Concours Commun Mines-Ponts – option MP

Planche 1

I) Étudier $\sum \frac{x^n}{n}$ et $g(x) = \sum \frac{(x-1)^n}{n} + \sum \frac{1}{n}\left(\frac{1-x}{x}\right)^n$.

II) Soient n réels $a_1 < \ldots < a_n$, ϕ_k la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\phi_k(P) = P(a_k)$ et $\psi(P) = \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$.

Trouver une CNS pour que $(\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi)$ soit libre.

III) Cours : rayon de courbure.

Planche 2

I) Rayon de convergence, limites et équivalents aux bornes de la série entière de terme général $a_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n \mathrm{d}t$.

II) Montrer que, si M est symétrique, réelle, positive et d'ordre n, $\det(I_n + M)^{1/n} \geqslant 1 + \det M^{1/n}$.

Montrer que si A est symétrique, réelle, définie positive et d'ordre n, si B est symétrique, réelle, positive et d'ordre n :
$\det(A+B)^{1/n} \geqslant \det A^{1/n} + \det B^{1/n}$.

Planche 3 II abordable dès la 1re année

I) Étudier la convergence simple de la série de fonctions définies par $u_n(x) = \frac{2x}{x^2+n^2}$. $S = \sum u_n$ est-elle continue ?

Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}$? Limite de $S(x)$ en $+\infty$.

II) Étudier la continuité et le caractère $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ de f définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{|x| + |y|}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

Planche 4 II abordable dès la 1re année

I) Domaine de définition, de dérivabilité et calcul de $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \mathrm{d}t$.

II) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe n entiers consécutifs non premiers (on pourra s'intéresser à $n! + k$).

Planche 5

I) Trouver une solution développable en série entière de :
$x^2y'' + xy' - y = \frac{x^2}{1-x^2}$ puis résoudre cette équation.

II) Soit A une matrice réelle symétrique positive d'ordre n, q_A la forme quadratique associée vérifiant $q_A(x) \leqslant \|x\|^2$.

Montrer que $\det A \in [0,1]$.

III) Montrer que la suite (f_n), définie par $f_n(x) = x^n f(x)$, avec f continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et nulle en 1, converge uniformément vers 0.

Planche 6

I) Déterminer les sous-espaces de $E = \mathbb{R}^3$ stables par $u \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$, de matrice A diagonalisable, et de polynôme caractéristique $(X+1)^2(X-2)$.

II) On considre la suite $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$, donner le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ puis la limite en $+\infty$ de $\mathrm{e}^{-x} f(x)$.

III) Donner le type de la quadrique d'équation $xy = z^2 + a^2$.

Planche 7 I abordable dès la 1re année

I) Soit (H) une hyperbole de centre O et d'asymptotes D et D', M un point de l'hyperbole. La tangente à (H) en M coupe D et D' en A et A' respectivement.

Montrer que l'aire du triangle OAA' est constante.

II) Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+t}}{x+t^2} \mathrm{d}t$.

Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et trouver des équivalents.

Planche 8 I et III abordables dès la 1re année

I) Déterminer la limite de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right)$.

II) Pour $\sigma \in S_n$, on définit $f_\sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ par son action sur la base canonique : $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Montrer que $\displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} f_\sigma$ est un projecteur orthogonal, et le caractériser

III) Établir que $(s_1, s_2) \in SO_3(\mathbb{R})^2$ qui commutent sont soit deux rotations de même axe, soit deux demi-tours d'axes perpendiculaires.

Planche 9

I) Soit (u_n) définie par $u_0 \in [0, \pi]$ et $u_{n+1} = \sin u_n$.
Montrer que $u_{n+1} \sim u_n$ et que $\forall\alpha \neq 0$, $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \sim -\dfrac{\alpha u_{n+2}^\alpha}{3!}$.
Préciser, suivant α, la nature de $\sum u_n^\alpha$.

II) Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 4x - 3y + 9z \\ y' = -3x + 4y - 9z \\ z' = -3x + 3y - 8z \end{cases}$

III) Calculer $I = \displaystyle\int_0^\pi \ln(1 + x\cos u)\mathrm{d}u$ pour $x \in]-1, 1[$.

Planche 10

I) Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ tels que $f \circ g = 0$ et $f + g \in GL(\mathbb{C}^n)$. Montrer que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = n$.

II) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^x\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^n}$.

Planche 11

I) Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, \pi], \mathbb{R}),\ f(0) = f'(0) = 0\}$.
Montrer que $N(f) = \displaystyle\sup_{x\in[0,\pi]} |\, f''(x) + f(x)\,|$ est une norme équivalente à $N'(f) = \displaystyle\sup_{x\in[0,\pi]} |\, f''(x)\,| + \sup_{x\in[0,\pi]} |\, f(x)\,|$ sur E.

II) Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r telle que $AM = MB$; montrer que $\deg(\chi_A \wedge \chi_B) \leqslant n$.

III) Existe-t-il f, 2π-périodique, continue par morceaux, telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$?

Planche 12 II abordable dès la 1re année

I) Soient (a_n) et (b_n) deux suites complexes ; on note $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k$; montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k$.
En déduire un critère de convergence pour certaines séries.
Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(k\theta)}{k^\alpha}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k\theta)}{k^\alpha}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{e}^{ik\theta}}{k^\alpha}$, pour $\theta \in]0, 2\pi[$.

II) Soit f trois fois dérivable au voisinage de a ;
déterminer $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\left(f(a+\frac{3h}{2}) - 3f(a+\frac{h}{2}) + 3f(a-\frac{h}{2}) - f(a-\frac{3h}{2})\right)$.
Généraliser pour f n fois dérivable au voisinage de a.

III) Pour $x \in]-1, 1[$, calculer $f(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi}\ln(1 + x\cos u)\mathrm{d}u$.

Planche 13 II abordable dès la 1re année

I) Donner les coefficients de Fourier de f, impaire, 2π-périodique, définie sur $]0, \pi[$ par $f(x) = 1$.
Trouver $f(0)$ et $f(\pi)$ tels que la convergence de la série de Fourier vers f soit simple. Y a-t-il convergence normale ?
Donner les variations de $S_n(f)$ et exprimer son premier maximum sous forme d'une intégrale. Montrer qu'il admet une limite finie.

II) Existence et calcul de $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1 + x\cos y}$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

Planche 14

I) Étudier la convergence simple de la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \dfrac{2x}{x^2+n^2}$, définie sur $\mathbb{R}$. $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est-elle continue ? Y-a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}$?
Déterminer la limite de S en $+\infty$.
II) On pose $f(0,\,0) = 0$ et $f(x,\,y) = \dfrac{\sin xy}{|x|+|y|}$ si $(x,\,y) \neq (0,\,0)$.
Cette fonction est-elle continue, de classe $\mathcal{C}^1$?

Planche 15 I abordable dès la 1re année

I) Montrer que l'ensemble D_n des matrices (a_{ij}) telles que $a_{ij} = 0$ pour $i-j$ impair est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable pour le produit matriciel. Quelle est sa dimension ? Est-ce un sous-anneau ?
II) Comparer les rayons de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n^2 z^n$.
III) f continue, positive et intégrable sur $[1, +\infty[$ est-elle toujours de limite nulle en $+\infty$?

Planche 16

I) Soit $A = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \dfrac{\pi}{2} & 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & -\dfrac{\pi}{2} & -\dfrac{\pi}{2} \end{pmatrix}$. Calculer $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} A^{2n}$.
II) Soit f décroissante et continue sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de limite nulle en l'infini. Montrer que $\int_0^{+\infty} \sin x f(x)\mathrm{d}x$ converge.
III) Nature de $\sum_{n\geqslant 0} \ln n \ln\bigl(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\bigr)$.

Planche 17

I) Montrer que pour $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, AB et BA ont même polynôme caractéristique.
II) Soit $\phi(x) = 2x(1-x)$; étudier la suite de terme général $\phi^n = \phi \circ \ldots \circ \phi$ pour $x \in]0, 1[$.
Montrer qu'il existe une suite de polynômes P_n à coefficients dans $\mathbb{Z}$ convergeant uniformément vers la limite f de (ϕ^n).

Planche 18 II abordable dès la 1re année

I) Déterminer l'ensemble de définition et un équivalent en 0^+ de la série de fonctions de terme général $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+n^2x^2)}\cdot$

II) Montrer que $A = \begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{pmatrix}$ est la matrice d'une rotation si et seulement si p, q, r sont racines de $X^3 - X^2 + \lambda = 0$.

Planche 19

I) Trouver un équivalent en l'infini de la plus petite solution x_n de l'équation $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x-\sqrt{k}} = 0$.
II) Soient A et B deux matrices réelles symétriques d'ordre n telles que $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $0 \leqslant^t XAX \leqslant^t XBX$; montrer que $\det A \leqslant \det B$.

Planche 20

I) Pour $\theta \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$, montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que $P_n(\mathrm{cotan}^2\,\theta) = \dfrac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta}\cdot$ Quelles sont les racines de P_n ?
La somme de ces racines ? Montrer que $\mathrm{cotan}^2\,\theta \leqslant \dfrac{1}{\theta^2} \leqslant 1 + \mathrm{cotan}^2\,\theta$.
Calculer $\sum_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{k^2}\cdot$
II) On suppose que f^2 est diagonalisable ; montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$.
III) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ annulant un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) = -1$.
Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

Planche 21

I) Étude de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{n}(1+nx^2)}$: convergence simple, convergence normale. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
Limite et équivalent en $+\infty$. Limite en 0^+.

II) Borne inférieure de $\{\int_0^{+\infty} (1-at-bt^2)^2 \mathrm{d}t,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Planche 22

I) Montrer que, si M est carrée d'ordre n, inversble et diagonalisable, $\forall p \in \mathbb{N}$, N définie par $N^p = M$, est diagonalisable.

II) Calculer $\int_0^1 \frac{1-x}{\ln x}\,\mathrm{d}x$.

III) Valeur (avec démonstration) de l'aire d'une ellipse.

Planche 23

I) Montrer qu'il existe ϕ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, telle que $\int_0^{\phi(x)} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{x^3}}{2x}$ et représenter ϕ.

II) Étudier la convergence de $\sum_{n \geqslant 1} \ln\bigl(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\bigr)$.

III) Si f est un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{C}^n$, trouver une CNS pour que $\exists x \in \mathbb{C}^n$, $\bigl(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\bigr)$ soit une base de $\mathbb{C}^n$.

Planche 24

I) Pour quelles valeurs de μ, f défini sur $\mathbb{R}_{2n}[X]$ par :
$f(P)(X) = X(X+1)P'(X) - \mu XP(X)$ est-il un endomorphisme ?
Donner ses éléments propres.

II) Nature, suivant $\alpha \in \mathbb{R}$, de $\sum \ln \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+\alpha}}$.

III) Montrer que la série de fonctions (g_n) définies par $g_0(x) = 1$ et $g_{n+1}(x) = \int_0^x g_n(t-t^2)\mathrm{d}t$ converge normalement sur $[0,1]$.

IV) Montrer que e^f, où f est définie par $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = a \wedge x$ avec a un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$, est une rotation.

Planche 25 I abordable dès la 1re année

I) Soit $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'endomorphismes d'un espace E de dimension finie $n \geqslant 1$, vérifiant $p_i \circ p_j = \delta_{ij} p_i$.

Montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} p_i$.

Soit $(q_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'endomorphismes vérifiant la même propriété ; montrer qu'il existe un automorphisme f tel que :
$\forall i \in [1,n]$, $q_i = f \circ p_i \circ f^{-1}$.

II) Prouver l'existence de $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$ pour $n \geqslant 1$.

Convergence, limite et monotonie de la suite (I_n).
Quelle(s) conjecture(s) peut-on faire sur $\sum I_n$ et $\sum (-1)^n I_n$?
Valeur de $\sum (-1)^n I_n$ et convergence de $\sum I_n$.

Planche 26

I) Ensemble de définition de $f(x) = \sum \frac{1}{\mathrm{ch}(nx)}$; est-elle $\mathcal{C}^1$?

En donner un équivalent en 0.

II) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & n \end{pmatrix}$; identifier les vecteurs X tels que $\det(X, MX, \ldots, M^{n-1}X) \neq 0$.

Planche 27

I) Montrer que f vérifiant $f(x) = 2f'(2x)$ est développable en série entière au voisinage de 0.

II) Montrer que A, carrée d'ordre n, de coefficient $a_{ij} = \omega^{(i-1)(j-1)}$ où ω est une racine $n^{ième}$ de l'unité, est inversible et calculer A^{-1}.

Planche 28

I) Limite quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\iint_{[0,1]^2} \frac{1}{1+x^n+y^n}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

II) Soient K un corps quelconque, n et p deux entiers naturels non nuls. Soient $B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $C \in \mathcal{M}_p(K)$.

Montrer que le rang de $\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ vaut $n + \operatorname{rg} C$.

Montrer que :

$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$, $n+\operatorname{rg}(I_p - BA) = p + \operatorname{rg}(I_n - AB)$.

Peut-on en déduire que :

$\forall k \in K$, $\dim \operatorname{Ker}(kI_n - AB) = \dim \operatorname{Ker}(kI_p - BA)$?

Donner une CNS sur $\operatorname{rg}(AB)$ et $\operatorname{rg}(BA)$ pour que AB soit diagonalisable. .

Planche 29

I) Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^k}\displaystyle\int_0^n \frac{\operatorname{Arc\,tan} x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

II) Dans E euclidien, trouver un exemple d'endomorphisme f non nul et non orthogonal, tel que $\forall x \in E$, $\| f(x) \| \leqslant \| x \|$.

Donner le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$.

En déduire : $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id})^2$; $E = \operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Im}(f-\mathrm{Id})$.

Montrer que, pour $x \in E$, $u_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^k(x)$ est une suite convergente et donner sa limite.

Planche 30 III abordable dès la 1re année

I) Donner une CNS sur $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour que $\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ A & I_n \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

II) Ensemble de définition de $F(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}\cdot$

Montrer que $G(t) = F(xt)\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour x assez proche de 0. Donner une expression de cette intégrale.

III) Longueur de la courbe $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$.

Planche 31 II abordable dès la 1re année

I) Rayon de convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}\cdot$

II) Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1 - \mathrm{e}^{2ik\pi/n})$.

