

## Concours Divers – option MP

### Planche 1 TPE

I) Développer en série de Fourier la fonction  $2\pi$ -périodique définie sur  $[0, 2\pi]$  par  $f_\alpha(x) = e^{\alpha x}$  avec  $\alpha \neq 0$ .

Convergence et calcul de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + n^2}$ .

Calcul de  $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(\alpha t)}{e^t - 1} dt$ .

II) Types de convergence de la suite de terme général  $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ .

### Planche 2 ENTPE

Montrer que  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  sont diagonalisables dans une même base orthogonale et calculer la matrice de passage.

### Planche 3 ENTPE

I) Trouver un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  et une fonction  $f$  de  $U$  dans  $\mathbb{R}$  tels que la forme différentielle  $\omega = f(x^2)[(x^2 + y^2)dx - 2xydy]$  soit exacte.

Résoudre l'équation différentielle  $2xyy' = x^2 + y^2$ .

II) Nature de la surface d'équation  $z^2 = xy + 1$ .

### Planche 4 ENTPE

I) Soit  $\alpha > 0$ ,  $f$  de  $[0, \alpha]$  dans  $\mathbb{R}$ .

$\forall x \in ]0, \frac{\alpha}{2}]$ , on pose  $\phi(2x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$ .

Montrer que si  $f$  est dérivable en  $0^+$ ,  $\phi$  tend vers  $f'_d(0)$  en  $0^+$ .

Étudier la réciproque si on suppose  $f$  continue en  $0^+$ .

II) Limite de la suite de terme général  $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t + \dots + t^n}$ .

III) Étude de la suite définie par  $u_0 = \frac{\pi}{2}$  et  $u_{n+1} = \sin u_n$ .

Équivalent puis développement asymptotique de  $u_n$  en  $+\infty$ .

### Planche 5 ENTPE

I) Justifier l'existence de  $\int_0^{+\infty} \ln(\operatorname{th}(x)) dx$ .

Soit  $f$   $2\pi$ -périodique, telle que  $\forall t \in [-\pi, \pi]$ ,  $f(t) = |t|$  : donner sa série de Fourier et calculer  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .

Montrer que  $\int_0^{+\infty} \ln(\operatorname{th}(x)) dx = -\frac{\pi^2}{8}$ .

II) Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions lipschitziennes de même rapport  $M > 0$ , convergeant simplement vers  $f$  : montrer que la convergence est uniforme (on pourra commencer par le cas  $f = 0$ ).

### Planche 6 ENTPE

I) Déterminer les sous-espaces de  $\mathbb{R}^3$  stables par  $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Ces sous-espaces admettent-ils des supplémentaires stables par  $U$  ?

Est-ce le cas en général ?

II) Résoudre  $x'(t) - \sqrt{x(t)} \sin t = 0$ ,  $x(a) = b$ .

### Planche 7 ENTPE

I) Développement limité d'ordre  $n$  en 0 de  $f(x) = e^{1/x} \int_0^x e^{-1/t} dt$ .

II) Relier la somme de la série de terme général  $\frac{1}{k^2}$  à l'intégrale  $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ .

### Planche 8 ENTPE

I) Convergence et équivalent du reste d'ordre  $n$  de la série de terme général  $(-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ .

II) Définition, continuité, équivalent en  $0^+$  et  $+\infty$  de :

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1} + t + 1}.$$

### Planche 9 ENTPE

I) Pour  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , montrer que  $\det({}^tAA)$  est positif ou nul.

II) Soit  $p$  et  $q$  des projecteurs orthogonaux.

Montrer que  $p \circ q = 0$  si et seulement si  $q \circ p = 0$ .

Montrer que  $p$  est un projecteur orthogonal ssi  $p$  est un projecteur tel que pour tout  $x$  de  $E$ ,  $\|p(x)\| \leq \|x\|$ .

### Planche 10 ENTPE

I) Soit  $E = \mathbb{R}[X]$  muni de la norme  $|P| = \sum |a_i|$  (pour  $P = \sum a_i X^i$ ). La forme linéaire  $f(P) = P(1)$  est-elle continue ?

Existe-t-il une norme  $N$  telle que  $f$  soit continue ?

II) Existence et propriétés de  $f(x) = \sum \exp(-x\sqrt{n})$ .

Montrer qu'en 0 on a  $f(x) \sim \frac{2}{x^2}$ . Existence de  $I = \int_1^\infty f$ .

### Planche 11 ENTPE

I) Soit  $E$  l'espace des fonctions continues sur  $[0, 1]$  et à valeurs réelles. Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 < a < b < 1$ . Soit  $T : E \rightarrow E$  définie par  $T(f) = g$ ,  $g = f$  hors de  $[a, b]$  et  $g$  affine sur  $[a, b]$ .

Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .

Montrer que  $T$  est continue pour la norme uniforme et calculer sa norme subordonnée. Valeurs et vecteurs propres de  $T$ .

II) Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $f$  appartenant à  $\mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $f$  est inversible si, et seulement si pour tous sous-espaces  $(A, B)$  supplémentaires dans  $E$  les sous-espaces  $f(A)$  et  $f(B)$  sont aussi supplémentaires.

III) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  avec  $n \geq 2$ . Donner une CNS sur  $A$  pour que pour toute matrice  $M$ ,  $\det(M + A) = \det(A) + \det(M)$ .

### Planche 12 ENTPE

I) Soit  $f(x) = \int_0^\pi \frac{dt}{x - \cos t}$ . Étudier l'ensemble de définition  $D$ , l'imparité et calculer  $f(x)$  pour  $x$  dans  $D$ .

II) Cours : uniforme continuité de la racine carrée sur  $\mathbb{R}_+$ .

### Planche 13 ENTPE

I) Soit  $a > 0$  et  $f_a(x) = ax - x^3$ . On crée une suite récurrente  $(u_n)$  en posant  $u_0 \in ]0, \sqrt{a}[$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Quelle est la nature de la série  $\sum u_n$  selon la valeur de  $a$  ?

II) On donne un triangle  $ABC$  dans le plan euclidien, et un point  $M$  intérieur à ce triangle. Soient  $x, y, z$  les distances de  $M$  aux côtés du triangle. Déterminer le maximum de  $xyz$ .

**Planche 14 ENTPE**

I) Soit  $P(x) = \begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_3 & & \\ a_1 & a_2 & x & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & \dots & x \end{vmatrix}$ . Calculer  $P(a_1), \dots, P(a_n)$  et en déduire  $P(x)$ .

II) Montrer que les solutions maximales de l'équation différentielle  $y' = y \sin^2 y$  sont monotones, bornées et définies sur  $\mathbb{R}$ .

**Planche 15 ENTPE**

I) Domaine de définition de  $f(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ .

Étudier la dérivabilité de  $f$ , y compris en 0.

II) On pose  $u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{4n-1}$ .

Déterminer  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . Déterminer un équivalent de  $l - u_n$ .

**Planche 16 ENTPE**

I) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  symétrique positive,  $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  orthogonale.

Montrer que  $\text{tr}(AU) \leq \text{tr}(A)$ .

II) Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Exprimer  $\text{com}(\text{com}(M))$  en fonction de  $M$ .

III) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme  $f$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  défini par  $f(M) = {}^t M - M$ .

**Planche 17 ENTPE**

I) On pose  $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$ .

Étudier la convergence uniforme de la suite  $(f_n)$  sur les segments inclus dans  $[0, +\infty[$ .

En déduire la nature de la suite de terme général  $a_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ .

Retrouver la nature de la suite  $(a_n)$  avec la convergence dominée.

II) Développer en série entière la fonction  $x \mapsto f(x) = \exp(-x) \sin(x)$ .

### Planche 18 ENTPE

I) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\text{tr}(A) \neq 1$ .

Montrer que  $E = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^t X + X \pm 2 \text{tr}(A)X = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et donner sa dimension.

II) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  antisymétrique, on note  $(E)$  l'équation différentielle  $X' = AX$ .

Montrer que, si  $n$  est impair, alors  $(E)$  admet des solutions constantes non nulles.

Montrer (à l'aide du produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^n$ ) que toutes les solutions de  $(E)$  sont bornées.

III) L'interrogateur donne 1 minute pour faire (sans préparation) l'exo suivant :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 - A = 0$  et  $\text{tr}(A) = n$ . Déterminer  $A$ .

### Planche 19 Telecom SudParis

I) Limite de la suite de terme général  $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+\dots+t^n}$ .

Nature de la série de terme général  $u_n = I_n - \frac{1}{2}$  (on pourra écrire  $\frac{1}{2}$  sous forme d'intégrale et faire intervenir  $p = E(\frac{n}{2})$ ).

II) Soit  $A$  symétrique réelle d'ordre  $n$  et  $\exp A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ .

Quel liens y-a-t-il entre  $A$  et  $\exp A$  (valeurs propres, sous-espaces propres, matrices diagonales associées...)?

Montrer que l'application définie sur  $S_n(\mathbb{R})$  par  $\phi(A) = \exp A$  est bijective dans  $S_n^{++}(\mathbb{R})$ .

### Planche 20 Telecom SudParis

I) Reconnaître la courbe  $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \\ z = b\theta \end{cases}$  avec  $a > 0, b > 0$ .

Montrer que  $B = \left( \frac{d\vec{M}}{d\theta}, \frac{d^2\vec{M}}{d\theta^2} \right)$  est libre. Donner une équation du plan affine passant par  $M$  et dirigé par  $B$ , ainsi qu'un vecteur normal de ce plan.

II) Rappeler la définition de l'exponentielle d'une matrice.

Soient  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$  telles que  $\forall (t, u) \in \mathbb{R}^2, e^{tA}e^{uB} = e^{uB}e^{tA}$ , montrer que  $A$  et  $B$  commutent (on pourra s'aider d'une analogie sur les réels, soigneusement justifiée).

### Planche 21 INT

I) On pose  $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+\dots+t^n}$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

On pose  $u_n = I_n - \frac{1}{2}$ . Déterminer la nature de la série  $\sum u_n$  (on pourra écrire  $\frac{1}{2}$  sous forme d'intégrale et faire intervenir l'entier  $p = E(\frac{n}{2})$ ).

II) On note  $S_n$  (resp.  $S_n^{++}$ ) l'ensemble des matrices  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  symétriques (resp. symétriques définies positives).

Pour  $A \in S_n$ , donner les liens entre  $A$  et  $\exp(A)$  (valeurs propres, sous-espaces propres, matrices diagonales associées, etc)

Soit  $\left\{ \begin{array}{l} \Phi : S_n \longrightarrow S_n^{++} \\ A \longmapsto \exp(A) \end{array} \right.$

Montrer que l'application  $\Phi$  est bien définie, et qu'elle est bijective.

### Planche 22 Telecom SudParis

Soit un polynôme  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ .

1. Montrer que  $\int_{-1}^1 P(x)^2 dx = -i \int_0^\pi |P(e^{it})|^2 e^{it} dt$ .

2. En déduire que  $\sum_k \sum_l \frac{a_k a_l}{k+l+1} \leq \pi \sum_k a_k^2$ .

3. Soit  $H$  la matrice de taille  $n+1$  et de terme général  $\frac{1}{i+j+1}$  (avec  $0 \leq i, j \leq n$ ). Montrer que  $H$  est symétrique définie positive.

4. Que dire du spectre de  $H$  ?

### Planche 23 Telecom SudParis

I) Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$ ,  $u : E \rightarrow E, P \mapsto X^n P \left( \frac{1}{X} \right)$ .

Montrer que  $u$  est un endomorphisme.  $u$  est-il diagonalisable ? Valeurs propres et vecteurs propres ?

II) Convergence de la série de terme général  $u_n = \sin [(2 + \sqrt{3})^n \pi]$ .

### Planche 24 Telecom SudParis

I) Montrer qu'on peut écrire  $\exp\left(\frac{1}{2}t^2 + xt\right)$  sous la forme :

$\exp\left(\frac{1}{2}t^2 + xt\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n(x)t^n$ . Préciser ce que sont les  $h_n(x)$ .

**II)** Définir un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien, un endomorphisme autoadjoint défini positif.

Montrer qu'un endomorphisme autoadjoint défini positif est inversible.

Soit  $u$  un endomorphisme autoadjoint défini positif d'un espace euclidien  $E$ . Montrer que  $\forall x, y \in E, (x|y)^2 \leq (x|u(x))(y|u^{-1}(y))$ .

### Planche 25 Telecom SudParis

**I)** Calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n-3}{n(n^2-4)}$ .

**II)** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Résoudre dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'équation :

$${}^tX + X = \text{tr}(X)A.$$

### Planche 26 ENSEA

**I)** On note  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a, b \in K$ . Déterminant et trace de l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(K)$  défini par  $\phi(M) = aM + b{}^tM$ .

**II)** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ .

Donner la définition de la notion de fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ .

Que dire si la nappe paramétrée  $(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$  admet en  $(0, 0, f(0, 0) = 0)$  le plan  $xOy$  comme plan tangent ?

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Dérivée seconde en 0 de  $t \mapsto (t \cos \alpha, t \sin \alpha, f(t \cos \alpha, t \sin \alpha))$ .

### Planche 27 ENSEA

**I)** Condition sur  $a$  et  $b$  réels pour que la courbe paramétrée  $\begin{cases} x = \frac{a}{t} \\ y = 2t + \frac{b}{t} \end{cases}$  possède un point de rebroussement ?

**II)** Expression analytique de la réflexion de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  par rapport au plan d'équation  $2x + y + 3z + 3 = 0$ .

### Planche 28 ENSEA

**I)** On note  $\phi$  l'application de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans lui-même qui à une matrice associe sa transposée.

Montrer que  $\phi$  est diagonalisable. Quelles sont les valeurs propres de  $\phi$  et leur multiplicité ? Donner le déterminant et la trace de  $\phi$ .

**II)** Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $A$  une partie non vide de  $E$ . Montrer que  $\forall (x, y) \in E^2, |d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$ .

### Planche 29 ENSEA

I) On note  $N$  la matrice  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $C(N)$  son commutant. Par ailleurs, on note  $E$  l'ensemble des matrices  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles

$$\text{que } M^{16} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer  $N^2$  et  $N^3$ .

Vérifier que  $C(N)$  est un sous-espace de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Le déterminer.

On suppose que toute matrice  $M \in E$  est un polynôme en  $N$ . Déterminer  $E$ .

Montrer que toute matrice  $M \in E$  est un polynôme en  $N$ .

### Planche 30 ENSIIE

I) Cours : quelle relation existe-t-il entre le rayon de convergence d'une série entière  $\sum a_n z^n$  et celui de la série entière  $\sum n a_n z^{n-1}$  ?

II) Soit  $k$  une application continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  à valeurs strictement positives.

On pose, pour tout  $(f, g) \in C([0, 1], \mathbb{R})$ ,  $(P|Q) = \int_0^1 k(t)f(t)g(t)dt$ .

Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur  $C([0, 1], \mathbb{R})$ .

Montrer qu'il existe une suite  $(P_n)$  de  $\mathbb{R}[X]$ , orthonormale pour ce produit scalaire, et telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\deg(P_n) = n$ .

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue. On pose  $a_n = (f|P_n)$ .

Montrer que la série  $\sum a_n^2$  est convergente.

### Planche 31 ENSIIE

I) Cours : théorème du rang (énoncé et démonstration)

II) Montrer que l'équation  $x^n + x - 1 = 0$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) admet une et une seule solution positive que l'on notera  $u_n$ .

Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ . Montrer que  $1 - u_n \sim \frac{\ln n}{n}$ .

### Planche 32 ENSIIE

I) Cours : définition et diverses caractérisations de la diagonalisabilité d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

II) soit  $a$  un réel non nul.

Étudier la suite  $(u_n)$  définie par 
$$\begin{cases} u_0 & = & a \\ u_{n+1} & = & u_n + \frac{1}{u_n} - 1 \end{cases}.$$

Dans le cas où la suite  $(u_n)$  est divergente, donner un équivalent de  $u_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Dans le cas où la suite converge vers un réel  $l$ , donner un équivalent de  $u_n - l$ .

### Planche 33 ENSIIE

I) Cours : rang d'une matrice.

II) Déterminer  $m = \min \left\{ \int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ .

$G = \left\{ g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \int_{-1}^1 g^2 = 1, \int_{-1}^1 g = \int_{-1}^1 xg = \int_{-1}^1 x^2g = 0 \right\}$ .

Déterminer  $M = \max \left\{ \int_{-1}^1 x^3 g(x) dx, g \in G \right\}$ .

### Planche 34 ENSIIE

I) Cours : énoncé et démonstration du théorème de l'égalité des accroissements finis pour une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

II) On note  $(E_{ij})$  la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et, pour  $M$  et  $N$  appartenant à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on pose  $(M|N) = \text{tr}({}^tMN)$ .

Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et que la base  $(E_{ij})$  est orthonormale pour ce produit scalaire.

Montrer que l'application  $f : M \mapsto \det(M)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , et que le gradient de  $f$  en  $M$  est égal à  $\text{com}(M)$ .

Montrer que les points critiques de  $f$  sont les matrices de rang inférieur ou égal à  $n - 2$ .

Montrer que  $f$  n'admet pas d'extremum local.

### Planche 35 ENSIIE

I) Cours : somme directe de sous-espaces vectoriels (définition et théorème avec démonstration).

II) Domaine de définition de  $f(x) = \int_0^1 \frac{\exp(ixt)}{1+t^2} dt$ .

Continuité de  $f$  ? Est-elle de classe  $C^1$  ? Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

Exprimer  $f$  en fonction de  $g$ , où  $g(y) = \int_0^y \exp(it^2) dt$ .

### Planche 36 ENSIIE

I) Cours : formule de Taylor avec reste intégral (énoncé et dém.).

II) Déterminer l'ensemble des polynômes  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$  tels que  $P(0) = 2$ ,  $P(2) = 1$ ,  $P'(0) = 1$ ,  $P'(2) = 0$ .

III) Existence et calcul de  $I(a) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x - \cos a)(1 - x^2)^{1/2}}$ .

### Planche 37 ENSIIE

I) Cours : soit  $P$  un polynôme à coefficients réels de degré  $n + 1$ . Montrer que  $P\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{R}_n[X]$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}[X]$ .

II) Soit  $(a_n)$  une suite de réels positifs telle que  $\sum a_n x^n$  soit de rayon de convergence 1. On définit  $\forall x \in [0, 1[$ ,  $f(x) = \sum a_n x^n$  et on suppose que  $f$  est majorée sur  $[0, 1[$ . Montrer que  $\sum a_n$  converge et admet pour somme  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

III) Discuter de l'existence de  $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha(1+x)} dx$  en fonction des valeurs de  $\alpha$ . Valeur pour  $\alpha = 0$ .

### Planche 38 ENSIIE

I) Cours : montrer qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement si il annule un polynôme scindé à racines simples.

II) Étudier la convergence et préciser la limite éventuelle de la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 \in ]0, 1[$ , et  $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ .

Montrer que  $\sum u_k^2$  converge.

Montrer que  $\sum \ln \frac{u_k + 1}{u_k}$  et  $\sum u_k$  divergent.

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$ ; en déduire que la suite de terme général  $nu_n$  converge vers une limite notée  $l$ .

On pose  $u_n = \frac{1}{n}(l - v_n)$ ; quelle est la nature de  $\sum (v_{n+1} - v_n)$ ? En déduire un équivalent de  $u_n$ .

### Planche 39 Navale

I) Un projecteur orthogonal est-il un endomorphisme orthogonal?

II) On note  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  muni de la norme  $N_1 : f \mapsto \int_0^1 |f(t)| dt$ .

Rappeler pourquoi  $N_1$  est une norme sur  $E$ .

On note  $f_n$  la fonction sur  $[0, 1]$  définie par  $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$ .

Montrer que la suite  $(f_n)$  est de Cauchy dans  $E$  pour la norme  $N_1$ . Est-elle convergente?

### Planche 40 Navale

I) Soit  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ . On suppose que  $f \circ g = 0$ . Montrer que  $\text{rg}(f + g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$ .

Preuve de l'inégalité  $\text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$  demandée par l'examinateur.

II) Soit  $a_1, \dots, a_n$  des réels non tous nuls. On note  $A$  la matrice de coefficient général  $a_i a_j$ . Quel est le rang de  $A$ ? Étudier la diagonalisabilité de  $A$ .

### Planche 41 Air

I) Soit  $E = \begin{pmatrix} a & 2b & 2c \\ b & a & 2b \\ c & b & a \end{pmatrix}$ ,  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

Montrer que  $E$  est une sous-algèbre commutative de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

II) Étudier la diagonalisabilité de la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{pmatrix}$  en fonction des valeurs de  $a, b, c, d, e, f$ .

### Planche 42 Air

I) Donner le domaine de définition de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ .

Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$ .

Trouver une équation différentielle dont  $f$  est solution. En déduire que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$ .

II) Montrer que  $N$ , définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $N(x, y) = \max(|x|, |y|, |x - y|)$ , est une norme de  $\mathbb{R}^2$ . Représenter la boule unité ouverte.

### Planche 43 Air

I) Étudier la convergence simple et uniforme de  $(f_n)$  définie sur  $[0, \pi]$  par  $f_n(0) = 1$  et  $f_n(t) = \frac{\sin t}{t(1 + nt)}$  pour  $t \neq 0$ .

Soit  $a \in ]0, \pi]$ , étudier la convergence simple et uniforme de  $(f_n)$  sur  $[a, \pi]$ .

II) Montrer que la suite de terme général  $\ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  converge.

Quel est le rayon de convergence de la série  $\sum a_n z^n$  où  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ ?

### Planche 44 Air

I) Montrer qu'un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant  $u \circ u = 0$  est de rang au plus égal à deux. Trouver un tel endomorphisme de rang 2 exactement.

II) Soit  $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ ;  $F = \{f \in E \mid \forall t \in [0, \frac{1}{2}], f(t) = 0\}$ ;  $G = \{f \in E \mid \forall t \in [\frac{1}{2}, 1], f(t) = 0\}$ ;  $H = \{f \in E \mid f(\frac{1}{2}) = 0\}$ .

Montrer que  $H = F \oplus G$ ;  $G = F^\perp$ ;  $F = G^\perp$ ;  $(F^\perp)^\perp = F$  et  $F \oplus F^\perp = E$ .

### Planche 45 Air

I) Nature et description de  $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$ .

II) Montrer que  $f$  continue et non constante sur  $[0, 1]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , prend une infinité de valeurs.

On note  $f^p = f \times f^{p-1}$ ; la famille des  $(f^p)_{p \in \mathbb{N}}$  est-elle libre ?

Trouver les sous-algèbres de  $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ .

### Planche 46 Air

Ensemble de définition et extrema de  $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \sqrt{4 - x^2} \cos y$ .

### Planche 47 Air

I) Nature de la série de terme général  $e(1 + \frac{1}{n})^n$ .

II) Variations de  $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$  pour  $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1\}$ .

Est-elle prolongeable en 0 et en 1 ? Dérivable ? Tracer  $f$ .

### Planche 48 St Cyr

I) Avec Maple : soit  $x$  réel strictement positif et  $f(x)$  la somme de tous multiples de  $x$  situés dans  $]5, 10]$ .

Tracer  $f$  pour  $x \in [0, 1]$  puis pour  $x \in [0, \frac{1}{10}]$ .

Que conjecturer sur la limite de  $f$  quand  $x$  tend vers 0 ?

II) Soit  $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x) dx$ ; calculer  $I_0$  et  $I_1$ .

Trouver une relation de récurrence permettant de calculer  $I_n$ .

Montrer que  $I_n \sim \frac{1}{2n}$  (on pourra étudier le sens de variations de la suite).

Montrer que la suite tend vers 0.

### Planche 49 St Cyr

I) Soit une suite de terme général  $u_n$  positif telle que  $\sum u_n$  converge. Montrer que la suite de terme général  $w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k u_k$  tend vers 0.

Que dire de la série de terme général  $\frac{w_n}{n+1}$  ?

II) Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$  de rang 1.  
Montrer que  $A^2 = \text{tr}(A)A$ . Que dire de  $\det(A + I_n)$  ?

### Planche 50 St Cyr

I) Avec Maple : éléments propres de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Trouver deux réels  $a, b$  et deux matrices  $M, N$  tels que :

$\forall n \geq 1, A^n = a^n M + b^n N$ . Dimension du commutant de  $A$  ?

II) Montrer que, pour tout  $a \in \mathbb{R}$  et tout  $b > 0$ , la série de terme général  $\frac{a^n}{(bn+1)^{n+1}}$  converge.

Étudier l'intégrabilité de  $f : t \mapsto t^{x \cdot t^y}$  sur  $]0, 1]$  pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $y > 0$ .

Montrer que  $\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{(ny+1)^{n+1}}$ .

### Planche 51 St Cyr

I) Étude du noyau de Dirichlet  $D_n(x) = \sum_{k=-n}^n \exp(ikx)$  :

Donner une expression élémentaire de  $D_n(x)$ .

Montrer que  $f(t) = \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} - \frac{2}{t}$  se prolonge en une fonction continue en 0.

Montrer que  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(u)| du$  est équivalent à  $\frac{4}{\pi^2} \ln n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

II) Soit  $a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  telle que  $a^q = Id$  pour un certain  $q \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $\dim \text{Ker}(a - Id) = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \text{tr}(a^i)$ .

### Planche 52 Mines AADN

I) Soit  $E$  l'ensemble des suites de réels  $(u_n)$  telles qu'il existe  $a$  réel vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_n = 2a$ . Montrer que  $E$  est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

Montrer que  $\langle u|v \rangle = \sum_{n=0}^2 u_n v_n$  est un produit scalaire sur  $E$ .

Soit  $\|u\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$  et  $N(u) = \langle u|u \rangle^{1/2}$ .

Montrer que ces deux normes sont équivalentes sur  $E$ .

II) Pour tout  $n$  entier naturel non nul, trouver un équivalent simple à l'infini de  $S_n = \sum_{p=n}^{2n} \sin \frac{1}{p}$ .

### Planche 53 Mines AADN

I) Nature de la surface :  $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz \pm 2yz + 4x - 3y - 2z - 1 = 0$ .

II) Existence et calcul de l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 2t + 2)^{3/2}}$ .

### Planche 54 ICNA

I) Montrer que  $S_n(x) = \sum \frac{\sin(na)}{(\sin a)^n} \frac{x^n}{n!}$  et  $T_n(x) = \sum \frac{\cos(na)}{(\cos a)^n} \frac{x^n}{n!}$  ont un rayon de convergence infini et les calculer.

II) Calculer l'aire du domaine défini par  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1$ .

### Planche 55 ICNA

I) Soit  $f_n$  l'application de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f_n(x) = n^\alpha x^n (1 - x)$ .

Pour quelles valeurs de  $\alpha$  la suite  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[0, 1]$  ?

Soit  $b < 1$ . Montrer que la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[0, b]$ .

Soit  $\alpha \in [1, 2]$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$ .

**II)** On note  $C_1$  le cercle de centre  $(0, 0)$  et de rayon 1,  $C_2$  le cercle de centre  $(0, 1)$  et de rayon 1.

On pose  $D = \{(x, y) \in C_1 \cap C_2, x \geq 0, y \geq 0\}$ .

Calculer  $I = \iint_D xy dx dy$ .

### Planche 56 ICNA

**I)** Soit  $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ .

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $A$ .

**II)** Soit l'équation différentielle  $(E) : (1 + x^4)y' + xy = 0$ .

On suppose que  $(E)$  admet une solution développable en série entière.

Déterminer les coefficients de cette série et calculer la somme.

### Planche 57 INT management

On note  $E$  l'espace des applications de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour  $f \in E$ , on définit l'application  $L(f)$  par  $L(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)(x-t)^n}{n!} dt$ .

Montrer que  $L$  est un endomorphisme de  $E$ .

Déterminer les éléments propres de  $L$ .