ENS – option MP

Planche 1 Ulm-Lyon-Cachan

Soit un entier $m \geqslant 2$. Montrer que Φ_m, polynôme unitaire de $\mathbb{C}[X]$ dont les zéros sont simples et sont les générateurs du groupe des racines m-ièmes de l'unité, a ses coefficients entiers relatifs.
Si on considère Φ_m comme polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où p est premier, peut-il avoir des zéros multiples ?

Planche 2 Cachan

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$, et A un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathcal{L}(E)$, stable pour la loi $\circ$. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel F de E, non réduit à $\{0\}$ et distinct de E lui-même, qui soit stable par tous les endomorphismes de A.

Planche 3 Ulm-Lyon-Cachan abordable en Sup

$f(a,b) = \max\{x \in \mathbb{R} |\ x^3 + ax + b = 0\}$ définit-elle une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$?

Planche 4 Cachan

On pose $T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arc}\cos x)$. Trouver une relation de récurrence entre T_n, T_{n+1} et T_{n+2}. Chercher les extremums de T_n.
Prouver que la norme infinie de T_n est plus petite que celle de tout polynôme de degré n et de même coefficient dominant que T_n (on pourra faire un dessin).

Planche 5 Lyon abordable en Sup

Que dire d'une application T linéaire de $\mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telle que si f est dans $\mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$, x dans $]a,b[$ et si f admet un minimum local strict en x, alors $(Tf)(x) = 0$? (On pourra montrer que si $f(x) = (x-c)^2$ alors $(Tf)(c) = 0$; si f est constante, Tf est identiquement nulle, puis généraliser le raisonnement.)

Planche 6 Ulm

L'entier $n > 0$ étant donné, rendre maximal $x_1 x_2 \ldots x_k$, sachant que $k \geqslant 1$ et que les x_i sont des entiers naturels dont la somme est n.

Planche 7 Ulm-Lyon-Cachan

Donner le sous-espace engendré par les matrices nilpotentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Planche 8 Cachan

Soit le système différentiel (V) : $\begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = y(x-1) \end{cases}$ dont on cherche des solutions (x,y) définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^2$.
Trouver quelques solutions remarquables.
Trouver $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^2,\mathbb{R})$ telle que pour toute solution (x,y) de V on ait $f(x,y)$ =constante (cette fonction utilise des logarithmes et possède un extremum strict au point $(1,1)$).
Montrer que toute solution (x,y) du système (V) est périodique.

Planche 9 Ulm-Lyon

Soit $(a_1,\ldots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. On crée une matrice $B = (b_{jk})$ en posant $b_{jk} = \exp\left(i \sum_{p=j}^{k-1} a_p\right)$ pour $1 \leqslant j < k \leqslant n$, et $b_{kk} = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$, et $b_{jk} = -\dfrac{1}{b_{kj}}$ pour $1 \leqslant k < j \leqslant n$.
Quelles sont les valeurs propres de B ? (On pourra se ramener par changement de base au cas particulier où tous les a_j sont nuls, puis introduire la matrice $M = (m_{ij})$ avec $m_{i,i+1} = 1$ pour $1 \leqslant i < n$ et $m_{n1} = -1$, le reste nul).

Planche 10 Lyon abordable en Sup

Quelle est l'allure du graphe de $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx^2+dx+e}$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $d^2 - 4de < 0$?

Cas particulier : $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$; montrer que le graphe de f présente trois points d'inflexion alignés.

Cas général : montrer que le graphe de f présente exactement trois points d'inflexion M_1, M_2, M_3.

On veut montrer que M_1, M_2, M_3 sont alignés.

On pose $\ell_i(x,y) = y - a_i x - b_i$, l'équation de la tangente en M_i étant $\ell_i(x,y) = 0$. On pose aussi $\ell(x,y) = y - ux - v$, l'équation de la droite (M_1M_2) étant $\ell(x,y) = 0$.

Enfin, $F(x,y) = (y - f(x)(cx^2+dx+e)$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $F(x,y) - \lambda\ell(x,y)^3 = 0$ pour tout couple (x,y) tel que $\ell_1(x,y) = 0$. Conclure.

Planche 11

Montrer qu'une matrice carrée à diagonale dominante, c'est à dire $\forall i \in [1,n]$, $|\, a_{ii} \,| > \displaystyle\sum_{i \neq j} |\, a_{ij} \,|$ est inversible.

Une matrice carrée d'ordre n, réelle, $A = (a_{i,j})$ est dite stochastique si et seulement si : $\forall i, j$, $a_{ij} \geqslant 0$ et $\forall i$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$.

Montrer que toute valeur propre de A vérifie $|\, \lambda \,| \leqslant 1$ et que 1 est valeur propre.

Soit λ une valeur propre et X un vecteur propre associé tel que $\|\, X \,\|_\infty = 1$. Montrer que si AX a une coordonnée de module 1, c'est aussi une coordonnée de X. En déduire $\exists p \in \mathbb{R}^*$, $\lambda^p = 1$.

Planche 12

Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$; quel est le rayon de convergence de $h(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$?

Montrer que $h(zz') = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(z\mathrm{e}^{i\theta}) g(z'\mathrm{e}^{i\theta}) \mathrm{d}\theta$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} = \int_0^{2\pi} \cos(\sin\theta) \mathrm{d}\theta$.

Planche 13

Soit p un projecteur, montrer qu'il est équivalent de dire :

(1) p est orthogonal

(2) $\|\, p(x) \,\| \leqslant \|\, x \,\|$

(3) p est autoadjoint.

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux, montrer que $p \circ q \circ p$ est autoadjoint, que $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} q$ sont supplémentaires orthogonaux et que $p \circ q$ est diagonalisable.

Planche 14 Lyon

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif.

$S_2(A) = \{a \in A | \exists (b,c) \in A^2,\ a = b^2 + c^2\}$ est-il stable par $\times$?

Soit $S_3(A) = \{a \in A \mid \exists (b,c,d) \in A^3,\ a = b^2 + c^2 + d^2\}$; montrer que $S_3(\mathbb{Z})$ n'est pas stable par $\times$.

Montrer que $n \equiv -1 \bmod 8 \Rightarrow n \notin S_3(\mathbb{Z})$.

Planche 15 Ulm-Lyon-Cachan I abordable en Sup

I) Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. À quelle condition sur (a,b) l'application $\mathbb{R}-$linéaire $\left|\begin{array}{rcl} u : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az + b\bar{z} \end{array}\right.$ est-elle inversible ?

II) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \mid \forall y \in \mathbb{R},\ f^{-1}(y) =$ un compact. f est-elle majorée ou minorée ? si oui, atteint-elle ses bornes ? (On pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires).

Planche 16 Ulm-Lyon-Cachan abordable en Sup

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.
Montrer qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^n$ tel que $p(e_1), \ldots, p(e_n)$ aient même norme, avec p le projecteur orthogonal sur $vect(u)$.
Exprimer la norme commune à $p(e_1), \ldots, p(e_n)$ en fonction de $\| e_1 \|, \ldots, \| e_n \|$.

Planche 17 Ulm-Lyon-Cachan abordable en Sup

Montrer que toute matrice carrée de trace nulle est semblable à une matrice ayant sa diagonale nulle, puis est de la forme $XY - YX$, X et Y étant deux matrices carrées.

Planche 18 Ulm

Soit une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On crée une matrice A_k de taille $n-1$ en rayant la k-ième ligne et la k-ième colonne. On suppose que A_k possède des valeurs propres réelles $\lambda_1 < \ldots < \lambda_{n-1}$. Soit $f(x) = \det(xI_n - A)$. Déterminer la position des valeurs propres de A en étudiant les $f(\lambda_i)$.

Planche 19

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, continue, telle que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}\{a\}$ est compact dans $\mathbb{R}^n$, admet-elle un extremum global ?

Planche 20 Ulm

Soit $P = a_m X^m + \ldots + a_0 = a_m \prod_{j=1}^{m} (X - \alpha_j) \in \mathbb{C}[X]$, et

$M = \prod_{j=1}^{m} \max(1, |\,\alpha_j\,|)$.

Montrer que : $\forall i\ ; 1 \leqslant i < m$, $|\,a_i\,| \leq |\,a_m\,| \left[\binom{m-1}{i} M + \binom{m-1}{i-1}\right]$.

Planche 21 Lyon

Soit $f(\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\theta)$ avec $a_k \in \mathbb{R}$. On suppose de plus $f(\theta) > 0$, pour tout θ.
Montrer qu'il existe $n+1$ nombres complexes : $b_0, \ldots, b_n$ tels que

$$f(\theta) = \left| \sum_{k=0}^{n} b_k \exp(ik\theta) \right|^2$$

(on pourra utiliser $f(\theta) = \exp(-in\theta) P\big(\exp(i\theta)\big)$ avec :
$P(X) = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{a_{n-1}}{2} X + \ldots + a_0 X^n + \ldots + \dfrac{a_n}{2} X^{2n}$ et expliciter des propriétés des racines de P).

Planche 22 Ulm-Lyon-Cachan

Soit $c \geqslant 0$: trouver les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x^2 + c)$.

Planche 23 Cachan

Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \sim 0$ quand n tend vers l'infini.

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) = \frac{a}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\cdot$

Planche 24 Cachan

Soit la matrice $A = (a_{ij})$ avec $a_{ii} = m$, $a_{i,i+1} = -1$ pour $i < n$, $a_{i,i-1} = -1$ pour $i > 1$ et $a_{ij} = 0$ sinon.
Montrer que pour $m = 2$ A est définie positive.
Montrer que, pour toute valeur propre λ de A, il existe θ réel tel que $\lambda - m = 2\cos\theta$. Quelles sont les valeurs de θ ?

