ENS – option MP

Planche 1 Lyon

On note E l'ensemble des suites réelles indexées à partir de $n=1$. Donner les valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme T qui, à une suite (u_n) de E, associe (v_n) définie par $v_n = \sum_{k=1}^{n} k u_k$.
Pour μ valeur propre de T, trouver $\mathrm{Ker}(T - \mu Id)$.
Déterminer les sous-espaces stables par T.

Planche 2 Ulm-Lyon, abordable dès la 1re année

Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$; montrer qu'il existe une suite (x_n) telle que $\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = 0$.

Planche 3 Ulm-Lyon-Cachan

Soient A continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, X de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, telles que $X'(t) = A(t)X(t) - X(t)A(t)$.
Montrer que $\forall k \geqslant 0$, $\mathrm{tr}\big(X(t)^k\big)$ ne dépend pas de t.
Montrer que les valeurs propres de $X(t)$ ne dépendent pas de t.
Montrer que $X(t)$ est semblable à $X(0)$.

Planche 4 Ulm-Lyon-Cachan

Soit $E = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\, y^2 = x^3\}$. $f \in \mathbb{R}^{E\times E}$ est dite polynômiale s'il existe une fonction polynômiale réelle $F(X,\, Y)$ telle que $f = F|_E$.
Soit $m \geqslant 0$; déterminer la dimension de l'espace des fonctions polynomiales $f \in \mathbb{R}^{E\times E}$ telles que $f(x,\, y) = O(|x|^m)$ quand $|x|+|y|$ tend vers l'infini.

Planche 5 Ulm-Lyon-Cachan

Soit h continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, à support compact et f définie par $f(0) = 0$ et si $x \neq 0$, $f(x) = h\big(x - \frac{1}{x}\big)$.
Montrer que f est une application continue à support compact.
Montrer que $\int_{\mathbb{R}} h = \int_{\mathbb{R}} h\big(x - \frac{1}{x}\big)\mathrm{d}x$.

Planche 6 Cachan, abordable dès la 1re année

Soit K un corps, E un espace vectoriel sur K, et A une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il est équivalent de dire :
A est transitive : si $x \neq 0$ et y sont dans E, $\exists a \in A$ tel que $y = a(x)$.
A est irréductible : $\{0\}$ et E sont les seuls sous-espaces de E qui soient stables par tous les a de A.
Si E est un espace euclidien, et A le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par le groupe orthogonal $O(E)$, montrer que A est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. Vérifie-t-elle les propriétés précédentes?

Planche 7 Ulm-Lyon-Cachan

I) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}^*$; montrer que :
$\exists (k_1, k_2) \in [0, n]^2$, $k_1 \neq k_2$, $|\, fr(k_1 x) - fr(k_2 x)\,| \leqslant \frac{1}{n}$ où fr représente la partie fractionnaire $(fr(y) = y - E(y))$.
Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$, $\{(p, q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*,\ \left| x - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{1}{q^2}\}$ est infini.
II) Montrer que, si u et v sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel E, $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}\, v \Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(E)$, $v = w \circ u$.

Planche 8 Lyon

I) On donne $P_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(X) = \frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}(X+i)$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
Montrer que, $\forall P \in \mathbb{Q}_p[X]$, $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ si et seulement s'il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{Z}^p$, tels que $P = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i P_i$.
II) Montrer que, si (u_n) est une suite de réels positifs tendant vers 0, $\{n \in \mathbb{N},\, \forall m \geqslant n,\, u_n \leqslant u_m\}$ est infini.

Planche 9 Lyon

Montrer que $O(M) = \{U \in GL_n(K),\, {}^tUMU = M\}$, $M \in \mathcal{M}_n(K)$, est un groupe. Sous quelle(s) condition(s) a-t-on $O(M) = GL_n(K)$?

Planche 10 Lyon

Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ \sum_{d|n} \varphi(d) = n$ où φ est l'indicatrice d'Euler.

Montrer que deux éléments non nuls et de même ordre d'un corps K commutatif, engendrent le même sous-groupe de K^*.
Établir qu'il existe au plus $\varphi(d)$ éléments de K^* d'ordre d.
En déduire que tout sous-groupe fini de K^* est cyclique.

Planche 11 Cachan

Soient f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, 1-périodique, $I = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ et I_n l'approximation de I par la méthode des rectangles avec un pas de $\frac{1}{n}\cdot$
Montrer que, $\forall p \in \mathbb{N},\ \exists C_p \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |\, I - I_n \,| \leqslant C_p n^{-p}$.

Planche 12 Ulm-Lyon-Cachan

Soit $q \in \mathbb{N}$, $p = 2q$, $u_1, \dots u_p$ des réels. Montrer que l'on peut choisir $C \in \mathbb{C}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = C\mathrm{e}^{-iqx} \prod_{k=1}^{p} (\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{iu_k}) \in \mathbb{R}$.

Soit f continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique et dont les coefficients de Fourier vérifient :
$a_0 = 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [1, n-1],\ a_k = b_k = 0$.
Montrer que f s'annule en changeant de signe en un nombre pair de points, supérieur ou égal à $2n$.

Planche 13 Informatique

On définit la racine $k^{ième}$ d'un langage par $L^{1/k} = \{u,\ u^k \in L\}$.
Pour $A = \{a, b\}$ et $L = (a + b) * b$, calculer $L^{1/2}$.
Même question pour $L = a * ab * bb$.
Soit désormais un langage L rationnel reconnu par $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, i, F)$ un automate fini déterministe complet.
On définit $B_q = (Q, A, \delta, i, \{q\})$ et $C_q = (Q, A, \delta, \{q\}, F)$.
Montrer que $u \in L^{1/2} \Leftrightarrow \exists q \in Q,\ u \in L(B_q),\ u \in L(C_q)$.
Montrer que $L^{1/2}$ est rationnel.
Montrer que si L est rationnel, alors $L^{1/k}$ l'est aussi.
On note $\sqrt{L} = \{u,\ \exists k \geqslant 1,\ u^k \in L\}$; s'agit-il d'un langage rationnel?

Planche 14

I) Montrer que, pour deux réels $a < b$ et 4 nombres réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, $\exists! P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(a) = \alpha$, $P(b) = \beta$, $P'(a) = \gamma$, $P'(b) = \delta$.
Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision de $[a, b]$; montrer que l'ensemble F des applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et dont la restriction à $]x_i, x_{i+1}[$ est polynômiale de degré au plus égal à 3 est un espace vectoriel de dimension finie que l'on calculera.
II) Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle qu'il existe un réel k vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \big(f(x) - f(y)|x - y\big) \leqslant k \,\|\, x - y \,\|^2.$$

Soient y_1 et y_2 deux solutions de $y' = -f(y)$.
Montrer que $\|\, y_1(t) - y_2(t) \,\| \leqslant \mathrm{e}^{-kt} \,\|\, y_1(0) - y_2(0) \,\|$.

Planche 15 Ulm

I) Montrer que, pour toute matrice M complexe et inversible, il existe deux matrices triangulaires supérieures T et T' et une matrice de permutation P_σ, définie par $p_{ij} = \delta_{i\sigma(j)}$ où σ est une permutation de $[1, n]$, telles que $M = TP_\sigma T'$.
II) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, unitaire et de degré $2n$; montrer qu'il existe $(Q, R) \in \mathbb{Q}[X]^2$, tels que $P = Q^2 + R$ avec $\deg(R) \leqslant n - 1$.

