Concours Divers – option MP

Planche 1 EIVP-TPE

I) Montrer que E, espace vectoriel des suites complexes bornées, muni de la norme infinie est complet.
II) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $[\,a\,,b\,]$ et à valeurs réelles. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \frac{f(t)\sin nt}{t}\,\mathrm{d}t$.

Planche 2 EIVP-TPE

Quel est le domaine de définition de $\displaystyle f(x)=\int_0^{\infty}\frac{t^x}{e^t-1}\,\mathrm{d}t$? Exprimer f en fonction des fonctions Γ et $\displaystyle\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$.

Planche 3 EIVP-TPE

I) Soient A,B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $A.B=0$.
A et B peuvent-ils être simultanément diagonalisables ?
II) Soit M une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Peut-on avoir $M+I$ inversible ? (Si $MX+X=0$, on pourra calculer ${}^t(MX)(MX)$). Montrer que $A=(M-I)(M+I)^{-1}$ est orthogonale.

Planche 4 EIVP-TPE I abordable en Sup

I) Comparer $\cos(\sin x)$ et $\sin(\cos x)$.
II) Si la série de terme général U_n positif est convergente, de quelle nature est la série de terme général $\dfrac{\sqrt{U_n}}{n}$?

Planche 5 EIVP-TPE II abordable en Sup

I) On suppose que deux endomorphismes f et g commutent et que g est nilpotent ; montrer que f est inversible si et seulement si $f+g$ est inversible. Donner une relation entre $\det(f)$ et $\det(f+g)$.
II) Soient D_1 et D_2 deux droites de l'espace non coplanaires ; trouver l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^3$ tels que $d(M,D_1)=d(M,D_2)$.

Planche 6 EIVP-TPE

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1\frac{t^a-t^b}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ (on pourra introduire une fonction de deux variables).

Planche 7 EIVP-TPE

I) $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&-3&3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ sont-elles diagonalisables ? Sont-elles semblables ? Calculer A^n.

II) Montrer que la famille $(\ln p)$ où p parcourt l'ensemble des nombres premiers est $\mathbb{Q}$-libre.

Planche 8 EIVP-TPE abordable en Sup

Soit f continue sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Montrer que $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(t)\mathrm{d}t \leqslant \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)$.
Application : calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_1^n\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\mathrm{d}t$.

Planche 9 EIVP-TPE

I) Montrer qu'une matrice de rang 1 est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ si et seulement si sa trace est non nulle.
II) Montrer que A de coefficient $a_{ij}=\dfrac{i}{j}$ est diagonalisable et trouver ses éléments propres.
III) Montrer que l'exponentielle d'une matrice est un polynôme de cette matrice (on mettra en évidence l'argument fondamental).

Planche 10 EIVP-TPE

I) Étudier les extremums de $f(x,y) = (y-x)^3 + 6xy$.
II) $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + {}^t M = I_n$, est-elle diagonalisable ?

Planche 11 EIVP-TPE

I) Calculer le rayon de convergence et la somme de $\sum \dfrac{x^n}{n} \cos \dfrac{n\pi}{3}$ ·

II) Domaine de définition et calcul de $\varphi(x) = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{x - \sin t}$ ·

Planche 12 EIVP-TPE

I) Montrer que deux matrices carrées réelles semblables sur $\mathbb{C}$ sont semblables sur $\mathbb{R}$.
II) Soit A un anneau commutatif ; si I un idéal de A, on appelle radical de I l'ensemble $\sqrt{I} = \{x \in A\,,\ \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x^n \in I\}$.
Montrer que, si I est un idéal de A, alors $\sqrt{I}$ est un idéal de A contenant I. Que dire de $\sqrt{\sqrt{I}}$?
Si I et J sont des idéaux de A, que dire de $\sqrt{I \cap J}$?
Montrer que $I \subset J \Longrightarrow \sqrt{I} \subset \sqrt{J}$.
Déterminer le radical des idéaux de $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$.

Planche 13 EIVP-TPE I abordable en Sup

I) Quelle est la limite de la suite réelle (u_n) définie par $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_{n-1}u_n}$?
Soit $v_n = u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}$. Existence et convergence de (v_n) ?
Montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ ·

II) Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x$ et la calculer.

III) Cours : échange série-intégrale, convergence dominée, convergence uniforme.

Planche 14 EIVP-TPE

I) Soient deux matrices A, B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, telles que $A^2 = B^2 = I_2$ et $AB = -BA$. Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

II) Soit p premier supérieur à 3 et $E = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$. Montrer que $f : E \to E$ définie par $f(x) = 1 - x^{-1}$ est une permutation. Quel est son ordre ?

Planche 15 EIVP-TPE III abordable en Sup

I) Nature de la série de terme général u_n où $u_0 \in\ ]0,\pi[$ et $u_{n+1} = \sin u_n$.
II) Soit E un espace vectoriel normé, B l'espace vectoriel des suites bornées à valeur dans E muni de la norme infinie.
Montrer que ϕ l'application qui, à la suite de B de terme général x_n associe la suite de terme général $x_{n+1} - x_n$, est continue, linéaire et calculer sa norme.

III) Calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\sqrt{t} + \sqrt{2-t}}}$ (on pourrase ramener au calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t}}}$).

Planche 16 EIVP-TPE

I) Soit B l'ensemble des suites réelles bornées pour $\|\ \|_\infty$, E le sous-ensemble de B des suites nulles à partir d'un certain rang est-il compact dans B ?

II) Domaine de définition de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n^3}$ · Donner les propriétés de cette fonction sur son domaine de définition. Est-elle continue ? Dérivable ? De classe $\mathcal{C}^2$? La représenter graphiquement.

Planche 17 EIVP-TPE, II abordable en Sup

I) Une matrice M, carrée complexe telle que $M^2 + {}^t M = I_n$ est-elle diagonalisable ?

II) Soit $P(x) = \begin{vmatrix} x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_n \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & x \end{vmatrix}$ avec $0 < a_1 < \ldots < a_n$.

Calculer $P(a_k)$ et en déduire $P(x)$.

III) Soient A et B deux matrices carrées complexes ; montrer que $P(t) = \det(A + tB)$ est de degré au plus égal à $\operatorname{rg} A$.

Planche 18 ENSEA

I) Développement en série entière de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t$.

II) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et un endomorphisme u de E.

Montrer que, si u est diagonalisable, u^3 l'est et $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u^3)$.

Étudier la réciproque.

Cours : énoncé et démonstration du lemme des noyaux.

Planche 19 ENSEA

Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \mathrm{d}t$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u$.

Planche 20 ENSEA

I) On note $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que les polynômes $(X-a)^k, 0 \leqslant k \leqslant n$, forment une base de E. Quelle en est la base duale ?

II) Trouver les solutions de l'équation différentielle $xy'' + 2y' + xy = 0$ développables en série entière au voisinage de 0, puis les solutions maximales de cette équation différentielle.

Planche 21 ENSEA, II abordable en Sup

I) Montrer que si tous les coefficients des séries de Fourier de deux fontions continues et 2π-périodiques sont égaux, alors ces deux fonctions sont égales.

Montrer que f, continue, 2π-périodique ayant tous ses coefficients de Fourier d'ordre impair nuls, est π-périodique.

II) Trouver la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Planche 22 ENSEA

I) Étudier la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = x^n \ln(x)$ si $x \in]0,1]$ et $f_n(0) = 0$.

II) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E ; l'endomorphisme f de E, défini par $f(e_k) = e_{k+1}$ pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ et $f(e_n) = e_1$, est-il diagonalisable ?

Déterminer l'ensemble des endomorphismes commutant avec f.

Planche 23 ICNA

I) Déterminer la limite l de la suite définie par $a_n = (\cos \dfrac{1}{n^\alpha})^n$ selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Lorsque l existe, étudier la nature de la série $\sum(a_n - l)$.

II) Soit $k \in \mathbb{R}$, soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui à (x,y,z) associe $(x + y + kz, x + ky + z, kx + y + z)$.

Calculer le polynôme caractéristique de f. Donner le rang de f selon k.

Pour $k = 1$, déterminer les sous-espaces propres de f, et en déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, où A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

