$ qui admet n racines distinctes $x_1, \ldots, x_n$.
Montrer que la somme des $\dfrac{1}{P'(x_k)}$ est nulle.
Trouver les polynômes non nuls tels que $P\left(X^2\right) = P(X)P(X+1)$.

Planche 58

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Étudier $\Phi : X \mapsto -X + \mathrm{tr}(X)A$ (automorphisme , diagonalisable ?), en particulier on étudiera les cas $\mathrm{tr}(A) = 0, 1, 2$.

Planche 59

$\dfrac{u(n+1)}{u(n)} \leqslant \dfrac{v(n+1)}{v(n)}$: que peut on dire de la convergence des séries ?
$z(n) = n! \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$ avec $x > 0$; étudier la convergence.
$w(n) = \dfrac{\sqrt{n!}}{x} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\frac{x}{\sqrt{k}}$, x réel ; étudier la convergence.

Planche 60

Soit un groupe additif G. Soit g un élément de G d'ordre fini n. Expliciter l'ensemble des k dans $\mathbb{Z}$ tels que $kg = 0$.
Soit G et H deux groupes additifs, φ un morphisme de G dans H, montrer que l'image par φ d'un élément g de G d'ordre fini n est d'ordre fini, et montrer que cet ordre divise n.
Déterminer les morphismes de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins un morphisme non constant entre $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.
Les dénombrer, dans ce cas.

Planche 61

Soient A_1, A_2, A_3, A_4 dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe P et Q tels que $\left(A_1^2 + A_2^2\right)\left(A_3^2 + A_4^2\right) = P^2 + Q^2$. Généraliser.
Soit P tel que pour tout x de $\mathbb{R}$, $P(x) > 0$. Montrer qu'il existe A et B des polynomes sans racine réelle commune tels que $P = A^2 + B^2$.
Cette fois $P(x) \geqslant 0$. Que peut-on dire ?

Planche 62

Soit a dans $]0, 1[$.
Soit f 2π-périodique telle que pour tout $t \in\,]-\pi, \pi[$, $f(t) = \cos(at)$. Calculer les coefficients de Fourier. Type de convergence ?
Écrire $\operatorname{cotan}(a\pi)$ sous la forme d'une série puis $\operatorname{cotan}(t)$ pour t dans $]0, \pi[$.
Justifier la convergence de la suite $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{t^2}{(k\pi)^2}\right)$.
Montrer que pour tout $t \in\,]0, \pi[$, $\displaystyle\sin(t) = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2t}{t^2 - (n\pi)^2}$.
Soit f continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, 2π-périodique. Existe-t-il une solution 2π-périodique à l'équation $y'' - y = f$?

Planche 63

1. Soit $x > 0$, on définit f par $\displaystyle f(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{e^{xt} - 1}\mathrm{d}t$.
Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.
Montrer que f peut être écrite comme série de fractions rationnelles simples.
Trouver un équivalent de f en 0.
2. $y'(t) = y^2(t) - t$. On montre qu'une solution y est définie sur $]\alpha, \beta[$ avec $\alpha \leqslant 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to\alpha} y(t) = -\infty$.

Comment y tend-il vers son asymptote en α ? En $\dfrac{1}{\alpha - t}$? En $\dfrac{-1}{(\alpha - t)^2}$?

Planche 64

Soit f définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \sqrt{x}$, f est paire et 2π-périodique.

Calculer ses coefficients de Fourier, en fonction de $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t$.

Discuter la convergence de la série de Fourier.

Planche 65

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^k en fonction de I_3, S, S^2.
Trouver tous les M tels que $AM = MA$.
Trouver tous les B tels que $B^k = A$.

Planche 66

On pose $v_n = \dfrac{u_n}{\displaystyle\prod_{j=1}^{n} (1 + u_j)}$ ·

Convergence de $\sum v_n$?

Pour $u_n = x^{2^n}$, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

Soit $u_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1 + u_n}{2}}\cdot$ Calculer $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} u_j$.

Planche 67

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec des 0 sur la diagonale et pour $i \neq j$, $a_{i,j} + a_{j,i} = 1$. Soit H l'hyperplan d'équation $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

Déterminer $\operatorname{Ker} A \cap H$. Montrer que $\operatorname{rg} A \geqslant n - 1$.
Déterminer les $n \geqslant 2$ tels que les matrices du même type que A soient de rang $n - 1$.

Planche 68

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{t^n}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$, continue, croissante.

Déterminer les limites de F en $+\infty$ et $-\infty$.

Montrer que $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+nx)^{n+1}}$ pour $x > 0$.

Planche 69

I) Soit $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 1 & \dots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Montrer que le polynôme caractéristique de A_n s'écrit :

$P_n(\lambda) = (1-\lambda)^n - (-\lambda)^{n-2}$, $\forall n \geqslant 2$.

Montrer que P_n admet une unique racine λ_n dans $]1, +\infty[$.

Trouver un équivalent de λ_n pour $n \to \infty$ (on pourra écrire $n = \dfrac{2\ln\lambda}{-\ln(1-\frac{1}{\lambda})} = g(\lambda)$ puis étudier g).

II) Cours : définition d'un groupe cyclique ; générateurs d'un groupe cyclique et idée de la démonstration ; autres applications de l'identité de Bezout.

Planche 70

Soit $p \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^*)$. On considère l'équation différentielle (E) : $\forall t \in \mathbb{R}$, $y''(t) + y'(t) + 2p(t)^2 y(t) = 0$.

On suppose qu'il existe deux solutions non nulles de (E), y_1 et y_2 telles que $y_2 = y_1^2$. Montrer alors que y_1 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Trouver une CNS sur p pour la condition ci-dessus soit satisfaite. Résoudre alors (E).

Planche 71

I) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. On pose $I = \{x \in \mathbb{R}, I_n + xA \in S_n^{++}(\mathbb{R})\}$.

Montrer que I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Le calculer.

II) Soit $\big(E, (\ |\ )\big)$ un espace préhilbertien réel et $a_1, a_2, \ldots, a_p$ des vecteurs unitaires de E. On suppose que la norme de E vérifie $\forall x \in E, \| x \|^2 = \sum_{i=1}^{p} (a_i|x)^2$. Montrer que E est de dimension p.

Planche 72

I) Soit $\phi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue de limite nulle en $+\infty$. On note (E) l'équation différentielle $y'' + \phi y' + y = 0$.
Montrer que les solutions de (E) sont de classe $\mathcal{C}^2$.
Soit y une solution maximale de (E) autre que la solution nulle. Montrer que il existe deux fonctions r et θ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $y'(t) + iy(t) = r(t)\mathrm{e}^{i\theta(t)}$ pour tout $t \geqslant 0$.
Exprimer θ' en fonction de y, y', r, ϕ. Trouver un équivalent de θ' en $+\infty$.
En déduire que le nombre $N(t)$ de zéros de y entre 0 et t est équivalent à $\dfrac{t}{\pi}$ quand t tend vers $+\infty$.
En déduire une propriété du nombre de zéros d'une solution maximale d'une équation différentielle de la forme $z''+qz = 0$, où $q : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue, en posant $z = y \circ \tau$.

Planche 73

I) Pour quels réels x a-t-on $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2} = \int_0^x \frac{t}{1-t^3}\,\mathrm{d}t$?

Avec l'aide de Maple, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n(3n+2)}$.

II) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Que vaut le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^{2n}$? De la série entière $\sum a_n^2 x^n$?

III) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et fini. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^{n^2}$ vaut 1.

Planche 74

On note P_n le nombre de permutations de l'ensemble $[1, n]$ n'ayant aucun point fixe. Calculer $P_1, \ldots, P_4$.
Montrer que $n! = P_n + \binom{n}{1} P_{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} P_1 + 1$ en décomposant judicieusement l'ensemble des permutations de $[1, n]$. Montrer que $P_n = (n-1)(P_{n-1} + P_{n-2})$.

Planche 75

I) On note a un réel strictement positif et α un réel. Discuter la nature de la série de fonctions d'une variable réelle de terme général u_n défini par $u_n(x) = a^{S_n} x^n$ où $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$, suivant les valeurs de x, a et α. Étudier la convergence uniforme sur les intervalles de $\mathbb{R}$.

Planche 76

I) On note $u_n = \frac{\ln n}{n}$ et $v_n = (-1)^n u_n$.
Nature des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$?

On note $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$. Trouver un équivalent simple de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Montrer que $S_{2n} - S_n = \ln 2 \ln n + \frac{\ln^2 2}{2} + o(1)$.

On note $T_n = \sum_{k=2}^{n} v_k$. Évaluer $T_{2n} + S_{2n}$ et en déduire $T = \sum_{n=2}^{+\infty} v_n$.

Planche 77

Soit (u_n) une suite de réels positifs. On note $A = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $B = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2$.

Étudier l'existence de (u_n) telle que $A = +\infty$ et $B < +\infty$, puis $A < +\infty$ et $B = +\infty$.
Calculer A et B quand $u_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\cdot$
Comparer A et B quand $u_n = \frac{1}{n^2+1}\cdot$

