École Polytechnique – option MP

Planche 1 abordable dès la 1re année

Montrer que $E = \{x + y\sqrt{2},\ x \in \mathbb{N}^*,\ y \in \mathbb{Z},\ x^2 - 2y^2 = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
Montrer que $E = \{(x_0 + y_0\sqrt{2})^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ où $x_0 + y_0\sqrt{2}$ est la plus petite solution de E supérieure à 1.

Planche 2

Soit A un endomorphisme diagonalisable dont tous les sous-espaces propres sont de dimension 1 d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie n.
Montrer qu'il existe une base de E de la forme $(x, Ax, \dots, A^{n-1}x)$.
On suppose réciproquement que A est diagonalisable et qu'il existe une base de E de la forme $(x, Ax, \dots, A^{n-1}x)$; montrer que tous les sous-espaces propres de A sont de dimension 1.
Ce résultat subsiste-t-il si on ne suppose plus A diagonalisable ?

Planche 3

Montrer que si 3 matrices $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^3$ vérifient

$$AB - BA = C,\ AC = CA,\ BC = CB,$$

alors elles sont simultanément trigonalisables.

Planche 4

Soit X une partie finie, ne contenant pas 0, d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E. Construire $f \in E^*$ telle que $\displaystyle\prod_{x \in X} f(x) = 1$.

