Concours Commun Centrale-Supélec – option MP

Planche 1

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique (c'est à dire que son laplacien est nul) sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ contenant le disque unité ; on note $F(r,t) = f(r\cos t, r\sin t)$.

Vérifier, à l'aide de Maple, que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F}{\partial r} - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 F}{\mathrm{d}t^2} = 0$.

On note (c_n) la suite des coefficients de Fourier de $f(\cos t, \sin t)$ et $c_n(r)$ le $n^{\text{ième}}$ coefficient de $f(r\cos t, r\sin t)$.
Montrer que $c_n(r)$ est $\mathcal{C}^2$ et vérifie $r^2 c_n''(r) + r c_n'(r) - n^2 c_n(r) = 0$.
Résoudre cette équation différentielle (on cherchera des solutions de la forme r^b) et vérifier à l'aide de Maple.
Exprimer $c_n(r)$ en fonction de c_n et de $r^{|n|}$.

Planche 2

Montrer que $\|u\| = \sqrt{\mathrm{tr}(u^2)}$ définit une norme euclidienne sur l'ensemble $S(E)$ des endomorphismes auto-adjoints de E euclidien de dimension n.
Si p et q sont deux projecteurs de rang $n-1$ de E, montrer que toute valeur propre λ de $p-q$ est de module au plus égal à 1.
Montrer que $\|p-q\| \leqslant \sqrt{2}$ et étudier le cas d'égalité.

Planche 3

Montrer que l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de $f'(x) = f(\lambda x)$, où $\lambda \in\,]0,1[$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Montrer que les solutions f sont développables en série entière au voisinage de 0, expliciter ce développement et donner son rayon de convergence.

Planche 4

Ensemble de définition de $L(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$; est-elle $\mathcal{C}^0$ sur cet ensemble ? Est-elle $\mathcal{C}^1$? Déterminer f telle que $L(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

Calculer $f(1)$ et $f(-1)$ à l'aide de Maple. Donner une expression simple de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n + (1-x)^n}{n^2}$, sans signe $\int$ et vérifier avec Maple.

Montrer qu'il existe A tel que, pour $x \in [0,1]$:

$$L(x) + L\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big) - L(-x) - L\Big(\frac{x-1}{1+x}\Big) = A + \ln\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)\ln x.$$

Planche 5

Pour p donné dans $\mathbb{N}$, on note S l'ensemble des suites vérifiant :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = \dfrac{1}{p}(u_{n+p-1} + \ldots + u_n)$. Montrer que :

$e_0 = (1,0,\ldots,0)$, $e_1 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, e_{p-1} = (0,\ldots,0,1)$ sont p suites de S en constituant une base.

Montrer que l'application T qui, à la suite de terme général u_n, associe la suite de terme général u_{n+1}, est un endomorphisme de S dont on caractérisera les valeurs et vecteurs propres.

Donner la matrice de T dans la base définie ci-dessus.

Dans le cas $p = 3$, trouver les valeurs et vecteurs propres à l'aide du logiciel de calcul formel choisi.

Planche 6

Donner les bornes de $F(x,y,z) = \dfrac{x^2 + 2y^2 - 4z^2 + 2yz}{x^2 + 2y^2 + 4z^2}$ dans $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$, d'abord en utilisant les formes quadratiques, puis en utilisant Maple.

Planche 7 abordable dès la 1re année

Peut-on piper deux dés pour qu'il y ait équiprobabilité sur l'ensemble des sommes possibles obtenues en les lançant simultanément (on pourra utiliser des polynômes bien choisis) ?

Planche 8 abordable dès la 1re année

I) Montrer que les suites $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n.n!}$ sont adjacentes et convergent vers un irrationel.

II) Donner deux exemples de deux sous-espaces supplémentaires dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
Pour $H_1 \oplus H_2 = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, on a $\forall (f,g) \in H_1 \times H_2$, $f \circ g + g \circ f = 0$.
Montrer que, si $(p_1, p_2) \in H_1 \times H_2$ vérifient $p_1 + p_2 = Id$, alors ce sont des projecteurs.
Montrer que $\dim H_1 \leqslant (n - \operatorname{rg} p_2)^2$, $\dim H_2 \leqslant (n - \operatorname{rg} p_1)^2$.
Donner le nombre de possibilités pour choisir H_1 et H_2.

Planche 9

Pour E $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $a \in E$, on note B_a l'ensemble des compacts de E symétriques par rapport à a.
Montrer que, pour K compact non vide, $\delta(K) = \sup_{(x,y)\in K^2} \| x - y \|$ est défini ; est-il atteint ?
Montrer que $T(B) = \{x \in B, \forall y \in B, \| x - y \| \leqslant \frac{1}{2}\delta(B)\}$ définit une application de B_a dans B_a.
Soit $B_0 \in B_a$ et $B_{n+1} = T(B_n)$; déterminer l'intersection des B_n pour $n \geqslant 0$. Montrer que toute isométrie de E conserve les milieux.

Planche 10 I abordable dès la 1re année

I) Soit f dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, A et B deux points distincts de sa courbe représentative (C) tels que B est sur la tangente à (C) en A ; montrer qu'il existe un point M de (C), distinct de A, tel que A est sur la tangente à (C) en M.

II) Pour $0 < a < 1$, déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que $f(x) = \int_0^{ax} f(t)\mathrm{d}t$.

Planche 11

La suite donnée par $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \int_0^{+\infty} \operatorname{Arc}\tan(tx_n)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est-elle définie ? À l'aide de Maple, calculer ses 50 premiers termes et faire une conjecture.
Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \operatorname{Arc}\tan(tx)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ et tracer sa courbe sur Maple entre -10 et 10. Étudier (x_n).
On choisit $x_0 > 0$; déterminer un réel α tel que $(x_{n+1}^\alpha - x_n^\alpha)$ converge vers un réel non nul et en déduire un équivalent de x_n.

Planche 12

Montrer que la matrice du système différentiel $S : \begin{cases} x' = 2y + z \\ y' = -2x - 2z \\ z' = -x + 2y \end{cases}$ e ce système est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
Montrer qu'elle est semblable en tant que matrice réelle à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Résoudre S avec les conditions $x(0) = -7$, $y(0) = 16$, $z(0) = 8$.
Montrer que toutes les courbes-solutions sont des cercles.

Planche 13 abordable dès la 1re année

I) Étudier la courbe $r(\theta) = a\,\frac{\cos(2\theta)}{\cos\theta}\cdot$ Calculer l'aire de la boucle.
Donner une valeur approchée de la longueur de la boucle.

II) Tracer le graphe de :
$f(x) = \operatorname{Arc}\cos(\cos x) + \frac{1}{2}\operatorname{Arc}\cos(\cos 2x) + \frac{1}{6}\operatorname{Arc}\cos(\cos 3x)$.

Planche 14 abordable dès la 1re année

Avec Maple : donner l'équation implicite de la courbe (C) décrite par le point $M(t) = (2\cos(t), \sin(t))$ et la tracer.
Déterminer l'ensemble U des centres des cercles passants par l'origine et tangents à C. Tracer U. Trouver les points stationnaires de U.

Planche 15

Déterminer la série de Fourier de f, 2π-périodique, définie sur $[0, 2\pi]$ par la ligne brisée passant $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$, $(\pi, 0)$ et $(2\pi, 0)$.

Vérification du résutat : valeur en $t = \frac{\pi}{2}$, formule de Parseval, graphe des sommes partielles pour $n \leqslant 10$.

On note $g = f'$, dont l'expression est obtenue par dérivation formelle de la série de Fourier de f. Prévoir ce qui se passe pour $g(\frac{\pi}{2})$ et vérifier cette conjecture.

Que peut-on dire des primitives de f et de $h(t) = f(t) - f(t + \pi)$?

Planche 16

Montrer que l'équation $2xy' + y = \dfrac{1}{1-x}$ admet une unique solution f dérivable et définie sur $]-\infty, 1[$.

Montrer que f est strictement monotone sur $]-\infty, 1[$.

Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$.

Planche 17 abordable dès la 1re année

On veut montrer que si l'ensemble de ses automorphismes est monogène, un groupe G est abélien.

Pour $g \in G$, montrer que ϕ_g défini par $\phi_g(x) = g^{-1}xg$ est un automorphisme de G.

Montrer que l'ensemble $Int(G) = \{\phi_g,\, g \in G\}$ est un sous-groupe du groupe des automorphismes de G noté $Aut(G)$.

Justifier qu'un sous-groupe d'un groupe monogène est monogène.

Montrer enfin que si $Aut(G)$ est monogène, G est abélien.

Planche 18

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{C}^{n+1}$, on note $F_x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k \cos^{n-k} \sin^k$.

Montrer que $\exists! y \in \mathbb{C}^{n+1}$, $F'_x = F_y$; on pose $\phi_n(x) = y$.

Montrer que ϕ_n est un endomorphisme de $\mathbb{C}^{n+1}$.

Expliciter ϕ_3 à l'aide de Maple et trouver sa matrice dans la base canonique. Est-elle diagonalisable ? Trouver ses vecteurs propres.

Mêmes questions pour ϕ_4. Étudier le cas général.

Planche 19 abordable dès la 1re année

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 4, ℓ_1 et ℓ_2 deux formes linéaires indépendantes sur E.

Montrer que, si $b = (e_1 \ldots, e_4)$ est une base de E, la matrice M de terme général $m_{i,j} = \ell_1(e_i)\ell_2(e_j) - \ell_2(e_i)\ell_1(e_j)$ est antisymétrique de rang 2. On pourra commencer par le cas d'une base b_0 bien choisie.

Inversement, établir que toute matrice antisymétrique réelle d'ordre 4 et de rang 2 est de cette forme.

Établir que $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, antisymétrique, est de rang $\leqslant 2$ si et seulement si $m_{12}m_{34} - m_{13}m_{24} + m_{14}m_{23} = 0$.

Quelles sont les valeurs possibles du rang d'une matrice réelle antisymétrique d'ordre 4 ?

Planche 20

Soit f paire, 2π-périodique, définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall\, t \in [0\,, \pi]$, $f(t) = \sqrt{t}$.

Montrer que les coefficients de Fourier trigonométriques $a_n(f)$ sont des $O(\dfrac{1}{n^{3/2}})\cdot$ La fonction f est-elle $\mathcal{C}^1$ par morceaux ?

Montrer que la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$, et ce vers f. Que peut-on conclure de tout cela ?

Planche 21 I abordable dès la 1re année

I) Montrer que 1 est valeur d'adhérence de $n \longmapsto \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$, puis déterminer toutes les valeurs d'adhérence de cette suite.

II) Déterminer la limite quand $x \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x \cos t)\mathrm{d}t$.

Planche 22 abordable dès la 1re année

Avec Maple : soit Γ la courbe d'équation $\begin{cases} x = \dfrac{t-1}{t^2-4} \\ y = \dfrac{t^2-3}{t+2} \end{cases}$

Trouver une condition pour que les points de Γ de paramètres r, s, t soient alignés.
À l'aide de cette condition, trouver les points doubles de Γ et l'équation de la tangente à Γ en $M(t)$. Trouver les asymptotes.

Planche 23

Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de coefficients (m_{ij}), dont les valeurs propres sont les m_{ii}.

Donner des conditions sur a, b, c pour que $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 1 & 2 & 1 & c \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ vérifie la même propriété.
Montrer qu'une matrice vérifiant cette propriété est diagonale dès qu'elle est symétrique, et nulle dès qu'elle est antisymétrique.

Planche 24

Résoudre $y'' = |\,y\,|$. Représenter les solutions. Quelles sont les solutions de classe $\mathcal{C}^\infty$? Est-ce un problème de Cauchy ?
On impose $y(\alpha) = a$ et $y(\beta) = b$. Discuter le nombre de solutions en fonction de (a, b, α, β).

Planche 25

Soient $B \in \mathcal{M}_{nr}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{rn}(\mathbb{R})$, toutes deux de rang $r \geqslant 1$; montrer que $A = BC$ est de rang r.
Montrer l'existence d'une telle décomposition pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang $r \geqslant 1$. Application, suivant a, à $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & a \end{pmatrix}$.

Montrer que si A est symétrique de rang r, CB est de rang r.
Trouver une CNS sur $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r pour que CB soit de rang r.

Planche 26

Domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$.
f est-elle $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine ? Donner ses dérivées successives.
Donner un équivalent de f en 0 et $+\infty$ et calculer $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Planche 27

Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est $\mathbb{Q}$-libre.
Soient f et g continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, de période 1 ; montrer que si $(1, \alpha, \beta)$ est $\mathbb{Q}$-libre, $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(1-\alpha)g(1-\beta) = c_0(f)c_0(g)$
(on pourra commencer par $f(x) = \mathrm{e}^{i2p\pi x}$, $g(x) = \mathrm{e}^{i2q\pi x}$ puis poursuivre par des polynôme trigonométrique).
Montrer que $\{(n\alpha - [n\alpha], n\beta - [n\beta]),\ n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[0,1]^2$ pour $(1, \alpha, \beta)$ $\mathbb{Q}$-libre.

Planche 28 abordable dès la 1re année

Soient n vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ d'un espace E de dimension p.
Montrer que $q(T) = \left\| \displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \right\|^2$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.
Montrer que $C = \{T \in \mathbb{R}^n,\ q(T) = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ dont on précisera la dimension.
On note G la matrice telle que $q(T) = {}^t TGT$.
Montrer que $\det G \neq 0$ si et seulement si $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre.
On note Δ le déterminant de $(x_1, \ldots, x_n)$ supposée libre, dans une base orthonormale directe de $F = Vect(x_1, \ldots, x_n)$.
Montrer que $\Delta^2 = \det G$.

Planche 29

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)\sqrt{x-t}}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $f(x)$ pour $\alpha = 1$. f est-elle continue sur $\mathbb{R}_+^*$? Dérivable ? Donner un équivalent simple de f en 0.
Pour $0 < \alpha < 1$, donner un équivalent simple de f en $+\infty$. Même question pour $\alpha > 1$.

Planche 30

On note t_n le cardinal de l'ensemble des permutations f de $[1, n]$ telles que $f \circ f = \mathrm{Id}$. Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $t_n = t_{n-1} + (n-1)t_{n-2}$ puis calculer t_n à l'aide de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t_n}{n!}\, x^n$.

Planche 31

I) Avec Maple : soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n définie et positive, v un vecteur propre de A, E_v l'ensemble des vecteurs x tels que $(v|x) \neq 0$ et ϕ définie par $\phi(x) = \dfrac{(Ax|x)}{(v|x)^2}$.
Montrer que ϕ n'est pas majorée, qu'elle est minorée et admet un minimum que l'on calculera.
Calculer, à l'aide, par exemple, d'un logiciel de calcul formel, les valeurs propres et les vecteurs propres de $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ calculer le minimum de ϕ.

II) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que ${}^tAA \in S_n^+(\mathbb{R})$.
Que dire si A est inversible ?

Planche 32

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; quelle relation y-a-t-il entre le cardinal r de son spectre et le degré s de son polynôme minimal ?

À l'aide de Maple, calculer r et s pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$. Calculer $M = \big(\mathrm{tr}(A^{i+j-2})\big)_{1\leqslant i,j\leqslant s}$ dans chaque cas ; à quelle condition sur a, M est-elle inversible ?
On veut montrer que, dans le cas général, M est inversible si et seulement si A est diagonalisable. On suppose A diagonalisable, on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de A et $m_1, \ldots, m_r$ leur ordre de multiplicité respectif.

Calculer $\det M$ à l'aide de $V_r = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \ldots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}$ et en déduire que M est inversible.
Montrer que si A n'est pas diagonalisable, M n'est pas inversible.

Planche 33

Montrer que $M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sauf pour deux valeurs de $z \in \mathbb{C}$ que l'on précisera.
Donner, en coordonnées polaires, l'ensemble des z tels que $M(z)$ admet une valeur propre de module 1 et représenter cet ensemble.
Montrer que, pour $|\,z\,|$ assez petit, la suite $(M(z)^n)$ tend vers 0.

Planche 34

$I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ est-elle définie ?

Calculer $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t\mathrm{d}t$ en fonction de la parité de n.

En déduire que $\left(\dfrac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 1}\right)^2 \sim \pi p$.

Montrer que, pour $0 < t < \sqrt{n}$, $\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{-n} \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$

et en déduire la valeur de I.

Planche 35

Montrer que $\mathrm{tr}({}^tAA)$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que, pour B symétrique vérifiant $\|B\|^2 \leqslant \dfrac{9n}{16}$, on ne peut pas trouver M symétrique telle que $B = M^2 + M + I_n$.
Montrer que $\mathrm{tr}(AA^*)$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $|\,\mathrm{tr}\,A\,| \leqslant \sqrt{n\,\mathrm{tr}(AA^*)}$.

Planche 36

Montrer que tout endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace stable par u a ses supplémentaires stables par u. Ce résultat persiste-t-il dans $\mathbb{R}^n$?
Montrer que :
u est diagonalisable $\iff \forall\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Ker}(u-\lambda\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(u-\lambda\,\mathrm{Id})^2$.
Ce résultat persiste-t-il dans $\mathbb{R}^n$?

Planche 37 II abordable dès la 1$^{\text{re}}$ année

I) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est trigonalisable dans $\mathbb{R}$, mais non diagonalisable. Montrer que $\{0\} \subset Sp(A) \subset \{-1, 0, 1\}$.
Montrer que les sous-espaces propres de A sont de dimension 1.
Résoudre l'équation $M^2 = A$.
II) Déterminer les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Planche 38

Soit la matrice réelle d'ordre n, de terme général $m_{i,j}$ tel que $m_{i,\,i+1} = 1$, $m_{i,\,1} = i$, les autres termes étant nuls. Que vaut χ_M ?
Montrer que les sous-espaces propres de M sont de dimension 1.
Pour $n = 3$, est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$?
Montrer que M possède dans $]0, +\infty[$ une unique valeur propre x_n.
Quelle est la limite de x_n ?

Planche 39

Calculer les intégrales suivantes :

$I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t}\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$, $J_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{ixt}t^{\alpha-1}\mathrm{d}t$ pour $\alpha > 0$,

$K = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t$, $L = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

Planche 40

Avec Maple : soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, D un compact convexe inclus dans U et f de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$.
Montrer que, pour D rectangle (de côtés parallèles aux axes ?) :

$$A(f) = \iint_D f(x,y)\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\Big) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

s'exprime comme une intégrale simple sur le contour de D que l'on précisera.
Pour $f = 1 + x + x^2 + y + y^3$ et $D = [0,1]^2$, calculer $A(f)$ par les deux méthodes (intégrale simple et double).
On choisit pour D le disque de centre O et rayon R ; exprimer $A(f)$ en polaires en posant $f(x,y) = g(\rho,\theta)$.
Calculer $A(f)$ pour $g(\rho,\theta) = \rho^3\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta$.

Planche 41

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AM = MA\}$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que, si A possède n valeurs propres distinctes, alors $C(A)$ est de dimension n.
Montrer que $C(A)$ est de dimension au moins égale à n.

Planche 42

Avec Maple : montrer que la matrice $M \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ de coefficient générique $m_{i,j} = \min(i, j)$ est symétrique définie positive ; puis trouver une matrice T triangulaire inférieure à termes diagonaux strictement positifs telle que $M = T^tT$.
On veut montrer que, pour toute matrice réelle A symétrique définie positive d'ordre n, il existe une unique matrice triangulaire inférieure T à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $A = T^tT$.
Montrer que, si A est symétrique définie positive d'ordre n, la matrice A_k obtenue en supprimant les $n-k$ dernières lignes et les $n-k$ dernières colonnes de A a un déterminant strictement positif.
Montrer le résultat pour $n = 2$.
Montrer le résultat dans le cas général (on pourra rechercher T sous la forme $\begin{pmatrix} U & 0 \\ v & c \end{pmatrix}$, où $U \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$).

Planche 43

Soit f continue sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Montrer que f est intégrable sur $]0, x]$; on note $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
Montrer qu'il existe une constante $k > 0$ telle que $\forall x, y \in]0, +\infty[^2$, $|\,F(x) - F(y)\,| \leqslant k\sqrt{|\,x - y\,|}$.
En déduire que F est uniformément continue.
Calculer les limites en 0^+ et $+\infty$ de $\dfrac{F(x)}{\sqrt{x}}$.

Planche 44

Montrer que $f_1(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.
Pour $-1 \leqslant b < c \leqslant 1$, on pose $f_2(P) = P(b)$, $f_3(P) = P(c)$; trouver une condition nécessaire et suffisante pour que (f_1, f_2, f_3) soit lié et exprimer f_1 en fonction de f_2 et f_3.
On note $a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$: montrer que ϕ défini sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $\phi(P) = \big(P(-a), P'(-a), P(a), P'(a)\big)$ est un isomorphisme dans $\mathbb{R}^4$.
Trouver les polynômes P_i dont l'image par ϕ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\exists!(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$, tels que $f_1(P) = a_1P(-a) + a_2P'(-a) + a_3P(a) + a_4P'(a)$.

Planche 45

Avec Maple : montrer que $(P, Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
Montrer que, pour ce produit scalaire, il existe une unique base orthonormée $(H_0, \dots, H_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que H_i soit de degré i et de coefficient dominant positif. Calculer H_0, H_1, H_2, H_3.
Montrer que l'ensemble F des fonctions f continues telles que : $\exists n$, $f(t) = O(|\,t\,|^n)$ est un espace vectoriel et que l'on définit un produit scalaire sur F en posant $(f, g) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.
Montrer que pour $f \in F$, il existe un polynôme P_n de $\mathbb{R}_n[X]$ que l'on explicitera tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\|\,f - P\,\| \leqslant \|\,f - P_n\,\|$.
Pour $a_n = (H_n, f)$, montrer que $\sum a_n^2$ converge.

Planche 46

Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si $\forall k \in [1, n]$, $\mathrm{tr}\, M^k = 0$.
Montrer que si $\forall k \in [1, n-1]$, $\mathrm{tr}\, M^k = 0$ et $\mathrm{tr}\, M^n \neq 0$, alors M est diagonalisable.

Planche 47

I) Soit E euclidien de dimension n muni d'une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$. Soit $M = (m_{ij})$ avec $m_{ij} = (u_i|u_j)$ où $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille de vecteurs de E.
Montrer qu'il existe P carrée d'ordre n telle que $M =^t PP$.
Montrer que M est symétrique positive et qu'elle est définie si et seulement si $(u_1, \dots, u_n)$ est libre.

Réciproquement, montrer que si M est symétrique, réelle, définie et positive, il existe une matrice inversible P telle que $M = {}^t PP$. Déduire qu'il existe une base $(u_1, \dots, u_n)$ de E telle que $m_{ij} = (u_i|u_j)$.

Déterminer P inversible telle que $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = {}^t PP$.

II) Montrer que si f est un automorphisme orthogonal de E euclidien, $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires orthogonaux. Quelles sont les valeurs propres possibles pour f ?

Planche 48

I) Calculer $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k$.

II) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^n \sin(\pi t) \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t$.

Planche 49

Étudier la suite de terme général $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.

Montrer la convergence de $\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n a_n$ et l'exprimer à l'aide d'une intégrale.

Montrer que $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ diverge (on pourra chercher une relation de récurrence entre les a_n et en donner un équivalent).

Calculer $\sum_{n \geqslant 1} a_n x^n$ et préciser son rayon de convergence.

Planche 50

Montrer que si $\prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ est le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $F_i = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I_n)^{\alpha_i}$, $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

Montrer que si A et B commutent, les sous-espaces propres de A et les F_i sont stables par B.

Résoudre $X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $X^3 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Planche 51

Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'équation $\mathrm{tr}(A)X - \mathrm{tr}(X)A = B$ où A et B sont deux matrices fixées avec $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

Étudier l'endomorphisme défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $f(X) = X + \mathrm{tr}(X)A$ où A est une matrice fixée, puis résoudre l'équation $f(X) = B$ (on pourra chercher un polynôme annulateur de f).

Planche 52

Existence et calcul de $I = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} \,\mathrm{d}t$.

Existence et calcul de $J = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} \,\mathrm{d}t$ (on pourra effectuer un changement de variable).

On pose $J(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} \,\mathrm{d}t$; pourquoi, à votre avis ?

Planche 53

Soient a, b deux valeurs propres d'un endomorphisme u d'un espace euclidien E vérifiant $ab \leqslant 0$, x et y deux vecteurs propres associés respectivement à a et b. Montrer qu'il existe z, combinaison linéaire de x et y, orthogonal à $u(z)$.

On suppose u de trace nulle ; montrer l'existance d'un vecteur x unitaire orthogonal à $u(x)$ (on pourra s'intéresser d'abord au cas où u est autoadjoint).

Montrer que u est de trace nulle si et seulement si il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice de u n'a que des 0 sur sa diagonale.

Planche 54

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, comparer $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1+\binom{n}{k}}{k}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{2^k}{k}$ pour $1 \leqslant n \leqslant 50$; que peut-on conjecturer ? Montrer cette conjecture (on pourra utiliser une expression intégrale de $\dfrac{2^k-1}{k}$).
Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, non intégrable sur $[1,+\infty[$ et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$; calculer $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{f(p+1)}{f(p)}$.
Montrer que, en $+\infty$, $f(p+1) - f(p) \sim \dfrac{\alpha}{\mathrm{e}^\alpha - 1} \displaystyle\int_1^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$.
Donner un équivalent de (v_n) et de $\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\binom{n}{k}\right)$.

Planche 55

On note π_A le polynôme minimal de $A \in \mathcal{M}_n(K)$.
Montrer que, pour $v \in K^n$, $I(A,v) = \{P \in K[X],\ P(A)v = 0\}$ est un idéal de $K[X]$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $\pi_{A,v}$ tel que : $I(A,v) = \pi_{A,v}K[X]$. Quelle relation y-a-t-il entre π_A et $\pi_{A,v}$?
Montrer que le degré de $\pi_{A,v}$ est le $k \in [1,n]$ maximal tel que $(v, Av, \dots, A^{k-1}v)$ soit libre.
Pour $n = 10$, on choisit les coefficients a_{ij} de A de la manière suivante : $a_{1j} = a_{nj} = a_{in+1-j} = 1$ et $a_{ij} = 0$ sinon.
v est pris au hasard dans $\{-1,0,1\}^{10}$, soit $M = (v, Av, \dots, A^{10}v\}$.
Trouver $\pi_{A,v}$ à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Planche 56

$F_n(x,y) = \dfrac{\cos(nx) - \cos(ny)}{\cos x - \cos y}$ définit-elle une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ tout entier ? Étudier les extrema de F_4 avec Mathematica.
Calculer $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x,y)\mathrm{d}y$ par récurrence (ou autre).

Planche 57

Que dire de (u_n) définie par $u_{n+1} = 2u_n + 2\sqrt{u_n(u_n+1)}$ et $u_0 > 0$?
Pour $u_0 = 1$, calculer, à l'aide de Maple, $u_k 4^{-k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant 10$.
Soit $I_n = \displaystyle\int_{u_n}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x}}$; calculer $\dfrac{I_n}{I_{n+1}}$ à l'aide de Maple pour $u_0 = 1$ et $0 \leqslant n \leqslant 9$. Que peut-on conjecturer ?
Que se passe-t-il pour une autre valeur de u_0 ?
Démontrer la relation conjecturée entre I_n et I_{n+1}.
Donner la fonction réciproque sur $\mathbb{R}_+^*$ de $I(u) = \displaystyle\int_u^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x}}$.

Planche 58 I abordable dès la 1^{re} année

I) Soit P de degré au moins 2, réel, scindé et à racines simples réelles. Montrer que P' est aussi scindé et à racines simples, que P ne peut admettre deux coefficients consécutifs nuls et qu'il ne peut admettre un coefficient nul encadré par deux coefficients de même signe.
II) Soit p le projecteur orthogonal d'un espace euclidien E sur un sous-espace F et u un endomorphisme autoadjoint de E. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $p \circ u$ soit autoadjoint.

Planche 59

Soit f une application d'une partie compacte K d'un espace vectoriel normé E, à valeurs dans K et vérifiant :
$\forall (x,y) \in K^2,\ x \neq y \Rightarrow \|\, f(x) - f(y)\,\| < \|\, x - y\,\|$.
Montrer que f possède une unique point fixe a.
Montrer que pour tout u_0 de K, la suite définie par :
$u_{n+1} = f(u_n) = f^{n+1}(u_0)$ tend vers a.

Planche 60

Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f est développable en série entière.
Montrer que f s'annule une et une seule fois sur $]\frac{\pi}{2}, \pi[$.
Expliciter le développement en série entière de f.

Planche 61

Soit $g \in E$, ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et T défini sur E par $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$.
Trouver une relation entre les coefficients de Fourier de $T(f)$, f et g.
Trouver les éléments propres de T.

Planche 62

Extrema de $X = (x, y) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \dfrac{x^2 - xy + 5y^2}{x^2 + xy + y^2}$ et indiquer les couples pour lesquels ils sont atteints.
Même question pour $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n \longmapsto \dfrac{q(X)}{Q(X)}$, où q et Q sont des formes quadratiques, et où Q est définie positive.

Planche 63

Soit deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que $\chi_A = \chi_B \Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(B^k)$.
Montrer que $\forall A,\ \mathrm{tr}(AB) = 0 \Longrightarrow B = 0$.
Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
B nilpotente et $BA = 0$; $\forall M,\ \chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.

Planche 64

Étudier la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,\mathrm{d}t$.
En donner un équivalent quand $x \to +\infty$.
On pose $a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(1+t^3)^n}}\,\mathrm{d}t$. Étudier la série entière $\sum a_n x^n$.

Planche 65 II abordable dès la 1^{re} année

I) Soit f continue et croissante sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Montrer que les séries de terme général $u_n = f(\mathrm{e}^{-n})$ et $v_n = \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ sont de même nature.
II) Que peut-on dire de f (injectivité, surjectivité, monotonie) continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telle que $\exists n \in \mathbb{N},\ f^n = -\mathrm{Id}$.

Planche 66 abordable dès la 1^{re} année

Avec Maple : étudier la courbe d'équations $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^4} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^4} \end{cases}$
Est-il équivalent de dire : « $M(x,y)$ est sur la courbe » et « (x,y) vérifie $(x^2+y^2)^2 - xy = 0$ » ?
Donner les conditions sur a, b, c pour que les points de paramètres a, b, c soient alignés.
Même question pour quatre points de paramètres (a, b, c, d).
Comment interpréter ce résultat ? Quel est le lien avec la condition trouvée pour trois points ?

Planche 67

I) Donner la définition et quelques propriétés de $\|u\|$ où u est un endomorphisme d'une espace euclidien.
Montrer que $\|u\| = \displaystyle\sup_{\|x\| \leqslant 1,\, \|y\| \leqslant 1} \left| \big(u(x)|y\big) \right|$ et en déduire que $\|u\| = \|u^*\|$.
Montrer que $\|u \circ u^*\| = \|u^* \circ u\| = \|u\|^2$.
Soit p un projecteur ; montrer que $\|p\| \geqslant 1$ avec égalité si et seulement si p est orthogonal.

Planche 68

I) Existence de la série de fonctions $f(a) = \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-a^2n^2}$.

Calculer $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ avec Maple, puis $\lim_{a\to 0} af(a)$ et $\lim_{a\to+\infty} f(a)$.

II) Nature de la série de terme général $\cos\left(n^2\pi h\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$.

Planche 69

Soit M symétrique réelle d'ordre n de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & {}^tC \\ C & S \end{pmatrix}$ où S est symétrique réelle d'ordre $n-1$.
Montrer que si M est définie positive S l'est aussi et $\alpha > 0$.
Étudier la réciproque.
Montrer que M est définie positive de déterminant strictement positif, si et seulement si S est définie positive et $\alpha > 0$.

Planche 70

Chercher les solutions de $y'' + \mathrm{e}^{-x}y = 0$ sous la forme d'une série de fonctions $u_n(x)$, du type $u_n(x) = (a_nx + b_n)\mathrm{e}^{-nx}$ sur $\mathbb{R}_+$.
Pourquoi peut-on dire que ce sont les seules solutions ? En déduire le comportement asymptotique des solutions.

Planche 71

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, existence de $N(x, y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|\,x + ty\,|}{1 + t + t^2}$.
Montrer que N est une norme.
$X^2+X+1+(x+Xy)$ et $X^2+X+1-(x+Xy)$ pour que $(x, y) \in S$, sphère unité pour cette norme. Représenter S.

Planche 72

Continuité de $\phi(t) = \sum_{n\geqslant 1} n^\alpha \mathrm{e}^{-nt}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

ϕ est-elle dérivable ? Montrer que $\lim_{t\to 0} \phi(t) = \int_0^{+\infty} u^\alpha \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$.

Planche 73

I) Trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, telles que $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$, $f\left(\frac{x^2 + y^2}{z^2}\right)$ soit de laplacien nul.

II) Étudier la semi-intégrabilité de f définie pour $x > 0$ par
$f(x) = \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{k} p_i \cos(p_ix)$ où les p_i sont non nuls et de somme nulle.

Planche 74

À quelle condition $\phi(P)(X) = (x^2 - a^2)P'(X) - (2nX + \alpha)P(X)$ est-elle un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$? Quels en sont les éléments propres dans ce cas ? Est-il bijectif ?
Dans le cas où $n = 2$, déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique à l'aide de Maple et calculer ses éléments propres.

Planche 75

Calculer les polynômes caractéristiques de AB puis de BA sachant que $A \in \mathcal{M}_{32}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R})$ et $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.
Soient E et F deux espaces de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$. Montrer que si $E = F$, $u \circ v$ et $v \circ u$ ont même spectre.
Montrer que cette propriété n'est pas vraie dans le cas général et comparer alors ces deux spectres.

Planche 76

Existence de $\phi(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t$.
Calculer $\phi(x)$ d'abord à l'aide d'une équation différentielle vérifiée par ϕ, puis avec le développement en série entière de $\cos u$.

Planche 77

I) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + y = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$ ·

II) Résoudre l'équation en x réel $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha n + \beta)^2 x^n = 0$.

Planche 78

Avec Maple : justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(\operatorname{th} x)\mathrm{d}x$ et montrer que $I = -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ ·

Donner la valeur exacte et une valeur approchée de I.

