

Concours Commun Mines-Ponts – option MP

Planche 1

I) Nature de la série de terme général $\sin(\pi\sqrt{x^2 + 1})$.

II) Trouver les plans tangents à la surface $z^3 = xy$ contenant la droite $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3z + 2 \end{cases}$

III) Montrer qu'une série de terme général positif u_n , vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \sum_{k=1}^n u_k$ converge.

Planche 2

I) Caractériser l'application affine qui à $(0, 0, 0)$ associe $(2, 3, 4)$ et dont la partie linéaire a pour matrice $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

II) Soit (a_n) une suite réelle, croissante, tendant vers $+\infty$. Justifier que $\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$.

Planche 3

I) Résoudre $t^2 x' + (1 - 2t)x - t^2 = 0$.

II) À quelle(s) condition(s) sur a, b, c, d , la droite $ax + by + cz = d$ est-elle tangente à la surface d'équation $27xyz = 1$?

III) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}, \text{tr}((AB)^p) = \text{tr}((BA)^p)$ et en déduire que AB et BA ont même polynôme caractéristique (on pourra utiliser les fonctions symétriques des racines).

Planche 4

I) Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de $t \mapsto \text{Arc tan}(t + 1)$.

II) Soit s une symétrie orthogonale et r une rotation vectorielle de \mathbb{R}^3 euclidien ; que dire de $f = s \circ r \circ s$?

Planche 5

I) Trouver les fonctions vérifiant $(n + 1)y_n'' - (2n + 1)y_n' + ny_n = 0$ puis étudier les convergences de la suite de fonctions ainsi définie.

II) Donner une CNS pour que $M = (a_{ij})_{(i,j) \in [1,n]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ soit diagonalisable.

III) Soit $M = (m_{ij}) \in O_n(\mathbb{R})$; montrer que $\left| \sum_{i,j} m_{ij} \right| \leq n$.

Planche 6

I) Trouver une base orthonormale de \mathbb{R}^3 euclidien dans laquelle $q(x, y, z) = 13x^2 + 13y^2 + 10z^2 + 8xy + 4xz + 4yz$ est orthogonale.

II) Soit une suite de terme général réel positif a_n , strictement croissante et tendant vers $+\infty$.

Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x} \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}.$$

III) Soit $M = (m_{ij}) \in O_n(\mathbb{R})$; montrer que $\left| \sum_{i,j} m_{ij} \right| \leq n$.

Planche 7

I) Soit $M = (m_{ij}) \in O_n(\mathbb{R})$; montrer que $\left| \sum_{i,j} m_{ij} \right| \leq n$.

II) Montrer la divergence de la série de terme général u_n vérifiant $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$.

Planche 8

I) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 n \ln(1 + t^n) dt$.

II) Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E vérifiant $\forall x \in E, (f(x)|x) = 0$.

Montrer que $Id - f$ et $Id + f$ sont inversibles.

Montrer que $g = (Id + f) \circ (Id - f)^{-1}$ est un automorphisme orthogonal qui n'admet pas -1 pour valeur propre et conclure.

Planche 9

I) Montrer qu'il existe une suite a_0, \dots, a_{n-1} de réels tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P(X + n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X + k)$.

Donner une suite $(a_k)_{0 \leq k \leq n-1}$.

II) Calculer $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} dt$.

Planche 10

I) Soient a et b des réels. Valeurs propres et vecteurs propres de $M = (m_{i,j})$ de taille $2n$ telle que $m_{i,i} = a$ et $m_{i,2n-i+1} = b$ pour $i \in [1, 2n]$, les autres termes étant nuls (i.e. des a sur la première diagonale, des b sur la seconde diagonale).

II) Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R}^+ . Étudier dans les différents cas la limite de $I_n(f) = \int_0^1 n [f(t)]^n dt$:

cas 1) $\sup(f) < 1$ (sur $[0, 1]$).

cas 2) $\sup(f) > 1$.

cas 3) $f' < 0$ et $f(0) = 1$.

Planche 11

I) Soit $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ telle que f' ne s'annule pas.

Calculer $\int_a^b f + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}$ et donner une interprétation graphique.

II) Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ à valeurs réelles et soit $F = \{f \in E, \forall k \in \{1, \dots, 10\}, f(\frac{1}{k}) = 0\}$.

Trouver un supplémentaire de F dans E .

Planche 12

I) Développer en série entière $f(x) = \int_0^\pi \frac{t}{1 - x \sin t} dt$.

II) Montrer que $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -5y & x + 4y \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un corps isomorphe à \mathbb{C} .

III) 100001 est-il premier ?

Planche 13

I) Soit $E = \mathbb{R}[X]$, $P \in E$, $L(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P(t + X) dt$.

Montrer que L est un endomorphisme de E .

Montrer qu'il existe une unique famille $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$L(P) = \sum_0^{+\infty} a_n P^{(n)}.$$

II) Montrer que $\sum \left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right)$ converge.

Soit γ sa somme. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

Montrer que $\sum \frac{k}{2^{k+1}} = 1$.

Planche 14

I) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists P_n$ tel que $P_n \left(X + \frac{1}{X} \right) = X^n + \frac{1}{X^n}$.

Quel est le degré de P_n ? Trouver les racines de P_n .

Décomposer $\frac{1}{P_n}$ sur $\mathbb{R}(X)$.

II) Nature de la série de terme général $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2 + 1})$.

Exemple de deux séries de termes généraux équivalents et qui ne sont pas de même nature.

III) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Dites tout ce que vous pouvez sur A (en particulier le spectre, sans utiliser le polynôme caractéristique).

Planche 15

I) Soit a un réel. Déterminer, suivant la valeur de a , la nature de la courbe $13x^2 - 32xy + 37y^2 - 2x + 14y - a = 0$.

II) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Soit $\sum v_n$ la série de terme général $v_n = \frac{1}{1 + n^2 u_n}$.

Montrer que si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ diverge.

Que se passe-t-il si $\sum u_n$ diverge?

Planche 16

I) Soit $u_n = \ln(n) + (-1)^n \cdot n^p$, p étant un réel. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

II) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ la fraction rationnelle $\frac{1}{x^n - 1}$, puis la décomposer dans $\mathbb{R}[X]$.

Planche 17

I) Calcul de $\sum \frac{(-1)^n}{8^n(3n+1)}$.

II) Soit un endomorphisme f d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension n , admettant une seule valeur propre λ , l'espace propre associé étant

de dimension 1. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle f admet une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 0 & \lambda & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

III) Soit une fonction f de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{R}_+ , telle que f'' soit bornée et f de limite nulle à l'infini. Montrer que f' tend vers 0 à l'infini.

IV) Existence de $\int_2^\infty \frac{\ln t}{t^\alpha} dt$.

Planche 18

I) Soit, pour tout entier n naturel non nul, la suite (u_k) telle que u_k soit le reste de la division de n par k .

Quelle est la limite de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k}$?

II) Soit un espace vectoriel E de dimension finie. Soit un endomorphisme f de E , tel que $\dim \text{Ker } f = d$ et $\dim \text{Ker } f^2 > d$. On suppose aussi qu'il existe un endomorphisme g de E tel que $g^k = f$. Montrer que k divise n .

Planche 19

I) On dispose d'une suite (a_n) d'éléments de $[-1, 1]$ telle qu'il existe p , naturel non nul, avec pour tout n , $a_{n+p} = a_n$.

Rayon de convergence de $f(x) = \sum a_n x^n$.

Démontrer que f est une fraction rationnelle.

Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur la suite (a_k) , pour que f soit intégrable sur $[0, 1[$.

Étudier le cas où on a $a_n = (-1)^{n(n+1)/2}$ (est-elle bien périodique ?).

II) Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + a^2 I_n = 0$, et que M et ${}^t M$ commutent. Que dire de la parité de n ?

Montrer que M est antisymétrique et que $\frac{1}{a} M$ est orthogonale.

Montrer que, pour $n = 2$, M est orthogonalement semblable à $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$. Généraliser pour un n quelconque.

Planche 20

I) Soit E un espace vectoriel, $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique et ϕ la forme bilinéaire symétrique associée à q , ainsi que $C = \{x \in E / q(x) = 0\}$ et $N = \{x \in E / \forall y \in E, \phi(x, y) = 0\}$. Montrer que $N = C$ a lieu si, et seulement si, q est soit positive, soit négative.

II) Soit $u_n(x) = n^a(1-x)x^n$, pour $x \in [0, 1]$ et $a \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série des $u_n(x)$ selon la valeur de a .

Planche 21

I) Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par $f_0(x) = x$ et $f_{n+1}(x) = \sin(f_{n-1}(x))$.

II) Pour $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ on considère la matrice M de coefficient général $a_i a_j$. Donner une condition nécessaire et suffisante (sur les a_i) pour que M soit diagonalisable.

III) Soit, dans un espace euclidien de dimension n , une rotation r et une symétrie orthogonale s . Quelle est la nature de $s \circ r \circ s$?

Planche 22

I) On donne une matrice carrée réelle d'ordre $n : M = (a_{i,j})$. On suppose que, pour tout i , $a_{i,i} > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que $\det M > 0$.

II) On donne une matrice carrée réelle M d'ordre n . On suppose que 0 est un zéro de multiplicité $m_1 \geq 1$ de χ_M et de multiplicité m_2 de μ_M . Montrer que $\dim \text{Ker } M = m_1$ si, et seulement si, $m_2 = 1$.

Planche 23

I) Nature et calcul de $\int_0^{+\infty} \exp(x - \frac{1}{x})^2 dx$.

II) E est un espace euclidien. Peut-on avoir simultanément u, v et $\frac{u+v}{2}$ dans $O(E)$?

Planche 24

Montrer que $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^n x dx$ a un sens pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Trouver une fonction φ continue de $[0, 2\pi]$ dans \mathbb{R} telle que, pour tout n , $I_n = \int_0^{2\pi} \varphi(x) \sin^n x dx$.

Étudier la nature des séries de terme général I_{2n} puis I_n .

Planche 25

- I) Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite $n \mapsto \sin \pi \sqrt{n}$?
II) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M + I = 0$. Montrer que n est pair.

Planche 26

- I) Discuter la nature de la série de terme général $\sin \pi \frac{n^2 + \alpha n + \beta}{n}$.
II) Soit E un espace vectoriel, p un projecteur de E . Montrer qu'un endomorphisme $u \in L(E)$ commute avec p si et seulement s'il laisse stables $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$.
III) Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation $88u + 27v = 1$.
IV) Cours = énoncer les conditions de diagonalisabilité.

Planche 27

- I) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $a \in]-1, 1[$, établir que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \text{sh } a^n x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!(1-a^{2p+1})}.$$

- II) Soit $A = \{p + jq \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ et $j = e^{2i\pi/3}$.

Montrer que A est un anneau et que $z \in A$ est inversible dans A si et seulement si $|u| = 1$.

Planche 28

- I) Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(a) > 0$ et f de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{C} telle que $f'(x) + af(x)$ tende vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Soit maintenant f de classe \mathcal{C}^2 de \mathbb{R} dans \mathbb{C} telle que $f''(x) + f'(x) + f(x)$ tende vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

La fonction $f(x)$ tend-elle vers 0 quand x tend vers $+\infty$?

- II) Que dire de la surface d'équation $x^2 + y^2 + \sin^2 z = 0$ dans \mathbb{R}^3 euclidien canonique ? Quelle est l'ombre de cette surface sur le sol xOy si le soleil est dans la direction $\vec{i} + \vec{k}$?

- III) Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que A^3 est diagonalisable. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Planche 29

I) Soit f continue de carré intégrable de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} .

On pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Montrer que $\int_0^x \frac{F^2(s)}{s^2} ds \leq 2 \int_0^x \frac{f(s)F(s)}{s} ds$ pour $x > 0$.

En déduire que F est de carré intégrable et que :

$\int_0^{+\infty} F^2(t)dt \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2(t)dt$. Étudier le cas d'égalité.

II) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec $\dim E = n$. Montrer que $f^2 = 0$ ssi il existe g et h dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f = g \circ h$ et $h \circ g = 0$.

III) Nature de la série de terme général $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Planche 30

I) Soit E espace vectoriel euclidien, montrer que l'ensemble des projecteurs orthogonaux sur E est un compact de $\mathcal{L}(E)$.

II) Caractériser toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$M^2 = O ; M^2 = M ; M^2 = I_3.$$

III) Énoncer le théorème des accroissements finis sur \mathbb{R} .

Planche 31

I) Étudier les extrema sur \mathbb{R}^2 de $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 12y - 15x$.

En cours d'oral, l'interrogateur demande en plus les extrema de f sur $[0, 1] \times [0, 1]$.

II) Étudier, sans trop de calculs, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (0) & \\ 1 & & \end{pmatrix}$

III) L'interrogateur dessine au tableau une droite D , un cercle C centré en un point de D et un point A : déterminer la projection orthogonale de A sur D en utilisant uniquement une règle non graduée.

Planche 32

I) Soit $(E, || \cdot ||_E)$ un espace vectoriel normé.

Théorème du point fixe de Picard : Soit \mathcal{C} une partie complète de E et $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ k -contractante. Montrer que f admet un unique point fixe sur \mathcal{C} .

Soit K une partie compacte et convexe de E . Soit $g : K \rightarrow K$ 1-lipschitzienne. Montrer que g admet un point fixe.

II) Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant la relation suivante : $(X + 4)P(X) = XP(X + 1)$.

Planche 33

I) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ minimisant la quantité définie par : $\int_0^{2\pi} (x^2 - a - b \cos(2nx) - c \sin(2nx))^2 dx$.

II) Que dire d'un endomorphisme f d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n tel que $\text{rg}(f) = 1$ et $\text{tr}(f) = n$?

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

III) Cours : montrer que la restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable est diagonalisable.

Planche 34

I) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 2A & -4A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

Montrer que A est diagonalisable si et seulement si B l'est.

II) Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite de terme général $n \int_0^1 \ln(1 + t^n) dt$.