

ENS option MP*

Planche 1 Ulm-Lyon-Cachan

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et U un ouvert de \mathbb{C} . Montrer que $\sup_{x \in U} |P(x)| = \sup_{x \in \text{Fr}(U)} |P(x)|$.

Planche 2 Ulm-Lyon-Cachan

I) Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence infini.

Montrer que $\forall x > 0, \forall n \geq 0, a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$.

II) Si le carré d'une matrice carrée est diagonalisable, la matrice l'est-elle ?

Planche 3 Ulm-Lyon-Cachan

Soit p un nombre premier et $q = p^d$ avec $d \in \mathbb{N}^*$.

Cardinal de $E = \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \mid \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}), AB = I_n \right\}$?

Soit $SL_n(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \mid \det A = 1 \right\}$; peut-on trouver une surjection de $SL_n(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ dans $SL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$?

Planche 4 Ulm-Lyon-Cachan

I) Montrer que les points fixes de f , continue sur $[0, 1]$, à valeurs dans $[0, 1]$, forment un ensemble fermé non vide.

Montrer que $\forall n \geq 1$, l'ensemble des points de période p qui divisent n est un fermé dans $[0, 1]$.

Montrer que tout fermé de $[0, 1]$ est l'ensemble des points fixes d'une fonction continue.

II) Montrer que les valeurs propres d'une matrice complexe dont les puissances tendent vers la matrice nulle sont dans le disque unitaire de \mathbb{C} . La réciproque est-elle vraie ?

Planche 5 Ulm-Lyon-Cachan

Trouver les applications linéaires Q telles que $\forall a \in \mathbb{R}, \forall P \in \mathbb{R}[X], P$ admet un minimum local en a vérifiant $Q(P)(a) \geq 0$.

Planche 6 Ulm-Lyon-Cachan

I) Montrer que les points fixes de f , continue sur $[0, 1]$, à valeurs dans $[0, 1]$, sont un ensemble fermé non vide.

Montrer que $\forall n \geq 1$, l'ensemble des points de période p qui divisent n est un fermé dans $[0, 1]$.

Montrer que tout fermé de $[0, 1]$ est l'ensemble des points fixes d'une fonction continue.

II) Soit f continue sur $[a, b]$, à valeurs dans \mathbb{R} , (x_1, \dots, x_n) n points distincts de $[a, b]$. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $\forall i \in [1, n]$, $P(x_i) = f(x_i)$ et que $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$.

Planche 7 Ulm-Lyon-Cachan

I) Soit une suite de fonctions f_n de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, telle que (f'_n) converge uniformément vers g et il existe x_1 tel que $(f_n(x_1))$ converge. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f telle que $f' = g$.

Soit une suite de fonctions f_n de classe \mathcal{C}^m sur $[a, b]$, telle que $(f_n^{(m)})$ converge uniformément vers g et il existe x_1, \dots, x_m tels que $\forall i \in [1, m]$, $(f_n(x_i))$ converge. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f telle que $f^{(m)} = g$.

II) L'ensemble des matrices non diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est-il fermé ?

Planche 8 Ulm-Lyon-Cachan

Soit p premier et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\text{tr } A^p \equiv \text{tr } A \pmod{p}$.

Planche 9 Ulm-Lyon-Cachan

Montrer que $\sum_{k=0}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) = f(t)$ admet au plus $2n$ racines.

Montrer que si les p premiers a et b sont nuls, alors, ça s'annule au moins $2p$ fois.

Planche 10 Ulm-Lyon-Cachan

Soit $g(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy$ définie positive.

Montrer que g atteint un minimum sur $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Soit (x_0, y_0) son minimum sur $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Montrer que l'on peut trouver $(x_1, y_1) \in \mathbb{Z}^2$ tel que (x_0, y_0) et (x_1, y_1) engendrent \mathbb{Z}^2 .

Soit $m = g(x_0, y_0)$, montrer que $m \leq \sqrt{\frac{|b^2 - 4ac|}{3}}$.

Planche 11 Ulm-Lyon-Cachan

Soit une fonction polynomiale de \mathbb{C} dans \mathbb{C} . Montrer que l'image de tout fermé est un fermé.

Planche 12 Ulm-Lyon-Cachan

I) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\lim_{p \rightarrow \infty} A^p = 0$ si et seulement si $\forall \lambda \in Sp(A), |\lambda| < 1$.

II) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ fixé et $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{C}$.

On définit la suite (a_n) par $a_{n+k} = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} a_{n+j}$.

Déterminer les conditions sur a_0, a_1, \dots, a_{k-1} pour que la suite (a_n) converge.

Planche 13 Ulm-Lyon-Cachan

Étudier l'existence d'hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stables par le produit matriciel.

Planche 14 Ulm-Lyon-Cachan

Soit f de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X], t \rightarrow \text{tr}\left(P(f(t))\right)$ est de classe \mathcal{C}^1 et calculer sa dérivée.

Soient $(u, v) \in S_n^+(\mathbb{R})^2$, montrer que $\text{tr}(uv) \geq 0$.

Soient $(a, b) \in S_n(\mathbb{R})^2$ tels que $a - b \in S_n^+(\mathbb{R})$, soit $P \in \mathbb{R}[X]$ croissant sur \mathbb{R} , montrer que $\text{tr}(P(a)) \geq \text{tr}(P(b))$.

Même question si P est une série entière de rayon de convergence infini et croissante sur \mathbb{R} .

Planche 15 Ulm

Montrer que tout corps commutatif K est algébriquement clos si et seulement si pour tout $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ homogène de degré n , F admet un zéro non trivial.

Planche 16 Ulm

Soit $a > 0$ et g de classe \mathcal{C}^1 sur $]a, +\infty[$, à valeurs dans \mathbb{R}_+^* et telle que $\frac{1}{g}$ est convexe. Montrer que $\frac{g(x) - xg'(x)}{g(x)} \leq \frac{g(x)}{g(2x)}$.

Soit f de classe \mathcal{C}^1 sur $]a, +\infty[$, à valeurs dans \mathbb{R}_+^* , convexe, croissante, non constante et équivalente à g en $+\infty$.

Montrer que $\exists A \setminus \forall x \geq A, \frac{xg'(x)}{x} \geq \frac{1}{3}$.

Montrer que $\exists B \setminus \forall x \geq B, \forall h \in]0, \frac{x}{2}[$,

$(1 - B)g(x) - (1 + B)g(x - h) \leq hf'(x) \leq (1 + B)g(x + h) - (1 - B)g(x)$.

Planche 17 Lyon

Existe-t-il une forme quadratique q sur \mathbb{R}^4 euclidien dont le cône isotrope $C = q^{-1}(0)$ vérifie la propriété suivante : toute quadrique de \mathbb{R}^3 euclidien est isométrique à une section de C par un hyperplan affine de \mathbb{R}^4 ?

Planche 18 Lyon

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, v un endomorphisme de E et ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par $\phi(u) = u \circ v$. Cette application est-elle surjective ?

Planche 19 Cachan

Soit $a > 0$; on étudie $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a^2 + (t - 2n\pi)^2}$.

1. Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^∞ , paire, périodique.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f (par exemple à l'aide d'une équation différentielle).
3. En déduire une expression de f .

Planche 20 Cachan

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que $M^2 = I_2$.

Que peut-on dire de $\det(M)$ et de $\text{tr}(M)$?

Déterminer M si $\det(M) = 1$. On exclut désormais ce cas.

Montrer que, soit il existe $P \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, soit il existe $P \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et que ces deux cas s'excluent.

Planche 21 Cachan

Soit A de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On suppose qu'il existe S de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans $GL_n(\mathbb{C})$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que $S^{-1}(t)A(t)S(t) = A(t_0)$ pour tout t .

Montrer qu'il existe B de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A' = AB - BA$.

Inversement, s'il existe B de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A' = AB - BA$, montrer que $\text{tr} A^k(t)$ est constante pour tout k , que le spectre de $A(t)$ est constant et qu'il existe S de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans $GL_n(\mathbb{C})$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que $S^{-1}(t)A(t)S(t) = A(t_0)$ pour tout t .

Planche 22 Informatique

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p_1 > p_2 > \dots > p_n$ des entiers représentant un système monétaire : le système des pièces de monnaies en euros est par exemple ($n = 8$, les valeurs sont données en centimes) :

$$p_1 = 200 ; p_2 = 100 ; p_4 = 20 ; p_6 = 5 ; p_8 = 1$$

Etant donnée une valeur $v \in \mathbb{N}$, une *représentation* de cette valeur est un n -uplet (c_1, c_2, \dots, c_n) d'entiers tel que $\sum_{j=1}^n c_j p_j = v$.

Décrire explicitement l'ensemble, noté $M(\mathbb{N})$, réunion pour $v \in \mathbb{N}$, des n -uplets (c_1, \dots, c_n) vérifiant $\sum_{j=1}^n c_j p_j = v$ et $\forall (c'_1, \dots, c'_n)$ tel que

$$\sum_{j=1}^n c'_j p_j = v, \sum_{j=1}^n c'_j \geq \sum_{j=1}^n c_j ;$$

Planche 23 Informatique

Soit $L = \Sigma^* ababa$.

Automate fini déterministe complet reconnaissant L comportant le moins d'états possibles ?

Prouver que cet automate possède le moins d'états possibles.

Montrer que l'automate construit reconnaît bien L ?

Construction généralisée ?

Complexité de cette construction ?