

École Polytechnique-option MP

Planche 1

Caractériser les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant $[f, f', f''] = 0$.

Planche 2

Soit $S_p = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{16^k} \frac{1}{8k+p}$; comment choisir f_p et a tels que $S_p = \int_0^a f_p(x) dx$? Calculer $S = 4S_1 - 2S_4 - S_5 - S_6$.

Planche 3 abordable dès la 1e année

Soient A, B, C et D quatre points de $\mathbb{R}^3$ euclidien. Montrer que la proposition «le projeté orthogonal de A sur (BCD) est l'orthocentre de BCD » est symétrique sur A, B, C, D .

Planche 4 abordable dès la 1e année

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit (u_n) par $u_0 = 1$, $u_1 = 2 \cos \theta$ et $u_{n+2} = 2 \cos \theta u_{n+1} - u_n$. Déterminer (u_n) .

Montrer que $\frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$ est un polynôme en $\cos \theta$.

Montrer que $\frac{\sin n\theta}{\sin^n \theta}$ est un polynôme en $\cotan \theta$.

Planche 5

I) Soient A et B deux matrices carrées de taille n telles qu'il existe $n+1$ valeurs de λ telles que $A + \lambda B$ soit nilpotente.

Montrer que A et B sont nilpotentes.

II) Soit X une partie de $\mathbb{R}_+^*$ contenant au moins deux éléments et telle que pour tout $(a, b) \in X^2$, $\sqrt{ab} \in X$.

Montrer que les irrationnels de X sont denses dans $] \inf X, \sup X[$.

Planche 6

Si M est un point du plan, on pose $f(M) = AM + BM + CM \in \mathbb{R}$ où A, B, C sont les sommets d'un triangle dont tous les angles sont strictement inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$.

Montrer que f admet une borne inférieure, atteinte à l'intérieur du triangle, en un point distinct des sommets.

Planche 7 abordable dès la 1e année

Montrer que f continue sur un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et vérifiant $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$, est convexe.

Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue, telle que :

$\exists M \geq 0, \forall a, h, |f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)| \leq Mh^2$.

Montrer que $g : x \mapsto f(x) + \frac{Mx^2}{2}$ est convexe.

Planche 8

Soient E un espace vectoriel, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, $x_i \neq 0$.

Existe-t-il $f \in E^* / \prod_{i=1}^n f(x_i) \neq 0$?

Indication : traiter d'abord le cas où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, avec p premier.

Planche 9 abordable dès la 1e année

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [a; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$, $\forall x_0 \in [a; +\infty[, \exists M_{x_0} / \forall x \in [a; x_0], f(x) \leq M_{x_0}$.

Montrer que $l = \inf \frac{f(x)}{x}$ existe et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l$.

Planche 10

I) Montrer que les zéros de y , solution non nulle de $y'' + fy = 0$, où f est continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, sont isolés.

Minorer $\int_a^b |f|$, où a et b sont deux des zéros évoqués.

Indication : montrer que $\phi(x) = (b-a)y(x)$ avec

$$\phi(x) = (b-x) \int_a^x (t-a)f(t)y(t)dt + (x-a) \int_x^b (b-t)f(t)y(t)dt.$$

II) $B = \begin{pmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Si oui la diagonaliser.

Planche 11

Étudier $f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\exp(-xt) \int_0^t \frac{\sin u}{u} du \right) dt$.

Planche 12

Nature des séries de terme général $u_n = \frac{e^{i\sqrt{n}}}{n}$ et $v_n = \frac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Planche 13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\text{tr}(A^k) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$. Montrer que les valeurs propres de A sont de module inférieur à 1.

Planche 14 III abordable dès la 1e année

I) Soit f continue sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$; montrer que si a et b sont deux réels strictement positifs, $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+a} dt$ converge si et

seulement si $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+b} dt$ converge aussi.

II) Soient A et B symétriques réelles et positives, montrer que $\det(A+B) \geq \det A + \det B$.

III) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, scindé et à racines simples.

Montrer que P ne peut admettre deux coefficients nuls consécutifs. Montrer qu'aucun coefficient nul de P ne peut être «encadré» de deux coefficients de même signe.

Planche 15 abordable dès la 1e année

Soit f continue sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Montrer que $\forall n \geq 1, \exists (a_0, \dots, a_n) \in [0, 1]^{n+1}$ vérifiant :

$$\forall i \in [0, n-1], \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt = \frac{1}{n} \int_0^1 f(t)dt.$$

Que dire de la suite de terme général $u_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$.

Que se passe-t-il si f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$?

Planche 16

Montrer que $f(x) = \int_1^{+\infty} e^{itx} dt$ existe pour $x > 1$ et trouver un équivalent de f quand x tend vers $+\infty$.

Planche 17

Résoudre $|y''| = y$ dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Planche 18

I) Que dire de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = M^2$ et $\text{tr } M = n$?

II) Soit $f \in C_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; montrer l'existence de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$ et la calculer.

III) Trouver un développement en série entière au voisinage de 0 de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$.

Planche 19 abordable dès la 1e année

I) Soient (u_n) et (v_n) deux suites complexes telles que $(u_n + v_n)$ et $(u_n^3 - v_n^3)$ tendent vers 0. A-t-on pour unique possibilité (u_n) et (v_n) tendent vers 0 ?

II) Est-il possible d'écrire $\frac{1}{1215}$ sous la forme $\sum \frac{p}{q^i}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et q un élément de la décomposition de 1215 en facteurs premiers ? Si oui, le faire.

Planche 20

Trouver une solution de $ty'' + y' + ty = 0$.

Connaissez-vous une méthode pour trouver toutes les solutions à partir de la série entière f ainsi trouvée ?

Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) \exp(-xt) dt = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Planche 21 I abordable dès la 1e année

I) Soit u un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, S un sous-espace stable tel que $E = S + \text{Im } u$. Montrer que $S = E$.

II) Existe-t-il des normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall P \in GL_n(\mathbb{C}), \|PAP^{-1}\| = \|A\|$?

Planche 22

Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E .

Montrer que f définie sur K , à valeurs dans K et telle que $\forall (x, y) \in K^2, d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$, est une isométrie.

Planche 23

Montrer que, de la suite de terme général $u_k = z_1^k + \dots + z_n^k$ où les z_i sont des complexes de module 1, on peut extraire une sous-suite convergeant vers n .

Planche 24 abordable dès la 1e année

Déterminer les polynômes Q de $\mathbb{R}[X]$ tels que $Q(1) = 1, Q'(1) = 2, Q''(1) = 3, Q(2) = 4, Q'(2) = 5, Q''(2) = 6$.

Planche 25

On note F l'ensemble des applications continues sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et g continue et croissante de $[-1, 1]$ dans lui-même. Montrer que si E est un sous-espace de F stable par l'application ϕ définie par $\phi(f) = f \circ g$, alors $\forall f \in E, f = f \circ g$.